

*В. Ю. Дудченко, асистент кафедри міжнародної економіки Вищого державного навчального закладу „Українська академія банківської справи Національного банку України”*

## **ПЕРЕДУМОВИ БАЗОВОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ДЕРЖАВНОГО БОРГУ**

У статті визначені основи будови базової моделі динаміки державного боргу та моделі динаміки питомого державного боргу за умов профіциту та дефіциту державного бюджету.

*Ключові слова:* державний борг, дефіцит державного бюджету, профіцит державного бюджету, моделювання, валовий внутрішній продукт, податки.

**Постановка проблеми.** Боргова політика, як складова фіскальної політики, на сучасному етапі характеризується відсутністю систематизованості, плановості, довгострокової спрямованості, а процес регулювання державного боргу – суперечливістю, неефективною дією розбіжних елементів його несформованого механізму. Тому, актуальним є формування основ фінансово-економічного механізму регулювання державного боргу, який має стати базою для створення концепції наукового управління державною заборгованістю, важливим інструментом реального впливу на раціоналізацію політики державних запозичень, запобігання борговій кризі. На сьогодні, за існуючих незначних критичних показниках боргового навантаження, необхідними є наукові розробки з оперативного регулювання державним боргом, що направлені на стабілізацію боргового процесу, утримання державного боргу на визначеному рівні, управління державним боргом за допомогою параметрів економічної моделі. В умовах спрямованості на досягнення взаємоузгодженості боргової, фіскальної та грошово-кредитної політики в аспекті їх взаємозв'язку із загальнодержавною політикою інтерес являють моделі динаміки державного боргу, що призначені для аналізу тенденцій зміни боргових зобов'язань у співвідношенні з макроекономічними показниками та змінними кредитно-грошової політики.

**Аналіз останніх публікацій.** Питанням розробки моделей динаміки державного боргу присвячено ряд робіт зарубіжних учених-економістів: А. П. Вавілов, Е. О. Ковалішин, А. Ю. Жигаєв, А. Д. Смірнов. Особливий інтерес

представляють дослідження зазначених науковців щодо з'ясування можливостей рівноваги траєкторій боргу, визначення умов їхньої стійкості та стабілізації, виділення критичних значень параметрів керування динамікою боргу. [1-3]

**Невирішені раніше частини проблеми.** Недослідженим на сьогодні є розгляд моделі динаміки державного боргу за умови профіциту бюджету.

**Мета статті.** Розробка базової моделі динаміки державного боргу з метою формування основ для подальшого аналізу тенденцій, прогнозу змін динаміки державного боргу за різних припущеннях зміни обраних параметрів (макроекономічних показників).

**Основний матеріал.** Розглянемо базову модель динаміки державного боргу, яка припускає використання боргу як єдиного джерела фінансування дефіциту бюджету. Початковими передумовами моделі є відсутність грошової емісії, сеньйоражу та інфляції, при цьому боргові зобов'язання не диференціюються за видами (для умовності можна припустити, що це державні облігації).

На основі попередніх зауважень та припущення, що приріст боргу здійснюється в обсязі, достатньому для покриття дефіциту бюджету і забезпечення прибутковості боргових зобов'язань, визначаємо рівняння динаміки державного боргу в безперервній постановці:

$$\dot{x} = rx + g_0, \quad (1)$$

де  $x > 0$  – змінна боргу (функція від часу),

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ - приріст боргу за «малий» інтервал часу,}$$

$r > 0$  – ставка прибутковості за борговими зобов'язаннями,

$g_0 > 0$  – дефіцит державного бюджету.

З математичної точки зору дана модель являє собою диференціальне рівняння, рішенням якого є  $x(t)$  – траєкторія боргу, яка залежить від екзогенних змінних моделі: ставки відсотка ( $r$ ) і дефіциту державного бюджету ( $g$ ). Тип рівняння та особливості його розв'язання залежать від завдання цих змінних, які в загальному випадку є функціями від часу.

Припустимо спочатку, що ставка відсотка і дефіцит бюджету є константами. Для таких умов проведемо аналіз розв'язання моделі (1) не тільки за умови

дефіциту державного бюджету, а й за умови профіциту державного бюджету. Аналіз заснований на базових положеннях теорії диференціальних рівнянь і методах економічної динаміки. [5,6]

Розв'язання рівняння (1) дає нам експонентну траєкторію державного боргу:

$$x(t) = \left( x_0 + \frac{g_0}{r} \right) e^{rt} - \frac{g_0}{r}, \quad (2)$$

де  $x_0$  – початкове значення боргу,

$g_0$  – початкове (і постійне) значення дефіциту (профіциту) бюджету.

