Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

О. В. Лисенко,
В. В. Коваль,
М. Ю. Ромбовський

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ: МЕХАНІКА, МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА, ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2017

УДК 53(076.2)
Л60

Рецензенти:
О. Г. Пономарьов – доктор фізико-математичних наук, професор, в. о. завідувача відділу фізики пучків заряджених частинок Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми);
А. С. Опанасюк – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри електроніки і комп'ютерної техніки Сумського державного університету

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 6 від 8 грудня 2016 року)

Лисенко О. В.
Л60 Розв'язування задач із фізики: механіка, молекулярна фізика, термодинаміка : навчальний посібник / О. В. Лисенко, В. В. Коваль, М. Ю. Ромбовський. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – **302** с.
ISBN 978-966-657-679-1

Навчальний посібник містить приклади розв'язування задач із фізики за розділами: «Механіка», «Молекулярна фізика», «Термодинаміка». Кожному розділу передують стислі теоретичні відомості, подані задачі для самостійного розв'язування.

Для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації.

УДК 53(076.2)

ISBN 978-966-657-679-1

ЗМІСТ

ВСТУП

У навчальному посібнику подані приклади розв'язування найбільш типових задач із розділів «Механіка», «Молекулярна фізика», «Термодинаміка», а також наведені задачі для самостійного розв'язування. Автори мають на меті сформувати у студентів методологію розв'язування задач, допомогти засвоїти фізичні закони, навчити деяких математичних прийомів, що широко використовуються у фізиці. Під час роботи над кожною темою потрібно додержуватися таких рекомендацій:

1 Детально ***опрацювати*** теоретичний матеріал за підручником із курсу фізики (наприклад, [1–3]).

2 Уважно ***вивчити*** розв'язування розібраних задач із зазначеної теми. З'ясувати всі не зрозумілі для себе моменти у розв'язуванні задачі. За необхідності ще раз повернутися до посібника для більш глибокого опрацювання теоретичного матеріалу або ж звернутися за консультацією до викладача. ***Пам'ятайте,*** необхідно домогтися повного розуміння розв'язування наведених задач.

3 Перейти до самостійного розв'язування задач зазначеної теми. Потрібно ***керуватися*** загальною методологією розв'язування, що подана в розібраних задачах, а саме: а) зробити рисунок до задачі, якщо це необхідно; б) з'ясувати сутність процесів, про які йде мова в задачі; в) установити закони, які потрібно використати для розв'язування задачі, записати відповідні рівняння; г) провести математичні перетворення, одержати розв'язок у загальному вигляді, у якому шукана величина повинна бути виражена через величини, що наведені в умові задачі; ґ) виконати аналіз одержаного розв'язку щодо його відповідності фізичному змісту.

1 КІНЕМАТИКА

Основні формули

Вектори середньої швидкості та середнього прискорення матеріальної точки:

$$<\vec{\upsilon}> = \Delta\vec{r} / \Delta t, \quad <\vec{a}> = \Delta\vec{\upsilon} / \Delta t, \qquad (1\ а)$$

де $\Delta\vec{r}$ *та* $\Delta\vec{\upsilon}$ *є відповідно переміщенням та зміною швидкості матеріальної точки за час* Δt.

Швидкість та прискорення матеріальної точки:

$$\vec{\upsilon} = d\vec{r} / dt, \quad \vec{a} = d\vec{\upsilon} / dt. \qquad (1\ б)$$

Зв'язок нормального a_n *та тангенціального* a_τ *прискорення зі швидкістю:*

$$a_n = \upsilon^2 / R, \quad a_\tau = d\upsilon / dt, \qquad (1\ в)$$

де R *– радіус кривизни кривої, вздовж якої рухається матеріальна точка.*

Пройдений точкою шлях

$$s = \int \upsilon \cdot dt, \qquad (1\ г)$$

де υ *– модуль швидкості точки.*

Кутова швидкість та кутове прискорення твердого тіла:

$$\vec{\omega} = d\vec{\varphi} / dt, \quad \vec{\beta} = d\vec{\omega} / dt, \qquad (1\ ґ)$$

де $\vec{\varphi}$ *– вектор кутового зміщення.*

Зв'язок між лінійними та кутовими величинами:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}], \quad a_n = \omega^2 R, \quad a_\tau = \beta_z R, \qquad (1\ д)$$

де $\vec{r}$ *– радіус-вектор точки відносно довільної точки на осі обертання;* R *– відстань від осі обертання.*

За умови рівноприскореного руху $\vec{a} = const$ *радіус-вектор* $\vec{r}$ *та швидкість* $\vec{\upsilon}$ *матеріальної точки:*

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{a}t^2/2\,, \quad \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t\,. \qquad (1\text{ е})$$

За умови обертання зі сталим кутовим прискоренням $\beta_z = const$ кут повороту та кутова швидкість:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z}t + \beta_z t^2/2\,, \quad \omega_z = \omega_{0z} + \beta_z t\,. \qquad (1\text{ є})$$

Закон додавання швидкостей

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}\,, \qquad (1\text{ ж})$$

де $\vec{\upsilon}$ – швидкість тіла відносно нерухомої системи;
$\vec{V}$ – швидкість рухомої системи відносно нерухомої;
$\vec{\upsilon}'$ – швидкість тіла відносно рухомої системи.

1.1 Приклади розв’язування задач

Приклад 1.1

Кінематичне рівняння руху тіла, яке можна вважати матеріальною точкою, має вигляд $x = b + c\cdot t + d\cdot t^3$, де b = 10 м; c = 1,5 м/с; d = –0,5 м/с^3. Знайти координату x, проекції швидкості υ_x і прискорення a_x точки в момент часу $t_1 = 3$ с, а також модуль вектора середньої швидкості $|<\vec{\upsilon}>|$ і середню шляхову швидкість $<\upsilon>$ за інтервал часу від t_0 = 0 с до t_1 = 3 с.

Розв’язання

$x(t_1)$ – ? $\upsilon_x(t_1)$ – ?
$a_x(t_1)$ – ? $|<\vec{\upsilon}>|$ – ?
$<\upsilon>$ – ?

$x = b + c\cdot t + d\cdot t^3$,
b = 10 м, c = 1,5 м/с,
d = –0,5 м/с^3,
$t_0 = 0$ с, $t_1 = 3$ с

Для розв’язування задачі використаємо визначення відповідних величин. Також візьмемо до уваги, що напрямок руху тіла упродовж досліджуваного інтервалу часу змінюється. Останнє розглянемо більш детально.

У момент часу t_0 тіло

перебувало в точці A (координата x_0) і рухалося в додатному напрямку осі X (рис. 1.1). Далі його швидкість зменшується і в точці B (координата $x_{зуп}$) тіло зупиняється. Потім тіло рухається у зворотному напрямку осі X і в момент часу t_1 перебуває в точці C з координатою $x(t_1) = x_1$.

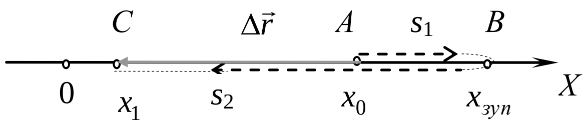


Рисунок 1.1

Перейдемо до розв'язування задачі. Координату $x(t_1) = x_1$ в момент часу t_1 знайдемо використовуючи кінематичне рівняння руху

$$x(t_1) = b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3. \tag{1}$$

Проекція миттєвої швидкості υ_x на вісь X за визначенням (див. співвідношення (1 б)) є першою похідною від координати x за часом. Тому

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(b + c \cdot t + d \cdot t^3)}{dt} = c + 3d \cdot t^2.$$

Швидкість у момент часу t_1 буде дорівнювати

$$\upsilon_x(t_1) = c + 3d \cdot t_1^2. \tag{2}$$

Проекція прискорення a_x на вісь X за визначенням (див. співвідношення (1 б)) є першою похідною від проекції швидкості υ_x за часом. Тому

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d(c + 3d \cdot t^2)}{dt} = 6d \cdot t.$$

Прискорення в момент часу t_1 буде дорівнювати

$$a_x(t_1) = 6d \cdot t_1 . \tag{3}$$

Середня швидкість $<\vec{\upsilon}>$ за визначенням (див. співвідношення (1 а)) чисельно дорівнює відношенню переміщення $\Delta\vec{r}$ до часу t:

$$<\vec{\upsilon}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} .$$

За умови прямолінійного руху вздовж осі X модуль вектора переміщення $|\Delta\vec{r}| = |\overrightarrow{AC}|$ (рис. 1.1) дорівнює модулю проекції вектора переміщення на вісь X $|\Delta r_x| = |\Delta x| = |x_1 - x_0|$ за час від $t_0 = 0$ с до t_1. Тому модуль вектора середньої швидкості дорівнює

$$|<\vec{\upsilon}>| = \frac{|x_1 - x_0|}{t_1 - t_0} = \frac{|b + ct_1 + d \cdot t_1^3 - b|}{t_1 - t_0} = |c + d \cdot t_1^2| . \tag{4}$$

Використаємо визначення середньої шляхової швидкості

$$<\upsilon> = \frac{s}{t} , \tag{5}$$

де s – шлях, який тіло пройшло за час t.

Знайдемо шлях s за час від $t_0 = 0$ с до t_1. Як було зазначено вище, під час руху в момент часу $t_{зуп}$ у точці B (рис. 1.1) має місце зупинка ($\upsilon_x(t_{зуп}) = 0$) та зміна напрямку руху тіла (зміна напрямку вектора швидкості). Тому ми повинні з'ясувати моменти часу зупинок $t_{зуп}$ ($\upsilon_x(t_{зуп}) = 0$) за час руху ($t_0 < t_{зуп} < t_1$) та шляхи руху тіла в одному напрямку s_1, s_2, ... Загальний шлях буде дорівнювати $s = s_1 + s_2 + ...$

Визначимо час зупинки, виходячи з того, що в цей момент часу $t_{зуп}$ швидкість $\upsilon_x(t_{зуп})$ дорівнює нулю:

$$\upsilon_x(t_{зуп}) = c + 3d \cdot t_{зуп}^2 = 0 .$$

Звідси знаходимо

$$t_{зуп1} = +\sqrt{c/(-3d)} = +1 \text{ с}, \; t_{зуп2} = -\sqrt{c/(-3d)} = -1 \text{ с}. \quad (6)$$

Час $t_{зуп2} = -1$ с не входить до досліджуваного проміжку часу руху від $t_0 = 0$ с до $t_1 = 3$ с. Тому будемо розглядати зупинку лише в момент часу $t_{зуп} = t_{зуп1} = 1$ с. Неважко переконатися, що швидкість у цей момент змінює знак. Тому шлях, який проходить тіло за час від t_0 до t_1, дорівнює (рис. 1.1):

$$s = s_1 + s_2 . \quad (7)$$

Виходячи з рисунку 1.1 знаходимо, що

$$s_1 = |\, x_{зуп} - x_0 \,|, \; s_2 = |\, x_{зуп} - x_1 \,|.$$

Координати $x_{зуп}$ та x_0 знайдемо з кінематичних рівнянь руху:

$$x_{зуп} = b + ct_{зуп} + d \cdot t_{зуп}^3 ; \; x_0 = b + c \cdot t_0 + d \cdot t_0^3 . \quad (8)$$

Тоді, використовуючи співвідношення (5)–(8), знаходимо середню шляхову швидкість:

$$< \upsilon >= s/(t_1 - t_0) = \left[(b + c \cdot t_{зуп} + d \cdot t_{зуп}^3) - (b + c \cdot t_0 + d \cdot t_0^3) + \right.$$
$$\left. + (b + ct_{зуп} + dt_{зуп}^3) - (b + ct_1 + dt_1^3)\right]/(t_1 - t_0) =$$
$$= \left[2c \cdot t_{зуп} + 2d \cdot t_{зуп}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3\right]/(t_1 - t_0) . \quad (9)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (1)–(4) та (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$x(t_1) = b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3 = (10 + 1{,}5 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 3^3)$ м = 1 м,

$\upsilon_x(t_1) = c + 3 \cdot d \cdot t_1^2 = (1{,}5 - 3 \cdot 0{,}5 \cdot 3^2)$ м/с = –12 м/с,

$a_x(t_1) = 6 \cdot d \cdot t_1 = 6 \cdot (-0{,}5) \cdot 3$ м/с^2 = –9 м/с^2,

$|<\vec{\upsilon}>| = |\, c + d \cdot t_1^2 \,| = |\, 1{,}5 + (-0{,}5) \cdot 3^2 \,|$ м/с = 3 м/с,

$$< \upsilon > = \frac{2c \cdot t_{зуп} + 2d \cdot t_{зуп}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 1^3 - 1{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0^3 - 1{,}5 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 3^3}{3 - 0} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 3{,}67 \text{ м/с}.$$

В останньому співвідношенні використали, що відповідно до (6) $t_{зуп} =$ 1 с.

Аналіз одержаного результату

Співвідношення для середньої шляхової швидкості можна одержати, використовуючи співвідношення (1 г).

$$< \upsilon > = \frac{s}{t_1 - t_0} = \int_{t_0}^{t_1} |\,\vec{\upsilon}\,|\, dt \big/ \left(t_1 - t_0\right) = \int_{t_0}^{t_1} |\, c + 3d \cdot t^2 \,|\, dt \big/ \left(t_1 - t_0\right) =$$

$$= \left[\int_{t_0}^{t_{зуп}} (c + 3d \cdot t^2) dt + \int_{t_{зуп}}^{t_1} (-1)(c + 3d \cdot t^2) dt \right] \Big/ \left(t_1 - t_0\right) =$$

$$= \frac{2c \cdot t_{зуп} + 2d \cdot t_{зуп}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0}. \qquad (10)$$

У цій формулі $t_{зуп} = +\sqrt{c/(-3d)}$ = 1 с (див. співвідношення (6)).

Отже, одержали такий самий результат, як і в (9). Тому розрахункова формула (9) є правильною.

Відповідь: $x(t_1) = b + c \cdot t_1 + d \cdot t_1^3$ = 1 м,

$\upsilon_x(t_1) = c + 3d \cdot t_1^2$ = –12 м/с, $a_x(t_1) = 6d \cdot t_1$ = –9 м/с^2,

$|<\vec{\upsilon}>| = |\, c + dt_1^2 \,|$ = 3 м/с,

$$< \upsilon > = \frac{2c \cdot t_{зуп} + 2d \cdot t_{зуп}^3 - c \cdot t_0 - d \cdot t_0^3 - c \cdot t_1 - d \cdot t_1^3}{t_1 - t_0} \approx 3{,}67 \text{ м/с},$$

$t_{зуп} = \sqrt{c/(-3d)} = 1$ с.

Приклад 1.2

Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю υ_0 під кутом α до горизонту. Знайти координати снаряда у момент часу t. Через скільки часу та на якій відстані від гармати снаряд впаде на землю? Яка найбільша висота підйому цього снаряда?

Розв'язання

$x(t)$ – ? $y(t)$ – ?	
$t_{пад}$ – ? $x_{пад}$ – ?	
$y_{\max}$ –?	
υ_0, α	

Вважаємо, що снаряд рухається лише під дією сили тяжіння. Такий рух, як відомо, називають вільним падінням. Його особливість полягає у тому, що *прискорення цього руху є сталою та однаковою величиною для будь-якого тіла* (різної маси, форми і т. п.) і дорівнює прискоренню вільного падіння :

$$\vec{a} = \vec{g} = -g \cdot \vec{e}_y .$$

Вісь Y спрямована так, як показано на рис. 1.2.

Таким чином, рух снаряда є рівноприскореним рухом, і тому для розв'язання задачі використаємо відомі формули рівноприскореного руху (1 е):

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \vec{a}t^2 / 2 . \qquad (1)$$

Перейдемо до безпосереднього розв'язання задачі. Координатні осі вибираємо так, щоб рух відбувався лише в площині XY (рис. 1.2). Запишемо співвідношення (1) для снаряда через проекції на осі X та Y відповідних векторів:

$$x = x_0 + \upsilon_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2}, \quad y = y_0 + \upsilon_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}. \qquad (2)$$

Тут використали те, що радіус-вектор тіла $\vec{r}$ визначається співвідношенням $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$. Із геометричних міркувань неважко знайти проекції векторів швидкості та прискорення (рис. 1.2):

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha, \ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha, \ a_x = 0, \ a_y = -g. \qquad (3)$$

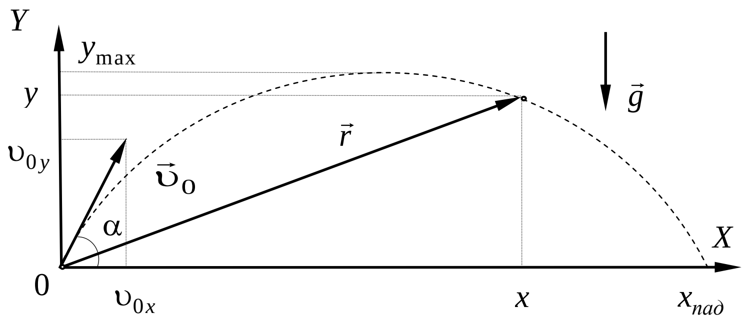


Рисунок 1.2

Початок системи координати вибираємо так, щоб у момент часу вильоту снаряда з гармати $t_0 = 0$, він мав координати $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Далі підставляємо співвідношення (3) в (2) та одержуємо шукані координати снаряда в момент часу t:

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t, \quad y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - g \cdot t^2 / 2. \qquad (4)$$

Використаємо результат (4) для знаходження часу $t_{пад}$, коли снаряд впаде на землю. Зрозуміло, що в момент падіння $t = t_{пад}$ y-координата снаряда буде дорівнювати нулю. Тобто

$$y(t_{пад}) = 0 \text{ або } \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_{пад} - g \cdot (t_{пад})^2 / 2 = 0.$$

Звідси знаходимо два розв'язки: $t_{пад} = 0$,

$t_{пад} = 2\upsilon_0 \sin\alpha / g$. Перший з них відповідає моменту вильоту снаряда з гармати. Дійсно, в цей момент часу снаряд мав вертикальну координату, що дорівнювала нулю $y(0) = 0$. Другий розв'язок відповідає саме часу падіння:

$$t_{пад} = 2\upsilon_0 \sin\alpha / g. \qquad (5)$$

Для знаходження відстані від гармати до точки падіння (вздовж осі X) у формулу (4) для координати $x(t)$ підставимо час падіння (5):

$$x_{пад} = x(t_{пад}) = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot 2\upsilon_0 \sin\alpha / g = 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \upsilon_0^2 / g =$$
$$= \sin 2\alpha \cdot \upsilon_0^2 / g. \qquad (6)$$

Для знаходження максимальної висоти підйому проведемо дослідження y-координати $y = y(t)$ на екстремум (див. співвідношення (4)). Для цього знайдемо похідну від y-координати за часом та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dy}{dt} = 0 \text{ або } \frac{dy}{dt} = \upsilon_0 \sin\alpha - g \cdot t_1 = 0. \qquad (7)$$

Звідси знаходимо точку екстремуму

$$t_1 = \upsilon_0 \sin\alpha / g. \qquad (8)$$

Неважко впевнитися, що коли $t < t_1$, то $dy/dt > 0$, а коли $t > t_1$, то $dy/dt < 0$. Це означає, що в момент часу t_1 координата y набуває максимального значення. Максимальне значення легко можна знайти, підставивши t_1 з (8) у співвідношення (4):

$$y_{\max} = y(t_1) = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t_1 - \frac{g \cdot t_1^2}{2} = \frac{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2}{2g}. \qquad (9)$$

Можна надати співвідношенню (7) фізичної інтерпретації. Відповідно до визначення проекція швидкості на вісь Y має вигляд $\upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}$. Це означає, що в найвищій точці траєкторії вертикальна складова швидкості дорівнює нулю $\upsilon_y = 0$. Тобто рух снаряда вертикально вгору в цій точці припиняється, а далі тіло починає опускатися вниз.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (6), що характеризує відстань від гармати до точки падіння на землю снаряда у граничних випадках.

Із фізичних міркувань випливає, що якщо снаряд із гармати буде вилітати вертикально вгору, тобто під кутом $\alpha = 90°$, то на землю він впаде у точці вильоту. Тобто $x_{пад} = 0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\alpha = 90°$, то $x_{пад} = \sin 2\alpha \cdot \upsilon_0^2 / g = \sin(2 \cdot 90°) \cdot \upsilon_0^2 / g = \sin(180°) \cdot \upsilon_0^2 / g = 0$.

Отже, розрахункова формула (6) не суперечить фізичним міркуванням.

Проведемо дослідження розрахункової формули (9), що характеризує найбільшу висоту підйому снаряда у граничних випадках.

Із фізичних міркувань випливає, що якщо снаряд з гармати буде вилітати горизонтально, тобто під кутом $\alpha = 0°$, то максимальна висота підйому буде дорівнювати початковій висоті снаряда (підйому в цьому випадку не буде). Тобто $y_{\max} = 0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\alpha = 0°$, то $y_{\max} = (\upsilon_0 \sin\alpha)^2 / (2g) = (\upsilon_0 \sin 0°)^2 / (2g) = 0$.

Отже, розрахункова формула (9) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $x = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t$, $y = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2$,

$y_{\max} = \dfrac{(\upsilon_0 \sin\alpha)^2}{2g}$, $t_{пад} = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$, $x_{пад} = \dfrac{\sin 2\alpha \cdot \upsilon_0^2}{g}$.

Приклад 1.3

Матеріальна точка починає рухатися вздовж осі X з прискоренням, величина якого змінюється з часом за законом $a_x = \alpha\sqrt{t}$, де α =0,5 (м/с$^{5/2}$). Визначити середню швидкість матеріальної точки в інтервалі часу від t_1 = 4 с до t_2 = 9 с від початку руху.

Розв'язання

$< \upsilon_x > - ?$
$a_x = \alpha\sqrt{t}$, α = 0,5 (м/с$^{5/2}$), t_1 = 4 с, t_2 = 9 с, $t_0 = 0$, $\upsilon_{0x} = 0$

Як випливає з умови задачі, рух матеріальної точки відбувається з прискоренням, що змінюється з часом (не рівноприскорений рух). Тому для розв'язання задачі використаємо визначення прискорення, швидкості, середньої швидкості (формули (1 а), (1 б)).

Виходячи з означення середньої швидкості (1 а), можемо записати:

$$< \upsilon_x > = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \tag{1}$$

де $x_2 - x_1$ – проекція переміщення матеріальної точки на вісь X за час $t_2 - t_1$. Цю різницю координат неважко знайти, використовуючи визначення швидкості (1 б):

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad dx = \upsilon_x dt, \quad x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon_x dt. \tag{2}$$

Проекцію швидкості $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$ у довільний момент часу t

знайдемо використовуючи визначення прискорення (1 б):

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt}, \; d\upsilon_x = a_x dt, \; \upsilon_x - \upsilon_{0x} = \int_{\upsilon_{0x}}^{\upsilon_x} d\upsilon_x = \int_{t_0}^{t} a_x dt$$

або

$$\upsilon_x = \int_{t_0}^{t} \alpha\sqrt{t}dt = \frac{2}{3}\alpha \cdot t^{3/2}. \tag{3}$$

Для одержання співвідношення (3) використали, що згідно з умовою задачі в момент часу $t_0 = 0$ швидкість тіла дорівнювала нулю $\upsilon_{0x} = 0$.

Далі підставляємо (3) в (2), а потім в (1) і знаходимо шукану середню швидкість:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3}\alpha \cdot t^{3/2}dt = \frac{4}{15}\alpha \cdot \left(t_2^{5/2} - t_1^{5/2}\right),$$

$$<\upsilon_x> = \frac{4}{15}\alpha \cdot \left(t_2^{5/2} - t_1^{5/2}\right)/\left(t_2 - t_1\right). \tag{4}$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (4), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$<\upsilon_x> = \frac{4\alpha}{15}\frac{t_2^{5/2} - t_1^{5/2}}{t_2 - t_1} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{15} \cdot \frac{9^{5/2} - 4^{5/2}}{9 - 4} \text{ м/с} \approx 5{,}63 \text{ м/с}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (4) у граничних випадках.

Із фізичних міркувань випливає, що якщо у співвідношенні $a_x = \alpha\sqrt{t}$ коефіцієнт α дорівнював би нулю, то прискорення теж дорівнювало б нулю. Це означає, що швидкість матеріальної точки не змінювалася б і дорівнювала б початковій, тобто $\upsilon_0 = 0$. Отже, і середня швидкість дорівнювала б нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\alpha = 0$, то

$$<\upsilon_x> = \frac{4}{15}\alpha \cdot \left(t_2^{5/2} - t_1^{5/2}\right)/\left(t_2 - t_1\right) = 0.$$

Отже, розрахункова формула (4) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $<\upsilon_x> = \frac{4}{15}\alpha\left(t_2^{5/2} - t_1^{5/2}\right)/\left(t_2 - t_1\right) \approx 5{,}63$ м/с.

Приклад 1.4

Повітряна куля починає підніматися з поверхні землі. Швидкість її підйому постійна і дорівнює υ_0. Завдяки вітру куля одержує горизонтальну компоненту швидкості $\upsilon_x = \alpha y$, де α – стала; y – висота підйому. Знайти, як залежить від висоти підйому: а) величина зміщення $x(y)$; б) повне, тангенціальне і нормальне прискорення кулі.

Розв'язання

а) $x(y)$ – ?
б) a – ? a_τ – ?
a_n – ?

$\upsilon_y = \upsilon_0 = const$,
$\upsilon_x = \alpha y$

Для розв'язування завдання (а) використаємо визначення для проекцій швидкості

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y, \ \frac{dx}{dt} = \upsilon_x, \qquad (1)$$

а також відомості про ці величини з умови задачі. Розв'язуючи одержані рівняння, знаходимо шукану залежність $x(y)$.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання. Використовуючи умову задачі та перше рівняння (1), знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y = \upsilon_0 = const\,. \tag{2}$$

Звідси

$$dy = \upsilon_0 dt\,,\ \int_{y_0}^{y} dy = \int_{t_0}^{t} \upsilon_0 dt\,,\ y - y_0 = \upsilon_0 (t - t_0)\,. \tag{3}$$

За умовою відомо, що в початковий момент часу $t_0 = 0$ тіло знаходилося на поверхні землі (за умовою задачі «повітряна куля починає підніматися з поверхні землі»), тобто $y_0 = 0$. Підставляємо $t_0 = 0$ та $y_0 = 0$ в (3) і одержуємо

$$y = \upsilon_0 t\,. \tag{4}$$

Далі використаємо друге рівняння (3) та умову задачі $\upsilon_x = \alpha \cdot y$, знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x = \alpha y = \alpha \upsilon_0 t\,. \tag{5}$$

У цьому рівнянні використали (4). Далі проводимо інтегрування:

$$dx = \alpha \upsilon_0 t dt\,,\ \int_0^x dx = \int_0^t \alpha \upsilon_0 t dt\,,$$

$$x - 0 = \frac{\alpha \upsilon_0}{2}(t^2 - 0^2),\ x = \frac{\alpha \upsilon_0 t^2}{2} \tag{6}$$

Тепер у (6) заміняємо час t відповідно до співвідношення (4) і знаходимо шукану залежність $x(y)$:

$$x = \alpha \upsilon_0 t^2 / 2 = \alpha \upsilon_0 (y / \upsilon_0)^2 / 2 = (\alpha / (2\upsilon_0)) y^2\,. \tag{7}$$

Для розв'язування завдання (б) використаємо відомі формули для тангенціального та повного прискорень (1 в):

$$a_\tau = d\upsilon / dt\,, \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,. \tag{8}$$

Зазначимо, що повне прискорення пов'язане з проекціями прискорення на координатні осі так:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2} \quad (a_z=0 \text{ за умовою задачі}). \quad (9)$$

Проекції прискорень неважко знайти:

$$a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=\frac{d(\alpha\upsilon_0 t)}{dt}=\alpha\upsilon_0\,, \quad a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=\frac{d(\upsilon_0)}{dt}=0\,. \quad (10)$$

У формулах (10) використали співвідношення (1), (5). Тепер відповідно до рівняння (9) знаходимо повне прискорення:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(\alpha\upsilon_0)^2+0^2}=\alpha\upsilon_0\,. \quad (11)$$

Тангенціальне прискорення знайдемо, використовуючи перше рівняння у (8):

$$a_\tau=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d(\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2})}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\sqrt{(\alpha\upsilon_0 t)^2+\upsilon_0^2}\right)=$$

$$=\frac{(\alpha\upsilon_0)^2 t}{\sqrt{(\alpha\upsilon_0 t)^2+\upsilon_0^2}}\,. \quad (12)$$

Тепер у (12) заміняємо час t відповідно до співвідношення (4) і знаходимо шукану залежність $a_\tau(y)$:

$$a_\tau=\frac{(\alpha\upsilon_0)^2(y/\upsilon_0)}{\sqrt{(\alpha\upsilon_0(y/\upsilon_0))^2+\upsilon_0^2}}=\frac{\alpha^2 y}{\sqrt{(\alpha y/\upsilon_0)^2+1}}\,. \quad (13)$$

Щоб знайти нормальне прискорення, використаємо друге рівняння в (8) та (11):

$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{(\alpha\upsilon_0)^2-\left(\frac{\alpha^2 y}{\sqrt{1+(\alpha y/\upsilon_0)^2}}\right)^2}=$$

$$= \frac{\alpha \upsilon_0}{\sqrt{1 + (\alpha y / \upsilon_0)^2}}. \qquad (14)$$

Таким чином, одержали формули (7), (11), (13) та (14), які є розв'язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо величина α ($\upsilon_x = \alpha y$) дорівнює нулю. Це означає, що проекція швидкості на вісь X також дорівнює нулю. Отже, рух кулі вздовж горизонтального напрямку відсутній і $x = 0$. Куля буде рухатися лише вертикально вгору зі сталою у часі швидкістю υ_0. Таким чином, повне, тангенціальне і нормальне прискорення кулі будуть дорівнювати нулю. З розрахункових формул випливає такий самий результат. Якщо $\alpha = 0$, то $x = (\alpha / (2\upsilon_0)) y^2 = 0$, $a = \alpha \upsilon_0 =$ 0, $a_\tau = \alpha^2 y / \sqrt{(\alpha y / \upsilon_0)^2 + 1} = 0$, $a_n = \alpha \upsilon_0 / \sqrt{1 + (\alpha y / \upsilon_0)^2} = 0$.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $x = (\alpha / (2\upsilon_0)) y^2$; б) $a = \alpha \upsilon_0$, $a_\tau = \alpha^2 y / \sqrt{1 + (\alpha y / \upsilon_0)^2}$, $a_n = \alpha \upsilon_0 / \sqrt{1 + (\alpha y / \upsilon_0)^2}$.

Приклад 1.5

Тверде тіло обертається навколо нерухомої осі Z за законом $\varphi_z = at - bt^3$, де a = 6,0 рад/с; b = 2,0 рад/с^3. Знайти: а) середні значення кутової швидкості і кутового прискорення за проміжок часу від $t_1 = 0$ с до часу t_2 зупинки; б) кутове прискорення в момент зупинки тіла.

Розв'язання

а) $<\beta_z> - ?$ $<\omega_z> - ?$ б) $\beta_z(t_2) - ?$	
$\varphi_z = at - bt^3$, a = 6,0 рад/с, b = 2,0 рад/с^3, t_1 = 0 с	

Для розв'язування задачі використаємо визначення кутової швидкості, кутового прискорення, середньої кутової швидкості, середнього кутового прискорення:

$$\omega_z = d\varphi_z / dt\,,\ \beta_z = d\omega_z / dt\,, \tag{1}$$

$$<\omega_z> = \frac{\varphi_{z2} - \varphi_{z1}}{t_2 - t_1}\,,\ <\beta_z> = \frac{\omega_{z2} - \omega_{z1}}{t_2 - t_1}\,. \tag{2}$$

Час зупинки t_2 знайдемо використовуючи умову

$$\omega(t_2) = 0\,. \tag{3}$$

Реалізуємо вищевикладений план розв'язання задачі. З формул (1) знайдемо залежності від часу кутової швидкості та кутового прискорення:

$$\omega_z = \frac{d\varphi_z}{dt} = \frac{d(at - bt^3)}{dt} = a - 3bt^2\,, \tag{4}$$

$$\beta_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d(a - 3bt^2)}{dt} = -6bt\,. \tag{5}$$

Використовуючи умову (3) та формулу (4), знайдемо час t_2 зупинки твердого тіла:

$$\omega_{z2} = a - 3bt_2^2 = 0\,,\ t_2 = \sqrt{a/(3b)}\,. \tag{6}$$

Тоді шукані середню кутову швидкість і середнє кутове прискорення знаходимо з формул (2):

$$<\omega_z> = \frac{\varphi_{z2} - \varphi_{z1}}{t_2 - t_1} = \frac{\varphi_z(t_2) - \varphi_z(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{at_2 - bt_2^3 - (at_1 - bt_1^3)}{t_2 - t_1} =$$

$$= a - bt_2^2 = a - b \cdot a/(3b) = 2a/3\,. \tag{7}$$

$$<\beta_z>=\frac{\omega_{z2}-\omega_{z1}}{t_2-t_1}=\frac{\omega_z(t_2)-\omega_z(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{a-3bt_2^2-(a-3bt_1^2)}{t_2-t_1}=$$

$$=-3bt_2=-3b\sqrt{a/(3b)}=-\sqrt{3ba}\,. \qquad (8)$$

У формулах (7) та (8) використали, що за умовою $t_1=0$, а $t_2=\sqrt{a/(3b)}$ з (6).

Значення кутового прискорення в момент t_2 зупинки твердого тіла знайдемо, підставивши (6) у (5):

$$\beta_z(t_2)=-6bt_2=-2\sqrt{3ba}\,. \qquad (9)$$

Таким чином, одержали формули (7), (8) та (9), які є розв'язками задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (7), (8) та (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$<\omega_z>=\frac{2a}{3}=\frac{2\cdot 6}{3}\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}=4\,\frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$<\beta_z>=-\sqrt{3ba}=-\sqrt{3\cdot 6\cdot 2}\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}=-6\,\frac{\text{рад}}{\text{с}^2},$$

$$\beta_z(t_2)=-2\sqrt{3ba}=-2\sqrt{3\cdot 6\cdot 2}\text{рад/с}^2=-12\text{рад/с}^2\,.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо коефіцієнт a дорівнює нулю. У цьому разі кутова швидкість і кутове прискорення дорівнюють відповідно

$$\omega_z=d\varphi_z/dt=d(-bt^3)/dt=-3bt^2\,, \qquad (9)$$

$$\beta_z=d\omega_z/dt=d(a-3bt^2)/dt=-6bt\,. \qquad (10)$$

Зрозуміло, що час зупинки, який визначається умовою $\omega_z=0$ та (9), буде дорівнювати нулю ($t_2=0$). Це означає, що середні швидкість і прискорення за інтервал часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 0$ будуть дорівнювати значенню цих величин у момент часу $t = 0$, а саме $< \omega_z > = 0$, $< \beta_z > = 0$ (див. (9) та (10)). Також зрозуміло, що кутове прискорення в момент зупинки $t_2 = 0$ також дорівнює нулю $\beta_z(t_2) = 0$. З розрахункових формул випливає такий самий результат. Якщо $a = 0$, то

$< \omega_z > = 2a/3 = 0$, $< \beta_z > = -\sqrt{3ba} = 0$, $\beta_z(t_2) = -2\sqrt{3ba} = 0$.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $< \omega > = 2a/3 = 4$ рад/с,

$< \beta > = -\sqrt{3ab} = -6$ рад/с^2; б) $\beta = -2\sqrt{3ab} = -12$ рад/с^2.

Приклад 1.6

Від бакена, що знаходиться на середині широкої ріки (точка *O* рис. 1.3), відійшли два човни *A* й *B*. Обидва почали рухатися по взаємно перпендикулярних прямих: човен *A* – уздовж ріки, а човен *B* – поперек. Віддалившись на однакову відстань від бакена, човни повернулися назад. Знайти відношення часів руху човнів τ_A/τ_B, якщо швидкість кожного човна відносно води в $\eta = 1,2$ раза більша від швидкості течії.

Розв'язання

τ_A/τ_B – ?
$\eta = 1,2$

Щоб знайти час руху човнів *A* та *B*, необхідно визначити їх швидкості. Для їх знаходження використаємо закон додавання швидкостей у ньютонівській механіці (співвідношення (1 ж))

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}, \qquad (1)$$

де $\vec{\upsilon}$ – швидкість човна відносно нерухомої системи (берега); $\vec{V}$ – швидкість рухомої системи (швидкість течії ріки); $\vec{\upsilon}'$ – швидкість човна відносно рухомої системи (відносно води). Потім, використовуючи відомі формули для рівномірного руху, знайдемо час руху човнів та їх відношення.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Зобразимо на рис. 1.3 напрямки векторів, що входять до співвідношення (1) для човна *A*, коли він рухається за течією (рис. 1.3 *а*) та коли він повертається назад (рис. 1.3 *б*). Також зобразимо напрямки векторів, що входять до співвідношення (1) для човна *B*, коли він рухається перпендикулярно до течії (рис. 1.3 *в*) та коли він повертається назад (рис. 1.3 *г*). Зазначимо, що в цьому випадку саме швидкість човна *B* відносно нерухомої системи відліку є перпендикулярною до швидкості течії ріки ($\vec{\upsilon}_{B1} \perp \vec{V}$, $\vec{\upsilon}_{B2} \perp \vec{V}$).

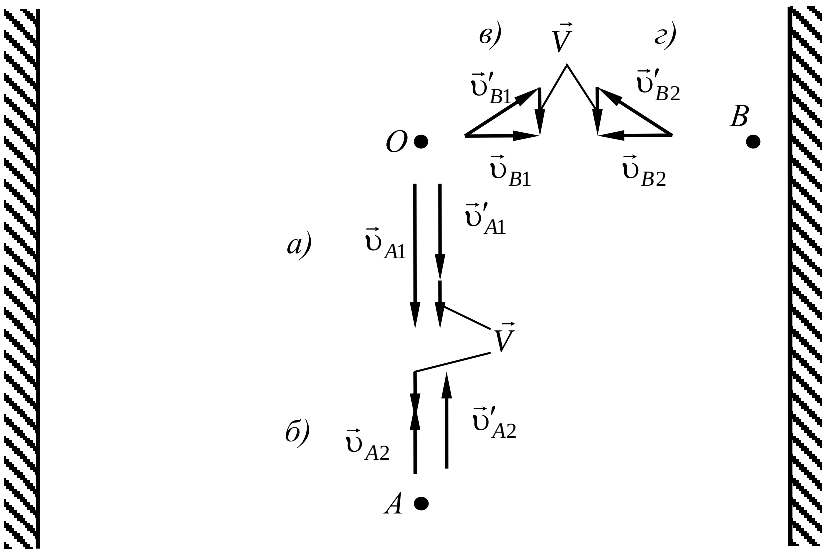


Рисунок 1.3

Необхідно зазначити, що швидкості для випадків *а*), *б*), *в*) та *г*) пов’язані між собою співвідношенням (1), а саме:

$$\vec{\upsilon}_{A1} = \vec{\upsilon}'_{A1} + \vec{V}\,,\ \vec{\upsilon}_{A2} = \vec{\upsilon}'_{A2} + \vec{V}\,,$$
$$\vec{\upsilon}_{B1} = \vec{\upsilon}'_{B1} + \vec{V}\,,\ \vec{\upsilon}_{B2} = \vec{\upsilon}'_{B2} + \vec{V}\,. \qquad (2)$$

Із геометричних міркувань (рис. 1.3) неважко знайти модулі швидкостей човнів відносно нерухомої системи відліку (відносно берега):

$$\upsilon_{A1} = \upsilon'_{A1} + V = \upsilon_0 + V\,,\ \upsilon_{A2} = \upsilon'_{A2} - V = \upsilon_0 - V\,,$$
$$\upsilon_{B1} = \sqrt{\left(\upsilon'_{B1}\right)^2 - V^2} = \sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 - V^2}\,,$$
$$\upsilon_{B2} = \sqrt{\left(\upsilon'_{B2}\right)^2 - V^2} = \sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 - V^2}\,. \qquad (3)$$

У співвідношеннях (3) взяли до уваги, що модулі швидкостей човнів відносно води у всіх випадках однакові і дорівнюють υ_0.

