УДК 515.16
КП
№ госрегистрации 0115U000691
Инв. №

Министерство образования и науки Украины
Сумский государственный университет
(СумГУ)

40007, г. Сумы, ул. Римского-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе,
д.ф.-м.н., профессор

____________ А.Н. Черноус
2016.12.26

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ПОДМНОГОВИДОВ И АНАЛИЗ НА МНОГОВИДАХ

(промежуточный)

Начальник НИЧ
к.ф.-м.н. Д.И. Курбатов
2016.12.26

Руководитель НИР
к.ф.-м.н. И.И. Козлова
2016.12.22

2016

Рукопись закончена 22 декабря 2016 г.

Результаты работы рассмотрены научным советом СумГУ
протокол №4 от 23 декабря 2016 г.

СПИСОК АВТОРОВ

Руководитель НИР ведущий научный сотрудник к.ф.-м.н., ассистент	2016.12.24	И.И. Козлова (реферат, раздел 3)
ведущий научный сотрудник д.ф.-м.н., профессор	2016.12.24	К.Г. Малютин (реферат, разделы 3, 4)
ведущий научный сотрудник д.э.н.	2016.12.24	А.К. Малютин (раздел 4)
старший научный сотрудник д.ф.-м.н., с.н.с.	2016.12.24	Д.В. Болотов (раздел 1)
научный сотрудник, к.ф.-м.н. ст. преподаватель	2016.12.24	К.Д. Драч (раздел 2)

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР. 40 с., 15 источников.

Объект исследования — выпуклые подмногообразия; римановы многообразия; субгармонические и целые функции.

Цель работы — изучение оптимальных свойств действительных полных кэлеровых выпуклых подмногообразий и римановых многообразий, а также исследование свойств субгармонических функций.

Метод исследования — теоремы в пространствах постоянной кривизны, теоремы Александрова, Погорелова об изометрическом погружении Александровских пространств в пространства постоянной кривизны, топологические свойства слоев, метод рядов Фурье.

Актуальность темы исследования обусловлена недостаточной исследованностью действительных полных кэлеровых выпуклых подмногообразий в евклидовом пространстве, макроскопических размерностей римановых многообразий, классов субгармонических функций в полуплоскости с ограничениями на рост.

Основные полученные результаты. Найдено топологическое строение многомерного компактного многообразия с плоским слойки коразмерности один. Доказано, что если нормальные кривизны гиперповерхности отделены от единицы, то гиперповерхность в геометрии Гильберта является компактной. Доказано, что некомпактные финслеровы подмноговиды неотрицательной кривизны Риччи в пространствах Минковского являются цилиндрами, если подмноговиду принадлежит прямая объемного пространства Минковского. Найдены все возможные случаи строения многомерного компактного многообразия с плоским слоем ковимирности один. Доказано, что для регулярного вложения двумерной сферы в евклидово четырехмерное пространство, существует такая точка, что любая двумерная плоскость, проходящая через эту точку, пересекает сферу. Найдены критерии разрешимости интерполяционных задач в классах мероморфных функций в полуплоскости. Описаны линейные функционалы в классах целых функций конечного порядка.

ПОДМНОГОВИД, КЭЛЕРОВО ВЫПУКЛОЕ ПОДМНОГООБРАЗИЕ, НОРМАЛЬНАЯ КРИВИЗНА, КОРАЗМЕРНОСТЬ, МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ РАЗМЕРНОСТЬ, РИМАНОВО МНОГООБРАЗИЕ, ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО, НУЛЕВОЙ ПОРЯДОК.

Содержание

Перечень условных обозначений

$\mathbb{C}$ — открытая комплексная плоскость;
$\mathbb{C}_+$ — верхняя комплексная полуплоскость: $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$;
$\mathbb{R}$ — вещественная ось;
$\gamma(r)$ — функция роста;
$\rho(r)$ — уточнённый порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$;
$[\cdot]$ — целая часть числа;
$\delta S(\gamma(r))$ — класс дельта-субгармонических функций конечного γ-типа;
$S(\gamma(r))$ — класс субгармонических функций конечного γ-типа;
$S\delta(\gamma(r))$ — класс дельта-субгармонических функций в полуплоскости конечного γ-типа;
$JS(\gamma(r))$ — класс субгармонических функций в полуплоскости конечного γ-типа;
$C(a,r)$ — открытый круг с центром в точке a радиуса r;
$B(a,r)$ — замкнутый круг с центром в точке a радиуса r;
$l^*(G)$ — верхняя линейная плотность множества G;
$c_k(r;v)$ — коэффициенты Фурье функции v;
μ_v — мера Рисса функции v;

$$S(r;k,\mu) = \frac{1}{k}\iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k};$$

$$S(r_1,r_2;k,\mu) = S(r_2;k,\mu) - S(r_1;k,\mu), \quad r_1 \le r_2;$$

$$S'(r;k,\mu) = \frac{1}{k}\iint\limits_{B(0,r)} \left(\frac{\bar{\zeta}}{r}\right)^k d\mu(\zeta);$$

$T(r;v) = N(r,v) + m(r,v)$ — характеристика Неванлинны функции v;

$$N(r,v) = \int\limits_0^r \frac{\mu(t)}{t}dt;$$

$m(r,v) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v_+(re^{i\theta}\, d\theta;$
λ_v — полная мера функции v;
ν_v — граничая мера функции v;
$D_+(R_1,R_2) = \overline{C_+(0,R_2)\backslash C_+(0,R_1)}$, $R_1 < R_2$, — полукольцо.

1 Макроскопическая геометрия римановых многообразий

В этом разделе мы представляем результаты, которые описывают топологию римановых многообразий, наделенных структурой слоения коразмерности один с заданными ограничениями на внутреннюю или внешнюю геометрию слоев, рассматриваемых как римановы подмногообразия. В частности, описывается топология замкнутых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны.

Мы доказываем следующий результат, который является топологическим обобщением слоеной теоремы Картана - Адамара, доказанной Г. Штаком (1991).

Теорема 1 *Пусть* $(M, \mathcal{F})$ - C^2 *- универсально равномерно стягиваемое слоение коразмерности* 1 *на полном римановом* n *- мерном многообразии* M. *Тогда универсальное накрытие многообразия* M *является стягиваемым.*

Напомним, что метрическое пространство называется *равномерно стягиваемым* если существует неубывающая функция $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что всякий шар радиуса r стягивается внутри шара радиуса $Q(r)$. Функция Q называется *функцией равномерности.*

Основной задачей данного рахдела является описание топологии замкнутых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны. Описывается трехмерный случай. Следующая теорема дает классификацию замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий, допускающих слоение неотрицательной кривизны.

Теорема 2 *Пусть* M^3 *- гладкое замкнутое ориентируемое риманово многообразие размерности 3, а* $\mathcal{F}$ - C^∞ *- трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны коразмерности 1 на этом многообразии. Тогда* M^3 *гомеоморфно многообразию одного из следующих типов:*

1) Торическое расслоение над окружностью;

2) Торическое полурасслоение;

3) $S^2 \times S^1$*;*

4) $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$*;*

5) Линзовое пространство $L_{p/q}$;

6) Призматическое пространство.

Каждое из перечисленных многообразий для некоторой метрики допускает слоение неотрицательной кривизны.

Следствие 3 *Из теоремы 2 следует, что не все трехмерные сферические формы допускают слоение неотрицательной кривизны. Например, такое слоения невозможно на гомологической сфере Пуанкаре с фундаментальной группой I, изоморфной A_5, и являющейся группой симметрий икосаэдра.*

Среди слоений неотрицательной кривизны плоские слоения характеризуются следующей теоремой.

Теорема 4 *Трансверсально ориентируемое слоение $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M плоское, тогда и только тогда, когда M есть торическое расслоение или полурасслоение.*

Рассматриваются слоения коразмерности один неотрицательной кривизны в произвольной размерности. Одним из основополагающих наших наблюдений является следующий результат, обобщающий трехмерный случай.

Утверждение 5 *Пусть $\mathcal{F}$ - C^2 – трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной кривизны Риччи на M, где M - ориентируемое замкнутое многообразие. Тогда $\mathcal{F}$ - слоение почти без голономии.*

Замечание 6 *Требование неотрицательности кривизны Риччи в теореме можно ослабить и потребовать, чтобы слои имели полиномиальный рост и конечное число концов.*

Утверждение 5 делает возможным применение результатов, полученных Иманиши к слоениям коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом многообразии, что дает нам следующую структурную теорему.

Теорема 7 *Пусть $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M. Тогда выполнена одна из следующих возможностей:*

1) *Все слои всюду плотны и M является расслоением над S^1. При этом фундаментальная группа M описывается групповым расширением:*

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z}^k \to 0 \ (k \geq 1) \qquad (1)$$

2) *F содержит компактный слой и M можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки одного из следующих типов:*

   A) *Исключительный блок: B гомеоморфен $L \times I$, где L является компактным слоем слоения и слой $L \times 0$ является предельным для множества компактных слоев;*

   B) *Плотный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и всюду плотны в B;*

   C) *Собственный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и являются собственными (вложенными подмногообразиями) в B.*

Фундаментальная группа блоков описывается групповым расширением:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0 \qquad (2)$$

При этом если $k = 1$, то $int\ B$ является расслоением над окружностью со слоем L, и в этом случае блок будет собственным. Если же $k \geq 2$, то B будет плотным блоком. Для любого k имеет место гомеоморфизм

$$\widetilde{int\ B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R} \qquad (3)$$

Введем следующее определение.

