

БІФУРКАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ЛАЗЕРІВ З АВТОМОДУЛЯЦІЄЮ ДОБРОТНОСТІ

Г.П.КОВАЛЕНКО, С.В.КОЛОМІЄЦЬ

УДК 535.8
© 2004 р.

Сумський національний аграрний університет
(Вул. Кірова, 160, Суми 40021, Україна)

Проведено біфуркаційний аналіз моделі одномодового твердотілого лазера з безінерційним фільтром і квадратично-нелінійним елементом. Одержано критерії стійкості періодичних коливань, періодичний розв'язок у квадратичному наближенні і аналітичний вигляд граничного циклу в першому наближенні. Результати розрахунків елементів граничного циклу наведено у табличному і графічному вигляді.

Вступ

Важливою проблемою дослідження лазерних моделей є теоретичне обґрунтування впливу зміни параметрів твердотілого лазера, що характеризують його структуру або входять до модулятора добротності як параметри керування, на динаміку лазера. Неодноразово відмічалось (див., наприклад, [1,2]), що введення в резонатор нелінійних елементів істотно збагачує динаміку лазера і є ефективним засобом впливу на неї, що має експериментальне підтвердження. Методи керування параметрами лазера на твердому тілі вивчали в роботі [3]. Щоб проводити розрахунки при проектуванні лазерних систем, при вивченні їх динаміки у різних режимах генерації поля, щоб формулювати та розв'язувати обернені задачі динаміки лазерів, необхідно знати теоретичні залежності, що описують вплив зміни параметрів лазера на його динаміку. Одержання таких залежностей є проблемою, яка, в принципі, не має повного розв'язання, оскільки не існує загальних методів інтегрування нелінійних систем диференціальних рівнянь, що, в свою чергу, не дозволяє записати в явному вигляді коефіцієнти чутливості розв'язку від параметрів моделі. Хоча існує достатня кількість локальних методів інтегрування, але не кожен з них застосовний до даної проблеми.

Для розв'язання зазначеної задачі автори пропонують використовувати алгоритм біфуркації народження циклу, описаний в роботі [4].

Теоретичною основою методу біфуркації народження циклу є теорема Е.Хопфа [4]. Остання передбачає, що при певних співвідношеннях між параметрами моделі, фазові координати будуть здійснювати періодичний рух навколо стаціонарного розв'язку. Біфуркацію Хопфа можна викликати за допомогою оптоелектронного зворотного зв'язку, який формує похідну від вихідної інтенсивності і впливає на параметри модулятора, змінюючи фазовий портрет моделі при незмінному значенні стаціонарного розв'язку [1]. В даному випадку це означає перехід від стійкого фокуса до нестійкого, а саме за таких умов виникає біфуркація Хопфа.

Розглядаємо модель лазера з безінерційним фільтром, одержану на основі напівкласичних уявлень [2]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx(y - 1 - b(1 + \rho x)^{-1} - rx), \\ \dot{y} = A - y(x + 1), \end{cases} \quad (1)$$

де x — щільність поля фотонів, y — інверсія в активному середовищі, ρ — відношення щільності насичення активного середовища до щільності насичення фільтра, r — зведений коефіцієнт нелінійної взаємодії резонатора і квадратично-нелінійного елемента розміщеного в резонаторі, G — великий параметр в теорії лазерів класу В [1], A — параметр накачки, $b = Q_0 l_2 / k_n l_1$, де l_1, l_2 — відстані від фільтра до кінців резонатора, Q_0 — непросвітлене значення коефіцієнта поглинання фільтра $k_n = \eta - \ln(r_1 r_2 / 2l)$, де l — довжина резонатора, η визначає пасивні витрати, r_1, r_2 — коефіцієнти відбиття дзеркал. Всі параметри, фазові координати і час — безрозмірні.

