ISSN 0453–8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського університету

№ 458

Серія

«Математика,
прикладна математика
і механіка»

Випуск 48

Харків
1999

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 310077, Харків, пл. Свободи, 4,
ХДУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського державного університету (протокол № 6 від 25 червня 1999 р.)

Вісник Харківського університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.53 № 458, 1999, с. 177–184

Асимптотические разложения нерегулярно растущих интегралов

Т. И. Малютина
Украинская академия банковского дела
г. Сумы

Изучается асимптотическое поведение при $r \to \infty$ интегралов

$$\int_a^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma)\, dt\,.$$

Особенностями рассматриваемого случая есть то, что асимптотика таких интегралов резко различается при $\sigma \in (0,1)$, $\sigma = 1$, $\sigma \in (1,\infty)$, а также то, что такие интегралы представляют нерегулярно растущие функции. В случае $\sigma > 1$ имеется аналогия с классическим интегралом Фурье.

1. Предисловие

Изучение свойств коэффициентов Фурье функции или изучение свойств преобразования Фурье функции по свойствам самой функции — один из важных и достаточно изученных разделов гармонического анализа. Это сводится к изучению свойств интегралов $\int\limits_a^b f(t)\exp(ixt)\,dt$. Мы изучаем интегралы $\int\limits_a^b f(t)\exp\left(i|\ln rt|^\sigma\right)\,dt$, по форме напоминающие предыдущие. При определённых ограничениях на f мы получаем асимптотические формулы для указанных интегралов. В трёхтомной монографии Э. Я. Риекстыньша [1–3] с очень обширной библиографией нахождению асимптотических разложений интегралов $\int\limits_a^b f(t)K(rt)\,dt$ при различных ограничениях на функции f и K посвящены многие главы. Тем не менее интегралы вида $\int\limits_a^b f(t)\exp\left(i|\ln rt|^\sigma\right)\,dt$ там не рассматриваются. В статье не предлагаются новые методы получения асимптотических разложений. Так при $\sigma > 1$ мы используем традиционный метод интегрирования по частям, а при $\sigma < 1$ асимптотическое разложение получается разложением в ряд Тейлора функции $\exp(i|\ln rt|^\sigma)$ по степеням $\frac{\ln t}{\ln r}$. Наш случай интересен тем, что для различных значений параметра σ

для нахождения асимптотических формул нужно применять различные методы, а также тем, что асимптотические формулы содержат нерегулярно растущие функции. Заметим еще следующее. Пусть $\sigma > 1$, f – бесконечнодифференцируемая функция, которая сама и все ее производные обращаются в нуль в точках a и b. Тогда из наших результатов следует, что интеграл $\int\limits_a^b f(t)\exp(i|\ln rt|^\sigma)\,dt$ убывает при $r \to \infty$ быстрее любой степени $\ln r$. Истинный порядок убывания интеграла в этом случае нужно находить иными методами. В случае $\sigma > 1$ имеется аналогия с нахождением асимптотических формул для классического интеграла Фурье. В частности, мы доказываем соответствующий вариант леммы Римана – Лебега.

2. Об одном аналоге теоремы Римана–Лебега

Мы начнём с аналога леммы Римана–Лебега.

Лемма 1 . *Пусть* $f(t) \in \mathbf{L}_1([a,b])$, $0 \le a < b \le \infty$ *и пусть* $\sigma > 1$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\exp(i|\ln rt|^\sigma)\,dt = 0\,.$$

Доказательство. Пусть вначале $a > 0$, $f \in \mathbf{C}_1([a,b])$. Заметим, что при $r > \frac{1}{a}$

$$\exp(i|\ln rt|^\sigma)\,dt = \frac{t\,d\left[\exp(i(\ln rt)^\sigma)\right]}{i\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\,.$$

После интегрирования по частям получаем

$$\int\limits_a^b f(t)\exp(i|\ln rt|^\sigma)\,dt = \left.\frac{f(t)t\exp(i(\ln rt)^\sigma)}{i\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\right|_a^b -$$

$$-\frac{1}{i\sigma}\int\limits_a^b\left[\frac{f'(t)t+f(t)}{(\ln rt)^{\sigma-1}} - \frac{(\sigma-1)f(t)t}{(\ln rt)^\sigma}\right]\exp(i(\ln rt)^\sigma)\,dt\,.$$

Нетрудно видеть, что правая часть последнего равенства стремится к нулю, если $r \to \infty$.

