ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ VISNYK LVIV UNIV.
Серія фізична. 2005. Вип. 38. С. 157–162 Ser. Physic. 2005. N 38. P. 157–162

УДК 535.8
PACS number: 42.60.Rn , 42.55.Rz

АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ГРАНИЧНОГО ЦИКЛУ В ДИНАМІЦІ ЛАЗЕРІВ НА ТВЕРДОМУ ТІЛІ

С. Коломієць

Сумський національний аграрний університет,
вул. Кірова, 160, 40021 Суми, Україна

Вивчено динаміку напівкласичної моделі лазера на твердому тілі з керованою добротністю, яку моделюють квадратичною, кубічною та біквадратичною залежністю від інтенсивності потоку фотонів. Одержано критерії стійкості граничних циклів та побудовано інтервали стійкості для параметра накачування, коли стаціонарний розв'язок розглядають як додатковий параметр.

Ключові слова: модулятор добротності, граничний цикл, область стійкості.

Проблема теоретичного дослідження можливостей виникнення нелінійних динамічних режимів у лазерах з модуляцією параметрів, виявлення нових регулярних та хаотичних структур у лазерно-оптичних системах, дослідження фізичних процесів, які б самостабілізували певні нерівноважні режими роботи лазерних систем є актуальним завданням квантової електроніки. Теоретичному дослідженню динаміки лазерних моделей приділяють значну увагу [1–4]. Саме лазери, для яких уже є теоретичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь, – найпридатніші об'єкти для вивчення фундаментальних закономірностей і можливих застосувань нелінійної динаміки в квантовій оптиці.

Теоретичне дослідження процесів, що формують регулярну та хаотичну динаміку в лазерних системах, ґрунтується на аналізі напівкласичних рівнянь. Для їхнього дослідження використовують методи теорії нелінійних коливань, для чого в динамічній системі знаходять стаціонарні точки, досліджують стійкість станів рівноваги, описують перехідні процеси або асимптотику поведінки з часом. Як зазначено в [1], важливу роль під час аналізу динаміки лазерної системи відіграють точки біфуркації – значення параметрів, за яких змінюється характер траєкторій через зміну типу або кількості станів рівноваги. Зокрема, біфуркація формування граничного циклу визначає умови виникнення періодичних коливань у лазерній моделі.

У праці [2] наведено експериментальні дані, що відображають наявність граничних циклів у динаміці лазера за різних значень структурних параметрів, проаналізовано вплив модулятора добротності резонатора $\varphi(x)$, що залежить від інтенсивності потоку фотонів, на динаміку лазера класичної моделі (рівняння Статца-Демарса) та наголошено на важливості теоретичного дослідження біфуркації під час аналізу динаміки лазерних моделей. Оскільки функціональної залежності не конкретизували, то автор обмежився кількома зауваженнями щодо можливих типів коренів характеристичного рівняння і відповідних режимів генерації. Подальша конкретизація цієї проблеми пов'язана з вивченням біфуркації Хопфа, яка виникає за певних значень структурних параметрів [5].

Ми за допомогою алгоритму біфуркації формування циклу виконали біфуркаційний аналіз напівкласичної моделі лазера на твердому тілі для різних випадків залежностей модулятора добротності резонатора від інтенсивності потоку фотонів.

Формулювання задачі та її розв'язування. Розглянемо систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку лазерної моделі напівкласичного типу [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx\left(\dfrac{y}{c-yk} - 1 - \varphi(x)\right); \\ \dot{y} = A - y - \dfrac{xy}{c-yk}, \quad c = 1 + k + \dfrac{\Delta^2}{1+k}, \end{cases} \tag{1}$$

де x – інтенсивність поля випромінювання фотонів; y – різниця заселеностей рівнів атомів (інверсія); k – співвідношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи; A – параметр накачування; $\Delta = (\omega_0 - \omega_c)\upsilon_a^{-1}$; υ_a – швидкість релаксації поляризації атомної системи, ω_c – центр спектральної лінії; ω_0 – власна частота резонатора; $\varphi(x)$ – модулятор добротності резонатора, що залежить від інтенсивності потоку фотонів; G – великий параметр у теорії лазерів класу B. Всі величини – фазові координати, параметри і час – безрозмірні.

