КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

Серія: ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК № 4

КИЇВ 1999

УДК 517.53

Асимптотические формулы для нерегулярно растущих целых функций

Т. И. Малютина

Изучается поведение при $r \to \infty$ интегралов

$$\int_a^b f(t)\exp(i\ln rt)\,dt\,.$$

Полученные формулы используются для изучения асимптотического поведения целых функций.

$$\int_a^b f(t)\exp(i\ln rt)\,dt$$

are investigated. These formulae will be used for study of asymptotic properties of entire functions.

1. Пусть $\rho \in (0,1)$ – фиксированное число. Определим функции

$$u_1(z) = \frac{r\sin\theta}{\pi}\int_0^\infty \frac{\tau^\rho \exp(i\lambda\ln\tau)}{\tau^2 - 2\tau r\cos\theta + r^2}\,d\tau =$$

$$\frac{r^\rho\sin\theta}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\rho\exp(i\lambda\ln tr)}{t^2-2t\cos\theta+1}\,dt\,, \tag{1}$$

$$u_2(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{r(r-\tau\cos\theta)}{\tau^2-2\tau r\cos\theta+r^2}\exp(i\lambda\ln\tau)\,d\tau =$$

$$\frac{r}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-t\cos\theta}{t^2-2t\cos\theta+1}\exp(i\lambda\ln tr)\,dt\,,$$

$u_3(z) = \operatorname{Re} u_1(z)$, $u_4(z) = \operatorname{Im} u_1(z)$, $u_5(z) = \operatorname{Re} u_2(z)$, $u_6(z) = \operatorname{Im} u_2(z)$, где $z = re^{i\theta}$, $\lambda \geq 0$.

Важной характеристикой роста субгармонической и, в частности, гармонической функции $u(z)$ является ее предельное множество Азарина [1] $\operatorname{Fr} u$. Это предельное множество семейства функций $u_t(z) = u(tz)/t^\rho$ (ρ– порядок u) при $t \to +\infty$ в топологии пространства обобщенных функций Шварца. Обозначим через $h_k(\theta)$ – индикатор Фрагмена–Линделефа функции $u_k(z)$,

$$h_k(\theta) := \varlimsup_{r\to\infty} \frac{u_k(re^{i\theta})}{r^\rho}.$$

Теорема 1 *Пусть* $\rho \in (0,1)$, $\lambda \geq 0$. *Тогда*

$$u_3(z) = [A_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) - B_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r^\rho, \quad (2)$$

$$u_4(z) = [B_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) + A_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r^\rho, \quad (3)$$

$$u_5(z) = [C_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) - D_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r, \quad (4)$$

$$u_6(z) = [D_\rho(\lambda,\theta)\cos(\lambda\ln r) + C_\rho(\lambda,\theta)\sin(\lambda\ln r)]r, \quad (5)$$

где

$$A_\rho(\lambda,\theta) = \mathrm{Re}\,\frac{\sin(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)}{\sin(\rho+i\lambda)\pi}, \quad B_\rho(\lambda,\theta) = \mathrm{Im}\,\frac{\sin(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)}{\sin(\rho+i\lambda)\pi},$$

а аналогичные формулы для $C_\rho(\lambda,\theta)$ *и* $D_\rho(\lambda,\theta)$ *получаются заменой* $\sin(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)$ *на* $\cos(\rho+i\lambda)(\pi-\theta)$.

Доказательство. Эти равенства получаются применением комплексного интегрирования и теории вычетов. Из них следует, что

$$\mathrm{Fr}\,u_5(z) = \{[C_\rho(\lambda,\theta)\sin\varphi - D_\rho(\lambda,\theta)\cos\varphi]r : \varphi \in [0,2\pi]\},$$

$$h_5(\theta) = \sqrt{C_\rho^2(\lambda,\theta) + D_\rho^2(\lambda,\theta)}$$

и аналогичные формулы для $u_3(z)$, $u_4(z)$, $u_6(z)$.