Зазначимо, що у моделях динаміки має значення не стільки знаходження шуканої траєкторії, скільки рівноважне рішення та його стійкість. Наявність стійкої рівноваги свідчить про можливість стабілізації боргового процесу, утримання державного боргу на деякому рівні, керування ним за допомогою параметрів моделі.

Стійкість рівноваги залежить від знака коефіцієнта в показнику ступеня експоненти. Оскільки  $r > 0$ , то рівновага нестійка. Це означає, що з будь-якого початкового стану система віддаляється від рівноваги за висхідною або спадною траєкторією залежно від того, де стосовно рівноваги вона перебуває в початковий момент (див. Рис.1). Зазначимо, що темп приросту державного боргу  $\rho$  залежить від часу, державний борг починає рости з початковим темпом і із часом прагне до величини, що дорівнює ставці прибутковості  $r$ .

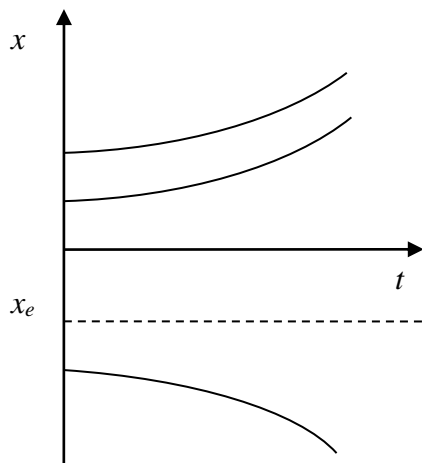
$$\rho(t) = \frac{\dot{x}}{x} = \frac{r(x_0 + \frac{g_0}{r})e^{rt}}{(x_0 + \frac{g_0}{r})e^{rt} - \frac{g_0}{r}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} r \quad (3)$$

$$\rho_0 = \frac{\dot{x}}{x} \Big|_{t=0} = \frac{r(x_0 + \frac{g_0}{r})}{x_0 + \frac{g_0}{r} - \frac{g_0}{r}} = r + \frac{g_0}{x_0} \quad (4)$$

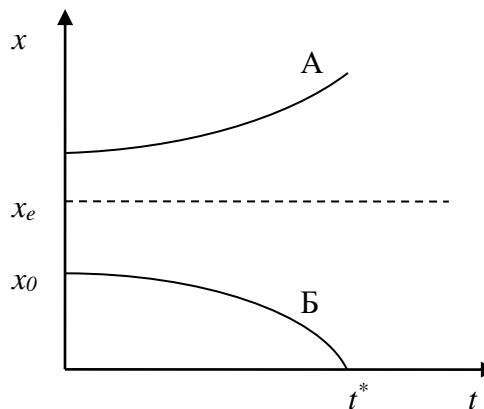
Рівноважне рішення  $x_e$ , тобто значення боргу, що не змінюється протягом часу, знаходиться з умови  $\dot{x} = 0$ . Таким чином, одержуємо:  $x_e = -g_0/r$ .

Розглянемо динаміку державного боргу за умов дефіциту і профіциту державного бюджету:

1. При дефіциті бюджету ( $g_0 > 0$ ) рівноважне розв'язання не має змістовного смислу, тому що  $x_e < 0$ . Однак, це не має істотного значення, тому що рівновага нестійка, тобто траєкторія державного боргу з будь-якого початкового стану з часом віддаляється від рівноваги (див. Рис.1а).



а) дефіцит бюджету



б) профіцит бюджету

Рис. 1. Траєкторії державного боргу і рівновага за різних початкових умов.

Зазначимо, що початкові величини державного боргу можуть бути лише позитивними, тому для нашої моделі мають значення тільки криві в першій чверті. (див. Рис.1а)

Отже, за умови дефіциту державного бюджету, при будь-якій початковій позитивній величині державного боргу він, відповідно до рівняння (2), монотонно зростає зі спадним темпом. Таким чином, стабілізація боргу в зазначеній ситуації неможлива без залучення інструментів управління витратами і доходами держави, засобів монетарної політики.

