Малютин К.Г. Белые пятна в математической картине мира / К. Г. Малютин // Сучасна картина світу: інтеграція наукового та позанаукового знання : збірник наукових праць / Державний вищий навчальний заклад "Українська академія банківської справи Національного банку України". - Суми, 2004. - Вип. 3. - С. 55-60.

БЕЛЫЕ ПЯТНА В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТИНЕ МИРА

К.Г. Малютин, доктор физико-математических наук, профессор, Украинская академия банковского дела

Рассматриваются проблемы аксиоматического подхода к основаниям математики.

В современной математике введение высоких стандартов строгости стало возможным благодаря аксиоматическому подходу, впервые использованному Евклидом. Одна из особенностей аксиоматического подхода – необходимость использования неопределяемых понятий. Математика строится независимо от остальных областей человеческого знания, поэтому одно математическое понятие приходится определять через другие, связанные с ним. Вследствие этого исходные понятия должны быть неопределяемыми. Но как пользоваться неопределяемыми понятиями? Что о них можно утверждать? Ответ на этот вопрос и даёт аксиоматика. Аксиомы содержат утверждения о неопределяемых (и определяемых) понятиях. Так, если точка и прямая неопределяемы, то аксиома о том, что две точки задают прямую и притом только одну, и аксиома о том, что три точки задают плоскость и притом только одну, служат теми утверждениями, которые мы можем использовать при выводе новых утверждений о точке, прямой и плоскости. Ещё Аристотель в “Органоне”, Б. Паскаль в “Трактате о геометрическом духе” и Г. Лейбниц в “Монадологии” подчеркивали необходимость использования неопределяемых понятий. В начале XIX в. Жозеф Диас Жергонн (1771-1859) сформулировал следующее положение: аксиомы говорят нам все, что мы можем утверждать о неопределяемых понятиях. Но всерьез эту идею математики восприняли лишь после того, как в 1882 г. Мориц Паш вновь подтвердил необходимость употребелния неопределяемых понятий.

Паш великолепно понимал современную аксиоматику. Именно ему принадлежит замечание (важность которого в конце XIX в. не была по достоинству оценена) о том, что во всех случаях необходима демонстрация *непротиворечивости* любой рассматриваемой системы аксиом, т.е. доказательство того, что выбранная система аксиом не порождает противоречащих друг другу теорем [1]. Проблема непротиворечивости выявлена в связи с возникновением неевклидовых геометрий и была для них удовлетворительно разрешена. Что же касается таких старых фундаментальных разделов математики, как арифметика или евклидова геометрия, то всякие сомнения в их непротиворечивости казались чисто академическими. Тем не менее, Паш считал необходимым установить непротиворечивость принадлежащим этим разделам систем аксиом.

Паш выявил еще одну особенность аксиоматического метода. В любой области математики желательно, чтобы аксиомы были *независимы*, т.е. чтобы любую из принятых аксиом нельзя было вывести из остальных, так как аксиома, выведенная из других, является уже не аксиомой а теоремой. Метод доказательства независимости той или иной системы аксиомы состоит в указании способа интерпретации или построения модели, в которой все аксиомы, кроме проверяемой на независимость, выполняются, а проверяемая аксиома не выполняется. Так, независимость аксиомы Евклида о параллельных линиях была доказана на модели гиперболической евклидовой геометрии, реализуемой на поверхности в евклидовом пространстве.

В начале XX в. аксиоматический метод считался идеалом математической строгости. Математики могли наконец во всеуслышание заявить, что исполнили свой долг по отношению к стандарту, установленному древними греками, и отметить, что, за исключением незначительных поправок, здание, построенное ими на эмпирической или интуитивной базе, теперь было в основном подкреплено логикой. Между тем тучи уже сгущались. На II Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1900 г. в Париже, на пленарном заседании выступил Давид Гильберт со своим знаменитым докладом, где перечислил 23 проблемы [2], решение которых, по его мнению, девятнадцатое столетие завещало двадцатому. Первая из названных проблем состояла в том, чтобы доказать, что трансфинитное число, выражающее мощность множества всех вещественных чисел, является ближайшим к трансфинитному числу, выражающему мощность множества всех целых чисел. Содержание второй проблемы Гильберта составляло требование дать доказательство непротиворечивости арифметики.

