ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИДЕЙ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ В ЭКОЛОГИИ

Долгих В.Н., канд. физ.-мат. наук, доц., Долгих Я.В., асп.

Загрязнение окружающей среды приводит к повреждению обьектов живой и неживой природы. Процесс накопления повреждений является случайным процессом. В настоящее время элементарные механизмы возникновения и развития повреждений известны лишь в самых грубых чертах. О формулировках количественных характеристик, функций распределения, характеристик взаимодействия повреждений говорить трудно. Поэтому трудно провести и обоснованный статистический анализ, не говоря уже о том, что такой анализ связан с введением многих неизвестных параметров и функций. Для того чтобы исправить данное положение введём некоторую априорную характеристику повреждённости, которая будет устанавливаться сравнением следствий теории с экспериментальными данными.

В простейшем варианте повреждённость можно описать некоторым скаляром $0 \le f \le 1$. В начальном состоянии при отсутствии поврежденности $f = 0$; с течением времени функция возрастает. Равенство f единице является условием разрушения.

Текущая величина f является в конечном счёте функцией t, а условие разрушения $f = 1$ определяет время разрушения t_p. Для нахождения текущего значения f(t) нужно располагать дифференциальным или интегральным уравнением, устанавливающим зависимость повреждённости f от величины и скорости воздействия, уровня повреждённости, температуры, влажности, давления и т.д. Такое уравнение принято называть кинетическим уравнением повреждений [1]. Форма этого уравнения задаётся заранее, а входящие в него постоянные или функциональные параметры подбираются по результатам опытов. Дифференциальное кинетическое уравнение повреждений можно представить в следующем виде:

$$\frac{df}{dt} = F[t, \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}, f(t), T(t), \ldots \qquad (1)$$

где t - время,

$\varphi(t)$ - безразмерная интенсивность повреждающего фактора,

T - температура.

Наличие среди независимых аргументов функции F времени t указывает на то, что обьект стареет, как, например, человек, растение, а зависимость скорости повреждений от накопившейся к моменту t меры f указывает на наследственные свойства повреждений. Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (1). В простейшем случае

$$\frac{df}{dt} = \Phi[\varphi(t)] = \tilde{\varphi}(t), \qquad (2)$$

$$f(t) = \int_0^t \tilde{\varphi}(\tau)\, d\tau, \qquad (3)$$

где $\Phi[\varphi(t)]$ - непрерывная и возрастающая с ростом вредного воздействия φ (интенсивности повреждающего фактора) функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0) = 0$.

Согласно (3), скорость накопления повреждений зависит от мгновенного значения воздействия, но не от режима предшествующего воздействия, что характерно для обьектов неживой природы. Интегральная зависимость (3) выражает принцип линейного суммирования повреждений (иногда называемый принципом Бейли [2]): конечное повреждение $f(t)$ равно сумме повреждений, вызываемых отдельными импульсами вне зависимости от того, при каком времени $\tau_k \le t$ и в каком порядке они действуют. Из условия разрушения при $\tilde{\varphi} = const$

$$1 = \tilde{\varphi}\, t_p \qquad (4)$$

находим зависимость между уровнем постоянного приведенного вредного фактора $\tilde{\varphi}$ и временем разрушения t_p. С учётом зависимости (4) формула (2) примет вид

$$f(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{t_p[\varphi(\tau)]}\,. \qquad (5)$$

Соответствующее условие разрушения обычно называют формулой Бейли [2]

$$\int_0^{t_p} \frac{d\tau}{t_p[\varphi(\tau)]} = 1 \qquad (6)$$

где t_p - время разрушения при рассматриваемом нестационарном режиме воздействия.

Зависимость $t_p(\varphi)$ должна быть определена экспериментально. В эксперименте при постоянном φ фиксируется время разрушения t_p.

В качестве следующего частного случая уравнения (1) рассмотрим уравнение

$$\frac{df}{dt} = \beta\,\varphi(t) + \alpha\, f(t)\,, \qquad (7)$$

где α и β - постоянные.

Согласно уравнению (7) скорость накопления повреждений пропорциональна интенсивности воздействия $\varphi(t)$ и накопленной повреждённости $f(t)$.

Решение уравнения (7) при дополнительном условии $f(0) = 0$ имеет вид

$$f(t) = \int_0^t \varphi(\tau) H(t-\tau)\, d\tau,\; H(t-\tau) = \beta\, \exp[-\alpha(t-\tau)]\,, \qquad (8)$$

где ядро $H(t-\tau)$ называется функцией влияния.

Пусть

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \varphi_0 = const, & 0 \le \tau \le t_1 \\ 0, & \tau > t_1 \end{cases} \qquad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и интегрируя, получаем

$$f(t) = \begin{cases} \varphi_0 \frac{\beta}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}), & 0 \le t \le t_1 \\ \varphi_0 \frac{\beta}{\alpha}[e^{-\alpha(t-\tau)} - e^{-\alpha t}], & t > t_1 \end{cases} \qquad (10)$$

Из (10) следует, что при $0 \le t \le t_1$ повреждаемость возрастает, а при $t > t_1$ - убывает до 0 при $t \to \infty$, т.е. при $t \to \infty$ объект "восстанавливается", "забывая" о вредном воздействии, действовавшем в течение промежутка времени $[0, t_1]$. Такое поведение характерно для объектов живой природы.

