Міністерство освіти і науки України

Вісник Сумського державного університету

Науковий журнал

Серія Фізика, математика, механіка

Заснований у 1994 році

№ 13(46)' 2002

Суми Видавництво СумДУ

Журнал публікує статті, які містять нові теоретичні та практичні результати в галузях фізико-математичних наук, підготовлені професорсько-викладацьким складом, аспірантами та здобувачами університету і інших ВНЗ, а також вченими та спеціалістами інших наукових установ.

Для викладачів ВНЗ, наукових працівників, аспірантів.

Рекомендовано до друку науково-технічною радою
Сумського державного університету,
протокол № 3 від 13.12.2002 р.

Адреса редакційної колегії: 40007, м.Суми, вул.Р.-Корсакова, 2.
Тел. 33-41-08

Свідоцтво про реєстрацію
КВ № 4935 від 12.03.2001 р.

Президією ВАК України (постанова № 1-05/7 від 09.06.99 р. перелік № 1) журнал зареєстровано як наукове видання з фізико-математичних наук

ЗМІСТ

ФІЗИКА

2. Jida S.,Tasaki A. Proc. Intern. Conf. On Magnetism. Nottingham, 1964. - 583 p.
3. Дикштейн И.Е., Тарасенко В.В., Шавров В.Г. //ЖЭТФ. - 1974. - Т.67, №2(8). - 816 с.
4. Чепурных Г.К. // ФТТ.-1975.- Т.17, № 2. - 430 с.
5. Каганов М.И., Чепурных Г.К. //ФТТ.- 1969.- Т.11, № 4.- 911 с.
6. Белов К.П. Магнитострикционные явления и их технические приложения. - М.: Наука, 1987.

Поступила в редколлегию 9 июля 2002г.

УДК 535.8

БІФУРКАЦІЯ ХОПФА В ДИНАМІЦІ ЛАЗЕРА ТИПУ ЛОРЕНЦА – ХАКЕНА

С.В. Коломієць, ст. викл.
(Сумський національний аграрний університет)

Розглядається одномодова дворівнева модель лазера біжучої хвилі класу C [1] з некогерентним накачуванням, яке за умови відсутності відхилення частоти поля від центра лінії має вигляд

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \rho(z_2 - z_1), \\ \dot{z}_2 = z_1 z_3 - z_2, \\ \dot{z}_3 = \gamma(A - z_3 - z_1 z_2), \end{cases} \tag{1}$$

де z_1 - модуль амплітуди електричного поля; z_2 - модуль амплітуди поляризації атомної системи; z_3 - нормована різниця заселеностей робочих рівнів; A - параметр накачування; ρ - відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи; γ - відношення повздовжньої і поперечної констант релаксації середовища. Всі величини– фазові координати, параметри і час – безрозмірні. В роботі [2] та інших вивчалась стійкість стаціонарної генерації в моделі (1). В роботі [1] відзначається існування біфуркації Хопфа і наводиться нульове наближення до частоти малих коливань навколо нетривіального стаціонарного розв'язку.

У даній роботі знаходиться явний аналітичний розв'язок у формі згаданих малих коливань, перша поправка до нульового наближення частоти модуляції поля, а також знайдено величини для одержання висновків щодо стійкості періодичного розв'язку.

Система (1) вивчається в околі нетривіального стаціонарного розв'язку: $z_{1c} = z_{2c} = \sqrt{A-1} = q; z_{3c} = 1$. Після заміни змінних $z_k = y_k + z_{kc}$ система (1) записується у вигляді

$$\dot{\vec{y}} = W\vec{y} + \vec{B}\,, \tag{2}$$

де

$$W = \begin{pmatrix} -\rho & \rho & 0 \\ 1 & -1 & q \\ -\gamma q & -\gamma q & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_3 \\ -\gamma y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Матриця W має характеристичне рівняння

$$\sum_{k=0}^{3} d_k \lambda^{3-k} = 0, \quad (3)$$

де $d_0 = 1; d_1 = \rho + \gamma + 1; d_2 = \gamma(A + \rho); d_3 = 2\gamma\rho(A-1)$.