В роботі [2] вивчали стаціонарні розв'язки системи (1), її фазовий портрет і деякі особливості динаміки методами якісної теорії диференціальних рівнянь. Метою даної роботи є з'ясування умов виникнення періодичних коливань у системі (1), визначення біфуркаційних значень параметрів b, r , знаходження критерію стійкості та інтервалів стійкості для деяких параметрів, а також побудова періодичного розв'язку системи (1) за наявності біфуркації Хопфа.

Елементи біфуркаційного аналізу моделі

Систему (1) вивчаємо в околі стаціонарного розв'язку, який знаходимо з рівнянь

$$\begin{aligned} x_c^3 \rho r + x_c^2 (\rho r + \rho + r) + \\ + x_c (\rho + r + b + 1 - A \rho) + b + 1 - A = 0, \\ y_c = \frac{A}{x_c + 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

У даному випадку x_c вважається параметром, межі зміни якого визначатимуться умовами стійкості, а з першого з рівнянь (2) знаходимо інший параметр як функцію решти. Такий підхід дозволяє зробити знайдений розв'язок загальнішим.

Істотним елементом біфуркаційного аналізу динамічної системи є вивчення власних значень матриці Якобі правих частин системи (1), обчисленої у стаціонарному розв'язку, які мають вигляд

$$\begin{aligned} \lambda = \frac{1}{2} (F \pm (F^2 - 4 \det M)^{1/2}), \\ F = G x_c \left(\frac{b \rho}{K^2} - r \right) - \alpha, \\ \det M = G x_c \left(\frac{A}{\alpha} - \alpha \left(\frac{b \rho}{K^2} - r \right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\alpha = x_c + 1$, $K = \rho x_c + 1$. Власні значення розглядаються в околі тих значень параметрів, що перетворюють стаціонарний розв'язок у стійкий фокус, тобто за умови виконання нерівностей $F < 0$, $F^2 - 4 \det M < 0$, $\det M > 0$. У цьому випадку власні значення можна записати у вигляді

$$\lambda = \frac{1}{2} (F \pm i \omega_1), \quad \omega_1 = (4 \det M - F^2)^{1/2},$$

де $\omega_1/2$ — частота релаксаційних коливань, $F/2$ — декремент затухання.

Далі вважається, що параметри моделі чи один з них змінюються таким чином, що модуль величини

F зменшується і врешті-решт набуває нульового значення,

$$G x_c \left(\frac{b \rho}{K^2} - r \right) - \alpha = 0. \quad (4)$$

У цьому випадку власні значення матриці є суто уявні, $\lambda = \pm i \omega_0$, $\omega_0 = \sqrt{\det M}$. Подальша зміна параметрів забезпечує додатність F , а система втрачає стійкість. За таких умов згідно з теоремою Хопфа [4] в системі (1) виникають періодичні коливання навколо стаціонарного розв'язку з частотою ω_0 .

Для одержання критерію стійкості цих коливань і побудови відповідного наближеного розв'язку використовуємо алгоритм біфуркації народження циклу [4]. Знаходимо власний вектор матриці Якобі, що відповідає власному значенню $\lambda = \frac{1}{2} (F + i \omega_1)$:

$$\mathbf{R} = (1; B - \lambda (G x_c)^{-1})^T, \quad B = b \rho K^{-2}$$

(T — означає операцію транспонування). З його дійсної $\text{Re} \mathbf{R}$ і уявної $\text{Im} \mathbf{R}$ частин будуюмо матрицю перетворення $P = (\text{Re} \mathbf{R}; -\text{Im} \mathbf{R})$, за допомогою якої вводяться нові змінні, після чого система (1) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2) \\ f_2(z_1, z_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Праві частини системи (5) слід розкласти в ряд Маклорена із збереженням доданків до третього степеня включно за сукупністю змінних. Оскільки алгоритм біфуркації народження циклу явно використовує лише нелінійні доданки, то урізані праві частини системи (5) можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{F}_1 = - \left(G A_1 z_1^2 + \frac{\omega_0}{x_c} z_1 z_2 + G \frac{b \rho z_1^3}{K^4} \right), \\ \bar{F}_2 = \frac{\alpha}{\omega_0} (G A_1 - 1) z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{x_c} + G \frac{\alpha b \rho^2}{\omega_0 K^4} z_1^3; \\ A_1 = r - \frac{b \rho}{K^3}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далі, з частинних похідних другого і третього порядку функцій \bar{F}_i , обчисленими в нулі за спеціальними формулами, наведеними в [4], формуємо величину Φ , дійсна частина $\text{Re} \Phi$ якої є головним доданком показника Флоке, а уявна $\text{Im} \Phi$ використовується для знаходження поправки до періоду коливань $T = 2\pi/\omega_0$. Наявність у моделях лазерів на твердому тілі великого параметра G , який має порядок 10^5 , дозволяє із

громіздкого виразу для $\text{Re}\Phi$ виділити лише три доданки, які визначають знак показника Флоке:

$$\text{Re}\Phi = \frac{G}{8Ax_c}(2A_1^2\alpha^2 + A_1A - 3AD_1x_c),$$

$$D_1 = \frac{\rho^2 b}{K^4}. \quad (7)$$

При цьому вважаємо, що x_c достатньо віддалене від нуля, досить, що $x_c > 0, 1$.

Оскільки стійкому періодичному руху відповідає від'ємне значення показника Флоке, то критерій стійкості періодичних коливань зводиться до виконання нерівності $\text{Re}\Phi < 0$.

Аналіз критерію стійкості для різних біфуркаційних параметрів

У першому випадку в ролі біфуркаційного розглядається параметр b . Врахування порядку величини параметра G дозволяє з рівняння (4) отримати біфуркаційне значення зазначеного параметра $b_0 = rK^2/\rho$. З рівняння (2) знаходимо параметр $r = (AK - \alpha(K + b))(\alpha K x_c)^{-1}$. У випадку $b = b_0$ параметр r набуває значення $r_c = (A - \alpha)\rho(\alpha K^2)^{-1}$, а з урахуванням значень r_c і b_0 елементи критерію (7) мають вигляд

$$A_1 = A_{1b} = \frac{(A - \alpha)\rho^2 x_c}{\alpha K^3}, \quad D_1 = \frac{\rho^2(A - \alpha)}{\alpha K^4}. \quad (8)$$

Підстановка значень (8) у вираз (7) зводить показник Флоке до вигляду

$$\text{Re}\Phi_0 = GP_1W_1,$$

$$P_1 = \rho^2(A - \alpha)(8\alpha AK^4)^{-1},$$

$$W_1 \equiv 2\alpha x_c \rho^2(A - \alpha)K^{-2} + A(\rho x_c - 2). \quad (9)$$

Оскільки у переважній більшості випадків $A > \alpha$, то критерій стійкості зводиться до нерівності $W_1 < 0$. Якщо ввести новий параметр $\gamma = \rho x_c$, то остання нерівність набуває вигляду

$$Q(\gamma) \equiv \gamma^3 + 2\gamma^2 B_1 - 3\gamma - 2 < 0,$$

$$B_1 = \alpha(A - \alpha)(Ax_c)^{-1}.$$

Рівняння $Q(\gamma) = 0$ згідно з правилом Декарта має один додатний корінь. Якщо його позначити через γ_1 , то критерій $W_1 < 0$ виконується, коли γ набуває значення з інтервалу $(0; \gamma_1)$.