Далі врахуємо, що віддаляються човни до точок *A* і *B* на однакову відстань, яку позначимо l. Тоді час руху човна *A* до точки *A* і назад буде дорівнювати

$$\tau_A = \frac{l}{\upsilon_{A1}} + \frac{l}{\upsilon_{A2}} = \frac{l}{\upsilon_0 + V} + \frac{l}{\upsilon_0 - V} = \frac{2l \cdot \upsilon_0}{\upsilon_0^2 - V^2}\,. \qquad (4)$$

Аналогічно знаходимо час руху човна *B* до точки *B* і назад:

$$\tau_B = \frac{l}{\upsilon_{B1}} + \frac{l}{\upsilon_{B2}} = \frac{l}{\sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 - V^2}} + \frac{l}{\sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 - V^2}} = \frac{2l}{\sqrt{\left(\upsilon_0\right)^2 - V^2}}\,.$$

(5)

У формулах (4) та (5) використали співвідношення (3). Далі знаходимо шукане відношення

$$\frac{\tau_A}{\tau_B}=\left(\frac{2l\cdot\upsilon_0}{\upsilon_0^2-V^2}\right)\Bigg/\left(\frac{2l}{\sqrt{(\upsilon_0)^2-V^2}}\right)=\frac{\upsilon_0}{\sqrt{(\upsilon_0)^2-V^2}}=$$

$$=\frac{\upsilon_0/V}{\sqrt{(\upsilon_0/V)^2-(V/V)^2}}=\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}}. \qquad (6)$$

У формулі (6) використали, що згідно з умовою задачі швидкість кожного човна відносно води в $\eta=\upsilon_0/V$ рази більша від швидкості течії.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо швидкість течії дорівнює нулю. У цьому разі час руху човнів уздовж взаємно перпендикулярних напрямків буде однаковим, тобто шукане відношення часів руху човнів буде дорівнювати одиниці ($\tau_A/\tau_B = 1$). Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо швидкість ріки V наближається до нуля, то відношення швидкості човна до швидкості течії буде прямувати до нескінченності $\eta=\upsilon_0/V\to\infty$. Якщо це відношення підставити у розрахункову формулу (6), то одержимо

$$\tau_A/\tau_B=\eta/\sqrt{\eta^2-1}=1/\sqrt{1-1/\eta^2}\ \to\ 1/\sqrt{1-1/\infty}=1.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\tau_A/\tau_B=\eta/\sqrt{\eta^2-1}=1{,}8$.

1.2 Задачі для самостійного розв’язування

1.1 Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = \alpha t^2 \vec{e}_x - \beta \vec{e}_y$, де $\alpha = 3$ м/с^4, $\beta = 3$ м/с^2. Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде знаходитися в момент часу $t = 1$ с, коли для $t = 0$ швидкість і радіус-вектор дорівнюють $\upsilon_0 = 0$ та $\vec{r}_0 = 0$.

1.2 Матеріальна точка рухається в площині XY відповідно до рівняння $x = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ та $y = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де $B_1 = 7$ м/с, $C_1 = -2$ м/с^2, $B_2 = -1$ м/с, $C_2 = 0{,}2$ м/с^2. Знайти модулі швидкості та прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.

1.3 Кінематичне рівняння руху матеріальної точки по прямій (вісь X) має вигляд $x = A + Bt + Ct^2$, де $A = 5$ м, $B = 4$ м/с, $C = -1$ м/с^2. Побудувати графік залежності координати x та шляху s від часу. Визначити середню швидкість $<\upsilon>$ за інтервал часу від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 6$ с.

1.4 Першу половину часу тіло рухалося зі швидкістю $\upsilon_1 = 20$ м/с під кутом $\alpha = 60^\circ$ до заданого напряму, а другу половину часу – зі швидкістю $\upsilon_2 = 40$ м/с під кутом $\beta = 120^\circ$ до того самого напряму. Знайти модуль середньої швидкості руху тіла.

1.5 Модуль швидкості матеріальної точки змінюється з часом за законом $\upsilon = \alpha t^2$, де $\alpha = 1$ м/с^3. Знайти шлях, який точка пройшла за перші 10 с руху.

1.6 Краплі дощу, які падають вертикально, утворюють на склі рухомого трамвая смуги під кутом $\alpha = 30^\circ$ до вертикалі. Швидкість трамвая $\upsilon_1 = 5$ м/с. Яку швидкість мають краплі відносно землі?

1.7 Тіло, що мало початкову швидкість $\upsilon_0 = 20$ м/с, рухалося прямолінійно зі сталим прискоренням і через час 10 с зупинилося. Знайти шлях, пройдений тілом.

1.8 Знайти переміщення та шлях, які матеріальна точка пройде за 5 с, якщо її рух описується рівнянням $x = 6 - 4t + t^2$.

1.9 Два автомобілі, відстань між якими 250 м, починають одночасно рухатися назустріч один одному з прискореннями $a_1 = 2$ м/с^2 та $a_2 = 3$ м/с^2. Побудувати графік руху автомобілів і за графіком знайти час їх зустрічі та відстань від місця зустрічі до пункту, з якого виїхав перший автомобіль.

1.10 Велосипедист подорожує з одного міста в інше. Першу третину шляху він рухався зі швидкістю $\upsilon_1 = 5$ м/с. Далі половину часу, що залишився, він їхав зі швидкістю $\upsilon_2 = 6{,}11$ м/с, після чого до кінцевого пункту він йшов пішки зі швидкістю $\upsilon_3 = 1{,}39$ м/с. Визначити середню швидкість руху велосипедиста.

1.11 Компоненти швидкості матеріальної точки визначаються рівняннями $\upsilon_x = t$, $\upsilon_y = 2t$, $\upsilon_z = 3t$. Знайти модуль повного прискорення точки.

1.12 Літак, маючи швидкість 900 км/год, входить у «мертву петлю». Знайти мінімальний радіус кривизни траєкторії, коли доцентрове прискорення пілота літака дорівнюватиме 5 g.

1.13 Тіло кинуте під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту зі швидкістю $\upsilon_0 = 20$ м/с. Які значення будуть мати нормальне a_n і тангенціальне a_τ прискорення тіла через $t = 1{,}5$ с після початку руху? В яких точках ці прискорення будуть найбільшими і чому дорівнюватимуть?

1.14 Тіло кинули з вежі у горизонтальному напрямку зі швидкістю $\upsilon_0 = 30$ м/с. Визначити швидкість, тангенціальне і нормальне прискорення тіла через дві секунди після початку руху.

1.15 Два тіла кинули одночасно з однієї точки: одне – вертикально вгору, інше – під кутом $\theta = 60^o$ до горизонту. Початкова швидкість кожного тіла $\upsilon_0 = 25$ м/с. Нехтуючи опором повітря, знайти відстань між тілами через $t = 1{,}70$ с.

1.16 Точка рухається по колу радіусом 30 см зі сталим кутовим прискоренням β. Визначити тангенціальне прискорення точки, якщо відомо, що за час $t = 4$ с вона зробила три оберти і наприкінці третього оберту її нормальне прискорення $a_n = 2{,}7$ м/с^2.

1.17 Автомобіль рухається зі швидкістю 60 км/год. Скільки обертів за секунду роблять його колеса, якщо вони котяться по шосе без ковзання, а зовнішній діаметр покришок коліс дорівнює 60 см? Знайти доцентрове прискорення зовнішнього шару гуми на покришках коліс автомобіля.

1.18 Визначити лінійну і кутову швидкості руху супутника та його доцентрове прискорення, якщо висота його орбіти над Землею 1200 км, а період обертання – 105 хв. Радіус Землі 6370 км.

1.19 Чи можна надіти на вал, який робить 2000 об/хв, циркулярну пилку діаметром 500 мм, якщо за вимогами техніки безпеки лінійна швидкість зубів пилки не повинна перевищувати 40 м/с?

1.20 Для якісного шліфування деталей швидкість крайніх точок абразивного круга не повинна перевищувати 94,2 м/с. Визначити найбільшу кількість обертів за хвилину для абразивного круга діаметром 30 см.

1.21 Вал діаметром 40 см із насадженим на нього шківом діаметром 2 м обертається рівномірно. У скільки разів лінійна швидкість і доцентрове прискорення на ободі шківа більші, ніж на зовнішній межі вала?

1.22 Матеріальна точка рухається по колу зі сталою кутовою швидкістю $\omega = \pi/6$ рад/с. У скільки разів шлях, пройдений точкою за 4 с, буде більшим від модуля її переміщення?

1.23 Визначити глибину колодязя, якщо вільно падаючий у нього камінь досягає поверхні води за 4 с. Яку швидкість має камінь у момент удару об поверхню води?

1.24 Електрозварник випустив недопалок електрода. У момент удару об землю недопалок мав швидкість $\upsilon = 28$ м/с. На якій висоті працює електрозварник?

1.25 Сигнальна ракета, запущена вертикально вгору, спалахнула через 6 с після запуску в найвищій точці траєкторії. На яку висоту піднялася ракета, яка її початкова швидкість?

1.26 Тіло кинули вертикально вгору з деякою початковою швидкістю υ_0. Коли воно піднялося на максимальну висоту $H = 100$ м від поверхні Землі, з того самого місця і з тією самою початковою швидкістю кинули друге тіло. З якою початковою швидкістю кинуто тіла? На якій висоті h вони зустрінуться? Які вони матимуть швидкості в момент зустрічі? Опором повітря знехтувати.

1.27 Яку початкову швидкість υ_0 повинна мати сигнальна ракета, випущена з ракетниці вертикально вгору, щоб вона спалахнула в найвищій точці своєї траєкторії (спалах відбувається через 6 с після запуску)? Опором повітря знехтувати.

1.28 Пілот літака, що летить горизонтально на висоті $h = 500$ м зі швидкістю $\upsilon = 99$ м/с, повинен скинути пакет із поштою для геологів. На якій відстані по горизонталі від табору геологів він повинен це зробити, щоб пакет упав у таборі?

1.29 Із крутого берега річки заввишки 20 м кидають горизонтально камінь зі швидкістю 15 м/с. Через який час камінь досягне поверхні води? З якою швидкістю і під яким кутом він упаде на воду? Прискорення вільного падіння взяти $g = 10$ м/с^2.

1.30 Хлопчик зросту $h = 1{,}5$ м, який перебуває на відстані $L = 15$ м від паркану висотою $H = 5$ м, кидає під кутом $\alpha = 45^\circ$ горизонту камінь. З якою мінімальною швидкістю υ_0 необхідно кинути камінь, щоб він перелетів через паркан?

1.31 Обруч котиться по горизонтальній площині без проковзування. Швидкість центра обруча дорівнює υ. Визначити миттєві швидкості нижньої і верхньої точок обруча.

1.32 У деякий момент часу проекції швидкості частинки на осях X, Y та Z мають відповідно значення 1, 2 та (–3 м/с), а проекції прискорення – (–3), 2 та 1 м/с^2. Знайти радіус кривизни траєкторії в цей момент часу.

1.33 Матеріальна точка рухається за законом $\vec{r} = \alpha \sin(5t)\vec{e}_x + \beta \cos^2(5t)\vec{e}_y$, де $\alpha = 2$ м, $\beta = 3$ м. Визначити вектор швидкості, вектор прискорення і траєкторію руху матеріальної точки.

1.34 Швидкість матеріальної точки змінюється за законом $\vec{\upsilon} = \left(2t^3 - 1\right)\vec{e}_x - \sin(2\pi t / 3)\vec{e}_y$. Визначити радіус-вектор частинки в довільний момент часу, якщо в початковий момент її радіус-вектор дорівнював нулю.

1.35 Прискорення матеріальної точки змінюється за законом $\vec{a} = 3t^2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$. Знайти, на якій відстані від початку координат вона буде знаходитися через 1 с, якщо в початковий момент часу $\vec{r}_0 = 0$, $\vec{\upsilon}_0 = 0$.

1.36 Поїзд рухається прямолінійно зі швидкістю $\upsilon_0 = 180$ км/год. Після того як було ввімкнено гальмівний механізм, швидкість поїзда почала змінюватися за законом

$\upsilon = \upsilon_0 - \alpha t^2$, де $\alpha = 1$ м/с^3. Знайти гальмівний шлях поїзда. Через який час після початку гальмування він зупиниться?

1.37 Ракета стартує із Землі вертикально вгору без початкової швидкості з прискоренням $a = \kappa t^2$, де $\kappa = 1$ м/с^4. Яку швидкість буде мати ракета на висоті $h_0 = 100$ км від поверхні Землі?

1.38 Із башти одночасно кинули два тіла з однаковою початковою швидкістю υ_0: одне – вертикально вгору, друге – вертикально вниз. Як із часом змінюватиметься відстань s між цими тілами? Опір повітря рухові тіл не враховувати.

1.39 Із точок A і B, які знаходяться на висоті 2 і 6 м відповідно, одночасно кидають назустріч одне одному два тіла: перше – горизонтально зі швидкістю 8 м/с, друге – вниз під кутом 45° до горизонту з такою початковою швидкістю, щоб обидва тіла зіткнулися у польоті. Відстань між точками A та B по горизонталі дорівнює 8 м. Траєкторії тіл лежать в одній площині. Обчислити початкову швидкість другого тіла, координати x та y точки зіткнення, час руху тіл до зіткнення та швидкості тіл у момент зіткнення.

1.40 З однієї точки кинуті два тіла під кутами α_1 та α_2 до горизонту з початковими швидкостями υ_1 та υ_2 відповідно. На якій відстані будуть знаходитися тіла через час t? Розглянути два випадки: 1) траєкторії тіл лежать в одній площині, тіла кинуті у різні боки; 2) траєкторії тіл лежать у взаємно перпендикулярних площинах.

1.41 Тіло падає з висоти H без початкової швидкості. На висоті h воно пружно стикається із закріпленою площадкою, розміщеною під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Знайти час падіння тіла та дальність польоту.

1.42 Два однакових тіла падають з висоти H без початкової швидкості. Одно з них зустрічає на своєму шляху закріплену на висоті h площадку, нахилену під кутом 45° до горизонту. Внаслідок зіткнення з площадкою напрямок швидкості тіла стає горизонтальним. Порівняти час падіння тіл. Знайти, за якого відношення висот h/H час падіння другого тіла буде максимальним.

1.43 Невеличкий м'яч кидають під кутом $\alpha = 30^{\circ}$ до горизонту з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 14$ м/с. На відстані $l = 11$ м від точки кидання м'яч пружно вдаряється об вертикальну стіну. На якій відстані від стіни м'яч впаде на землю?

1.44 Тіло кинуте під кутом α до похилої площини, яка становить із горизонтом кут β. Початкова швидкість тіла дорівнювала υ_0. Знайти відстань від точки кидання до точки падіння тіла на похилу площину.

1.45 Із двох пунктів A та B, відстань між якими l, одночасно починають рухатися два кораблі зі швидкостями υ_1 та υ_2. Вектори швидкостей утворюють з відрізком AB однакові кути $\alpha = 45^{\circ}$. Вважаючи рух кораблів рівномірним і прямолінійним, визначити найменшу відстань між ними.

1.46 Точка рухається відповідно до рівняння $y = 6t - t^3/8$ (довжина у цій формулі вимірюється в метрах, а час – у секундах). Знайти середню швидкість руху точки за проміжок часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с.

1.47 Маховик обертається рівноприскорено. Знайти кут α, який утворює вектор повного прискорення довільної точки маховика з радіусом у той момент, коли маховик здійснить перші $N = 2$ оберти.

1.48 Під час повороту автомобіля його колесо радіусом $r = 0{,}75$ м котиться по колу радіусом $R = 6$ м у горизонтальній площині. В цьому випадку центр колеса рухається зі сталою швидкістю $\upsilon = 1{,}5$ м/с. Визначити: 1) кутову швидкість та кутове прискорення колеса; 2) кут, що утворює вектор кутової швидкості з вертикаллю.

1.49 Куля діаметром $d = 5{,}68$ мм рухається вздовж ствола автомата зі швидкістю $\upsilon = 700$ м/с і обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю $\omega = 1{,}8 \cdot 10^4$ рад/с. Знайти максимальну швидкість точок кулі.

1.50 Через який час після початку руху вектор швидкості тіла, кинутого під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту із початковою швидкістю $\upsilon_0 = 10$ м/с, буде утворювати з горизонтом кут $\beta = 30^\circ$? Тіло рухається вільно.

1.51 Дві частинки рухаються з прискоренням g в однорідному гравітаційному полі. У початковий момент частинки знаходилися в одній точці і мали швидкості $\upsilon_1 = 3{,}0$ м/с і $\upsilon_2 = 4{,}0$ м/с, спрямовані горизонтально і в протилежні боки. Знайти відстань між частинками в момент, коли вектори їх швидкостей виявляться взаємно перпендикулярними.

1.52 Три точки знаходяться у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною a. Вони починають одночасно рухатися зі сталою за модулем швидкістю υ, причому перша точка весь час тримає курс на другу, друга – на третю, третя – на першу. Через скільки часу точки зіштовхнуться?

1.53 Дві частинки, 1 і 2, рухаються зі сталими швидкостями υ_1 і υ_2 по двох взаємно перпендикулярних прямих до точки їх перетину *O*. У момент $t = 0$ частинки знаходилися на відстанях l_1 і l_2 від точки *O*. Через скільки часу після цього відстань між частинками стане найменшою? Чому вона дорівнює?

1.54 За проміжок часу $\tau = 10{,}0$ с точка пройшла половину кола радіусом $R = 160$ см. Обчислити за цей час:

1) середнє значення модуля швидкості $<\upsilon>$; 2) модуль середнього вектора швидкості $|<\vec{\upsilon}>|$; 3) модуль середнього вектора повного прискорення $|<\vec{a}>|$, якщо точка рухалася зі сталим тангенціальним прискоренням.

1.55 Радіус-вектор частинки змінюється з часом t згідно із законом $\vec{r}=\vec{b}t(1-\alpha t)$, де $\vec{b}$ – сталий вектор; α - додатна стала. Знайти: 1) швидкість $\vec{\upsilon}$ і прискорення $\vec{a}$ частинки залежно від часу; 2) проміжок часу Δt, після закінчення якого частинка повернеться в початкову точку, а також шлях s, який вона пройде.

1.56 Кабіна ліфта, у якій відстань від підлоги до стелі дорівнює 2,7 м, почала підніматися зі сталим прискоренням 1,2 м/с^2. Через 2,0 с після початку підйому зі стелі кабіни почав падати болт. Знайти: 1) час вільного падіння болта; 2) переміщення і шлях болта за час вільного падіння в системі відліку, зв'язаної із шахтою ліфта.

1.57 Частинка рухається вздовж осі X так, що її швидкість змінюється за законом $\upsilon_x=\alpha\sqrt{x}$, де α – додатна стала. Маючи на увазі, що в момент $t=0$ вона перебувала в точці $x=0$, знайти: 1) залежність від часу швидкості й прискорення частинки; 2) середню швидкість частинки за час, упродовж якого вона пройде перші s метрів шляху.

1.58 Радіус-вектор точки A відносно початку координат змінюється з часом t за законом $\vec{r}=\alpha\cdot t\cdot\vec{e}_x+\beta\cdot t^2\cdot\vec{e}_y$, де α і β – сталі; $\vec{e}_x$ і $\vec{e}_y$ – орти осей X і Y. Знайти: 1) рівняння траєкторії точки $y(x)$; 2) залежності від часу швидкості $\vec{\upsilon}$, прискорення $\vec{a}$ та модулів цих величин; 3) залежність від часу кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{\upsilon}$.

2 ДИНАМІКА ЧАСТИНОК

Основні формули

Рівняння руху матеріальної точки (другий закон Ньютона)

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \text{ , або } \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \text{ ,} \qquad (2\text{ а})$$

де $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ *– геометрична сума сил, що діють на матеріальну точку (рівнодійна сила);* m *– маса;* $\vec{a}$ *– прискорення;* $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ *– імпульс,* $\vec{\upsilon}$ *– швидкість,* N *– число сил, що діють на точку.*

Сила пружності

$$F_{пр,x} = -kx \text{ ,} \qquad (2\text{ б})$$

де k *– коефіцієнт пружності;* x *– абсолютна деформація.*

Сила гравітаційної взаємодії

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ ,} \qquad (2\text{ в})$$

де G *– гравітаційна стала;* m_1 *та* m_2 *– маси тіл, які розглядаються як матеріальні точки;* r *– відстань між ними.*

Сила тертя ковзання

$$F_{тер} = \mu N \text{ ,} \qquad (2\text{ г})$$

де μ *– коефіцієнт тертя ковзання;* N *– нормальна складова сили реакції опори.*

2.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 2.1

Аеростат масою $m = 250$ кг почав опускатися вниз із прискоренням $a = 0{,}20$ м/с^2. Визначити масу баласту, який потрібно скинути за борт, щоб аеростат набув такого самого за модулем прискорення у зворотному напрямку. Опором повітря знехтувати.

Розв'язання

Δm – ?
$m = 250$ кг,
$a = 0{,}20$ м/с^2

Запишемо рівняння другого закону Ньютона як для випадку руху аеростата вниз, так і для випадку його руху вгору. З одержаних рівнянь знайдемо шукану масу баласту Δm.

В обох випадках аеростат рухається під дією сили тяжіння та сили Архімеда $\vec{F}_A$ (рис. 2.1). Викидання баласту приводить до зміни маси аеростата від m до $(m - \Delta m)$, а отже, і сили тяжіння від $m\vec{g}$ до $(m - \Delta m)\vec{g}$, де $\vec{g}$ – вектор прискорення вільного падіння. Сила Архімеда не змінюється. Тоді рівняння другого закону Ньютона, коли аеростат рухається вниз (рис. 2.1*а*), має вигляд

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_A + m\vec{g}. \qquad (1)$$

Якщо маса аеростата зменшується на масу баласту Δm і аеростат рухається вгору (рис. 2.1*б*), то рівняння руху набирає вигляду

$$(m - \Delta m)\vec{a}_2 = \vec{F}_A + (m - \Delta m)\vec{g}. \qquad (2)$$

Проектуємо векторні рівняння (1) та (2) на вісь Y, візьмемо до уваги, що модулі прискорень в обох випадках однакові $a_1 = a_2 = a$, і одержуємо

$$-ma = F_A - mg,$$
$$(m - \Delta m)a = F_A - (m - \Delta m)g. \qquad (3)$$

Система рівнянь (3) є системою двох лінійних рівнянь відносно двох невідомих F_A та Δm. Розв'язуємо цю систему, наприклад, методом послідовного виключення невідомих і знаходимо шукану масу баласту:

$$\Delta m = 2ma/(g+a). \tag{4}$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$\Delta m = 2ma/(g+a) = 2 \cdot 250 \cdot 0{,}2/(9{,}81+0{,}2)\,\text{кг} = 10$ кг.

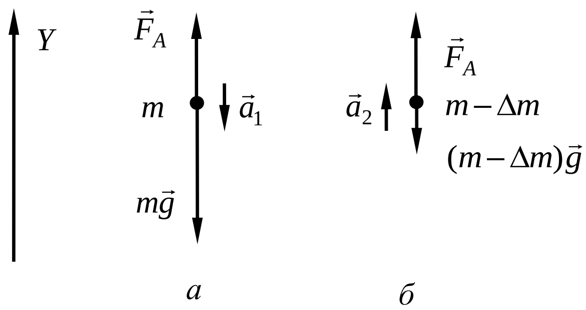


Рисунок 2.1

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо прискорення аеростата прямує до нуля $a = 0$. Тоді за умовою задачі прискорення у протилежному напрямку теж повинно дорівнювати нулю. Тобто прискорення залишається таким самим і тому маса аеростата залишається незмінною. Звідси випливає, що маса баласту, який потрібно скинути за борт, щоб аеростат набув такого самого за модулем прискорення у зворотному напрямку, дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $a = 0$, то $\Delta m = 2ma/(g+a) = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta m = 2ma/(g+a) = 10$ кг.

Приклад 2.2

В установці, показаній на рис. 2.2, маси тіл дорівнюють m_0, m_1, m_2, масою блока та нитки можна знехтувати, тертя у блоці відсутнє. Знайти прискорення a, з яким опускається тіло m_0, та силу натягу нитки між тілами m_1 та m_2. Взяти, що коефіцієнт тертя між тілами m_1, m_2 та горизонтальною поверхнею дорівнює μ.

Розв'язання

a – ?
T_2 – ?
m_0, m_1, m_2, μ

У задачі розглядається рух системи, що складається з трьох тіл. З'ясуємо, які сили діють на кожне тіло, і запишемо рівняння другого закону Ньютона для кожного тіла. З одержаних рівнянь знайдемо шукані величини.

Розглянемо сили, що діють на тіла системи (рис. 2.2). На кожне тіло діє сила тяжіння, відповідно $m_0\vec{g}$, $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$. На тіла 1 та 2 діють сили реакції опори $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ та сили тертя $\vec{F}_{тер1}$, $\vec{F}_{тер2}$. Також на тіла діють сили натягу ниток: на тіло 2 – $\vec{T}_2$, на тіло 1 – $\vec{T}_2'$ та $\vec{T}_1$, на тіло 0 – $\vec{T}_1'$. Зазначимо, модулі сил натягу, що діють у межах однієї нитки, є однаковими. Тобто $T_2 = T_2'$, $T_1 = T_1'$. Також візьмемо до уваги, що усі тіла рухаються з однаковими за модулем прискореннями: $a_0 = a_1 = a_2 = a$ (нитка не розтягується).

Запишемо для кожного тіла системи рівняння руху:

$$m_0\vec{a}_0 = m_0\vec{g} + \vec{T}_1',$$
$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2' + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тер1}, \qquad (1)$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тер2}.$$

Спроектуємо це рівняння на вертикальну та горизонтальну осі:

$$m_0 a = m_0 g - T_1,$$
$$m_1 a = T_1 - T_2 - F_{тер1},$$
$$m_2 a = T_2 - F_{тер2}, \qquad (2)$$
$$0 = -m_1 g + N_1,$$
$$0 = -m_2 g + N_2.$$

Також використаємо зв'язок між силою тертя та нормальною складовою сили реакції опори:

$$F_{тер1} = \mu \cdot N_1,\ F_{тер2} = \mu \cdot N_2. \qquad (3)$$

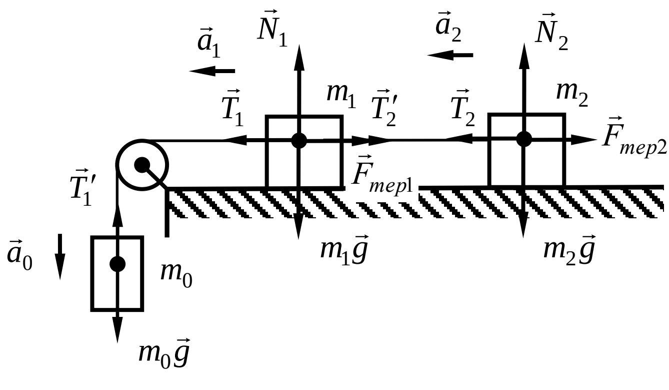


Рисунок 2.2

Проаналізуємо системи рівнянь (2) та (3). Бачимо, що до 7 незалежних рівнянь входить 7 невідомих величин. Це означає, що система має однозначний розв'язок, який можна знайти, наприклад, методом послідовного виключення змінних. Шляхом достатньо простих перетворень із рівнянь (2) та (3) знаходимо шукані величини:

$$a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g, \quad T_2 = \frac{(1+\mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g. \qquad (4)$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

1 Розглянемо випадок, коли маса тіла 2 (рис. 2.2) дорівнює нулю, тобто $m_2 = 0$. Із фізичних міркувань зрозуміло, що сили, які діють на це тіло, будуть дорівнювати нулю. З цього випливає, що і сила натягу нитки T_2 теж буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $m_2 = 0$, то

$$T_2 = \frac{(1+\mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g = 0.$$

2 Розглянемо випадок, коли маси тіла 2 та 1 (рис. 2.2) дорівнюють нулю, тобто $m_2 = 0$, $m_1 = 0$. З фізичних міркувань зрозуміло, що всі сили, які діють на ці тіла, дорівнюють нулю, зокрема і сила T_1. Це приводить до того, що тіло 0 буде рухатися виключно під дією сили тяжіння і його прискорення буде дорівнювати прискоренню вільного падіння. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $m_2 = 0$, $m_1 = 0$, то

$$a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g = \frac{m_0 - 0}{m_0 + 0} g = g.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $a = \frac{m_0 - (m_1 + m_2)\mu}{m_0 + m_1 + m_2} g$, $T_2 = \frac{(1+\mu)m_0}{m_0 + m_1 + m_2} m_2 g$.

Приклад 2.3

Невелике тіло пустили знизу вгору по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 15°$ із горизонтом. Знайти коефіцієнт тертя, якщо час підйому тіла виявився в $\eta = 2{,}0$ рази меншим від часу спуску.

Розв'язання

μ – ?
$\eta = 2{,}0$, $\alpha = 15°$

Розглянемо рух тіла по похилій площині у двох випадках: тіло рухається вгору (рис. 2.3 *а*) та тіло рухається вниз (рис. 2.3 *б*). В обох випадках тіло рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$, сили реакції опору $\vec{N}$ та сили тертя $\vec{F}_{тер}$. Відмінність цих випадків полягає у тому, що вектори сил тертя спрямовані протилежно (рис. 2.3) тому, що напрямки швидкості руху тут теж протилежні.

Для розв'язування задачі запишемо рівняння другого закону Ньютона для двох вищеописаних випадків, з яких знайдемо відповідні прискорення. Далі використаємо кінематичні співвідношення між шляхом, прискоренням та часом. Звідси знаходимо рівняння для відношення часу підйому тіла до часу його спуску η, з якого і визначимо коефіцієнт тертя.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Спочатку запишемо рівняння другого закону Ньютона, коли тіло масою m рухається вгору (рис. 2.3 *а*):

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_{тер1} + \vec{N} + m\vec{g}\,, \qquad (1)$$

та коли тіло рухається вниз (рис. 2.3 *б*):

$$m\vec{a}_2 = \vec{F}_{тер2} + \vec{N} + m\vec{g}\,. \qquad (2)$$

Спроектуємо ці рівняння на осі X та Y (рис. 2.3). У результаті одержуємо

$$ma_1 = +F_{тер1} + mg\sin\alpha\,,$$

$$0 = N - mg\cos\alpha\,,$$

$$ma_2 = -F_{тер2} + mg\sin\alpha\,, \qquad (3)$$

$$0 = N - mg\cos\alpha\,.$$

Також використаємо зв'язок між силою тертя та силою реакції опори

$$F_{тер1} = F_{тер2} = \mu N\,. \qquad (4)$$

Із рівнянь (3) та (4) легко знайти прискорення тіла a_1, коли воно рухається вгору, та a_2, коли воно спускається вниз. Тобто

$$a_1 = (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g\,,\ a_2 = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g\,. \qquad (5)$$

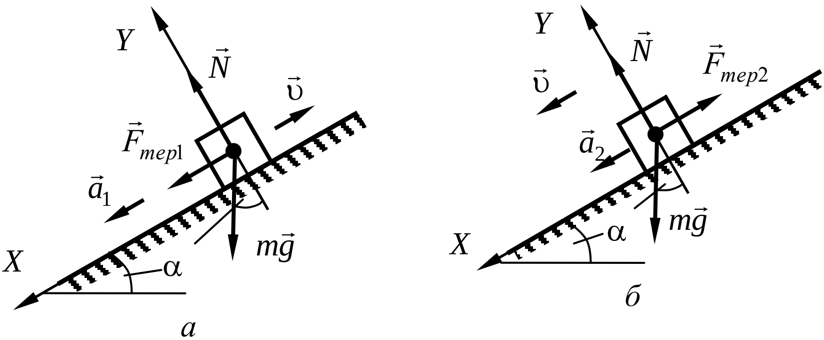


Рисунок 2.3

Нехай υ_0 – модуль початкової швидкості тіла, спрямованого протилежно осі X (рис. 2.3); t_1 – час, через який тіло, рухаючись вгору з прискоренням a_1, зупиниться. Зрозуміло, що за цей час тіло пройде шлях l. Використовуючи відомі формули для рівносповільненого руху, можемо записати:

$$0 = \upsilon_0 - a_1 t_1\,,\ l = \upsilon_0 t_1 - a_1 t_1^2 / 2\,. \qquad (6)$$

Звідси неважко знайти

$$l = a_1 t_1^2 / 2 \text{ або } t_1 = \sqrt{2 \cdot l / a_1} \,. \qquad (7)$$

Коли тіло починає спускатися, то його початкова швидкість дорівнює нулю. Воно, спускаючись, проходить таку саму відстань l, що і під час підйому. Тому, використовуючи відоме співвідношення для рівноприскореного руху, можемо записати

$$l = 0 + a_2 t_2^2 / 2 \text{ або } t_2 = \sqrt{2 \cdot l / a_2} \,. \qquad (8)$$

Із рівнянь (7) та (8) знаходимо

$$\eta = \frac{t_2}{t_1} = \frac{\sqrt{2 \cdot l / a_2}}{\sqrt{2 \cdot l / a_1}} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} \,. \qquad (9)$$

Розв'язуючи рівняння (9) відносно невідомої величини k, знаходимо шуканий коефіцієнт тертя

$$\mu = [(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)]\,\mathrm{tg}\,\alpha \,. \qquad (10)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ та виконаємо обчислення: $\mu = [(2^2 - 1)/(2^2 + 1)]\,\mathrm{tg}\,15° = 0{,}16$.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Припустимо, що сила тертя відсутня, $\mu = 0$. У цьому випадку, як випливає з фізичних міркувань, час підйому повинен дорівнювати часу спуску. Тобто відношення цих проміжків часу буде дорівнювати одиниці, а саме $\eta = 1$. Коли ми підставимо це відношення до розрахункової формули, то одержимо такий самий результат:

$$\mu = [(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)]\,\mathrm{tg}\,\alpha = [(1^2 - 1)/(1^2 + 1)]\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0 \,.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\mu = [(\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)]\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}16.$

Приклад 2.4

Брусок масою m тягнуть за нитку так, що він рухається зі сталою швидкістю по горизонтальній площині з коефіцієнтом тертя μ (рис. 2.4). Знайти кут α, коли натяг нитки буде найменшим. Чому дорівнює сила натягу нитки?

Розв'язання

α – ?
$F_{\min}$ – ?
m , μ

Особливість досліджуваного випадку полягає у тому, що за умовою задачі рух відбувається зі сталою як за модулем, так і за напрямком швидкістю. Це означає, що прискорення тіла дорівнює нулю. Використаємо рівняння другого закону Ньютона, з якого і знайдемо шукані величини.

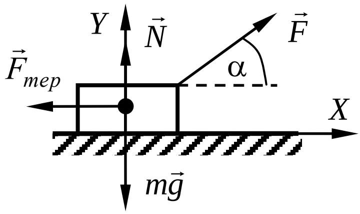


Рисунок 2.4

Зобразимо на рис. 2.4 сили, що діють на тіло. Це $\vec{F}$ – сила натягу нитки; $m\vec{g}$ – сила тяжіння; $\vec{N}$ – сила реакції опори; $\vec{F}_{тер}$ – сила тертя. Як було зазначено вище, прискорення тіла дорівнює нулю: $\vec{a} = 0$. Тоді рівняння другого закону Ньютона набере вигляду

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a} = 0. \qquad (1)$$

Спроектуємо це рівняння на вертикальну та горизонтальні осі:

$$F \cdot \sin\alpha - mg + N = 0,$$
$$F \cdot \cos\alpha - F_{тер} = 0. \qquad (2)$$

Також візьмемо до уваги зв'язок між силою тертя та силою реакції опори

$$F_{тер} = \mu \cdot N. \qquad (3)$$

Будемо вважати кут α відомим. Тоді рівняння (2) та (3) є системою трьох рівнянь відносно трьох невідомих (F, $F_{тер}$, N). Із цієї системи неважко знайти силу натягу нитки:

$$F = \mu mg / (\cos\alpha + \mu \sin\alpha). \qquad (4)$$

Отже, співвідношення (4) є функцією сили натягу нитки F від кута α. Дослідимо цю функцію на екстремум залежно від кута α. Для цього знайдемо похідну сили натягу нитки F від кута α і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{-\mu mg}{(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)^2} (-\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0. \qquad (5)$$

Звідси випливає, що точки екстремуму визначаються співвідношенням

$$-\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0 \text{ або } tg\alpha = \mu. \qquad (6)$$

Неважко впевнитися, що похідна $dF / d\alpha$ під час переходу кута α через точку $tg\alpha = \mu$ змінює знак з від'ємного на додатний. Це означає, що вираз (6) визначає кут, якщо сила є мінімальною.

Щоб знайти величину сили для цього кута (мінімальну силу), підставимо значення кута (6) у формулу (4):

$$F_{\min} = \frac{\mu mg}{\cos\alpha(1 + \mu \cdot tg\alpha)} = \frac{\mu mg\sqrt{1+\mu^2}}{(1 + \mu \cdot \mu)} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}. \qquad (7)$$

Тут використали відоме з математики співвідношення

$$1+(tg\alpha)^2 = 1/(\cos\alpha)^2, \text{ тобто } \cos\alpha = 1/\sqrt{1+\mu^2} \quad (tg\alpha = \mu).$$

Таким чином, одержали формули (6) та (7), які є розв'язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо коефіцієнт тертя дорівнює нулю ($\mu = 0$). Тоді, для того щоб брусок рухався зі сталою швидкістю по горизонтальній площині (прискорення дорівнює нулю), достатньо сили, що дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\mu = 0$, то $F_{\min} = \dfrac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}} = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $tg\alpha = \mu$, $F_{\min} = \mu mg/\sqrt{1+\mu^2}$.

Приклад 2.5

Катер масою m рухається озером зі швидкістю υ_0. У момент $t = 0$ вимкнули його двигун. Вважаючи силу опору пропорційною швидкості катера, $\vec{F}_{on} = -r\vec{\upsilon}$, знайти: а) залежності швидкості та шляху після вимкнення двигуна від часу t; б) повний шлях катера до зупинки.

Розв'язання

$\upsilon = \upsilon(t)$ – ? $s = s(t)$ – ? $s_{повн}$ – ?	Для розв'язування задачі використаємо рівняння другого закону Ньютона, з якого знайдемо прискорення катера після вимкнення двигуна. Далі, використовуючи визначення прискорення та швидкості, знайдемо шукані величини.
m, υ_0, $\vec{F}_{on} = -r\vec{\upsilon}$	

Після вимкнення двигуна на катер діють такі сили (рис. 2.5): $\vec{F}_{on} = -r\vec{\upsilon}$ – сила опору руху; $\vec{N}$ – нормальна складова сили реакції опори; $m\vec{g}$ – сила тяжіння. З фізичних міркувань зрозуміло, що нормальна складова сили реакції опори $\vec{N}$ та сила тяжіння $m\vec{g}$ урівноважують одна одну $(\vec{N} + m\vec{g} = 0)$, і катер у вертикальному напрямі не рухається. Тому рівнодійна цих сил визначається лише силою опору руху і рівняння другого закону Ньютона набирає вигляду

$$m\vec{a} = \vec{F}_{on} + \vec{N} + m\vec{g} = -r\vec{\upsilon} + \vec{N} + m\vec{g}, \text{ або } m\vec{a} = -r\vec{\upsilon}. \quad (1)$$

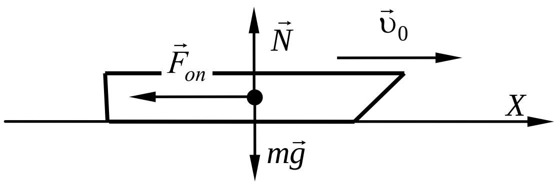


Рисунок 2.5

Спроектуємо це рівняння на вісь X:

$$ma_x = -r\upsilon_x, \text{ або } a_x = -r\upsilon_x / m. \quad (2)$$

Із фізичних міркувань зрозуміло, що швидкість υ_x катера з часом буде змінюватися, і тому, виходячи зі співвідношення (2), буде змінюватися і прискорення a_x. Це означає, що рух човна не буде рівноприскореним і застосовувати формули рівноприскореного руху до цього випадку не можна. Тому швидкість та координати човна будемо знаходити, використовуючи визначення прискорення та швидкості.