Система (1) одержана зі складнішої шляхом адіабатного вилучення трьох швидкісних фазових координат, тому вона справджується лише в разі виконання нерівностей: $\upsilon_a >> \upsilon_i$, $\upsilon_a >> \upsilon_r$, де υ_i – швидкість релаксації інверсії; υ_r – швидкість загасання поля в резонаторі.

Наша мета – з'ясувати умови виникнення біфуркації Хопфа в системі (1), дослідження стійкості періодичних коливань, що виникають унаслідок втрати стійкості стаціонарного розв'язку, коли один з параметрів моделі набуває біфуркаційного значення, а також відшукання найпридатнішої моделі модулятора добротності для одержання стійкої амплітудної модуляції потоку фотонів у режимі неперервних регулярних пульсацій.

Для асимптотичного інтегрування системи диференціальних рівнянь використовують алгоритм біфуркації формування циклу [6], що дає змогу, окрім стаціонарного режиму роботи лазера, досліджувати періодичні коливання малої амплітуди навколо стаціонарних розв'язків. Цей метод допомагає не тільки знайти умови виникнення періодичних коливань у динамічній системі, а й з'ясувати питання про стійкість граничних циклів, одержати критерій стійкості, а також знайти період, амплітуду, фазу модуляції та побудувати наближений розв'язок системи диференціальних рівнянь.

У першій моделі використовано квадратичну залежність модулятора добротності резонатора від інтенсивності потоку фотонів: $\varphi_1(x) = ax^2 + bx$, де a і b – параметри керування.

Систему (1) вивчено в околі стаціонарного розв'язку, який знаходять з рівнянь

$$x_c k\psi_1^2(x_c)+(c-kA+x_c)\psi_1(x_c)-A=0,$$
$$y_c=\frac{c\psi_1(x_c)}{\beta_1(x_c)}, \tag{2}$$

де $\psi_1(x)=1+ax^2+bx$, $\beta_1(x_c)=1+k\psi_1(x)$.

За традиційного підходу з першого із рівнянь (2) знаходять значення стаціонарного розв'язку x_c. Однак, зазвичай, рівняння (2) не допускає аналітичного розв'язку щодо невідомої x_c, його доводиться розв'язувати лише числово, що не дає змоги шляхом знаходження коефіцієнтів чутливості стежити за тим, як інші параметри впливають на динаміку лазера. Альтернативний підхід полягає в тому, що стаціонарний розв'язок x_c розглядають як додатковий параметр, межі зміни якого можна визначити умовами стійкості, а з рівнянь (2) обчислюють інший параметр, як явно задану функцію решти. Наприклад, розв'язання першого із рівнянь (2) відносно параметра c приводить до результату

$$c=\frac{\beta_1(A-x_c\psi_1(x_c))}{\psi_1(x_c)},\quad A>x_c\psi_1(x_c), \tag{3}$$

який використано надалі в розрахунках.

Матриця Якобі правих частин системи (1), обчислена у стаціонарному розв'язку, має вигляд

$$M=\begin{pmatrix}-Gx_c(2ax_c+b) & \dfrac{Gx_c\beta_1^2(x_c)}{c}\\ -(ax_c^2+bx_c+1) & -\dfrac{\nu}{c}\end{pmatrix},\ \nu=c+x_c\beta_1^2(x_c), \tag{4}$$

а корені її характеристичного рівняння

$$2\lambda_{1,2}=SpurM\ \pm\left((SpurM)^2-4\det M\right)^{1/2},$$

де

$$SpurM=-Gx_c(2ax_c+b)-\frac{\nu}{c},\quad \det M=\frac{Gx_c}{c}\left(\nu(2ax_c+b)+\psi_1(x_c)\beta_1^2(x_c)\right). \tag{5}$$