Якщо у ролі біфуркаційного взяти параметр $r_0 = b\rho K^{-2}$, то його підстановка в рівняння (2) дозволяє отримати значення параметра b :

$$b = b_c = (A - \alpha)K^2(\alpha(2\rho x_c + 1))^{-1}.$$

З цими значеннями елементи критерію і сам критерій (7) набувають вигляду

$$A_1 = A_{1r} = \frac{(A - \alpha)\rho^2 x_c}{\alpha(2\rho x_c + 1)K}, \quad \text{Re}\Phi_0 = GP_2W_2,$$

$$P_2 = \frac{\rho^2(A - \alpha)}{8\alpha(2\rho x_c + 1)AK^2},$$

$$W_2 = \frac{2\rho^2 \alpha x_c(A - \alpha)}{2\rho x_c + 1} + A(\rho x_c - 2). \quad (10)$$

Вимога виконання умови $A - \alpha > 0$ приводить до такого критерію стійкості: $W_2 < 0$. Якщо ввести новий параметр $\gamma = \rho x_c$, то нерівність $W_2 < 0$ зводиться до квадратичної нерівності $2\gamma^2 B_2 - 3\gamma - 2 < 0$, $B_2 = (A(2x_c + 1) - \alpha^2)(Ax_c)^{-1}$. Звідки

$$0 < \gamma < \gamma_2,$$

$$\gamma_2 = (3 + (9 + 16B_2)^{1/2})(4B_2)^{-1}. \quad (11)$$

Отже, критерій $W_2 < 0$ виконується, якщо γ набуває значень з інтервалу $(0; \gamma_2)$.

Знаходження наближеного розв'язку

Наближений розв'язок, функціональний параметр ε , за степенями якого він записується, період коливань T знаходяться за спеціальними формулами [4]:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + Pz, \quad z_1 = \text{Re}z, \quad z_2 = \text{Im}z,$$

$$z = \varepsilon e^{2\theta i} + \frac{i\varepsilon^2}{6\omega_0}(g_1 e^{-4\theta i} - 3g_2 e^{4\theta i} + 6g_3) + O(\varepsilon^3),$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(\nu - \nu_0)\lambda'_0}{-\text{Re}\Phi}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}(1 + \tau\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)),$$

$$\tau = -\frac{1}{\omega_0} \left(\text{Im}\Phi_0 - \frac{\text{Re}\Phi_0 \cdot \omega'_0}{\lambda'_0} \right), \quad \theta = \frac{\pi t}{T},$$

$$\lambda'_0 = \frac{\partial \text{Re}\lambda}{\partial \nu}, \quad \omega'_0 = \frac{\partial \text{Im}\lambda}{\partial \nu}, \quad \nu = \nu_0, \quad (12)$$

де ν — будь-який біфуркаційний параметр, ν_0 — відповідне біфуркаційне значення.

Для заданої задачі було знайдено

$$g_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-A_1 G + i \left(\frac{\alpha}{\omega_0} G A_1 \mp \frac{\omega_0}{x_c} \right) \right),$$

$$g_3 = \frac{1}{2}(-A_1 G + i\alpha G A_1 \omega_0^{-1}),$$

$$\text{Im}\Phi_0 = \frac{G}{24\omega_0} \left(\frac{9b\rho^2\alpha}{K^4} - 2GA_1^2 \left(2 + 5 \left(\frac{\alpha}{\omega_0} \right)^2 \right) - \frac{\alpha A_1}{x_c} - \frac{A}{\alpha x_c} \right).$$

Використовуючи формули (12), отримаємо

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2 G}{6\omega_0} \begin{pmatrix} -2 \sin 4\theta \\ \cos 4\theta \end{pmatrix} A_1 + \\ + \frac{\varepsilon^2 G}{6\omega_0} \left(\frac{\alpha A_1}{\omega_0} \begin{pmatrix} \cos 4\theta \\ 2 \sin 4\theta \end{pmatrix} + \frac{\omega_0}{G x_c} \begin{pmatrix} 2 \cos 4\theta \\ \sin 4\theta \end{pmatrix} \right) - \\ - 3A_1 \begin{pmatrix} -\alpha/\omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \Big) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Знайдений вираз є спільним для всіх біфуркаційних параметрів, однак коефіцієнт A_1 , функціональний параметр ε і період T змінюються в залежності від того, який з параметрів відіграє роль біфуркаційного.

