УДК 336.713

Вольфганг Беннер (Німеччина), Людміл Зяпков (Німеччина)

Багатофакторна ринкова модель LIBOR та крива волатильності

На основі ринкової моделі LIBOR (ставка пропозиції на Лондонському міжбанківському ринку депозитів) вироблено точну структуру цін на процентну ставку міжвалютних екзотичних опціонів з єдиним показником вірогідності. Модель використано з урахуванням явища стохастичної волатильності для отримання додаткової інформації про ринок. На основі трансформації Фур'є представлено формули оцінки опціонів в іноземній валюті, експліцитно виявлено характеристичну функцію, дещо видозмінену для аналітичної зручності. Основну увагу приділено ринку іноземної валюти, де можлива класифікація параметрів моделі щодо строку виплат та страйк-ціни.

Ключові слова: міжвалютна ринкова модель LIBOR, стохастична волатильність, трансформація Фур'є, міра вірогідності.

Вступ

Витоки ринкової моделі міжвалютної ставки пропозиції на Лондонському міжбанківському ринку депозитів (далі – LIBOR) можна прослідкувати при спробах створення універсальної структури цін на деякі екзотичні опціони. Маючи неоднорідну структуру, що вимагає одночасного зображення ринків відсоткової ставки з високим рівнем кореляції, курсом іноземної валюти та динамікою інтенсивності відмов, дане дослідження отримало поштовх у зв'язку з необхідністю визначення вартості валютного свопу, який є основою створення різноманітних похідних продуктів. Як правило, валютні опціони характеризуються значною асиметрією кривої волатильності між опціонами ATM (at the money) ("при своїх" – опціон за ціною контракту з нульовою внутрішньою вартістю, ціна виконання якого дорівнює ринковій вартості активів, що його забезпечують), ITM (in the money) (опціон з виграшем, "колл"/"пут", ціна виконання якого нижча/вища за поточну ціну фінансового інструмента, який лежить в його основі, тобто є більш вигідною для його утримувача) та опціоном OTM (out of the money) (опціон без грошей, ціна виконання якого нижча (для опціону пут) або вища (для опціону колл) за поточну ринкову ціну фінансового инструмента, який лежить в його основі, що робить його придбання збитковим). Для більшості міжвалютних дериватів неможливо встановити єдину страйк-ціну або певний термін закінчення строку боргового зобов'язання, оскільки вони, зазвичай, представляють собою довгострокові екзотичні опціони, які або не можна розділити на звичайні опціони в іноземній валюті, або залежать від страйк-ціни та/або строків платежу. Відсоткова ставка дериватів екзотичних міжвалютних опціонів має таку страйк-ціну, яка суттєво відрізняється від ціни опціону з нульовою внутрішньою вартістю. Пітербарг (2006) пропонує класифікацію волатильності згідно з вартістю опціонів в іноземній валюті на всі можливі строки погашення кредитів та за різноманітними страйк-цінами. Це відповідає моделі Шльогла (2002), хоча алгоритм класифікації опціонів в іноземній валюті досі потребує розробки та вдосконалення. Природно буде спиратися на динаміку логарифмічно нормального форвардного курсу іноземної валюти, який, у свою чергу, залежить від стохастичної волатильності.

У статті запропоновано інтегровану ринкову модель LIBOR та універсальну систему оцінки в умовах багатофакторного оточення, що уможливлює максимальну гнучкість та відповідність ринковим даним при класифікації параметрів моделі. Міру оцінки можна вважати універсальною, якщо вона відповідає наступним умовам: (1) прості фінансові інструменти, які зазнають впливу з боку відсоткової ставки лише на внутрішньому або на зовнішньому ринках; (2) складні фінансові інструменти, які зазнають впливу з боку ставки відсотка як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринках у комплексі з ринком іноземної валюти. З метою отримання формули оцінки усі стохастичні процеси ціноутворення було зведено до мінімуму за допомогою впровадження єдиної грошової міри, незважаючи на ринок, де цей процес має місце, або вплив, якого зазнає цей процес, що забезпечує стабільність цін між ринками та можливість оцінки складних фінансових структур у рамках моделі LIBOR. Структура моделі має відображати ринкову волатильність та кореляцію (задану зовнішнім оточенням) між відсотковими ставками та динамікою іноземної валюти. Увагу зосереджено на класифікації опціонів в іноземній валюті з різними строками погашення та страйк-цінами. Подібна система, незважаючи на рестриктивний характер, забезпечує швидку та точну класифікацію. Модель дослідження може бути легко використана як першоджерело "посмішки волатильності". Причини включення стохастичної волатильності до моделі LIBOR пояснюють Андерсен та ін. (2005; 2002), на основі чого Пітербарг (2003) будує класифікацію засобами середньоарифметичних коефіцієнтів (Пітербарг, 2005a; 2005b) та надає формули, які безпосередньо стосуються ринку, нахилів моделі та волатильності без необхідності вирішення замкненої формули оцінки європейських опціонів. Джоші та ін. (2003) обрали протилежний метод аналізу волатильності свопціону, припускаючи існування єдиної функції волатильності, параметри якої змінюються стохастично.

1. Міжвалютна модель LIBOR за універсальним показником вірогідності

1.1. Визначення. Зважаючи на фільтроване поле вірогідностей, $\left(\Omega, \{\mathrm{F}_t\}_{t\in[t_0,t_N]}, P^{t_N}\right)$, нехай послідовність n-членів $\left\{W_{t_N}^{(d)}(t)\right\}_{t\in[t_0,t_N]}^{d=1,2,3,4}$ означає d-вимірний броунівський рух з джерелом невизначеності залежно від кореляції динаміки ринків (як внутрішніх, так і зовнішніх) іноземної валюти, а також від середнього відхилення значення квадратного кореня в межах звичайної волатильності $V(t)$, що рівномірно впливає на форвардний курс валюти будь-якого строку виплати боргового зобов'язання. Припустимо, що фільтрація $\{\mathrm{F}_t\}_{t\in[t_0,t_N]}$ є звичайним P^{t_N}-приростом, безперервним та повним, натуральної фільтрації $\left\{W_{t_N}^{(d)}(t)\right\}_{t\in[t_0,t_N]}^{d=1,2,3}$. Строк погашення боргових зобов'язань за моделлю LIBOR $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N$ визначається як для внутрішнього, так і для зовнішнього ринків валюти. Нехай $L(s,t,T)$ та $L^f(s,t,T)$ позначають внутрішні та зовнішні (форвардні) лібори за період часу s, починаючи з проміжку t та маючи строк погашення у проміжок T, відповідно $s \le t \le T$. З метою максимального спрощення формули $L_{t_i}(t) = L(t,t_i,t_{i+1})$ та $L_{t_i}^f(t) = L^f(t,t_i,t_{i+1})$ однорічні форвардні ставки представлені з моменту t_i до моменту $t_{i+1} = t_i+1$ при $i = 0,\ldots, N$-1. Зокрема, $L(t, t, t_i)$ та $L^f(t, t, t_i)$ позначають спот-курси національної валюти, $Q(t)$ – спот-курс іноземної валюти. Форвардний курс іноземної валюти, за яким інвестори можуть купити або продати іноземну валюту для майбутнього її вкладання, визначається так:

$$FX_i(t) = B^f(t,t_i)Q(t)\big/B(t,t_i).$$

У випадку облігацій з нульовим купоном, $B(t,t_i)$ та $B^f(t,t_i)$ означають внутрішню та іноземну облігації відповідно, а лібори представлені таким чином:

$$L_{t_i}(t) = \alpha_i^{-1}\left(\frac{B(t,t_i)}{B(t,t_{i+1})} - 1\right),\quad L_{t_i}^f(t) = \alpha_i^{-1}\left(\frac{B^f(t,t_i)}{B^f(t,t_{i+1})} - 1\right),\ \text{Якщо}\ \alpha_i = t_{i+1} - t_i = 1.$$

Зокрема:

$$L(t,t,t_1) = \alpha_0^{-1}\left(\frac{1}{B(t,t_1)} - 1\right),\quad L^f(t,t,t_1) = \alpha_0^{-1}\left(\frac{1}{B^f(t,t_1)} - 1\right),\quad \text{Якщо}\ \alpha_0 = t_1 - t \le 1.$$

Стохастичний розвиток вищевказаних рівнянь характеризується наступними функціями волатильності $\gamma_i(t)$ та $\gamma_i^f(t)$, які, мають детерміновану природу та які можна підганяти під параметри класифікації: внутрішні/державні та іноземні/зовнішні лібори до кепів у єдиній валюті та свопціонів (Ребонато, 2002; Бріго та ін., 2002). Для отримання даних про функціональну залежність волатильності від відповідної страйк-ціни опціону доцільно застосувати метод зміщеної дифузії (Рубінштейн, 1983; Беннер та ін., 2007). Для більшої зручності показник вірогідності P_{t_N}, яка пов'язана зі строком погашення внутрішньої облігації у термін t_N, обраний універсальною мірою подвоєння ставки. Волатильність обох облігацій $\sigma^{(f)}(t,t_N)$ буде структурована та визначена згідно з підходом Беннера та ін. (2007):

$$\sigma^{(f)}(t,t_N) = -\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\alpha_i L^{(f)}(t,t_i,t_{i+1})}{1+\alpha_i L^{(f)}(t,t_i,t_{i+1})}\gamma^{(f)}(t,t_i,t_{i+1}) - \frac{\alpha_0 L^{(f)}(t,t,t_1)}{1+\alpha_0 L^{(f)}(t,t,t_1)}\gamma^{(f)}(t,t,t_1).$$

1.2. Моделювання форвардного курсу валюти зі стохастичною волатильністю. Припустимо наступну загальну динаміку моделі LIBOR:

$$\frac{dL_i(t)}{L_i(t)} = \mu_i(t)dt + \gamma_i(t)dW_1^{P_{t_N}}(t), \quad \frac{dL_i^f(t)}{L_i^f(t)} = \mu_i^f(t)dt + \gamma_i^f(t)dW_2^{P_{t_N}}(t),$$
$$\frac{dQ(t)}{Q(t)} = \mu^q(t)dt + \sigma^q(t)dW_Q^{P_{t_N}}(t), \quad W_{1,2,Q}^{P_{t_N}} \to P_{t_N} - \text{BROWNian motions.} \tag{1}$$
$$dW_1(t)dW_2(t) = \rho_{12}dt, \quad dW_1(t)dW_Q(t) = \rho_{1Q}dt, \quad dW_2(t)dW_Q(t) = \rho_{2Q}dt$$

Останній форвардний курс іноземної валюти – мартингал ставки згідно з показником вірогідності P_{t_N} :

$$\frac{dFX_N(t)}{FX_N(t)} = \sigma^f(t,t_N)dW_2^{P_{t_N}}(t) + \sigma^q(t)dW_Q^{P_{t_N}}(t) - \sigma(t,t_N)dW_1^{P_{t_N}}(t) = \sigma_N^{fx}(t)dW_3^{P_{t_N}}(t), \quad \text{де}$$
$$\sigma_N^{fx}(t)^2 = \sigma_N^f(t)^2 + \sigma^q(t)^2 + \sigma_N(t)^2 - 2\sigma_N^f(t)\sigma_N(t)\rho_{1,2} - 2\sigma^q(t)\sigma_N(t)\rho_{1,Q} + 2\sigma^q(t)\sigma_N^f(t)\rho_{2,Q}$$
$$dW_1(t)dW_3(t) = \rho_{13}dt, \quad dW_2(t)dW_3(t) = \rho_{23}dt \tag{2}$$

Власне кажучи, $\sigma_N^{fx}(t)$ є стохастичною величиною через її залежність від курсу LIBOR[1]. Хоча її можна зробити умовно детерміністичною, довівши до високого ступеня точності за допомогою складних та максимально точних методів оцінки, або ж за допомогою класичної технології призупинення руху[2] ("drift-freezing"). В якості змінного параметра моделі запропоновано інший підхід прямої класифікації $\sigma^{fx}(t)$, оскільки формування форвардного курсу іноземної валюти – ціновий процес, упродовж якого відбувається продаж капіталу. Декомпозиція волатильності у рівнянні (2) робиться з єдиною метою – визначити можливі зміни форвардного курсу іноземної валюти до того, як він стане кінцевим, шляхом переходу від природної до критичної оцінки.