Определение 8 *Скажем, что компактное подмножество B замкнутого многообразия M со слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один является блоком, если B – связное многообразие с краем, являющееся насыщенным множеством, то есть множеством, являющимся объединением слоев.*

Структурная теорема позволяет нам более детально описать топологическую структуру блоков, оснащенных слоениями неотрицательной кривизны Риччи.

Утверждение 9 *Пусть B - блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи и граница ∂B имеет более одной компоненты связности. Тогда:*

1. *Каждый внутренний слой является регулярным изометрическим накрытием любого граничного слоя $K \in \partial B$.*

2. *$\#(\pi_0(\partial B)) = 2$, а B является h-кобордизмом.*

Следствием утверждения 9 является следующее важное утверждение.

Утверждение 10 *Пусть B - блок без внутренних компактных слоев, оснащенный слоением неотрицательной кривизны Риччи. Если фундаментальная группа типичного слоя L конечно порождена, тогда:*

1. *Фундаментальная группа $\pi_1(B)$ является почти полициклической.*

2. *Образ гомоморфизма $i_* : \pi_1(K) \to \pi_1(B)$, индуцированного включением граничного слоя $i : K \to B$, имеет индекс в $\pi_1(B)$ не превосходящий 2.*

Следующая теорема описывает фундаментальную группу замкнутых многообразий, допускающих слоения неотрицательной кривизны и является слоеным аналогом соответствующих результатов Чигера - Громолла о топологической структуре замкнутых многообразий неотрицательной кривизны Риччи,

Теорема 11 *Пусть M - замкнутое риманово n-мерное многообразие с заданным C^2 – слоением $\mathcal{F}$ коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи. Предположим, что все слои имеют конечно порожденную фундаментальную группу (например $\mathcal{F}$ – слоение неотрицательной секционной кривизны). Тогда*

1. *$\pi_1(M)$ – почти полициклическая группа.*

2. *$\mathcal{F}$ плоское, тогда и только тогда, когда M является $K(\pi, 1)$ – многообразием. В этом случае выполнена одна из следующих возможностей:*

   1) *$\mathcal{F}$ не содержит компактные слои. Тогда $\mathcal{F}$ является слоением без голономии со всюду плотными слоями, изометричными риманову произведению $S \times E^k$, а само многообразие гомеоморфно расслоению над S^1.*

2) $\mathcal{F}$ *содержит компактные слои. Если* $\dim M \geq 5$*, тогда все компактные слои гомеоморфны между собой, а само многообразие или его двулистное накрытие гомеоморфно расслоению над окружностью со слоем, гомеоморфным компактному слою слоения.*

3. *asdim* $\pi_1(M) \leq n$*, причем asdim* $\pi_1(M) = n$ *тогда и только тогда, когда* M *является* $K(\pi, 1)$ *– многообразием. Если asdim* $\pi_1(M) < n$*, то asdim* $\pi_1(M) < n - 1$*.*

Следствие 12 *Пусть* M *удовлетворяет условию теоремы 11. Тогда для* M *имеет место гипотеза Громова* **??**.

Следующая теорема дает исчерпывающий ответ на вопрос Г. Штака о возможности существования слоений коразмерности один неотрицательной секционной кривизны на римановом многообразии, гомеоморфном $2n+1$-мерной сфере S^{2n+1}, где $n \geq 2$. Заметим, что стандартное слоение Риба на стандартной круглой сфере S^3 дает пример слоения неотрицательной кривизны.

Теорема 13 *3-связное многообразие* M *размерности* $n \geq 5$*, в частности, многообразие гомеоморфное* S^n*, не допускает* C^2 *- слоения коразмерности один неотрицательной кривизны.*

Мы рассматриваем вопрос существования седловых слоев на замкнутых 3-мерных многовидах. Мы приводим способ построения таких метрик, который использует двойственность между внешней геометрией слоения и геометрией одномерного потока Φ^t, который определяется ортогональным к слоению единичным векторным полем. В частности, имеется следующая двойственность для седловых слоений: слоение $\mathcal{F}$ является сильно седловым ($K_e < 0$) тогда и только тогда, когда для каждого $x \in M$ и достаточно малого $t > 0$ существуют единичные векторы v, w касательные к $\mathcal{F}$ такие, что $|\overline{d\Phi^t}(v)| \leq e^{-Ct}|v|$ и $|\overline{d\Phi^t}(w)| \geq e^{Ct}|w|$, где $\overline{d\Phi^t} := \pi \circ d\Phi^t$, а $\pi : TM \to L$ – проекция на касательное к слоению $\mathcal{F}$ распределение L. Заметим, что вторая квадратичная форма $B(X, Y)$ может быть определена и для распределений следующим образом.

$$B(X, Y) = \frac{1}{2} g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, \xi)$$

Используя вышеизложенный критерий можно доказать, что для данного распределения P со второй квадратичной формой B и ортогональным векторным полем X, можно изменить метрику так, что данное трансверсальное к X слоение в новой метрике будет ортогонально к X и иметь ту же вторую квадратичную форму, что и P в старой метрике. Это наблюдение позволило нам доказать следующий ключевой результат этого подраздела, который отвечает на вопрос, поставленный А. А. Борисенко.

Теорема 14 *На S^3 существует риманова метрика, такая, что слоение Риба является сильно седловым.*

Так же в данном разделе мы приводим примеры однородных сильно седловых слоений на замкнутых трехмерных многообразиях, в частности, на торических расслоениях над окружностью.

Мы исследуем связь между гомотопическим типом распределения на римановом торе T^2, которое определяет некоторое C^2-слоение, с абсолютной кривизной этого слоения. Под абсолютной кривизной слоения понимается интеграл $\int_{T^2} |k| d\sigma$, где $|k|(x)$ это кривизна (без знака) в точке $x \in T^2$ слоя, проходящего через x. Первым шагом в оценке интеграла является оценка снизу числа рибовских компонент слоения, принадлежащего данному гомотопическому классу. Это число оценивается снизу так называемым *абсолютным числом вращения распределения*, а именно, верна следующая теорема.

Теорема 15 *Минимальное возможное число рибовских компонент слоения тора с касательным распределением заданного гомотопического типа (m, n) равно абсолютному числу вращения $|\mu|$ распределения. Причем если $m \neq 0$ и $n \neq 0$, то $|\mu| = HOD(m, n)$.*

Эта теорема позволила доказать следующий результат, который дает оценку снизу абсолютной кривизны слоения, принадлежащего фиксированному гомотопическому классу.

Теорема 16 *Пусть $(T^2, \mathcal{F})$ - двумерный тор с заданными слоением класса C^2. Предположим, что гомотопический тип касательного распределения есть (m, n). Тогда*

$$\int_{T^2} |k| d\sigma \geq 2|\mu| l_{geod},$$

где $|\mu|$ - абсолютное число вращения касательного распределения, а l_{geod} - длина глобально минимальной геодезической, представляющей класс замкнутой кривой на торе, в который переходит прямая $mx + ny = 0$ при факторизации $\mathbb{R}^2$ по $\mathbb{Z}^2$.

Замечание 17 *Отметим, что все неравенства переходят в равенства для слоения, заданного распределением* $(cos\,\pi(mx+ny), sin\,\pi(mx+ny))$, *если метрика на торе является евклидовой, индуцированной из* $\mathbb{R}^2$.

Из последней теоремы как следствие нами доказывается следующий важный результат.

Следствие 18 *Пусть* (T^2, g) *- тор с некоторой римановой метрикой* g *на нем. Тогда для заданной константы* C *существует не более конечного числа гомотопических классов одномерных* C^2 *- распределений на* T^2 *таких, что касательное к распределению слоение* $\mathcal{F}$ *имеет слои, чья кривизна ограничена сверху неравенством* $|k| < C$.

2 Экстремальные оценки для полных гиперповерхностей в римановых пространствах

Доказаны теоремы сравнения радиальных углов (в римановом случае) и гиперболических углов (в лоренцевом случае), из которых выводятся некоторые следствия.