Розрахунок елементів розв'язку і граничного циклу

До елементів розв'язку належать малий функціональний параметр ε^2 , його амплітудні множники $b - b_0$ і $r - r_0$, які визначають приріст біфуркаційного параметра, елемент критерію A_1 , що належить квадратичному доданку розв'язку, період коливань T , початкова фаза, а також критерії та інтервали стійкості.

У випадку біфуркаційного параметра $b = b_0$ перевірка умови трансверсальності приводить до результату

$$\lambda'_0 = \frac{\partial \text{Re}\lambda}{\partial b} = G x_c \rho (2K^2)^{-1} \neq 0.$$

Тоді

$$\varepsilon^2 = \frac{(b - b_0)\lambda'_0}{-\text{Re}\Phi_0} = (b - b_0)L_1,$$

$$L_1 = 4A x_c \alpha K^2 (\rho(A - \alpha)(-W_1))^{-1}.$$

Нормувальний множник L_1 використовується для визначення інтервалу зміни виразу $b - b_0$: $b - b_0 < 1/L_1$.

У випадку біфуркаційного параметра $r = r_0$ аналогічно одержуємо

$$\lambda'_0 = -\frac{G x_c}{2}, \quad \varepsilon^2 = (r - r_0)L_2,$$

$$L_2 = 4x_c \alpha (2\rho x_c + 1) A K^2 (\rho^2(A - \alpha)(-W_2))^{-1}.$$

У першому випадку для забезпечення додатності ε^2 повинна виконуватись нерівність $b - b_0$, тобто реалізується надкритична біфуркація. У другому випадку для додатності ε^2 потрібно вимагати виконання нерівності $r_0 > r$, що визначає докритичну біфуркацію. Можна показати, що

$$\text{Re}\Phi_0 \frac{\omega'_0}{\lambda'_0} \sim O(\sqrt{G}), \quad \text{Im}\Phi = -\frac{G^2 A_1^2}{6\omega_0} + O(\sqrt{G}),$$

тоді перша поправка до періоду T має вигляд

$$\tau = \frac{1}{6\omega_0^2} G^2 A_1^2 + O(1) \approx \frac{G A_1^2 \alpha}{6A x_c}.$$

Таким чином,

$$T = 2\pi\omega_0^{-1} (1 + \varepsilon^2 G A_1^2 \alpha (6A x_c)^{-1}).$$

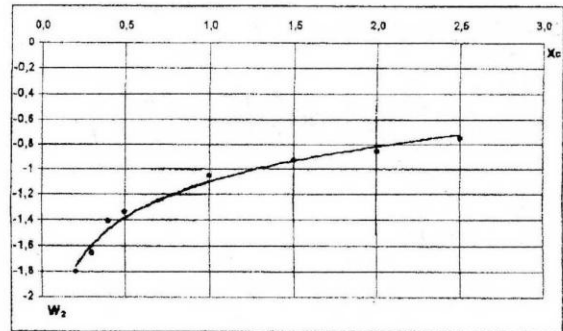
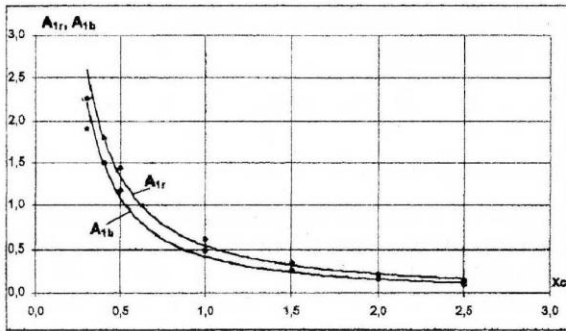
Амплітудні множники $b - b_0$, $r - r_0$ допускають лише інтервальну оцінку, тому у визначенні періоду і самого розв'язку залишається певна невизначеність, яка цілком узгоджується з тією обставиною, що не задано початкові умови, а період нелінійних коливань залежить від амплітуди.