Пусть теперь $f \in \mathbf{L}_1([a,b])$, ε – произвольное положительное число, а функция $f_1 \in \mathbf{C}_1([a,b])$ такова, что

$$\int\limits_a^b |f(t) - f_1(t)|\,dt \le \varepsilon\,.$$

Тогда

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\exp(i(\ln rt)^\sigma)\,dt\right| \le \left|\int\limits_a^b f_1(t)\exp(i(\ln rt)^\sigma)\,dt\right| + \varepsilon\,.$$

Из доказанного выше следует утверждение теоремы при $a > 0$.

Если $a = 0$, $f \in \mathbf{L}_1([0, b])$, то учитывая неравенство $|\exp(i|\ln rt|^\sigma)| \le 1$, по заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \int_0^\delta f(t)\, dt \right| \le \varepsilon .$$

Тогда

$$\left| \int_0^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma)\, dt \right| = \left| \int_0^\delta + \int_\delta^b \right| \le$$

$$\varepsilon + \left| \int_\delta^b f(t) \exp(i|\ln rt|^\sigma)\, dt \right| .$$

Откуда следует утверждение леммы.

Замечание. Лемма остаётся справедливой, если ядра $\exp(i|\ln rt|^\sigma)$ заменить на $\exp(i\varphi(rt)\ln rt)$, где φ–гладкая возрастающая функция на полуоси $[0, \infty)$ такая, что $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

В лемме 1, как и в лемме Римана–Лебега, не оценивается скорость стремления к нулю интеграла. Это и в принципе невозможно сделать при ограничении $f \in \mathrm{L}_1([a, b])$. При дополнительных ограничениях на гладкость функции f с помощью интегрирования по частям можно получить более детальную информацию об асимптотическом поведении интеграла.

3. Асимптотические формулы для интегралов

Теорема 1 *Пусть $f(t)$–абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда при $r \to \infty$*

$$\int_a^b f(t)\, d\,(t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma) = b^\rho f(b) \cos(\ln rb)^\sigma - a^\rho f(a) \cos(\ln ra)^\sigma + o(1) .$$

В частности, предельное множество интеграла по направлению $r \to \infty$ совпадает с сегментом $[-a^\rho|f(a)| - b^\rho|f(b)|, a^\rho|f(a)| + b^\rho|f(b)|]$.

Доказательство. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_a^b f(t)\, d\,(t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma) = f(t)\; t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma|_a^b - \int_a^b f'(t) t^\rho \cos(\ln rt)^\sigma\, dt .$$

Так как $f' \in \mathbf{L}_1([a, b])$, то по лемме 1 интеграл в правой части сходится к нулю при $r \to \infty$.

Докажем теперь утверждение теоремы о предельном множестве интеграла. Предварительно докажем лемму.

Лемма 2 . *Пусть $\varphi(x)$ - непрерывная, T - перцодическая функция, $p>1$, $A=\varphi([0,T))$, a,b - произвольные числа, $-\infty<b\leq a<\infty$. Тогда предельное множество функции $(\varphi((x+a)^p),\varphi((x+b)^p))$: $R\to R^2$ при $x\to\infty$ совпадает с декартовым квадратом $A\times A$.*

Доказательство. Пусть $f(x)=\left(x^{1/p}+c\right)^p$, тогда

$$f'(x)=\left(1+\frac{c}{x^{1/p}}\right)^{p-1}=1+\frac{c(p-1)}{x^{1/p}}+\dots.$$

Зафиксируем число $x\in[0,T)$ и определим последовательность x_k условием

$$(x_k+b)^p=x+kT,\quad x_k=(x+kT)^{1/p}-b,\quad k\in\mathbf{N}.$$

Обозначим через

$$w_k=(x_k+a)^p=\left((x+kT)^{1/p}+a-b\right)^p=y_k+k_1T,$$

где $k_1=k_1(k)\in\mathbf{N}$, $y_k\in[0,T)$.