Відповідно до визначення прискорення a_x запишемо:

$$a_x = d\upsilon_x / dt. \quad (3)$$

Використовуючи співвідношення (2) та (3), одержуємо рівність

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = -\frac{r\upsilon_x}{m}. \qquad (4)$$

Розглядаючи похідну як відношення нескінченно малих величин, можемо записати так:

$$\frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} = -(r/m)dt. \qquad (5)$$

Проведемо інтегрування правої та лівої частин співвідношення (5) і знаходимо

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_x} \frac{d\upsilon_x}{\upsilon_x} = -\int_0^t (r/m)dt, \qquad \ln(\upsilon_x)\Big|_{\upsilon_0}^{\upsilon_x} = -(r/m)(t-0),$$

тобто

$$\ln(\upsilon_x/\upsilon_0) = -(r/m)t. \qquad (6)$$

З останньої формули знаходимо

$$\upsilon_x = \upsilon(t) = \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m). \qquad (7)$$

Для знаходження шляху використаємо визначення швидкості

$$\upsilon_x = dx/dt. \qquad (8)$$

Із співвідношень (7) та (8) знаходимо

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m). \qquad (9)$$

Розглядаючи похідну як відношення нескінченно малих величин, запишемо:

$$dx = \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m)dt. \qquad (10)$$

Проведемо інтегрування правої та лівої частин формули (10) й одержуємо

$$\int_0^x dx = \int_0^t \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m)dt\,,$$

або

$$x - 0 = \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m)/(-r/m)\Big|_0^t = m\upsilon_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt/m)]\,.$$

Зрозуміло, що шлях і координата катера x збігаються. Тому

$$s(t) = m\upsilon_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt/m)]\,. \qquad (11)$$

Із формули (7) випливає, що зупиниться катер (швидкість буде дорівнювати нулю), якщо $t = +\infty$. Тому для визначення повного шляху $s_{повн}$ підставимо це значення часу у співвідношення (11) й одержимо

$$s_{повн} = m\upsilon_0 / r\,. \qquad (12)$$

Таким чином, одержали формули (7), (11) та (12), які є розв'язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт опору r дорівнює нулю. Це означає, що сила опору дорівнює нулю, і після вимкнення двигуна результуюча сила теж буде дорівнювати нулю. Отже, катер буде рухатися рівномірно зі сталою швидкістю υ_0. Тобто $\upsilon(t) = \upsilon_0$, $s(t) = \upsilon_0 t$, $s_{повн} = \upsilon_0 \cdot \infty = \infty$. Із розрахункових формул випливає такий самий результат. Якщо $r \to 0$, то

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m) = \upsilon_0 \cdot \exp(-0 \cdot t/m) = \upsilon_0\,,$$

$$s(t) = m\upsilon_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt/m)] = m\upsilon_0 / r \cdot [1 - (1 - rt/m)] =$$
$$= (m\upsilon_0 / r) \cdot rt/m = \upsilon_0 t\,,$$

$$s_{повн} = m\upsilon_0 / r = m\upsilon_0 / 0 = \infty\,.$$

У цих співвідношеннях використали формулу, якщо $\alpha << 1$, то $\exp(\alpha) \approx 1 + \alpha$.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\upsilon(t) = \upsilon_0 \cdot \exp(-rt/m)$, $s_{повн} = m\upsilon_0 / r$, $s(t) = m\upsilon_0 / r \cdot [1 - \exp(-rt/m)]$,

Приклад 2.6

Невелику кульку масою m, підвішену на нитці, відвели убік так, що нитка утворила прямий кут із вертикаллю, а потім відпустили. Знайти: модуль повного прискорення кульки і силу натягу нитки залежно від θ – кута відхилення нитки від вертикалі.

Розв'язання

$a = a(\theta)$ – ?
$T = T(\theta)$ – ?
m, $\theta_0 = 90°$

Для розв'язування задачі використаємо рівняння другого закону Ньютона у проекціях на дотичну та нормаль до траєкторії. З одержаної системи рівнянь знайдемо шукані величини.

Кулька рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$ та сили натягу нитки $\vec{T}$ (рис. 2.6). Тоді рівняння другого закону Ньютона набере вигляду

$$m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}\,. \qquad (1)$$

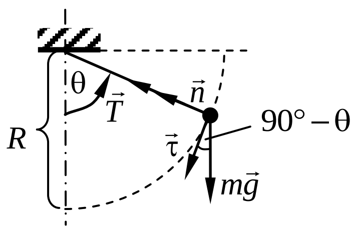


Рисунок 2.6

Спроектуємо рівняння (1) на дотичну та нормаль до траєкторії руху (рис. 2.6; $\vec{\tau}$ – одиничний вектор, паралельний дотичній до траєкторії руху; $\vec{n}$ – одиничний вектор, перпендикулярний до дотичної траєкторії руху).

$$ma_n = T - mg\sin(90° - \theta),$$

$$ma_\tau = mg\cos(90° - \theta). \tag{2}$$

Візьмемо до уваги, що нормальне та тангенціальне прискорення дорівнюють відповідно

$$a_\tau = d\upsilon / dt, \; a_n = \upsilon^2 / R, \tag{3}$$

де υ – модуль швидкості тіла; R – радіус кривизни траєкторії (довжина нитки). Тоді з (2) та (3) одержимо

$$m \cdot \upsilon^2 / R = T - mg\cos\theta, \tag{4}$$

$$m \cdot d\upsilon / dt = mg\sin\theta. \tag{5}$$

Виходячи із зв'язку між лінійною та кутовою швидкістю, можемо записати

$$\upsilon = -Rd\theta / dt, \tag{6}$$

де знак «–» пов'язаний із тією обставиною, що $d\theta / dt < 0$, а υ є модулем вектора і від'ємним бути не може (рис. 2.6).

Рівняння (3)–(6) дозволяють знайти шукані в задачі силу натягу T та повне прискорення *a:*

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \tag{7}$$

Для цього помножимо рівняння (5) на рівняння (6) та проведемо деякі перетворення:

$$m \cdot \upsilon d\upsilon / dt = -mgR\sin\theta d\theta / dt.$$

Звідси одержуємо

$$\frac{m}{2} \cdot \frac{d\upsilon^2}{dt} = mgR\frac{d\cos\theta}{dt},$$

або

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mgR\cos\theta + C. \qquad (8)$$

Щоб визначити константу C, використаємо умову задачі: тіло мало швидкість, що дорівнює нулю $\upsilon = 0$, коли кут із вертикаллю дорівнював 90° ($\theta = 0$). Підставляємо ці значення у (8) та одержуємо

$$\frac{m0^2}{2} = mgR\cos 90° + C \text{ або } C = 0.$$

Тоді рівняння (8) набере вигляду

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = mgR\cos\theta. \qquad (9)$$

Зазначимо, що співвідношення (9) відображає закон збереження повної механічної енергії для випадку задачі. Застосування закону збереження повної механічної енергії до розв’язування задач розглянемо в наступному розділі.

Підставляємо υ^2 з (9) в (4) і знаходимо силу натягу нитки:

$$\frac{2mgR\cos\theta}{R} = T - mg\cos\theta \text{ або } T = 3mg\cos\theta. \qquad (10)$$

Із рівнянь (5) та (3) знаходимо тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = d\upsilon / dt = g\sin\theta. \qquad (11)$$

Із рівнянь (3) та (9) знаходимо нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{2gR\cos\theta}{R} = 2g\cos\theta. \qquad (12)$$

Тоді повне прискорення (7) буде дорівнювати

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(2g\cos\theta)^2 + (g\sin\theta)^2} = g\sqrt{3\cos^2\theta + 1}. \qquad (13)$$

Таким чином, формули (10) та (13) є розв’язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли θ дорівнює 90°. Ця ситуація відповідає початковому стану кульки, швидкість її дорівнює нулю, сила натягу нитки також дорівнює нулю. Повне прискорення визначається лише силою тяжіння і дорівнює прискоренню вільного падіння g. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $\theta = 0$, то

$$T = 3mg\cos\theta = 3mg\cos(90°) = 0,$$

$$a = g\sqrt{3\cos^2\theta + 1} = g\sqrt{3\cos^2(90°) + 1} = g\sqrt{3\cdot 0 + 1} = g.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $a = g\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$, $T = 3mg\cos\theta$.

2.2 Задачі для самостійного розв’язування

2.1 Рибалка відштовхує веслом другий човен із силою F =50 Н. Які відстані пройдуть човни за 4 с, якщо маса човна з рибалкою m_1 = 250 кг, а другого човна – m_2 = 200 кг? Опір води руху човнів не враховувати.

2.2 Із баркаса тягнуть канат, поданий на човен, який перебуває на відстані 10 м. Визначити відстані, пройдені човном і баркасом до їх зустрічі, якщо маса човна 300 кг, а маса баркаса 1200 кг.

2.3 Невелике тіло рівномірно обертається на нитці, що утворює кут α із вертикаллю, по колу в горизонтальній площині. Визначити відношення сил натягу нитки та кутових швидкостей для значень кута $\alpha = 30^0$ та $\alpha = 45^0$.

2.4 До стального контейнера масою 600 кг, що стоїть на бетонній підлозі, приклали у горизонтальному напрямі силу 1000 Н. Чи рухатиметься під дією цієї сили контейнер? Якщо так, то як – рівномірно чи з прискоренням? Коефіцієнт тертя сталі по бетону вважати таким, що дорівнює 0,3.

2.5 Хлопчик може тягнути санчата із силою 200 Н. Який максимальний вантаж він може везти на санчатах по горизонтальній дорозі, коли коефіцієнт тертя полозок санчат об сніг дорівнює 0,05? Маса санчат 30 кг. Вважати, що силу прикладають до санчат паралельно дорозі.

2.6 З якою мінімальною силою, спрямованою горизонтально, необхідно притискати плоский брусок до стіни, щоб він не вислизнув униз? Маса бруска 5 кг, коефіцієнт тертя між стіною і бруском $\mu = 0,1$.

2.7 Маневровий тепловоз масою 100 т тягне два вагони масами по 60 т кожен із прискоренням 0,2 м/с^2. Визначити силу тяги тепловоза і силу натягу зчеплень, якщо коефіцієнт опору руху дорівнює 0,005.

2.8 Санчата масою m тягнуть із силою F, прикладеною до мотузки, яка утворює з горизонтом кут α. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює μ. Знайти силу тертя ковзання.

2.9 Чому дорівнює сила тертя, коли тіло масою m перебуває у стані спокою на похилій площині з кутом α?

2.10 Тіло масою m лежить на тілі масою M. Максимальне значення сили тертя спокою між цими тілами характеризується коефіцієнтом μ_0. Між тілом M та іншою поверхнею тертя відсутнє. Знайти мінімальну силу F, яка діє на тіло M і коли відбувається зсув верхнього тіла відносно нижнього.

2.11 Як відносяться одна до одної сили, з якими тіло тисне на середину опуклого та випуклого моста? Радіус кривизни в обох випадках дорівнює $R = 40$ м, а швидкість руху тіла $\upsilon = 45$ км/год.

2.12 Тіло може рухатися по колу у вертикальній площині на нитці довжиною $l = 1$ м. Яку горизонтальну швидкість необхідно надати тілу у верхньому положенні, щоб сила натягу нитки в нижньому положенні була в $n = 10$ разів більшою від сили тяжіння тіла?

2.13 По двох нахилених площинах однакової висоти H, але з різними кутами нахилу α_1 та α_2, без тертя ковзають тіла. Початкові швидкості тіл дорівнюють нулю. Обчислити відношення швидкостей тіл наприкінці шляху.

2.14 Тіло спочатку ковзає по похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 30^0$, а потім по горизонтальній поверхні і зупиняється. Відстані, що проходить тіло по похилій площині та по горизонтальній поверхні, є однаковими. Визначити коефіцієнт тертя.

2.15 Хлопчик, спираючись на бар'єр, кинув камінь із горизонтальною швидкістю $\upsilon_0 = 14$ м/с. Яку швидкість відносно Землі він надасть каменю, якщо буде кидати його з тією самою силою стоячи на ковзанах на гладкому льоду? Яку відстань проїде хлопчик до зупинки, якщо коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}02$? Маса каменя $m = 1$ кг, хлопчика $M = 36$ кг.

2.16 По похилій площині, що утворює кут α з горизонтом, рухається вгору вантаж масою m під дією сили F, спрямованій під кутом β до площини. Коефіцієнт тертя ковзання μ. Знайти прискорення тіла.

2.17 Тіло починає ковзати з вершини похилої площини без початкової швидкості. Висота площини h, кут нахилу α. Знайти швидкість тіла наприкінці площини, якщо коефіцієнт тертя μ.

2.18 До тіла масою $m = 10$ кг, що знаходиться на горизонтальній площині, прикладено силу $F_1 = 10$ Н, яка утворює кут із площиною $\alpha = 60^0$, та горизонтальну силу $F_2 = 20$ Н. Визначити прискорення, з яким тіло почне рухатися, якщо відомо, що коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0{,}1$.

2.19 У вагоні, що рухається горизонтально зі сталим прискоренням $a = 3$ м/с^2, висить на шнурі вантаж масою $m = 2$ кг. Визначити силу натягу шнура та кут α її відхилення від вертикалі, якщо вантаж нерухомий відносно вагона.

2.20 Тіло масою m, яке знаходиться на вершині похилої площини, утримується силою тертя. За який час тіло спуститься з похилої площини, якщо вона почне рухатися в горизонтальному напрямку з прискоренням $a_0 = 1$ м/с^2? Довжина площини $l = 1$ м, кут нахилу до горизонту $\alpha = 30^0$, коефіцієнт тертя між тілом і площиною $\mu = 0{,}6$.

2.21 Вага тіла, зануреного у рідину з густиною ρ_1, дорівнює P_1, а зануреного в рідину з густиною ρ_2 – P_2. Визначити густину тіла.

2.22 Деяке тіло вагою P, занурене в рідину з густиною ρ_1, має вагу P_1, а занурене в рідину невідомої густини – P_2. Визначити густину ρ_2 другої рідини.

2.23 Якою повинна була б бути доба на Землі, щоб тіла на екваторі не мали ваги? Взяти радіус Землі $R = 6400$ км.

2.24 Обчислити першу космічну швидкість для планети, маса і радіус якої у n разів більші, ніж у Землі.

2.25 Два супутники рухаються навколо Землі по колових орбітах на висотах h_1 та h_2 від її поверхні. Знайти відношення швидкостей руху та періодів обертання цих супутників, вважаючи радіус Землі відомим.

2.26 Тіло масою m кинуте під кутом α до горизонту з початковою швидкістю υ_0. На нього діє зі сталою силою F попутний горизонтальний вітер. Знайти максимальну висоту підняття, час та дальність польоту тіла.

2.27 Під яким кутом α до горизонту необхідно кинути тіло масою m, щоб максимальна висота підйому тіла дорівнювала дальності його польоту, якщо на тіло діє зі сталою силою F горизонтальний попутний вітер.

2.28 По горизонтальній площині рухається тіло масою $M = 5$ кг під дією сили $F = 3$ Н, прикладену під кутом $\alpha = 30^0$ до горизонту. Коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0,2$. Обчислити швидкість тіла через $t = 10$ с після початку дії сили.

2.29 Людина везе з силою $F = 12$ Н двоє послідовно зв'язаних між собою санчат, тягнучи за мотузку, що утворює кут $\alpha = 45^0$ із горизонтом. Маси санчат однакові і дорівнюють $m = 15$ кг. Коефіцієнт тертя $\mu = 0,02$. Знайти: 1) прискорення санчат; 2) силу натягу мотузки між санчатами; 3) силу, з якою людина повинна тягнути за мотузку, щоб санчата рухалися рівномірно.

2.30 Тіло масою m ковзає без тертя і без початкової швидкості з вершини вертикально поставленого обруча радіусом R. З якою силою воно буде давити на обруч, коли проходитиме точку, висота якої менша за висоту вершини обруча на величину h? Знайти, на якій висоті тіло відірветься від обруча.

2.31 Кулька підвішена на нитці довжиною l. На відстані $l/2$ по вертикалі від точки підвісу вбитий цвях. Кульку відводять так, що нитка займає горизонтальне положення, і відпускають. Визначити висоту h, до якої підніметься кулька (відносно положення рівноваги).

2.32 Гумовий шнур, кінці якого поєднані, вільно насаджено на диск, що обертається в горизонтальній площині навколо вертикальної осі з частотою n = 20 Гц. Беручи до уваги, що шнур має форму кола, визначити силу натягу шнура. Маса шнура m = 15 г, довжина l = 60 см.

2.33 На пружині, довжина якої в недеформованому стані l_0, підвішений нерухомий блок. Через нього перекинуто нитку, до кінців якої прикріплені вантажі m_1 та $m_2 > m_1$. Нехтуючи тертям та вважаючи блок невагомим, а нитку невагомою та нерозтяжною, визначити прискорення, з якими будуть рухатися вантажі, силу натягу нитки, а також довжину пружини, якщо відомо, що її жорсткість k.

2.34 Порожниста стальна кулька піднімається з глибини води (h = 500 м) на поверхню. Швидкість усталеного руху кульки υ = 10 м/с. На яку відстань і в якому напрямку відносно вертикалі відхилиться кулька внаслідок дії сили Каріоліса. Широта місцевості $\varphi = 30^0$.

2.35 Цистерна з рідиною рухається горизонтально з прискоренням a = 1 м/с^2. Під яким кутом до горизонту повітряна бульбашка підніматиметься в рідині?

2.36 Обчислити густину ρ речовини кулеподібної планети, якщо супутник рухається навколо неї по коловій орбіті з періодом T на відстані від поверхні планети, яка дорівнює половині її радіуса.

2.37 Обчислити густину ρ речовини кулеподібної планети, доба якої дорівнює T = 10 год, якщо відомо, що на екваторі планети тіла невагомі.

2.38 Кулька масою m об’ємом V падає у воду з висоти H, занурюється на глибину h, а потім вистрибує з води (густина кульки менша за густину води). Знайти силу опору води, вважаючи, що вона стала, а також висоту h_1, на яку підніметься кулька, коли вискочить з води. Опором повітря знехтувати.

3 ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ ІМПУЛЬСУ, ЕНЕРГІЇ ТА МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

Основні формули

Зміна імпульсу незамкненої системи

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{зовн} dt \ . \qquad (3\text{ а})$$

Координати центра мас системи матеріальних точок:

$$x_C = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum_i m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum_i m_i z_i}{M}, \qquad (3\text{ б})$$

де m_i *– маса i-ї матеріальної точки;* x_i, y_i, z_i *– її координати;* $M = \sum m_i$ *– маса всієї системи.*

Рівняння динаміки тіла змінної маси

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}_{зовн} + \frac{dm}{dt}\vec{u} \ , \qquad (3\text{ в})$$

де $\vec{u}$ *– швидкість відокремлюваної речовини відносно тіла;* $\vec{F}_{зовн}$ *– зовнішня сила, що діє на тіло.*

Робота й потужність сили:

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F_s ds, \quad P = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \ . \qquad (3\text{ г})$$

Кінетична енергія частинки

$$E_k = m\upsilon^2 / 2 \ . \qquad (3\text{ ґ})$$

Теорема про кінетичну енергію

$$A = E_{k,2} - E_{k,1} \ . \qquad (3\text{ д})$$

Зв’язок між потенціальною енергією та силою

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z \right). \qquad (3\ е)$$

Потенціальна енергія частинки масою m*, що знаходиться в однорідному полі тяжіння Землі*

$$E_p = mgy\,, \qquad (3\ є)$$

де y *– висота тіла над рівнем, який прийнято за нульовий для відліку потенціальної енергії;* g *– прискорення вільного падіння.*

Потенціальна енергія пружно деформованого тіла (стиснутої або розтягнутої пружини)

$$E_p = kx^2 / 2\,, \qquad (3\ ж)$$

де k *– коефіцієнт пружності;* x *– абсолютна деформація тіла.*

Закон збереження повної механічної енергії в механіці

$$E_k + E_p = const\,, \qquad (3\ з)$$

де E_k *– кінетична енергія системи частинок;* E_p *– повна потенціальна енергія системи.*

Момент імпульсу та момент сили відносно точки:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}\,],\ \ \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}\,], \qquad (3\ и)$$

де $\vec{r}$ *– радіус-вектор, що визначає положення частинки відносно точки;* $\vec{p}$ *– імпульс частинки;* $\vec{F}$ *– сила, що діє на частинку.*

Коли результуючий момент сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то має місце закон збереження моменту імпульсу системи матеріальних точок:

$$\sum_i \vec{L}_i = \overrightarrow{const}\,. \qquad (3\ і)$$

3.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1

Снаряд масою $m = 10$ кг мав початкову швидкість $\upsilon_0 = 800$ м/с, яка спрямована під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту. Через $t_0 = 20$ с після пострілу снаряд розірвався на два осколки. Один осколок мав масу $m_1 = 4$ кг і швидкість $\upsilon_1 = 1$ км/с. Вектор швидкості υ_1 утворював із горизонтом кут $\beta = 46°$. Визначити швидкість другого осколка, якщо всі тіла рухалися вільно і в одній площині.

Розв'язання

υ_2 – ?
m = 10 кг,
υ_0 = 800 м/с,
t_0 = 20 с,
α = 30°,
m_1 = 4 кг,
υ_1 = 1 км/с,
β = 46°

Снаряд та осколки в умовах задачі рухаються під дією зовнішньої сили тяжіння $m\vec{g}$. Тому зміну імпульсу, а отже, і швидкості будемо визначати з другого закону Ньютона (3 а).

Розглядаємо три моменти руху снаряда (рис. 3.1): A – вихідний стан, що характеризується початковою швидкістю $\vec{\upsilon}_0$; B – стан снаряда через $t_0 = 20$ с після пострілу до розриву, що характеризується швидкістю $\vec{\upsilon}_B$; C – стан відразу після розриву снаряда на осколки масами m_1 й m_2 та швидкостями відповідно $\vec{\upsilon}_1$ й $\vec{\upsilon}_2$. Саме модуль швидкості υ_2 потрібно знайти у задачі.

З'ясуємо зміну швидкості снаряда під час переходу із стану A у стан B (рис. 3.1 *а*). Відповідно до другого закону Ньютона (3 а) можемо записати

$$\vec{p}_B - \vec{p}_0 = \int_0^{t_0} m\vec{g}dt \text{ або } m\vec{\upsilon}_B - m\vec{\upsilon}_0 = m\vec{g} \cdot t_0, \qquad (1)$$

де $\vec{p}_B = m\vec{\upsilon}_B$, $\vec{p}_0 = m\vec{\upsilon}_0$ – імпульси снаряда відповідно у стані B та стані A. Тут взято до уваги, що снаряд рухається із точки A до точки B за час t_0. Спроектуємо рівняння (1) на осі X та Y:

$$m\upsilon_{B,x} - m\upsilon_0 \cos\alpha = 0\,,$$

$$m\upsilon_{B,y} - m\upsilon_0 \sin\alpha = -mg \cdot t_0\,. \qquad (2)$$

У рівняннях (2) врахували, що, як випливає з рис. 3.1 *а*, $\upsilon_{0,x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0,y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. Рівняння (2) дозволяють знайти швидкість снаряда в точці B.

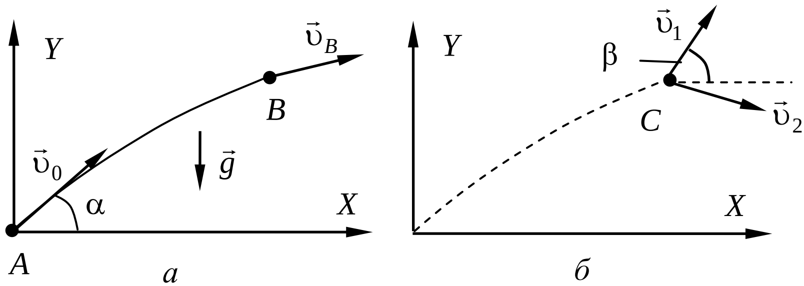


Рисунок 3.1

Тепер знайдемо зміну швидкості снаряда під час переходу із стану B у стан C (рис. 3.1 *б*). Відповідно до співвідношення (3 а) можемо записати

$$\vec{p}_C - \vec{p}_B = \int_{t_0}^{t_0} m\vec{g}dt \text{ або } m\vec{\upsilon}_C - m\vec{\upsilon}_B = m\vec{g} \cdot 0 = 0\,. \qquad (3)$$

Тут враховано, що розрив снаряда відбувається практично миттєво, тобто $t_1 = t_2 = t_0$. Як бачимо, завдяки цьому імпульс системи не змінюється. Це означає, що під час розриву снаряда імпульс системи зберігається. Необхідно також зазначити, що

$$m\vec{\upsilon}_C = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 \qquad (4)$$

є повним імпульсом системи після розриву снаряда. Спроектуємо рівняння (3) з урахуванням (4) на осі X та Y:

$$m_1\upsilon_{1,x} + m_2\upsilon_{2,x} = m\upsilon_{B,x},$$
$$m_1\upsilon_{1,y} + m_2\upsilon_{2,y} = m\upsilon_{B,y}. \quad (5)$$

Неважко знайти з рис. 3.1 *б* проекції $\upsilon_{1,x} = \upsilon_1 \cos\beta$ та $\upsilon_{1,y} = \upsilon_1 \sin\beta$. Тоді, використовуючи також, що маса другого осколка дорівнює $m_2 = m - m_1$, із рівнянь (5) та (2) знаходимо проекції швидкості другого осколка на осі X та Y:

$$m_2\upsilon_{2,x} = m\upsilon_{B,x} - m_1\upsilon_{1,x} = m\upsilon_0 \cos\alpha - m_1\upsilon_1 \cos\beta,$$
$$m_2\upsilon_{2,y} = m\upsilon_{B,y} - m_1\upsilon_{1,y} = m(\upsilon_0 \sin\alpha - gt_0) - m_1\upsilon_1 \sin\beta. \quad (6)$$

Тоді модуль шуканої швидкості υ_2 буде дорівнювати

$$\upsilon_2 = \sqrt{(\upsilon_{2,x})^2 + (\upsilon_{2,y})^2} = \frac{1}{m - m_1} \times$$
$$\times \sqrt{(m\upsilon_0 \cos\alpha - m_1\upsilon_1 \cos\beta)^2 + (m(\upsilon_0 \sin\alpha - gt_0) - m_1\upsilon_1 \sin\beta)^2}. \quad (7)$$

Таким чином, одержали формулу (7), яка визначає розв’язок задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $\upsilon_2 \approx 706$ м/с.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли $m_1 = 0$ та $t_0 = 0$. Це означає, що снаряд розривається зразу. Через те що маса першого осколка дорівнює нулю, другий осколок додаткового впливу з боку першого осколка не зазнає (фактично, розрив відсутній). Тому другий осколок збігається зі снарядом, і його швидкість дорівнює швидкості снаряда у вихідному положенні, тобто υ_0.

Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $m_1 = 0$ та $t_0 = 0$, то

$$\upsilon_2 = \frac{\sqrt{(m\upsilon_0\cos\alpha - m_1\upsilon_1\cos\beta)^2 + (m(\upsilon_0\sin\alpha - gt_0) - m_1\upsilon_1\sin\beta)^2}}{m - m_1} =$$

$$= \frac{\sqrt{(m\upsilon_0\cos\alpha - 0)^2 + (m(\upsilon_0\sin\alpha - 0) - 0)^2}}{m - 0} =$$

$$= \frac{m\upsilon_0\sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2}}{m} = \upsilon_0 .$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\upsilon_2 = 1/(m - m_1)\times$
$\times\sqrt{(m\upsilon_0\cos\alpha - m_1\upsilon_1\cos\beta)^2 + (m(\upsilon_0\sin\alpha - gt_0) - m_1\upsilon_1\sin\beta)^2} \approx$
≈ 706 м/с.

Приклад 3.2

На підлозі стоїть візок у вигляді довгої дошки з легкими колесами. На одному кінці дошки знаходиться людина. Маса людини $m_1 = 60$ кг, маса дошки $m_2 = 20$ кг. З якою швидкістю υ_2 (відносно підлоги) буде рухатися візок, коли людина піде уздовж дошки зі швидкістю (відносно дошки) $u = 1$ м/с? На яку відстань d переміститься візок, коли людина перейде на інший кінець дошки? Довжина l дошки дорівнює 2 м. Масою коліс знехтувати. Тертя у втулках не враховувати.

Розв'язання

υ_2 – ?	
d – ?	
$m_1 = 60$ кг,	
$m_2 = 20$ кг,	
$u = 1$ м/с,	
$l = 2$ м	

Для розв'язування задачі використаємо закон збереження імпульсу та закон додавання швидкостей у ньютонівській механіці (1 ж).

На систему, що складається з людини та дошки, діють зовнішні сила тяжіння та сила реакції опори. Ці сили паралельні вертикальній осі. Людина та дошка у вертикальному напрямку не рухаються. Це означає, що зовнішня сила тяжіння повністю компенсується зовнішньою силою реакції опори. Тобто результуюча зовнішніх сил дорівнює нулю. Тому для системи, що складається з людини та дошки, можемо застосувати закон збереження імпульсу

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = 0. \quad (1)$$

У формулі (1) враховано, що до початку руху як людина, так і дошка не рухалися відносно підлоги (тому права частина рівності дорівнює нулю), $\vec{\upsilon}_1$ є швидкістю людини відносно підлоги.

Згідно із законом додавання швидкостей можемо записати, що швидкість людини відносно підлоги $\vec{\upsilon}_1$ (відносно нерухомої системи відліку) дорівнює сумі швидкості людини відносно дошки $\vec{u}$ (відносно рухомої системи відліку) та швидкості дошки відносно підлоги $\vec{\upsilon}_2$ (швидкості рухомої системи відліку відносно нерухомої):

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{u} + \vec{\upsilon}_2. \quad (2)$$

Система рівнянь (1)–(2) є системою двох рівнянь відносно двох невідомих $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$, що має такий розв'язок:

$$\vec{\upsilon}_2 = -m_1\vec{u}/(m_1 + m_2),\ \vec{\upsilon}_1 = +m_2\vec{u}/(m_1 + m_2). \quad (3)$$

Із формул (3) знаходимо, що шуканий модуль швидкості візка відносно підлоги дорівнює

$$\upsilon_2 = m_1 u / (m_1 + m_2). \qquad (4)$$

Для того щоб визначити відстань d, на яку пересунеться візок, коли людина перейде на інший кінець дошки, визначимо час руху людини (й візка) t як відношення довжини дошки до швидкості людини відносно дошки

$$t = l / u. \qquad (5)$$

За цей час візок відносно підлоги переміститься на відстань

$$d = \upsilon_2 \cdot t = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{u} = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}. \qquad (6)$$

У цьому співвідношенні використали формули (4) та (5).

Таким чином, одержали формули (4) та (6), які є розв’язками задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (4) та (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $\upsilon_2 = 60 \cdot 1 / (60 + 20)$ м/с $= 0{,}75$ м/с; $d = 60 \cdot 2 / (60 + 20)$ м $= 1{,}5$ м.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса дошки є нескінченно великою ($m_2 = \infty$). Із фізичних міркувань випливає, що у цьому випадку дошка рухатися не буде, тобто її швидкість дорівнює нулю. Відстань, на яку дошка зміститься, теж буде дорівнювати нулю. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $m_2 = \infty$, то

$\upsilon_2 = m_1 u / (m_1 + m_2) = m_1 u / (m_1 + \infty) = 0$,

$d = m_1 l / (m_1 + m_2) = m_1 l / (m_1 + \infty) = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\upsilon_2 = m_1 u/(m_1 + m_2) = 0{,}75$ м/с;
$d = m_1 l/(m_1 + m_2) = 1{,}5$ м.

Приклад 3.3

Із ракети масою m_0 починає витікати газ зі швидкістю u відносно ракети. Маса газу, що витікає за одну секунду, дорівнює μ. Знайти рівняння руху ракети. Чому дорівнює швидкість ракети через t секунд після початку руху?

Розв'язання

$\upsilon - ?$
m_0, u, μ

Рівнянням руху тіла називають рівняння, що пов'язує прискорення тіла із силами, які діють на це тіло. Знайдемо це рівняння для ракети.

Ракета рухається завдяки реактивній силі. З'ясуємо сутність цієї сили. Розглянемо малий проміжок часу dt. За цей час маса ракети зменшиться від m до $m + dm$ (dm – від'ємна величина) завдяки тому, що частина пального ракети ($-dm$) перетворюється на газ і вилітає з ракети. В момент часу $t = 0$ швидкість пального ракети ($-dm$) дорівнювала швидкості ракети $\vec{\upsilon}$, а через проміжок часу dt дорівнює $(\vec{\upsilon} + \vec{u})$, де $\vec{u}$ є швидкістю газу відносно ракети. Тоді зміна імпульсу газу масою ($-dm$) буде дорівнювати

$$dp_г = (-dm)(\vec{\upsilon} + \vec{u}) - (-dm)\vec{\upsilon} = (-dm)\vec{u}\,. \qquad (1)$$

Сила, що діє на газ із боку ракети, відповідно до другого закону Ньютона (2 а) має вигляд

$$\vec{F}_г = \frac{d\vec{p}_г}{dt} = -\frac{dm}{dt}\vec{u}\,. \qquad (2)$$

Згідно з третім законом Ньютона сила $\vec{F}_p$, що діє на ракету з боку газів, дорівнює за модулем та протилежна за напрямком силі, що діє на газ із боку ракети:

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_г = +\frac{dm}{dt}\vec{u}\,. \qquad (3)$$

Сила $\vec{F}_r$ і є реактивною силою. Візьмемо до уваги, що на ракету, крім реактивної сили, також діє сила тяжіння. Тоді рівняння другого закону Ньютона для ракети набере вигляду

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} + \frac{dm}{dt}\vec{u}\,. \qquad (4)$$

Рівняння (4) є рівнянням руху для ракети. Використовуючи, що початкова маса ракети m_0 і щосекунди з ракети витікає газ масою μ, можемо записати закон зміни маси ракети з часом:

$$m = m_0 - \mu t\,. \qquad (5)$$

Підставимо формулу (5) у (4) та одержимо шукане рівняння руху ракети у вигляді

$$(m_0 - \mu\, t)(d\vec{\upsilon}/dt - \vec{g}) = -\mu\,\vec{u}\,. \qquad (6)$$

Порівнюючи рівняння (4) зі співвідношенням (3 в), бачимо, що рівняння (4) є частинним рівняння (3 в).

Розв'яжемо диференціальне рівняння руху (6) методом розділення змінних та знайдемо шукану швидкість:

$$\int_0^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_0^t \left(\frac{-\mu\,\vec{u}}{m_0 - \mu\, t} + \vec{g} \right) dt\,,$$

або

$$\vec{\upsilon} = -\vec{u}\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) + \vec{g}t\,. \qquad (7)$$

Таким чином, одержали формули (6) та (7), що є розв'язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли з ракети не витікає газ, тобто $\mu = 0$. Із фізичних міркувань випливає, що у цій ситуації реактивна сила не виникає, і ракета буде летіти лише під дією сили тяжіння з прискоренням вільного падіння $\vec{g}$. Тобто швидкість буде змінюватися у часі за законом $\vec{\upsilon} = \vec{g}t$ (початкову швидкість взяли такою, що дорівнює нулю). Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\mu = 0$, то

$$\vec{\upsilon} = -\vec{u}\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) + \vec{g}t = -\vec{u}\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - 0}\right) + \vec{g}t = -\vec{u}\ln(1) + \vec{g}t = \vec{g}t.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $(m_0 - \mu\, t)\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} - \vec{g}\right) = \mu\,\vec{u}$, $\vec{\upsilon} = -\vec{u}\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) + \vec{g}t$.

Приклад 3.4

Шайба масою $m = 50$ г зісковзує без початкової швидкості з похилої площини, що утворює кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом, і, пройшовши по горизонтальній площині відстань $l = 50$ см, зупиняється. Знайти роботу сил тертя на всьому шляху, вважаючи усюди коефіцієнт тертя таким, що дорівнює $\mu = 0{,}15$.

Розв'язання

$A_{тер}$ – ?
$m = 50$ г, $\alpha = 30^0$, $l = 50$ см, $\mu = 0{,}15$

Для розв'язування задачі визначимо шукану роботу сили тертя двома способами: 1) використовуючи зв'язок між роботою неконсервативних сил і зміною повної механічної енергії; 2) використовуючи визначення роботи сили. З одержаної системи рівнянь знайдемо шукану величину.

Тіло масою m починає рухатись з точки A (рис. 3.2), в якій має кінетичну енергію, що дорівнює нулю, та потенціальну енергію mgh, де h – висота тіла над горизонтальною лінією BC (рис. 3.2). Це означає, що в точці A сума кінетичної та потенціальної енергій, тобто повна енергія дорівнює

$$E_A = mgh. \tag{1}$$

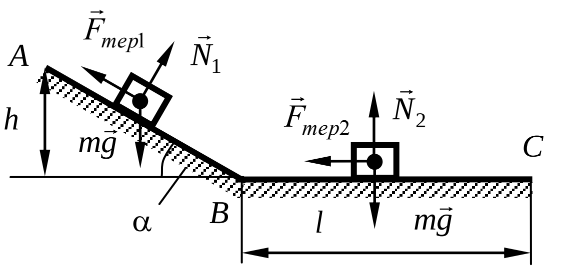


Рисунок 3.2

Тіло зісковзує з похилої площини AB (рис. 3.2), у точці B має найвищу швидкість, потім на горизонтальній ділянці BC гальмується силою тертя і зупиняється у точці C. У точці C швидкість та висота тіла над горизонтальною лінією BC дорівнюють нулю. Отже, повна енергія тіла у точці C дорівнює нулю:

$$E_C = 0. \tag{2}$$

Як відомо, робота неконсервативної сили (у задачі це робота сили тертя $A_{тр}$ на ділянці AB та BC) дорівнює зміні повної механічної енергії, тобто

$$A_{тер} = E_C - E_A = 0 - mgh = -mgh. \quad (3)$$

Визначимо цю роботу іншим способом, виходячи з визначення роботи. Зрозуміло, що робота сили тертя $A_{тер}$ складається з роботи сили тертя на ділянці AB та роботи сили тертя на ділянці BC:

$$A_{тер} = A_{AB} + A_{BC}. \quad (4)$$

Роботу на цих ділянках знайдемо, використовуючи визначення роботи сили:

$$A_{AB} = -F_{тер1} \cdot |AB|,$$
$$A_{BC} = -F_{тер2} \cdot |BC|. \quad (5)$$

У формулі (5) знак «–» пов'язаний із тим, що напрямки сили тертя і швидкості є протилежними. Із рисунка бачимо, що

$$|AB| = h/\sin\alpha, \; |BC| = l. \quad (6)$$

Для сил тертя запишемо їх зв'язок із нормальними складовими сил реакції (рис. 3.2):

$$F_{тер1} = \mu N_1, \; F_{тер2} = \mu N_2. \quad (7)$$

Сили реакції опори знайдемо, спроектувавши другий закон Ньютона на перпендикулярну до поверхні вісь і врахувавши, що у цьому напрямку тіло не рухається, тобто проекції прискорення тіла дорівнюють нулю:

$$N_1 = mg \cdot \cos\alpha, \; N_2 = mg. \quad (8)$$

Підставимо (5)–(8) в (4) й одержимо вираз для роботи сили тертя на ділянці ABC:

$$A_{тер} = -mg\mu\left(\frac{h\cos\alpha}{\sin\alpha} + l\right). \quad (9)$$

Виключаючи з системи рівнянь (9) та (3) невідому висоту h, знаходимо шукану роботу сили тертя

$$A_{тер} = -\frac{\mu mgl}{1-\mu\cdot\mathrm{ctg}\alpha}. \qquad (10)$$

Таким чином, одержали формулу (10), яка є розв’язком задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$A_{тер} = -\frac{0{,}15\cdot 0{,}05\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5}{1-0{,}15\cdot\mathrm{ctg}30^\circ} = -0{,}04 \text{ Дж.}$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо коефіцієнт тертя дорівнює нулю. Тоді сила тертя, а отже, і робота цієї сили дорівнюють нулю. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\mu = 0$, то $A_{тер} = -\dfrac{\mu mgl}{1-\mu\cdot\mathrm{ctg}\alpha} = \dfrac{0\cdot mgl}{1-0\cdot\mathrm{ctg}\alpha} = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $A_{тер} = -\mu mgl/(1-\mu\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha) = -0{,}04$ Дж.