Періодичний розв'язок системи (1) в першому наближенні має вигляд

$$\begin{aligned} x - x_c &= \varepsilon \cos 2\theta, \\ y - y_c &= -\frac{\varepsilon}{G x_c} (\alpha \cos 2\theta + \omega_0 \sin 2\theta) = \\ &= -\varepsilon N (G x_c)^{-1} \cos(2\theta - \varphi), \\ \varphi &= \arctg \frac{\omega_0}{\alpha}, \quad N = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Вилучення з залежностей (13) параметра θ дозволяє знайти криву, що описує граничний цикл у першому наближенні:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{d^2} &= 1 + \Delta, \\ \Delta &= \frac{2\alpha\omega_0(x - x_c)\sqrt{\varepsilon^2 - (x - x_c)^2}}{(\omega_0\varepsilon)^2}, \\ a &= \frac{\omega_0\varepsilon}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}, \quad d = \frac{\omega_0\varepsilon}{G x_c}. \end{aligned} \tag{14}$$



Оскільки $\varepsilon > x - x_c$, то $(x - x_c)\varepsilon^{-1} = q < 1$, отже, $\Delta = 2\alpha q\sqrt{1 - q^2}\omega_0^{-1}$. Максимальне значення, що його набуває множник $q\sqrt{1 - q^2}$ при $q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ і становить 0,5. Звідки $\Delta \leq \alpha\omega_0^{-1} = \alpha^{3/2}(GAx_c)^{-1/2}$. Для $G = 10^5$, при виконанні нерівності $\alpha^3 < 0,1Ax_c$, Δ стає меншим за 0,001. Тому граничний цикл в першому наближенні із зазначеною точністю описується еліпсом з півосями a, d та центром в стаціонарному розв'язку x_c, y_c .

Розрахунок елементів розв'язку починається з обчислення коренів γ_1, γ_2 як правих кінців інтервалів стійкості автомодуляції добротності. Знак критеріїв стійкості W_1, W_2 , перевіряється для значень ρx_c дещо менших за знайдені корені. Через нелінійність залежності критеріїв стійкості від своїх параметрів, зміщення вліво від правого кінця для різних значень γ_1, γ_2 , не є рівномірним. Далі обчислюються нормувальний множник L_2 і елементи критерію A_{1r}, A_{1b} , які належать розв'язку. В таблиці наведено значення коренів γ_2 для деяких значень x_c ; значення ρx_c , при яких обчислюється критерій W_2 , а також значення нормувального множника L_2 , елементів критерію A_{1r}, A_{1b} при $\gamma_2 = \rho x_c$. Розрахунки виконано для $A = 10$.

На рисунку наведено графіки функцій $A_{1r}(x_c), A_{1b}(x_c), W_2(x_c)$

x_c	γ_2	ρx_c	W_2	$Re\Phi_0$	L_2	A_{1r}	A_{1b}
0,2	0,536	0,5	-1,8	-22860	0,408	3,0555	2,716
0,3	0,641	0,6	-1,66	-9843,8	1,416	2,2614	1,9006
0,4	0,720	0,68	-1,405	-4678,6	3,954	1,7910	1,4976
0,5	0,782	0,74	-1,339	-2765,9	9,038	1,4382	1,1781
1,0	0,972	0,929	-1,047	-510,29	117,983	0,6209	0,4783
1,5	1,078	1,035	-0,926	-130,01	576,876	0,3430	0,2543
2,0	1,154	1,11	-0,860	-53,896	1855,41	0,2116	0,1530
2,5	1,224	1,175	-0,749	-21,273	4629,16	0,1412	0,0998

Висновки

1. За допомогою застосування алгоритму біфуркації народження циклу одержано критерії стійкості W_k , інтервали стійкості $(0; \gamma_k)$ автомодуляції випромінювання фотонів, наближений періодичний розв'язок динамічної системи в умовах існування біфуркації Хопфа. Слід зазначити, що якісними методами одержати ці результати не можливо, про що свідчить розгляд подібної задачі в монографії [2].