У системі (1) виникає біфуркація Хопфа, коли власні значення матриці Якобі стають суто уявними за деякого значення одного із параметрів моделі, що приводить до виконання таких умов:

$$SpurM=--Gx_c(2ax_c+b)-\frac{\nu}{c}=0,$$
$$\det M=\frac{Gx_c}{c}\left(\nu(2ax_c+b)+\psi_1(x_c)\beta_1^2(x_c)\right)>0. \tag{6}$$

Оскільки k – мала додатна величина (в розрахунках прийнято $k=0{,}1$), параметр c не перевищує двох, а великий параметр G має порядок $O(10^5)$, то з рівняння (6) можна знайти біфуркаційне значення параметра керування a: $a_0=-b(2x_c)^{-1}$. Вимога додатності визначника матриці Якобі у разі біфуркаційного значення параметра a_0 накладає певні обмеження на знак параметрів керування, що входять до модулятора добротності, а саме: у цьому випадку квадратична залежність модулятора добротності від інтенсивності потоку фотонів повинна мати вигляд $\varphi = ax^2 - bx$.

Виконання аналогічних операцій для нової моделі дає змогу знайти біфуркаційне значення параметра керування $a_0 = b(2x_c)^{-1}$, за якого матриця Якобі правих частин системи (1) набуває вигляду

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{Gx_c\beta^2(x_c)}{c} \\ \dfrac{bx_c}{2} - 1 & -\dfrac{\nu}{c} \end{pmatrix},$$

а корені її характеристичного рівняння $\lambda = \pm i\omega_0$, де $\omega_0 = \left(\dfrac{Gx_c}{c}\beta_1^2\left(1 - \dfrac{bx_c}{2}\right)\right)^{1/2}$,

насправді є суто уявними у разі виконання нерівності $o < b < 2(x_c)^{-1}$; ω_0 є нульовим наближенням до невідомої частоти модуляції ω. Оскільки виконуються всі умови теореми Хопфа [6], то в системі (1) при $\varphi_1 = ax^2 - bx$ існують періодичні коливання за умови їхньої стійкості.

Для вивчення питання про стійкість періодичних коливань згідно з алгоритмом біфуркації формування циклу будують величину Φ, дійсна частина $\operatorname{Re}\Phi$ якої визначає знак показника Флоке. Наявність у моделях лазерів на твердому тілі великого параметра G дає змогу із громіздкого виразу для визначення знака показника Флоке виділити лише три доданки, завдяки чому можна знайти критерій стійкості.

З вимоги від'ємності показника Флоке та з урахуванням обмеження (4), інтервал стійкості для параметра накачки A набуває вигляду

$$x_c\psi_{10} < A < 2\psi_{10}^2\left(\frac{1+k}{b} - kx_c\right),$$

де $\psi_{10} = 1 - \dfrac{bx_c}{2}$, з умови існування якого випливає обмеження для параметра керування b: $0 < b < (x_c)^{-1}$, яке уточнює початкове обмеження. У другому випадку першої моделі як біфуркаційний приймають параметр b: $b_0 = -2ax_c$, та виконую аналогічні дослідження.

Зазначимо, що і для випадку кубічної залежності модулятора добротності від інтенсивності потоку фотонів, застосування алгоритму дало змогу з'ясувати умови виникнення періодичних коливань, побудувати інтервали стійкості для параметра накачування та параметрів керування. Проте, як і у випадку квадратичної залежності, області стійкості виявились достатньо вузькими, тому доцільно розглянути іншу модель, що точно відповідає деформації згортки та має вигляд $\varphi_3 = x^4 + lx^2 + mx$ [7]. Для цієї моделі також з'ясовано умови виникнення біфуркації Хопфа і завдяки дослідженню стійкості періодичних коливань отримано такі результати.

Якщо як біфуркаційний прийняти параметр m: $m_0 = -4x_c^3 - 2lx_c$, то інтервал стійкості для параметра накачування A з урахуванням обмеження (3) набуде вигляду

$$x_c\psi_{30} < A < \psi_{30}^2\left(\beta_{30}\left(12x_c^3 + lx_c\right)\left(6x_c^3 + lx_c\right)^{-2} - kx_c\right), \qquad (7)$$

де $\psi_{30} = 1 - 3x_c^4 - lx_c^2$; $\beta_{30} = 1 + k\psi_{30}$.