У системі (2) виникає біфуркація Хопфа, коли характеристичне рівняння (3) має два суто уявні корені, а третій корінь від'ємний. Якщо кубічне рівняння має два комплексно-спряжені корені $\lambda_{1,2} = \zeta_1 \pm i\zeta_2$ і третій корінь λ_3, то шляхом порівняння можна виразити $\zeta_1, \zeta_2, \lambda_3$ через коефіцієнти рівняння (3):

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\left(d_3 - d_1 d_2 - 8\zeta_1^{\,2}(d_1 + \zeta_1)\right)\left(d_2 + d_1^{\,2}\right)^{-1},$$

$$\zeta_2^{\,2} = d_3(d_1 + 2\zeta_1)^{-1} - \zeta_1^{\,2}; \quad \lambda_3 = -d_1 - 2\zeta_1. \quad (4)$$

Із залежностей (4) випливає, що для існування суто уявних коренів $(\zeta_1 = 0)$ повинно виконуватись співвідношення $d_1 d_2 = d_3$, з якого можна знайти біфуркаційне значення параметра A: $A_б = \rho(\rho + \gamma + 3)(\rho - \gamma - 1)^{-1}, \rho > \gamma + 1$.

Із другої залежності співвідношень (4) знаходять нульове наближення до частоти малих коливань:

$$\zeta_2 = \left(\frac{d_3}{d_1}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\rho\gamma(A_б - 1)}{\rho + \gamma + 1}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\rho\gamma(\rho + 1)}{\rho - \gamma - 1}\right)^{1/2} \equiv \omega_0.$$

Оскільки $\rho, \gamma > 0$, то третій корінь $\lambda_3 = -(\rho + \gamma + 1) < 0$, і, отже, в динамічній системі виникають періодичні коливання. З першої залежності співвідношень (4) перевіряється умова трансверсальності $\frac{\partial \zeta_1}{\partial A_б} \neq 0$ і знак похідної, необхідний для вивчення умов стійкості руху:

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial A_б} = \frac{\gamma(\rho - \gamma - 1)^2}{\gamma\rho(\rho + 3) + 2(\rho + \gamma + 1)^2(\rho - \gamma - 1)} > 0.$$

Асимптотичне інтегрування системи (2) виконується відповідно до алгоритму, викладеному в [3]. Елемент q матриці W доцільно подати у вигляді суми його біфуркаційного значення і збурюючого доданка μ, який треба знайти. Оскільки розв'язок шукається в околі точки біфуркації, про що свідчить введення збурюючого параметра, то частота малих коливань ω невідома, тому її слід розвинути в ряд за степенями малого параметра ε, який розглядається як проекція розв'язку на власний вектор спряженого лінійного оператора. Так само необхідно розвинути в ряд фазові координати і параметр μ:

$$\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \omega - \omega_0 \\ \mu \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} \begin{pmatrix} \vec{y}_k \\ \omega_k \\ \mu_k \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Підставляючи (5) в систему (2) і прирівнюючи коефіцієнти біля однакових степенів ε, знайдемо нескінченну послідовність систем диференціальних рівнянь, з яких нижче подано три:

$$J_0\vec{y}_k = \vec{h}_k + \vec{H}_k, \quad \vec{h}_1 = \vec{H}_1 = 0,$$

$$\vec{h}_2 = \omega_1 \frac{d\vec{y}_1}{ds} - W_1\mu_1\vec{y}_1, \quad \vec{H}_2 = (0; y_{11}y_{13}; -\gamma y_{11}y_{12})^T, \tag{6}$$

$$\vec{h}_3 = \omega_2 \frac{d\vec{y}_1}{ds} + \omega_1 \frac{d\vec{y}_2}{ds} - W_1(\mu_2\vec{y}_1 + \mu_1\vec{y}_2),$$

$$\vec{H}_3 = (0; y_{21}y_{13} + y_{11}y_{23}; -\gamma(y_{11}y_{22} + y_{21}y_{12}))^T,$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\gamma & -\gamma & 0 \end{pmatrix}; \quad J_0 \equiv -\omega_0 \frac{d}{ds} + W_0,$$

де матриця W_0 знаходиться з матриці W при $A = A_б$, $s = \omega t$, перший індекс в нелінійній частині систем збігається зі степенем малого параметра ε, а другий дорівнює номеру компоненти вектора $\vec{y}_k$, символ "T" означає операцію транспонування.