Теорема 19 *Пусть M^{m+1} – гладкое иманово многообразие, все секционные кривизны K_σ которого удовлетворяют*

$$c_2 \geqslant K_\sigma;$$

$\Sigma \subset M^{m+1}$ – гладкая λ-вогнутая гиперповерхность (в случае $c_2 > 0$ полагаем, что Σ лежит внутри геодезической сферы радиуса $\pi/(2\sqrt{c_2})$); $\mathcal{S}_\lambda \subset M^{m+1}(c_2)$ – вполне омбилическая гиперповерхность кривизны λ; точки $p \in M^{m+1} \backslash \Sigma$, $p_\lambda \in M^{m+1}(c_2) \backslash \mathcal{S}_\lambda$ выбраны так, что $\mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) = \mathrm{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$. *Если точки $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ такие, что*

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda),$$

то для радиальных углов φ и φ_λ по отношению к p и p_λ гиперповерхностей Σ и $\mathcal{S}_\lambda$ в этих точках выполняется неравенство

$$\cos\varphi(q) \leqslant \cos\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Более того, если D_Σ – выпуклая область и $p \in D_\Sigma$, $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$, то для опорных функций h_p и h_{p_λ} гиперповерхностей Σ и $\mathcal{S}_\lambda$ в точках q и q_λ справедливо неравенство

$$h_p(q) \leqslant h_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

Теорема 20 *Пусть $M^{m+1}(c)$ — полное односвязное риманово многообразие постоянной секционной кривизны, равной c, $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – регулярная класса C^2 полная λ-выпуклая ($\lambda > 0$) гиперповерхность в нем, $p \in D_\Sigma$ – точка внутри области, ограничиваемой Σ, $d = \mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma)$ и φ – функция радиального угла гиперповерхности Σ по отношению к точке p. Тогда:*

1. *Если $c = 0$, т.е. объемлющее пространство является евклидовым пространством $\mathbb{E}^{m+1}$, то функция радиального угла удовлетворяет неравенству*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{\frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2}} \geqslant \frac{d}{R_\lambda}. \tag{4}$$

2. *Если $c = -k^2 < 0$, т.е. объемлющее пространство является пространством Лобачевского $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$, и $\lambda > k$, то функция φ удовлетворяет*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d)}{\operatorname{sh}^2 kR_\lambda}} \geqslant \frac{\operatorname{sh} k\, d}{\operatorname{sh} kR_\lambda}. \tag{5}$$

3. *Если $c = k^2 > 0$, т.е. объемлющее пространство является сферическим пространством $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$, то для функции φ выполняется оценка*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\sin^2 k(R_\lambda - d)}{\sin^2 kR_\lambda}} \geqslant \frac{\sin k\, d}{\sin kR_\lambda}. \tag{6}$$

Во всех оценках выше R_λ – радиус вполне омбилической сферы кривизны, равной λ, в пространстве постоянной кривизны $M^{m+1}(c)$.

Более того, первые оценки во всех случаях являются точными.

Теорема 21 *Пусть $\Sigma \subset M^{m+1}$ – полная C^2-гладкая λ-выпуклая ($\lambda > 0$) гиперповерхность в полном односвязном $(m+1)$-мерном римановом многообразии M^{m+1}, $p \in D_\Sigma$ – точка внутри Σ на расстоянии $d = \operatorname{dist}(\mathrm{p}, \Sigma)$ от Σ, φ – функция радиального угла для Σ и p. Тогда:*

1. *Если секционные кривизны K_σ многообразия M^{m+1} по любой двумерной площадке σ удовлетворяют неравенству $0 > K_\sigma \geqslant -k^2$, и $\lambda > k > 0$, то выполняется неравенство (5).*

2. *Если секционные кривизны многообразия M^{m+1} удовлетворяют неравенству $K^2 \geqslant K_\sigma \geqslant k^2$, для положительных K и k, а область D_Σ лежит в шаре радиуса $\pi/2K$, то для φ справедливо неравенство (6).*

Теорема 22 *Пусть $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – замкнутая выпуклая область с непустой внутренностью и гладкой границей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *D_Σ – λ-выпуклая область ($\lambda > 0$, при этом для $c < 0$ считаем, что $\lambda > \sqrt{-c}$).*

2. *Для любых точек $p \in D_\Sigma \backslash \Sigma$ и $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ таких, что $\operatorname{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) = \operatorname{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ для соответствующих p, Σ и $p_\lambda, \Sigma_\lambda$ функций радиальных углов φ и φ_λ справедливо неравенство*

$$\varphi(q) \leqslant \varphi_\lambda(q_\lambda) \tag{7}$$

в тех точках $q \in \Sigma$ и $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ для которых $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$.

3. *Для любой точки* $s \in \Sigma$ *существует сфера* $\mathcal{S}_\lambda(s)$ *кривизны, равной* λ*, такая, что* $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ *и*

$$D_{\mathcal{S}_\lambda(s)} \subset D_\Sigma.$$

Теорема 23 *Пусть* $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ *– замкнутая выпуклая область с непустой внутренностью и гладкой границей. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. D_Σ *–* λ*-вогнутая область (*$\lambda > 0$*, при этом для* $c < 0$ *считаем, что* $\lambda > \sqrt{-c}$*).*

2. *Для любых точек* $p \in D_\Sigma \setminus \Sigma$ *и* $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ *таких, что* $\mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) = \mathrm{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ *для соответствующих* p, Σ *и* $p_\lambda, \Sigma_\lambda$ *функций радиальных углов* φ *и* φ_λ *справедливо неравенство*

$$\varphi(q) \geqslant \varphi_\lambda(q_\lambda) \tag{8}$$

   в тех точках $q \in \Sigma$ *и* $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ *для которых* $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$*.*

3. *Для любой точки* $s \in \Sigma$ *существует сфера* $\mathcal{S}_\lambda(s)$ *кривизны, равной* λ*, такая, что* $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ *и*

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}.$$

Теорема 24 *Пусть* M^{m+1} *–* $(m+1)$*-мерное пространство-время,* N *– гладкая выпуклая ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в* M *с* $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$*. Предположим, что вдоль любой времениподобной направленной в будущее геодезической* $\gamma\colon [0, s_0) \to \mathcal{I}^+(N)$*, выпущенной ортогонально* N*, секционные кривизны* K_{σ_s} *многообразия* M^{m+1} *удовлетворяют*

$$K_{\sigma_s} \geqslant k^2,$$

для некоторой положительной константы k *и всевозможных двумерных времениподобных плоскостей* σ_s*, содержащих* $\dot\gamma(s)$*,* $s \geqslant 0$*. Пусть* $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ *– гладкая пространственноподобная гиперповерхность,* ν *– направленное в прошлое нормальное векторное поле для* Σ*,* $\Sigma_\lambda \subset \mathbb{S}_1^{m+1}(c)$ *– вполнеомбилическая гиперповерхность кривизны* λ *такая, что* $\mathrm{dist}(\mathrm{N}, \Sigma) = \mathrm{dist}(\mathcal{S}_0, \Sigma_\lambda)$*. Тогда для* φ *и* φ_λ *– функций гиперболического угла для* Σ*,* Σ_λ *по отношению, соответственно, к* N *и* $\mathcal{S}_0$ *– в тех точках* $q \in \Sigma$ *и* $q_\lambda \in \Sigma_\lambda$*, для которых*

$$\tau_N(q) = \tau_{\mathcal{S}_0}(q_\lambda),$$

выполняется неравенство

$$\operatorname{ch}\varphi(q) \leqslant \operatorname{ch}\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Теорема 25 *Пусть M^{m+1} – $(m+1)$-мерное пространство-время, N – гладкая выпуклая ахроническая пространственноподобная гиперповерхность в M с $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$. Предположим, что вдоль любой времениподобной направленной в будущее геодезической $\gamma\colon [0, s_0) \to \mathcal{I}^+(N)$, выпущенной ортогонально N, секционные кривизны K_{σ_s} многообразия M^{m+1} удовлетворяют*

$$K_{\sigma_s} \geqslant k^2, \quad k > 0,$$

для всевозможных двумерных времениподобных плоскостей σ_s, содержащих $\dot\gamma(s)$, $s \geqslant 0$. Пусть $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ – гладкая пространственноподобная гиперповерхность, ν – направленное в прошлое нормальное векторное поле для Σ, и предположим, что $d(N, \Sigma) = d(p_0, q_0) = t_0$ для некоторых $p_0 \in N, q_0 \in \Sigma$. Если нормальные кривизны k_{n}^ν гиперповерхности Σ в каждой точке и в каждом направлении удовлетворяют неравенству

$$k_{\mathrm{n}}^\nu \leqslant \lambda, \quad \lambda > 0,$$

функция гиперболического угла φ гиперповерхности Σ по отношению к N ограничена и удовлетворяет следующим неравенствам:

1. *в случае $\lambda < k$,*
$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant \frac{\operatorname{sh}((\beta - t_0)k)}{\operatorname{ch}(\beta k)};$$
где $\beta = 1/k\operatorname{arcth}(\lambda/\mathrm{k})$;

2. *в случае $\lambda = k$,*
$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant e^{-t_0 k};$$

3. *в случае $\lambda > k$,*
$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant \frac{\operatorname{ch}((\beta - t_0)k)}{\operatorname{sh}(\beta k)}, \ \textit{для } \beta > t_0,$$
и
$$\operatorname{sh}\varphi < \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta k)}, \ \textit{для } \beta \leqslant t_0,$$
где $\beta = 1/k\operatorname{arccth}(\lambda/\mathrm{k})$.