Применяя формулу Лагранжа конечных приращений, получим

$$w_{k+1}-w_k=\left((x+(k+1)T)^{1/p}+a-b\right)^p-\left((x+kT)^{1/p}+a-b\right)^p=$$

$$=T\left(1+\frac{a-b}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}}\right)^{p-1}=T\left(1+\frac{(a-b)(p-1)}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}}+\dots\right)=$$

$$T+\Delta_k,\quad \theta\in(0,1).$$

Ясно, что

$$\Delta_k=T\left(\frac{(a-b)(p-1)}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}}+\frac{(a-b)(p-1)(p-2)}{2(x+(k+\theta)T)^{2/p}}+\dots\right)\sim$$

$$\sim T\left(\frac{(a-b)(p-1)}{(x+(k+\theta)T)^{1/p}}\right),\quad k\to\infty.$$

Таким образом, последовательность Δ_k обладает свойствами:

1) $\Delta_k\geq 0$, $\Delta_k\to 0$, при $k\to\infty$,

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Delta_k=\infty$,

3) если $w_k=y_k+k_1(k)T$, $k_1=k_1(k)\in\mathbf{N}$, $y_k\in[0,T)$, то

$$w_{k+1}=y_k+\Delta_k+(k_1+1)T. \tag{1}$$

Из свойств 1), 2), 3) следует, что предельное множество последовательности y_k при $k\to\infty$ есть весь полусегмент $[0,T)$.

Действительно, пусть $\varepsilon>0$ - произвольное число, $y\in[0,T)$, $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon,T-y\}$. Тогда $\varepsilon_1>0$. Пусть k_0 такое число, что при $k\geq k_0$

выполняется неравенство $\Delta_k < \varepsilon_1$. По определению $y_{k_0} \in [0, T)$. Из формулы (1) следует, что

$$w_{k_0+m} = y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \Delta_{k_0+1} + \ldots + \Delta_{k_0+m-1} + (k_1(k_0) + m)T\,,$$

при любом $m \in \mathbb{N}$. Из расходимости ряда $\Delta_{k_0} + \Delta_{k_0+1} + \ldots$ следует, что существует наименьшее число m такое, что будет выполняться неравенство

$$y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \ldots + \Delta_{k_0+m-1} > T + y\,.$$

Тогда

$$y_{k_0} + \Delta_{k_0} + \ldots + \Delta_{k_0+m-1} = T + y + \delta\,,$$

где $0 < \delta \le \Delta_{k_0+m-1} < \varepsilon_1$.

Очевидно, что $0 < y + \delta < T$. Тогда $w_{k_0+m} = y_{k_0+m} + (k_1(k_0) + m + 1)T)$, $y_{k_0+m} = y + \delta$. Так как $0 < \delta < \varepsilon_1 < \varepsilon$, а $\varepsilon > 0$ – произвольное число, то y принадлежит предельному множеству последовательности y_k. Так как y произвольное число из полуинтервала $[0, T)$, то лемма доказана.

Вторая часть теоремы теперь следует из леммы 2, если заметить, что $(\ln ra)^\sigma = (\ln r + \ln a)^\sigma$ и положить $x = \ln r$.

Теорема 2 . *Пусть $f(t)$–абсолютно непрерывная функция на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда при $r \to \infty$*

$$\int_a^b f(t)\cos(\ln rt)^\sigma\,dt = \frac{1}{\sigma \ln^{\sigma-1} r}\left[bf(b)\sin\ln^\sigma rb - af(a)\sin\ln^\sigma ra\right] + \frac{o(1)}{\ln^{\sigma-1} r}\,.$$

В частности, предельное множество функции

$$\sigma \ln^{\sigma-1} r \int_a^b f(t)\cos(\ln rt)^\sigma\,dt$$

по направлению $r \to \infty$ совпадает с сегментом $[-a|f(a)| - b|f(b)|,\ a|f(a)| + b|f(b)|]$.

Теорема доказывается как и теорема 1.