Таку модель форвардного курсу іноземної валюти можна вільно використовувати для оцінки валютних опціонів з різним строком погашення, але за однаковою страйк-ціною. Постає природне питання: яким чином пояснити часте виникнення ефекту "хвоста"? З цієї причини ми покладаємося на розширену версію логарифмічно нормальної динаміки форвардного курсу за межами геометричного броунівського руху та стверджуємо, що стохастична волатильність еволюціонує, що суперечить теорії Гестона (1993), яка спирається на звичайну волатильність $V(t)$, що настає після повернення середнього значення квадратного кореня:

$$\frac{dFX_N(t)}{FX_N(t)} = \sigma_N^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_N}}(t), \quad dV(t) = \alpha\left(\theta - V(t)\right)dt + \xi\sqrt{V(t)}dW_4(t) \tag{3}$$
$$dW_1(t)dW_4(t) = \rho_{14}dt, \quad dW_2(t)dW_4(t) = \rho_{24}dt, \quad dW_3(t)dW_4(t) = \rho_{34}dt$$

Будь-який попередній форвардний курс іноземної валюти вже не слідує за мартингалом, але його динаміка, згідно з P_{t_N} , визначається наступним чином:

$$\text{Якщо } FX_i(t) = \frac{B^f(t,t_i)Q(t)}{B(t,t_N)} \Big/ \frac{B(t,t_i)}{B(t,t_N)} \Rightarrow \frac{dFX_i(t)}{FX_i(t)} = \mu_i^{fx}(t)dt + \sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_N}}(t),$$
$$\text{де} \quad \mu_i^{fx}(t)dt = -\left(\sigma_i(t)dW_1^{P_{t_N}}(t) - \sigma_N(t)dW_1^{P_{t_N}}(t)\right)$$
$$\left(\sigma_i^f(t)dW_2^{P_{t_N}}(t) + \sigma^q(t)dW_Q^{P_{t_N}}(t) - \sigma_N(t)dW_1^{P_{t_N}}(t) - \sigma_i(t)dW_1^{P_{t_N}}(t) + \sigma_N(t)dW_1^{P_{t_N}}(t)\right)$$
$$= -\sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_N}}(t)\sum_{j=i}^{N-1}\frac{\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}{1+\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}\gamma_{t_i}(t)dW_1^{P_{t_N}}(t) \Rightarrow$$
$$\mu_i^{fx}(t) = -\sum_{j=i}^{N-1}\frac{\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}{1+\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}\gamma_{t_i}(t)\sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{13},$$

[1] Беннер, Зяпков та Йортзік (2007) демонструють класифікацію волатильності спотів у іноземній валюті $\sigma^q(t)$.

[2] Для детальнішого ознайомлення з існуючими приблизними значеннями та з метою впровадження нової системи обчислень на основі броунівських мостів див. Беннер та ін. (2007), розділ 3. Технологія "drift-freezing" (призупинення руху) розроблена Данілуком та Гатареком (2005).

процес еволюції волатильності якого такий:

$$Якщо\ dW_4(t) = dW_4^{P_{t_N}}(t) + \frac{dB(t,t_N)}{B(t,t_N)} dW_4(t) = dW_4^{P_{t_N}}(t) + \sigma(t,t_N)\rho_{14}dt \quad \Rightarrow$$

$$dV(t) = \left[\alpha\left(\theta - V(t)\right) + \xi\sqrt{V(t)}\sigma(t,t_N)\rho_{14}\right]dt + \xi\sqrt{V(t)}dW_4^{P_{t_N}}(t).$$

Функції відхилень обох тимчасових структур процентних ставок, згідно з показником вірогідності P_{t_N}, ще необхідно визначити. Зрозуміло, що відхилення внутрішнього лібору набуває вигляду:

$$\mu_i(t) = -\sum_{j=i+1}^{N-1} \frac{\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})\gamma_{t_j}(t)\gamma_{t_i}(t)}{1+\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}, \quad i < N-1.$$

Послідовна процедура, починаючи з тимчасового іноземного лі бору та повертаючись назад до моменту досягнення спот-ціни, відображає еволюцію іноземної тимчасової структури. Оскільки будь-який обернений актив у вигляді відповідної валюти стане мартингалом з відповідною оцінкою, можна зробити висновок, що $L_{N-1}^f(t)B^f(t,t_N)Q(t)$ – портфель іноземних облігацій у національній валюті – не буде змінюватись, якщо поділити його на грошову одиницю $B(t,t_N)$:

$$d\frac{L_{t_{N-1}}^f(t)B^f(t,t_N)Q(t)}{B(t,t_N)} = \left[\mu_{N-1}^f(t) + \gamma_{N-1}^f(t)\sigma_N^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{23}\right]\frac{L_{t_{N-1}}^f(t)B^f(t,t_N)Q(t)}{B(t,t_N)}dt +$$

$$\frac{L_{t_{N-1}}^f(t)B^f(t,t_N)Q(t)}{B(t,t_N)}\gamma_{N-1}^f(t)dW_2^{P_{t_N}}(t) + \frac{L_{t_{N-1}}^f(t)B^f(t,t_N)Q(t)}{B(t,t_N)}\sigma_N^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_N}}(t) \quad \Rightarrow$$

$$\mu_{N-1}^f(t) = -\gamma_{N-1}^f(t)\sigma_N^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{23}.$$

Використовуючи ті самі способи вирішення для випадкового іноземного лібору до моменту, як він стане кінцевим, отримуємо:

$$Якщо \quad \frac{L_{t_i}^f(t)B^f(t,t_{i+1})Q(t)}{B(t,t_N)} = L_{t_i}^f(t)FX_{i+1}(t)\frac{B(t,t_{i+1})}{B(t,t_N)} \quad та \quad i < N-1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\left[L_{t_i}^f(t)B_{i+1}^f(t)Q(t)/B_N(t)\right]}{L_{t_{N-1}}^f(t)B_{i+1}^f(t)Q(t)/B_N(t)} = \left(\mu_i^f + \gamma_{t_i}^f(t)\sigma_{i+1}^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{23} + \gamma_{t_i}^f(t)\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\alpha_j L_{t_j}(t)\gamma_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L_{t_j}(t)}\rho_{12}\right)dt$$

$$\gamma_{t_i}^f(t)dW_2^{P_{t_N}}(t) + \sigma_{i+1}^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_N}}(t) + \sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\alpha_j L_{t_j}(t)\gamma_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L_{t_j}(t)}dW_1^{P_{t_N}}(t) \quad \Rightarrow$$

$$\mu_i^f = -\gamma_{t_i}^f(t)\sigma_{i+1}^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{23} - \gamma_{t_i}^f(t)\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\alpha_j L_{t_j}(t)\gamma_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L_{t_j}(t)}\rho_{12}.$$