Более того, приведенные оценки точны.

3 Линейные функционалы в классах целых функций конечного порядка

В разделе 3 рассматриваются линейные функционалы в классах целых функций конечного порядка.

Введем необходимые определения. Функция $\rho(r)$, определенная на луче $(0,\infty)$, удовлетворяющая условию Липшица на любом сегменте $[a,b]\subset(0,\infty)$ и условию

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\geq 0, \text{ and } \lim_{r\to\infty} r\rho'_{+}(r)\ln r=0$$

называется *уточненным порядком.*

Подробное описание свойств уточненного порядка можно найти в [3, 4]. Мы используем обозначение $V(r)=r^{\rho(r)}$. Будем считать, что $V(r)$ – возрастающая функция на $(0,\infty)$ и $\lim\limits_{r\to+0}V(r)=0$.

Сформулируем некоторые свойства уточненного порядка, которые будем использовать в дальнейшем [3, (2), p.33].

Для $r\to\infty$ и $0<a\leq k\leq b<\infty$ асимптотическое неравенство

$$(1-\varepsilon)k^{\rho}V(r)<V(kr)<(1+\varepsilon)k^{\rho}V(r) \tag{9}$$

верно равномерно относительно k.

Обозначим через $M_f(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Если для целой функции $f(z)$ число

$$\sigma_f=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M_f(r)}{V(r)}$$

отлично от нуля и бесконечности, то $\rho(r)$ называется *уточненным порядком целой функции $f(z)$ и σ_f называется типом функции $f(z)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$.*

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок, $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\geq\ 0$. Целая функция $f(z)$ комплексного переменного z принадлежит пространству $[\rho(r),p]$, если $f(z)$ имеет порядок меньше чем $\rho(r)$ или равный $\rho(r)$, но в этом случае тип меньше или равен p.

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из $[\rho(r),p]$ сходится в смысле $[\rho(r),p]$, если: (i) она сходится равномерно на компактах, (ii) для всех $\varepsilon>0$ существует $r_0(\varepsilon)$, не зависящее от n, такое что

$$|f_n(z)|<\exp[(p+\varepsilon)V(|z|)],\quad |z|>r_0(\varepsilon)\ (n\geq 1)\,.$$

Для соответствующих $C(\varepsilon)$, которые не зависят от n, для всех z

$$|f_n(z)|<C(\varepsilon)\exp[(p+\varepsilon)V(|z|)]\quad (n\geq 1)\,. \tag{10}$$

Пространство $[\rho(r), p]$ – это линейное топологическое пространство с секвенциальной топологией.

Введем функцию $\varphi(t)$, которая определяется как единственное решение уравнения $t = V(r)$. Таким образом

$$\varphi(V(t)) = t\,. \tag{11}$$

Теорема 26 ([3, Теорема 2', стр.42]) *Тип σ_f целой функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ уточненного порядка $\rho(r)$ $(\rho > 0)$ определяется равенством*

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} = (e\sigma_f\rho)^{1/\rho}\,. \tag{12}$$

Введем

$$d_n = \frac{(ep\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \quad n \geq 1,\ d_0 = 1\,.$$

Для функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in [\rho(r), p]$ мы ставим в соответствие функцию

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = \frac{c_n}{d_n}\,(n \geq 0)\,, \tag{13}$$

которая является аналитической, по крайней мере, в круге $|z| < 1$. В самом деле, имеем из (12) $\limsup\limits_{n\to\infty} \varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} \leq (ep\rho)^{1/\rho}$, отсюда следует $\varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} \leq (ep_1\rho)^{1/\rho}$, $p_1 > p$, $n > n_0$, и

$$|b_n| < \left(\frac{p_1}{p}\right)^{n/\rho}, \quad n \geq n_0\,.$$

Поскольку p_1 больше p, то

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1$$

и ряд (24) сходится в круге $|z| < 1$. С другой стороны, каждой аналитической в круге $|z| < 1$ функции $F(z)$ соответствует функция $f(z)$ из $[\rho(r), p]$.

Факт сопоставления $f(z)$ из $[\rho(r), p]$ функции $F(z)$, описанным выше способом, записывается следующим образом

$$f(z) \sim F(z)\,.$$

Очевидно, если $F(z) \in [\rho(r), p]$, то $f(\lambda z) \sim F(\lambda z)$ в смысле $[\rho(r), \lambda^\rho p]$, где λ - параметр, и если $f_n(z) \sim F_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ то

$$\sum_{n=1}^{m} a_n f_n(z) \sim \sum_{n=1}^{m} a_n F_n(z)\,.$$

Мы доказываем две теоремы.

Теорема 27 *Для того, чтобы последовательность $\{f_n(z)\}$ функций из $[\rho(r), p]$ сходилась в смысле $[\rho(r), p]$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{F_n(z)\}$ $(f_n(z) \sim F_n(z))$ сходилась равномерно внутри диска $|z| < 1$.*

Теорема 28 *Непрерывный линейный функционал l в пространстве $[\rho(r), p]$ имеет вид*

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,, \tag{14}$$

где величины a_n удовлетворяют неравенству

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} < (ep\rho)^{-1/\rho}\,. \tag{15}$$

Случай $\rho(r) \equiv \rho > 0$ рассмотрен А.Ф. Леонтьевым [5, Теорема 1.1.7, Теорема 1.1.9].

Докажем теорему 27. Пусть

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n, \quad F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} z^n \quad (k \geq 1),$$

и пусть последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится в смысле $[\rho(r), p]$. В силу неравенства Коши и условия (32)

$$|c_n^{(k)}| < C(\varepsilon)\frac{\exp[(p+\varepsilon)V(r)]}{r^n}, \quad r > 0\,.$$

Положим здесь $r = \dfrac{\varphi(n)}{(p_1\rho)^{1/\rho}}$, $p_1 = p + \varepsilon$, тогда из (9) и (23) получим

$$|c_n^{(k)}| < \frac{C(\varepsilon)(p_1\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \exp\left[p_1 V\left(\frac{\varphi(n)}{(p_1\rho)^{1/\rho}}\right)\right] \leq \frac{C_1(\varepsilon)(p_1 e^{p_1}\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \quad (n \geq 0, k \geq 1)\,.$$

Из (32) для $z = 0$ имеем

$$|c_0^{(k)}| < C_1(\varepsilon) \quad (k \geq 1)\,.$$

На основе этих оценок

$$|b_n^{(k)}| = \frac{|c_n^{(k)}|}{d_n} < C_1(\varepsilon)\left(\frac{p_1 e^{p_1}}{p\,e^p}\right)^{n/\rho} \quad (n \geq 0, k \geq 1)\,.$$

Возьмем $r < \left(\dfrac{p\,e^p}{p_1 e^{p_1}}\right)^{1/\rho}$, $p_1 = p + \varepsilon$. Выбирая ε, r сколь угодно близко к единице, имеем

$$|F_m(z) - F_k(z)| < \sum_{n=1}^{s} |b_n^{(m)} - b_n^{(k)}| r^n + 2C_1(\varepsilon) \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{p_1 e^{p_1}}{p\,e^p}\right)^{n/\rho} r^n\,.$$

Ряд в правой части сходится. По ε_1 выберем s таким образом, чтобы второе слагаемое было меньше ε_1.

Из равномерной сходимости $\{f_k(z)\}$ на компактах следует, что для каждого фиксированного n коэффициент $c_n^{(k)}$ имеет предел когда $k \to \infty$. Тогда $b_n^{(k)}$ также имеет предел при $k \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{s} |b_n^{(m)} - b_n^{(k)}| r^n < \varepsilon_1,$$

если m и k большие. Окончательно, $|F_m(z) - F_k(z)| < 2\varepsilon_1$, $|z| < r$. Что и требовалось доказать.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть последовательность $\{F_k(z)\}$ равномерно сходится в круге $|z| < 1$. Тогда для фиксированного n коэффициент $b_n^{(k)}$ имеет предел когда $k \to \infty$ и $|F_k(z)| < M$, $|z| < r < 1$. Из этого следует, что

$$|b_n^{(k)}| < \frac{M}{r^n} \quad (n \geq 0,\ k \geq 1)\,.$$

Из этой оценки получаем

$$|c_n^{(k)}| = |b_n^{(k)}| d_n < M \frac{p\,e\rho)^{n/\rho}}{(r\varphi(n))^n} \quad (n \geq 0, k \geq 1)$$

и

$$|f_k(z)| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p\,e\rho)^{n/\rho}}{((r\varphi(n))^n} |z|^n \quad (k \geq 1)$$

(правая часть не зависит от k).

По теореме 26 функция $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p\,e\rho)^{n/\rho}}{(r\varphi(n))^n} z^n$ – целая функция порядка ρ и типа $\dfrac{p}{r^\rho}$. Этот тип близок к p, когда r близко к 1. Поэтому условие (32) выполняется.

Так как коэффициент $c_n^{(k)}$ имеет предел когда $k \to \infty$ для каждого фиксированного n, то аналогично можно доказать, что последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится равномерно на компактах. Таким образом, эта последовательность сходится в смысле $[\rho(r), p]$.

