О.А. Борисенко, О.Є. Горячев

ПІДХІД ДО РІШЕННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА НА БАЗІ ФАКТОРІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

У статті розглядається метод отримання перестановок на базі факторіальної системи числення з метою вирішення задачі комівояжера. Застосування даного методу дозволяє знизити часові та технічні витрати на вирішення завдання.

Ключові слова: задача комівояжера, факторіальна система числення, перестановки, комбінаторна оптимізація, алгоритми

Літ. 11.

А.А. Борисенко, А.Е. Горячев

ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА НА ОСНОВЕ ФАКТОРИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В статье рассматривается метод получения перестановок на основе факториальной системы счисления с целью решения задачи коммивояжёра. Применение данного метода позволяет снизить временные и технические затраты на решение задачи.

Ключевые слова: задача коммивояжёра, факториальная система счисления, перестановки, комбинаторная оптимизация, алгоритмы

A.A. Borisenko A.E. Goryachev

APPROACH TO THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM BASED ON FACTORIAL NUMBERS

In this article a method for obtaining permutations based on the factorial number system to solve the traveling salesman problem is discussed. This method reduces the time and the technical cost of the problem solution.

Keywords: task salesman, factorial notation, rearrangement, combinatorial optimization, algorithms

Постановка проблемы. Решение множества экономических задач, связанных с оптимизацией различных процессов, сводится к задаче коммивояжёра [1, 2]. Задача коммивояжёра заключается в отыскании самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город. В условиях задачи указываются критерий выгодности маршрута (кратчайший, самый дешёвый, совокупный критерий и т. п.) и соответствующие матрицы расстояний, стоимости и т. п. Как правило, указывается, что маршрут должен проходить через каждый город только один раз – в таком случае выбор осуществляется среди гамильтоновых циклов.

Среди простейших методов решения можно выделить: полный лексический перебор, случайный перебор, жадные алгоритмы, метод минимального остовного дерева. На практике применяются также различные модификации более сложных, но эффективных методов: метод ветвей и границ и метод генетических алгоритмов, а также алгоритм муравьиной колонии [3, 4].

В наиболее простом с точки зрения технической реализации решении, предполагающем перебор всех возможных вариантов маршрута, применяется такой класс комбинаторных объектов, как перестановки. Помимо решения ряда задач комбинаторной оптимизации, к которым относится и задача коммивояжёра, перестановки эффективно применяются на практике для решения задач помехоустойчивой передачи информации и защиты данных от несанкционированного доступа [5, 6]. Так, например, для построения гибких и быстрых блочных аппаратных шифров для защиты информационно-телекоммуникационных систем используются управляемые перестановки, фиксированные перестановки и перестановки, вид которых зависит от преобразуемых данных [7, 8]. С учетом расположения и значений элементов перестановок они с успехом могут быть использованы для выявления и коррекции ошибок в данных, передаваемых по каналам связи [9].

Анализ исследований. Общим методом порождение различных комбинаторных объектов, в том числе перестановок, является метод, который базируется на поиске с возвращением [10]. Непосредственное применение этого метода, как правило, приводит к алгоритмам, время работы которых является недопустимо большим. Чтобы снизить временные затраты на порождение перестановок, необходимо адаптировать этот общий метод к конкретной задаче.

Существуют также более специализированные методы получения перестановок. К ним относятся методы векторов инверсий, вложенных циклов, транспозиции смежных элементов и ряд других [10]. Общим недостатком всех этих методов является повышенная сложность алгоритмов генерации перестановок, что не приемлемо при решении ряда задач.

Нерешённые части проблемы. Более простым методом решения задачи порождения перестановок является факториальная система счисления [10]. В этом случае перестановки генерируются в лексикографическом порядке при использовании факториальных алгоритмов счёта [11]. К сожалению, этот подход обладает ограниченными возможностями.

В данной работе развивается данный подход для решения задачи генерации перестановок. Преимущества построения перестановок на основе факториальных чисел состоят в довольно высоком быстродействии метода, а также простоте программной и аппаратурной реализации алгоритма [5]. Кроме того, свойства факториальной системы счисления позволяют организовывать порядок генерации перестановок, необходимый для решения каждой конкретной задачи.

Таким образом, **целями этой работы** являются:

1) разработка алгоритма порождения перестановок на базе факториальных чисел;

2) разработка алгоритма решения задачи коммивояжёра с помощью порождения перестановок на базе факториальных чисел.

Общие положения. Факториальные системы счисления принадлежат к системам со смешанной основой.