Нижче буде знаходитись та частина розв'язку систем (6), яка відповідає двом власним векторам матриці W, що пов'язані з її власними значеннями $\pm\omega_0 i$. Оскільки ці вектори містять комплексні компоненти, то для їх уникнення знаходиться один власний вектор $\vec{f}$ для власного значення $\omega_0 i$, після чого шукані вектори $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ обчислюються за формулами

$$\vec{f}_1 = \operatorname{Re}\vec{f} = \left(1;1;-\frac{\omega_0^{\;2}}{\rho q}\right)^T; \vec{f}_2 = -\operatorname{Im}\vec{f} = \left(0;-\frac{\omega_0}{\rho};-\frac{\omega_0(\rho+1)}{\rho q}\right)^T,$$

де символи $\operatorname{Re}, \operatorname{Im}$ означають взяття дійсної та уявної частин комплексного числа. Легко переконатись, що $W_0\vec{f}_1 = \omega_0\vec{f}_2$ та $W_0\vec{f}_2 = -\omega_0\vec{f}_1$, а вектор $\vec{\varphi} = \vec{f}_1\cos s + \vec{f}_2 \sin s$ належить до ядра оператора J_0, визначеного раніше: $J_0\vec{\varphi} = 0$. Для знаходження розв'язку систем (6) необхідно також ввести оператор $J_0^{\;*}$, спряжений до оператора J_0, які пов'язані залежністю, що виражає рівність скалярних добутків для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, періодичних за s:

$$\left[\vec{a}(s), \vec{b}(s)\right] = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\vec{a}(s)\cdot\vec{b}(s)\right)ds,$$

$$\left[J_0\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, J_0^{\;*}\vec{b}\right].$$

Звідси $J^* = \omega_0 \dfrac{d}{ds} + W_0^{\;*}$. Оскільки W_0 - дійсна матриця, то $W_0^{\;*} = W_0^{\;T}$.

Аналогічно знаходяться вектори $\vec{f}_1^{\;*}$, $\vec{f}_2^{\;*}$ для матриці W^T:

$$\vec{f}_1^{\;*} = \left(\frac{\gamma - \omega_0^{\;2} + \gamma q^2}{\rho q}; \frac{\gamma}{q}; 1\right)^T, \quad \vec{f}_2^{\;*} = \left(-\frac{\omega_0(\gamma+1)}{\rho q}; \frac{-\omega_0}{q}; 0\right)^T,$$

для яких виконуються залежності: $W_0^{\;T}\vec{f}_1^{\;*} = \omega_0\vec{f}_2^{\;*}$, $W_0^{\;T}\vec{f}_2^{\;*} = -\omega_0\vec{f}_1^{\;*}$.

Легко переконатись, що вектор $\vec{\psi}_1 = \vec{f}_1^{\,*}\cos s - \vec{f}_2^{\,*}\sin s$ та вектор $\vec{\psi}_2 = \vec{f}_1^{\,*}\sin s + \vec{f}_2^{\,*}\cos s$ належать до ядра оператора J_0^*: $J_0^*\vec{\psi}_k = 0$.

Розв'язок першої із систем (6) підставляється в праву частину другої системи, після чого компоненти вектора $\vec{H}_2$ набирають вигляду

$$y_{11}y_{13} = \frac{-\omega_0^{\,2}}{\rho q}\cos^2 s - \frac{\omega_0(\rho+1)}{\rho q}\sin s\cos s,$$

$$y_{11}y_{12} = \cos^2 s - \frac{\omega_0}{\rho}\sin s\cos s.$$

У правій частині другої системи знаходяться також невідомі ω_1, μ_1. Для їх визначення використовується альтернатива Фредгольма: розв'язок спряженої однорідної системи повинен бути ортогональним до правої частини даної системи, тобто потрібно, щоб виконувались співвідношення

$$\int_0^{2\pi}\vec{\psi}_1\left(\vec{h}_k + \vec{H}_k\right)ds = 0;\; \int_0^{2\pi}\vec{\psi}_2\left(\vec{h}_k + \vec{H}_k\right)ds = 0;\quad k = 1,2,3. \tag{7}$$