Заметим, что если последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится к $f(z)$ в смысле $[\rho(r), p]$ и $\{F_k(z)\}$ сходится к $F(z)$, то $f(z) \sim F(z)$.

Замечание. Если последовательность $\{f_k(z)\}$ сходится в смысле $[\rho(r), p_1]$, тогда последовательность $\{F_k(z)\}$ равномерно сходится в круге $|z| < \left(\dfrac{p}{p_1}\right)$. Обратное утверждение верно. Это можно проверить, проведя предыдущие рассуждения.

Согласно теореме 27 можно утверждать, что пространство $[\rho(r), p]$ функций $f(z)$ со сходимостью в смысле $[\rho(r), p]$ переходит в пространство функций $F(z)$, аналитических в диске $|z| < 1$ со сходимостью в смысле равномерной сходимости на компактах. Мы используем этот факт, чтобы получить вид линейного непрерывного функционала в пространстве $[\rho(r), p]$.

Пусть $l(f)$ - непрерывный линейный функционал в пространстве $[\rho(r), p]$. Обозначим $l(z^n) = a_n$ $(n \geq 0)$. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – функция из $[\rho(r), p]$. Так как ряд сходится в смысле $[\rho(r), p]$, то, используя непрерывность функционала, получим

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \,.$$

В этом случае

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,. \tag{16}$$

Теперь рассмотрим линейный функционал $L(F)$ в пространстве функций $F(z)$, аналитических в диске $|z| < 1$:

$$L(z^n) = a_n d_n \quad (n \geq 0); \quad d_n = \frac{(ep\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \quad n \geq 1,\ d_0 = 1$$

(мы еще не знаем, что это непрерывный функционал).

Пусть $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ аналитична в круге $|z| < 1$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in [\rho(r), p], \quad c_n = b_n d_n \,.$$

Имеем
$$L\left(\sum_{n=0}^{m} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{m} b_n L(z^n) = \sum_{n=0}^{m} c_n a_n\,.$$
Исходя из (27), правая часть имеет предел если $m \to \infty$. Обозначим
$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n d_n b_n\,. \tag{17}$$
В этом случае
$$l(f) = L(F), \quad f(z) \sim F(z)\,. \tag{18}$$
Так как $l(f)$ – непрерывный линейный функционал, отсюда следует, что и $L(F)$ также непрерывный линейный функционал.

Непрерывный линейный функционал в пространстве аналитических функций в единичном круге задается формулой
$$L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n b_n, \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$
где $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p_n|} < 1$. Из этого и (17) получим: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| d_n} < 1$ или
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\varphi(n)} < (p\, e\rho)^{-1/\rho}\,. \tag{19}$$

Таким образом, непрерывный линейный функционал $l(f)$ в пространстве $[\rho(r), p]$ имеет вид (27), где числа a_n удовлетворяют условие (19). Обратное утверждение также верно: если условие (19) верно, то функционал (27) является непрерывным линейным функционалом $l(f)$ в пространстве $[\rho(r), p]$, так как согласно этому условию функционал (17) является непрерывным линейным функционалом.

Теорема 28 доказана.

Пространство аналитических функций в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ со сходимостью в смысле равномерной сходимости на компактах обозначим через $A(D)$. Отметим следующие известные факты:

1) Пусть $F_n(z) \in A(D)$ $(n \geq 1)$. Для того, чтобы функция $F_0(z) \in A(D)$ могла быть аппроксимирована с любой степенью точности линейными комбинациями функций $F_n(z)$ (равномерно на компактах D), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства
$$L(F_n) = 0 \quad (n \geq 1)\,, \tag{20}$$

где $L(F)$ - непрерывный линейный функционал в $A(D)$, и $L(F_0) = 0$. В частности, чтобы семейство функций $\{F_n(z)\}$ было полным в $A(D)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (20) и $L(F) = 0$ для каждой функции $F(z) \in A(D)$.

2) Пусть M - замкнутое множество в $A(D)$, не совпадающее с $A(D)$, и $F_0(z) \in A(D)$ – функция, не принадлежащая M. Тогда существует функционал $L(F)$, такой, что $L(F) = 0$ для всех $F(z) \in M$ и $L(F_0) \neq 0$.

Обратим внимание, что замкнутое множество M в $A(D)$, исходя из соотношения $f(z) \sim F(z)$, соответствует замкнутому множеству в пространстве $[\rho(r), p]$.

Основываясь на отмеченных фактах, а также принимая во внимание равенство (18), получаем следующие утверждения:

1) Пусть $f_n(z) \in [\rho(r), p]$ $(n \geq 1)$. Для того, чтобы функция $f_0(z) \in [\rho(r), p]$ могла быть аппроксимирована с любой степенью точности линейными комбинациями функций $f_n(z)$ (в смысле $[\rho(r), p]$), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$l(f_n) = 0 \quad (n \geq 1)\,, \tag{21}$$

где $l(f)$ – непрерывный линейный функционал в $[\rho(r), p]$, и $l(f_0) = 0$. В частности, чтобы семейство функций $\{f_n(z)\}$ было полным в $[\rho(r), p]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (21) и $l(f) = 0$ для каждой функции $f(z) \in [\rho(r), p]$.

2) Пусть N - замкнутое множество в $[\rho(r), p]$, не совпадающее с $[\rho(r), p]$, и $f_0(z) \in [\rho(r), p]$ - функция, не принадлежащая N. Тогда существует функционал $l(f)$, такой, что $l(f) = 0$ для всех $(z) \in N$ и $l(f_0) \neq 0$.

Пусть $\rho(r)$ - уточненный порядок, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \geq\ 0$. Однозначная функция $f(z)$ комплексной переменной z принадлежит пространству $[\rho(r), \infty)$, если $f(z)$ имеет порядок меньше, чем $\rho(r)$ или равный $\rho(r)$, но в этом случае тип меньше, чем ∞.

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из $[\rho(r), \infty)$ сходится в смысле $[\rho(r), \infty)$, если (i) она сходится равномерно на компактах, (ii) существует $\beta < \infty$ такое, что

$$|f_n(z)| < \exp[\beta V(|z|)], \quad |z| > r_0(\beta)\,(n \geq 1)\,,$$

где $r_0(\beta)$ не зависит от $n \geq 1$.

При подходящем $C(\beta)$, которое не зависит от n, для всех z

$$|f_n(z)| < C(\beta) \exp[\beta V(|z|)] \quad (n \geq 1)\,. \tag{22}$$

Пространство $[\rho(r),\infty)$ – линейное топологическое пространство с секвенциальной топологией.

Как и выше, введем функцию $\varphi(t)$, которая определяется как единственное решение уравнения $t=V(r)$. Так,

$$\varphi(V(t))=t\,. \tag{23}$$

Пусть $\rho>0$. Обозначим

$$d_n=\frac{(e\sigma\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n}\quad n\geq 1,\ d_0=1\,.$$

Для функции $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n\in[\rho(r),p)$ мы ставим в соответствие функцию

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\quad b_n=\frac{c_n}{d_n}\,(n\geq 0)\,, \tag{24}$$

которая аналитична, по крайней мере, в круге $|z|<1$. Функция сопоставления $f(z)$ из $[\rho(r),p]$ функции $F(z)$, как описано выше, обозначается следующим образом:

$$f(z)\sim F(z)\,.$$

Ниже наш главный результат.

Теорема 29 *Непрерывный линейный функционал l в пространстве $[\rho(r),\infty)$ имеет вид*

$$l(f)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc_n,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\,, \tag{25}$$

где величины a_n удовлетворяют неравенству

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi^{-1}(n)\sqrt[n]{|a_n|}=0\,. \tag{26}$$

Докажем теперь теорему 29. Пусть $l(f)$ - непрерывный линейный функционал в пространстве $[\rho(r),\infty)$. Обозначим $l(z^n)=a_n$ $(n\geq 0)$. Пусть $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ - функция в $[\rho(r),\infty)$. Так как ряд сходится в смысле $[\rho(r),\infty)$, то, в силу непрерывности функционала,

$$l(f)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nl(z^n)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na_n\,.$$

Следовательно

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,. \tag{27}$$

Возьмем произвольное конечное число $p > 0$. Функционал $l(f)$ - это, в частности, линейный непрерывный функционал в пространстве $[\rho(r), p]$. Согласно теореме **??**

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n)\sqrt[n]{|a_n|} < (ep\rho)^{-1/\rho}\,.$$

Так как p – произвольное число, следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n)\sqrt[n]{|a_n|} = 0\,.$$

Проверим теперь, что если выполняется условие (26), то функционал (27) является непрерывным линейным функционалом в пространстве $[\rho(r), \infty)$. Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in [\rho(r), \infty)$. Согласно теореме 26, $\limsup\limits_{n\to\infty} \varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} = (e\sigma_f\rho)^{1/\rho} < \infty$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|}\,\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n)\sqrt[n]{|a_n|} = 0\,,$$

и тогда ряд (27) сходится.

