ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

УДК 517.547

ПРО ОДИН КЛАС δ - СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ У ПІВПЛОЩИНІ

Коломієць С.В.

Розглянемо функцію зростання $\gamma(r)$, яка є додатною, неперервною, необмеженою на $[0;\infty)$. Ми вводимо клас δ-субгармонічних функцій скінченного r^{ρ} типу у півплощині і знаходимо критерії належності функції до даного класу. Ці критер формулюються у термінах коефіцієнтів Фур'є функції.

Як завжди, позначимо через **C, R, N** відповідно комплексну площину, дійсн вісь та множину натуральних чисел. Позначимо через $\mathbf{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ верхн півплощину. Через A,B, ... будемо позначати додатні сталі, що можуть змінюватись н протязі статті. Дотримуючись термінології з [1], будемо називати субгармонічну в **C** функцію справжньо-субгармонічною, якщо $\overline{\lim_{z \to t}} v(z) \le 0$ для всіх $t \in \mathbf{R}$. Кла справжньо-субгармонічних функцій в $\mathbf{C}_+$ позначимо через *JS*.

Нехай *SK* – клас субгармонічних функцій в $\mathbf{C}_+$, що мають додатну гармонічн мажоранту в будь-якій обмеженій області в $\mathbf{C}_+$. Функції класу *SK* мають наступн властивості [1] :

a) майже для всіх $t \in (-\infty, \infty)$ існує кутова границя $v(t)$,

   $v(t) \in L^1_{loc}(-\infty;\infty)$;

b) на дійсній осі існує міра ν така, що для будь-яких a і b, $a < b$ має місц рівність

$$\lim_{y \to +0} \int_a^b v(t+iy)dt = \nu([a;b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Міра ν називається граничною мірою функції v;

c) має місце рівність

$$d\nu(t) = v(t)dt + d\sigma(t),$$

де σ - міра, сингулярна відносно міри Лебега. Міра σ називається сингулярно граничною мірою функції v.

Для функції $v \in SK$ визначимо, дотримуючись [1], повну міру λ як

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{C_+ \cap K} \operatorname{Im} \zeta d\mu(\zeta) - \nu(K),$$

де μ - ріссівська міра функції v. Міра λ має наступні властивості :

1) λ - скінченна на кожному компакті $K \subset \mathbf{C}$,
2) λ - додатна міра поза $\mathbf{R}$,
3) λ дорівнює нулю у півплощині $\mathbf{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Для функції $v \in SK$ повна міра λ відіграє ту ж роль, що і ріссівська міра для функцій, субгармонічних у всій площині. Точніше, якщо кожна із субгармонічних функцій v_1 і v_2 класу SK має повну міру λ, то існує ціла функція $g(z)$ така, що $v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z)$, $z \in \mathbf{C}_+$.

Відмітимо, що $JS \subset SK$ [1].

Розглянемо тепер клас δ-субгармонічних функцій [2] $J\delta = JS - JS$. Клас $J\delta$ є найбільш широким класом δ-субгармонічних функцій у півплощині, для яких можна визначити неванліннівську характеристику. Відмітимо, що $J\delta = SK - SK$.

Для заданої міри λ позначимо

$$d\lambda_m(\zeta) = \frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\tau^{m-1}d\lambda(\zeta) \quad (\zeta = \tau e^{i\varphi}),\ \lambda_m(r) = \lambda_m\left(\overline{C(0,r)}\right),$$

де $\dfrac{\sin m\varphi}{\sin\varphi} = m$, при $\varphi = 0, \pi$.

В роботі будемо використовувати формулу Карлемана в позначеннях А.П. Гришина :

$$\frac{1}{r_2^{\,k}}\int_0^{\pi} v(r_2 e^{i\varphi})\sin k\varphi d\varphi = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}dt + \frac{1}{r_1^{\,k}}\int_0^{\pi} v(r_1 e^{i\varphi})\sin k\varphi d\varphi\ , \tag{1}$$

Якщо $k = 1$, тоді

$$\frac{1}{r_2}\int_0^{\pi} v(r_2 e^{i\varphi})\sin\varphi d\varphi = \int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda\ (t)}{t^3}dt + \frac{1}{r_1}\int_0^{\pi} v(r_1 e^{i\varphi})\sin\varphi d\varphi\,, \tag{2}$$

для всіх $r_2 > r_1$.