На основі отриманих результатів зазначимо, що запропонована в даному дослідженні ринкова міжвалютна модель LIBOR може бути представлена наступною системою стохастичних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\frac{dL_{t_i}(t)}{L_{t_i}(t)} = -\gamma_{t_i}(t)\sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})\gamma_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}dt + \gamma_{t_i}(t)dW_1^{P_{t_N}}(t)\\
&\frac{dL_{t_i}^f(t)}{L_{t_i}^f(t)} = -\gamma_{t_i}^f(t)\left(\sigma_{i+1}^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{23} + \sum_{j=i+1}^{N-1}\frac{\alpha_j L_{t_j}(t)\gamma_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L_{t_j}(t)}\rho_{12}\right)dt + \gamma_{t_i}^f(t)dW_2^{P_{t_N}}(t)\\
&\frac{dFX_i(t)}{FX_i(t)} = -\sum_{j=i}^{N-1}\frac{\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})\gamma_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L(t,t_j,t_{j+1})}\sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}\rho_{13}dt + \sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_N}}(t)\\
&dV(t) = \left[\alpha\left(\theta - V(t)\right) + \xi\sqrt{V(t)}\sigma(t,t_N)\rho_{14}\right]dt + \xi\sqrt{V(t)}dW_4^{P_{t_N}}(t)\\
&dW_m(t)dW_l(t) = \rho_{ml}dt,\ Якщо \quad m,l = \{1,2,3,4\} \quad та \quad m \neq l.
\end{aligned} \tag{4}$$

Коефіцієнти кореляції ρ_{ml}, $m,l=1,2,3$, можна отримати або за допомогою початкової оцінки, або економної параметризації функції кореляції[1]. Навіть припустивши, що обидва типи (внутрішні/національні та зовнішні/іноземні) волатильності ліборів вже були класифіковані незалежно від кепів у єдиній валюті та свопціонів, модель дослідження все ще потребує єдиної системи класифікації, якщо є мета використовувати її як інструмент оцінювання міжвалютних екзотичних опціонів.

2. Формули оцінки опціонів та порядок класифікації

2.1. Оцінка опціону іноземної валюти згідно з трансформацією Фур'є. Ціна опціону в іноземній валюті i^{th} в момент t_0 при натуральній P_{t_i} та при еквівалентній P_{t_N} оцінках має наступний вигляд:

$$FXopt_i(t_0)=B(t_0,t_i)E^{P_{t_i}}\left[\left(FX_i(t)-K\right)^+ \mid \mathrm{F}_{t_0}\right]=B(t_0,t_N)E^{P_{t_N}}\left[\left(FX_i(t)-K\right)^+\frac{B(t,t_i)}{B(t,t_N)}\mid \mathrm{F}_{t_0}\right].$$

Згідно з натуральною оцінкою вірогідності, встановлення вірної ціни на опціон з постійною динамікою $FX_i(t)$ можливе лише у випадку, якщо дисконтування здійснюється при належній системі розрахунку – у даному випадку це строк погашення облігації у період t_i. Використання будь-якої іншої міри оцінки приведе до коваріації між дисконтуванням та виплатою, наприклад, при оцінюванні ванільних опціонів на весь спектр форвардних курсів іноземної валюти $FX_i(t)$, $i=1,...,N$. Для того, щоб повернути початкову вартість опціону, необхідно стабілізувати форвардний курс іноземної валюти. Також слід розробити модель стохастичної еволюції (див. рівняння (4)). Перед оцінкою деривативних структур можна впорядкувати модель, використовуючи будь-який показник вірогідності, оскільки, наприклад, при погашенні опціонів "звичайна ваніль" враховується лише один форвардний курс іноземної валюти у встановлений проміжок часу. Доцільно використовувати модель, спеціально підігнану під кінцевий термін закінчення опціону, через те що "ваніль" залежить від кінцевого розподілу, напротивагу екзотичним опціонам, чия вартість, зазвичай, залежить від комплексної динаміки часу на весь ряд курсів іноземної валюти. Відповідно, щоразу ми повертаємося до натуральної оцінки P_{t_i} та тієї самої моделі класифікації, хоча вже з різними коефіцієнтами вірогідності, щоб уникнути несприятливих наслідків при вирішенні рівняння в замкненому вигляді.

Вартість опціону в іноземній валюті можна змінити, застосувавши трансформацію Фур'є, де єдиним невизначеним компонентом залишається умовна характеристична функція $\phi^i_{t_0}(\cdot)$ логарифму $\ln\left(FX_i(t)\right)=Y_i(t)$ $\qquad \phi^i_{t_0}(u)=E^{P_{t_i}}\left(e^{iuY_i(t)}\mid \mathrm{F}_{t_0}\right)$.

Таким чином:

$$\frac{FXopt_i(t_0)}{B(t_0,t_i)}=FX_i(t_0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi^i_{t_0}(u-i)}{iu\phi^i_{t_0}(-i)}\right]du\right)-K\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iu\ln K}\phi^i_{t_0}(u)}{iu}\right]du\right). \tag{5}$$

Один знедоліків вищезазначеної формули – специфіка підінтегральної функції в конкретний момент u = 0, що стає на заваді прикладного використання трансформації Фур'є. Для більш ефективної оцінки опціонів Карр та ін. (1999) розробили новий аналітичний різновид трансформації Фур'є (див. додаток), який грунтується на теоремі звернення Леві, а також квадратурній формулі Гауса-Лагерра (див. рівняння (5)). Таким чином, процедура оцінки опціонів скорочується до визначення невідомої умовної характеристичної функції. Динаміка опціонів в іноземній валюті, наступна:

$$3 \quad \sigma(t,t_i)=-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\alpha_j L_{t_j}(t)}{1+\alpha_j L_{t_j}(t)}\gamma_{t_j}(t)-\frac{\alpha_0 L_t(t)}{1+\alpha_0 L_t(t)}\gamma_t(t); dW_m(t)dW_l(t)=\rho_{ml}dt; m,l=\{1,3,4\}$$

$$dY_i(t)=-\frac{1}{2}\sigma_i^{fx}(t)^2V(t)dt+\sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_i}}(t)$$

$$dV(t)=\left[\alpha\left(\theta-V(t)\right)+\xi\sqrt{V(t)}\sigma(t,t_i)\rho_{14}\right]dt+\xi\sqrt{V(t)}dW_4^{P_{t_i}}(t)$$

$$\frac{dL_{t_j}(t)}{L_{t_j}(t)}=-\gamma_{t_j}(t)\sum_{k=j+1}^{i-1}\frac{\alpha_k L(t,t_k,t_{k+1})\gamma_{t_k}(t)}{1+\alpha_k L(t,t_k,t_{k+1})}dt+\gamma_{t_j}(t)dW_1^{P_{t_i}}(t).$$

(6)

[1] Для більш детального ознайомлення з напівпараметричною структурою кореляції досліджуваної моделі, що відповідає початковій оцінці, звертайтеся до Шьонмейкерса та Коффі (2003).