Пусть $\{f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n\} \subset [\rho(r), \infty)$, $f_k(z) \to f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, если $k \to \infty$ и пусть l удовлетворяет условию (26). Из (32), существует $\beta > 0$ такое, что $\{\{f_k(z)\}, f(z)\} \subset [\rho(r), \beta]$ и $f_k(z) \to f(z)$, если $k \to \infty$ в смысле $[\rho(r), \beta]$. Из (26) и (25) l является непрерывным линейным функционалом в пространстве $[\rho(r), \beta]$. Тогда $l(f_k) \to l(f)$, если $k \to \infty$. Следовательно l – непрерывный линейный функционал на пространстве $[\rho(r), \infty)$.

Рассмотрим теперь пространство целых функций $E_{\rho(r)}$, которые имеют уточненный порядок меньше $\rho(r)$. Уточненный порядок $\rho_1(r)$ будет меньше чем $\rho(r)$, если $0 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$. Целая функция $f(z)$ комплексного переменного z принадлежит пространству $E_{\rho(r)}$, если $f(z)$ имеет порядок меньше $\rho(r)$.

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из $E_{\rho(r)}$ сходится в смысле $E_{\rho(r)}$, если (i) она сходится равномерно на компактах, (ii) существует уточненный порядок $\rho_1(r)$, $0 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, такой что

$$|f_n(z)| < \exp[V_1(|z|)], \quad |z| > r_0(\beta)\;(n \geq 1)\,, \tag{28}$$

где $r_0(\beta)$ не зависит от $n \geq 1$, $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$.

Пространство $E_{\rho(r)}$ - это линейное топологическое пространство с секвенциальной топологией.

Непрерывный линейный функционал $l(f)$ в пространстве $E_{\rho(r)}$ имеет вид (25). Найдем условия, которым удовлетворяют значения a_n.

Функционал $l(f)$ является, в частности, линейным непрерывным функционалом в пространстве $[\rho_1(r), \infty)$ для всех уточненных порядков $\rho_1(r)$, $0 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$. Поэтому, по теореме 27

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi_1^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \,, \tag{29}$$

где $\varphi_1(t)$ определяется как единственное решение уравнения $t = V_1(r)$. Отсюда

$$\frac{\log |a_n|}{\varphi_1(n) n} < 1, \quad n > n_0 \,.$$

Положим $\rho_1(r)$ – произвольное число, меньше чем $\rho(r)$, и такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{\varphi(n) n} \leq 1 \,. \tag{30}$$

Наоборот, пусть условие (30) выполняется и $\rho_1(r)$ - произвольное число, меньше чем $\rho(r)$. Тогда $\varphi_1(n) > \varphi(n)$, $n > n_0$, такое, что

$$\frac{\log |a_n|}{\varphi_1(n) n} < 1, \quad n > n_0 \,,$$

Поэтому условие (29) выполняется и $l(f)$ - непрерывный линейный функционал в пространстве $[\rho(r), \infty)$. Тогда $\rho_1(r)$ - произвольное число, меньше чем $\rho(r)$, и $l(f)$ - непрерывный линейный функционал в пространстве $E_{\rho(r)}$.

Теорема 30 *Непрерывный линейный функционал l в пространстве $E_{\rho(r)}$ имеет вид*

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,,$$

где величины a_n удовлетворяют условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{\varphi(n) n} \leq 1 \,.$$

4 Локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка, приложения к интерполяции

Пусть $f(z)$ – целая функция, $M(f,r) = \max\limits_{\varphi} |f(re^{i\varphi})|$. Через $[\rho,\infty]$ обозначим класс целых функций порядок которых не превышает ρ, $\rho \geqslant 0$, т.е. таких, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M(f,r)}{\ln r} \leqslant \rho\,. \tag{31}$$

В частности через $\mathcal{E}_0$ обозначим класс целых функций нулевого порядка ($\rho = 0$). Введем следующее определение.

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из класса $\mathcal{E}_0$ сходится в смысле $\mathcal{E}_0$, если: (i) она равномерно сходится на компактах, (ii) для любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство

$$|f_n(z)| < \exp[|z|^\varepsilon], \quad |z| > r_0(\varepsilon)\ (n \geq 1)\,,$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от $n \geq 1$.

При подходящем $C(\varepsilon)$, которое не зависит от n, при всех z

$$|f_n(z)| < C(\varepsilon)\exp[|z|^\varepsilon] \quad (n \geq 1)\,. \tag{32}$$

Класс $\mathcal{E}_0$ является линейным топологическим пространством с секвенциальной топологией.

Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке a. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ — множество различных комплексных чисел $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$. По A определим меру: $n_A(G) = \sum_{a_n\in G} 1$. Если это не будет вызывать недоразумений, то индекс A будем опускать. Множество корней произвольной функции f будем обозначать через A_f. Обозначим через $n_f = n_{A_f}$, $n_{f,a}(r) = n_f(C(a,r))$, $n_{A,a}(r) = n_A(C(a,r))$. В частности, положим $n_f(r) = n_{f,0}(r)$, $n_A(r) = n_{A,0}(r)$.

Неравенство (31) приводит к разумности введения следующего определения.

Последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ называется *интерполяционной* в классе $[\rho,\infty]$, если для любой последовательности комплексных чисел b_n, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих условию

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant \rho\,, \tag{33}$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]$ со свойством

$$F(a_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{34}$$

Задача (34) в классе $[\rho, \infty]$ в случае, когда $\rho > 0$ впервые рассматривалась А. Ф. Леонтьевым [6]. Им были найдены критерии ее разрешимости в терминах канонических произведений, определяемых последовательностью A. Позднее К. Г. Малютин [7], исходя из результатов А. Ф. Леонтьева, нашел критерии разрешимости задачи (34) в терминах меры, определяемой последовательностью A. В работе [?] рассматривалась задача кратной интерполяционная в классе $\mathcal{E}_0$. В данной работе мы рассматриваем задачу свободной интерполяции и находим критерии разрешимости задачи (34) в классе $\mathcal{E}_0$, рассматривая его как проективный предел нормированных пространств, как в терминах канонических произведений, определяемых последовательностью A, так и в терминах меры, определяемой узлами интерполяции. При этом последние критерии отличаются от критериев, полученных в работе [?].

Мы дополнительно предполагаем, что выполняется неравенство $|a_1| > 0$. Это упрощает доказательство и формулировки некоторых утверждений, однако, не ограничивает общности наших рассуждений. По ходу работы мы делаем замечание, что последовательности A и $A \cup \{0\}$ являются одновременно интерполяционными.

Пусть $\rho(r)$ – уточненный порядок [8], $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \geqslant 0$. Если $\rho = 0$, то уточненный порядок $\rho(r)$ называется нулевым уточненным порядком. По заданной последовательности A и уточненному порядку $\rho(r)$ определим семейства функций

$$\Phi_A(z, \alpha) = \frac{(n_A(C(z, \alpha|z|)) - 1)^+}{|z|^{\rho(|z|)}}\,.$$

Приведем формулу Пуассона для субгармонической функции v и круга $B(z, R)$, на которую будем ссылаться в нашей работе:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(z + Re^{i\varphi})\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt\,. \tag{35}$$

Здесь μ_v – риссовская мера функции v.

В случае, если $f(z)$ – целая функция, a – простой корень функции f, $v(z) = \ln\left|\dfrac{f(z)}{(z-a)}\right|$, то формула Пуассона (35) для круга $B(a, R)$ приобретает вид:

$$\ln|f'(a)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(a+Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{n_f(B(a,t))-1}{t}\,dt - \ln R\,. \quad (36)$$

Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Обозначим через

$$E_A(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Функция $E_A(z)$ называется канонической функцией последовательности A.

Основным результатом нашей статьи является следующая теорема. Напомним, мы считаем, что выполняется условие $|a_1| > 0$. Кроме того, как обычно, $b^+ = \max\{b; 0\}$.

Теорема 31 *Следующие три утверждения эквивалентны*:

(1) *последовательность A является интерполяционной в классе $\mathcal{E}_0$*;

(2) *для любого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение* :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}} < \infty\,, \quad (37)$$

и каноническая функция $E_A(z)$ последовательности A удовлетворяет условию:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\frac{1}{|E'_D(a_n)|} \leqslant 0\,. \quad (38)$$

(3) *выполняется соотношение* (37) *и*

(3.1) *Существует нулевой уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что*

$$\Phi_A(z,\alpha) \leqslant \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}\,. \quad (39)$$

Рассмотрим последовательность $\mathcal{E}_n^*$ пространств целых функций, для которых норма

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{\exp(|z|^{1/n})} < \infty\,.$$

Ясно, что $\mathcal{E}_{n_2}^* \subset \mathcal{E}_{n_1}^*$, если $n_2 > n_1$. Обозначим через $\mathcal{E}_0^*$ проективный предел пространств $\mathcal{E}_n^*$.