Перейдём к тому случаю уравнения (1), когда одним из аргументов функции F является скорость изменения воздействия $\frac{d\varphi}{dt}$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{df}{dt} = C\frac{d\varphi}{dt} + \tilde{\varphi}(t), \qquad \tilde{\varphi}(t) = \Phi[\varphi(t)] \tag{11}$$

где C - постоянная. После интегрирования получим

$$f(t) = C\varphi(t) + \int_0^t \tilde{\varphi}(t)\,dt \tag{12}$$

Комбинируя выражения для меры повреждений согласно (3), (8), (12), можно получить более сложные соотношения, например,

$$f(t) = C\varphi(t) + \gamma\int_0^t \tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau + \lambda\int_0^t \varphi(\tau)H(t-\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

обладающие в части описания процесса повреждений большой гибкостью.

Изложим принцип наследственности, сформулированный Больцманом и получивший развитие в работах Вольтерра. Пусть $f(t)$ - реакция некоторой системы в момент времени t, вызванная внешним воздействием $\varphi(\tau)$ в течение промежутка времени $0 \le \tau \le t$. В общем случае величина реакции $f(t)$ в момент времени t определяется не только значением воздействия в данный момент t, но и всей историей изменения функции φ в указанном выше промежутке времени, т.е. является функционалом от φ.

Для простоты рассмотрим лишь линейные относительно φ функционалы вида

$$f(t) = \varphi(t) + \lambda\int_0^t H(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

Функция $H(t,\tau)$ называется ядром наследственности. Параметр λ может быть принят равным единице. Ядро наследственности характеризует степень "забывания" к моменту времени t о воздействии, совершённом в момент времени τ.

Если свойства системы со временем не меняются (система "не стареет"), то ядро $H(t,\tau)$зависит лишь от разности $t-\tau$.

Интегральное соотношение (14) с разностным ядром запишем следующим образом:

$$f(t) = \varphi(t) + \int_0^t H(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau \tag{15}$$

Соотношение (15), являющееся частным случаем соотношения (13), применим к описанию процесса повреждаемости.

Из соотношения (15) следует,что повреждаемость складывается из двух слагаемых: первое слагаемое $\varphi(t)$ характеризует мгновенную повреждаемость в момент времени t от воздействия в этот же момент; второе слагаемое учитывает повреждённость, накопленную за промежуток времени $[0,t]$ (учитывает "историю" вредного воздействия).

Если $H(t-\tau)\equiv M(\tau)$, то

$$f(t)=\varphi(t)+\int_0^t \varphi(\tau)M(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

повреждаемость накапливается без учёта "памяти" , что характерно для объектов "неживой" природы.

Рассмотрим процедуру экспериментального определения ядра.

1. Пусть $\varphi(t)=\varphi(0)=\varphi_0=const=\varphi(t_p)$ внешнее воздействие постоянно. Проследим поведение системы вплоть до разрушения, т.е. до момента $t=t_p$ при котором $f(t_p)=1$.

Из (15) имеем

$$\varphi_0+\varphi_0\int_0^{t_p} H(t_p-\tau)\,d\tau=1 \tag{17}$$

Продифференцируем левую и правую части по t_p

$$H(t_p)=\frac{d}{dt_p}\left[\frac{1}{\varphi_0(t_p)}\right] \tag{18}$$

т.о. функция H численно равна тангенсу угла наклона кривой $\frac{1}{\varphi_0(t_p)}$ к оси t, т.е. ядро определяется законом изменения скорости повреждаемости во времени.

Кривая $\varphi(t_p)$ должна быть построена экспериментально и характеризует связь времени разрушения t_p с уровнем загрязнения φ .

В случае невозможности доведения обьекта до разрушения (человек, животное) в правой части соотношения (18) можно вместо 1 взять заранее обусловленный уровень повреждения П, назначаемый экспертами и надёжно фиксируемый экспериментально.

Если известна зависимость повреждаемости от времени $f(t_p)$ и закон изменения $\varphi(t)$, то для определения H имеем интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода (15).

Решая это уравнение относительно H найдём неизвестное ядро интегрального уравнения.

Отметим, что уравнение (14) позволяет по известной функции повреждения $f(t)$ и ядру H найти неизвестное воздействие $\varphi(t)$ (интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода).

SUMMARY

The purpose of the present paper is to extend some ideas of fracture mechanics to a solution problems of influence of environmental pollution on damage degree of nature objects. Some integral relations between damage function and pollution degree are given. The methods for experimental determinations of unknown kernels of integrals are proposed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения.- М.: Наука,1974. -312 с.
2. Павлов П.А. Основы инженерных расчётов элементов машин на усталость и длительную прочность.- Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1988. -252 с.

Долгих, В.Н. Применение некоторых идей механики разрушения в экологии [Текст] / В.Н. Долгих, Я.В. Долгих // Вісник Сумського державного університету. – 1995. – №4. – С. 121-124.