За Марковим, характеристична функція:

$$\phi_{t_0}^i(u, y, v, l_0, ..., l_{i-1}) = E^{P_{t_i}}\left(e^{iuY_i(t)} \mid Y_i(t_0) = y, V(t_0) = v, L_{t_0}(t_0) = l_0, ..., L_{t_{i-1}}(t_0) = l_{i-1}\right)$$

визначається як диференціальне рівняння в часткових похідних (PDE), яке можна знайти за теоремою Фейнмана-Каца. Щоб вирішити рівняння в замкненому вигляді за методом Гестона (1993), необхідно упевнитися в лінійності коефіцієнтів PDE, чому перешкоджає показник відхилення $\xi\sqrt{V(t)}\sigma(t,t_i)\rho_{14}$. Одразу стає зрозумілим, що єдиний спосіб експліцитного обчислення потрібної характеристичної функції – зміщення процесу волатильності лінійної функції $V(t)$ та виключення з ліборів стохастичної залежності в результаті волатильності облігацій $\sigma(t,t_i)$. Асимптотика динаміки ліборів заважає лінійності l_k, $k = 0,...,i-1$. Традиційне вирішення проблеми ліборів – їх замороження на позначці початкової ціни. Зокрема, необхідно визначити квадратний корінь волатильності в рамках функції відхилення. Після внесення уточнень до рівняння першої різності (6) отримуємо:

$$\begin{aligned}
&З \quad \sqrt{V(t)} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t_0)} + \frac{V(t)}{\sqrt{V(t_0)}}\right), \; dW_3^{P_{t_i}}(t)dW_4^{P_{t_i}}(t) = \rho_{34}dt \quad та \\
&\sigma(t,t_i) \approx \sigma(t_0,t_i) = -\sum_{j=1}^{i-1}\frac{\alpha_j L_{t_j}(t_0)}{1+\alpha_j L_{t_j}(t_0)}\gamma_{t_j}(t_0) - \frac{\alpha_0 L_{t_0}(t_0)}{1+\alpha_0 L_{t_0}(t_0)}\gamma_{t_0}(t_0) \;\Rightarrow \\
&dY_i(t) = -\frac{1}{2}\sigma_i^{fx}(t)^2 V(t)dt + \sigma_i^{fx}(t)\sqrt{V(t)}dW_3^{P_{t_i}}(t) \\
&dV(t) = \left[\alpha\left(\theta - V(t)\right) + \xi\frac{1}{2}\left(\sqrt{V(t_0)} + \frac{V(t)}{\sqrt{V(t_0)}}\right)\sigma(t_0,t_i)\rho_{14}\right]dt + \xi\sqrt{V(t)}dW_4^{P_{t_i}}(t),
\end{aligned} \tag{7}$$

Наступне диференціальне рівняння в часткових похідних зі зворотними показниками змінних можна зобразити за допомогою наступної граничної умови:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\phi}{\partial t_0} + \left[\alpha\left(\theta - v\right) + \frac{1}{2}\xi\sqrt{V(t_0)}\sigma(t_0,t_i)\rho_{14} + \frac{1}{2}\xi\frac{\sigma(t_0,t_i)}{\sqrt{V(t_0)}}\rho_{14}v\right]\frac{\partial\phi}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial y}\sigma_i^{fx}(t_0)^2 v + \\
&\frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\sigma_i^{fx}(t_0)^2 v + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\xi^2 v + \frac{\partial^2\phi}{\partial v\partial y}\sigma_i^{fx}(t_0)\xi\rho_{34}v = 0 \\
&\phi_t^i(u) = e^{iuy}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Представивши коефіцієнти лінійності диференціального рівняння в часткових похідних як v, пропонуємо наступне вирішення:

$$\phi_{t_0}^i(u, y, v) = e^{C(t-t_0)+D(t-t_0)v+iuy}, \quad where \quad C(0) = 0 \quad and \quad D(0) = 0. \tag{9}$$

Вносячи даний анзац у рівняння (8), отримуємо два звичайних диференціальних рівняння:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial t_0} = \frac{1}{2}\xi^2 D^2 + \left[\frac{1}{2}\xi\frac{\sigma(t_0,t_i)}{\sqrt{V(t_0)}}\rho_{14} + iu\sigma_i^{fx}(t_0)\xi\rho_{34} - \alpha\right]D - \frac{1}{2}u^2\sigma_i^{fx}(t_0)^2 - \frac{1}{2}iu\sigma_i^{fx}(t_0)^2 \\
&\frac{\partial C}{\partial t_0} = D\left[\alpha\theta + \frac{1}{2}\xi\sqrt{V(t_0)}\sigma(t_0,t_i)\rho_{14}\right].
\end{aligned} \tag{10}$$

Як наведено в додатку, перше рівняння – рівняння Ріккаті (див. Оксендаль, 2000, глава 6), яке вирішується шляхом скорочення його до вигляду звичайного лінійного диференціального рівняння другого порядку; друге рівняння вирішується за допомогою прямого інтегралу (див. (B16) та (B18)). Отримуємо аналітичне вираження характеристичної функції (9), яка уможливлює числове визначення ціни опціону (5).

2.2. Порядок класифікації. З метою наочного зображення пропонуємо фіктивний приклад підгонки моделі під опціони в іноземній валюті для п'яти строків погашення та за різними страйк-цінами.

Таку процедуру теоретично можна розширити до будь-якої кількості строків погашення та страйк-цін за рахунок подовження часу дослідження. Ринкова вартість опціонів у іноземній валюті за угодами для різних страйк-цін та строків погашення заборгованості утворюється таким чином:

$$K_j(i) = FX_i(t_0)e^{0.1\times\sqrt{i}\times\delta(j)},$$
$$\text{де } i,j = 1,\ldots 5 \text{ та } \delta(j) = -1,-0.5,0,0.5,1. \quad (11)$$

Ця формула була взята за основу процедури класифікації.

Таблиця 1. Ринкові ціни курсів іноземної валюти за угодами з премією (у векселях, які слід оплатити) для різних страйк-цін та строків погашення заборгованості

Строк погашення	Опціон в іноземній валюті 1	Опціон в іноземній валюті 2	Опціон в іноземній валюті 3	Опціон в іноземній валюті 4	Опціон в іноземній валюті 5
1 рік	74.31572	47.68933	25.64710	11.21897	3.99027
2 роки	90.20941	53.70243	23.56308	6.77430	1.26618
3 роки	98.96450	56.78179	21.40343	4.11798	0.38920
4 роки	103.73044	58.84490	20.92330	3.29027	0.20156
5 років	105.93154	60.10471	21.14829	3.11624	0.15548

Перш за все слід перевірити, чи має ринок опціонів в іноземній валюті безвідсотковий "хвіст" чи ні. Стандартною процедурою було б обрати страйк-ціну "при своїх" (ATM), яка відповідає третьому опціону в таблиці 1, через те, що $\delta(j) = 0$, а $K_j(i) = FX_i(t_0)$ відповідно, підрахунок волатильності ATM здійснюється шляхом інверсії формули оцінки логарифмічно нормального опціону. Потім та сама волатильність використовується для визначення вартості опціонів за різними страйк-цінами (див. рівняння (11)). Результати, наведені в таблиці 2, підкреслюють той факт, що опціони в іноземній валюті мають чітко виражену криву волатильності, коли опціони "колл/пут" (ITM) недооцінюються, а опціони без грошей (OTM) – навпаки, переоцінюються. Виникає необхідність вийти за межі стандартної геометричної функції броунівського руху та покластися на динаміку логарифмічно нормального форвардного курсу іноземної валюти, який базується на стохастичній волатильності.