2. Зазначимо, що у початковому стані економіка може характеризуватися наявною величиною державного боргу і профіциту бюджету. При профіциті бюджету ( $g_0 < 0$ ). рівноважне значення боргу – це позитивна величина ( $x_e = -g_0/r > 0$ ). Отже, в початковий момент система може перебувати як вище, так і нижче рівноваги (див. Рис.1б):

а) якщо початкова величина боргу більше за рівноважну ( $x_0 > -\frac{g_0}{r} > 0$ ), то динаміка боргу аналогічна попередньому випадку, як це графічно представлено на Рис.1б (крива А). Початкову умову можна переписати у вигляді:  $r > -\frac{g_0}{x_0}$ , що задає початкове співвідношення між ставкою прибутковості та відношенням профіциту державного бюджету і державного боргу, за якого можлива така траєкторія боргу;

б) якщо початковий державний борг менше рівноважного ( $0 < x_0 < -\frac{g_0}{r}$ ), тобто  $r < -\frac{g_0}{x_0}$ , то зміна боргу відбувається по кривій Б (див. Рис.1б): початковий темп негативний, траєкторія має спадний характер і в деякий момент часу  $t^* > 0$  приймає нульове значення. Зазначимо, що це є принциповою відмінністю даної траєкторії від розглянутих вище.

Період часу, необхідний для зниження до нуля початкового боргу, визначається з умови  $x(t^*) = 0$ , тобто з рівняння:

$$\left(x_0 + \frac{g_0}{r}\right)e^{rt^*} - \frac{g_0}{r} = 0.$$

Розв'язуючи його, одержуємо:

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{g_0}{rx_0 + g_0}. \quad (5)$$

Оскільки за умовою  $g_0 < 0$  та  $x_0 < -\frac{g_0}{r}$ , то шуканий момент часу  $t^* > 0$  і має змістовну інтерпретацію.

Таким чином, з урахуванням зазначених вище припущень даної моделі, наявність в економіці профіциту бюджету не гарантує спадні траєкторії боргу. Якщо вважати початкові умови розвитку заданими, а такими в моделі є початкові значення дефіциту (профіциту) державного бюджету і державного боргу, то керуючою змінною виступає ставка прибутковості державних зобов'язань, за допомогою регулювання якої можна змінювати характеристики динаміки державного боргу.

Зменшення боргу з початкової величини до нуля при профіциті бюджету можливо при певних значеннях ставки прибутковості, обумовлених початковими

умовами, а саме:  $r < -\frac{g_0}{x_0}$ . Дана умова інтерпретується наступним чином: чим більше профіцит у співвідношенні з початковим боргом, тим більше широкі можливості має держава в підвищенні ставки за своїми зобов'язаннями.

Як було показано вище, у випадку дефіциту державного бюджету дана модель відтворює тільки зростаючі траєкторії боргу, і неможлива його стабілізація. Динаміка зобов'язань розвивається аналогічно грі Понци, яка описує фінансову піраміду, коли покриття поточних боргів забезпечується майбутніми боргами. Зазначимо, що така динаміка державного боргу може відбуватися на тлі значного економічного росту (модель не накладає на нього ніяких обмежень). Необхідною умовою є тільки те, щоб дефіцит (профіцит) бюджету залишався постійною величиною. Відобразимо це на простій моделі. Припустімо, що доходи бюджету формуються тільки за рахунок податкових надходжень, які в загальному випадку змінюються в часі  $T(t)$ , витрати бюджету є також функцію від часу і позначаються  $G(t)$ . Тоді, дефіцит (профіцит) бюджету дорівнює:

$$g(t) = G(t) - T(t).$$

Припустімо, що економічна політика передбачає постійне податкове навантаження:

$$T(t) = ay(t),$$

де  $Y(t)$  – ВВП,

$a$  – коефіцієнт загального податкового навантаження, який застосовується в економічних дослідженнях. [7-8]

У припущеннях моделі величина дефіциту (профіциту) приймається постійної  $g_0$ , отже:

$$G(t) = ay(t) + g_0.$$

Задаючи різні моделі росту ВВП, ми одержуємо пропорційне зростання податків, а значить доходів бюджету і відповідне збільшення державних витрат (з дефіцитом або профіцитом).