Докажем, например, равенство (2). Имеем

$$u_3(z) = \frac{r^\rho \sin\theta}{\pi}\,\mathrm{Re}\,r^{i\lambda}\int_0^\infty \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,dt.$$

Определим однозначную ветвь функции $t^{\rho+i\lambda}$ в плоскости с разрезом по положительной полуоси $[0,\infty)$, полагая $\arg t = 0$ на верхнем борту разреза. Заметим, что в этом случае $\arg t = 2\pi$ на нижнем борту разреза и выполняется равенство $0 < \arg t < 2\pi$ в разрезанной плоскости.

Определим контур интегрирования $L = L(\varepsilon)\cup L(R)\cup L_1\cup L_2$, где $L(\varepsilon)$ – окружность с центром в нуле радиуса ε, $L(R)$ – аналогичная окружность радиуса R, L_1 – верхний борт разреза вдоль отрезка

$[\varepsilon, R]$, а L_2 – нижний борт этого разреза, проходимый в противоположном направлении. Тогда

$$I = \int\limits_{L} \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,dt = I(\varepsilon) + I(R) + I_1 + I_2\,.$$

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \lim_{R\to\infty} I(R) = 0\,. \tag{6}$$

С другой стороны

$$I_1 = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,dt\,,$$

$$I_2 = \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{\exp(2\pi i(\rho+i\lambda))t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,dt = -\exp(2\pi i(\rho+i\lambda))I_1\,. \tag{7}$$

Подынтегральная функция при $\theta \neq 0$ имеет простые полюсы в точках $t_1 = \exp(i\theta)$ и $t_2 = \exp(i(2\pi - \theta))$. По теореме о вычетах

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{t=e^{i\theta}} \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1} + \operatorname*{Res}_{t=e^{i(2\pi-\theta)}} \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\right) =$$

$$\pi i\left(\frac{e^{i\theta(\rho+i\lambda)}}{e^{i\theta} - \cos\theta} + \frac{e^{i(2\pi-\theta)(\rho+i\lambda)}}{e^{i(2\pi-\theta)} - \cos\theta}\right) = \frac{\pi}{\sin\theta}\left(e^{i\theta(\rho+i\lambda)} - e^{i(2\pi-\theta)(\rho+i\lambda)}\right) =$$

$$\frac{\pi}{\sin\theta}[\cos\theta(\rho+i\lambda) + i\sin\theta(\rho+i\lambda) - \cos(2\pi-\theta)(\rho+i\lambda) - i\sin(2\pi-\theta)(\rho+i\lambda)] =$$

$$\frac{\pi}{\sin\theta}[2\sin(\pi-\theta)(\rho+i\lambda)\sin\pi(\rho+i\lambda) - 2i\sin(\pi-\theta)\cos\pi(\rho+i\lambda)] =$$

$$\frac{2\pi}{\sin\theta}\sin(\pi-\theta)(\rho+i\lambda)[\sin\pi(\rho+i\lambda) - i\cos\pi(\rho+i\lambda)]\,.$$

С другой стороны из (7) следует, что $I_1 + I_2 =$

$$(1 - \exp(2\pi(\rho+i\lambda)))I_1 = (1 - \cos 2\pi(\rho+i\lambda) - i\sin 2\pi(\rho+i\lambda))I_1 =$$

$$2\sin\pi(\rho+i\lambda)[\sin\pi(\rho+i\lambda) - i\cos\pi(\rho+i\lambda)]I_1\,.$$

Отсюда и из (6) получаем

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{t^{\rho+i\lambda}}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,dt = \frac{\pi}{\sin\theta}\,\frac{\sin(\pi-\theta)(\rho+i\lambda)}{\sin\pi(\rho+i\lambda)}\,.$$

Откуда и следует формула (2). При $\theta = 0$ формула (2) получается предельным переходом.