Відмітимо ще одну нерівність, яка буде корисною надалі.

$$|\lambda_m(r)| = \left|\iint\limits_{C(0,r)} d\lambda_m(\zeta)\right| = \left|\iint\limits_{C(0,r)}\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}\tau^{m-1}d\lambda(\zeta)\right| \le m\iint\limits_{C(0,r)}\tau^{m-1}d|\lambda|(\zeta) \le mr^{m-1}|\lambda|(r)\,. \tag{3}$$

Коефіцієнти Фур'є функції $v \in J\delta$ визначаються рівністю [3] :

$$c_k(r,v) := \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(re^{i\theta})\sin k\theta d\theta, \quad k \in N. \tag{4}$$

Якщо при визначенні класів функцій, що зростають, ми використовуємо класичну неванлінівську характеристику $T(r,v)$, тоді функція зростання $\gamma(r)$ повинна задовольняти умову $\varliminf_{r\to\infty}\dfrac{\gamma(r)}{r} > 0$. Якщо ж ми розглядаємо загальний випадок без обмежень на функцію зростання (наприклад, $\gamma(r) = r^{\rho}$, де $0 < \rho < 1$), тоді потрібно розглядати більш складну характеристику, ніж неванлінівська.

В роботі ми розглядаємо функцію зростання $\gamma(r) = r^{\rho}$, де $0 < \rho < 1$.

Нехай $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ - повна міра функції v, $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ - жордановий розклад міри λ (відмітимо, що λ_- не є повною мірою v_-).

Дотримуючись [2], позначимо через

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int_0^{\pi} v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi d\varphi, \quad N(r_1,r_2,v) := \int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda_-(t)}{t^3}dt,$$

$$T(r_1,r_2,v) := m(r_2,v) + m(r_1,-v) + N(r_1,r_2,\lambda),$$

де $r_2 > r_1$.

В цих позначеннях формула Карлемана (2) може бути записаною у вигляді :

$$T(r_1,r_2,v) = T(r_1,r_2,-v), \qquad (5$$

Означення 1 Функція $v \in J\delta$ називається функцією скінченного r^{ρ} - типу, якщо існу стала $A > 0$, така що

$$T(r_1,r_2,v) := m(r_2,v) + m(r_1,-v) + \int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda_-(t)}{t^3}dt \le \frac{A}{r_1^{1-\rho}} + \frac{A}{r_2^{1-\rho}},$$

для всіх $r_2 > r_1$.

Клас δ-субгармонічних функцій скінченного r^{ρ}-типу позначимо через $J\delta(r^{\rho})$, клас справжньо-субгармонічних функцій скінченного r^{ρ}-типу - через $JS(r^{\rho})$.

Означення 2 Додатна міра λ має скінченну r^{ρ}-щільність, якщо при деякому значенн $A > 0$ виконується нерівність:

$$N(r_1,r_2,\lambda) := \int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda(t)}{t^3}dt \le \frac{A}{r_1^{1-\rho}} + \frac{A}{r_2^{1-\rho}} \qquad (6$$

для всіх $r_2 > r_1$.

Означення 3 Додатна міра λ в комплексній площині називається мірою скінченног r^{ρ}-типу, якщо існує додатна стала A, така що для всіх $r > 0$:

$$\lambda(r) \le Ar^{\rho+1} \qquad (7$$

Лема Нерівності (6) і (7) еквівалентні.

Доведення

Нехай виконується нерівність (6). Покладемо $r_1 = r$, $r_2 = er$.

Враховуючи, що

$$N(r,er,\lambda) := \int_r^{er}\frac{\lambda(t)}{t^3}dt \ge \lambda(r)\int_r^{er}\frac{dt}{t^3} \ge \frac{\lambda(r)}{e^2r^2},$$

маємо $$\frac{\lambda(r)}{e^2r^2} \le \frac{A}{r^{1-\rho}} + \frac{A}{(er)^{1-\rho}},$$

звідки $$\lambda(r) \le Ar^{\rho+1}.$$

Нехай виконується нерівність (7).

Тоді $$N(r_1,r_2,\lambda) := \int_{r_1}^{r_2}\frac{\lambda(t)}{t^3}dt \le A\int_{r_1}^{r_2}t^{\rho-2}dt \le \frac{A}{1-\rho}\left(\frac{1}{r_1^{1-\rho}} + \frac{1}{r_2^{1-\rho}}\right),$$

тобто маємо нерівність (6).
Лема доведена.

Критерії належності функції до класу $J\delta(r^{\rho})$ формулює теорема.