Припустімо, наприклад, ВВП збільшується з постійним темпом (наприклад, у моделі Харрода-Домара [9]), тобто має експонентну динаміку з темпом приросту

$\alpha > 0$ , який, за припущення нейтральності податків, не залежить від податкового навантаження:

$$Y(t) = Y_0 e^{\alpha t},$$

де  $Y_0$  – початкове значення ВВП.

Відповідно, траєкторії державних доходів і державних витрат мають вигляд:

$$T(t) = aY_0 e^{\alpha t}, \quad G(t) = aY_0 e^{\alpha t} + g_0.$$

Зазначимо, що в даній моделі за постійного податкового навантаження  $a$  показник державного навантаження  $q$ , який розраховується як відношення державних витрат до ВВП і використовується для кількісної характеристики державного втручання в економіку [10], змінюється в часі:

$$q(t) = \frac{G(t)}{Y(t)} = a + \frac{g_0}{Y_0 e^{\alpha t}} = a + \beta_0 e^{-\alpha t},$$

де  $\beta = g/Y$  – показник питомого дефіциту (профіциту) державного бюджету,

$\beta_0$  – початкове значення показника питомого дефіциту (профіциту) державного бюджету.

Отже,  $q(t) = a + \beta_0 e^{-\alpha t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} a$ , тобто державне навантаження із часом наближається до податкового навантаження: при дефіциті бюджету частка державних витрат у ВВП зменшується, прагнучи зверху до значення податкового навантаження, а при профіциті – збільшується, наближаючись знизу (мал.2).

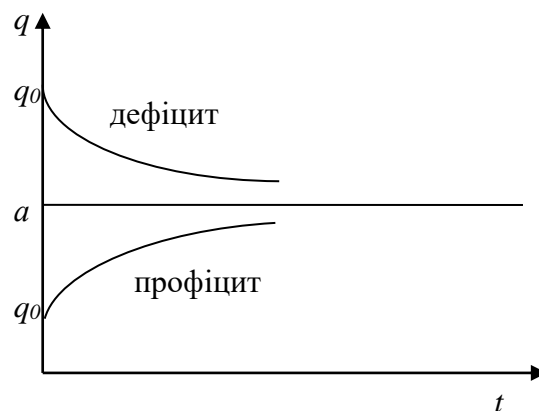


Рис. 2. Динаміка державного навантаження

Таким чином, на тлі зростання ВВП, доходів і витрат державного бюджету при дефіциті бюджету має місце зростаюча динаміка державного боргу, а при профіциті державного бюджету можливі і збільшення, і зменшення державного боргу залежно від співвідношення параметрів моделі. Аналогічні висновки можна зробити за умов падіння ВВП ( $\alpha < 0$ ).

В умовах формування дієвого механізму регулювання державного боргу, зокрема, його структури, актуалізується питання характеристики відносних показників державної заборгованості. Відносна величина державного боргу у зіставленні із загальними макроекономічними показниками є важливою і за умов аналізу динаміки державного боргу. Основним відносним показником державного боргу є питома вага державного боргу у ВВП:

$$z(t) = x(t)/Y(t).$$

На практиці використовуються емпіричні оцінки верхньої границі цього показника, наприклад, для економіки, що розвивається, за деякими оцінками вона становить 50-70%. [11]

З метою теоретичного обґрунтування тенденцій цього показника проведемо аналіз його динаміки на основі розглянутої вище моделі, з використанням результатів, представлених в роботі Смірнова А.Д. [12, с. 116 - 188]

За рахунок диференціації вираження питомого боргу, одержуємо:

$$\dot{z} = \frac{\dot{x}Y - x\dot{Y}}{Y^2} = \frac{\dot{x}}{Y} - z\frac{\dot{Y}}{Y},$$

звідки, використовуючи рівняння динаміки боргу (1) і позначивши темп приросту ВВП через  $\alpha$ , можемо вивести рівняння динаміки питомого боргу:

$$\dot{z} - (r - \alpha)z = \frac{g}{Y} \tag{6}$$

У правій частині рівняння (6) знаходиться важливий відносний показник – питомий дефіцит (профіцит), тобто частка останнього у ВВП, яка в загальному випадку змінюється в часі, тому що і чисельник, і знаменник є в загальному випадку функціями часу.