Таблиця 2. Ціна дострокового погашення опціонів в іноземній валюті (у векселях, які слід оплатити) згідно з оцінкою внутрішньої волатильності "при своїх" (ATM)

Строк погашення	Опціон в іноземній валюті 1	Опціон в іноземній валюті 2	Опціон в іноземній валюті 3	Опціон в іноземній валюті 4	Опціон в іноземній валюті 5
1 рік	71.97134	46.15283	25.64710	11.96459	4.55733
2 роки	88.39820	52.03995	23.56308	7.48320	1.54316
3 роки	97.65900	55.09986	21.40343	4.78883	0.53401
4 роки	102.85492	57.42792	20.92330	3.94375	0.31927
5 роки	105.22879	58.83967	21.14829	3.80896	0.28176

Класифікація здійснюється згідно з цінами дострокового погашення (див. табл. 1), визначеними за допомогою рівняння (5). Щоб отримати найкращу числову оцінку обох інтегралів Фур'є, використовуємо квадратичну формулу Гауса-Лагерра в інтервалі $[0,\infty)$ з ваговою функцією $w(x) = e^{-x}$ (див. Абрамовіц та ін. (1972)). Необхідні параметри класифікації моделі наступні: (1) процес волатильності: $\xi = 0.01$, $\alpha = 0.02$, $\theta = 0.001$ та $V(t_0) = 0.01$; (2) коефіцієнти волатильності іноземної валюти: $\sigma_i^{fx}[i] = 1 - \exp(-0.05(i-0.2))$, $i = 1,...,5$; (3) коефіцієнти кореляції: $\rho_{14} = \rho_{34} = -0.2$. Щоб відтворити значення опціонів в іноземній валюті для великої кількості страйк-цін та термінів їх погашення, необхідно одночасно видозмінити параметри моделі (1), (2) та (3), допоки сума різниці між ціною, запропонованою ринком, та ціною в моделі не буде мінімізована. У даному дослідженні вона складає 8.56059 у векселях, що слід сплатити. З метою максимального зменшення розриву Δ^2 між матрицями моделі та ринковою матрицею використано натуральний нелінійний алгоритм мінімізації та метод сполучених градієнтів Девідона-Флетчера-Пауелла (DFP):

$$\Delta^2 = \sum_{i,j=1}^{5} \omega_{ij}\left(FXopt_{ij}^{market} - FXopt_{ij}^{model}\right)^2 \rightarrow Min! \quad (12)$$

Щоб найкращим чином відповідати "повній" інформації про ринок, класифікація проводиться за допомогою ідентичних постійних зважених значень ω, як це демонструє матриця ринкових цін. Кінцеві результати наведені в таблиці 3.

Таблиця 3. Відповідність матриці ринкових дострокових цін погашення, представлених в таблиці 1

Строк погашення	Опціон в іноземній валюті 1	Опціон в іноземній валюті 2	Опціон в іноземній валюті 3	Опціон в іноземній валюті 4	Опціон в іноземній валюті 5
1 рік	73.44406	47.58264	26.25862	11.46718	3.54044
2 роки	89.40880	53.47140	24.14783	6.74194	0.80012
3 роки	98.25958	56.37568	21.92059	3.97862	0.14489
4 роки	103.30069	58.59928	21.35842	3.08668	0.05267
5 років	105.40284	59.02163	19.80163	2.06586	0.00988

Завдяки моделі стохастичної волатильності значно покращився стан детерміністичної волатильності. Ціни середнього строку погашення (3 та 4 роки), представлені в таблиці, максимально точно відповідають реальним. Для більш короткого та тривалого строків (1 та 5 років) точність дещо порушена через певні обмеження процесу волатильності $V(t)$, загального для всіх форвардних курсів іноземної валюти.

Висновок

У статті запропоновано інтегровану ринкову модель LIBOR згідно з єдиним показником вірогідності в багатофакторному оточенні. Головна мета дослідження – розробити гнучку структуру цін процентної ставки екзотичних міжвалютних опціонів, яка б містила в собі якомога більше інформації про ринок. Щоб виконати цю задачу із задовільним результатом, необхідно підігнати ціни на опціони в іноземній валюті для усіх можливих строків погашення та страйк-цін. Даний напрямок класифікації моделі ускладнюється існуванням кривої волатильності, що є типовою ознакою опціонів в іноземній валюті. Для більшості міжвалютних деривативів здається неможливим обрати певний страйк або конкретну дату погашення опціону. Процедура посилена логарифмічно нормальною динамікою форвардного курсу іноземної валюти за межами геометричного броунівського руху та затверджує факт еволюції стохастичної волатильності усупереч твердженням Гестона (1993) стосовно волатильності, єдиної для усіх форвардних курсів, що відповідає поверненню середнього значення квадратних коренів. Після представлення умовної характеристичної функції в приблизну аналітичну форму для її подальшого математичного вирішення отримано формули замкненого виду цін на міжвалютні опціони та вирішено за допомогою квадратурної формули Гаусса-Лагера. Ціна, вказана в моделі, є основною для процедури класифікації, за допомогою якої стали можливими порівняння параметрів моделі та мінімізація розриву між цінами в моделі та на ринку. Отже, оцінювання екзотичних продуктів зі ставкою відсотка в різних валютах – складна задача, оскільки дрейфуючі функції динаміки як зовнішніх/іноземних ліборів, так і форвардного курсу, не кажучи вже про обтяжуючу стохастичну залежність від ставок LIBOR, залучають додаткові зовнішні, внутрішні та взаємно корельовані процеси волатильності.