В случае, если $f(t)$ имеет несколько производных, интегрирование по частям можно повторять и мы получаем

Теорема 3 . *Пусть функция $f(t)$ имеет абсолютно непрерывную $k-1$-вую производную $f^{(k-1)}(t)$ на сегменте $[a, b]$, $0 < a < b < \infty$, $k \ge 1$ и пусть $\sigma > 1$. Тогда*

$$\int_a^b f(t)\cos(\ln rt)^\sigma\,dt = \sum_{m=0}^{\frac{k-1}{2}} (-1)^m\,\frac{t\Phi_{2m}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\sin(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b +$$

$$+\sum_{m=0}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^m\frac{t\Phi_{2m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\cos(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b+\frac{o(1)}{(\ln r)^{k(\sigma-1)}},\ r\to\infty\,, \tag{2}$$

где пустая сумма считается равной нулю,

$$\Phi_m(t)=L^m f(t),\quad Lf(t)=\frac{1}{\sigma}\frac{d}{dt}\frac{tf(t)}{(\ln rt)^{\sigma-1}}\,.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\int_a^b f(t)\cos(\ln rt)^\sigma\,dt=\sum_{m=0}^{\frac{k-1}{2}}(-1)^m\frac{t\Phi_{2m}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\sin(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b+$$

$$+\sum_{m=0}^{\frac{k-2}{2}}(-1)^m\frac{t\Phi_{2m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\cos(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b+(-1)^{\frac{k-1}{2}}\int_a^b\frac{t\Phi_k(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\,d\left[\cos(\ln rt)^\sigma\right]\,, \tag{3}$$

при k – нечетном, а при четном k последнее слагаемое в правой части (3) имеет вид

$$(-1)^{\frac{k}{2}}\int_a^b\frac{t\Phi_k(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\,d\left[\sin(\ln rt)^\sigma\right]\,.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и равенство

$$\cos(\ln rt)^\sigma\,dt=\frac{td\left[\sin(\ln rt)^\sigma\right]}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\,, \tag{4}$$

получим

$$\int_a^b f(t)\cos(\ln rt)^\sigma\,dt=\frac{t\Phi_0(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\sin(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b-\int_a^b\Phi_1(t)\sin(\ln rt)^\sigma\,dt\,.$$

Так как

$$\sin(\ln rt)^\sigma\,dt=-\frac{t}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}d\left[\cos(\ln rt)^\sigma\right]\,, \tag{5}$$

то справедливость формулы (3) при $k=1$ установлена. Пусть формула (3) справедлива при всех нечетных $k\le m$, а функция $f(t)$ имеет $m+1$ - вую абсолютно непрерывную производную на сегменте $[a,b]$. Применяя дважды формулу интегрирования по частям и равенства (4), (5), получим

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}}\int_a^b\frac{t\Phi_m(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\,d\left[\cos(\ln rt)^\sigma\right]=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{t\Phi_m(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\cos(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b+$$

$$+(-1)^{\frac{m+1}{2}}\int_a^b\frac{t\Phi_{m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\,d\left[\sin(\ln rt)^\sigma\right]=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\frac{t\Phi_{m+1}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\sin(\ln rt)^\sigma\Big|_a^b+$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t\Phi_m(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}} \cos(\ln rt)^\sigma \Big|_a^b + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \int\limits_a^b \frac{t\Phi_{m+2}(t)}{\sigma(\ln rt)^{\sigma-1}}\, d\left[\cos(\ln rt)^\sigma\right].$$

Таким образом формула (3) справедлива и при $k = m+2$. На основании принципа математической индукции отсюда следует ее справедливость при всех нечетных $k \geq 1$. Для четных k доказательство аналогично. Формула (2) следует из (3), если заметить, что

$$\Phi_k(t) = \frac{O(1)}{(\ln r)^{(k+1)(\sigma-1)}}, \qquad r \to \infty.$$

Замечание. Очевидно, что в случае если $f(t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, то асимптотическая формула (2) справедлива при любомk.

В случае, когда $\sigma \in (0,1)$ асимптотическое разложение интеграла получается не с помощью интегрирования по частям, а разложением ядра.