Теорема Нехай $\gamma(r) = r^{\rho}$ $(0 < \rho < 1)$ - функція зростання, $v \in J\delta$. Наступні твердження еквівалентні :

1) $v \in J\delta(r^{\rho})$;

2) міра $\lambda_+(v)$ (або $\lambda_-(v)$) має скінченну r^{ρ}-щільність,

$|c_k(r,v)| \le Ar^{\rho}$, $k \in N$, при певному значенні $A > 0$ і всіх $r > 0$.

Доведення
Доведемо лише імплікацію 1)⇒ 2).

Нехай $v \in J\delta(r^{\rho})$, згідно з означенням 2 міра $\lambda_-(v)$ має скінченну r^{ρ}-щільність. Використовуючи формулу (5), отримаємо :

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda_+(t)}{t^3} dt \le \frac{A}{r_1^{1-\rho}} + \frac{A}{r_2^{1-\rho}}$$

для всіх $r_2 > r_1$,
тобто міра $\lambda_+(v)$ має скінченну r^{ρ}-щільність.

Зазначимо, що і міра $|\lambda| = \lambda_+ + \lambda_-$ має скінченну r^{ρ}-щільність, а згідно леми міра $|\lambda|$ є мірою скінченного r^{ρ}-типу.

На основі умови 1) теореми і формули (5) одержимо, що

$$\int_0^{\pi} v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi \le Ar^{\rho} \ \text{ і } \ \int_0^{\pi} v_-(re^{i\varphi})\sin\varphi \le Ar^{\rho},$$

звідси випливає , що

$$\int_0^{\pi} |\, v(re^{i\varphi})\,|\sin\varphi \le Ar^{\rho} \, .$$

Далі, на основі (4), маємо:

$$|c_k(r,v)| = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin k\varphi d\varphi\right| \le \frac{2}{\pi} k \int_0^{\pi} |v(re^{i\varphi})| \sin\varphi d\varphi \le kAr^{\rho} \qquad (8)$$

З формули (1), поклавши $r_1 = r$, $r_2 = 2r$, отримаємо :

$$c_k(r,v) = \frac{1}{2^k} c_k(2r,v) - \frac{2r^k}{\pi} \int_r^{2r} \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt \, .$$

Звідси, з урахуванням (3), (7), (8), маємо :

$$|c_k(r,v)| \le \frac{1}{2^k}|c_k(2r,v)| + \frac{2r^k}{\pi}\int_r^{2r} \frac{|\lambda_k(t)|}{t^{2k+1}} dt \le \frac{1}{2^k} \cdot k \cdot A(2r)^{\rho} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{r} |\lambda|(r) \le$$

$$\leq \frac{1}{2^k} \cdot k \cdot Ar^{\rho} + \frac{2}{\pi} \cdot Ar^{\rho},$$

таким чином, імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) доведена.

ВИСНОВОК

В статті запроваджено клас δ-субгармонічних функцій скінченного r^{ρ}-тип $(0 < \rho < 1)$ у півплощині і знайдено критерії належності функції до даного класу.

РЕЗЮМЕ

В статье введен класс δ-субгармонических функций конечного r^{ρ}-тип $(0 < \rho < 1)$ в полуплоскости и сформулированы критерии принадлежности функции данному классу .

SUMMARY

In the article the class of δ-subharmonic functions of finite r^{ρ}-type in the comple half-plane is entered. The theorem serves as a criterions for belonging to the given clas function.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гришин А.Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывност субгармонических функций // Математическая физика, анализ, геометрия. - 1994. Т. 1. - № 2. - С. 193-215.
2. Малютин К.Г. Ряды Фурье и δ - субгармонические функции конечного γ - типа полуплоскости // Матем. сб. - 2001. - Т. 192 (6). - С. 51-70.
3. Малютин К.Г. Ряды Фурье и δ - субгармонические функции // Труды ИПММ НАН Украины. - Донецк. - 1988. - Т.3. - С. 146-157.

УДК 535.343.1

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ДИФУЗІЙНИЙ РІСТ НОВОЇ ФАЗИ В ПЕРІОДИЧНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ

Коропов О.В., кандидат фізико-математичних наук, доцент;
Журавська О.О., кандидат технічних наук, доцент,
Яновський В.В., доктор фізико-математичних наук

Однією з актуальних задач сучасного матеріалознавства є дослідження процесі дифузійного росту макрочастинок в дисперсних і ультрадисперсних системах різної природи [1-7]. До названих систем відносяться також і пересичені тверді розчини, які розпадаються за механізмом зародження і наступного росту локальних областей нової фази [1,2].