Припустімо, що питомий дефіцит – величина постійна, позначимо її  $d$ . Зазначимо, що це може мати місце і при економічному зростанні, і при спаді, але



повинна виконуватися умова односпрямованості та пропорційності динаміки ВВП і дефіциту державного бюджету.

Припустімо також, що ставка прибутковості за державними зобов'язаннями і темп приросту ВВП постійні. Позначимо різницю між ними через  $\beta = r - \alpha$ .

Рівноважне значення питомого боргу  $z_e$  залежить від параметрів  $d, \beta$ :  $z_e = -d/\beta$ .

Рішення рівняння (6) при зазначених припущеннях має вигляд:

$$z(t) = \left( z_0 + \frac{d}{\beta} \right) e^{\beta t} - \frac{d}{\beta}, \quad (7)$$

де  $z_0$  – початкове значення питомого боргу.

Стійкість рівноваги залежить від параметра  $\beta$ : рівновага нестійка, якщо  $\beta > 0$ , тобто  $r > \alpha$ , і стійка, якщо  $\beta < 0$ , тобто  $r < \alpha$ . Таке співвідношення параметрів можна назвати умовою стабілізації питомого боргу.

Розглянемо властивості траєкторії питомого боргу залежно від виконання зазначеної умови:

1.  $r < \alpha$ . У цьому випадку з будь-якого початкового стану система прагне до рівноваги  $z_e = -d/\beta$ . При дефіциті бюджету ( $z_e > 0$ ) існує можливість стабілізації питомого боргу при будь-якому його початковому значенні (див. Рис. 3а).

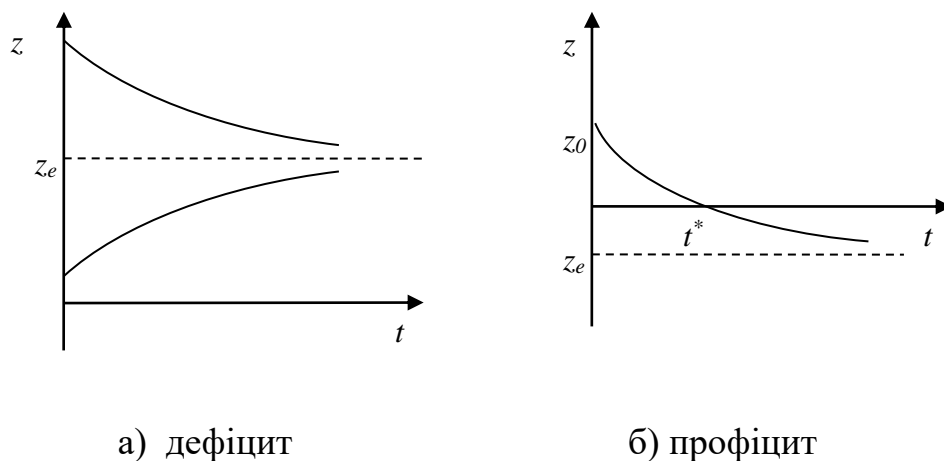


Рис.3. Стійка рівновага в моделі питомого боргу

А при профіциті рівноважне значення питомого боргу негативне, і це є суттєво, тому що рівновага стійка. Як видно з Рис. 3б, початкове значення змінної

зменшується й існує момент часу  $t^*$ , коли борг приймає нульове значення. Цей момент перебуває з умови  $z(t^*) = 0$ . Звідси знаходимо:

$$t^* = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\frac{d}{\beta}}{z_0 + \frac{d}{\beta}}. \quad (8)$$

Таким чином, якщо ставка прибутковості менше темпу приросту ВВП, то при дефіциті бюджету відбувається стабілізація питомого державного боргу, а при профіциті - борг зменшується за певний період до нуля.

2.  $r > \alpha$ , тобто  $\beta > 0$ . У цьому випадку при дефіциті бюджету рівноважне значення питомого боргу не має змістовної інтерпретації, тому що це негативна величина, однак це несуттєво в силу нестійкості рівноваги. Траєкторії  $z(t)$  аналогічні кривим абсолютної величини боргу (Рис. 1а), але оскільки питома вага боргу у ВВП не повинна перевищувати 1, то існує обмеження для росту питомого боргу (Рис. 4а).