Приклад 3.5

Вираз потенціальної енергії частинки має вигляд $E_p = 2x^2 - 3y + 4z^3$. Визначити: а) силу, що діє на частинку; б) роботу A, що виконує поле під час переміщення частинки з точки $B_1(-2; 3; 1)$ у точку

$B_2(2;\,2;\,2)$; в) як збільшиться кінетична енергія частинки за цей час?

Розв'язання

$\vec{F}$ – ?	
A – ?	
$E_{k2}-E_{k1}$ – ?	
$E_p = 2x^2 - 3y + 4z^3$,	
$B_1(-2;\,3;\,1)$,	
$B_2(2;\,2;\,2)$	

Для визначення сили, яку створює потенціальне поле U, використаємо зв'язок між потенціальною енергією та силою (3 е)

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z\right). \quad (1)$$

Підставимо в (1) $E_p = 2x^2 - 3y + 4z^3$ і знайдемо

$$\vec{F} = -4x\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 12z^2\vec{e}_z. \quad (2)$$

Роботу, що виконує поле під час переміщення частинки з точки B_1 в точку B_2, знайдемо, використовуючи зв'язок між роботою та потенціальною енергією

$$A = E_{p1} - E_{p2}, \quad (3)$$

де $E_{p1} = E_p(-2;\,3;\,1) = \left(2(-2)^2 - 3\cdot 3 + 4\cdot(1)^3\right)\text{Дж} = 3$ Дж – потенціальна енергія у точці $B_1(-2;\,3;\,1)$, $E_{p2} = E_p(2;\,2;\,2) = 34$ Дж – потенціальна енергія у точці $B_2(2;\,2;\,2)$. Таким чином, робота, що виконується полем під час переміщення частинки з точки B_1 у точку B_2, виходячи з (3), дорівнює $A = -31$ Дж.

Для знаходження зміни кінетичної енергії використаємо закон збереження повної механічної енергії (3 з):

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}. \quad (4)$$

Звідси

$$E_{k2} - E_{k1} = E_{p1} - E_{p2} = A = -31 \text{ Дж}. \qquad (5)$$

Таким чином, одержали формули (2), (3) та (5), які є розв'язками задачі.

Відповідь: $\vec{F} = -4x\vec{e}_x + 3\vec{e}_y - 12z^2\vec{e}_z$; $A = -31$ Дж; $E_{k2} - E_{k1} = -31$ Дж.

Приклад 3.6

На столі лежить гнучка мотузка, п'ята частина якої вільно звисає. Яку роботу потрібно виконати, щоб витягти звисаючу частину мотузки на стіл? Довжина мотузки $l = 1$ м, а її маса $m = 1$ кг. Тертя не враховувати.

Розв'язання

A – ?
$l = 1$ м,
$m = 1$ кг,
$\eta = 1/5 = 0{,}2$

Мотузка не є матеріальною точкою. Формули, які є правильними для матеріальної точки, безпосередньо до мотузки застосовувати не можна. Тому розіб'ємо мотузку на елементарні частини, які вже можна вважати матеріальними точками. Обчислимо елементарну роботу dA для кожної малої частинки мотузки. Далі проведемо підсумовування цих елементарних робіт і одержимо шукану роботу.

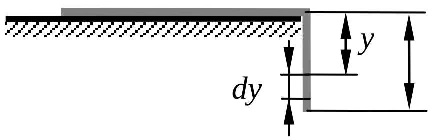


Рисунок 3.3

Розглянемо елементарну частину мотузки довжиною dy (рис. 3.3). Виходячи з того, що мотузка є однорідною, легко можна знайти масу цієї елементарної частини як

$$dm = dy\frac{m}{l}. \qquad (1)$$

Для того щоб підняти цю елементарну частину мотузки до рівня столу, потрібно виконати роботу проти сили тяжіння, що дорівнює

$$dA = dm \cdot g \cdot y = dy \frac{m}{l} g \cdot y \,. \qquad (2)$$

Якщо ця частина мотузки рухається вздовж столу, то робота з такого переміщення дорівнює нулю (сила тяжіння роботи не виконує тому, що вектори переміщення та сили тяжіння взаємно перпендикулярні; сила тертя за умовою задачі відсутня).

Для обчислення роботи, яку потрібно виконати, щоб витягти звисаючу частину мотузки на стіл, необхідно провести підсумовування усіх елементарних робіт dA для звисаючих частинок мотузки. Тобто для тих, у яких висота y змінюється від 0 до ηl (рис. 3.3). Таким чином,

$$A = \int_0^{\eta l} \frac{m}{l} g \cdot y \cdot dy = \frac{mg}{2l} y^2 \Big|_0^{\eta l} = mg\eta^2 l / 2 \,. \qquad (3)$$

Таким чином, одержали формулу (3), що є розв’язком задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $A = 1 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2^2 \cdot 1/2 \approx 0{,}20$ Дж.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли мотузка не звисає зі столу, тобто $\eta = 0$. Зрозуміло, що тоді робота, яку потрібно витратити, щоб витягти мотузку, дорівнює нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\eta = 0$, то $A = mg\eta^2 l / 2 = mg \cdot 0^2 \cdot l / 2 = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $A = mg\eta^2 l/2 = 0{,}20$ Дж.

Приклад 3.7

Гумовий шнур, довжина якого l й жорсткість k, підвішений одним кінцем до точки O (рис. 3.4). На іншому кінці є упор. Із точки O починає падати невелика муфта масою m. Нехтуючи масами шнура та упора, а також силами тертя, знайти максимальне розтягнення шнура.

Розв'язання

$\Delta l_{\max} - ?$
l, m

Для розв'язування задачі використаємо закон збереження повної механічної енергії. Муфта масою m рухається під дією сили тяжіння та сили пружності гумового шнура, які, як відомо, є консервативними. Цим силам відповідає загальна потенціальна енергія $E_p = k\Delta l^2/2 + mgy$, що є сумою потенціальних енергій сили тяжіння (3 є) та сили пружності (3 ж). Через те що у системі діють лише консервативні сили, можемо стверджувати, що у цьому випадку виконується закон збереження повної механічної енергії

$$E = const\text{, або } E_0 = E_{k,0} + E_{p,0} = E_k + E_p = E. \qquad (1)$$

У цій формулі $E_{p,0}$, $E_{k,0}$ – потенціальна та кінетична енергії муфти в початковому стані, коли вона знаходиться біля точки O, що характеризується координатою $y_0 = 0$ (рис. 3.4), початковим розтягненням шнура, яке дорівнює нулю: $\Delta l_0 = 0$ (у початковому стані шнур не розтягнуто), початковою швидкістю муфти, яка дорівнює нулю: $\upsilon_0 = 0$ (у початковому стані муфта перебуває у стані спокою); E_p, E_k – потенціальна та кінетична енергії муфти в стані, що характеризується координатою y, видовженням гумового шнура Δl та швидкістю муфти υ (рис. 3.5).

Зрозуміло, що в початковому стані маємо

$$E_{k,0} = \frac{m\upsilon_0^2}{2} = 0\,,\; E_{p,0} = \frac{k\Delta l_0^2}{2} + mgy_0 = 0\,. \qquad (2)$$

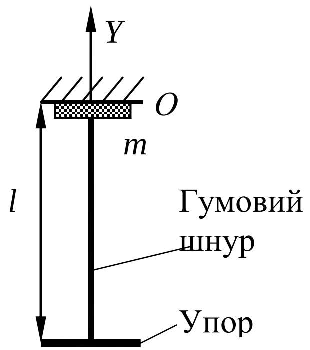


Рисунок 3.4

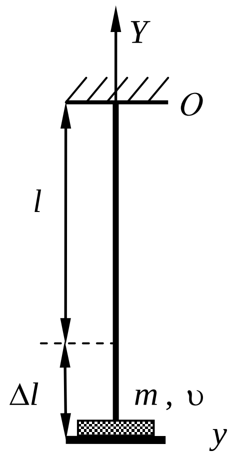


Рисунок 3.5

Для стану, що характеризується величинами $\upsilon, \Delta l, y$, можемо записати:

$$E_k = \frac{m\upsilon^2}{2}\,,\; E_p = \frac{k\Delta l^2}{2} + mgy = \frac{k\Delta l^2}{2} + mg(-l - \Delta l)\,. \qquad (3)$$

Тут використали, що координата y муфти у цьому стані дорівнює (рис. 3.4):

$$y = -l - \Delta l\,. \qquad (4)$$

Знак «–» пов’язаний із вибором напряму осі Y та положенням на цій осі точки, яку взято за нуль. Підставляємо формули (2) та (3) в (1) і одержуємо

$$0=\frac{k\Delta l^2}{2}+mg(-l-\Delta l)+\frac{m\upsilon^2}{2},$$

або

$$\Delta l^2\left(\frac{k}{2}\right)+\Delta l(-mg)+\left(\frac{m\upsilon^2}{2}-mgl\right)=0. \qquad (5)$$

Розв'язуємо квадратне рівняння (5) відносно невідомої величини Δl:

$$\Delta l_{1,2}=\frac{mg\mp\sqrt{(mg)^2-4\cdot\frac{k}{2}\left(\frac{m\upsilon^2}{2}-mgl\right)}}{2\cdot(k/2)}. \qquad (6)$$

Знак «–» у формулі (6) відповідає стиснутому стану гумового шнура, знак «+» – видовженому. За умовою задачі ми повинні знайти максимальне видовження шнура. Тому в (6) вибираємо знак «+». Аналізуючи формулу (6), розуміємо, що чим більшою буде кінетична енергія муфти $m\upsilon^2/2$, тим меншою буде Δl. Максимальним розтягнення буде, коли $m\upsilon^2/2$ буде мінімальним, тобто дорівнюватиме нулю $\left(m\upsilon^2/2=0\right)$. Тоді

$$\Delta l_{\max}=\frac{mg+\sqrt{(mg^2)+2kmgl}}{k}=\frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kl}{mg}}\right). \qquad (7)$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса муфти прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді шнур не буде розтягуватися і $\Delta l_{\max}=0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат.

Якщо $m \to 0$, то $\Delta l_{\max} = \frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kl}{mg}}\right) \approx \frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{\frac{2kl}{mg}}\right) \approx$

$\approx \frac{mg}{k}\left(\sqrt{\frac{2kl}{mg}}\right) \approx \left(\sqrt{\frac{mg2l}{k}}\right) = 0$. Тут взяли до уваги, що за умови $m \to 0$ $\frac{2kl}{mg} >> 1$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta l_{\max} = \frac{mg}{k}\left(1+\sqrt{1+\frac{2kl}{mg}}\right)$.

Приклад 3.8

Частинки масами $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг мають відповідно швидкості $\vec{\upsilon}_1 = 5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ і $\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$. Визначити швидкості частинок після їх непружного зіткнення, а також втрати механічної енергії у процесі зіткнення.

Розв'язання

$\vec{u}_1 - ?$
$\vec{u}_2 - ?$
$\Delta E - ?$
$m_1 = 1$ кг, $m_2 = 2$ кг,
$\vec{\upsilon}_1 = 5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$,
$\vec{\upsilon}_2 = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$

Використаємо закон збереження імпульсу для знаходження швидкостей частинок після зіткнення. Втрати механічної енергії у процесі зіткнення визначимо як різницю повної енергії до зіткнення E_1 та після зіткнення E_2:

$$\Delta E = E_1 - E_2. \qquad (1)$$

Як відомо, після абсолютно непружного удару частинки рухаються як одне ціле, їх швидкості стають однаковими. Позначимо їх через $\vec{u}$:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u}\,. \tag{2}$$

Із закону збереження імпульсу випливає, що

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,. \tag{3}$$

Підставимо в (3) співвідношення (2) та одержимо швидкості частинок після непружного удару:

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u} = \left(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2\right)/\left(m_1 + m_2\right). \tag{4}$$

Підставляючи в (4) значення швидкостей та мас з умови задачі, одержимо

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{u} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z\,. \tag{5}$$

Потенціальні енергії частинок, про які іде мова в умові задачі, дорівнюють нулю. Тому повну енергію частинок визначають їх кінетичні енергії. Отже,

$$E_1 = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\,,$$

$$E_2 = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)u^2}{2} = \frac{\left(m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2\right)^2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\,. \tag{6}$$

Підставляємо (6) в (1) і одержуємо

$$\Delta E = \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} - \frac{m_1^2\upsilon_1^2 + 2m_2m_1\vec{\upsilon}_2\vec{\upsilon}_1 + m_2^2\upsilon_2^2}{2\left(m_1 + m_2\right)} =$$

$$= \frac{m_1m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\vec{\upsilon}_2\vec{\upsilon}_1\right) = \frac{m_1m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)}\left(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2\right)^2\,. \tag{7}$$

Підставляючи в (7) значення швидкостей та мас з умови задачі, одержимо

$$\Delta E = 10 \text{ Дж}. \tag{8}$$

Таким чином, одержали формули (4) та (7), які є розв'язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкості частинок у вихідному стані однакові ($\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2$). Зрозуміло, що тоді взаємодія між частинками буде відсутньою, і у кінцевому стані їх швидкості не зміняться. Також зрозуміло, що втрати механічної енергії будуть відсутніми, тобто дорівнюватимуть нулю. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2$, то $\vec{u} = (m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2)/(m_1 + m_2) = \vec{\upsilon}_1(m_1 + m_2)/(m_1 + m_2) = \vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2$,

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} \cdot 0 = 0 .$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\vec{u} = (m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2)/(m_1 + m_2) = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$,

$$\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)^2 = 10 \text{ Дж.}$$

Приклад 3.9

Тіло масою m кинуто з початковою швидкістю υ_0 під кутом α до горизонту. Знайти залежність від часу моменту сили тяжіння і моменту імпульсу тіла відносно точки кидання.

Розв'язання

M, L – ?
m, υ_0, α

Для розв'язування задачі використаємо визначення моменту сили тяжіння і моменту імпульсу тіла та формули, що описують рівноприскорений рух тіла (1 е).

Згідно з визначенням момент сили тяжіння та момент імпульсу тіла (3 и) дорівнюють

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}],\ \vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{\upsilon}], \tag{1}$$

де $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ – радіус-вектор, проведений від точки кидання до тіла (рис. 3.6); $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{e}_x + \upsilon_y\vec{e}_y + \upsilon_z\vec{e}_z$ – швидкість тіла; $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$. Вважаємо, що тіло рухається в площині XY, і тому $z = 0$, $\upsilon_z = 0$. Підставимо ці формули в (1) і одержимо:

$$\vec{M} = -x \cdot mg \cdot \vec{e}_z,\ \vec{L} = m(x \cdot \upsilon_y - y \cdot \upsilon_x)\vec{e}_z. \tag{2}$$

У співвідношенні (2) використали, що $[\vec{e}_x \times \vec{e}_y] = \vec{e}_z$, $[\vec{e}_x \times \vec{e}_x] = 0$, $[\vec{e}_y \times \vec{e}_y] = 0$.

Відомо, що під дією сили тяжіння тіло рухається рівноприскорено зі сталим прискоренням $\vec{a} = -g\vec{e}_y$. Тому, використовуючи формули рівноприскореного руху (1 е), можемо записати (рис. 3.6):

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t = \upsilon_0 \cos\alpha + 0,\ \upsilon_y = \upsilon_{0y} + a_y t = \upsilon_0 \sin\alpha - gt,$$

$$x = x_0 + \upsilon_{0x}t + a_x t^2/2 = \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + a_y t^2/2 = \upsilon_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2. \tag{3}$$

У (3) взяли до уваги, що $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a_x = 0$, $a_y = -g$, $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$ (рис. 3.6). Далі підставляємо (3) в (2) і знаходимо шукані залежності:

$$\vec{M} = -\upsilon_0 \cos\alpha \cdot mg \cdot t \cdot \vec{e}_z, \tag{4}$$

$$\vec{L} = -\left(mg \cdot \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t^2/2\right)\vec{e}_z. \tag{5}$$

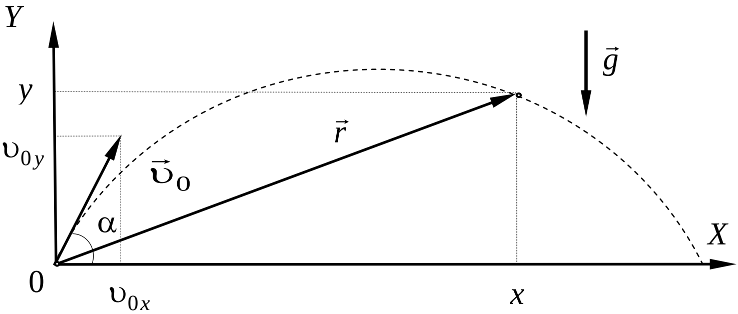


Рисунок 3.6

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо час польоту тіла дорівнює нулю ($t = 0$). Зрозуміло, що за такий час тіло відносно точки кидання пройде нульову відстань. Тобто радіус-вектор тіла відносно точки кидання буде дорівнювати нулю. Це означає, що і момент сили, і момент імпульсу відносно точки кидання будуть дорівнювати нулю. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $t = 0$, то

$$\vec{M} = -\upsilon_0 \cos\alpha \cdot mg \cdot t \cdot \vec{e}_z = -\upsilon_0 \cos\alpha \cdot mg \cdot 0 \cdot \vec{e}_z = 0,$$

$$\vec{L} = -\left(mg \cdot \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t^2 / 2\right)\vec{e}_z = -\left(mg \cdot \upsilon_0 \cos\alpha \cdot 0^2 / 2\right)\vec{e}_z = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\vec{M} = -\upsilon_0 \cos\alpha \cdot mg \cdot t \cdot \vec{e}_z$,

$\vec{L} = -\left(mg \cdot \upsilon_0 \cos\alpha \cdot t^2 / 2\right)\vec{e}_z$.

Приклад 3.10

Описати рух космонавта у стані невагомості в космічному кораблі після того, як він ногою надасть швидкість м'ячу у напрямі, перпендикулярному до осі свого тіла. Маса космонавта $m_1 = 80$ кг, зріст – $l = 1{,}8$ м, маса м'яча – $m_2 = 400$ г, його швидкість відносно космічного корабля – $u_2 = 10$ м/с.

Розв'язання

u_C – ?
ω – ?
$l = 1{,}8$ м,
$m_1 = 80$ кг,
$m_2 = 400$ г,
$u_2 = 10$ м/с

Із фізичних міркувань зрозуміло, що космонавт після удару буде рухатися протилежно до швидкості м'яча та одночасно буде обертатися (рис. 3.7). Швидкості різних точок космонавта будуть різними. Швидкість довільної точки космонавта після удару можна подати як суперпозицію поступального руху зі швидкістю центра мас $\vec{u}_C$ та обертального руху відносно центра мас C з кутовою швидкість $\vec{\omega}$. Використовуючи зв'язок між лінійною та кутовою швидкостями, можемо записати швидкість довільної точки космонавта у вигляді

$$\vec{u} = \vec{u}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}], \tag{1}$$

де $\vec{r}$ – радіус-вектор, що з'єднує центр мас C із довільною точкою космонавта (рис. 3.7). Таким чином, для опису руху космонавта після удару достатньо знайти швидкість центра мас $\vec{u}_C$ та кутову швидкість обертання $\vec{\omega}$. Ці величини і будемо шукати в задачі. Для розв'язування задачі використаємо закон збереження імпульсу та закон збереження моменту імпульсу.

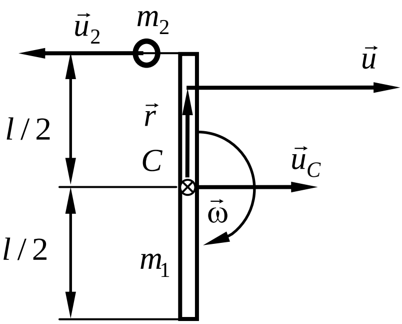


Рисунок 3.7

Згідно із законом збереження повний імпульс системи, що складається з космонавта та м'яча, до удару та після удару не змінюється. Через те що до удару і м'яч, і космонавт перебували у стані спокою, тобто повний імпульс системи дорівнював нулю, можемо записати

$$m_1\vec{u}_C + m_2\vec{u}_2 = 0\,. \tag{2}$$

У співвідношенні (2) враховано, що повний імпульс космонавта (різні точки космонавта рухаються з різною швидкістю) дорівнює добутку маси космонавта на швидкість центра мас. Звідси легко знайти, що швидкість центра мас космонавта після удару дорівнює

$$\vec{u}_C = -(m_2 / m_1)\vec{u}_2\,. \tag{3}$$

Для визначення кутової швидкості обертання космонавта використаємо закон збереження моменту імпульсу. До удару і космонавт, і м'яч перебували у стані спокою. Тому повний момент імпульсу системи до удару дорівнював нулю. Отже, можемо записати

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = 0\,, \tag{4}$$

де $\vec{L}_1$ та $\vec{L}_2$ є моментами імпульсу космонавта та м'яча відносно центра мас C після удару. М'яч вважаємо матеріальною точкою, його момент імпульсу обчислимо виходячи з визначення

$$|\vec{L}_2| = m_2 u_2 l/2\,. \tag{5}$$

У формулі (5) використали, що відстань до лінії, вздовж якої проходить вектор швидкості м'яча, дорівнює $l/2$ (рис. 3.7).

Визначимо момент імпульсу космонавта відносно точки C, яку займав центр мас у момент удару (рис. 3.7). Розглядаємо космонавта як однорідний стрижень. Подамо такий стрижень як сукупність матеріальних точок довжиною dr, швидкість $\vec{u}$ яких визначається співвідношенням (1), положення відносно центра мас C – вектором $\vec{r}$. Елементарний момент імпульсу такої частини стрижня дорівнює

$$\begin{aligned} d\vec{L}_1 &= \left[\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}\right] = \left[\vec{r} \times dm \cdot \left(\vec{u}_C + [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right)\right] = \\ &= \left[\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}_C\right] + \left[\vec{r} \times dm \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Загальний момент імпульсу космонавта визначимо проінтегрувавши (6):

$$\vec{L}_1 = \int \left[\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}_C\right] + \int \left[\vec{r} \times dm \cdot [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right]. \tag{7}$$

Розглянемо перший доданок у (7):

$$\int \left[\vec{r} \times dm \cdot \vec{u}_C\right] = \int \left[\vec{r} dm \times \vec{u}_C\right] = \left[m_1 \vec{r}_C \times \vec{u}_C\right] = 0\,. \tag{8}$$

Тут враховано, що згідно з визначенням центра мас $\vec{r}_C = \int \vec{r} dm / m_1$, а також, що вектор $\vec{r}_C$, який проведено від точки C (усі вектори $\vec{r}$ починаються з точки C) і закінчується в точці C, дорівнює нулю.

Розглянемо другий доданок у (7):

$$\int\left[\vec{r}\times dm\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}]\right]=\int\left[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]\right]dm=\int\left(\vec{\omega}(\vec{r}^{\,2})-\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\right)dm=$$
$$=\vec{\omega}\int r^2dm\,. \tag{9}$$

У цьому співвідношенні використали відому властивість для подвійного векторного добутку $[\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, й те, що вектори $\vec{r}$ та $\vec{\omega}$ є взаємно перпендикулярними (рис. 3.7). Маса частини однорідного стрижня довжиною dr дорівнює

$$dm=dr\cdot m_1/l\,. \tag{10}$$

Підставляємо (8)–(10) в (7) і одержуємо

$$\vec{L}_1=\vec{\omega}\int r^2dm=\vec{\omega}(m_1/l)\int r^2dr=2\vec{\omega}(m_1/l)\int_0^{l/2}r^2dr=\vec{\omega}\cdot m_1l^2/12\,. \tag{11}$$

Тут враховано, що довжина вектора $\vec{r}$ змінюється від 0 до $l/2$ (рис. 3.7) для двох частин стрижня. Далі підставляємо (11) та (5) в (4) і знаходимо

$$m_2u_2(l/2)-\omega\cdot\left(m_1l^2/12\right)=0\,,$$

або

$$\omega=\frac{6m_2u_2}{m_1l}\,. \tag{12}$$

Таким чином, одержали формули (3) та (12), які є розв’язками задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (3) та (12), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$u_C=(m_2/m_1)u_2=(0{,}4/80)\cdot 10\text{ м/с}=0{,}05\text{ м/с}\,,$$
$$\omega=6m_2u_2/(m_1l)=6\cdot 0{,}4\cdot 10/(80\cdot 1{,}8)=0{,}17\text{ с}^{-1}\,.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, якщо маса м'яча дорівнює нулю ($m_2 = 0$). Зрозуміло, що тоді м'яч на космонавта діяти не буде, і тому космонавт свого стану не змінить ($u_C = 0$, $\omega = 0$). Із розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо $m_2 = 0$, то

$$\vec{u}_C = -(m_2 / m_1)\vec{u}_2 = -(0 / m_1)\vec{u}_2 = 0,$$

$$\omega = 6m_2u_2 / (m_1 l) = 6 \cdot 0 \cdot m_2u_2 / (m_1 l) = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $u_C = \dfrac{m_2u_2}{m_1} = 0{,}05$ м/с , $\omega = \dfrac{6m_2u_2}{m_1 l} = 0{,}17$ с$^{-1}$.

3.2 Задачі для самостійного розв'язування

3.1 Куля масою m_1 = 10 кг, що рухається зі швидкістю υ_1 = 4 м/с, зіштовхується з кулею масою m_2 = 4 кг, швидкість υ_2 якої 12 м/с. Вважаючи удар прямим, непружним, знайти швидкості куль після удару у двох випадках: 1) мала куля наздоганяє велику кулю, що рухається в тому самому напрямку; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

3.2 У човні масою m_1 = 240 кг стоїть людина масою m_2 = 60 кг. Човен пливе зі швидкістю υ_1 = 2 м/с. Людина стрибає з човна в горизонтальному напрямку зі швидкістю υ = 4 м/с (відносно човна). Знайти швидкості руху човна й людини після стрибка у двох випадках: 1) людина стрибає вздовж напрямку руху човна; 2) протилежно до напрямку руху човна.

3.3 На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15$ т. Гармата стріляє вгору під кутом $\varphi = 60°$ до горизонту в напрямку залізничної колії. З якою швидкістю υ_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо маса снаряда $m = 20$ кг, а його швидкість $\upsilon_2 = 600$ м/с?

3.4 Снаряд масою $m = 10$ кг мав швидкість $\upsilon = 200$ м/с у верхній точці траєкторії. У цій точці він розірвався на дві частини. Менша частина масою $m_1 = 3$ кг отримала швидкість $u_1 = 400$ м/с у попередньому напрямку. Знайти швидкість u_2 другої, більшої частини після розриву.

3.5 Два ковзанярі масами $m_1 = 80$ кг і $m_2 = 50$ кг, тримаючись за кінці довгого натягнутого шнура, нерухомо стоять на льоду один навпроти іншого. Один із них починає укорочувати шнур, вибираючи його зі швидкістю $\upsilon = 1$ м/с. З якими швидкостями u_1 й u_2 будуть рухатися по льоду ковзанярі? Тертям знехтувати.

3.6 Під дією сталої сили F вагонетка пройшла шлях $s = 5$ м і одержала швидкість $\upsilon = 2$ м/с. Визначити роботу A сили, якщо маса вагонетки дорівнює 400 кг і коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}01$.

3.7 Знайти роботу A підйому вантажу по похилій площині довжиною $l = 2$ м, якщо маса вантажу дорівнює 100 кг, кут нахилу $\varphi = 30°$, коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}1$ й вантаж рухається із прискоренням $a = 1$ м/с^2.

3.8 Під дією сталої сили $F = 400$ Н, спрямованої вертикально вгору, вантаж масою 20 кг був піднятий на висоту 15 м. Яку потенціальну енергію E_p буде мати піднятий вантаж? Яку роботу A виконає сила F ?

3.9 Камінь кинутий вгору під кутом $\varphi = 60°$ до площини горизонту. Кінетична енергія T_0 каменя в початковий момент часу дорівнює 20 Дж. Визначити кінетичну T й потенціальну E_p енергії каменя у вищій точці його траєкторії. Опором повітря знехтувати.

3.10 Вертоліт масою 3 т висить у повітрі. Визначити потужність P, що розвивається двигуном у цьому положенні, для двох значень діаметра d гвинтів: 1) 18 м; 2) 8 м. Під час розрахунку взяти до відома, що гвинти вертольота відкидають вниз циліндричний струмінь повітря діаметром, що дорівнює діаметру гвинтів.

3.11 Матеріальна точка масою $m = 2$ кг рухалася під дією деякої сили, спрямованої уздовж осі X відповідно до рівняння $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $B = -2$ м/с, $C = 1$ м/с^2, $D = -0{,}2$ м/с^3. Знайти потужність P, що розвивається силою у момент часу $t_1 = 2$ с і $t_2 = 5$ с.

3.12 Мотоцикліст їде по горизонтальній дорозі. Яку найменшу швидкість υ він повинен розвинути, щоб, виключивши мотор, проїхати по треку, що має форму «мертвої петлі» радіусом $R = 4$ м? Тертям і опором повітря знехтувати.

3.13 Під час пострілу зі зброї снаряд масою $m_1 = 10$ кг одержує кінетичну енергію $T_1 = 1{,}8$ МДж. Визначити кінетичну енергію T_2 ствола зброї внаслідок віддачі, якщо маса m_2 ствола зброї дорівнює 600 кг.

3.14 Ядро атома розпадається на два осколки масами $m_1 = 1{,}6 \cdot 10^{-25}$ кг і $m_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-25}$ кг. Визначити кінетичну енергію T_2 другого осколка, якщо енергія T_1 першого осколка дорівнює 18 нДж.

3.15 Ковзаняр, стоячи на льоду, кинув уперед гирю масою $m_1 = 5$ кг і внаслідок віддачі покотився назад зі швидкістю $\upsilon_2 = 1$ м/с. Маса ковзаняра $m_2 = 60$ кг.

Визначити роботу A, виконану ковзанярем під час кидання гирі.

3.16 Куля масою $m = 10$ г, що летіла зі швидкістю $\upsilon = 600$ м/с, потрапила в балістичний маятник масою $M = 5$ кг і застрягла в ньому (рис. 3.8). На яку висоту h, відхилившись після удару, піднявся маятник?

3.17 У балістичний маятник масою $M = 5$ кг потрапила куля масою $m = 10$ г і застрягла в ньому (рис. 3.8). Знайти швидкість υ кулі, якщо маятник, відхилившись після удару, піднявся на висоту $h = 10$ см.

3.18 Два вантажі масами $m_1 = 10$ кг і $m_2 = 15$ кг підвішені на нитках довжиною $l = 2$ м так, що вантажі торкаються один одного. Менший вантаж відхиляють на кут $\varphi = 60°$ і відпускають. Визначити висоту h, на яку піднімуться обидва вантажі після удару. Удар вважати непружним.

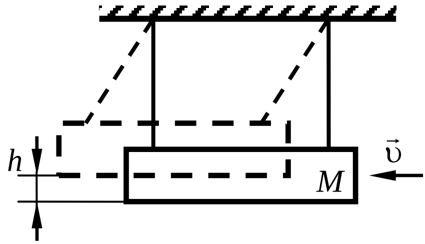


Рисунок 3.8

3.19 Дві кулі масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг рухаються зі швидкостями відповідно $\upsilon_1 = 8$ м/с і $\upsilon_2 = 4$ м/с. Визначити збільшення ΔU внутрішньої енергії куль під час їх непружного зіткнення у двох випадках: 1) менша куля наганяє більшу; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

3.20 Куля масою m_1 летить зі швидкістю $\upsilon_1 = 5$ м/с і вдаряє нерухому кулю масою m_2. Удар прямий, непружний. Визначити швидкість куль після удару, а також частку ω кінетичної енергії кулі, що летить, витраченої на збільшення внутрішньої енергії цих куль.

Розглянути два випадки: 1) $m_1 = 2$ кг, $m_2 = 8$ кг; 2) $m_1 = 8$ кг, $m_2 = 2$ кг.

3.21 Куля масою $m_1 = 2$ кг налітає на нерухому кулю масою $m_2 = 8$ кг. Імпульс p_1 кулі, що рухається, дорівнює $10\ кг \cdot м/с$. Удар куль прямий, пружний. Визначити безпосередньо після удару: 1) імпульси p_1' першої кулі й p_2' другої кулі; 2) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; 3) кінетичні енергії T_1' першої кулі й T_2' другої кулі; 4) зміну ΔT_1 кінетичної енергії першої кулі; 5) частку ω кінетичної енергії, переданої першою кулею другій.

3.22 Куля масою $m_1 = 6$ кг налітає на іншу нерухому кулю масою $m_2 = 4$ кг. Імпульс p_1 першої кулі дорівнює $5\ кг \cdot м/с$. Удар куль прямий, непружний. Визначити безпосередньо після удару: 1) імпульси p'_1 першої кулі й p'_2 другої кулі; 2) зміну Δp_1 імпульсу першої кулі; 3) кінетичні енергії T_1' першої кулі й T_2' другої кулі; 4) зміну ΔT_1 кінетичної енергії першої кулі; 5) частку ω_1 кінетичної енергії, переданої першою кулею другій, й частку ω_2 кінетичної енергії, що залишилася у першої кулі; 6) зміну ΔU внутрішньої енергії куль; 7) частку ω кінетичної енергії першої кулі, що перейшла у внутрішню енергію куль.

3.23 Молот масою $m_1 = 5$ кг ударяє невеликий шматок заліза, що лежить на ковадлі. Маса m_2 ковадла дорівнює 100 кг. Масою шматка заліза знехтувати. Удар непружний. Визначити ККД η удару молота за даних умов.

3.24 Бойок пальового молота масою $m_1 = 500$ кг падає з деякої висоти на палю масою $m_2 = 100$ кг. Знайти ККД η удару бойка, вважаючи удар непружним. Зміною потенціальної енергії палі під час її заглиблення знехтувати.

3.25 Молотком, маса якого $m_1 = 1$ кг, забивають у стіну цвях масою $m_2 = 75$ г. Визначити ККД η удару молотка за даних умов.

3.26 На нерухому кулю налітає зі швидкістю $\upsilon_1 = 2$ м/с інша куля однаковою з нею масою. У результаті зіткнення ця куля змінила напрямок руху на кут $\alpha = 30°$. Визначити: 1) швидкості u_1 й u_2 куль після удару; 2) кут β між вектором швидкості другої кулі й початковим напрямком руху першої кулі. Удар уважати пружним.

3.27 Частинка масою $m_1 = 10^{-24}$ г має кінетичну енергію $T_1 = 9$ нДж. У результаті пружного зіткнення з нерухомою частинкою масою $m_2 = 4 \cdot 10^{-24}$ г вона передає її кінетичну енергію $T_2 = 5$ нДж. Визначити кут α, на який відхилиться частинка від свого первісного напрямку.

3.28 Тіло масою $m = 100$ кг падає без початкової швидкості. Знайти роботу сили опору повітря, яке діятиме на нього перші 3 с та перші 30 с, беручи до уваги, що сила опору повітря пропорційна швидкості руху: $\vec{F} = -r\vec{\upsilon}$, де $r \approx 20$кг/с.

3.29 Двигун гальмівної системи розвиває силу тяги, яка пропорційна часу: $F = -rt$, де r – стала. У момент вмикання двигуна швидкість тіла дорівнювала υ_0. Визначити роботу двигуна за першу секунду гальмування. Маса тіла разом із двигуном m.

3.30 Яка робота A повинна бути виконана для підняття із землі матеріалів для побудови циліндричного димаря висотою $h = 40$ м, зовнішнім діаметром $D = 3$ м та внутрішнім діаметром $d = 2$ м. Густину матеріалу взяти такою, що дорівнює $\rho = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

3.31 Із нескінченності на поверхню Землі падає метеорит масою m = 30 кг. Визначити роботу A, яка буде виконана силами гравітаційного поля Землі. Прискорення вільного падіння у поверхні Землі та її радіус вважати відомими.

3.32 Ланцюг довжиною l = 2 м лежить на столі, одним кінцем звисаючи зі стола. Якщо довжина частини, що звисає, більша за $l/3$, то ланцюг починає ковзати зі столу. Визначити швидкість ланцюга у момент відриву від стола.

3.33 Визначити, яку швидкість має метеорит масою m на відстані r від Сонця, якщо він рухався без початкової швидкості з нескінченності до Сонця. Впливом інших тіл знехтувати.

3.34 Ланцюг масою $m = 1$ кг та довжиною $l =$ 1,4 м висить на нитці, торкаючись поверхні стола своїм нижнім кінцем. Після перепалювання нитки ланцюг впав на стіл. Знайти повний імпульс, який він передав столу.

3.35 Два однакових візки рухаються один за одним за інерцією (без тертя) з однаковими швидкостями $\vec{\upsilon}_0$. На задньому візку знаходиться людина масою m. У деякий момент часу людина стрибнула у передній візок зі швидкістю $\vec{u}$ відносно свого візка. Маючи на увазі, що маса кожного візка дорівнює M, знайти швидкості, з якими будуть рухатися обидва візки після цього.

3.36 Кінетична енергія частинки, що рухається по колу радіусом R, залежить від пройденого шляху s за законом $T = \alpha s^2$, де α – стала. Знайти модуль сили, яка діє на частинку залежно від s.

3.37 Частинка масою m рухається по колу радіусом R з нормальним прискоренням, яке змінюється з часом відповідно до закону $a_n = \alpha t^2$, де α – стала. Знайти залежність від часу потужності усіх сил, що діють на частинку, а також середнє значення цієї потужності за перші t секунд після початку руху.

3.38 Частинка масою $m = 4{,}0$ г рухається у двовимірному полі, де її потенціальна енергія $U = \alpha xy$, $\alpha = 0{,}19$ мДж/м^2. У точці *1* {3,0 м, 4,0 м} частинка мала швидкість $\upsilon_1 = 3{,}0$ м/с, а в точці *2* {5,0 м, –6,0 м} – $\upsilon_2 = 4{,}0$ м/с. Знайти роботу сторонніх сил на шляху між точками *1* й *2*.

3.39 Невелика шайба A зісковзує без початкової швидкості з вершини гладкої гірки висотою H, що має горизонтальний трамплін (рис. 3.9). Якою повинна бути висота h трампліна, щоб шайба пролетіла найбільшу відстань s? Чому вона дорівнює?

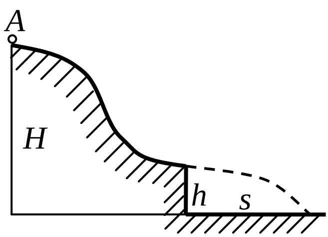


Рисунок 3.9

3.40 Невелика кулька масою $m = 50$ г прикріплена до кінця пружної нитки, коефіцієнт пружності якої $k = 63$ Н/м. Нитку з кулькою відвели у горизонтальне положення, не деформуючи нитку, й обережно відпустили. Коли нитка проходила вертикальне положення, її довжина виявилася $l = 1{,}5$ м й швидкість кульки $\upsilon = 3{,}0$ м/с. Знайти силу натягу нитки у цьому положенні.

3.41 Після пружного зіткнення частинки *1* з частинкою *2*, яка перебувала у спокої, обидві частинки розлетілися симетрично відносно початкового напрямку руху частинки *1*, й кут між їх напрямками розлітання $\theta = 60°$. Знайти відношення мас цих частинок.

3.42 Камінь зісковзує з найвищої точки купола, що має форму півсфери. Яку дугу α по поверхні купола опише камінь, перш ніж відірветься від поверхні купола? Тертям знехтувати.

3.43 Кулька масою $m = 60$ г, що прив'язана до кінця нитки довжиною $l_1 = 1{,}2$ м, обертається з частотою $n_1 = 2\ \text{с}^{-1}$, спираючись на горизонтальну площину. Нитку вкорочують, наближуючи кульку до осі на відстань $l_2 = 0{,}6$ м. З якою частотою буде обертатися кулька? Яку роботу здійснює зовнішня сила, що вкорочує нитку? Тертям знехтувати.