Можна показати, що для парного індексу k ці інтеграли дають однорідні лінійні системи з невідомими ω_{k-1}, μ_{k-1}, індекси яких непарні, внаслідок того, що праві частини цих лінійних систем перетворюються в нуль, бо тригонометричні функції ортогональні на відрізку $[0;2\pi]$. Оскільки детермінанти одержаних систем відмінні від нуля, то вони мають лише тривіальний розв'язок. Внаслідок цього $\omega_1 = \mu_1 = 0$. Тепер друга система спрощується: $J_0\vec{\varphi}_2 = \vec{H}_2$. Її розв'язок шукається у вигляді

$$\vec{y}_2 = \vec{r}_0 + \vec{r}_1\cos 2s + \vec{r}_2\sin 2s;\quad \vec{r}_k = \left(a_k, b_k, c_k\right)^T.$$

Підстановка $\vec{y}_2$ в другу систему приводить до трьох лінійних алгебраїчних систем:

$$W_0\vec{r}_0 = \vec{H}_{20},\quad \vec{H}_{20} = \left(0; -\frac{\omega_0^{\,2}}{2\rho q}; \frac{1}{2}\right)^T,$$

$$2\omega_0\vec{r}_2 + W_0\vec{r}_1 = \vec{H}_{21},\quad \vec{H}_{21} = \left(0; \frac{\omega_0^{\,2}}{2\rho q}; \frac{1}{2}\right)^T, \tag{8}$$

$$-2\omega_0\vec{r}_1 + W_0\vec{r}_2 = \vec{H}_{22},\quad \vec{H}_{22} = \left(0; -\frac{\omega_0(\rho+1)}{2\rho q}; \frac{\omega_0}{2\rho}\right)^T.$$

Їх розв'язок має вигляд

$$\vec{r}_0 = W_0^{-1}\vec{H}_{20},\quad \vec{r}_1 = \frac{1}{2\omega_0}\left(W_0\vec{r}_2 - \vec{H}_{22}\right),$$

$$\vec{r}_2 = \left(2\omega_0 E + \frac{1}{2\omega_0}W_0^{\,2}\right)^{-1}\left(\vec{H}_{21} + \frac{1}{2\omega_0}W_0\vec{H}_{22}\right),$$

де E - одинична матриця третього порядку. Число $-2\omega_0$ не є власним значенням матриці $\frac{1}{2\omega_0}W_0{}^2$, тому обернена матриця існує, що забезпечує єдність розв'язку систем (8).

Тепер третя система послідовності (6) має праву частину з відомою вектор-функцією і невідомими константами μ_2, ω_2. Для їх визначення слід знову застосувати альтернативу Фредгольма, що зводиться до інтегрування співвідношень (7) для індексу $k = 3$. Виконані інтегрування приводять до системи рівнянь, з якої знаходяться невідомі

$$\mu_2 = \left((\rho+\gamma+1)I_2 - \omega_0 I_1\right)\omega_0\left(\rho q \Delta\right)^{-1},$$

$$\omega_2 = \left(I_2\left(\omega_0{}^2(\rho+1-\gamma)\right) - \gamma\rho q^2\right) - \omega_0\left(\omega_0{}^2 + \gamma\left(q^2 - \rho - 1\right)\right)I_1\left)\left(2q^2\rho\Delta\right)^{-1},$$

де

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{\psi}_1(s)\vec{H}_3(s)ds, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\vec{\psi}_2(s)\vec{H}_3(s)ds,$$

$$\Delta = \frac{\omega_0{}^2\gamma}{2\rho^2 q^3}\left(2\left(\omega_0{}^2 + \rho q^2\right) + (\rho+1)(\rho+\gamma+1) - (\gamma+1)q^2\right).$$

Отже, розв'язок системи диференціальних рівнянь із точністю до величин третього порядку малості має вигляд