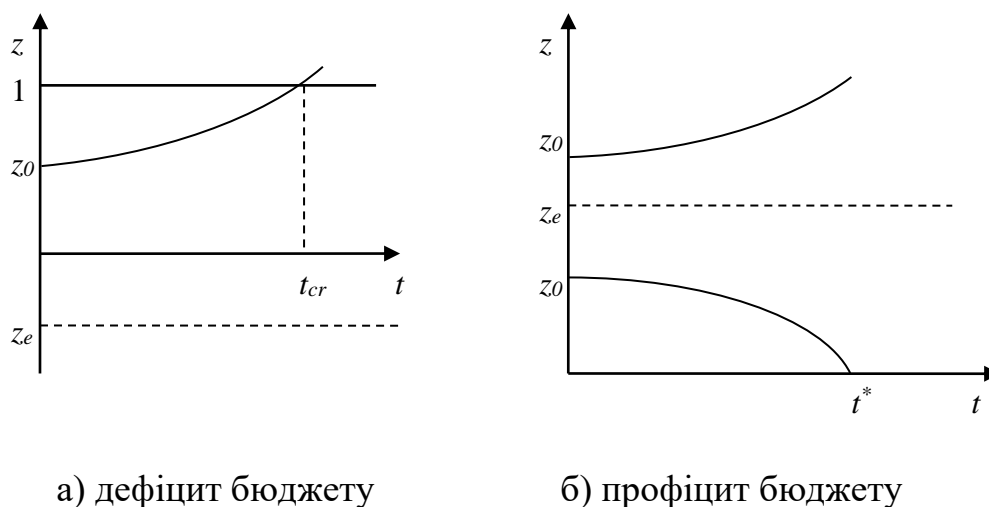


Рис.4. Нестійка рівновага в моделі питомого боргу.

Експонентне зростання цієї змінної теоретично може відбуватися тільки до критичного моменту  $t_{cr}$ , коли борг буде дорівнювати ВВП, і який знаходиться з умови:

$$z(t_{cr}) = \left( z_0 + \frac{d}{\beta} \right) e^{\beta t_{cr}} - \frac{d}{\beta} = 1,$$

звідки

$$t_{cr} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1 + \frac{d}{\beta}}{z_0 + \frac{d}{\beta}}. \quad (9)$$

Вираження під логарифмом більше 1, тому що  $z_0 < 1$ , отже,  $t_{cr} > 0$ , тобто має змістовну інтерпретацію. Незважаючи на те, що ситуація, коли державний борг досягає величини ВВП нереалістична, знаходження критичного інтервалу дозволяє оцінити потенційно можливі тимчасові межі «розкручування» боргу, принципові межі припустимого часу в політиці запозичення. Крім того, можна задати будь-яку іншу граничну величину і знайти аналогічним образом припустимий інтервал часу  $t_{cr}$ .

Якщо за умови  $r > \alpha$  має місце профіцит, то нестійка рівновага перебуває в позитивній області, і можливі, аналогічно базової моделі динаміки боргу, дві ситуації: зростання і падіння  $z(t)$  (див. Рис. 4б). Якщо в початковий момент система перебувала вище рівноваги, то питомий державний борг буде зростати до 1 (див. Рис. 4а). Цей момент визначається з формули (9). Якщо початкове значення питомого боргу менше рівноважного, то він буде зменшуватися і у момент  $t^*$  буде дорівнювати нулю. Цей момент знаходиться з умови (8).

Результати аналізу моделі динаміки питомого боргу (6) узагальнені в Табл. 1.

Таблиця 1

### Характеристика динаміки питомого боргу

Співвідношення параметрів	Характеристики	Дефіцит	Профіцит
$r > \alpha$	тип рівноваги	нестійкий	
	знак рівноваги	$< 0$	$> 0$
	тип траєкторії	висхідна	$z_0 > z_e$ – висхідна $z_0 < z_e$ – спадна
$r < \alpha$	тип рівноваги	стійкий	
	знак рівноваги	$> 0$	$< 0$
	тип траєкторії	$z_0 > z_e$ – спадна $z_0 < z_e$ – висхідна	спадна

За даними табл. 1 зменшення початкового питомого боргу можливо не тільки при дотриманні умови стабілізації, але й за умови її порушення, але при відповідному початковому стані  $z_0 < z_e$ . Оскільки рівноважне значення залежить

