Малютина, Т. И. Эконометрическая модель банка и точка Лаффера [Текст] / Т. И. Малютина // Вісник Української академії банківської справи. - 2001. - № 2 (11). - С. 89-91.

1. Реальні плоди економічної політики // Урядовий кур'єр. – 2001. 29 травня. – С. 5.
2. Статистичний щорічник України за 1999 рік. Держкомстат України. – К.: Техніка, 2000. – 648 с.
3. Україна в цифрах в 2000 році / За ред. О.С. Осауленка. Держкомстат України. – К.: Техніка, 2000. – С. 2-6.
4. Фінанси України за 1999 рік. Держкомстат України. – К., 2000.

Summary

The article deals with the analysis of the state policy in depreciation deductions; it is offered a mechanism of profit exemption calculations, which is connecte0d with wear and tear of equipment level.

УДК 519.6

***Малютина Т.И.**, к.ф.-м.н., доцент, Украинская академия банковского дела*

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БАНКА И ТОЧКА ЛАФФЕРА

В статье рассматривается задача отыскания учётной ставки, отвечающей максимуму прибыли банка (и совпадающей с точкой Лаффера). Находится диапазон учётных ставок, для которых прибыль неотрицательна.

Ключевые слова: учётная ставка, точка Лаффера, кредит.

Эффект спада сбора (дохода) банка при увеличении учетной ставки *r* выше некоторой критической величины r_k был обнаружен Лаффером и был назван эффектом Лаффера (и точки Лаффера r_k).

Рассмотрим модель, если интересующая нас фирма – банк. Его "продукцией" является объём предоставляемых кредитов *V*, а выручка (доход) определяется учётной ставкой *r: D = Vr*.

Затраты *Z*, связанные с предоставлением кредитов *V*, состоят из постоянной, линейной и нелинейной частей, т.е.

$$Z(V) = Z_0 + aV + bV^g \text{ или } Z(V) = VC(V),$$
$$C(V) = Z_0 / V + a + bV^{g-1}.$$

Т.к. удельные затраты *C(V)* убывают с ростом *V* (иначе не было бы известного эффекта выгодности массового производства), то $0 < g_1 = 1 - g < 1$. Согласно закона равенства спроса и предложения получаем, что максимум прибыли достигается на равновесии спроса и предложения, а поскольку спрос является монотонно убывающей функцией учётной ставки *r* (которая в данном случае играет роль цены товара – денег), то определим эту зависимость степенной функцией:

$$V = A/r^E, \ E > 1.$$

Для прибыли банка получаем выражение:

$$\text{Ï} = F(r) = D - Z = \frac{A}{r^E}\left[r - a - \frac{Z_0}{A} r^E - bA^{-g_1} r^{Eg_1}\right]. \quad (1)$$

В связи с этим возникают две задачи: 1) отыскание учётной ставки *r*, отвечающей максимуму прибыли *F(r)* (и совпадающей с точкой Лаффера); 2) отыскание диапазона учётных ставок, для которых прибыль неотрицательна. Для решения первой задачи найдём критические точки функции *F(r)* из уравнения:

$$F'(r) = \frac{A(E-1)}{r^{E+1}}\left(-r + a_1 + b_1 r^{b_2}\right) = 0, \quad (2)$$

где $a_1 = a\dfrac{E}{E-1}$, $b_1 = bA^{-g_1}(1-g_1)\dfrac{E}{E-1}$, $b_2 = Eg_1$.

Уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$r - a_1 = b_1 r^{b_2}. \quad (3)$$

Исследуем уравнение (3). Необходимо различать случаи $b_2 < 1$ и $b_2 > 1$. При $b_2 < 1$ графический анализ этого уравнения приводит к утверждению: для всех $b_1 > 0$ существует единственный положительный корень r^* уравнения (3), отвечающий максимуму прибыли $(\text{Ï}_{max} = F(r^*))$, т.к. при $r < r^*$ $b_1 r^{b_2} > r - a_1$ $(F'(r) > 0)$, а при $r > r^*$ $b_1 r^{b_2} < r - a_1$ $(F'(r) < 0)$ (рис. 1).