3.44 На горизонтальному диску стоїть людина і тримає у витягнутих руках гирі масою $m = 5$ кг кожна. Диск обертається з частотою $n_1 = 1\ \text{с}^{-1}$, відстань від кожної гирі до осі диска $l = 70$ см. Як зміниться частота обертання і яку роботу виконає людина, якщо вона зігне руки таким чином, що відстань від кожної гирі до осі зменшиться до $l_2 = 20$ см? Момент інерції людини і диска (разом) відносно осі $I = 2{,}5\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

3.45 Маятник у вигляді однорідної кулі, що з'єднана з тонким невагомим стрижнем, довжина якого дорівнює радіусу кулі, може гойдатися навколо горизонтальної осі, що проходить через вільний кінець стрижня. Маса кулі $M = 10$ кг, радіус $R = 15$ см. Об кулю нормально до її поверхні вдаряється інша куля масою $m = 10$ г, що летіла горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 800$ м/с, і застрягає у ній. На який кут відхилиться маятник у результаті зіткнення.

3.46 Однорідний стрижень довжиною $l = 1$ м може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, що проходить через один із його кінців. Маса стрижня $M = 0{,}7$ кг. У точку стрижня, віддалену від осі обертання на відстань $2l/3$, перпендикулярно до його осі абсолютно пружно вдаряється куля масою $m = 5$ г. Визначити швидкість кулі, якщо внаслідок її удару стрижень відхилився на кут $\alpha = 60°$.

4 ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА

Основні формули

Момент інерції матеріальної точки масою m *відносно деякої осі*

$$I = mr^2, \tag{4 а}$$

де r *– відстань від точки до осі.*

Момент інерції твердого тіла відносно осі

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV, \tag{4 б}$$

де ρ *– густина тіла.*

Моменти інерції:

– *суцільного однорідного циліндра (диска) масою* m *і радіусом* R *відносно осі циліндра (диска):*

$$I = mR^2/2; \tag{4 в}$$

– *тонкостінного циліндра (тонкого кільця) масою* m *і радіусом* R *відносно осі, що збігається з віссю циліндра:*

$$I = mR^2; \tag{4 г}$$

– *однорідного стрижня довжиною* l *і масою* m *відносно осі, що проходить через центр його мас перпендикулярно до осі стрижня:*

$$I = ml^2/12; \tag{4 ґ}$$

– *однорідної кулі масою* m *і радіусом* R *відносно осі, що проходить через центр кулі:*

$$I = 2mR^2/5. \tag{4 д}$$

Теорема Штейнера

$$I = I_C + ma^2, \tag{4 е}$$

де I_C *– момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас та є паралельною осі, відносно якої визначається момент інерції* I*;* a *– відстань між осями.*

Момент імпульсу твердого тіла відносно нерухомої осі обертання Z*:*

$$L_z = I\omega_z, \tag{4 є}$$

де I *– момент інерції тіла відносно осі;* ω_z *– кутова швидкість.*

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі Z

$$I\beta_z = M_z, \tag{4 ж}$$

де $\beta_z = d\omega_z / dt$ *– кутове прискорення;* M_z *– алгебраїчна сума моментів зовнішніх сил, що діють на тіло, відносно осі* Z.

Робота зовнішніх сил під час повороту твердого тіла навколо нерухомої осі

$$A = \int M_z d\varphi. \tag{4 з}$$

Кінетична енергія твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$E_k = I\omega^2 / 2. \tag{4 и}$$

Кінетична енергія твердого тіла під час плоского руху

$$E_k = I_C\omega^2 / 2 + m\upsilon_C^2 / 2, \tag{4 і}$$

де υ_C *– швидкість центра мас твердого тіла.*

4.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 4.1

Знайти момент інерції тонкого дротяного кільця радіусом R і масою m відносно осі, що збігається з його діаметром.

Розв'язання

I – ?
R, m

Знайдемо момент інерції тонкого дротяного кільця відносно осі OO' (рис. 4.1), використовуючи визначення моменту інерції твердого тіла (4 б)

$$I = \int r^2 dm\,. \tag{1}$$

Розіб'ємо кільце на елементарні частинки, що характеризуються масою dm та кутом $d\alpha$ (рис. 4.1). Виходячи з того, що маса розподілена по кільцю рівномірно, маса dm, яка знаходиться на дузі, що опирається на кут $d\alpha$, дорівнює

$$dm = \frac{m}{2\pi} d\alpha\,. \tag{2}$$

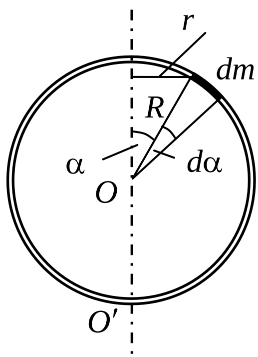


Рисунок 4.1

Як випливає з рис. 4.1, відстань від маси dm до осі обертання OO' визначається співвідношенням

$$r = R\sin\alpha\,, \tag{3}$$

де α – кут між віссю обертання та радіусом, що з'єднується з масою dm (рис. 4.1). Підставляємо (2) та (3) в (1), проводимо інтегрування по всіх елементарних частинках кільця та враховуємо, що кут α змінюється від 0 до 2π (рис. 4.1):

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{m(R\sin\alpha)^2}{2\pi}d\alpha=\frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\alpha}{2}d\alpha=\frac{mR^2}{2}. \quad (4)$$

Таким чином, одержали формулу (4), яка є розв'язком задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса кільця прямує до нуля. Зрозуміло, що тоді і момент інерції кільця буде прямувати до нуля. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $m \to 0$, то $I=\frac{mR^2}{2}\sim m \to 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $I = mR^2/2$.

Приклад 4.2

На однорідний суцільний циліндр масою M і радіусом R щільно намотана невагома нитка, до кінця якої прикріплений тягарець масою m (рис. 4.2). У момент $t=0$ система почала рухатися. Нехтуючи тертям в осі циліндра, знайти залежність від часу: а) модуля кутової швидкості циліндра; б) кінетичної енергії всієї системи.

Розв'язання

$\omega(t)$ – ?
$E_k(t)$ – ?
M, R, m

Під дією сили тяжіння тягарець масою m рухається вертикально вниз. Через нитку тягарець діє на циліндр масою M, це і викликає його обертання. Для того щоб описати вищезазначені процеси, використаємо основне рівняння динаміки обертального руху (4 ж) та другий закон Ньютона.

Як зазначалося вище, на тягарець діє сила тяжіння $m\vec{g}$ та сила натягу нитки $\vec{F}_н$, на однорідний суцільний циліндр – сила натягу нитки $\vec{F}'_н$ (рис. 4.2). Сили натягу нитки рівні за модулем та протилежні за напрямком:

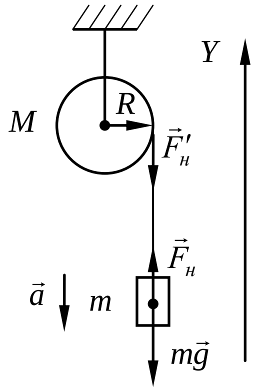


Рисунок 4.2

$$\vec{F}_н = -\vec{F}'_н . \qquad (1)$$

Запишемо другий закон Ньютона для проекцій векторів на вертикальну вісь Y для тягарця:

$$-ma = -mg + F_н . \qquad (2)$$

У співвідношенні (2) враховано, що вектор прискорення $\vec{a}$ спрямований у протилежному напрямку до осі Y.

Момент сили, що діє на суцільний циліндр, визначається силою $\vec{F}'_н$ (її модуль дорівнює $F_н$, див. (1)) та плечем R, тобто він дорівнює $R \cdot F_н$. Тоді основне рівняння динаміки обертального руху для цього циліндра запишемо у вигляді

$$I \cdot \beta = R \cdot F_н , \qquad (3)$$

де β – кутове прискорення; $I = MR^2 / 2$ – момент інерції циліндра.

Прискорення тягарця, прискорення нитки та прискорення точок, що лежать на поверхні циліндра, є однаковими за модулем (розтягнення нитки відсутнє, проковзування нитки відносно циліндричної поверхні відсутнє). Тому використаємо зв’язок між лінійним та кутовим прискоренням

$$a = R\beta . \qquad (4)$$

Система рівнянь (2)–(4) з урахуванням, що момент інерції циліндра дорівнює $I = MR^2/2$, дозволяє знайти лінійне та кутове прискорення:

$$a = \frac{mg}{m + M/2}, \ \beta = \frac{mg}{(m + M/2)R}. \qquad (5)$$

Ураховуючи, що прискорення є сталими у часі (див. формули (5)), тобто рух тіл у системі є рівноприскореним, можемо записати для лінійної та кутової швидкості співвідношення:

$$\upsilon = at = \frac{mgt}{m + M/2}, \ \omega = \beta t = \frac{mgt}{(m + M/2)R}. \qquad (6)$$

У формулах (6) враховано, що початкові швидкості дорівнювали нулю.

Кінетичну енергію системи знаходимо як суму енергій циліндра та тягарця:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}. \qquad (7)$$

Підставляємо у цю формулу (6), враховуємо, що $I = MR^2/2$, і одержимо

$$E_k = \frac{(mgt)^2}{2(m + M/2)}. \qquad (8)$$

Таким чином, одержали формули (6) та (8), які є розв'язками задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункових формул у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса тягарця дорівнює нулю. Зрозуміло, що тоді і сила тяжіння, яка діє на тягарець, також дорівнює нулю. Це означає, що тягарець та циліндр рухатися не будуть. Тобто кутова швидкість обертання та кінетична енергія системи будуть дорівнювати нулю. З розрахункових формул (6) та (8) випливає такий самий результат. Якщо $m=0$, то

$$\omega=\frac{mgt}{(m+M/2)R}=\frac{0}{(0+M/2)R}=0,$$

$$E_k=\frac{(mgt)^2}{2(m+M/2)}=\frac{0}{2(0+M/2)}=0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $\omega=mgt/(R(m+M/2))$;

б) $E_k=(mgt)^2/(2m+M)$.

Приклад 4.3

Людина масою m_1 стоїть на краю горизонтального однорідного диска масою m_2, який може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр. У деякий момент людина почала рухатися по краю диска, перемістилася на кут φ' відносно диска і зупинилася. Нехтуючи розмірами людини, знайти кут φ, на який повернувся диск на момент зупинки людини.

Розв'язання

φ – ?
m_1, m_2, φ'

Для розв'язування задачі використаємо закон збереження моменту імпульсу (3 і) та закон додавання швидкостей у ньютонівській механіці (1 ж).

Вважаємо, що людина перед початком руху перебувала у точці A (рис. 4.3). Якщо вона почне рухатися по краю диска зі швидкістю υ_1 відносно землі, то і диск почне обертатися. Швидкість обертання краю диска відносно землі у точці, де перебуває людина, буде дорівнювати υ_d. Позначимо через υ_1' швидкість людини відносно диска (рухомої системи відліку). Тоді згідно із законом додавання швидкостей можемо записати

$$\upsilon_1 = \upsilon_1' - \upsilon_d. \quad (1)$$

У співвідношенні (1) враховано, що напрямок вектора швидкості $\vec{\upsilon}_d$ є протилежним до напрямків швидкостей $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_1'$ (рис. 4.3).

Через деякий час t людина зупиниться і опиниться у точці C (рис. 4.3). Диск також зупиниться і точка A диска перейде в точку A'. Кут, що відповідає переміщенню людини відносно диска, дорівнює $\varphi' = \angle A'OC$, а кут, на який за цей час повернеться диск, – $\varphi = \angle A'OA$. Ці кути пов'язані зі швидкостями таким чином:

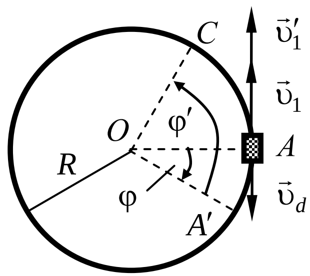


Рисунок 4.3

$$\varphi' = \upsilon_1' t / R, \ \varphi = \upsilon_d t / R, \quad (2)$$

де R – радіус диска.

Результуючий зовнішній момент сил, який діє на систему, що складається з людини та диска, дорівнює нулю. Тому згідно із законом збереження моменту імпульсу можемо записати:

$$m_1 \upsilon_1 R - I \cdot \omega = 0, \quad (3)$$

де $I = m_2 R^2 / 2$ – момент інерції диска; $\omega = \upsilon_d / R$ – кутова швидкість диска. Використовуючи ці формули, рівняння (3) перетворимо до вигляду

$$m_1 \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_d / 2 = 0. \quad (4)$$

Із рівнянь (1) та (4) виключимо υ_1 і отримуємо

$$\upsilon_1' = \upsilon_d\left(1 + m_2/\left(2m_1\right)\right). \tag{5}$$

Тоді зі співвідношень (2) та (5) знаходимо

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\upsilon_d}{\upsilon_1'} = \frac{1}{1 + m_2/\left(2m_1\right)}$$

або

$$\varphi = \frac{\varphi'}{1 + m_2/\left(2m_1\right)}. \tag{6}$$

Таким чином, одержали співвідношення (6), яке є розв'язком задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли маса диска прямує до нескінченності $m_2 \to \infty$. Зрозуміло, що в цьому випадку диск рухатися не буде і кут, на який повернеться диск, буде дорівнювати нулю. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $m_2 \to \infty$, то $\varphi = \dfrac{\varphi'}{1 + m_2/\left(2m_1\right)} \to \dfrac{\varphi'}{1 + \infty} = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\varphi = \varphi'/(1 + m_2/\left(2\mathrm{m}_1\right))$.

Приклад 4.4

Однорідна куля масою $m = 5{,}0$ кг скочується без ковзання по похилій площині, що утворює кут $\alpha = 30^0$ з горизонтом. Знайти кінетичну енергію кулі через $t = 1{,}6$ с після початку руху.

Розв'язання

E_k – ?	Під час руху кулі сила тертя спокою роботи не виконує, повна механічна енергія кулі залишається сталою. Тому для розв'язування задачі використаємо закон збереження повної механічної енергії.
$m = 5{,}0$ кг, $\alpha = 30^0$, $t = 1{,}6$ с	

У початковий момент у точці A (рис. 4.4) кінетична енергія кулі дорівнювала нулю, а потенціальна – mgh. У кінцевому стані у точці B потенціальна енергія стає такою, що дорівнює нулю, натомість з'являється кінетична енергія

$$E_k = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}, \qquad (1)$$

де υ_C – швидкість центра мас кулі у точці B; I_C – момент інерції кулі відносно центра мас; ω – кутова швидкість обертання у точці B. Через те що ковзання відсутнє, υ_C та ω пов'язані співвідношенням $\upsilon_C = \omega R$, де R є радіусом кулі. Підставимо у вираз для кінетичної енергії $\omega = \upsilon_C / R$ та $I_C = (2/5)mR^2$ (момент інерції кулі) та одержимо

$$E_k = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{m\upsilon_C^2}{5} = \frac{7m\upsilon_C^2}{10}. \qquad (2)$$

Відповідно до закону збереження повної механічної енергії повна енергія на початку (точка A) і вкінці (точка B) скочування кулі повинна буди однаковою:

$$E_k = \frac{7m\upsilon_C^2}{10} = mgh. \qquad (3)$$

Куля скочується з похилої площини рівноприскорено. Позначимо через a_C прискорення центра мас кулі. Тоді швидкість υ_C, якої набуде куля у точці B, та відстань l, яку пройде куля від початкового (точка A) до кінцевого (точка B) положень, будуть дорівнювати:

$$\upsilon_C = a_C t\,,\ l = a_C t^2/2\,. \tag{4}$$

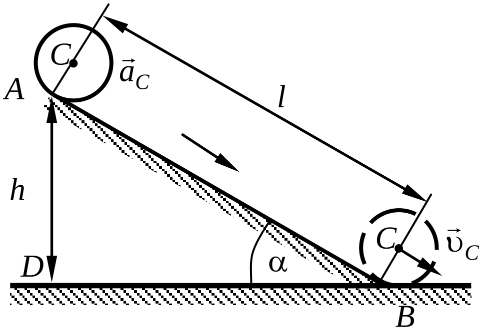


Рисунок 4.4

Також із рисунка 4.4 випливає, що $l = h/\sin\alpha$. Підставляємо це співвідношення в (4) і одержуємо

$$\frac{h}{\sin\alpha} = \frac{a_C t^2}{2} \Rightarrow a_C = \frac{2h}{t^2\sin\alpha} \Rightarrow \upsilon_C = a_C t = \frac{2h}{t\sin\alpha}\,. \tag{5}$$

Підставляємо одержаний вираз для υ_C в (3) і знаходимо рівняння для визначення h, а отже, і шуканої кінетичної енергії:

$$\frac{7m}{10}\left(\frac{2h}{t\sin\alpha}\right)^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{5}{14}g(t\sin\alpha)^2 \Rightarrow$$

$$E_k = mgh = \frac{5m}{14}(gt\sin\alpha)^2\,. \tag{6}$$

Таким чином, одержали співвідношення (6), яке є розв’язком задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $E_k = \dfrac{5 \cdot 5{,}0}{14}\left(9{,}81 \cdot 1{,}6 \cdot \sin 30°\right)^2 \approx 110$ Дж.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли кут нахилу похилої площини дорівнює нулю: $\alpha = 0$. Зрозуміло, що тоді куля рухатися не буде, і її кінетична енергія дорівнюватиме нулю. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\alpha = 0$, то

$$E_k = \frac{5m}{14}\left(gt\sin\alpha\right)^2 = \frac{5m}{14}\left(gt\sin 0\right)^2 = 0\,.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $E_k = \left(5m/14\right)\cdot\left(gt\sin\alpha\right)^2 = 110$ Дж.

Приклад 4.5

На який кут потрібно відхилити однорідний стрижень довжиною $l = 1$ м, підвішений за верхній кінець, щоб його нижній кінець під час проходження положення рівноваги мав швидкість $\upsilon = 4$ м/с.

Розв'язання

$\alpha - ?$
$l = 1$ м,
$\upsilon = 4$ м/с

Для розв'язування задачі використаємо закон збереження повної механічної енергії.

У вихідному стані кінетична енергія стрижня дорівнює нулю, а потенціальна енергія визначається положенням центра мас C стрижня (рис. 4.5):

$$E_{p1} = mgh\,, \qquad (1)$$

де m – маса стрижня; h – висота точки C відносно точки C' (центр мас стрижня в момент проходження положення рівноваги). Висоту h знайдемо як різницю довжин $h = |OC'| - |OK|$ (рис. 4.5, $|OK|$ визначимо з прямокутного трикутника ΔKOC):

$$h = (l/2)(1 - \cos\alpha). \quad (2)$$

Підставимо одержану формулу в (1) і знайдемо

$$E_{p1} = mgl(1 - \cos\alpha)/2. \quad (3)$$

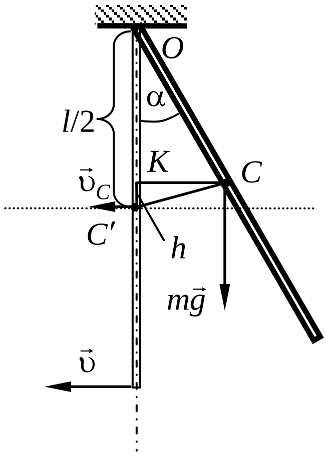


Рисунок 4.5

У кінцевому стані потенціальна енергія дорівнює нулю, а кінетична енергія стрижня визначається співвідношенням

$$E_{k2} = \frac{m\upsilon_C^2}{2} + \frac{I_C\omega^2}{2}, \quad (4)$$

де ω та υ_C – кутова швидкість та швидкість центра мас стрижня в момент проходження положення рівноваги; I_C – момент інерції стрижня відносно центра мас. Точка O є нерухомою. Тому швидкості ω, υ_C та υ (швидкість нижнього кінця стрижня під час проходження положення рівноваги) пов’язані між собою співвідношеннями:

$$\upsilon_C = \omega \cdot l/2, \; \upsilon = \omega \cdot l. \quad (5)$$

Із формул (5) випливає, що $\omega = \upsilon/l$, $\upsilon_C = \omega \cdot l/2 = \upsilon/2$. Підставляємо їх у (4), а також візьмемо до уваги, що момент інерції стрижня відносно центра мас дорівнює $I_C = ml^2/12$, і одержимо

$$E_{k2}=\frac{m\upsilon^2}{8}+\frac{m\upsilon^2}{24}=\frac{m\upsilon^2}{6}. \qquad (6)$$

Відповідно до закону збереження повної механічної енергії повна енергія стрижня у початковому і кінцевому станах повинна бути однаковою. Тоді, виходячи з (3) та (6), одержуємо

$$E_{p1}=E_{k2},\ \frac{mgl(1-\cos\alpha)}{2}=\frac{m\upsilon^2}{6}. \qquad (7)$$

Звідси знаходимо шуканий кут відхилення:

$$\cos\alpha=1-\upsilon^2/(3gl),\ \alpha=\arccos\left(1-\upsilon^2/(3gl)\right). \qquad (8)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (8), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\alpha=\arccos\left(1-\frac{\upsilon^2}{3gl}\right)=\arccos\left(1-\frac{4^2}{3\cdot 9{,}81\cdot 1}\right)=\ 1{,}10\ \text{рад}=62{,}8°.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість нижнього кінця стрижня під час проходження положення рівноваги наближається до нуля $\upsilon\to 0$. Зрозуміло, що кут α, на який потрібно для цього відхилити стрижень, теж буде наближатися до нуля. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\upsilon\to 0$, то

$$\alpha=\arccos\left(1-\frac{\upsilon^2}{3gl}\right)\to\arccos(1-0)=\arccos(1)=0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\alpha=\arccos\left(1-\upsilon^2/(3gl)\right)=62{,}8°$.

4.2 Задачі для самостійного розв’язування

4.1 Через блок у вигляді диска масою $m = 1$ кг перекинуто невагому нитку, до кінців якої підвішені вантажі $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 3$ кг. Знайти прискорення вантажів і сили натягу нитки.

4.2 До одного кінця мотузки, перекинутої через блок, підвішений вантаж масою $m_1 = 1$ кг. На другий кінець мотузки діє сила $F = 3t + 2t^3$, де t – час. Блок має форму диска масою $m_2 = 3$ кг. З яким прискоренням рухається вантаж через $t_1 = 1$ с і $t_2 = 2$ с від початку дії сили?

4.3 Циліндр масою m і радіусом R обертається навколо своєї осі за законом $\varphi = A\sin\omega t$. Як залежить від часу момент сили, що діє на циліндр, і момент імпульсу циліндра?

4.4 Визначити прискорення центра кулі, яка скочується з похилої площини. Маса кулі $m = 100$ г, похила площина утворює з горизонтом кут $\alpha = \pi/6$. Чому дорівнює сила тертя, що діє на кулю, та робота цієї сили? Проковзування відсутнє.

4.5 Куля, швидкість якої $\upsilon_0 = 10$ м/с, закочується без проковзування на похилу площину. На яку висоту підніметься куля?

4.6 Якір двигуна обертається з частотою $n = 2800$ хв$^{-1}$. Визначити обертальний момент M, якщо двигун має потужність $P = 1{,}2$ кВт, коли ККД $\eta = 0{,}72$.

4.7 Диск починає обертатися зі сталим кутовим прискоренням $\beta = 4{,}5 \cdot 10^3$рад/с^2 і через $t_1 = 2$ с його момент імпульсу $L = 250$ кг · м^2/с. Знайти кінетичну енергію шківа через $t_2 = 1$ с після початку обертання.

4.8 Яку потужність розвиває білка, що біжить всередині колеса? Маса білки $m_1 = 150$ г, маса колеса

$m_2 = 200$ г. Швидкість білки відносно колеса $\upsilon = 2$ м/с, радіус колеса $R = 15$ см, момент сили тертя $M = 0{,}01$ Н · м. Білку вважати матеріальною точкою.

4.9 Через блок масою $m = 0{,}4$ кг, що має форму диска, перекинуто шнур. До кінців шнура прив'язали вантажі масами $m_1 = 0{,}1$ кг та $m_2 = 0{,}2$ кг. Знайти співвідношення між кінетичними енергіями поступального і обертального рухів тіл.

4.10 Обчислити момент інерції I_z молекули NO_2 відносно осі Z, що проходить через центр мас молекули перпендикулярно до площини, у якій містяться ядра атомів. Між’ядерна відстань d цієї молекули дорівнює 0,118 нм, валентний кут $\alpha = 140°$.

4.11 Вал у вигляді суцільного циліндра масою $m_1 = 10$ кг насаджений на горизонтальну вісь. На циліндр намотаний шнур, до вільного кінця якого підвішена гиря масою $m_2 = 2$ кг. Знайти прискорення, з яким буде опускатися гиря.

4.12 Маховик у вигляді диска масою $m = 50$ кг і радіусом $r = 20$ см під дією зовнішнього впливу почав обертатися з частотою $n = 480$ хв$^{-1}$. Після того як зовнішній вплив припинився, маховик внаслідок сил тертя зупинився. Знайти момент сил тертя, вважаючи його сталим, для двох випадків: 1) маховик зупинився через $t = 50$ с; 2) маховик до повної зупинки зробив $N = 200$ обертів.

4.13 Три маленьких кульки масою $m = 10$ г кожна розміщені у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $a = 20$ см і закріплені між собою невагомими стрижнями. Визначити момент інерції I системи відносно осі: 1) яка перпендикулярна до площини трикутника та проходить через центр описаного кола; 2) яка лежить у площині трикутника та проходить через центр описаного кола й одну з вершин трикутника.

4.14 Визначити момент інерції I тонкого однорідного стрижня довжиною $l = 30$ см і масою $m = 100$ г відносно осі, перпендикулярній до стрижня та проходить через: 1) його кінець; 2) його середину; 3) точку, що стоїть від кінця стрижня на 1/3 його довжини.

4.15 Визначити момент інерції I тонкого однорідного стрижня довжиною $l = 60$ см та масою $m = 100$ г відносно осі, перпендикулярній до нього і проходить через точку стрижня, віддалену на $a = 20$ см від одного з його кінців.

4.16 Обчислити момент інерції I дротяного прямокутника зі сторонами $a = 12$ см та $b = 16$ см відносно осі, що лежить у площині прямокутника та проходить через середини малих сторін. Маса рівномірно розподілена по довжині дроту з лінійною густиною $\tau = 0{,}1$ кг/м.

4.17 Діаметр диска $d = 20$ см, маса $m = 800$ г. Визначити момент інерції I диска відносно осі, що проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно до площини диска.

4.18 Знайти момент інерції I плоскої однорідної прямокутної пластини масою $m = 800$ г відносно осі, що збігається з однією з її сторін, якщо довжина a іншої сторони дорівнює 40 см.

4.19 Визначити момент інерції I тонкої плаской пластини зі сторонами $a = 10$ см та $b = 20$ см відносно осі, що проходить через центр мас пластини паралельно більшій стороні. Маса пластини рівномірно розподілена по її площі з поверхневою густиною $\sigma = 1{,}2$ кг/м^2.

4.20 Маховик, момент інерції якого $I = 100$ кг · м^2, обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 2$ рад; $B = 32$ рад/с, $C = -4$ рад/с^2. Знайти середню потужність $\langle P\rangle$, яку розвивають сили, що діють на маховик за час його обертання від $t = 0$ до зупинки.

4.21 Маховик обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 2$ рад, $B = 16$ рад/с, $C = -2$ рад/с^2. Момент інерції маховика $I = 100$ кг · м^2. Знайти закони, за якими змінюються обертальний момент сили M та потужність P. Чому дорівнює потужність у момент часу $t = 3$ с?

4.22 Маховик у вигляді диска масою $m = 80$ кг і радіусом $R = 30$ см перебуває у стані спокою. Яку роботу A_1 необхідно виконати, щоб надати маховику частоту $n = 10$ с$^{-1}$? Якою буде ця робота A_2, якщо, не змінюючи маси диска, вдвічі збільшити його радіус (зрозуміло, що товщина диска буде меншою)?

4.23 Маховик, момент інерції I якого дорівнює 40 кг·м^2, почав обертатися рівноприскорено зі стану спокою під дією моменту сили $M = 20$ Н · м. Обертання відбувалося упродовж $t = 10$ с. Визначити кінетичну енергію, якої набуде маховик.

4.24 Куля котиться без проковзування по горизонтальній поверхні. Повна кінетична енергія T кулі дорівнює 14 Дж. Визначити кінетичну енергію T_1 поступального та T_2 обертального рухів кулі.

4.25 Скільки часу t буде скочуватися без проковзування обруч із похилої площини довжиною $l = 2$ м та висотою $h = 10$ см?

4.26 Обчислити момент інерції: 1) мідного однорідного диска відносно осі симетрії, перпендикулярної до площини диска, якщо його товщина $b = 2$ мм і радіус $R = 100$ мм; 2) однорідного суцільного конуса відносно осі симетрії, якщо маса конуса m і радіус основи R.

4.27 Горизонтальний тонкий однорідний стрижень AB

масою m і довжиною l може вільно обертатися навколо вертикальної осі, яка проходить через його кінець A. У деякий момент часу на кінець стрижня B почала діяти постійна сила $\vec{F}$. Вектор сили спрямований перпендикулярно до початкового положення стрижня і лежить у горизонтальній площині. Знайти кутову швидкість стрижня як функцію його кута повороту φ відносно початкового положення.

4.28 Однорідний диск радіусом R розкрутили до кутової швидкості ω і обережно поклали основою на горизонтальну поверхню. Скільки часу диск буде обертатися на поверхні, якщо коефіцієнт тертя μ? Тиск диска на поверхню вважати рівномірним.

4.29 Маховик із початковою кутовою швидкістю ω_0 починають гальмувати сили, момент яких відносно осі маховика пропорційний кореню квадратному з його кутової швидкості. Знайти середню кутову швидкість маховика за весь час гальмування.

4.30 Однорідна куля масою m і радіусом R скочується без проковзування по похилій площині, що утворює кут α з горизонтом. Знайти: 1) значення коефіцієнта тертя, коли ковзання не буде; 2) кінетичну енергію кулі через t секунд після початку руху.

4.31 Тонкі невагомі нитки щільно намотані на кінці однорідного суцільного циліндра масою m. Вільні кінці ниток прикріплені до стелі кабіни ліфта. Кабіна почала підніматися з прискоренням a_0. Знайти прискорення циліндра відносно кабіни і силу, з якою циліндр діє (через нитки) на стелю.

4.32 На гладкій (тертя відсутнє) горизонтальній поверхні лежить дошка масою m_1, а на ній – однорідна куля масою m_2. До дошки приклали сталу горизонтальну силу F. З яким прискоренням буде рухатися дошка і центр кулі за умови відсутності проковзування між ними?

4.33 Суцільному однорідному циліндру масою m і радіусом R надали кутової швидкості ω_0, а потім поклали боковою поверхнею на горизонтальну площину. Коефіцієнт тертя між циліндром і площиною μ. Знайти: 1) час, упродовж якого рух циліндра буде відбуватися з проковзуванням; 2) повну роботу сили тертя ковзання, що діє на циліндр.

4.34 Однорідна куля радіусом r скочується без проковзування з вершини сфери радіусом R. Знайти кутову швидкість кулі після відриву від сфери. Початкова швидкість кулі дорівнює нулю.

4.35 Гладкий суцільний стрижень AB масою M і довжиною l вільно обертається з кутовою швидкістю ω_0 в горизонтальній площині навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його кінець A. З точки A починає ковзати по стрижню невеличка муфта масою m. Знайти швидкість муфти відносно стрижня у момент часу, коли вона досягне його кінця.

4.36 На гладкій горизонтальній поверхні лежить однорідний стрижень масою $m = 5$ кг і довжиною $l = 90$ см. По одному з кінців стрижня було здійснено удар у горизонтальному напрямку, перпендикулярному до стрижня, внаслідок якого йому було надано імпульсу p. Знайти силу, з якою одна половина стрижня буде діяти на іншу в процесі руху.

4.37 Однорідна тонка квадратна пластинка зі стороною l і масою M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що збігається з однією з її сторін. У центр пластинки перпендикулярно до неї пружно вдаряється кулька масою m, що летіла зі швидкістю υ.

Знайти горизонтальну складову результуючої сили, з якою вісь буде діяти на пластинку після зіткнення.

4.38 Людина масою m_1 стоїть на краю горизонтального однорідного диска масою m_2 і радіусом R, який може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що проходить через його центр. У деякий момент людина почала рухатися по краю диска, перемістилася на кут φ відносно диска і зупинилася. У процесі руху швидкість людини відносно диска залежала від часу за законом $\upsilon(t)$. Нехтуючи розмірами людини, знайти момент сили відносно осі обертання, з яким людина діяла на диск у процесі руху.

4.39 Дві кульки радіусами $r_1 = r_2 = 5$ см і масами $m_1 = m_2 = 1$ кг закріплені на кінцях тонкого стрижня, маса якого набагато менша за маси кульок. Відстань між центрами кульок $R = 0{,}5$ м. Знайти: 1) момент інерції I_1 цієї системи відносно осі, що проходить через середину стрижня перпендикулярно до його довжини; 2) момент інерції I_2 цієї самої системи відносно тієї самої осі, вважаючи кульки матеріальними точками, маси яких зосереджені в їх центрах; 3) відносну похибку, якої ми припускаємося під час обчислення моменту інерції цієї системи, замінюючи величину I_1 на I_2.

4.40 Однорідний стрижень довжиною $l = 1$ м і масою $m = 0{,}5$ кг обертається в горизонтальній площині навколо вертикальної осі, що проходить крізь середину стрижня. З яким кутовим прискоренням обертається стрижень, якщо момент сили дорівнює $M = 9{,}81 \cdot 10^{-2}$ Н · м.

4.41 Однорідний диск радіусом $R = 0{,}2$ м і масою $m = 0{,}5$ кг обертається навколо осі, що проходить через його центр. Залежність кутової швидкості обертання диска від часу подане рівнянням $\omega = A + Bt$, де $B = 8$ рад/с^2.

Знайти величину дотичної сили, що прикладена до обода диска. Тертям знехтувати.

4.42 Маховик, момент інерції якого дорівнює $I = 63{,}6$ кг · м^2, обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega = 31{,}4$ рад/с. Знайти гальмівний момент M, під дією якого маховик зупиниться через $t = 20$ с.

4.43 Обруч і диск мають однакову масу та котяться без проковзування з однаковою лінійною швидкістю υ. Кінетична енергія обруча $T_1 = 4$ Дж. Знайти кінетичну енергію диска.

4.44 Диск масою $m = 0{,}1$ кг і діаметром 60 см обертається навколо осі, що проходить через його центр перпендикулярно до його площини, здійснюючи 20 обертів за одну хвилину. Яку роботу необхідно виконати, щоб зупинити диск?

4.45 Кінетична енергія вала, що обертається зі сталою швидкістю, дорівнює 60 Дж. Вал робить 5 обертів за хвилину. Знайти момент імпульсу цього вала.

4.46 Хлопчик котить обруч по горизонтальному шляху зі швидкістю 7,2 км/год. На яку відстань може вкотитися обруч на похилу площину за рахунок його кінетичної енергії? Нахил площини дорівнює 10 м на кожні 100 м шляху.

4.47 З якої мінімальної висоти повинен з'їхати велосипедист, щоб за інерцією проїхати доріжку, яка має форму «мертвої петлі» радіусом $R = 3$ м, і не відірватися від доріжки у верхній точці петлі? Маса велосипедиста разом із велосипедом $m = 75$ кг, маса коліс, які можна вважати обручами, $m_1 = 3$ кг.

4.48 Знайти лінійні швидкості руху центрів тяжіння: 1) кулі; 2) диска і 3) обруча, що скочуються без ковзання з похилої площини. Висота площини $h = 0{,}5$ м, початкова швидкість усіх тіл дорівнює нулю. Порівняти одержані швидкості зі швидкістю тіла, що зісковзує з цієї площини, коли сили тертя відсутні.

4.49 Два циліндри: алюмінієвий (суцільний) та свинцевий (порожнистий) – однакового радіуса $R = 6$ см і однакової маси $m = 0{,}05$ кг – без початкової швидкості скочуються без проковзування з похилої площини. Висота площини $h = 0{,}5$ м, кут нахилу $\alpha = 30^0$. Визначити час, за який кожний циліндр скотиться з площини.

4.50 Колесо, що має момент інерції $I = 245$ кг $\cdot$ м^2, обертається, виконуючи 20 обертів за секунду. Після того як на колесо перестав діяти обертальний момент, воно зупинилося, зробивши 1000 обертів. Знайти: 1) момент сил тертя; 2) час, що пройшов після того, як на колесо перестав діяти обертальний момент до того, як воно зупинилося.

4.51 Маховик обертається зі сталою швидкістю, здійснюючи $n =$ 10 об/с. Його кінетична енергія 80 Дж. За який час обертальний момент сил $M = 50$ Н $\cdot$ м збільшить кутову швидкість маховика в два рази?

4.52 До обода диска масою 5 кг прикладена стала дотична сила 20 Н. Яку кінетичну енергію буде мати диск через 5 с після початку дії сили?

4.53 Вздовж дотичної до шківа маховика, який має форму диска діаметром $D = 75$ см і масою $m = 40$ кг, прикладена сила $F = 1$ кН. Визначити кутове прискорення та частоту обертання маховика через час $t = 10$ с після початку дії сили, якщо радіус шківа $r = 12$ см. Тертям знехтувати.

4.54 Нитка з прив'язаними до її кінців вантажами масами $m_1 = 50$ г та $m_2 = 60$ г перекинута через блок діаметром $D = 4$ см. Визначити момент інерції блока, якщо під дією сили тяжіння він набув кутового прискорення $\beta = 1{,}5$ рад/с^2. Тертям знехтувати.

4.55 Визначити момент сили M, який необхідно прикласти до блока, що обертається з частотою $n = 12$ с$^{-1}$, щоб він зупинився упродовж часу $t = 8$ с. Діаметр блока $D = 30$ см, масу блока $m = 6$ кг можна вважати рівномірно розподіленою по ободу.

4.56 На суцільний циліндр масою $m = 10$ кг, розміщений на горизонтальній площині, намотана невагома нитка. До кінця нитки прикладена паралельно горизонтальній площині стала сила $F = 30$ Н, під дією якої циліндр котиться без проковзування. Визначити прискорення центра мас та силу тертя.

4.57 На суцільний циліндр масою M та радіусом R намотана невагома нитка, перекинута через невагомий блок (рис. 4.6). До кінця нитки прив'язано вантаж масою m. Циліндр може без проковзування рухатися по горизонтальній площині. Визначити прискорення центра мас циліндра, прискорення вантажу та силу натягу нитки.

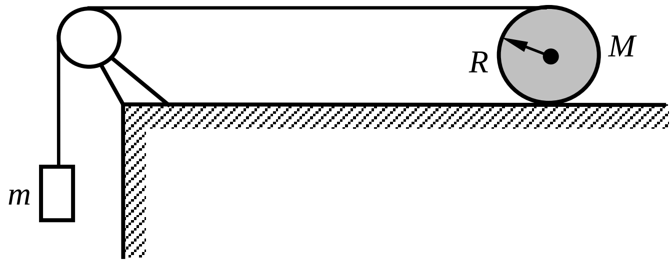


Рисунок 4.6

4.58 Маховик масою M має форму диска радіусом R і може обертатися навколо своєї осі, орієнтованої горизонтально (рис. 4.7). На циліндричній поверхні диска закріплено невагому нитку, до другого кінця якої підвішено вантаж масою m. Вантаж вертикально піднімають на висоту h, а потім він вільно падає. Внаслідок удару маховик починає обертатися. Визначити кутову швидкість маховика.

4.59 Дві краплі ртуті радіусами $R_1 = 1$ мм і $R_2 = 2$ мм обертаються з кутовими швидкостями $\omega_1 = 5$ рад/с і $\omega_2 = 4$ рад/с відповідно. Кутові швидкості паралельні одна одній. Визначити кутову швидкість краплі, що утворилася внаслідок злиття цих двох крапель.