Список використаних джерел

1. Abramowitz, M. and I.A. Stegun (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover, New York, pp. 890-923.
2. Andersen, L., and J. Andreasen (2000). Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model, *Applied Mathematical Finance*, 7, pp. 1-32.
3. Andersen, L., and J. Andreasen (2002). Volatile Volatilities, *RISK*, December, pp. 163-168.
4. Andersen, L. and R. Brothertone-Ratcliffe (2005). Extended LIBOR Market Models with Stochastic Volatility, *The Journal of Computational Finance*, 9, 1.
5. Bakshi, G., and D. Madan (2000). Spanning and Derivative Security Valuation, *Journal of Financial Economics*, 55, pp. 205-238.
6. Benner, W., Zyapkov, L., and S. Jortzik (2007). A Multifactoral Cross-Currency LIBOR Market Model, SSRN working paper.
7. Brigo, D., and F. Mercurio (2002). Calibrating Libor, *RISK*, January, pp. 117-121.
8. Carr, P., and D. Madan (1999). Option Valuation using the Fast Fourier Transform, *Journal of Computational Finance*, 2, pp. 61-73.
9. Daniluk, A., and D. Gatarek (2005). A fully lognormal LIBOR Market Model, *RISK*, September, pp. 115-119.
10. Heston, S. (1993). A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies*, 6, 2, pp. 327-343.
11. Gil-Pelaez, J. (1951). Note on the Inversion Theorem, *Biometrika*, 38, 3/4, pp. 481-482.
12. Glasserman, P., and N. Merener, (2003a). Numerical Solution of Jump-Diffusion LIBOR Market Models, *Finance and Stochastics*, 7, 1, pp. 1-27.
13. Glasserman, P. and S.G. Kou (2003b). The Term Structure of Simple Forward Rates with Jump Risk, *Mathematical Finance*, 13, 3, pp. 383-410.
14. Joshi, M., and R. Rebonato (2003). A Displaced-Diffusion Stochastic Volatility LIBOR Market Model: Motivation, Definition and Implementation, *Quantitative Finance*, 3, 6, pp. 458-469.
15. Oksendal, B. (2000). Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
16. Piterbarg, V. (2003). A Stochastic Volatility Forward LIBOR Model with a Term Structure of Volatility Smiles, SSRN Working Paper.
17. Piterbarg, V. (2005a). Stochastic Volatility Model with Time-Dependent Skew, *Applied Mathematical Finance*, 12, 2, pp. 147-185.
18. Piterbarg, V. (2005b). Time to Smile, *RISK*, May, pp. 71-75.
19. Piterbarg, V. (2006). Smiling Hybrids, *RISK*, May, pp. 66-71.
20. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., and B.P. Flannery (1996). Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 425-430.

21. Rebonato, R. (2002). Modern Pricing of Interest Rate Derivatives. The LIBOR Market Model and Beyond, Princeton University Press, New Jersey.
22. Rubinstein, M. (1983). Displaced Diffusion Option Pricing, *Journal of Finance*, 38, pp. 213-217.
23. Schloegl, E. (2002). A Multicurrency Extension of the Lognormal Interest Rate Market Models, *Finance and Stochastics*, 6, pp. 173-196.
24. Schoenmakers, J., and B. Coffey, (2003). Systematic Generation of Correlation Structures for the LIBOR Market Model, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 6, 4, pp. 1-13.
25. Scott, L. (1997). Pricing Stock Options in a Jump-Diffusion Model with Stochastic Volatility and Interest Rates: Application of Fourier Inversion Methods, *Mathematical Finance*, 7, pp. 413-426.

Додаток А. Формула ціноутворення опціону в іноземній валюті

На основі видозміненої теореми звернення Жиля-Пелаеза (1951) припускаємо можливість закінчення строку опціону з позитивною внутрішньою вартістю, де $\ln\left(FX_i(t)\right)=Y_i(t)$ та $\ln(K)=k$ виглядають наступним чином:

$$\textit{Якщо}\ \phi_{t_0}^i(u)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{iuY}dP(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos(uY)+i\sin(uY)\right)dP(Y),¶$$

$$\frac{e^{iuk}\phi_{t_0}^i(-u)-e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}=\frac{2i\sin(uk)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(uY)dP(Y)-2\cos(uk)\int_{-\infty}^{\infty}i\sin(uY)dP(Y)}{iu}$$

$$\textit{та}\quad \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}\right]=\frac{\cos(uk)\int_{-\infty}^{\infty}i\sin(uY)dP(Y)-i\sin(uk)\int_{-\infty}^{\infty}\cos(uY)dP(Y)}{iu}\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{P}\left\{Y_i(t)<k\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{iuk}\phi_{t_0}^i(-u)-e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}du=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}\right]du\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{P}\left\{Y_i(t)>k\right\}=1-\mathrm{P}\left\{Y_i(t)<k\right\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}\right]du \tag{A12}$$

Дельта опціону є дещо спіралевидною. Для будь-яких позитивних показників λ та ε:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\lambda}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u-i)}{iu}\right]du=\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}e^{i(u-i)Y}dP(Y)}{iu}\right]du=\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{Y}e^{iu(Y-k)}dP(Y)}{iu}\right]du=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{Y}dP(Y)\int_{\varepsilon}^{\lambda}\mathrm{Re}\left[\frac{\cos u(Y-k)+i\sin u(Y-k)}{iu}\right]du=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{Y}dP(Y)\int_{\varepsilon}^{\lambda}\frac{\sin u(Y-k)}{u}du$$

Виходячи з цього рівняння, отримуємо ступеневу функцію, дозволивши ε дорівнювати 0, а λ схилятися до нескінченності, як це доводить Жиль-Пелаез (1951). Після чого отримуємо умовне математичне очікування наступного вигляду:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{Y}dP(Y)\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\varepsilon}^{\lambda}\frac{\sin u(Y-k)}{u}du=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}sign(Y-k)e^{Y}dP(Y)=\frac{1}{2}\int_{Y>k}e^{Y}dP(Y)-\frac{1}{2}\int_{Y<k}e^{Y}dP(Y)$$

$$\textit{З}\quad\int e^{Y}dP(Y)=\phi_{t_0}^i(-i)\quad\Rightarrow\quad\int_{Y>k}e^{Y}dP(Y)=\frac{\phi_{t_0}^i(-i)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u-i)}{iu}\right]du,$$

маючи на увазі, що дельта опціону визначається так:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u-i)}{iu\phi_{t_0}^i(-i)}\right]du \tag{A13}$$

Зважаючи на те, що $\phi_{t_0}^i(-i) = E^{P_{t_i}}\left(e^{i(-i)Y_i(t)} \mid \mathrm{F}_{t_0}\right) = FX_i(t_0)$, ціна опціону визначається за допомогою умовної характеристичної функції наступного вигляду:

$$\frac{FXopt_i(t_0)}{B(t_0,t_i)} = E^{P_{t_i}}\left[\left(FX_i(t)-K\right)^+ \mid \mathrm{F}_{t_0}\right]$$

$$=\left(\frac{\phi_{t_0}^i(-i)}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u-i)}{iu}\right]du\right)-K\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}\right]du\right) \tag{A14}$$

$$=FX_i(t_0)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u-i)}{iu\phi_{t_0}^i(-i)}\right]du\right)-K\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\frac{e^{-iuk}\phi_{t_0}^i(u)}{iu}\right]du\right).$$