Теорема 4 . *Пусть $f(t) \in \mathbf{L}_1([a,b])$, $0 < a < b < \infty$ и пусть $\sigma \in (0,1)$. Тогда справедливо разложение*

$$\int\limits_a^b f(t)\exp(i\lambda|\ln rt|^\sigma)\,dt = \exp(i\lambda \ln^\sigma r)\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^\infty \sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha_{n,k}}{(\ln r)^{k(1-\sigma)+n}}\right), \quad (6)$$

где

$$\alpha_0 = \int\limits_a^b f(t)\,dt, \quad \alpha_{n,k} = \frac{i^k\lambda^k}{k!} c_{n,k} \int\limits_a^b f(t)(\ln t)^{n+k}\,dt,$$

а величина $c_{n,k}$ определяется из разложения

$$\left(\frac{1}{x}((1+x)^\sigma - 1)\right)^k = \sum_{n=0}^\infty c_{n,k}x^n.$$

Двойной ряд в формуле (6) является абсолютно сходящимся при достаточно больших r. Разложение (6) справедливо как асимптотическое разложение в случае если $a = 0$, $\int\limits_0 t^{-\epsilon}|f(t)|\,dt < \infty$ при некотором $\epsilon > 0$. Это разложение справедливо как асимптотическое разложение и в случае $b = \infty$, $\int\limits^\infty t^\epsilon |f(t)|\,dt < \infty$.

Доказательство. Воспользовавшись разложением функции e^x в ряд Тейлора и равенством

$$\exp(il|lnrt|^\sigma) = \exp(il\ln^\sigma r)\exp\left(il\ln^{\sigma-1} r \ln t\left(\frac{\ln r}{\ln t}\left(1+\frac{\ln t}{\ln r}\right)^\sigma - 1\cdot\right)\right),$$

получим

$$\int_a^b f(t)\exp(i\lambda|\ln rt|^{\sigma})\,dt = \exp\left(il\ln^{\sigma} r\right)(\alpha_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^k l^k}{\ln^{k(1-\sigma)} r}\int_a^b f(t)\ln^k t\left(\frac{\ln r}{\ln t}\left(1+\frac{\ln t}{\ln r}\right)^{\sigma}-1\right)^k dt\,.$$

Разлагая последний сомножитель по степеням $x=\frac{\ln t}{\ln r}$, мы получим разложение (6). Абсолютная сходимость ряда следует из того, что при больших r выполняется неравенство $\ln t<\ln r$. Заключительная часть теоремы следует из того, что сходимость интеграла $\int\limits_0 t^{-\varepsilon}|f(t)|\,dt$ $\left(\int\limits^{\infty} t^{\varepsilon}|f(t)|\,dt\right)$ влечет за собой сходимость интеграла $\int\limits_0 |f(t)|\left(\ln\frac{1}{t}\right)^k dt$ $\left(\int\limits^{\infty}|f(t)|(\ln t)^k\,dt\right)$ при любом $k>0$.

Замечание. Величину $c_{n,k}$ можно записать в конечном виде если вначале воспользоваться формулой Ньютона для бинома $((1+x)^{\sigma}-1)^k$, а затем использовать разложение в ряд Тейлора функции $(1+x)^{m\sigma}$.

Мы рассмотрели случаи $\sigma>1$ и $\sigma<1$. Случай $\sigma=1$ нужно рассматривать отдельно. Легко видеть, что предельное множество функции $\int\limits_a^b f(t)\,d(t^{\rho}\cos\ln rt)$ по направлению $r\to\infty$ совпадает с множеством

$$\left\{\cos\varphi\int_a^b f(t)\,d(t^{\rho}\cos\ln t)-\sin\varphi\int_a^b f(t)\,d(t^{\rho}\sin\ln t):\ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}.$$

В частности,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\int_a^b f(t)\,d(t^{\rho}\cos\ln rt)=\sqrt{\left(\int_a^b f(t)\,d(t^{\rho}\cos\ln t)\right)^2+\left(\int_a^b f(t)\,d(t^{\rho}\sin\ln t)\right)^2}\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т1. – Рига: Зинатне, 1974. – 390 с.

2. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т2. – Рига: Зинатне, 1977. – 463 с.

3. Риекстыньш Э. Я. Асимптотические разложения интегралов. Т3. – Рига: Зинатне, 1981. – 370 с.