Вскоре началась буря, обрушившаяся на здание математики. По меткому замечанию Фреге, “едва здание было достроено, как фундамент рухнул”.

Новой теорией, которая привела к противоречиям и открыла многим глаза на противоречия, существовавшие в более старых областях математики, была *теория бесконечных множеств*. Георг Кантор (1845-1918) ввел понятие мощности бесконечных множеств. Он определил бесконечное множество как такое, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие со своим собственным (т.е. отличным от всего множества) подмножеством [3].

Кантор выяснил также, в каком смысле следует понимать, что одно бесконечное множество **больше** другого: если множество A можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с частью или собственным подмножеством множества B, а множество B невозможно поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством A или собственным подмножеством множества A, то множество B по определению больше множества A. Это определение, по существу, транспонирует на бесконечные множества то, что является непосредственно очевидным в случае конечных множеств. Если у нас имеется 8 шаров и 10 книг, то между шарами и частью книг можно установить взаимно-однозначное соответствие, но невозможно установить взаимно-однозначное соответствие между всеми книгами и всеми шарами или частью шаров.

Подобно тому, как количество элементов в конечных множествах мы обозначаем числами 5,7,10 и т.д., Кантор предложил ввести специальные символы для обозначения количества элементов в бесконечных множествах. Множество целых (или натуральных) чисел и множество, которое можно поставить во взаимно-однозначное соответствие с этим множеством (счетное множество) Кантор обозначил символом $\aleph_0$ (алеф-нуль). Кантор доказал, что множество всех вещественных чисел несчетно, их количество он обозначил новым символом – с.

Кантору удалось доказать, что для любого заданного множества всегда найдется множество больше исходного. Так, *множество всех подмножеств данного множества* всегда больше первого множества. Кантор обозначил количество подмножеств (бесконечного!) множества, содержащего элементов, через ; его результат гласил: > . Кантор сумел показать, что $2^{\aleph_0}$ = с. В 1895 г. у Кантора возникла идея рассмотреть *множество* ***всех*** *множеств*. Мощность этого “сверхмножества” должна была бы быть самой большой из возможных. Но еще ранее Кантор доказал, что множество всех подмножеств любого заданного множества должно обладать трансфинитным числом, которое превосходит трансфинитное число, отвечающее исходному множеству. Следовательно, заключил Кантор, должно существовать трансфинитное число, превосходящее наибольшее из трансфинитных чисел. Придя к столь нелепому выводу, Кантор сначала растерялся; однако затем он решил, что все множества можно разбить на *противоречивые* и *непротиворечивые*.

Когда Бертран Рассел (1872-1970) впервые узнал о выводе, к которому пришел Кантор по поводу множества всех множеств, он усомнился в правильности рассуждений Кантора. В 1901 г. Рассел писал в своей работе, что Кантор, должно быть, “совершил очень тонкую логическую ошибку, которую я [Рассел] надеюсь объяснить в одной из следующих работ”. Рассел принялся размышлять над этой проблемой – и лишь пополнил арсенал проблем своим собственным “парадоксом”. Через шестнадцать лет он извинился перед Кантором.