Теорема 32 *Пространства $\mathcal{E}_0^*$ и $\mathcal{E}_0$ совпадают.*

Доказательство. Из работы [9] следует, что пространство $\mathcal{E}_0^*$ является локально выпуклым пространством с секвенциальной топологией. При этом последовательность функций $\{f_n(z)\}$ из $\mathcal{E}_0^*$ сходится в смысле $\{f_n(z)\}$, если она при любом $n \in \mathbb{N}$ сходится в пространстве $\mathcal{E}_n^*$. Отсюда следует, что последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится и в пространстве $\mathcal{E}_0$. Очевидно, обратное, если последовательность $\{f_n(z)\}$ сходится и в пространстве $\mathcal{E}_0$, то она сходится и в любом пространстве $\mathcal{E}_n^*$, а, значит, и в пространстве $\mathcal{E}_0^*$.

Теорема доказана.

Докажем вспомогательные утверждения.

Теорема 33 *Пусть A – интерполяционная последовательность в классе $\mathcal{E}_0$. Тогда выполняется соотношение* (37)

Доказательство. Пусть f – целая функция из класса $\mathcal{E}_0$, решающая интерполяционную задачу: $f(a_1) = 1$, $f(a_n) = 0$ при $n \geqslant 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Запишем формулу (35) для функции $v(z) = \ln|f(z)|$ и круга $B(a_1, R)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(a_1 + Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\,dt\,.$$

Далее получаем, что неравенство

$$\int\limits_0^R \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant \int\limits_0^R \frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\,dt \leqslant K_\varepsilon R^\varepsilon\,, \quad K_\varepsilon > 0\,,$$

выполняется при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ для всех $R > R_\varepsilon$.

Отсюда следует неравенство:

$$n(R) \leqslant \int\limits_R^{eR} \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant K_\varepsilon R^\varepsilon. \tag{40}$$

Поскольку последнее неравенство выполняется при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, то из него следует соотношение:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{n(R)}{R^\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{41}$$

Тогда, используя неравенство (40) с $\varepsilon/2$ и соотношение (41), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}}=\int\limits_0^{\infty}\frac{dn(t)}{t^{\varepsilon}}=\varepsilon\int\limits_0^{\infty}\frac{n(t)}{t^{1+\varepsilon}}\,dt\leqslant\varepsilon K_{\varepsilon}\int\limits_0^{\infty}\frac{dt}{t^{1+\varepsilon/2}}<\infty\,.$$

Теорема доказана.

Теорема 34 *Пусть A – интерполяционная последовательность в классе $\mathcal{E}_0$. Тогда каноническая функция $E_A(z)$ принадлежит классу $\mathcal{E}_0$.*

Доказательство. Пусть A – интерполяционная последовательность в классе $\mathcal{E}_0$, а $E(z)$ – его каноническая функция. Из равенства (41) следует, что $E(z)$ – целая функция. Кроме того, справедливо неравенство

$$\ln|E(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{|a_n|}\right)=\int\limits_0^{\infty}\ln\left(1+\frac{r}{t}\right)\,dn(t)=\int\limits_0^{\infty}\frac{rn(t)}{(t+r)t}\,dt\,,$$

из которого следует, что $E\in\mathcal{E}_0$.

Теорема доказана.

Здесь и далее используется обозначение $|z|=r$.

Импликация 1) $\Rightarrow$ (37) доказана в теореме 2.

Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ (39). Докажем вначале, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln r_n}\ln^{+}\int\limits_0^{r_n/2}\frac{(n(B(a_n,t))-1)^{+}}{t}\,dt=0\,. \tag{42}$$

Если это не так, то существуют последовательность $n_k\uparrow\infty$ при $k\to\infty$ и число $\varepsilon_0>0$ такие, что

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_{n_k}|}\ln^{+}\int\limits_0^{|a_n|/2}\frac{(n(B(a_{n_k},t))-1)^{+}}{t}\,dt\geqslant\varepsilon_0\,,\quad k=1,2,\ldots\,. \tag{43}$$

Дополнительно можно считать, что выполняется неравенство $|a_{n_{k+1}}|>4|a_{n_k}|$, $k=1,2,\ldots$.

Пусть $f(z)$ – функция из класса $\mathcal{E}_0$, которая решает интерполяционную задачу $f(a_{n_k})=1$, $k=1,2,\ldots$, $f(a_n)=0$, если $n\neq n_k$. По условию теоремы такая функция существует.

Запишем формулу (35) для функции $v(z) = \ln|f(z)|$ и круга $B(a_{n_k}, \frac{1}{2}|a_{n_k}|)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{n_f(B(a_{n_k}, t))}{t}\, dt\,.$$

При $t \in \left[0, \frac{1}{2}|a_{n_k}|\right]$ справедливо неравенство $n_f(B(a_{n_k}, t)) \geqslant n(B(a_{n_k}, t)) - 1$. Поэтому

$$\int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n(B(a_{n_k}, t)) - 1)^+}{t}\, dt \leqslant \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{n_f(B(a_{n_k}, t))}{t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\,.$$

Полученное неравенство, соотношение $f \in \mathcal{E}_0$ и неравенство (43) в совокупности противоречивы. Тем самым, равенство (42) доказано.

Из равенства (37) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \int\limits_{|a_n|/2}^{|a_n|} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t}\, dt = 0\,.$$

Вместе с равенством (42) это дает

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \int\limits_0^{|a_n|} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t}\, dt = 0\,. \qquad (44)$$

Пусть z – произвольное комплексное число и $a = a(z)$ – ближайшая к z точка последовательности $\{a_n\}$. Обозначим через F_1 множество тех z, для которых выполняется неравенство $|z - a| > \frac{1}{2}|z|$. Из условия (37) легко следует, что

$$\limsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in F_1}} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int\limits_0^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t}\, dt = 0\,.$$

Поэтому в дальнейшем доказательстве можно считать, что выполняется неравенство $|z-a| \leqslant \frac{1}{2}|z|$. Далее имеем

$$\int_0^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt = \int_{|z-a|}^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt \leqslant$$

$$\int_{|z-a|}^r \frac{(n(B(a,t+|z-a|))-1)^+}{t}\,dt =$$

$$\int_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u))-1)^+}{u-|z-a|}\,du \leqslant 2 \int_0^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u))-1)^+}{u}\,du\,.$$

Из приведенных рассуждений, равенства (42) теперь следует, что

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int_0^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt = 0\,.$$

Отсюда следует, что существует нулевой уточненный порядок $\rho(r)$ такой, что

$$\int_0^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt \leq V(r)\,.$$

Сделав замену переменной $t = \alpha r$ в подынтегральном выражении последнего равенства и разделив обе части на $V(r)$, получим соотношение

$$\int_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \leqslant 1\,. \tag{45}$$

Неравенство (39) следует тогда из цепочки неравенств

$$1 \geqslant \int_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \geqslant \int_\delta^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \geqslant \Phi_A(z,\delta)\ln\frac{1}{\delta}\,.$$

Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) доказана.

Пусть выполняются условия (39) и (37). Для произвольной точки $a_n \in A$ оценим расстояние $|a_n - a|$, где $a \in A$ ближайшая точка к a_n

из последовательности A. Точнее, оценим $\alpha_n = \dfrac{|a_n - a|}{|a_n|}$. Замечая, что $(n(B(a_n, \alpha_n)) - 1)^+ \geqslant 1$ и воспользовавшись неравенством (39), получим

$$\frac{1}{V(r_n)} \leqslant \Phi_A(a_n, \alpha_n) \leqslant \ln\frac{1}{\alpha_n}\,.$$

Откуда следует оценка

$$\alpha_n \geqslant \exp[-V(|a_n|)]\,.$$

Снова применяя неравенство (39) и оценку для α_n, получим

$$\int\limits_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n,t)) - 1)^+}{t}\,dt \leqslant V(r_n) \int\limits_{\exp[-V(|a_n|)]}^{1/2} \frac{1}{t\ln(1/t)}\,dt = V(r_n)(\rho(r_n)\ln r_n - \ln\ln 2)\,.$$

Отсюда следует соотношение (42). Дословно повторяя рассуждения выше, получим справедливость оценки (45). Напишем равенство (36) для функции $E(z)$ и круга $B(a_n, R)$:

$$\ln|E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|E(a_n + Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{n(B(a_n,t)) - 1}{t}\,dt - \ln R\,. \tag{46}$$

Равенство (46) можно переписать в виде:

$$\ln\frac{1}{|E'(a_n)|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{1}{|E(a_n + Re^{i\varphi})|}\,d\varphi + \int\limits_0^R \frac{n(B(a_n,t)) - 1}{t}\,dt + \ln R\,. \tag{47}$$

Далее мы воспользуемся следующей теоремой.

Теорема C. *Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $B(0, 2eR)$ $(R > 0)$, $f(0) = 1$ и η – произвольное положительное число, не превышающее $\frac{3}{2}e$. Тогда внутри круга $B(0, R)$, но вне исключительных* *кругов с общей суммой радиусов, не превышающей* $4R\eta$, *выполняется неравенство*

$$\ln|f(z)| \geqslant -\left(2+\ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(f,2eR)\,.$$

Это теорема 11 из [8, Глава I, §8].