Обычно под факториальной системой счисления понимают выражение, которое имеет вид:

$$F_{<ф>} = X_n \cdot n! + X_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots Xm \cdot m! + \ldots + X_1 \cdot 1! + X_0 \cdot 0!$$

где $m = 0,1,\ldots,m;\ 0 \le Xm \le m$.

Это выражение называется нумерационной или числовой функцией. Максимальное число факториальной системе имеет вид

$$F_{<ф>max} = (n+1)! - 1.$$

Это следует из приведенных ниже преобразований числовой функции, когда $Xm = m$. Тогда

$$F = F_{max} = (n+1-1) \cdot n! + ((n-1)+1-1)(n-1)! + \ldots$$
$$\ldots + (m+1-1) \cdot m + \ldots + (1+1-1) \cdot 1! + (0+1-1) \cdot 0! =$$
$$= (n+1)! - n! + n! - (n-1)! + \ldots + (m+1)! - m! + \ldots$$
$$\ldots + 2! - 1! + 1! - 1! = (n+1)! - 1.$$

Минимальное число 00…0…0 в факториальной системе счисления $F_{min} = 0$.

Действительно, если все разряды $F_m = 0$, то

$$F = F_{min} = 0 \cdot n! + 0 \cdot (n-1)! + \ldots + 0 \cdot m! + \ldots + 0 \cdot 1! + 0 \cdot 0! = 0.$$

Диапазон факториальных чисел

$$P = F_{max} + 1.$$

При его нахождении учитывается, кроме максимального числа, также и ноль.

Преобразование факториальных чисел в однородные числа. Преобразование факториального числа в однородное число выполняется путем подстановки факториального числа в числовую (нумерационную) функцию для факториальных систем счисления. При этом выполняются все указанные в этой функции операции умножения и сложения.

Преобразование однородных чисел в факториальные числа. Преобразование числа из однородной системы счисления в факториальную происходит в такой последовательности.

Первым шагом будет деление преобразуемого числа на 1. Остаток в этом случае будет создавать цифру нулевого разряда. Очевидно, что она равна нулю, а частное – преобразуемому числу. Если это число и соответственно найденное частное равны 0 или 1, тогда в первый разряд искомого числа записывается 0 или 1 и преобразование заканчивается. Если преобразуемое число и соответствующее частное после первого шага деления будут больше 1, то следующим (вторым) шагом будет деления его на двойку, и тогда полученный остаток от деления будет записан как цифра первого разряда факториального числа. Затем анализируется величина полученного при делении на двойку частного. Если оно меньше 3, то во второй разряд факториального числа записывается его значение, а если равно или больше 3, то выполняется деление этого частного на 3. Далее во время последующих шагов выполняются для остатков и частных такие же операции, как и во время второго шага. Отличие заключается в том, что во время четвертого шага выполняется деление соответственно на 4, на пятом на 5 и так продолжается до тех пор, пока частное не станет меньше своего делителя. Затем это частное записывается, справа налево за ним записываются все полученные ранее остатки. Их последовательность создает искомое число.

Построение перестановок на основе факториальных чисел. Факториальные системы счисления дают возможность для построения широкого класса комбинаторных конфигураций, среди которых особое значение имеют перестановки.

Рассмотрим алгоритм их построения. Для того чтобы найти соответствие между числом в факториальной системе счисления и перестановкой, необходимо цифру, которая стоит в n-м разряде факториального числа оставить без изменений и считать её первым элементом перестановки. Следующую цифру (n-1)-го разряда факториального числа необходимо сравнить с первым элементом перестановки и, если она будет равняться ему или будет больше, то необходимо увеличить эту цифру на 1, а если нет, то оставить её без изменений. В обоих случаях будет получен второй элемент перестановки.

Далее цифру (n-2)-го разряда факториального числа сравнивают сначала с меньшим по величине элементом среди двух элементов ранее сформированной части перестановки и если она равна ему или больше, то увеличивают её на 1, а если нет, оставляют без изменений. В этом случае третий элемент перестановки будет сформирован. Если же факториальная цифра была увеличена на 1, выполняют сравнение увеличенной на 1 цифры (n-2)-го разряда с оставшимся элементом перестановки, и затем, если она равна ему или больше него, снова увеличивают её на 1. В противном случае оставляют её без изменений. Полученная таким образом увеличена цифра факториального числа будет третьим элементом перестановки.

Аналогично выполняют сравнения цифры (n-3)-го разряда и далее всех цифр факториального числа, которые еще не сравнивались, вплоть до нулевого разряда числа с элементами строящейся перестановки.