Первые математические противоречия, чреватые серьезными неприятностями, обнаружил Б. Рассел и сообщил о них Готлобу Фреге в 1902 году. Фреге в то время занимался разработкой нового подхода к обоснованию числовой системы, основывающегося на теории множеств. Парадокс Рассела относится к классам. Класс книг не является книгой и поэтому не содержит самого себя, но класс идей есть идея, и содержит сам себя. Следовательно, одни классы содержат самих себя, другие не содержат. Пусть N – класс классов, не содержащих самих себя. К какой разновидности классов принадлежит N? Если N принадлежит N, то, по определению, N не должен принадлежать N. Если же N не принадлежит N, то по определению N должен принадлежать N. Обнаруженное противоречие ставит под удар само понятие множества, или класса объектов, широко используемое во всей математике. По словам Гильберта, парадокс Рассела был воспринят математическим миром как катастрофа.

Другой парадокс, дающий представление о тех трудностях, с которыми столкнулись математики, был сформулирован в 1908 г. математиками Куртом Греллингом и Леонардом Нельсоном. Вскоре эти парадоксы были разрешены.

Тем не менее две проблемы продолжали беспокоить математиков: проблема доказательства *непротиворечивости математики*, поставленная Гильбертом, и вторая проблема, связанная с *полнотой* аксиоматических систем.

На самом элементарном уровне проблема полноты сводится к вопросу о том, можно ли на основании аксиом Евклида доказать (или опровергнуть), например, разумную гипотезу о том, что в евклидовой геометрии высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке. На более высоком уровне (в области кардинальных трансфинитных чисел) проблему полноты иллюстрирует гипотеза континуума, содержащая в себе предполоожение существовании множеств, имеющих мощность между c и $2^{\aleph}$. Полнота аксиоматической системы требует, чтобы с помощью аксиом теории множеств гипотезу континуума можно было или доказать, или опровергнуть. Полнота аксиоматики арифметики (теории чисел) требует, чтобы с помощью аксиом теории чисел можно было либо доказать, либо опровергнуть гипотезу Гольдбаха, согласно которой каждое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел. Проблема полноты затрагивает также множество других утверждений, которые на протяжении десятилетий и даже веков математикам не удавалось ни доказать, ни опровергнуть.

В 1931 г. Курт Гёдель опубликовал работу, поистине открывшую ящик Пандоры. В этой работе, называвшейся “О формально неразрешимых утверждениях [оснований математики] и родственных систем” содержались два поразительных результата. Наибольшее смятение у математиков вызвал один из них – утверждающий, что непротиворечивость любой достаточно мощной математической системы, охватывающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы.

Приведенный результат Геделя является следствием из установленного им другого, не менее поразительного результата, который известен как *теорема Геделя о неполноте*. Она утверждает, что если формальная теория T, включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна. Иначе говоря, существует имеющее смысл утверждение арифметики целых чисел S, которое в рамках данной теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Но либо утверждение S, либо утверждение “не S” истинно. Следовательно, в арифметике существует истинное утверждение, которое недоказуемо и неразрешимо.

После выхода в свет работы Коэна (1963) было обнаружено немало новых утверждений, неразрешимых в классической системе аксиом. Из работ Коэна следует, что существует не одна, а много математик, каждая из которых имеет право на существование.

В 1901 г. Бертран Рассел сказал: “Один из величайших триумфов математики состоит в открытии того, что представляет собой математика в действительности”. Ныне эти слова поражают нас своей наивностью. Математика лишилась своей истинности. Ныне она уже не является независимой, абсолютно надежной и прочно обоснованной областью знаний. Тем не менее, математика была и остаётся самым надежным способом связи с миром чувственного восприятия, а имеющиеся в ней противоречия показывают, что производимые время от времени пересмотры оснований математики просто необходимы, как и в другой науке.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963.
2. Lakatos I., ed. Problems in the Philosophy of Mathematics, vol. I. – New York: North-Holland, 1972.
3. Хаусдорф Ф. Теория множеств. – М.-Л.: Гостехиздат, 1937.
4. Клайн М. Математика. Утрата неопределенности. – М.: “Мир”, 1984.

Summary

In this paper, it is considered the problems of axiomatic approach to the basis of mathematics.