Поскольку $E\in\mathcal{E}_0$, то для любого числа $\varepsilon>0$ существует r_ε такое, что при $r>r_\varepsilon$ выполняется неравенство:

$$\ln|E(z)|\leqslant r^\varepsilon\,.$$

Из этого неравенства и теоремы C, примененной к функции $E(z)$ и кругу $B(0,3e|a_n|)$, следует, что существуют номер N_ε и число $R_1\in\left[\frac{1}{2}|a_n|,|a_n|\right]$ такие, что для всех φ и $n>N_\varepsilon$ будет выполняться неравенство

$$\ln\frac{1}{|E(a_n+R_1e^{i\varphi})|}\leqslant r_n^\varepsilon\,.$$

Выбирая в равенстве (47) $R=R_1$, получим доказательство импликации (43) $\Rightarrow$ (42).

Тем самым импликация 3) $\Rightarrow$ 2) доказана.

Обозначим

$$P_n(z)=\frac{1}{E'(a_n)}\frac{b_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{S_n}\,,\ n\in\mathbb{N} \tag{48}$$

где $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность натуральных чисел, которую мы выберем ниже.

Заметим, что формальный ряд

$$F(z)=E(z)\sum_{n=1}^\infty P_n(z) \tag{49}$$

решает интерполяционную задачу (34).

Покажем, что при подходящем выборе последовательности $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ функция $F\in\mathcal{E}_0$.

Из условий (33) и (38) получаем, что существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to\infty$, такая, что при всех $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{b_n}{E'(a_n)}\right|\leqslant\exp(r_n^{\varepsilon_n})\,. \tag{50}$$

Кроме того, в силу условия (37), можно считать, что сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-r_n^{\varepsilon_n})\,. \tag{51}$$

Обозначим $u_n(z) = \dfrac{1}{z-a_n}\left(\dfrac{z}{a_n}\right)^{S_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и оценим при $z \notin C(a_n, 1)$,

$$|u_n(z)| \leqslant \frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Отсюда, с учетом определения (48) функции $P_n(z)$ и (50), получим

$$|P_n(z)| \leqslant \left|\frac{b_n}{E'(a_n)}\right| |u_n(z)| \leqslant \exp(r_n^{\varepsilon_n})\frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}} = \left(\frac{e^2|z|}{r_n}\right)^{S_n} \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n})}{e^{2S_n}} \tag{52}$$

при $z \notin C(a_n, 1)$.

Положим $S_n = [2r_n^{\varepsilon_n}] + 1$, $n \in \mathbb{N}$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Тогда из (52) получаем

$$|P_n(z)| \leqslant \exp(-r_n^{\varepsilon_n}) \left(\frac{e^2|z|}{r_n}\right)^{2r_n^{\varepsilon_n}}\,. \tag{53}$$

Пусть $N = N(r)$ – наименьшее целое число, обладающее свойством $|a_n| \geqslant e^2 r$, если $n > N$, N_0 – фиксированное число такое, что $|a_{n_0}| \geqslant 1$. Функцию $F(z)$ представим в виде суммы:

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{N_0-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N_0}^{N-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N}^{\infty} P_n(z) =$$
$$F_1(z) + F_2(z) + F_3(z)\,.$$

Рассмотрим слагаемое $F_3(z)$. Из условия (51) и неравенства (53) следует, что $\sum\limits_{n=N}^{\infty} P_n(z) \leqslant C$, где C – некоторая постоянная.

Рассмотрим $F_2(z)$. Так как $|a_{n_0}| \geqslant 1$ при $n \geqslant N_0$, то в силу неравенства (53) будет справедлива оценка

$$|P_n(z)| \leqslant \exp(-r_n^{\varepsilon_n})(er)^{4r_n^{\varepsilon_n}}\,.$$

Учитывая полученную оценку, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ при $r > R(\varepsilon)$ имеет место $|F_2(z)| < r^{\varepsilon}$.

Поскольку в представлении $F_1(z)$ сумма содержит конечное число слагаемых, то из полученных оценок следует, что $F(z) \in \mathcal{E}_0$.

Теорема полностью доказана.

В заключение покажем, что если последовательность A, $|a_1| > 0$, является интерполяционной в классе $\mathcal{E}_0$, то и последовательность $A_0 = D \cup \{0\}$ также является интерполяционной в этом классе. Действительно, рассмотрим интерполяционную задачу (34) для последовательности A_0. Пусть $f \in \mathcal{E}_0$ – решение интерполяционной задачи (34) для последовательности A. Тогда функция

$$f_1(z) = f(z) + \frac{E_A(z)}{E_A(0)}[b_0 - f(0)],$$

принадлежит классу $\mathcal{E}_0$ и является решением поставленной интерполяционной задачи. Тем самым, ограничение $a_1 \neq 0$ не является существенным.

Замечание. Пространства целых функций $[\rho(r), \sigma]$ уточненного порядка $\rho(r)$, типа меньше или равного σ и пространства целых функций $[\rho(r), \sigma)$ уточненного порядка $\rho(r)$, типа меньше σ рассматривались в работах [10], [11], [12].

Выводы

За отчетный период получены следующие результаты.

1. Описана топология римановых многообразий, наделенных структурой слоения коразмерности один с заданными ограничениями на внутреннюю или внешнюю геометрию слоев, рассматриваемых как римановы подмногообразия. В частности, описывается топология замкнутых многообразий, допускающих слоение коразмерности один неотрицательной кривизны.

Докан результат, который является топологическим обобщением слоеной теоремы Картана - Адамара, доказанной Г. Штаком (1991).

2. Доказаны теоремы сравнения радиальных углов (в римановом случае) и гиперболических углов (в лоренцевом случае).

3. Описаны линейные функционалы в классах целых функций конечного порядка.

4. Изучены локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка. Решена задача простой свободной интерполяции.

Перечень ссылок

[1] Леонтьев А. Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* / А. Ф. Леонтьев // Докл. АН СССР. –1948. – Т. 5. С. 785–787.

[2] Малютин К. Г. *Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка* / К. Г. Малютин, О. А. Боженко // Збірник праць Ін-ту математики НАН Украіни. – 2013. – Т. 10, № 4-5. – С. 412–423.

[3] Levin, B.Ya. *Distribution of Zeros of Entire Functions* / B.Ya. Levin. – English revised edition Amer. Math. Soc, Providence, RI, 523pp. MR 81k:30011, 1980.

[4] Bingham N.H. *Regular variation* / N.H. Bingham, C.M. Goldie , J.L. Teugels. – Cambridge university press, Cambridge, London, New-York, New Rochele, Melburn, Sydney, 1987.

[5] Леонтьев А.Ф. *Obobshcheniye ryadov e'ksponent* / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1981.

[6] Леонтьев А. Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* / А. Ф. Леонтьев // Докл. АН СССР. — 1948. — Т. 5. – С. 785 — 787.

[7] Малютин К. Г. Интерполяция голоморфными функциями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Малютин Константин Геннадьевич. – Харьков, 1980. – 104 с.

[8] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* / Б. Я. Левин — Москва: ГИТТЛ, 1956, 632 с.

[9] Sebastiäo e Silva J. Su certi spazi localmente convessi importanti per le applicazioni / J. Sebastiäo e Silva // Rend. Math. Univ. Roma. – 1955. – V. 14, No (5). – P. 388–410.

[10] Malyutin, K.G., Malyutina T.I., *Linear Functionals in Some Spaces of Entire Functions of Finite Order* / K.G. Malyutin, Malyutina T.I. // Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy. – 2015. – Vol. 6. – P. 1-6.

Список публикаций по теме НИР

[11] Malyutin K. G. *Linear functionals in space of entire functions of finite order and less of the given type* / K. G. Malyutin, L. I. Studenikina // Matematychni Studii. — 2016. — V. 45, №2. — P. 132 — 136. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация однородных субгармонических функций / Р. С. Юлмухаметов // Матем. сб. – 1987. – Т. 134, № 4. – С. 511–529.

[12] Малютин К. Г. *Линейный функционал в пространстве целых функций* $[\rho(r), \sigma)$ / К. Г. Малютин , Л. И. Студеникина // Известия ЮЗГУ, серия "Техника и технологии". – 2016. – №2(19). – С.128–131.

[13] Малютин К. Г. *Некоторые свойства уточненного порядка в смысле Бутру* / К. Г. Малютин , И.И. Козлова , О.А. Бредихина, С.В. Шеставина // Известия ЮЗГУ, серия "Техника и технологии". – 2016. – №1(18). - С.103-106.

[14] Bolotov Dmitry. *On Gromov's conjecture for totally non-spin manifolds* / Dmitry Bolotov // Journal of Topology and Analysis. – 2016. – Vol. 8, No. 4. – P. 571-587. (SCOPUS)

[15] Назаренко А.М. *Метод энергетического моделирования дифракции упругих волн* / А.М. Назаренко // Харкiв:Вiсник НТУ "ХПI".- Серiя: Математичне моделювання в технiцi та технологiях. – 2016. –№6(1178). – С.74–82.