То есть в общем случае сначала выполняют сравнения цифры факториального числа с наименьшим элементом среди уже найденных элементов перестановки. Если эта цифра равна этому наименьшему элементу или больше него, то тогда она увеличивается на единицу. В противном случае она становится очередным элементом перестановки. Увеличенная же на единицу цифра факториального числа далее сравнивается с наименьшим элементом сформированной части перестановки без учёта элемента, относительно которого уже состоялось сравнение, и далее цикл повторяется до тех пор, пока не будет сформирован элемент перестановки. Далее выбирают следующую цифру факториального числа и с помощью приведённого выше правила находят новый элемент перестановки, и так продолжается до последней цифры факториального числа.

Алгоритм решения задачи коммивояжёра. Рассмотрим наиболее простой алгоритм решение задачи коммивояжёра, предполагающий полный перебор вариантов решения с использованием алгоритма генерации перестановок, который был описан ранее.

По условию задачи дана матрица условных расстояний между городами, то есть матрица значений критериев, по которым производится оценивание выгодности маршрута. Для полного перебора всех значений маршрута необходимо сгенерировать перестановки в лексикографическом порядке. Для этого необходимо перечислить все факториальные числа длины, равной требуемой длине перестановки и последовательно преобразовать их в перестановки с помощью алгоритма генерации, описанного ранее. Значения критерия выгодности маршрута для каждого варианта решения задачи будут выбираться из матрицы согласно значениям двух соседних элементов перестановки. Просуммировав значения критерия выгодности для всех пар элементов перестановки, мы получим общее значение критерия выгодности маршрута для данного варианта решения. Первое полученное общее значение критерия запоминается, далее с ним сравниваются все следующие значения. При сравнении запоминается меньшее значение критерия, большее значение отбрасывается. После того, как были сравнены общие значения критерия выгодности маршрута для всех перестановок, наименьшее полученное значение является оптимальным решением задачи.

Выводы. Рассмотренный выше алгоритм решения задачи коммивояжёра предполагает полный перебор всех возможных перестановок. Однако предложенный метод генерации перестановок на основе факториальной системы счисления позволяет строить перестановки с ограничениями, т.е. только часть перестановок из общего их числа, что позволяет использовать данный алгоритм в других, более сложных методах решения различных комбинаторных задач.

Предложенный в работе способ порождения перестановок и алгоритм решения задачи коммивояжёра на его основе позволяет снизить временные затраты на генерирование перестановок в произвольном или заданном порядке, а также упростить программную и техническую реализацию алгоритма решения задачи коммивояжёра.

1. Просветов Г.И. Математические методы и модели в экономике: задачи и решения / Г.И. Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2008. – 344 с.
2. Мастяева И.Н. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / И.Н. Мастяева, Г.Я. Горбовцов, О.Н. Семенихина. Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. М., 2003. – 113 с.
3. Левитин А.В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ / А.В. Левитин. – М.: «Вильямс», 2006. – 576 с.
4. Мудров В.И. Задача о коммивояжере / В.И. Мудров – М.: Знание, 1969. – 62 с.
5. Борисенко А.А. Электронна система генерації перестановок на базі факторіальних чисел / А.А. Борисенко, И.А. Кулик, А.Е. Горячев // Вісник СумДУ. Технічні науки. – 2007. – №1. – С.183–188.
6. Borisenko A.A. Generation of Permutations Based Upon Factorial Numbers / A.A. Borisenko, V.V. Kalashnikov, I.A. Kulik, A.E. Goryachev //

Eighth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications. Kaohiung, Taiwan, 2008. – p. 57–61.

7. Криптография: скоростные шифры / А.А. Молдовян, Н.А. Молдовян, Н.Д. Гуц, Б.В. Изотов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 244 с.

8. Введение в криптографию / Под общ. ред. В. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2000. – 272 с.

9. Цимбал В.П. Теория информации и кодирования / В.П. Цимбал. – К.: Вища школа, 1992. – 263 с.

10. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы: теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део – М.: Изд-во "Мир", 1980. – 477 с.

11. Горячев А.Е. Построение факториальных чисел на основе двоичных счётчиков / А.Е. Горячев // Вісник СумДУ. Технічні науки. – 2008. – №4.

Борисенко, А.А. Подход к решению задачи коммивояжёра на основе факториальных чисел / А.А. Борисенко, А.Е. Горячев // Актуальні проблеми економіки. – 2009. – №10(100). – С. 150–154.