від  $z_e = -d/\beta$ , а  $\beta = r - \alpha$ , то з урахуванням формул для питомого боргу й питомого профіциту початкову умову  $z_0 < z_e$  можна записати:  $\frac{x_0}{Y_0} < -\frac{g_0}{\beta Y_0}$ , і далі

$$r < \alpha - \frac{g_0}{x_0}.$$

Остання нерівність дозволяє підбудовувати рівноважне значення під початковий стан системи за допомогою параметра  $r$  з метою зміни характеру динаміки питомого державного боргу. Таким чином, при профіциті бюджету припустимі границі для ставки прибутковості розширюються: зменшення боргу відбувається не тільки при  $r < \alpha$ , але й при  $\alpha < r < \alpha - g_0/x_0$ .

### **Висновки.**

1. Головною відмінністю моделі питомого державного боргу від базової моделі є те, що її розв'язання є стійким при певному співвідношенні параметрів, тобто є можливість стабілізації динаміки питомого державного боргу. Якщо стосовно абсолютної величини боргу цього досягти не можна, то відносну його величину можна втримати на деякому рівні, регулюючи параметри моделі – темп приросту ВВП і ставку прибутковості державних зобов'язань.
2. Суттєво, що для реалізації такої можливості значення мають не власне значення цих параметрів, а їхнє співвідношення, що потенційно дозволяє підбудовувати ставку прибутковості, як більш керований параметр, під реальний (сформований) темп росту ВВП, менш піддається регулюванню й невіддасний прямому управлінню.
3. Початковий рівень питомого боргу має істотне значення тільки при економічному зростанні з бюджетним профіцитом: при невиконанні умови стабілізації завищене, в порівнянні з рівноважним, значення питомого боргу в початковий момент веде до його зростаючої динаміки. В інших випадках профіцит супроводжується поступовим зменшенням початкового боргу до нуля протягом деякого періоду, тривалість якого залежить від початкового питомого боргу, співвідношення профіциту державного бюджету і ВВП, співвідношення ставки прибутковості за державними борговими зобов'язаннями і темпу приросту економіки.

4. Таким чином, при профіциті бюджету сприятливий з точки зору зменшення державного боргу розвиток можливий не тільки при виконанні умови стабілізації, але й при її порушенні. На відміну від цього при дефіциті бюджету спадні траєкторії державного боргу можливі тільки при виконанні умови стабілізації.

#### **Список літератури.**

1. А.П. Вавилов, Е.А. Ковалишин. Доверие инвесторов и оптимальное управление государственным долгом// Экономическая наука современной России. – 2002. - №1. – с. 10 – 27.
2. Жигаев А.Ю. Управление и прогнозирование государственного долга в среднесрочной перспективе (сценарный подход)// Экономический журнал ВШЭ. – 1999. - №3. – с. 395 – 422.
3. Смирнов А.Д. Модель динамики государственного долга России// Экономический журнал ВШЭ. – 2005. - №2. – с.136.
4. Смирнов А.Д. Лекции по моделям макроэкономики// Экономический журнал ВШЭ. – 1999. - №3. – с.431 - 433.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1982. – 331с.
6. Прикладная экономика/ Под ред. проф. А.И. Черняка. – Донецкий национальный университет, 2004. – 382с.
7. Меркулова Т.В. Налоговая нагрузка: понятие и показатели//Економіка: проблеми теорії та практики. Випуск 194, том 1. – 2004. – с. 242 – 248.
8. Девликамова Г.В. Налоговый анализ как составная часть анализа хозяйственной деятельности предприятия//Финансы. – 2001. - №8. – с. 40 – 43.
9. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: МГУ, изд-во «ДИС», 1998. – 368с.
10. Илларионов А., Пивоварова Н. Размеры государства и экономический рост//Вопросы экономики. – 2002. - №9. – с. 18-45.
11. Смирнов А.Д. Лекции по моделям макроэкономики// Экономический журнал ВШЭ. – 1999. - №1.

12. Смирнов А.Д. Монетаризация государственного долга// Экономический журнал ВШЭ. – 2005. - №2. – с. 135 – 172.

Дудченко В.Ю. Передумови базової моделі динаміки державного боргу / В.Ю.

Дудченко // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: зб.

наук. праць / УАБС НБУ. - Суми, 2007. - Вип. 22. - С. 345-353.