Додаток Б. Розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Виходячи з рівняння Ріккаті, (10), отримуємо:

$$\frac{\partial D}{\partial t_0} = aD^2 + bD + c, \quad з \quad a = \frac{1}{2}\xi^2, \quad b = \frac{1}{2}\xi\frac{\sigma(t_0,t_i)}{\sqrt{V(t_0)}}\rho_{14} + iu\sigma_i^{fx}(t_0)\xi\rho_{34} - \alpha,$$
$$c = -\frac{1}{2}u^2\sigma_i^{fx}(t_0)^2 - \frac{1}{2}iu\sigma_i^{fx}(t_0)^2, \tag{B15}$$

Повертаємося до лінійного диференціального рівняння другого порядку шляхом наступної заміни:

$$\text{Нехай } aD = v \;\Rightarrow\; v' = aD' \;\Rightarrow\; v' = v^2 + bv + ca$$

$$\text{Замінимо } v = \frac{u'}{u} \;\text{ і оскільки }\; v' = -\frac{u''}{u} + v^2 \;\Rightarrow\; u'' = -bu' - acu.$$

Метод вирішення є експоненціальним та має наступний вигляд:

$$e^{z(t-t_0)} \;\Rightarrow\; z^2 - bz + ac = 0 \;\Rightarrow\; z_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2},$$

Зрештою, отримуємо наступне загальне рішення відповідно до граничної умови:

$$Ae^{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} + Be^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)}$$

$$\text{Оскільки } D(0) = 0 \quad a \quad D = \frac{u'}{au} \;\Rightarrow\; u'(t-t_0)\Big|_{t=t_0} = 0 \;\Rightarrow$$

$$A\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} + B\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2} = 0.$$

Однак ми не ставили за мету вирішити лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Нам не потрібні значення окремо для A та B, які, у свою чергу, ґрунтуються на неможливості сингулярної граничної умови. Коефіцієнта A/B достатньо, оскільки потрібно знайти $D(t-t_0)$. У результаті отримуємо:

$$\text{Якщо } \frac{A}{B} = -\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{b+\sqrt{b^2-4ac}} \;\Rightarrow$$

$$D(t-t_0) = \frac{u'}{au} = -\frac{\left.A\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}e^{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} + B\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}e^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)}\right/ : B}{\left.aAe^{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} + aBe^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)}\right/ : B}$$

$$= -\frac{\left.\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}e^{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}e^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} \right/ : e^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)}}{\left. a\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{b+\sqrt{b^2-4ac}}e^{\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} + ae^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)} \right/ : e^{\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}(t-t_0)}}$$

$$= \frac{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2} + \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2}e^{\sqrt{b^2-4ac}(t-t_0)}}{a + a\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{b+\sqrt{b^2-4ac}}e^{\sqrt{b^2-4ac}(t-t_0)}} \quad \Rightarrow$$

$$D(t-t_0) = \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\left(\frac{1-e^{\sqrt{b^2-4ac}(t-t_0)}}{1-\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{b+\sqrt{b^2-4ac}}e^{\sqrt{b^2-4ac}(t-t_0)}}\right). \tag{B16}$$

Звичайне диференціальне рівняння виглядає таким чином:

$$\frac{\partial C}{\partial t_0} = \alpha\_\theta.D, \quad with \quad \alpha\_\theta = \alpha\theta + \frac{1}{2}\xi\sqrt{V(t_0)}\sigma(t_0,t_i)\rho_{14}, \tag{B17}$$

та вирішується шляхом прямого інтегрування:

$$\textit{Якщо } C(0)=0 \quad i \quad j=\sqrt{b^2-4ac} \quad \Rightarrow \quad C(0)-C(t-t_0) = \alpha\_\theta\int_{t_0}^{t} D(t-u)du \quad \Rightarrow$$

$$C(t-t_0) = \alpha\_\theta\int_0^{t-t_0} D(u)du = \alpha\_\theta\frac{j-b}{2a}\int_0^{t-t_0}\frac{1-e^{ju}}{1-\frac{b-j}{b+j}e^{ju}}du. \quad Put \quad 1-\frac{b-j}{b+j}e^{ju} = y \quad \Rightarrow$$

$$C(t-t_0) = -\alpha\_\theta\frac{j-b}{2aj}\int_{1-\frac{b-j}{b+j}}^{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}\frac{1-\frac{(1-y)(b+j)}{b-j}}{y(1-y)}dy$$

$$= \alpha\_\theta\frac{j-b}{2aj}\frac{b+j}{b-j}\ln\left(\frac{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}{1-\frac{b-j}{b+j}}\right) - \alpha\_\theta\frac{j-b}{2aj}\int_{1-\frac{b-j}{b+j}}^{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}\right)dy$$

$$= -\frac{\alpha\_\theta(b+j)}{2aj}\ln\left(\frac{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}{1-\frac{b-j}{b+j}}\right) - \frac{\alpha\_\theta(j-b)}{2aj}\ln\left(\frac{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}{1-\frac{b-j}{b+j}}\right)$$

$$+ \alpha\_\theta\frac{j-b}{2aj}\int_{1-\frac{b-j}{b+j}}^{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}\frac{1}{1-y}d(1-y)$$

$$= -\frac{\alpha\_\theta}{a}\ln\left(\frac{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}{1-\frac{b-j}{b+j}}\right) + \alpha\_\theta\frac{j-b}{2aj}\int_{1-\frac{b-j}{b+j}}^{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}\frac{1}{1-y}d(1-y) \quad \Rightarrow$$

$$C(t-t_0)=-\frac{\alpha\_\theta}{a}\ln\left(\frac{1-\frac{b-j}{b+j}e^{j(t-t_0)}}{1-\frac{b-j}{b+j}}\right)+\alpha\_\theta\frac{j-b}{2aj}(t-t_0). \qquad \text{(B18)}$$

Підводячи підсумок, обираємо варіанти (B16) та (B18) в якості вирішення звичайних диференціальних рівнянь (10), що є невід'ємною частиною характеристичної функції (9), де a, b, c та α_θ – замінники, попередньо визначені у рівняннях (B15) та (B17) відповідно.

Отримано 04.09.2008.
Переклад з англ. Є Мязіної.