Умова існування інтервалу (7) дає змогу знайти область стійкості для параметра керування l:

$$\left(4x_c\right)^{-1}\left(1 - 3x_c^4 - \sqrt{\sigma}\right) < l < x_c^{-2}\left(1 - 3x_c^2\right),$$

де $\sigma = \left(12x_c^4 + 1\right)^2 + 9x_c^4\left(x_c^4 + 2\right)$.

Якщо ж як біфуркаційний прийняти параметр керування l, то можна знайти область стійкості для параметра m:

$$4\left(x_c^4 - 1\right)x_c^{-1} < m < 2\left(4x_c^3 - \left(1 - 3x_c^4 - \sqrt{\sigma}\right)\left(4x_c\right)^{-1}\right).$$

Виконання всіх етапів алгоритму біфуркації формування циклу дає змогу знайти елементи періодичного розв'язку динамічної системи (1), сам розв'язок будують за допомогою формул, що наведені в [6].

Отже, з порівняння отриманих результатів випливає, що третя модель має очевидну перевагу перед двома першими як щодо розміру області стійкості, так і щодо можливостей керування динамікою лазера.

Загалом зазначимо, що розробка ефективних методів керування вихідними характеристиками лазерного випромінювання та оптимізація параметрів самого лазерного пристрою неможлива без систематичного дослідження впливу різних тонких ефектів, які зумовлені взаємодією генерувального випромінювання з активним середовищем або іншими елементами лазера. Застосування алгоритму біфуркації формування циклу дає змогу теоретично не тільки з'ясувати умови виникнення нових нелінійно-динамічних режимів у лазерах з модуляцією параметрів, дослідити стійкість періодичних коливань, а й побудувати сам періодичний розв'язок. Аналіз отриманого розв'язку допомагає вивчити вплив змінювання параметрів лазера на твердому тілі, що характеризують його структуру або входять до модулятора добротності як параметри керування, на амплітуду періодичних коливань, частоту модуляції, кількість енергії, що виділяється на модуляторі добротності, та інші характеристики динаміки лазера. Отже, використаний метод має широкі перспективи застосування для аналізу лазерних моделей подібного типу.

---

1. *Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А.* Автоколебания в лазерах. Мн.: Навука і тэхніка, 1990. 280 с.
2. *Ханин Я.И.* Основы динамики лазеров. М.: Наука, Физматлит, 1999. 364 с.
3. *Фолин К.Г., Гайнер А.В.* Динамика свободной генерации твердотельных лазеров. Новосибирск: Наука, 1979. 262 с.
4. *Туровец С.И.* Нелинейная динамика лазеров с модуляцией параметров: Автореф. дис. канд.физ.-мат.наук. Мн., 1992. 17 с.

5. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 360 с.
6. *Хэссард В., Казаринов Н, Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
7. *Касти Дж.* Большие системы. М.: Мир, 1982. 216 с.
8. *Пешко І.І.* Фізичні процеси самовпливу в лазерах на твердому тілі: Автореф. дис. д-р физ.-мат.наук. К., 2002. 31 с.

ANALYSIS OF STABILITY OF LIMITING CYCLE IN DYNAMICS OF SOLID-STATE LAZER

S. Kolomiets

Sumy National Agrarian University
Higher Mathematics and Physics Department
Kirov Str., 160, 40021 Sumy, Ukraine
e-mail: s_kolomiets@mail.ru

Dynamics of semi-classical model of solid-state laser is studied. Model of quadratic type, cubic type and biquadratic type are suggested as Q-spoiler depended on photon flux level. The criterions of stability are retrieved and the intervals of stability for parameter of lasers' pumping are constructed, when the stationary solution is taken as an independent parameter.

Key words: Q-spoiler, limiting cycle, domain of stability.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.2003
Прийнята до друку 10.03.2005