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} q \\ q \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon\left(\vec{f}_1\cos s + \vec{f}_2\sin s\right) + \varepsilon^2\left(\vec{r}_0 + \vec{r}_1\cos 2s + \vec{r}_2\sin 2s\right) + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Для дослідження стійкості періодичного розв'язку можна скористатись теоремою факторизації [3]. Вихідна система лінеаризується в околі одержаного періодичного розв'язку: для цього одержаний розв'язок $\vec{y}$ збурюється невідомим вектором $\vec{u}$ і сума векторів $\vec{y}+\vec{u}$ підставляється в систему (2). Після заміни приросту функцій диференціалами і нехтування нелінійними доданками одержується система лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Відповідно до теореми Флоке [3] розв'язок нової системи можна подати у вигляді $\vec{u} = e^{\sigma(s)}\vec{\eta}(s)$, де σ - характеристичний показник системи, $\vec{\eta}(s)$ - деякий періодичний вектор. Як доведено в [3], показник σ факторизується: $\sigma = \frac{du}{d\varepsilon}\delta$, де δ знаходиться з системи диференціальних рівнянь у вигляді ряду за степенями малого параметра ε. Зокрема, у першому наближенні $\delta = -\frac{\partial\zeta_1}{\partial A_6}\varepsilon$. Оскільки раніше знайдена величина $\frac{\partial\zeta_1}{\partial A_6}$ виявилась додатною, то для збереження від'ємності σ, що гарантує стійкість періодичного розв'язку, слід вимагати додатності другого множника $\frac{du}{d\varepsilon}$. Раніше був знайдений перший елемент ряду, яким визначається μ, але наступний ненульовий член ряду має порядок $O\left(\varepsilon^4\right)$, тому знак μ_2 має головне значення для визначення стійкості руху. Одержаних вище результатів достатньо, щоб цей знак визначити.

Система диференціальних рівнянь, що описує динаміку лазера типу Лоренца-Хакена, проінтегрована в околі стаціонарного розв'язку за наявності біфуркації Хопфа, яка виникає, коли спектр лінійної частини оператора має два суто уявні корені при біфуркаційному значенні одного з параметрів. Одержана перша поправка до нульового наближення частоти модуляції поля випромінювання фотонів. Зазначено спосіб визначення стійкості періодичних коливань.

SUMMARY

The periodic solution of the system of differential equations of model of dynamics of the laser of the class C is retrieved. The method of integrating essentially uses Fredholm's alternative and reduces a nonlinear system to infinite sequence linear. The indispensable data for determination of the Floquet's ratio sign are retrieved.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. – М.: Наука, Физматлит, 1999. – 364 с.
2. Ораевский А.Н., Успенский А.В. Режим пульсаций мощности излучения квантовых генераторов // Труды ФИАН. –1965. - Т.31.- С.96.
3. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. – М.: Мир, 1983.- 300 с.

Надійшла до редколегії 9 вересня 2002р.

УДК 539.1.08

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ УРАВНЕНИЯ ВЫХОДА В СПЕКТРОМЕТРИИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ

А.И. Кульментьев*, в.н.с.; О.П. Кульментьева**, доц.

*(*Институт прикладной физики НАН Украины*
***Сумский государственный университет)*

ВВЕДЕНИЕ

Энергетические спектры рассеянных ионов могут дать уникальную информацию об элементном составе приповерхностных областей твердых тел. Во многих случаях именно эти области определяют физико-химические свойства материалов, которые представляют наибольший интерес для современной микроэлектроники или материаловедения. Поэтому не случайным является широкое использование спектрометрии резерфордовского обратного рассеяния (Rutherford Backscattering Spectrometry ≡ RBS) легких ионов как в фундаментальных, так и в прикладных исследованиях.

С самой общей точки зрения каждый входящий в состав образца атомный компонент может быть описан его концентрационным профилем– сигналом в пространстве составов и соответствующим ему сигналом в спектре обратного рассеяния в пространстве энергий. Экспериментальный спектр представляет собой сумму сигналов от всех компонент, и его интерпретация эквивалентна преобразованию суммарного сигнала из пространства энергий в пространство составов. В такой постановке, очевидно, что интерпретация спектра обратного рассеяния относится к обратным задачам [1]. Большинство обратных задач являются некорректно поставленными, т.е. такими, для которых нарушается одно из следующих требований [1]: 1) решение существует