2. Вибір того чи іншого параметра у ролі біфуркаційного може мати різні наслідки, а саме: зміна рівняння, з якого знаходиться стаціонарний розв'язок, поява додаткових обмежень на значення параметрів, зміна області чи інтервалу стійкості, а також сама можливість зведення критерію стійкості до інтервалу стійкості. Це одна з причин, чому варто розглядати кожен з параметрів лазерної моделі як потенційно біфуркаційний. Таку точку зору висловлено, зокрема, і в монографії [1].

3. Віднесення x_c до незалежних параметрів дозволяє будувати розв'язки в околі будь-якого фізично допустимого і технологічно доцільного стаціонарного розв'язку, що до певної міри компенсує локальність методу.

4. Більшому абсолютному значенню критерію стійкості відповідає більший інтервал зміни біфуркаційного параметра. Наприклад, $r - r_0 < 1/L_2 = 2,45$, коли $x_c = 0,2$ і $|W_2| = 1,8$, але $r - r_0 < 0,11$, коли $x_c = 0,5$ і $|W_2| = 1,339$, тобто меншому значенню x_c відповідає більша амплітуда коливань. Попередній висновок підсилює те, що меншому значенню x_c відповідають більші значення A_{1r}, A_{1b} , які є множниками квадратичного за ε доданка розв'язку.

5. Оскільки $A_{1r}(A_{1b})^{-1} = 1 + \frac{\gamma^2}{2\gamma+1}$, $\gamma = \rho x_c$, то $A_{1r} > A_{1b}$ для всіх значень γ і. Зазначений вираз набуває найбільшого значення на правому кінці інтер-

валу. В той же час абсолютні величини A_{1r} , A_{1b} при цьому зменшуються.

Застосування алгоритму біфуркації народження циклу при дослідженні динаміки лазерних моделей має широкі перспективи, в тому числі при вивченні явищ запізнення в лазерах, при постановці та розв'язуванні обернених задач динаміки лазерів.

1. Ханін Я.И. Основы динамики лазеров. — М.: Наука, Физматлит, 1999.
2. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. — Минск: Наука і техника, 1990.
3. Пешко І.І. Фізичні процеси самовпливу в лазерах на твердому тілі: Дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. — Київ, 2002.
4. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — М.: Мир, 1985.

Одержано 27.10.03

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ЛАЗЕРОВ С АВТОМОДУЛЯЦИЕЙ ДОБРОТНОСТИ

Г.П. Коваленко, С.В. Коломиец

Резюме

Выполнен бифуркационный анализ модели одномодового твердотельного лазера с безынерционным просветляющимся филь-

тром и квадратично-нелинейным элементом. Получены критерии устойчивости периодических колебаний, периодическое решение в квадратическом приближении и аналитическое выражение предельного цикла в первом приближении. Расчеты элементов предельного цикла представлены в табличном и графическом виде.

BIFURCATION ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF LASERS WITH SELF-MODULATION OF A Q-FACTOR

G.P. Kovalenko, S.V. Kolomiets

Sumy National Agrarian University,
(160, Kirov Str., Sumy 40021, Ukraine)

Summary

The bifurcation analysis of the semi-classical model of a single-mode solid-state laser with an inertialess bleachable filter and a quadratically non-linear element has been carried out. The stability criteria of periodic oscillations, the periodic solution in a quadratic approximation, and the analytical expression of a limit cycle in the first approximation have been obtained. The results of calculations of the limit-cycle elements are presented in the tabular and graphic forms.