2. Пусть $f(z)$–целая функция порядка $\rho \in (0,1)$ со строго положительными корнями a_k, $k = 1, 2, \ldots$. Мы будем рассматривать функции $\ln(1 - z/a_k)$ в плоскости, разрезанной по лучу $[0, \infty)$, фиксируя однозначную ветвь условием положительности функции при отрицательных вещественных z. Тогда

$$\ln f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) = \int_0^{\infty} \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) dn(t) = \int_0^{\infty} \frac{z}{z-t} \frac{n(t)}{t}\, dt\,,$$

где $n(t) = \sum_{a_k \le t} 1$–считающая функция нулей f. Имеем

$$\ln|f(z)| = \int_0^{\infty} \frac{r(r - t\cos\theta)}{t^2 - 2tr\cos\theta + r^2} \frac{n(t)}{t}\, dt\,.$$

Пусть $\varphi(t) = t^{\rho}(a_0 + a_1 \cos\lambda \ln t + b_1 \sin\lambda \ln t)$. Если $a_0 \ge \sqrt{1 + \lambda^2/\rho^2}$ $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, то $\varphi(t)$ будет строго возрастающей функцией. Действительно,

$$\varphi'(t) = \rho t^{\rho-1}\left[a_0 + \cos\lambda \ln t\left(a_1 + \frac{\lambda}{\rho} b_1\right) + \sin\lambda \ln t\left(b_1 - \frac{\lambda}{\rho} a_1\right)\right].$$

И из элементарного неравенства

$$C_1 \sin\lambda + C_2 \cos\lambda \ge -\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

получаем

$$\varphi'(t) \ge \rho t^{\rho-1}\left[a_0 - \sqrt{\left(a_1 + \frac{\lambda}{\rho} b_1\right)^2 + \left(b_1 - \frac{\lambda}{\rho} a_1\right)^2}\,\right] =$$

$$\rho t^{\rho-1}\left(a_0 - \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\rho^2}} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\right) \ge 0\,.$$

Возьмем в определении f $n(t) = [\varphi(t)]$. Тут использовано стандартное обозначение для целой части числа. Предельное множество Азарина $\mathrm{Fr}\, f$ для целой функции f определяется как предельное множество Азарина субгармонической функции $\ln|f(z)|$. Из теоремы 1 следует, что предельное множество Азарина $\mathrm{Fr}\, f$ и индикатор $h_f(\theta)$ функции f определяются равенствами

$$\mathrm{Fr}\, f = \left\{ \left(a_0 \frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi} + (a_1 C_\rho(\lambda,\theta) + b_1 D_\rho(\lambda,\theta))\cos\varphi + \right.\right.$$

$$\left.\left. (-a_1 D_\rho(\lambda,\theta) + b_1 C_\rho(\lambda,\theta))\sin\varphi \right) r^\rho : \varphi \in [0, 2\pi] \right\},$$

$$h_f(\theta) = a_0 \frac{\cos\rho(\pi-\theta)}{\sin\rho\pi} + \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{C_\rho^2(\lambda,\theta) + D_\rho^2(\lambda,\theta)}.$$

Эти соотношения справедливы и без предположения

$$a_0 \geq \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\rho^2}}\sqrt{a_1^2 + b_1^2},$$

однако, в общем случае функция f будет мероморфной. Если взять

$$\varphi(t) = t^\rho \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\lambda_k \ln t + b_k \sin\lambda_k \ln t) \right)$$

и затем, согласно приведенной выше процедуре, построить функцию $f(z)$, то с помощью теоремы 1 можно получить асимптотическую формулу для $\ln|f(z)|$. В случае если $\varphi(t)$–возрастающая функция, то f будет целой функцией. Таким образом можно получить асимптотические формулы для широкого класса нерегулярно растущих целых функций. Заметим, что в книге Б. Я. Левина [2] приведены асимптотические формулы для класса целых функций вполне регулярного роста.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Азарин В. С. *Об асимптотическом поведении субгармонических функций* // Математический сборник. – 1979. – 108(2). – С. 147-167.

[2] Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций*. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

Надійшла до редакції 11.09.99.