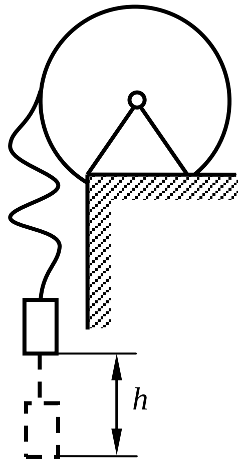


Рисунок 4.7

4.60 Платформа у вигляді диска радіусом $R = 1{,}5$ м і масою $m_1 = 180$ кг обертається за інерцією навколо вертикальної осі з частотою $n = 10$ хв$^{-1}$. У центрі платформи стоїть людина масою $m_2 = 60$ кг. Яку лінійну швидкість відносно підлоги приміщення буде мати людина, якщо вона перейде на край платформи?

4.61 Однорідна тонка квадратна пластинка зі стороною l і масою M може вільно обертатися навколо нерухомої вертикальної осі, що збігається з однією з її сторін. У центр пластинки перпендикулярно до неї пружно вдаряється кулька масою m, що летіла зі швидкістю υ. Знайти швидкість кульки u після зіткнення.

4.62 Два горизонтальних диски вільно обертаються навколо горизонтальної осі, що проходить через їх центри. Моменти інерції дисків відносно цієї осі дорівнюють I_1 та I_2, а кутові швидкості – ω_1 та ω_2. Після падіння верхнього диска на нижній обидва диски завдяки тертю між ними почали через деякий час обертатися як єдине ціле. Знайти: 1) спільну кутову швидкість обертання дисків; 2) роботу, яку виконали сили тертя.

4.63 Куля масою $m = 1$ кг, що котиться без проковзування, вдаряється об стінку і відскакує від неї. Швидкість кулі до зіткнення $\upsilon_1 = 10$ м/с, після – $\upsilon_2 = 8$ м/с. Знайти кількість теплоти, що виділяється під час зіткнення.

4.64 Однорідний стрижень довжиною 85 см підвішений на горизонтальній осі, що проходить через верхній кінець стрижня. Яку найменшу швидкість необхідно надати нижньому кінцю стрижня, щоб він зробив повний оберт?

4.65 Олівець, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову та лінійну швидкості буде мати наприкінці падіння: 1) середина олівця; 2) верхній його кінець? Довжина олівця 15 см.

4.66 Платформа у вигляді диска діаметром $D = 3$ м і масою $m_1 = 180$ кг може обертатися навколо вертикальної осі. З якою кутовою швидкістю буде обертатися платформа, якщо по її краю піде людина масою $m_2 = 80$ кг зі швидкістю $u_2 = 1{,}8$ м/с відносно платформи?

4.67 Платформа у вигляді диска масою $m_1 = 280$ кг може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою $m_2 = 80$ кг. На який кут повернеться платформа, якщо людина піде вздовж краю платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну (на платформі) точку?

4.68 Горизонтальна платформа масою 100 кг обертається навколо горизонтальної осі, що проходить крізь її центр, роблячи 10 об/хв. Яку роботу виконає людина масою 60 кг, коли перейде від краю платформи до її центра? Радіус платформи 1,5 м.

4.69 Горизонтальна платформа, що має вигляд круглого однорідного диска масою 80 кг і радіусом 1 м, обертається здійснюючи 20 об/хв. У центрі платформи стоїть людина і тримає у розведених руках вантажі. Яку частоту обертання матиме платформа, якщо людина, опустивши руки, зменшить свій момент інерції від 2,94 до 0,98 кг · м^2? У скільки разів збільшиться кінетична енергія платформи?

4.70 Однорідний стрижень довжиною $l = 2$ м та масою $m_c = 6$ кг може вільно обертатися відносно горизонтальної осі, що проходить через один із його кінців. В інший кінець абсолютно непружно вдаряється куля масою $m = 10$ г, що летіла перпендикулярно до стрижня і його осі зі швидкістю $\upsilon_0 = 1 \cdot 10^3$ м/с. Визначити кінетичну енергію стрижня після зіткнення. На який кут після зіткнення підніметься стрижень?

4.71 На краю платформи у вигляді диска, що обертається по інерції навколо вертикальної осі з частотою $n_1 = 8$ хв$^{-1}$, стоїть людина. Коли людина перейшла у центр платформи, остання почала обертатися з частотою $n_2 = 10$ хв$^{-1}$. Визначити масу m_2 платформи. Маса людини $m_1 = 70$ кг.

4.72 Однорідний диск радіусом $R = 10$ см, що мав початкову кутову швидкість $\omega_0 = 50$ рад/с, кладуть основою на поверхню. Скільки обертів диск здійснить до зупинки, якщо коефіцієнт тертя між основою диска та поверхнею $\mu = 0,1$?

5 МЕХАНІКА РІДИН

Основні формули

Теорема про нерозривність потоку

$$S_1 \cdot \upsilon_1 = S_2 \cdot \upsilon_2, \qquad (5\text{ а})$$

де S_1, S_2 *– площі поперечного перерізу потоку в двох різних місцях;* υ_1, υ_2 *– відповідно швидкості течії.*

У стаціонарному потоці ідеальної рідини вздовж довільної лінії трубки течії виконується рівняння Бернуллі

$$\rho\upsilon^2 / 2 + \rho g h + p = const, \qquad (5\text{ б})$$

де p *– статичний тиск рідини;* ρ *– густина рідини;* υ *– швидкість течії;* h *– висота рідини над заданим рівнем.*

Формула Торрічеллі, що визначає швидкість витікання рідини з малого отвору:

$$\upsilon = \sqrt{2gh}\,. \qquad (5\text{ в})$$

де h *– висота відкритої поверхні рідини над отвором.*

Сила тертя між двома шарами рідини (формула Ньютона для сили внутрішнього тертя)

$$F_{тер} = \eta \cdot \left| \frac{d\upsilon}{dz} \right| \cdot S, \qquad (5\text{ г})$$

де η *– в’язкість рідини.*

Число Рейнольдса, що визначає характер течії в’язкої рідини:

$$\mathrm{Re} = \rho\upsilon l / \eta, \qquad (5\text{ ґ})$$

де l *– характерний розмір.*

Формула Пуазейля, яка визначає об’єм рідини, що протікає за одиницю часу через поперечний переріз труби:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\pi R^4}{8\eta}\cdot\frac{p_1-p_2}{l}, \qquad (5\ д)$$

де R *і* l *– радіус і довжина труби;* p_1-p_2 *– різниця тиску на кінцях труби.*

Формула Стокса, що визначає силу опору руху кульки радіусом r *у в'язкій рідині:*

$$\vec{F}_S=-6\pi\eta r\vec{\upsilon}. \qquad (5\ е)$$

5.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1

На яку висоту підніметься струмінь води, що витікає із наконечника шланга, якщо надлишковий тиск води у водопроводі 10^5 Па? Опором повітря знехтувати.

Розв'язання

h – ?
$\Delta p=10^5$ Па, $\rho=10^3$ кг/м^3

Площа поперечного перерізу струменя води під час його переміщення від шланга до отвору наконечника змінюється від S_1 до S_2 (рис. 5.1). Через те що $S_2 << S_1$, швидкість струменя води на виході з отвору υ_2 стає набагато вищою за швидкість води у шлангу υ_1. Швидкість υ_2 обчислимо використовуючи рівняння Бернуллі та теорему про нерозривність потоку. Рух струменя води після його виходу з наконечника шланга перестає бути ламінарним. Тому висоту h (рис. 5.2), на яку підніметься струмінь води під дією сили тяжіння, будемо обчислювати за допомогою кінематичних формул рівноприскореного руху для матеріальної точки, подаючи струмінь як сукупність малих частинок води.

Знайдемо швидкість витікання води υ_2 з отвору наконечника шланга. Для цього застосуємо рівняння Бернуллі та теорему про нерозривність потоку для точок перерізу площею S_1 та точок перерізу площею S_2 (рис. 5.1):

$$\rho\upsilon_1{}^2/2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho\upsilon_2{}^2/2 + \rho g h_2 + p_2, \qquad (1)$$

$$S_1 \cdot \upsilon_1 = S_2 \cdot \upsilon_2, \qquad (2)$$

де ρ – густина води; g – прискорення вільного падіння. Використовуючи, що $p_1 - p_2 = \Delta p$, $\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 / S_1$ (з рівняння (2)), $h_2 - h_1 = \Delta h$ – висота наконечника, співвідношення (1) можемо перетворити до вигляду

$$\Delta p - \rho g \Delta h = \rho\upsilon_2{}^2\left(1 - \left(S_2 / S_1\right)^2\right)/2. \qquad (3)$$

Візьмемо до уваги, що $S_2 / S_1 << 1$ (рис. 5.1); вважаємо, що гідростатичний тиск $\rho g \Delta h$ у наконечнику набагато менший за надлишковий тиск Δp ($\rho g \Delta h << \Delta p$). Тоді з рівняння (3) знаходимо швидкість струменя води з отвору наконечника:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2\Delta p / \rho}. \qquad (4)$$

Як відомо, довільне тіло за умови відсутності сили опору під дією сили тяжіння рухається рівноприскорено з прискоренням вільного падіння g. Використовуючи формули рівноприскореного руху, можемо записати для вертикальної координати частинки рідини та її швидкості вирази:

$$y = y_0 + \upsilon_{0y}t + g_y t^2/2, \; \upsilon_y = \upsilon_{0y} + g_y t. \qquad (5)$$

Візьмемо до уваги, що $y_0 = 0$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_2$, $g_y = -g$, у найвищій точці A траєкторії (рис. 5.2) $\upsilon_y = 0$ та $y = h$.

Тоді з формул (5) знаходимо:

$$t = \upsilon_2 / g\,,\; h = \upsilon_2^2 / (2g). \qquad (6)$$

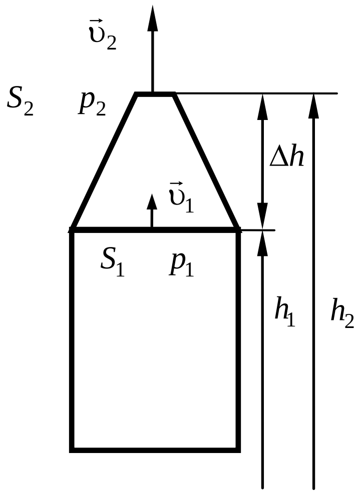


Рисунок 5.1

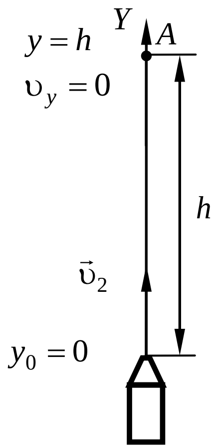


Рисунок 5.2

Підставляємо співвідношення (4) у другу формулу системи (6) та одержуємо шукану висоту підйому струменя води

$$h = \Delta p / (\rho g). \qquad (7)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (7), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $h = \dfrac{10^5}{10^3 \cdot 9{,}81}\text{ м} = 10{,}2\text{ м}.$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли надлишковий тиск води у водопроводі дорівнює нулю $\Delta p = 0$. Зрозуміло, що тоді висота, на яку підніметься струмінь води, також буде дорівнювати нулю. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\Delta p = 0$, то $h = \Delta p/(\rho g) \sim \Delta p = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $h = \Delta p/(\rho g) = 10{,}2$ м.

Приклад 5.2

За який час можна витиснути ідеальну рідину густиною $\rho = 1{,}0$ г/см^3 зі шприца, якщо на поршень діє сила $F = 20$ Н, об'єм рідини у шприці $V = 10$ см^3, а площі поршня та внутрішнього перерізу голки відповідно $S_1 = 1$ см^2, $S_2 = 0{,}3$ мм^2. Тертя не враховувати.

Розв'язання

t – ?
$F = 20$ Н, $V = 10$ см^3, $S_1 = 1$ см^2, $S_2 = 0{,}3$ мм^2, $\rho = 1{,}0$ г/см^3

Виходячи з рівняння Бернуллі та теореми про нерозривність потоку, визначимо швидкості у досліджуваній системі. Далі, використовуючи одержані швидкості, знайдемо шуканий час t.

Запишемо рівняння Бернуллі та теорему про нерозривність потоку для точок струменя у перерізах S_1 та S_2 (рис. 5.3):

$$\rho \upsilon_1^2/2 + \rho g h_1 + p_1 = \rho \upsilon_2^2/2 + \rho g h_2 + p_2, \qquad (1)$$

$$S_1 \cdot \upsilon_1 = S_2 \cdot \upsilon_2. \qquad (2)$$

У цих формулах індексом «1» позначено величини, які характеризують струмінь у перерізі S_1, індексом «2» – у перерізі S_2 (рис. 5.3); ρ, υ, p, h – густина, швидкість, статичний тиск та висота струменя рідини. Вважаємо, що рідина рухається горизонтально (рис. 5.3). Тому $h_1 = h_2$. Як випливає з рисунка 5.3, тиск у перерізі S_2 дорівнює атмосферному. Тому $p_2 = p_{am}$. Поршень у шприці (рис. 5.3) створює додатковий тиск $p = F / S_1$. Тоді результуючий тиск у перерізі S_1 з урахуванням зовнішнього атмосферного тиску буде дорівнювати $p_1 = p_{am} + F / S_1$. Підставляємо вищезаписані співвідношення в (1) і одержуємо

$$\rho\upsilon_1{}^2 / 2 + F / S_1 = \rho\upsilon_2{}^2 / 2 . \tag{3}$$

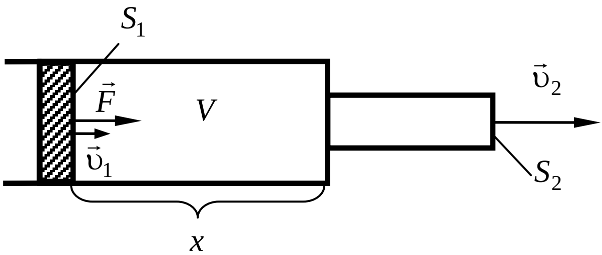


Рисунок 5.3

Розв’язуємо систему двох рівнянь (2)–(3) відносно двох невідомих υ_1 та υ_2 і знаходимо:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{2F}{S_1\rho\left(\left(S_1 / S_2\right)^2 - 1\right)}} . \tag{4}$$

Щоб із шприца витиснути рідину об'ємом V, поршень повинен пройти відстань $x = V / S_1$ (рис. 5.3). Для цього потрібен час

$$t = x / \upsilon_1 = V\sqrt{\frac{\rho\left(\left(S_1 / S_2\right)^2 - 1\right)}{2S_1F}} . \tag{5}$$

Таким чином, одержали співвідношення (5), яке є розв’язком задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$t = 10 \cdot 10^{-6} \sqrt{\frac{1{,}0 \cdot 10^3 \left(\left(10^{-4} / 0{,}3 \cdot 10^{-6} \right)^2 - 1 \right)}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 20}} \text{ с} = 1{,}67 \text{ с.}$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли сила, що діє на поршень, прямує до нуля $F \to 0$. Зрозуміло, що тоді і час, за який можна витиснути рідину зі шприца, буде наближатися до нескінченності. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $F \to 0$, то $t = V \sqrt{\dfrac{\rho \left((S_1 / S_2)^2 - 1 \right)}{2 S_1 F}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{F}} \to \infty$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $t = V \sqrt{\rho \left((S_1 / S_2)^2 - 1 \right) / (2 S_1 F)} = 1{,}67$ с.

Приклад 5.3

Одна посудина заповнена гліцерином, а друга – трансформаторним маслом. Густина і в'язкість гліцерину та масла відповідно $\rho_1 = 1210$ кг/м^3, $\eta_1 = 0{,}35$ Па·с і $\rho_2 = 850$ кг/м^3, $\eta_2 = 0{,}05$ Па·с. У ці посудини кидають алюмінієві кульки діаметром $d = 0{,}003$ м. Чи можна силу опору руху кульок обчислювати за формулою Стокса (припустити, що характерний розмір l дорівнює діаметру і число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$)? Якщо це так, обчислити за цією формулою швидкість падіння кульок.

Розв'язання

$\upsilon_1 - ?\ \upsilon_2 - ?$
$\rho_1 = 1210$ кг/м^3,
$\eta_1 = 0{,}35$ Па·с,
$\rho_2 = 850$ кг/м^3,
$\eta_2 = 0{,}05$ Па·с,
$d = 0{,}003$ м ,
$l = d$,
$\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$,
$\rho_{al} = 2700$ кг/м^3,
$g = 9{,}81$ м/с^2

Кулька у рідині рухається під дією сили тяжіння $m\vec{g}$, Архімеда $\vec{F}_A$ та опору $\vec{F}_S$ (рис. 5.4). Припустимо, що рух рідини, яка огинає кульку, є ламінарним. Тоді силу опору руху кульки можна обчислювати за формулою Стокса (5 е). Визначимо швидкість кульки за допомогою другого закону Ньютона. Одержавши значення швидкості кульки, знайдемо число Рейнольдса (5 ґ), порівняємо з критичним значенням $\mathrm{Re}_{кр}$ і перевіримо, чи буде рух рідини дійсно ламінарним, тобто, чи можна силу опору руху кульок обчислювати за формулою Стокса, чи є правильним одержане значення швидкості кульки для двох видів рідини.

Визначимо швидкість кульки $\vec{\upsilon}$ з другого закону Ньютона (рис. 5.4):

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_S\,, \qquad (1)$$

де $a = d\vec{\upsilon}/dt$ – прискорення кульки; $m = \rho_{al}\cdot\pi d^3/6$ – маса кульки; $\pi d^3/6$ – об'єм кульки; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння; $\vec{F}_S = -6\pi\eta r\vec{\upsilon}$ – сила Стокса (5 е); $r = d/2$ – радіус кульки; $\vec{F}_A = -\rho\cdot\pi d^3/6\cdot\vec{g}$ – сила Архімеда; ρ та η – густина та в'язкість рідини. Підставимо в (1) вищенаведені формули, спроектуємо вектори рівняння (1) на вісь Y і одержимо

$$\frac{\rho_{al}\cdot\pi d^3}{6}\cdot\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\rho_{al}\cdot\pi d^3}{6}\cdot g - \frac{\rho\cdot\pi d^3}{6}\cdot g - 6\pi\eta\frac{d}{2}\cdot\upsilon\,. \qquad (2)$$

Припустимо, що в початковий момент часу швидкість кулі дорівнювала нулю. Тоді з (2) випливає, що кулька під дією сили тяжіння та сили Архімеда набере прискорення $d\upsilon/dt > 0$, тобто її швидкість буде збільшуватися. Через збільшення швидкості збільшується і сила Стокса (прямо пропорційно залежить від швидкості (5 е)). Сила Стокса спрямована протилежно до напрямку швидкості (5 е), тому її поява призведе до зменшення прискорення. Подальше збільшення швидкості спричинить подальше збільшення сили Стокса і подальше зменшення прискорення. Нарешті, швидкість буде мати таке значення, що прискорення дорівнюватиме нулю $d\upsilon/dt = 0$, і кулька буде далі рухатись рівномірно зі сталою швидкістю. Підставимо в (2) $d\upsilon/dt = 0$ і визначимо усталену швидкість кульки у рідині:

$$\upsilon = \frac{(\rho_{al} - \rho)\cdot d^2 \cdot g}{18\cdot\eta}. \quad (3)$$

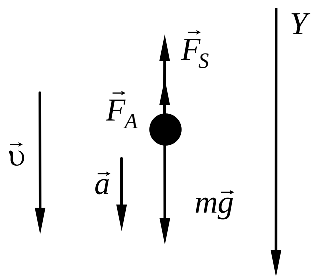


Рисунок 5.4

Визначимо число Рейнольдса (5 ґ):

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\upsilon l}{\eta} = \frac{\rho d}{\eta}\cdot\frac{(\rho_{al} - \rho)\cdot d^2 \cdot g}{18\cdot\eta} = \frac{\rho(\rho_{al} - \rho)\cdot d^3 \cdot g}{18\cdot\eta^2}. \quad (4)$$

За допомогою формули (4) обчислимо число

Рейнольдса для гліцерину $\rho=\rho_1$, $\eta=\eta_1$ і порівняємо його з критичним значенням:

$$\mathrm{Re}_1=\frac{\rho_1(\rho_{al}-\rho_1)\cdot d^3\cdot g}{18\cdot\eta_1{}^2}=0{,}22<\mathrm{Re}_{кр}=0{,}5\,. \qquad (5)$$

Як бачимо, число Рейнольдса для руху кульки в гліцерині є меншим за критичне значення. Тому силу опору руху кульок МОЖНА обчислювати за формулою Стокса. Підставимо в (3) значення густини і в'язкості для гліцерину ($\rho=\rho_1$, $\eta=\eta_1$) та одержуємо значення усталеної швидкості руху кульки у гліцерині:

$$\upsilon_1=\frac{(\rho_{al}-\rho_1)\cdot d^2\cdot g}{18\cdot\eta_1}\approx 0{,}021 \text{ м/с}. \qquad (6)$$

За допомогою формули (4) обчислимо число Рейнольдса для масла $\rho=\rho_2$, $\eta=\eta_2$ і порівняємо його з критичним значенням:

$$\mathrm{Re}_2=\frac{\rho_2(\rho_{al}-\rho_2)\cdot d^3\cdot g}{18\cdot\eta_2{}^2}=9{,}3>\mathrm{Re}_{кр}=0{,}5\,. \qquad (7)$$

Бачимо, число Рейнольдса для руху кульки у маслі є більшим за критичне значення. Тому рух у маслі буде турбулентним і силу опору руху кульок НЕ МОЖНА обчислювати за формулою Стокса.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли в’язкість рідини прямує до нескінченності $\eta\to\infty$. Із фізичних міркувань зрозуміло, що швидкість кульки у цьому випадку буде прямувати до нуля $\upsilon\to 0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат:

якщо $\eta \to \infty$, то $\upsilon = \dfrac{(\rho_{al} - \rho) \cdot d^2 \cdot g}{18 \cdot \eta} \sim \dfrac{1}{\eta} \to \dfrac{1}{\infty} = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: для кульки, що рухається в гліцерині, обчислювати силу опору за формулою Стокса можна; для кульки, що рухається у маслі, – не можна;
$\upsilon_1 = (\rho_{al} - \rho_1) \cdot d^2 \cdot g / (18 \cdot \eta_1) \approx 0{,}021$ м/с.

Приклад 5.4

Довгий циліндр радіусом R_1 рухається вздовж своєї осі зі сталою швидкістю υ_0 всередині коаксіального нерухомого циліндра радіусом R_2. Простір між пластинами заповнено в'язкою рідиною. Знайти швидкість рідини залежно від відстані r до осі циліндрів. Течія ламінарна.

Розв'язання

$\upsilon = \upsilon(r)$ – ?
R_1, R_2, υ_0

Для розв'язування задачі використаємо вираз для сили тертя між двома шарами рідини (5 г); граничні умови (рідина прилипає до поверхні циліндра, тобто швидкість рідини для $r = R_1$ дорівнює υ_0, для $r = R_2$ дорівнює нулю (рис. 5.5)).

Розглянемо рух довільного шару рідини AB (рис. 5.5). Він рухається під дією двох сил тертя: сили $\vec{F}_{тер1}$, що викликається нижнім шаром рідини, та сили $\vec{F}_{тер2}$, що викликається верхнім шаром рідини. У результаті дії цих сил шар рідини AB рухається зі сталою у часі швидкістю υ, тобто його прискорення дорівнює нулю. Це означає, що рівнодійна сил на шар AB дорівнює нулю, тобто

$F_{тер1} = F_{тер1}$. Шар рідини AB був вибраний довільно, тому можна стверджувати, що для рідини у довільній точці повинна виконуватися рівність

$$F_{тер} = const. \tag{1}$$

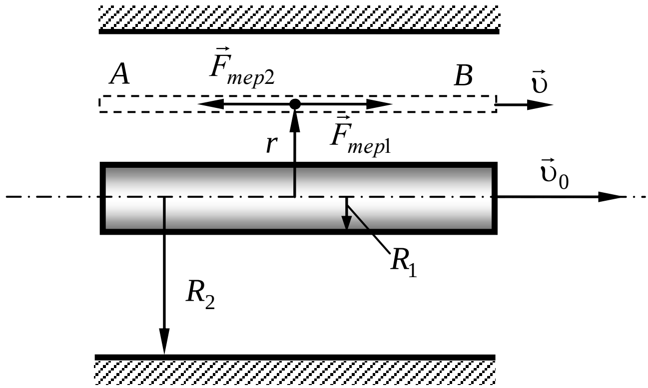


Рисунок 5.5

Позначимо константу в (1) через F_0 та підставимо в (1) формулу для сили тертя між двома шарами рідини (5 г). У результаті одержуємо

$$F_{тер} = \eta \cdot \frac{d\upsilon}{dr} \cdot S = \eta \cdot \frac{d\upsilon}{dr} \cdot 2\pi r l = F_0 = const. \tag{2}$$

У цій формулі враховано, що швидкість залежить від відстані r до осі системи (а не z як у формулі (5 г)), площа поверхні дотику двох циліндричних шарів $S = 2\pi r l$, де l – довжина циліндричного шару рідини. Перетворимо та проінтегруємо рівняння (2):

$$\frac{d\upsilon}{dr} = \frac{1}{r}\frac{F_0}{2\pi\eta l}, \; \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \frac{F_0}{2\pi\eta l}\int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r}, \; \upsilon - \upsilon_0 = \frac{F_0}{2\pi\eta l}\ln(r/R_1). \tag{3}$$

У цих рівняннях враховано, що коли $r = R_1$, то за умовою задачі швидкість рідини (яка прилипає до циліндра та дорівнює його швидкості) дорівнює υ_0, у довільній точці з r швидкість дорівнює υ.

Використаємо, що циліндр радіусом R_2 є нерухомим. Це означає, що швидкість рідини, яка прилипає до цього циліндра в точці з $r = R_2$, дорівнює нулю: $\upsilon = 0$. Підставляємо цю граничну умову в третє рівняння (3) і знаходимо рівняння для невідомої константи F_0:

$$0 - \upsilon_0 = \frac{F_0}{2\pi\eta l}\ln\left(R_2 / R_1\right),\ F_0 = -\frac{\upsilon_0 2\pi\eta l}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}. \tag{4}$$

Підставляємо значення для константи F_0 в (3) і знаходимо шукану залежність швидкості рідини від r:

$$\upsilon = \upsilon_0\left(1 - \ln\left(r / R_1\right) / \ln\left(R_2 / R_1\right)\right). \tag{5}$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Перевіримо, чи буде швидкість рідини дорівнювати швидкості рухомого циліндра υ_0, коли $r = R_1$. Підставимо $r = R_1$ у розрахункову формулу (5) і одержуємо

$$\upsilon = \upsilon_0\left(1 - \frac{\ln\left(r / R_1\right)}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}\right) = \upsilon_0\left(1 - \frac{\ln\left(R_1 / R_1\right)}{\ln\left(R_2 / R_1\right)}\right) = \upsilon_0\left(1 - 0\right) = \upsilon_0 .$$

Бачимо, що з розрахункової формули випливає такий самий результат.

Перевіримо, чи буде швидкість рідини дорівнювати швидкості нерухомого циліндра $\upsilon = 0$, коли $r = R_2$. Підставимо $r = R_2$ у розрахункову формулу (5) і отримуємо

$$\upsilon = \upsilon_0 \left(1 - \frac{\ln(r / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \right) = \upsilon_0 \left(1 - \frac{\ln(R_2 / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \right) = \upsilon_0 (1-1) = 0 .$$

Бачимо, що з розрахункової формули випливає такий самий результат.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\upsilon = \upsilon_0 (1 - \ln(r / R_1) / \ln(R_2 / R_1))$.

5.2 Задачі для самостійного розв’язування

5.1 Маса m 100 крапель спирту, що витікає з капіляра, дорівнює 0,71 г. Визначити поверхневий натяг σ спирту, якщо діаметр d шийки краплі у момент відриву дорівнює 1 мм.

5.2 Трубка має діаметр d_1 = 0,2 см. На нижньому кінці трубки повисла крапля води, що має у момент відриву форму кульки. Знайти діаметр d_2 цієї краплі.

5.3 Яку роботу A потрібно виконати, щоб, видуваючи мильну бульбашку, збільшити її діаметр від $d_1 = 1$ см до d_2 = 11 см? Вважати процес ізотермічним.

5.4 Дві краплі ртуті радіусом $r = 1$ мм кожна злилися в одну велику краплю. Яка енергія E виділиться при злитті? Вважати процес ізотермічним.

5.5 Повітряна бульбашка діаметром $d = 2$ мкм знаходиться у воді біля її поверхні. Визначити густину ρ повітря в бульбашці, якщо повітря над поверхнею води знаходиться за нормальних умов.

5.6 На скільки тиск p повітря усередині мильної бульбашки більший від атмосферного тиску p_0, якщо діаметр бульбашки d = 5 мм?

5.7 Гліцерин піднявся в капілярній трубці на висоту $h = 20$ мм. Визначити поверхневий натяг σ гліцерину, якщо діаметр d каналу трубки дорівнює 1 мм.

5.8 Різниця Δh рівнів рідини в колінах U-подібної трубки дорівнює 23 мм. Діаметри d_1 і d_2 каналів у колінах трубки дорівнюють відповідно 2 і 0,4 мм. Густина ρ рідини дорівнює 0,8 г/см^3. Визначити поверхневий натяг σ рідини.

5.9 У рідину нижніми кінцями опущені дві вертикальні капілярні трубки з внутрішніми діаметрами $d_1 = 0{,}05$ см і $d_2 = 0{,}1$ см. Різниця Δh рівнів рідини в трубках дорівнює 11,6 мм. Густина ρ рідини дорівнює 0,8 г/см^3. Знайти поверхневий натяг σ рідини.

5.10 У воду опущена на дуже малу глибину скляна трубка з діаметром внутрішнього каналу $d = 1$ мм. Знайти масу m води, що увійшла до трубки.

5.11 Капілярна трубка діаметром $d = 0{,}5$ мм наповнена водою. На нижньому кінці трубки вода повисла у вигляді краплі. Цю краплю можна взяти за частину сфери радіусом $r = 3$ мм. Знайти висоту h стовпчика води в трубці.

5.12 Широке коліно U-подібного ртутного манометра має діаметр $d_1 = 4$ см, вузьке – $d_2 = 0{,}25$ см. Різниця рівнів Δh ртуті в обох колінах дорівнює 200 мм. Знайти тиск p, який показує манометр, взявши до уваги поправку на капілярність.

5.13 На яку висоту h піднімається вода між двома паралельними скляними пластинками, якщо відстань d між ними становить 0,2 мм?

5.14 Вода тече в горизонтально розміщеній трубі змінного перерізу. Швидкість υ_1 води в широкій частині труби дорівнює 20 см/с. Визначити швидкість υ_2 у вузькій частині труби, діаметр d_2 якої в 1,5 раза менший за діаметр d_1 широкої частини.

5.15 У широкій частині горизонтально розміщеної труби нафта тече зі швидкістю $\upsilon_1 = 2$ м/с. Визначити швидкість υ_2 нафти у вузькій частині труби, якщо різниця Δp тиску в її широкій і вузькій частинах дорівнює 6,65 кПа.

5.16 У горизонтально розміщеній трубі з площею S_1 поперечного перерізу, що дорівнює 20 см^2, тече рідина. В одному місці труба звужена, в якому площа S_2 перерізу дорівнює 12 см^2. Різниця Δh рівнів у двох манометричних трубках, установлених у широкій і вузькій частинах труби, дорівнює 8 см. Визначити об'ємну витрату Q_V рідини.

5.17 Горизонтальний циліндр насоса має діаметр $d_1 = 20$ см. У ньому рухається зі швидкістю $\upsilon_1 = 1$ м/с поршень, що виштовхує воду через отвір діаметром $d_2 = 2$ см. З якою швидкістю υ_2 витікатиме вода з отвору? Який буде надлишковий тиск p води у циліндрі?

5.18 Тиск p вітру на стіну дорівнює 200 Па. Визначити швидкість υ вітру, якщо він дме перпендикулярно до стіни. Густина ρ повітря дорівнює 1,29 кг/м^3.

5.19 Струмінь води діаметром $d = 2$ см рухається зі швидкістю $\upsilon = 10$ м/с, падає на нерухому плоску поверхню, розміщену перпендикулярно до струменя. Знайти силу F тиску струменя на поверхню, вважаючи, що після падіння струменя на поверхню швидкість частинок води дорівнює нулю.

5.20 Бак висотою h = 1,5 мм наповнений доверху водою. На відстані $h = 1$ м від верхнього краю бака утворився отвір малого діаметра. На якій відстані l від бака падає на підлогу струмінь, що витікає з отвору?

5.21 Струмінь води з площею поперечного перерізу $S_1 = 4$ см^2 витікає горизонтально з брандспойта, який розміщено на висоті $H = 2$ м над поверхнею землі, і падає на цю поверхню на відстані $l = 8$ м (рис. 5.6). Нехтуючи опором повітря руху води, знайти надлишковий тиск p води в рукаві, якщо площа поперечного перерізу рукава дорівнює $S_2 = 50$ см^2?

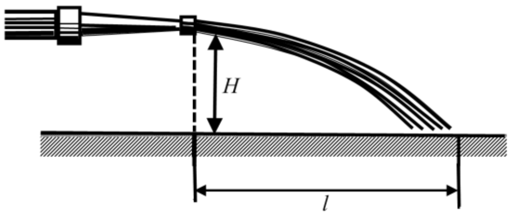


Рисунок 5.6

5.22 Бак висотою $H = 2$ м доверху заповнений рідиною. На якій висоті h повинен бути зроблений отвір у стінці бака, щоб місце падіння струменя, який витікає з отвору, було на максимальній від бака відстані?

5.23 Вода тече по круглій трубі діаметром $d = 5$ см з середньою в перерізі швидкістю $\langle \upsilon \rangle = 10$ см/с. Визначити число Рейнольдса Re для потоку рідини в трубі і визначити характер течії рідини. Критичне число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 2300$, в'язкість води $\eta = 1{,}0$ мПа · с.

5.24 У трубі з внутрішнім діаметром $d = 3$ см тече вода. Визначити максимальну масову витрату $Q_{m_{\max}}$ води за умови ламінарної течії. Критичне число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} =$ $= 2300$, в'язкість води $\eta = 1{,}0$ мПа · с.

5.25 Мідна кулька діаметром $d = 1$ см падає зі сталою швидкістю у касторовій олії. Чи є рух олії, викликаний падінням у ньому кульки, ламінарним? Критичне число

Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$, в’язкість касторової олії $\eta = 987$ мПа · с, густина міді $\rho_1 = 8930$ кг/м^3, густина касторової олії $\rho_2 = 960$ кг/м^3.

5.26 Латунна кулька діаметром $d = 0{,}6$ мм падає в гліцерині. Визначити: 1) швидкість υ сталого руху кульки; 2) чи є обтікання кульки ламінарним? Критичне число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$, в’язкість гліцерину $\eta = 1480$ мПа · с, густина латуні $\rho_1 = 8550$ кг/м^3, густина гліцерину $\rho_2 = 1260$ кг/м^3.

5.27 Під час руху кульки радіусом $r_1 = 2{,}4$ мм у касторовій олії ламінарне обтікання спостерігається, коли швидкість υ_1 кульки не перевищує 10 см/с. Знайти мінімальну швидкість υ_2 кульки радіусом $r_2 = 1$ мм у гліцерині, коли її обтікання стане турбулентним? В’язкість касторової олії $\eta_1 = 987$ мПа · с, густина – $\rho_1 = 960$ кг/м^3; в’язкість гліцерину $\eta_2 = 1480$ мПа·с, густина – $\rho_2 = 1260$ кг/м^3.

5.28 Трубка Піто (рис. 5.7) встановлена в трубі газопроводу, площа внутрішнього перерізу якого дорівнює S. Нехтуючи в'язкістю, знайти об’єм газу, що проходить через перетин труби за одиницю часу, якщо різниця рівнів у рідинному манометрі дорівнює Δh, а густина рідини і газу – відповідно ρ_0 і ρ.

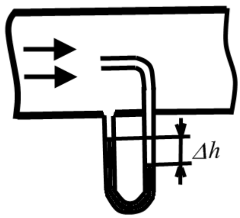


Рисунок 5.7

5.29 Широка посудина з невеликим отвором у дні наповнена водою і гасом. Товщина шару води $h_1 = 30$ см, а шару гасу $h_2 = 20$ см. Нехтуючи в'язкістю, знайти швидкість води, що витікає з отвору. Густина води $\rho_1 = 1000$ кг/м^3, гасу – $\rho_1 = 800$ кг/м^3.

5.30 Циліндрична посудина висотою h і площею основи S наповнена водою. На дні посудини відкрили отвір із площею $s << S$. Нехтуючи в'язкістю води, визначити, через скільки часу вся вода витече з посудини.

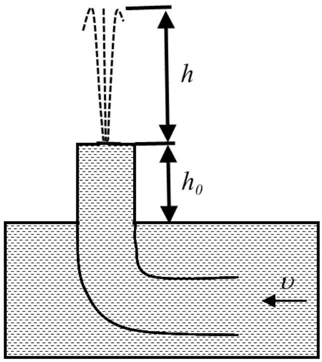


Рисунок 5.8

5.31 Зігнуту трубку опустили в потік води, як показано на рис. 5.8. Швидкість потоку відносно трубки $\upsilon = 2{,}5$ м/с. Закритий верхній кінець трубки має невеликий отвір і знаходиться на висоті $h_0 = 12$ см. На яку висоту h підніматиметься струмінь води, що витікає з отвору?

5.32 У горизонтальному дні широкої посудини з ідеальною рідиною є круглий отвір радіусом R_1. Над цим отвором розміщено круглий закритий циліндр радіусом $R_2 > R_1$ (рис. 5.9). Проміжок між циліндром і дном посудини дуже малий, густина рідини ρ. Знайти статичний тиск рідини у проміжку як функцію відстані r

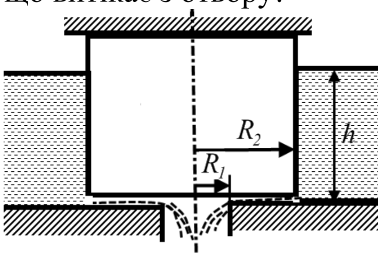


Рисунок 5.9

від осі отвору і циліндра, якщо висота шару рідини дорівнює h.

5.33 По трубці довжиною l і радіусом R тече стаціонарний потік рідини, густина якої ρ і в'язкість η. Швидкість течії рідини залежить від відстані r до осі трубки згідно із законом $\upsilon = \upsilon_0\left(1 - r^2/R^2\right)$. Знайти: 1) об'єм рідини, що протікає через переріз трубки за одиницю часу; 2) кінетичну енергію рідини в об'ємі трубки; 3) силу тертя, яка діє на трубку з боку рідини; 4) різницю тиску на кінцях трубки.

5.34 Радіус перерізу трубопроводу монотонно зменшується згідно із законом $r = r_0 e^{-\alpha x}$, де $\alpha = 0{,}50$ м$^{-1}$; x – відстань від початку трубопроводу. Знайти відношення чисел Рейнольдса в перерізах, віддалених один від одного на $\Delta x = 3{,}2$ м.

5.35 Свинцева кулька рівномірно опускається в гліцерині, в'язкість якого $\eta = 1{,}48$ Па · с. Знайти найбільший діаметр кульки, коли його обтікання ще залишається ламінарним? Відомо, що перехід до турбулентного обтікання відповідає числу $\mathrm{Re}_{кр} = 0{,}5$, густина свинцю $\rho = 11300$ кг/м^3, густина гліцерину $\rho_0 = 1260$ кг/м^3.

5.36 Сталева кулька діаметром $d = 3{,}0$ мм опускається з нульовою початковою швидкістю у оливковій олії, в'язкість якої $\eta = 90$ мПа · с. Через який час після початку руху швидкість кульки відрізнятиметься від сталого значення на $n = 1{,}0$ %?