Вычисление корня r^* легко осуществить итерационным методом

$$r^{(k+1)} = a_1 + b_1\left(r^{(k)}\right)^{b_2}.$$

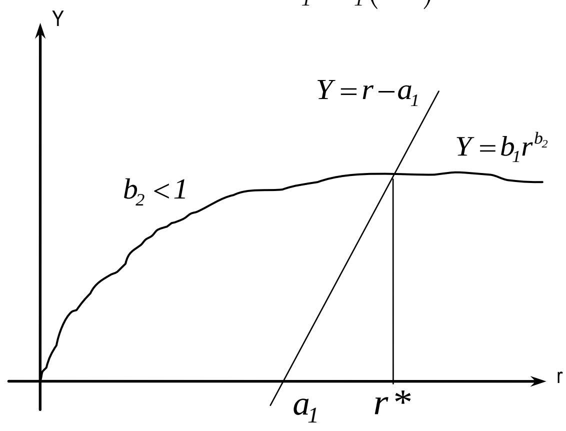

Рис. 1

Рассмотрим пример. Пусть $E = 1{,}5$, $g = 0{,}5$, $a = 0{,}02$ (т.е. 2 %). Если нелинейные затраты bV^{1-g_1} при $V = 20$ (млн. грн.) составляют 1 млн. грн., то

$$b = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx 0{,}2236.$$

Пусть $r_0 = 1$ (100 %) отвечает спрос $D_0 = 300$ млн. грн. Тогда $A = D_0 r^E = 300$.

И далее находим $b_2 = Eg_1 = 0{,}75$, $a_1 = a\dfrac{E}{E-1} = 0{,}06$, $b_1 = 0{,}0194$

Поскольку $b_2 < 1$, уравнение (3) имеет единственное решение $r^* \approx 0{,}0624$, оптимальная ставка равна 6,24 %. В этом случае имеется ярко выраженный феномен Форда – выгодно резкое снижение учётной ставки со 100 % до 6,24 %.

Проанализируем теперь случай $b_2 > 1$.

Графический анализ для этого случая приведен на рис. 2 и видно, что при малых b_1 уравнение (3) имеет два корня, первый из которых r_1^* отвечает максимуму прибыли (по тем же соображениям, что и в предыдущем случае), а второй – минимуму. По мере роста параметра b_1 корни сближаются, при некотором значении $b_1 = \overline{b_1}$ они сливаются ($r_1^* = r^*$ $= r_2^*$), и при $b_1 > \overline{b_1}$ уравнение (3) не имеет решений ($F'(r) > 0$ для всех $r > 0$).

Значения $\overline{b_1}$ и r^* легко найти из условий касания:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{d}{dr}(r - a_1) = \dfrac{d}{dr}\left(b_1 r^{b_2}\right) = b_1 b_2 r^{b_2 - 1}, \\ r - a_1 = b_1 r^{b_2}. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим

$b_1 r^{b_2} = \dfrac{r}{b_2}$, т.е. $r - a_1 = \dfrac{r}{b_2}$, $r^* = \dfrac{a_1 b_2}{b_2 - 1}$,

откуда получаем

$$\overline{b_1} = \frac{1}{b_2 r^{b_2 - 1}} = \frac{(b_2 - 1)^{b_2 - 1}}{a_1^{b_2 - 1} b_2^{b_2}}.$$

Решение второй задачи – отыскание допустимого диапазона учётных ставок, отвечающих неотрицательной прибыли банка, эквивалентно неравенству:

$$r - a - \frac{Z_0}{A} r^E - bA^{-g_1} r^{Eg_1} \ge 0.$$

Представим его в виде

$$f_1(r) = \frac{r - a}{r^E} - \frac{Z_0}{A} \ge f_2(r) = bA^{-g_1} r^{-E(1 - g_1)},$$

и изобразим графики функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ на рис. 3.