6 РЕЛЯТИВІСТСЬКА МЕХАНІКА

Основні формули

Перетворення Лоренца для випадку, коли система відліку K' *рухається зі швидкістю* V *у додатному напрямі осі* X *системи* K, *осі* X' *і* X *збігаються, а осі* Y' *і* Y, Z' *і* Z *паралельні одна одній:*

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-(V/c)^2}},\; y' = y,\; z' = z,\; t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \quad (6\text{ а})$$

Скорочення довжини тіла та уповільнення часу годинника, який рухається:

$$l = l_0\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}, \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}, \quad (6\text{ б})$$

де l_0 *– власна довжина;* Δt_0 *– власний час годинника.*

Перетворення швидкості в спеціальній теорії відносності:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1-\upsilon_x V/c^2},\; \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-\upsilon_x V/c^2},\; \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-(V/c)^2}}{1-\upsilon_x V/c^2}. \quad (6\text{ в})$$

Релятивістський імпульс

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}, \quad (6\text{ г})$$

де m *– маса спокою.*

Релятивістське рівняння динаміки частинки

$$d\vec{p}/dt = \vec{F}, \quad (6\text{ ґ})$$

де $\vec{p}$ *– релятивістський імпульс частинки.*

Повна й кінетична енергії релятивістської частинки:

$$E = mc^2 / \sqrt{1-(\upsilon / c)^2}, \quad E_k = mc^2 / \sqrt{1-(\upsilon / c)^2} - mc^2 \,. \quad (6\ д)$$

Зв'язок між повною енергією й імпульсом релятивістської частинки:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4, \quad p^2c^2 = E_k(E_k + 2mc^2)\,. \qquad (6\ е)$$

6.1 Приклади розв’язування задач

Приклад 6.1

Знайти власну довжину стрижня, якщо в лабораторній системі відліку його швидкість $\upsilon = c/2$, довжина $L = 1{,}00$ м і кут між ним та напрямком руху $\theta = 45°$.

Розв’язання

L_0 – ?
$\upsilon = c/2$,
$L = 1{,}00$ м,
$\theta = 45°$

Для розв’язування задачі використаємо перетворення Лоренца (6 а) та формулу скорочення довжини тіла (6 б). Візьмемо до уваги, що перетворення довжини різних проекцій стрижня описується різними формулами.

Вважаємо, що у лабораторній системі відліку K швидкість руху стрижня спрямована вздовж осі X, кут між стрижнем і його швидкістю θ (рис. 6.1). Тоді проекція стрижня на вісь X буде дорівнювати $L_x = L\cos\theta$, а на вісь Y – $L_y = L\sin\theta$. Позначимо через L_{0x} та L_{0y} проекції стрижня на осі X' та Y' відповідно у власній системі відліку стрижня K' (відносно якої він перебуває у стані спокою). Згідно з перетвореннями Лоренца (6 а) координати вздовж осей Y та Y' пов’язані між собою співвідношенням $y = y'$. Це означає, що ***y***-проекції під час переходу від системи K до системи K' не змінюються, тобто

$$L_{0y'} = L_y = L\sin\theta\,. \qquad (1)$$

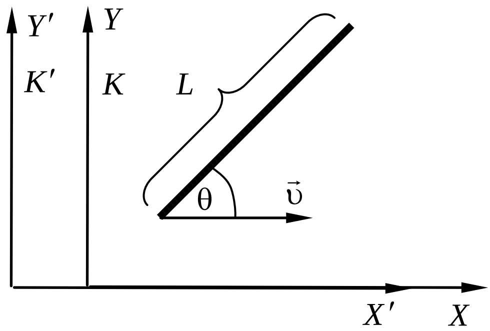


Рисунок 6.1

Згідно з формулою скорочення довжини тіла (6 б) x-проекції стрижня пов’язані між собою співвідношенням

$$L_x = L_{0x'}\sqrt{1-(\upsilon/c)^2} \text{ або } L_{0x'} = L\cos\theta/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}\,. \qquad (2)$$

Використовуючи формули (1) та (2), знаходимо власну довжину стрижня:

$$L_0 = \sqrt{L_{0x'}^2 + L_{0y'}^2} = L\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta/\left(1-(\upsilon/c)^2\right)} =$$

$$= L\sqrt{\left(1-\sin^2\theta\cdot(\upsilon/c)^2\right)/\left(1-(\upsilon/c)^2\right)}\,. \qquad (3)$$

Таким чином, одержали співвідношення (3), яке є розв’язком задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$L_0 = 1{,}00\sqrt{\left(1-\sin^2 45^\circ\cdot(0{,}5\,c/c)^2\right)/\left(1-(0{,}5\,c/c)^2\right)} = 1{,}08 \text{ м.}$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли кут між стрижнем та напрямком його руху дорівнює нулю $\theta = 0$. Тоді скорочення довжини тіла описується відомою формулою (6 б): $L = L_0\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$. Звідси випливає, що $L_0 = L/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\theta = 0$, то

$$L_0 = L\sqrt{\frac{1-\sin^2\theta\cdot(\upsilon/c)^2}{1-(\upsilon/c)^2}} = L\sqrt{\frac{1-\sin^2 0\cdot(\upsilon/c)^2}{1-(\upsilon/c)^2}} = \frac{L}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $L_0 = L\sqrt{\left(1-\sin^2\theta\cdot(\upsilon/c)^2\right)/\left(1-(\upsilon/c)^2\right)} = 1{,}08$ м.

Приклад 6.2

Дві частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $\upsilon_1 = 0{,}50\,c$ та $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$ відносно лабораторної системи відліку. Знайти відносну швидкість частинок.

Розв'язання

$\upsilon - ?$
$\upsilon_1 = 0{,}50\,c$, $\upsilon_2 = 0{,}75\,c$

Перейдемо до системи K', у якій частинка A (рис. 6.2) перебуває у стані спокою, тобто $\upsilon_1' = 0$. Тоді швидкість $\upsilon_2' = \upsilon$ частинки B у цій системі відліку і буде шуканою відносною швидкістю частинок. Для розв'язування задачі використаємо формули перетворення швидкостей у СТВ (6 в).

Спрямуємо осі X та X' систем K та K' так, щоб вони були паралельними швидкостям $\vec{\upsilon}_1$ та $\vec{\upsilon}_2$ (рис. 6.2).

Згідно з формулами перетворення швидкостей у СТВ (6 в) швидкості частинок у системі K' будуть мати такі значення:

$$\upsilon'_{1x} = \frac{\upsilon_{1x} - V}{1 - \upsilon_{1x} V / c^2}, \; \upsilon'_{2x} = \frac{\upsilon_{2x} - V}{1 - \upsilon_{2x} V / c^2}. \qquad (1)$$

Візьмемо до уваги, що $\upsilon_{1x} = \upsilon_1$, $\upsilon_{2x} = -\upsilon_2$ (рис. 6.2), $\upsilon'_{1x} = 0$ (у системі K' частинка A перебуває у стані спокою). Тоді з першого рівняння системи (1) знаходимо $V = \upsilon_1$, а з другого рівняння цієї самої системи

$$\upsilon'_{2x} = \frac{-\upsilon_2 - \upsilon_1}{1 + \upsilon_2 \upsilon_1 / c^2}. \qquad (2)$$

Звідси легко знайти модуль відносної швидкості:

$$\upsilon = |\, \upsilon'_{2x} \,| = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{1 + \upsilon_2 \upsilon_1 / c^2}. \qquad (3)$$

Таким чином, одержали співвідношення (3), яке є розв'язком задачі.

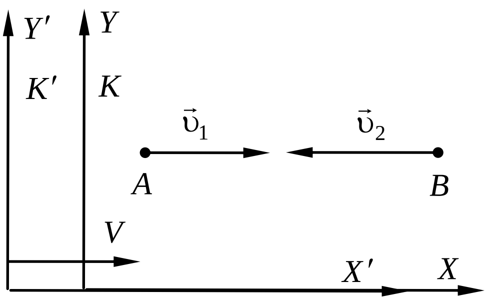


Рисунок 6.2

Виконаємо обчислення:

$$\upsilon = \frac{0{,}75\,c + 0{,}50\,c}{1 + 0{,}75\,c \cdot 0{,}50\,c / c^2} = \frac{0{,}75 + 0{,}50}{1 + 0{,}75 \cdot 0{,}50}\,c = 0{,}91\,c\,.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість частинки A дорівнює нулю $\upsilon_1 = 0$. Тоді відносна швидкість частинок буде дорівнювати швидкості частинки B у системі відліку K, тобто $\upsilon = \upsilon_2$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\upsilon_1 = 0$, то

$$\upsilon = \frac{\upsilon_2 + \upsilon_1}{1 + \upsilon_2\upsilon_1 / c^2} = \frac{\upsilon_2 + 0}{1 + \upsilon_2 \cdot 0 / c^2} = \upsilon_2\,.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\upsilon = (\upsilon_2 + \upsilon_1)/(1 + \upsilon_2\upsilon_1 / c^2) = 0{,}91\,c$.

Приклад 6.3

На частинку масою m діє стала у часі сила F. Знайти залежність швидкості, імпульсу і шляху, пройденого частинкою, від часу. Початкова швидкість частинки дорівнює нулю.

Розв’язання

$p = p(t) - ?$
$\upsilon = \upsilon(t) - ?$
$s = s(t) - ?$
m, F, $\upsilon_0 = 0$

Для розв’язування задачі використаємо визначення швидкості, релятивістського імпульсу та релятивістське рівняння динаміки частинки.

Для знаходження імпульсу частинки використаємо релятивістське рівняння динаміки частинки (6 г):

$$d\vec{p} / dt = \vec{F}\,. \qquad (1)$$

Беручи до уваги, що початкова швидкість, а отже, і початковий імпульс частинки за умовою задачі дорівнювали нулю, з рівняння (1) одержуємо

$$\int_0^{\vec{p}} d\vec{p} = \int_0^t \vec{F}dt \text{ або } \vec{p} = \vec{F}\cdot t. \tag{2}$$

Залежність швидкості від часу знаходимо, використовуючи визначення релятивістського імпульсу (6 г):

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \tag{3}$$

Візьмемо до уваги (2) і знаходимо, що

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{p}\cdot c}{\sqrt{m^2c^2+p^2}} = \frac{\vec{F}\cdot t\cdot c}{\sqrt{m^2c^2+(F\cdot t)^2}}. \tag{4}$$

Для знаходження шляху використаємо його зв'язок зі швидкістю $\upsilon = ds/dt$. Звідси одержуємо

$$s = \int_0^t \frac{F\cdot t\cdot c\cdot dt}{\sqrt{m^2c^2+(F\cdot t)^2}} = \int_0^t \frac{F\cdot c\cdot d\left(t^2\right)}{2\sqrt{m^2c^2+(F\cdot t)^2}} =$$

$$= \frac{F\cdot c}{F^2}\cdot\sqrt{m^2c^2+(F\cdot t)^2}\Big|_0^t = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m^2c^2+(F\cdot t)^2} - mc\right). \tag{5}$$

Таким чином, одержали співвідношення (5), яке є розв'язком задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо нерелятивістський випадок, коли $\upsilon/c \to 0$. Тоді під дією сталої сили тіло повинно рухатися зі сталим прискоренням $\vec{a} = \vec{F}/m$. Відомо, що швидкість та переміщення $\Delta\vec{r}$ тіла за умови рівноприскореного руху визначається формулами:

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t\,,\ \Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \vec{a}t^2/2\,. \tag{6}$$

Візьмемо до уваги, що початкова швидкість υ_0 дорівнює нулю, прискорення, як це випливає з другого закону Ньютона, дорівнює $\vec{a} = \vec{F}/m$, шлях s за умови нульової початкової швидкості дорівнює модулю переміщення $|\Delta\vec{r}|$. Тоді з формул (6) випливає, що у нерелятивістському випадку швидкість, імпульс та шлях визначаються виразами:

$$\vec{\upsilon} = \vec{F}t/m\,, \tag{7}$$

$$\vec{p} = m\upsilon = \vec{F}t\,, \tag{8}$$

$$s = |\Delta\vec{r}| = Ft^2/(2m). \tag{9}$$

Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\upsilon/c \to 0$, то

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{F}\cdot t\cdot c}{\sqrt{m^2c^2 + (F\cdot t)^2}} = \frac{\vec{F}\cdot t}{m\sqrt{1+(F\cdot t/(mc))^2}} \to \frac{\vec{F}\cdot t}{m\sqrt{1+0}} = \frac{\vec{F}\cdot t}{m},$$

що збігається з (7);

$$s = \frac{c}{F}\left(\sqrt{m^2c^2 + (F\cdot t)^2} - mc\right) = \frac{mc^2}{F}\left(\sqrt{1+(F\cdot t)^2/\left(m^2c^2\right)} - 1\right) \approx$$

$$\approx \frac{mc^2}{F}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(F\cdot t)^2}{m^2c^2} - 1\right) = \frac{F\cdot t^2}{2m},$$ що збігається з (9). У цій формулі використали відоме наближене співвідношення $\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \alpha/2$, де $\alpha << 1$. Формули (8) і (2) також збігаються.

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $\vec{p} = \vec{F} \cdot t$, $\vec{\upsilon} = \vec{F} \cdot t \cdot c / \sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2}$,
$s = (c / F) \cdot \left(\sqrt{m^2 c^2 + (F \cdot t)^2} - mc \right)$.

Приклад 6.4

Частинка масою m налітає зі швидкістю $\upsilon = 0{,}99\, c$ на нерухому частинку такої самої маси. Визначити масу і швидкість частинки, що утворилася під час їх непружного зіткнення.

Розв'язання

M – ?
u – ?
m, $\upsilon = 0{,}99$ c

Після непружного зіткнення частинки рухаються як одне ціле зі швидкістю $\vec{u}$. Позначимо масу частинок після зіткнення через M. На рисунку 6.3 зображені частинки: *а*) до зіткнення; *б*) після зіткнення. Для розв'язування задачі використаємо закон збереження релятивістського імпульсу та закон збереження повної енергії. Відповідно до цих законів можемо записати:

$$\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} + 0 = \frac{M\vec{u}}{\sqrt{1-(u/c)^2}},$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1-0}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \qquad (1)$$

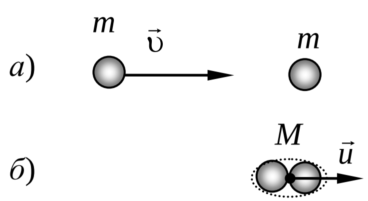


Рисунок 6.3

Система (1) складається з двох рівнянь відносно двох невідомих M та u. Розв'язуючи їх, знаходимо шукані величини.

Розділимо перше рівняння системи на друге і знайдемо швидкість частинок після їх непружного зіткнення:

$$\vec{u} = \frac{\vec{\upsilon}}{1+\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в друге рівняння системи (1) та одержимо

$$M = m\left(\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}+1\right)\sqrt{\frac{1-(u/c)^2}{1-(\upsilon/c)^2}} = m\sqrt{2\left(1+1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}\right)}. \qquad (3)$$

Таким чином, одержали співвідношення (2) та (3), які є розв'язками задачі.

Виконаємо обчислення:

$$u = 0{,}99\,c\Big/\left(1+\sqrt{1-(0{,}99\,c/c)^2}\right) = 0{,}87\,c,$$

$$M = m\sqrt{2\left(1+1/\sqrt{1-(0{,}99\,c/c)^2}\right)} = 4{,}02\cdot m.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість частинки υ прямує до нуля. Швидкість другої частинки за умовою задачі дорівнює нулю. Тому з фізичних міркувань випливає, що швидкість обох частинок після зіткнення повинна прямувати до нуля. Із розрахункової формули (2) випливає такий самий результат. Якщо $\upsilon \to 0$, то $u = \upsilon\Big/\left(1+\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}\right) \sim \upsilon \to 0$.

Випадок, якщо $\upsilon \to 0$, є нерелятивістським. Тому маса утвореної частинки з точки зору Ньютонівської механіки повинна прямувати до суми мас вихідних частинок, тобто $M \to 2m$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\upsilon \to 0$, то

$$M = m\sqrt{2\left(1+1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}\right)} \to m\sqrt{2\left(1+1/\sqrt{1}\right)} = 2m.$$

Отже, розрахункові формули (2) та (3) не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $u = \upsilon/\left(1+\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}\right) = 0{,}87\,c$,

$$M = m\sqrt{2\left(1+1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}\right)} = 4{,}02\cdot m.$$

6.2 Задачі для самостійного розв'язування

6.1 На космічному кораблі-супутнику знаходиться годинник, синхронізований до польоту із земним годинником. Швидкість υ_0 корабля-супутника становить 7,9 км/с. На скільки часу відстане годинник на супутнику з погляду земного спостерігача, який спостерігав час за своїм годинником упродовж $\tau_0 = 0{,}5$ року?

6.2 Фотонна ракета рухається відносно Землі зі швидкістю $\upsilon = 0{,}6c$. У скільки разів сповільниться хід часу в ракеті з погляду земного спостерігача?

6.3 Стрижень перебуває у стані спокою у системі K'. Його власна довжина l_0 дорівнює 1 м. Стрижень розміщений так, що утворює кут $\varphi_0 = 45°$ із віссю X'. Визначити довжину l стрижня і кут φ у системі K, якщо швидкість υ системи K' відносно K дорівнює $0{,}8c$.

6.4 У системі K знаходиться квадрат, сторона якого паралельна осі X'. Визначити кут φ' між його діагоналями в системі K', якщо система K' рухається відносно K зі швидкістю $\upsilon = 0{,}95c$.

6.5 У лабораторній системі відліку (система K) π-мезон із моменту народження до моменту розпаду пролетів відстань $l = 75$ м. Швидкість υ π-мезона дорівнює $0{,}995\,c$. Визначити власний час життя τ_0 мезона.

6.6 Власний час життя τ_0 μ-мезона дорівнює 2 мкс. Від точки народження до точки розпаду в лабораторній системі відліку μ-мезон пролетів відстань $l = 6$ км. З якою швидкістю υ (у частках швидкості світла) рухався мезон?

6.7 Дві релятивістські частинки рухаються в лабораторній системі відліку зі швидкостями $\upsilon_1 = 0{,}6c$ і $\upsilon_2 = 0{,}9c$ уздовж однієї прямої. Визначити їх відносну швидкість u у двох випадках: 1) частинки рухаються в одному напрямі; 2) частинки рухаються у протилежних напрямах.

6.8 У лабораторній системі відліку віддаляються одна від одної дві частинки з однаковими за модулем швидкостями. Їх відносна швидкість u дорівнює $0{,}5\ c$. Визначити швидкості частинок.

6.9 Іон, вилетівши з прискорювача, випустив фотон у напрямі свого руху. Визначити швидкість фотона відносно прискорювача, якщо швидкість υ іона відносно прискорювача дорівнює $0{,}8\,c$.

6.10 Електрон рухається зі швидкістю $\upsilon = 0{,}6c$. Визначити релятивістський імпульс p електрона.

6.11 Імпульс p релятивістської частинки дорівнює m_0c (m_0 – маса спокою). Визначити швидкість υ частинки (у частках швидкості світла).

6.12 У лабораторній системі відліку знаходяться дві частинки. Одна частинка з масою спокою m_0 рухається із швидкістю $\upsilon = 0{,}6\ c$, інша – з масою спокою $2\,m_0$ перебуває у стані спокою. Визначити швидкість υ_C центра мас системи частинок.

6.13 Повна енергія тіла зросла на $\Delta E = 1$ Дж. На скільки зміниться маса тіла?

6.14 Визначити, на скільки повинна збільшитися повна енергія тіла, щоб його релятивістська маса зросла на $\Delta m = 1$ г?

6.15 Електрон летить зі швидкістю $\upsilon = 0{,}8c$. Визначити кінетичну енергію T електрона (у мегаелектрон-вольтах).

6.16 Визначити швидкість υ електрона, якщо його кінетична енергія дорівнює: 1) $T = 4$ МеВ; 2) $T = 1$ кеВ.

6.17 Знайти швидкість υ протона, якщо його кінетична енергія дорівнює: 1) $T = 1$ МеВ; 2) $T = 1$ ГеВ.

6.18 Дві релятивістські частинки рухаються назустріч одна одній з однаковими (у лабораторній системі відліку) кінетичними енергіями, які дорівнюють їх енергії спокою. Визначити: 1) швидкості частинок у лабораторній системі відліку; 2) відносну швидкість зближення частинок (в одиницях c); 3) кінетичну енергію (в одиницях m_0c^2) однієї з частинок у системі відліку, пов'язаній з іншою частинкою.

6.19 Показати, що вираз зв'язку релятивістського імпульсу з кінетичною енергією $p = 1/c\sqrt{(2E_0 + T)T}$ за умови $\upsilon << c$ переходить у відповідний вираз класичної механіки.

6.20 Визначити імпульс p частинки (в одиницях m_0c), якщо її кінетична енергія дорівнює енергії спокою.

6.21 Визначити кінетичну енергію T релятивістської частинки (в одиницях m_0c^2), якщо її імпульс $p = m_0c$.

6.22 Кінетична енергія релятивістської частинки дорівнює її енергії спокою. У скільки разів зросте імпульс частинки, якщо її кінетична енергія збільшиться в $n = 4$ разів?

6.23 Імпульс p релятивістської частинки дорівнює $m_0 c$. Під дією зовнішньої сили імпульс частинки збільшився в два рази. У скільки разів зросте енергія частинки: 1) кінетична; 2) повна?

6.24 Під час непружного зіткнення частинки, що має імпульс $p = m_0 c$, з такою самою частинкою, яка перебуває у стані спокою, утворюється складена частинка. Визначити: 1) швидкість υ частинки (в одиницях c) до зіткнення; 2) релятивістську масу складеної частинки (в одиницях m_0); 3) швидкість складеної частинки (в одиницях c); 4) масу спокою складеної частинки (в одиницях m_0); 5) кінетичну енергію частинки до зіткнення і кінетичну енергію складеної частинки (в одиницях $m_0 c^2$).

6.25 Частинка з кінетичною енергією $T = m_0 c^2$ налітає на іншу таку саму частинку, яка в лабораторній системі відліку перебуває у стані спокою. Знайти сумарну кінетичну енергію T' частинок у системі відліку, пов'язаної з центром інерції системи частинок.

6.26 На діаграмі простору – часу показано три події A, B і C (рис. 6.4), які відбулися на осі x деякої інерціальної системи відліку. Знайти: 1) проміжок часу між подіями A і B у тій системі відліку, де обидві події відбулися в одній точці; 2) відстань між точками, де відбулися події A і C, у тій системі відліку, де вони одночасні.

6.27 Прямокутний трикутник, у якого катет a = 5,00 м, має кут між цим катетом і гіпотенузою $\alpha = 30°$. Знайти в системі відліку K', що рухається відносно цього трикутника із швидкістю $\upsilon = 0{,}866c$ уздовж катета a: 1) відповідне значення кута α'; 2) довжину l' гіпотенузи і її відношення до власної довжини.

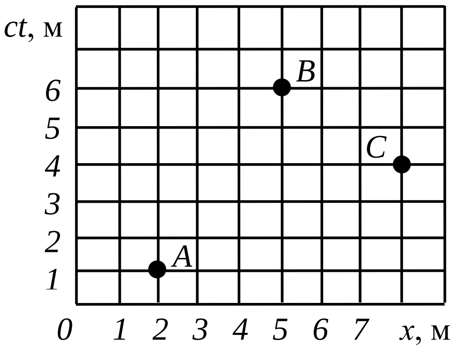


Рисунок 6.4

6.28 Власний час життя деякої нестабільної частинки $\Delta t_0 = 10$ нс. Який шлях пролетить ця частинка до розпаду в лабораторній системі відліку, де її час життя Δt = 20 нс?

6.29 У площині XY K-системи відліку рухається частинка, проекції швидкості якої дорівнюють υ_x та υ_y. Знайти швидкість υ' цієї частинки у K'-системі, яка переміщується зі швидкістю V відносно K-системи в додатному напрямі її осі X.

6.30 Дві релятивістські частинки рухаються під прямим кутом одна до одної в лабораторній системі відліку, причому одна із швидкістю υ_1, а інша – зі швидкістю υ_2. Знайти їх відносну швидкість.

6.31 K'-система переміщується зі сталою швидкістю V відносно K-системи. Знайти прискорення a' частинки у K'-системі, якщо в K-системі вона рухається зі швидкістю υ і прискоренням a вздовж прямої: 1) у напрямі вектора $\vec{V}$; 2) перпендикулярно до вектора $\vec{V}$.

6.32 Густина тіла, що перебуває у стані спокою, дорівнює ρ_0. Знайти швидкість системи відліку, у якій його густина буде на $\eta = 25\ \%$ більша за ρ_0. Густину визначити як відношення маси спокою тіла до його об'єму.

6.33 Знайти швидкість, для якої релятивістський імпульс частинки в $\eta = 2$ рази перевищує її ньютонівський імпульс.

6.34 Яку роботу потрібно виконати, щоб збільшити швидкість частинки з масою m від 0,60 до 0,80 швидкості світла? Порівняти одержаний результат із значенням, обчисленим за нерелятивістською формулою.

6.35 Знайти швидкість, коли кінетична енергія частинки дорівнює її енергії спокою?

6.36 Скільки енергії (з розрахунку на одиницю маси) необхідно витратити, щоб надати космічному кораблю, що спочатку перебував у стані спокою, швидкість $\upsilon = 0{,}980\,c$?

6.37 Показати, що для частинки величина $E^2 - p^2c^2$ є інваріантом, тобто має одне і те саме значення у всіх інерціальних системах відліку. Яке значення цього інваріанта?

6.38 Нейтрон із кінетичною енергією $T = 2mc^2$, де m – його маса спокою, налітає на інший, нейтрон, що перебуває у стані спокою. Знайти у системі їх центра мас: 1) сумарну кінетичну енергію $\widetilde{T}$ нейтронів; 2) імпульс $\widetilde{p}$ кожного нейтрона.

6.39 Яка повинна бути кінетична енергія протона, що налітає на інший протон, який перебуває у стані спокою, щоб їх сумарна кінетична енергія в системі центра мас була такою самою, як у двох протонів, що рухаються назустріч один одному з кінетичними енергіями T = 25,0 ГеВ?

6.40 Релятивістська ракета викидає струмінь газу з нерелятивістською швидкістю u, яка є сталою відносно ракети. Знайти залежність швидкості υ ракети від її маси m, якщо в початковий момент маса ракети дорівнює m_0.

7 РІВНЯННЯ ГАЗУ. ПРОЦЕСИ

Основні формули

Рівняння стану ідеального газу

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \,, \qquad (7\text{ а})$$

де μ *– молярна маса (маса моля).*

Закон Дальтона

$$p = \sum_{i=1}^{k} p_i \,, \qquad (7\text{ б})$$

де p *– тиск суміші газів;* p_i *– парціальний тиск і-го компонента суміші.*

Барометрична формула

$$p = p_0 \exp(-\mu g h / RT) \,, \qquad (7\text{ в})$$

де p_0 *– тиск на висоті* $h = 0$.

7.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 7.1

Балон об'ємом 20 л містить суміш водню й азоту за температури 27 ºС і тиску 25 атм. Маса суміші газів – 0,3 кг. Визначити масу водню, яка міститься в балоні.

Розв'язання

m_1 –?
$V = 20$ л,
$t = 27°$ С,
$p = 25$атм,
$m = 0{,}3$ кг

Для розв'язування задачі використаємо закон Дальтона (7 б) та рівняння стану ідеального газу (7 а). Також візьмемо до уваги інформацію про масу суміші газів. З одержаної системи рівнянь знайдемо шукані величини.

Позначимо через m_1 та m_2 відповідно масу водню та масу азоту в балоні, $T = t + 273$ – абсолютну температуру газів.

Згідно із законом Дальтона ***тиск суміші ідеальних газів дорівнює сумі парціальних тисків цих газів***. Тобто

$$p = p_1 + p_2\,, \tag{1}$$

де p_1 – парціальний тиск водню; p_2 – парціальний тиск азоту. Як відомо, під парціальним тиском розуміють тиск, який створює компонента суміші в даному об’ємі за умови відсутності інших газів. Парціальні тиски для водню та азоту знайдемо за допомогою рівняння Менделєєва – Клапейрона (7 а):

$$p_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT\,, \quad p_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT\,. \tag{2}$$

У цих рівняннях μ_1 – молярна маса водню; μ_2 – молярна маса азоту. Далі із співвідношень (2) знаходимо парціальні тиски p_1, p_2, підставляємо їх у (1) і одержуємо

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right). \tag{3}$$

Також використаємо інформацію про загальну масу суміші

$$m = m_1 + m_2\,. \tag{4}$$

Систему рівнянь (3) та (4) розв’язуємо відносно невідомих m_1 та m_2 і знаходимо шукану масу водню m_1. З (4) виразимо m_2 і підставимо в (3):

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m - m_1}{\mu_2}\right).$$

Звідси

$$m_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\left(\frac{pV}{RT} - \frac{m}{\mu_2}\right). \qquad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$m_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\left(\frac{pV}{RT} - \frac{m}{\mu_2}\right) = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-3}} \times$$

$$\times \left(\frac{25 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{8{,}3 \cdot 300} - \frac{0{,}3}{28 \cdot 10^{-3}}\right) \text{кг} = 0{,}02 \text{ кг}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо уявний випадок, коли маса однієї молекули газу, який позначаємо індексом «1», буде дорівнювати нулю. Тоді і їх молярна маса також буде дорівнювати нулю $\mu_1 \to 0$. З фізичних міркувань випливає, що в цьому випадку будь-яка кількість молекул цього сорту газу буде мати масу таку, що дорівнює нулю, тобто $m_1 \to 0$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\mu_1 \to 0$, то

$$m_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\left(\frac{pV}{RT} - \frac{m}{\mu_2}\right) \sim \mu_1 \to 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $m_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}\left(\frac{pV}{RT} - \frac{m}{\mu_2}\right)$=0,02 кг.

Приклад 7.2

Швидкість відкачування роторного масляного насоса $Q = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^3/с. Який час τ потрібен для того, щоб посудину місткістю $V = 5$ л відкачати від нормального повітряного тиску до тиску $p = 1{,}33$ Па?

Примітка. Швидкістю відкачування називають об'єм газу, який відкачується за одиницю часу.

Розв'язання

τ – ?
$Q = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^3/с, $V = 5$ л = $5 \cdot 10^{-3}$ м^3, $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па, $p = 1{,}33$ Па, $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Розв'язування цієї задачі зводиться до аналізу процесу відкачування повітря насосом із використанням рівняння ідеального газу.

Розглянемо процес відкачування повітря, молярна маса якого $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, роторним насосом.

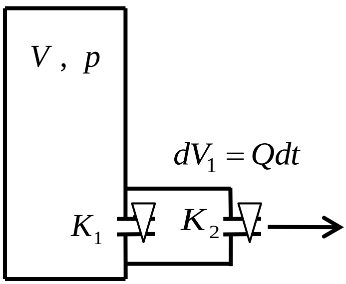


Рисунок 7.1

Нехай у деякий момент часу t в посудині об'ємом V міститься повітря, що характеризується тиском p та масою m. З часом завдяки роботі насоса маса газу m в посудині зменшується. Через це зменшується і тиск p газу в посудині. Насос працює таким чином. За малий час dt

через систему клапанів K_1 та K_2 (рис. 7.1) з посудини видаляється газ, що міститься в об'ємі $dV_1 = Qdt$. Зрозуміло, що зменшення маси газу в посудині dm дорівнює масі газу, який міститься в об'ємі dV_1. Це зменшення газу дорівнює

$$dm = -\rho dV_1 = -\rho Qdt. \tag{1}$$

Знак «–» у цій формулі означає, що маса газу в посудині об'ємом V зменшується, ρ – густина газу в системі в даний момент часу. Цю густину газу можна знайти за допомогою рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

звідси

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \tag{2}$$

Зменшення тиску в посудині об'ємом V унаслідок зменшення маси газу також знаходимо за допомогою рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \Rightarrow dp = \frac{dm}{\mu V} RT. \tag{3}$$

Зазначимо, під час відкачування об'єм посудини V та температура T не змінюються. Далі у співвідношення (3) підставляємо (1) та (2) і одержуємо

$$dp = -\frac{\rho Qdt}{\mu V} RT = -\frac{p\mu}{RT}\frac{Qdt}{\mu V} RT$$

або

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Qdt}{V}. \tag{4}$$

Інтегруємо праву і ліву частини співвідношення (4) і знаходимо шуканий час τ:

$$\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\int_{0}^{\tau}\left(-\frac{Qdt}{V}\right),\quad \ln\frac{p}{p_0}=-\frac{Q}{V}\tau,\quad \tau=\frac{V}{Q}\ln\frac{p_0}{p}. \qquad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\tau=\frac{V}{Q}\ln\frac{p_0}{p}=\frac{5\cdot 10^{-3}}{1{,}5\cdot 10^{-4}}\ln\left(\frac{1\cdot 10^{5}}{1{,}33}\right)\text{ с=374 с.}$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли швидкість відкачування насоса буде наближатися до нуля $Q\to 0$. У цій ситуації відкачування практично не буде відбуватися. Тобто час відкачування буде зростати до нескінченності $\tau\to\infty$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $Q\to 0$, то $\tau=\dfrac{V}{Q}\ln\dfrac{p_0}{p}\sim\dfrac{1}{Q}\to\dfrac{1}{0}=\infty$.

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\tau=\dfrac{V}{Q}\ln\dfrac{p_0}{p}$=374 с.

Приклад 7.3

Дві посудини A і B з’єднані між собою за допомогою капіляра з краном. Посудина A занурена у водяну ванну з температурою $T_1=373$ К, а посудина B – в охолоджувальну суміш з температурою $T_2 = 253$ К. Спочатку у посудинах за допомогою крана створили повітряні тиски $p_1 = 5{,}3 \cdot 10^2$ Па та $p_2 = 1{,}4 \cdot 10^3$ Па. Знайти рівноважний тиск, що буде у посудинах після відкривання крана, якщо ємність посудини A $V_1 = 250$ см^3, а посудини B – $V_2 = 400$ см^3.

Розв'язання

p –?
T_1 = 373 К,
T_1 = 253 К,
p_1 = 5,3 · 10^2 Па,
p_2 = 1,4 · 10^3 Па,
V_1 = 250 · 10^{-6} м^3,
V_2 = 400·10^{-6} м^3

Опишемо початковий та кінцевий стани системи за допомогою рівняння Менделєєва – Клапейрона (7 а). Далі з одержаної системи рівнянь знайдемо шуканий тиск p.

Позначимо через m_1 та m_2 маси повітря, що містяться відповідно в посудинах A та B у початковому стані. Тоді, використовуючи рівняння стану (7 а), можемо записати для повітря в посудинах A та B у початковому стані:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} R T_1, \quad p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu} R T_2. \tag{1}$$

де μ = 29 · 10^{-3}кг/моль – молярна маса повітря.

Після відкриття крана частина повітря масою Δm перейде з посудини B із більшим тиском у посудину A з меншим тиском ($p_2 > p_1$ з умови задачі). Процес перетікання повітря закінчиться, коли тиски в обох посудинах стануть однаковими. Таким чином, у кінцевому стані тиски в обох посудинах однакові і дорівнюють p, маса повітря газу в посудині B буде меншою ($m_2 - \Delta m$), а в посудині A – більшою ($m_1 + \Delta m$) на величину Δm. Згідно з умовою задачі температура та об'єм посудин не змінюються. Тоді можемо записати рівняння Менделєєва – Клапейрона для повітря в посудинах A та B у кінцевому стані у такому вигляді

$$pV_1 = \frac{m_1 + \Delta m}{\mu} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m_2 - \Delta m}{\mu} RT_2 . \qquad (2)$$

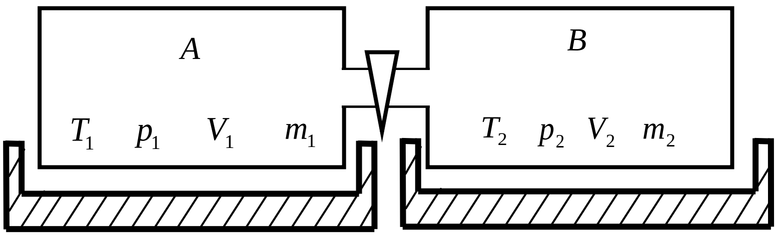


Рисунок 7.2

Далі розв'язуємо систему чотирьох рівнянь (1), (2) відносно чотирьох невідомих ($m_1, m_2, \Delta m, p$) і знаходимо шуканий рівноважний тиск p:

$$\begin{cases} \dfrac{p_1V_1}{RT_1} = \dfrac{m_1}{\mu}, \quad \dfrac{p_2V_2}{RT_2} = \dfrac{m_2}{\mu}, \\ \dfrac{pV_1}{RT_1} - \dfrac{m_1}{\mu} = \dfrac{\Delta m}{\mu}, \quad \dfrac{m_2}{\mu} - \dfrac{pV_2}{RT_2} = \dfrac{\Delta m}{\mu}. \end{cases}$$

Звідси

$$p = \left(\frac{p_2V_2}{RT_2} + \frac{p_1V_1}{RT_1} \right) \Big/ \left(\frac{V_1}{RT_1} + \frac{V_2}{RT_2} \right) = \frac{p_2V_2T_1 + p_1V_1T_2}{V_2T_1 + V_1T_2} . \qquad (3)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$p = \frac{p_2V_2T_1 + p_1V_1T_2}{V_2T_1 + V_1T_2} =$$

$$=\frac{1{,}4\cdot10^3\cdot400\cdot10^{-6}\cdot373+5{,}3\cdot10^2\cdot250\cdot10^{-6}\cdot253}{1{,}4\cdot10^3\cdot373+5{,}3\cdot10^2\cdot253}=1{,}14\ \text{кПа}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Якби початковий тиск у посудині A дорівнював початковому тиску в посудині B ($p_1=p_2$), то під час відкриття крана перетікання газу не відбулося (різниця тисків у цьому випадку дорівнювала б нулю). Це означає, що рівноважний тиск у кінцевому стані p теж дорівнював би цим початковим значенням тиску $p=p_1=p_2$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Позначимо через p_0 початковий тиск у посудинах A та B ($p_0=p_1=p_2$). Тоді

$$p=\frac{p_2V_2T_1+p_1V_1T_2}{V_2T_1+V_1T_2}=\frac{p_0V_2T_1+p_0V_1T_2}{V_2T_1+V_1T_{21}}=p_0\frac{V_2T_1+V_1T_2}{V_2T_1+V_1T_{21}}=p_0.$$

Тобто $p=p_0=p_1=p_2$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $p=\dfrac{p_2V_2T_1+p_1V_1T_2}{V_2T_1+V_1T_2}$ = 1,14 кПа.

Приклад 7.4

Визначити найменший можливий тиск ν молей ідеального газу в процесі, що відбувається за законом $T=T_0+\alpha V^2$, де T_0 і α – додатні сталі; V – об’єм газу. Зобразити приблизний графік цього процесу в параметрах p, V.

Розв'язання

$p_{\min}$ –? Побудувати графік $p = p(V)$
$T = T_0 + \alpha V^2$, ν

Підставимо в рівняння стану (7 а), що пов'язує три змінні (p, V, T) між собою, залежність температури від об'єму, яка нам відома з умови задачі, і отримуємо зв'язок між тиском і об'ємом. Проведемо дослідження цієї залежності $p = p(V)$ на екстремум і знайдемо мінімальне значення тиску $p_{\min}$. Використовуючи одержану інформацію, побудуємо графік $p = p(V)$.

Реалізуємо вищеописаний план розв'язання задачі. У рівняння Менделєєва – Клапейрона (7 а)

$$pV = \nu RT \tag{1}$$

підставимо відому з умови задачі залежність температури від об'єму й отримуємо

$$pV = \nu R(T_0 + \alpha V^2)$$

або

$$p = p(V) = \nu R\left(T_0 + \alpha V^2\right)/V\,. \tag{2}$$

Співвідношення (2) можемо розглядати як функціональну залежність тиску від об'єму. Проведемо дослідження функції (2) на екстремум. Для цього знайдемо похідну від тиску за об'ємом і прирівняємо її до нуля:

$$\frac{dp}{dV} = \frac{d}{dV}\left(\frac{\nu R(T_0 + \alpha V^2)}{V}\right) = \frac{\nu R(\alpha V^2 - T_0)}{V^2} = 0\,. \tag{3}$$

Звідси одержуємо точку екстремуму

$$V_1 = \sqrt{\frac{T_0}{\alpha}}\,. \tag{4}$$

Неважко переконатися, що коли $V < V_1$, то $\dfrac{dp}{dV} < 0$, а коли $V > V_1$, то $\dfrac{dp}{dV} > 0$. Це означає, що коли $V = V_1$, то має місце мінімум тиску.