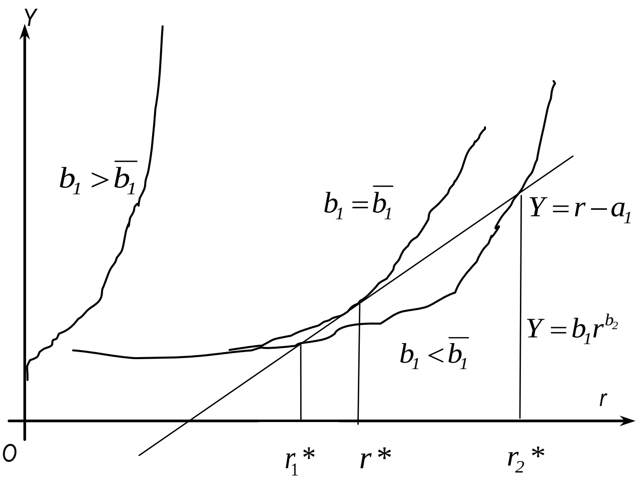

Рис. 2

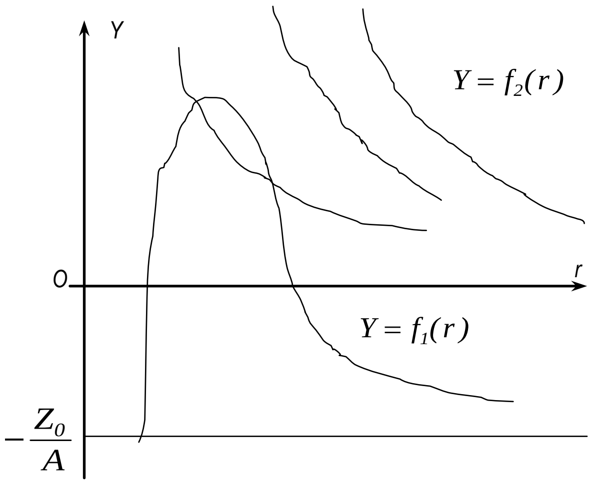

Рис. 3

Поскольку $f_1'(r) = -(E - 1) r^{-E} + Ear^{-E-1}$, $f_2''(r) = E(E-1) r^{-E-1} - Ea(E+1) r^{-E-2}$, функция $f_1(r)$ имеет единственную точку максимума $r_{max} = \dfrac{aE}{E - 1}$, и единственную точку перегиба $r_p = \dfrac{a(E+1)}{E-1} > r_{max}$ $\left(à \quad f_1(+0) = -\infty, \quad f_1(+\infty) = -\dfrac{Z_0}{A}\right)$.

Корни уравнения $f_1(r) = 0$ (т.е. точки пересечения графика функции с осью абсцисс) определяются из уравнения:

$$r - a - \frac{Z_0}{A} r^E = 0,$$

которое имеет два положительных решения при $\dfrac{Z_0}{A} < \dfrac{a(E-1)^{E-1}}{(aE)^E}$, что следует из условия

$$f_{1max} = f_1(r_{max}) = \frac{a(E-1)^{E-1}}{(aE)^E} - \frac{Z_0}{A}.$$

Однако, нас интересует не это условие, а более сильное: условие пересечения кривых $Y = f_1(r)$ и $Y = f_2(r)$, т.е. существование искомого диапазона учётных ставок $\left(r_1^+, r_2^+\right)$. Если $\dfrac{Z_0}{A}$ – фиксировано (и удовлетворяет условию $f_{1max} > 0$), то при малых bA^{-g_1} такое пересечение имеет место, а с ростом bA^{-g_1} и превышением некоторого критического значения $(bA^{-g_1})_k$ – пересечение отсутствует, кривая $Y = f_2(r)$ расположена при всех $r > 0$ выше кривой $Y = f_1(r)$.

Это критическое значение определяется из условия касания кривых:

$$f_1(r) = f_2(r), \; f_1'(r) = f_2'(r),$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{r - a}{r^E} - \dfrac{Z_0}{A} = bA^{-g_1} r^{-E(1 - g_1)}, \\ -\dfrac{E - 1}{r^E} + \dfrac{Ea}{r^{E+1}} = -\dfrac{bA^{-g_1} E(1 - g_1)}{r^{E(1 - g_1) + 1}}. \end{cases}$$

Список литературы

1. Джозеф Ф. Синки. Управление финансами в коммерческих банках. – М.: Catallaxy, 1994. – 820 с.
2. Жак С.В. Математические модели менеджмента и маркетинга. – Ростов-на-Дону: ЛаПО, 1997. – 320 с.
3. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 272 с.
4. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1995. – 320 с.

Summary

In this paper we consider the problem of calculating the discount rate that meets the maximum bank profit and coincides with the point of Laffer. The range of discount rates, for which profit is not negative, is found.