Знайдемо мінімальне значення тиску, підставивши (4) в (2):

$$p_{\min} = \frac{\nu R(T_0 + \alpha V_1^2)}{V_1} = \frac{\nu R\left(T_0 + \alpha\left(\sqrt{T_0/\alpha}\right)^2\right)}{\sqrt{T_0/\alpha}} = 2\nu R\sqrt{\alpha T_0} . \quad (5)$$

Таким чином, формула (5) визначає шуканий мінімальний тиск $p_{\min}$.

Залежність $p = p(V)$, графік якої потрібно побудувати, визначається співвідношенням (2). Аналізуючи формулу (2), неважко впевнитися, що якщо $V \to 0$, то тиск прямує до нескінченності $p \to \infty$. Якщо $V \to \infty$, то тиск прямує теж до нескінченності $p \to \infty$. Якщо $0 < V = V_1 < \infty$, то маємо мінімальне значення тиску $p_{\min}$, що визначається формулою (5). Наближений графік залежності $p = p(V)$ зображено на рис. 7.3.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли коефіцієнт α у функціональній залежності температури від об’єму $T = T_0 + \alpha V^2$ прямує до нуля ($\alpha \to 0$). У цьому разі $T \approx T_0$, тобто температура в такому процесі є сталою величиною. Такий процес є ізотермічним, тому згідно з рівнянням стану тиск залежить від об’єму обернено пропорційно

$p(V) = \nu RT_0 / V$. Із цього випливає, що мінімальне значення тиску буде дорівнювати нулю ($p_{\min} = 0$), коли об'єм буде прямувати до нескінченності ($V_1 \to \infty$). З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\alpha \to 0$, то $p_{\min} = 2\nu R\sqrt{\alpha T_0} \sim \alpha^{1/2} \to 0$.

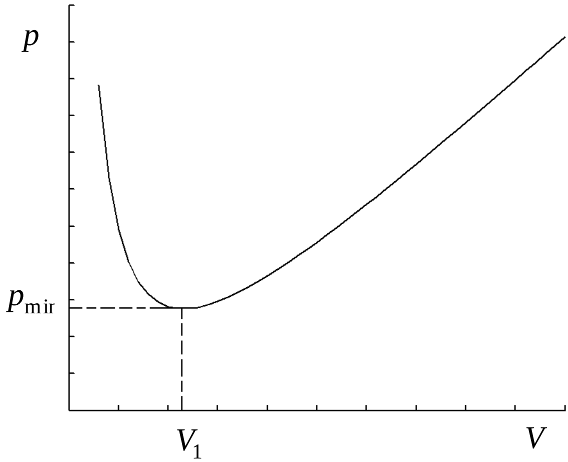


Рисунок 7.3

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $p_{\min} = 2\nu R\sqrt{\alpha T_0}$.

7.2 Задачі для самостійного розв'язування

7.1 У циліндрі довжиною l = 1,6 м, заповненому повітрям за умови нормального атмосферного тиску $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па, почали повільно рухати поршень площею S = 200 см^2. Визначити силу F, що діятиме на поршень, якщо його зупинити на відстані l_1 =10 см від дна циліндра.

7.2 Колба ємністю $V = 300$ см^3 закрита пробкою з краном і містить розріджене повітря. Для вимірювання тиску в колбі шийку колби занурили у воду на незначну глибину і відкрили кран, унаслідок чого до колби увійшла вода масою $m = 292$ г. Визначити початковий тиск p у колбі, якщо атмосферний тиск $p_0 = 100$ кПа.

7.3 Електрична газонаповнена лампа розжарювання, об'єм якої $V = 500$ см^3, наповнена азотом під тиском $p = 9 \cdot 10^4$ Па. Яка маса води m увійде в лампу, якщо у ній зробити отвір під водою за умови нормального атмосферного тиску?

7.4 У U-подібний манометр налили ртуть (рис. 7.4). Відкрите коліно манометра з'єднано з навколишнім середовищем, що характеризується нормальним атмосферним тиском p_0. Ртуть у відкритому коліні стоїть вище, ніж у закритому, на $\Delta h_1 = 10$ см. У цьому разі вільна від ртуті частина трубки закритого коліна має довжину $l = 20$ см. Коли відкрите коліно приєднали до балона з повітрям, різниця рівнів ртуті змінилась і досягла значення $\Delta h_2 = 26$ см. Знайти тиск p повітря в балоні.

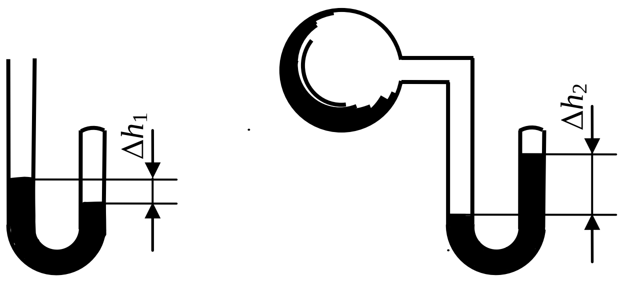


Рисунок 7.4

7.5 У балоні міститься газ за температури $t_1 = 100$ °С. До якої температури t_2 потрібно нагріти газ, щоб його тиск збільшився в два рази?

7.6 Під час нагрівання ідеального газу на $\Delta T = 1$ К за умови сталого тиску об'єм його збільшився на 1/350 від початкового об'єму. Знайти початкову температуру T газу.

7.7 Порожню кулю ємністю $V = 10$ см^3, заповнену повітрям температурою $T_1 = 573$ К, з'єднали трубкою з чашкою, заповненою ртуттю. Визначити масу m ртуті, що увійшла до кулі під час охолодження повітря в ній до температури $T_2 = 293$ К. Зміною об’єму кулі знехтувати.

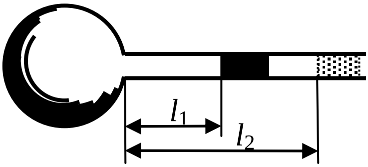


Рисунок 7.5

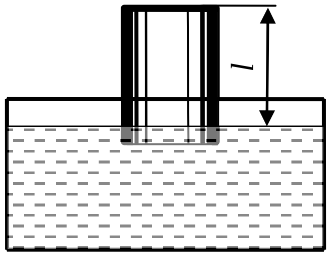


Рисунок 7.6

7.8 Газовий термометр складається з кулі з припаяною до неї горизонтальною скляною трубкою. Крапелька ртуті, що міститься в трубці, відділяє об'єм кулі від зовнішнього середовища (рис. 7.5). Площа S поперечного перетину трубки дорівнює 0,1 см^2. Якщо температура $T_1 = 273$ К, то крапелька знаходилася на відстані $l_1 = 30$ см від поверхні кулі, коли температура $T_2 = 278$ К – на відстані $l_2 = 50$ см. Знайти ємність V кулі.

7.9 У велику посудину з водою була перекинута циліндрична посудина (рис. 7.6). Рівні води всередині і зовні циліндричної посудини знаходяться на однаковій висоті. Відстань l від рівня води до дна перекинутої посудини дорівнює 40 см. На яку висоту Δh підніметься вода в циліндричній посудині під час зниження температури від $T_1 = 310$ К до $T_2 = 273$ К? Атмосферний тиск є нормальним.

7.10 Балон місткістю V = 12 л містить вуглекислий газ. Тиск p газу дорівнює 1 МПа, температура T = 300 К. Визначити масу m газу в балоні.

7.11 Який об'єм V займає ідеальний газ, що містить кількість речовини ν = 1 кмоль, якщо тиск p = 1 МПа і температура T = 400 К?

7.12 Казан ємністю V = 2 м^3 містить перегріту водяну пару масою m = 10 кг за температури T = 500 К. Визначити тиск p пари в казані.

7.13 Балон ємністю V = 20 л містить вуглекислий газ масою m = 500 г під тиском p = 1,3 МПа. Визначити температуру T газу.

7.14 Визначити густину ρ насиченої водяної пари в повітрі за температури T = 300 К. Тиск p насиченої водяної пари для цієї температури дорівнює 3,55 кПа.

7.15 Оболонка повітряної кулі ємністю V = 800 м^3 повністю заповнена воднем за температури T_1 = 273 К. На скільки зміниться піднімальна сила кулі під час підвищення температури до T_2 = 293 К? Вважати об'єм V оболонки незмінним, а зовнішній тиск – нормальним. У нижній частині оболонки є отвір, через який водень може виходити в оточуючий простір.

7.16 Аеростат об'ємом V наповнений гелієм за температури $T_1 = 288$ К. За умови сталого атмосферного тиску $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па під впливом сонячної радіації його температура підвищилася до $T_2 = 310$ К і надлишок газу вийшов із нього через отвір, унаслідок чого маса аеростата з газом зменшилася на $\Delta m = 0{,}8$ кг. Знайти об'єм аеростата V.

7.17 Оболонка повітряної кулі має ємність V = 1600 м^3. Знайти піднімальну силу F водню, що наповнює оболонку, на висоті, де тиск p = 60 кПа і температура T = 280 К. Під час піднімання кулі водень може виходити через отвір у нижній частині кулі.

7.18 У балоні ємністю $V = 25$ л міститься водень із температурою $T = 290$ К. Після того як частину водню витратили, тиск у балоні знизився на $\Delta p = 0{,}4$ МПа. Визначити масу m витраченого водню.

7.19 Оболонка аеростата ємністю $V = 1600$ м^3, що знаходиться на поверхні Землі, на $k = 7/8$ наповнена воднем з тиском $p_1 = 100$ кПа і температурі $T = 290$ К. Аеростат підняли на деяку висоту, де тиск $p_2 = 80$ кПа і температура $T_2 = 280$ К. Визначити масу Δm водню, що вийшов з оболонки, коли його піднімали.

7.20 Який об'єм V займає суміш газів – азоту масою $m_1 = 1$ кг і гелію масою $m_2 = 1$ кг за нормальних умов?

7.21 У балонах ємністю $V_1 = 20$ л і $V_2 = 44$ л міститься газ. Тиск у першому балоні $p_1 = 2{,}4$ МПа, в другому $p_2 = 1{,}6$ МПа. Визначити загальний тиск p і парціальні p'_1 і p'_2 після з'єднання балонів, якщо температура газу залишилася незмінною.

7.22 У посудині ємністю $V = 0{,}01$ м^3 міститься суміш газів – азоту масою $m_1 = 7$ г і водню масою $m_2 = 1$ г, які мають температуру $T = 280$ К. Визначити тиск p суміші газів.

7.23 Знайти густину ρ газової суміші водню і кисню, якщо їх масові частки ω_1 і ω_2 дорівнюють відповідно 1/9 і 8/9. Тиск p суміші дорівнює 100 кПа, температура $T = 300$ К.

7.24 Газова суміш, що складається з кисню й азоту, міститься в балоні під тиском $p = 1$ МПа. Визначити парціальний тиск p_1 кисню і p_2 азоту, якщо масова частка ω_1 кисню в суміші дорівнює 0,2.

7.25 Сухе повітря складається в основному з кисню й азоту. Якщо знехтувати іншими складовими повітря, то можна вважати, що масові частки кисню й азоту дорівнюють відповідно $\omega_1 = 0{,}232$ $\omega_2 = 0{,}768$. Визначити молярну масу μ повітря.

7.26 У посудині об'ємом $V = 15$ л міститься суміш азоту і водню з температурою $t = 23$ °C і тиском $p = 200$ кПа. Визначити масу суміші та її компонентів, якщо масова частка ω_1 азоту в суміші дорівнює 0,7.

7.27 Балон ємністю $V = 5$ л містить суміш гелію і водню, тиск яких $p = 600$ кПа. Маса m суміші дорівнює 4 г, масова частка ω_1 гелію – 0,6. Визначити температуру T суміші.

7.28 У посудині міститься суміш кисню і водню. Маса m суміші дорівнює 3,6 г. Масова частка ω_1 кисню становить 0,6. Визначити кількість речовини суміші ν та кількість речовини кожного газу окремо ν_1 і ν_2.

7.29 У посудині об'ємом $V = 30$ л міститься ідеальний газ із температурою 0 °С. Після того як частина газу була випущена назовні, тиск у посудині знизився на $\Delta p = 0{,}78$ атм (без зміни температури). Знайти масу випущеного газу. Густина даного газу за нормальних умов $\rho = 1{,}3$ г/л.

7.30 Два однакових балони з'єднані трубкою з клапаном, що пропускає газ з одного балона в інший за умови різниці тисків $\Delta p \geq 1{,}10$ атм. Спочатку в одному балоні був вакуум, а в іншому – ідеальний газ із температурою $t_1 = 27$ °С і тиском $p_1 = 1{,}00$ атм. Потім обидва балони нагріли до температури $t_2 = 107$ °С. Знайти тиск газу в балоні, в якому був вакуум.

7.31 Посудина об'ємом $V = 20$ л містить суміш водню й гелію з температурою $t = 20$ °С і тиском $p = 2{,}0$ атм. Маса суміші $m = 5{,}0$ г. Знайти відношення маси водню до маси гелію в цій суміші.

7.32 У посудині міститься суміш $m_1 = 7{,}0$ г азоту й $m_2 = 11$ г вуглекислого газу з температурою $T = 290$ К і тиском $p_0 = 1{,}0$ атм. Знайти густину цієї суміші, вважаючи гази ідеальними.

7.33 У балоні об'ємом $V = 7{,}5$ л із температурою $T = 300$ К міститься суміш ідеальних газів: $\nu_1 = 0{,}10$ моль кисню, $\nu_2 = 0{,}20$ моль азоту й $\nu_3 = 0{,}30$ моль вуглекислого газу. Припускаючи, що гази ідеальні, знайти: 1) тиск суміші; 2) середню молярну масу μ суміші, що входить до рівняння її стану $pV = (m/\mu)RT$, де m – маса суміші.

7.34 У посудині об’ємом $V = 20$ л міститься $m_1 = 5$ г водню та $m_2 = 10$ г азоту, які мають температуру $T = 290$ К. Визначити тиск у посудині, молярну масу та густину суміші газів.

7.35 У вертикальному закритому з обох торців циліндрі знаходиться масивний поршень, з обох сторін якого міститься по одному молю повітря. У рівноважному стані для температури $T_0 = 300$ К об'єм верхньої частини циліндра в $\eta = 4{,}0$ рази більший від об'єму нижньої частини. Знайти температуру, коли відношення цих об'ємів буде $\eta' = 3{,}0$? Тертя не враховувати.

7.36 Знайти тиск повітря у посудині, з якої проводиться відкачування, як функцію часу відкачування t. Об’єм посудини V, початковий тиск p_0. Процес вважати ізотермічним, а швидкість відкачування незалежною від тиску і такою, що дорівнює C (див. примітку до прикладу 7.2).

7.37 Камеру об'ємом $V = 87$ л відкачують насосом, швидкість відкачування якого (див. примітку до прикладу 7.2) $C = 10$ л/с. Через який час тиск у камері зменшиться в $\eta = 1000$ разів?

7.38 У гладкій, відкритій з обох кінців вертикальній трубі, що має два різних перерізи (рис.), міститься два поршні, з’єднані ниткою, що не розтягується, а між поршнями – один моль ідеального газу. Площа перерізу верхнього поршня на $\Delta S = 10$ см^2 більша, ніж нижнього. Загальна маса поршнів $m = 5{,}0$ кг. Тиск зовнішнього повітря $p_0 = 1{,}0$ атм. На скільки кельвінів необхідно нагріти газ між поршнями, щоб вони перемістилися на $l = 5{,}0$ см?

7.39 Знайти максимально можливу температуру ідеального газу в кожному з нижченаведених процесів: 1) $p = p_0 - \alpha V^2$; 2) $p = p_0 e^{-\beta V}$, де p_0, α і β – додатні сталі; V – об’єм одного моля газу.

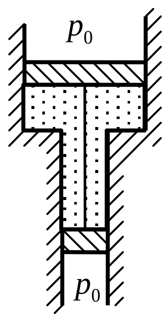


Рисунок 7.7

7.40 На скільки зменшиться атмосферний тиск $p = 100$ кПа під час підйому спостерігача над поверхнею Землі на висоту $h = 100$ м? Вважати, що температура T повітря дорівнює 290 К та не змінюється з висотою.

7.41 На якій висоті h над поверхнею Землі атмосферний тиск удвічі менший, ніж на її поверхні? Вважати, що температура T повітря дорівнює 290 К і не змінюється з висотою.

7.42 Барометр у кабіні вертольота, що летить, показує тиск $p = 90$ кПа. На якій висоті h летить вертоліт, якщо на злітній площадці барометр показував тиск $p_0 = 100$ кПа? Вважати, що температура T повітря дорівнює 290 К та не змінюється з висотою.

7.43 Знайти зміну висоти Δh, що відповідає зміні тиску на $\Delta p = 100$ Па, у двох випадках: 1) поблизу поверхні Землі, де температура $T_1 = 290$ К, тиск $p_1 = 100$ кПа; 2) на деякій висоті, де температура $T_2 = 220$ К, тиск $p_2 = 25$ кПа.

7.44 Висока циліндрична посудина з азотом знаходиться в однорідному полі тяжіння, прискорення вільного падіння в якому дорівнює g. Температура азоту змінюється з висотою так, що його густина всюди однакова. Знайти градієнт температури dT/dh.

7.45 Припустимо, тиск p і густина ρ повітря зв'язані співвідношенням $p/\rho^n = const$ незалежно від висоти (тут n – стала). Знайти відповідний градієнт температури.

7.46 Вважаючи, що температура, молярна маса повітря і прискорення вільного падіння не залежать від висоти, знайти різницю висот, на яких густина повітря для температури 0 °C відрізняються: 1) в e разів; 2) на η = 1,0 %.

7.47 Ідеальний газ із молярною масою μ міститься у високій вертикальній циліндричній посудині, площа основи якої S і висота h. Температура газу T, його тиск на нижню основу дорівнює p_0. Вважаючи, що температура і прискорення вільного падіння g не залежать від висоти, знайти масу газу в посудині.

7.48 Ідеальний газ із молярною масою μ міститься в дуже високій вертикальній циліндричній посудині в однорідному полі тяжіння, для якого прискорення вільного падіння дорівнює g. Вважаючи температуру газу всюди однаковою і такою, що дорівнює T, знайти висоту, на якій розміщеній центр тяжіння газу.

7.49 Ідеальний газ із молярною масою μ міститься в однорідному полі тяжіння, прискорення вільного падіння в якому дорівнює g. Знайти тиск газу як функцію висоти h. Взяти до уваги, що якщо $h = 0$, то тиск $p = p_0$, а температура змінюється за висотою як: 1) $T = T_0(1 - ah)$; 2) $T = T_0(1 + ah)$.

8 ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ТЕПЛОЄМНІСТЬ

Основні формули

Перший закон термодинаміки

$$Q = \Delta U + A, \tag{8 а}$$

де ΔU *– збільшення внутрішньої енергії системи.*

Робота, що виконується газом:

$$A = \int p dV. \tag{8 б}$$

Внутрішня енергія ідеального газу

$$U = \frac{m}{\mu} C_V T = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{\gamma - 1} = \frac{pV}{\gamma - 1}. \tag{8 в}$$

Молярні теплоємності за умови сталого об'єму та сталого тиску:

$$C_V = \frac{iR}{2}, \quad C_p = \frac{(i+2)R}{2}, \tag{8 г}$$

де $i = i_{пост} + i_{оберт} + 2 \cdot i_{кол}$; R *– універсальна газова стала.*

Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R. \tag{8 ґ}$$

Показник адіабати

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \tag{8 д}$$

Рівняння адіабати (рівняння Пуассона)

$$pV^{\gamma} = const. \tag{8 е}$$

8.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 8.1

Кисень займає об'єм $V_1 = 100$ л і перебуває під тиском $p_1 = 200$ кПа. Під час нагрівання газ розширився за умови сталого тиску до об'єму $V_2 = 300$ л, а потім його тиск зріс до $p_2 = 500$ кПа за умови сталого об'єму. Знайти зміну внутрішньої енергії газу ΔU, виконану газом роботу A та теплоту Q, яку одержав газ. Побудувати графік процесу.

Розв'язання

ΔU – ? A – ? Q – ?
V_1 = 100 л = $100 \cdot 10^{-3}$ м^3,
p_1 = 200 кПа = $2 \cdot 10^5$ Па,
V_2 = 300 л = $300 \cdot 10^{-3}$ м^3,
p_3 = 500 кПа = $5 \cdot 10^5$ Па

Побудуємо графік процесу в координатах $p - V$ (рис. 8.1). Вихідний стан, що характеризується тиском p_1, об'ємом V_1, на графіку позначено цифрою 1. Кисень із цього стану 1 переходить у стан 2 ізобарно. Стан 2 характеризується тиском p_2 та об'ємом V_2. Зазначимо, $p_2 = p_1$, тому що процес 1–2 є ізобарним. Далі кисень переходить у стан 3 ізохорно. У цьому стані тиск та об'єм дорівнюють відповідно p_3 та V_3. Через те що процес 2–3 є ізохорним, $V_3 = V_2$.

Для знаходження роботи, зміни внутрішньої енергії використаємо відомі формули для цих величин (8 б), (8 в). Для знаходження кількості теплоти використаємо перший закон термодинаміки (8.1а).

Знайдемо виконану газом роботу A. Зрозуміло, що

$$A = A_{12} + A_{23}, \tag{1}$$

де A_{12} – робота газу, виконана в процесі переходу із стану 1 в стан 2; A_{23} – робота газу, виконана в процесі 2–3.

Процес 1–2 є ізобарним. Тому

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1). \qquad (2)$$

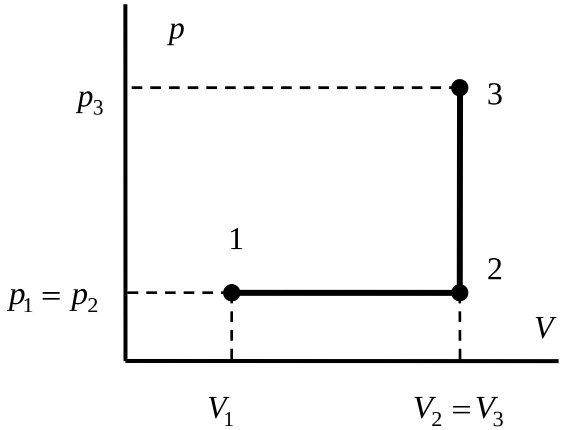


Рисунок 8.1

Процес 2–3 є ізохорним. Тому $A_{23} = 0$. Повна робота

$$A = p_1(V_2 - V_1) + 0 = p_1(V_2 - V_1). \qquad (3)$$

Знайдемо зміну внутрішньої енергії газу ΔU. Зрозуміло, що

$$\Delta U = U_3 - U_1,$$

де $U_3 = \dfrac{p_3 V_3}{\gamma - 1}$ – внутрішня енергія кисню в стані 3 (див. (8 в)); $U_1 = \dfrac{p_1 V_1}{\gamma - 1}$ – внутрішня енергія кисню в стані 1.

Тому, використовуючи рівність $V_3 = V_2$, знаходимо

$$\Delta U = \frac{p_3 V_3 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{p_3 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}. \qquad (4)$$

Як відомо, кисень є двоатомним газом. Тому число ступенів вільності молекули такого газу дорівнює 5 (i = 5), а стала адіабати (8 д) дорівнює $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4$.

Використовуючи перший закон термодинаміки (8 а), знайдемо шукану кількість теплоти:

$$Q = \Delta U + A = \frac{p_3 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} + p_1 (V_2 - V_1)\,. \qquad (5)$$

Таким чином, формули (3), (4) та (5) є розв'язками цієї задачі.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (3), (4) та (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$A = p_1 (V_2 - V_1) = 2 \cdot 10^5 \cdot \left(300 \cdot 10^{-3} - 100 \cdot 10^{-3}\right)$ = 40 кДж;

$\Delta U = \frac{p_3 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 0{,}3 - 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}1}{1{,}4 - 1}$ = 325 кДж;

$Q = \frac{p_3 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1} + p_1 (V_2 - V_1) = 325 + 40$ = 365 кДж.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункових формул (3), (4) та (5) у граничних випадках.

Припустимо, що кінцеві значення тиску та об'ємів не змінилися. Тобто $V_3 = V_2 = V_1$, $p_3 = p_2 = p_1$. Це буде означати, що ніяких процесів переходу з одного стану в інший не відбувається. Тому робота A в такому процесі, зміна внутрішньої енергії ΔU та кількість теплоти Q дорівнюють нулю: $A = \Delta U = Q = 0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат: якщо $V_3 = V_2 = V_1$, $p_3 = p_2 = p_1$, то

$$A = p_1(V_2 - V_1) = 0,\ \Delta U = \frac{p_3V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} = 0,$$

$$Q = \frac{p_3V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} + p_1(V_2 - V_1) = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $Q = \frac{p_3V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1} + p_1(V_2 - V_1)$ = 365 кДж;

$A = p_1(V_2 - V_1)$=40 кДж; $\Delta U = \frac{p_3V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1}$ = 325 кДж,

Приклад 8.2

Три молі ідеального газу, які мають температуру $T_1 = 273$ К, ізотермічно розширили в $n = 5{,}0$ разів, а потім ізохорно нагріли так, що його тиск став дорівнювати початковому. За весь процес газу передали кількість тепла $Q = 80$ кДж. Знайти сталу адіабати γ для цього газу.

Розв'язання

$\gamma - ?$
$\nu = 3$, T_1 = 273К,
$\frac{V_2}{V_1} = n = 5{,}0$,
Q = 80 кДж

Одержимо співвідношення, яке пов'язує шукану величину γ з відомими з умови задачі параметрами. Для цього використаємо перший закон термодинаміки (8 а), відомі формули для роботи та внутрішньої енергії (8 б), (8 в), а також рівняння стану (7 а).

Для того щоб були більш зрозумілими процеси, про які йдеться в умові задачі, зобразимо їх на графіку в координатах $p - V$ (рис. 8.2).

Стан 1 характеризується тиском p_1, об'ємом V_1 та температурою T_1. Із цього стану газ ізотермічно ($T_1 = const$) розширили до стану 2. Перехід із стану 1 в стан 2 зображуємо, як це випливає з рівняння стану

$$p = \frac{1}{V} \cdot \nu R T_1 \sim \frac{1}{V}, \qquad (1)$$

гіперболою. Зазначимо, що згідно з умовою задачі об’єм газу в стані 2 дорівнює

$$V_2 = n \cdot V_1 . \qquad (2)$$

Із стану 2 в стан 3 газ переходить ізохорно. Тому $V_3 = V_2$. Також з умови задачі відомо, що кінцевий тиск дорівнює початковому. Тобто $p_3 = p_1$.

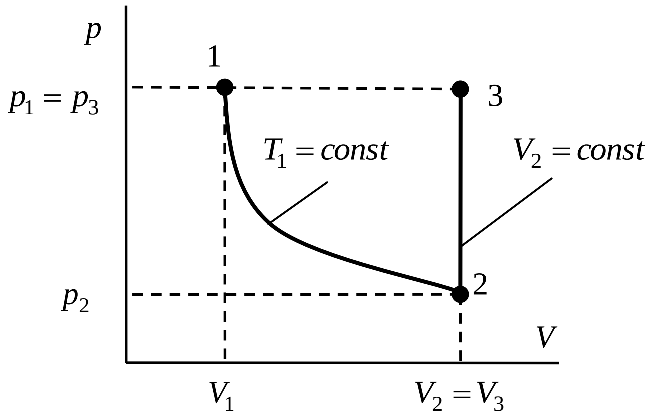


Рисунок 8.2

Реалізуємо викладений вище план розв’язування задачі. Знайдемо зв’язок між кількістю теплоти Q, яку газ одержує, з відомими з умови задачі величинами. Використаємо перший закон термодинаміки (8 а):

$$Q = \Delta U + A . \qquad (3)$$

Зрозуміло, що робота

$$A = A_{12} + A_{23}, \qquad (4)$$

де A_{12} – робота, яку газ виконує за час переходу зі стану 1 у стан 2; A_{23} – робота за час переходу зі стану 2 у стан 3.

Використовуючи (8 б), (1), знаходимо

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}(\nu R T_1) dV = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \nu R T_1 \ln(n). \quad (5)$$

Тут використали співвідношення (1) та (2). Через те що в процесі 2–3 процес відбувається ізохорно, то робота такого процесу дорівнює нулю: $A_{23} = 0$. Тоді повна робота буде мати вигляд

$$A = \nu R T_1 \ln(n). \quad (6)$$

Як випливає із співвідношення (8 в), зміна внутрішньої енергії залежить від початкової T_1 та кінцевої T_3 температур:

$$\Delta U = \frac{\nu R}{\gamma - 1}(T_3 - T_1). \quad (7)$$

Бачимо, що для знаходження ΔU потрібно знайти температуру T_3 газу в кінцевому стані. Для цього розглянемо зміну температури під час ізохорного процесу 2–3. Виходячи з рівняння ідеального газу, знаходимо:

$$p_3 V_3 = \nu R T_3, \quad p_2 V_2 = \nu R T_2, \quad V_3 = V_2. \quad (8)$$

Візьмемо до уваги, що за умовою задачі $p_3 = p_1$. Тоді з (8) одержуємо

$$T_3 = T_2 \frac{p_3 V_3}{p_2 V_2} = T_1 \frac{p_1 V_2}{p_2 V_2} = T_1 \frac{p_1}{p_2}. \quad (9)$$

Для знаходження відношення $\dfrac{p_1}{p_2}$ розглянемо ізотермічний процес 1–2:

$$p_1V_1 = \nu RT_1, \quad p_2V_2 = \nu RT_2, \quad T_1 = T_2 . \qquad (10)$$

Звідси

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} = n .$$

Таким чином, із (9) знаходимо

$$T_3 = T_1 \frac{p_1}{p_2} = T_1 \frac{V_2}{V_1} = T_1 n . \qquad (11)$$

Далі підставляємо в (3) формули (6), (7) з урахуванням (11) і одержуємо

$$Q = \frac{\nu R}{\gamma - 1}(nT_1 - T_1) + \nu RT_1 \ln(n) .$$

Звідси знаходимо шукану сталу адіабати γ:

$$\gamma = 1 + \frac{\nu RT_1(n-1)}{Q - \nu RT_1 \ln(n)} . \qquad (12)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (12), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$\gamma = 1 + \frac{\nu RT_1(n-1)}{Q - \nu RT_1 \ln(n)} = 1 + \frac{3 \cdot 8{,}3 \cdot 273 \cdot (5-1)}{8 \cdot 10^4 - 3 \cdot 8{,}3 \cdot 273 \cdot \ln(5)} = 1{,}4.$$

Відповідь: $\gamma = 1 + \frac{\nu RT_1(n-1)}{Q - \nu RT_1 \ln(n)}$ = 1,4.

Приклад 8.3

Ідеальний газ із показником адіабати γ розширили за законом $p = \alpha V$, де α – стала. Початковий об’єм газу V_1. У результаті розширення об'єм збільшився в η разів.

Знайти: а) збільшення внутрішньої енергії газу; б) роботу, виконану газом; в) молярну теплоємність газу в цьому процесі.

Розв'язання

$\Delta U-?\ \ A-?$ $C_\mu-?$
$\gamma,\quad p=\alpha V,$
$\alpha = const,$
$V_1, V_2/V_1=\eta$

Для розв'язування задачі використаємо відомі формули для роботи та збільшення внутрішньої енергії газу (8 б), (8 в), визначення молярної теплоємності, а також застосуємо для розв'язання задачі рівняння ідеального газу (7 а).

Перейдемо до розв'язування задачі. Робота газу, як відомо, визначається співвідношенням (8 б). Тоді

$$A=\int_{V_1}^{V_2} pdV=\int_{V_1}^{V_2}\alpha VdV=\frac{\alpha V_2^2}{2}-\frac{\alpha V_1^2}{2}=\frac{\alpha V_1^2\eta^2}{2}-\frac{\alpha V_1^2}{2},$$

$$A=\frac{\alpha V_1^2}{2}(\eta^2-1)\,. \qquad (1)$$

У формулі (1) використали, що за умовою задачі $p=\alpha V,\ V_2/V_1=\eta$.

Збільшення внутрішньої енергії визначається формулою (8 в):

$$\Delta U=\frac{\nu R}{\gamma-1}(T_2-T_1), \qquad (2)$$

де $T_2,\ T_1$ – температура газу відповідно в кінцевому та початковому станах; ν – кількість молів газу. Знайдемо зміну температури T_2-T_1, використовуючи рівняння Менделєєва – Клапейрона (7 а). Для початкового і кінцевого станів можемо записати:

$$p_1V_1=\nu RT_1,\ p_2V_2=\nu RT_2,\ p_1=\alpha V_1,\ p_2=\alpha V_2,\ V_2=V_1\eta\,.$$

Звідси

$$T_2 - T_1 = \frac{\alpha V_2^2}{\nu R} - \frac{\alpha V_1^2}{\nu R} = \frac{\alpha V_1^2}{\nu R}(\eta^2 - 1)\,. \qquad (3)$$

Тоді збільшення внутрішньої енергії буде дорівнювати

$$\Delta U = \frac{\nu R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = \frac{\alpha V_1^2}{\gamma - 1}(\eta^2 - 1). \qquad (4)$$

Для визначення молярної теплоємності використаємо її визначення:

$$C_\mu = \frac{1}{\nu}\cdot\frac{dQ}{dT} = \frac{1}{\nu}\cdot\lim_{\Delta T \to 0}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right) = \lim_{T_2 \to T_1}\left(\frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)}\right). \qquad (5)$$

Кількість теплоти Q знайдемо з першого закону термодинаміки: $Q = \Delta U + A$. Також, використовуючи (4), (3) та (1), знаходимо

$$\frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)} = \frac{\Delta U + A}{\nu(T_2 - T_1)} =$$

$$= \left[\frac{\alpha V_1^2}{(\gamma - 1)}(\eta^2 - 1) + \frac{\alpha V_1^2}{2}(\eta^2 - 1)\right] / \left[\nu\frac{\alpha V_1^2}{\nu R}(\eta^2 - 1)\right] = \frac{R}{\gamma - 1} + \frac{R}{2}.$$

Виходячи з (5), знаходимо молярну теплоємність

$$C_\mu = \lim_{T_2 \to T_1}\left(\frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)}\right) = \lim_{T_2 \to T_1}\left(\frac{R}{\gamma - 1} + \frac{R}{2}\right) = \frac{R}{\gamma - 1} + \frac{R}{2}. \qquad (6)$$

Таким чином, одержали формули (1), (4), (6), які є розв’язками цієї задачі.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли об’єм газу не змінюється.

Тобто $V_2 / V_1 = \eta = 1$. Зрозуміло, що в цьому разі стан газу змінюватися не буде. Тому зміна внутрішньої енергії газу та робота, яку газ виконує, будуть дорівнювати нулю $\Delta U = 0$, $A = 0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\eta = 1$, то

$$A = \frac{\alpha V_1^2(\eta^2 - 1)}{2} = \frac{\alpha V_1^2(1-1)}{2} = 0,$$

$$\Delta U = \frac{\alpha V_1^2(\eta^2 - 1)}{\gamma - 1} = \frac{\alpha V_1^2(1-1)}{\gamma - 1} = 0.$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $\Delta U = \frac{\alpha V_1^2}{\gamma - 1}(\eta^2 - 1)$; б) $A = \frac{\alpha V_1^2(\eta^2 - 1)}{2}$;

в) $C = \frac{R}{\gamma - 1} + \frac{R}{2}$.

Приклад 8.4

Є ідеальний газ, молярна теплоємність C_V якого відома. Знайти молярну теплоємність цього газу як функцію його об'єму V, якщо газ здійснює процес за законом: а) $T = T_0 \cdot e^{aV}$; б) $p = p_0 \cdot e^{aV}$, де T_0, p_0 і a – сталі.

Розв'язання

$C_\mu = C_\mu(V) - ?$
C_V,   а) $T = T_0 e^{aV}$;   б) $p = p_0 e^{aV}$

Для розв'язування задачі використаємо визначення молярної теплоємності, перший закон термодинаміки та рівняння стану ідеального газу.

Згідно з визначенням молярної теплоємності можемо записати

$$C = \frac{1}{\nu}\frac{dQ}{dT}, \tag{1}$$

де ν – кількість молей газу, який бере участь у тепловому процесі. Відповідно до першого закону термодинаміки (8 а) для елементарної кількості теплоти можемо записати

$$\delta Q = dU + \delta A = \nu C_V dT + pdV . \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і отримуємо

$$C = \frac{1}{\nu}\left(\nu C_V \frac{dT}{dT} + p\frac{dV}{dT}\right) = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT} . \qquad (3)$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження $\frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT}$ як функції об’єму.

Розглянемо випадок (а). Знайдемо величину dT, виходячи з умови $T = T_0 e^{aV}$. Як відомо,

$$dT = \frac{dT}{dV}dV = \frac{d(T_0 e^{aV})}{dV}dV = aT_0 e^{aV}dV = aTdV , \ p = \frac{\nu RT}{V} . \qquad (4)$$

Друге рівняння в (4) одержали з рівняння стану (7 а). Далі підставляємо (4) в (3) і одержуємо

$$C = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT} = C_V + \frac{\nu RT}{\nu V}\cdot\frac{dV}{aTdV} ,$$

$$C = C_V + \frac{R}{aV} . \qquad (5)$$

Розглянемо випадок (б). Знайдемо величину dT, виходячи з рівняння стану та умови $p = p_0 e^{aV}$:

$$pV = \nu RT , \ T = \frac{pV}{\nu R} = \frac{p_0 e^{aV}\cdot V}{\nu R} ,$$

$$dT = \frac{dT}{dV}dV = \frac{d}{dV}\left(\frac{p_0 e^{aV}\cdot V}{\nu R}\right)\cdot dV =$$

$$= \frac{ap_0 e^{aV} \cdot V + p_0 e^{aV}}{\nu R} dV \,. \qquad (6)$$

Далі підставляємо формулу (6) та умову $p = p_0 e^{aV}$ в (3) і одержуємо

$$C = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT} = C_V + \frac{p_0 e^{aV}}{\nu} \cdot \frac{dV \cdot \nu R}{(ap_0 e^{aV} \cdot V + p_0 e^{aV})dV},$$

$$C = C_V + \frac{R}{aV + 1} \,. \qquad (7)$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок (а), коли в співвідношенні $T = T_0 \cdot e^{aV}$ стала a дорівнює нулю ($a = 0$). Це означає, що процес є ізотермічним, тому що $T = T_0 \cdot e^{aV} = T_0 \cdot e^{0 \cdot V} = T_0 = const$. Як відомо, за умови ізотермічного процесу теплоємність дорівнює нескінченності: $C = dQ / dT = dQ / 0 = \infty$. Із розрахункової формули (5) випливає такий самий результат. Якщо $a = 0$, то $C = C_V + \dfrac{R}{aV} = C_V + \dfrac{R}{0 \cdot V} = \infty$.

Отже, розрахункова формула (5) не суперечить фізичним міркуванням.

Розглянемо випадок (б), якщо у співвідношенні $p = p_0 \cdot e^{aV}$ стала a дорівнює нулю ($a = 0$). Це означає, що процес є ізобарним, тому що $p = p_0 \cdot e^{aV} = p_0 \cdot e^{0 \cdot V} = p_0 = const$. Як відомо, молярна теплоємність для процесу за умови сталого тиску відповідно до рівняння Майєра (8 ґ) дорівнює $C_p = C_V + R$.

Із розрахункової формули (7) випливає такий самий результат. Якщо $a = 0$, то

$$C = C_V + \frac{R}{aV + 1} = C_V + \frac{R}{0 \cdot V + 1} = C_V + R\,.$$

Отже, розрахункова формула (7) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: а) $C = C_V + R / aV$; б) $C = C_V + R/(1 + aV)$.

Приклад 8.5

Дві теплоізольовані посудини місткістю $V_1 = 1$ л та $V_2 = 3$ л з'єднані трубкою з краном (рис. 8.3). До відкриття крана у першій посудині міститься азот під тиском $p_1 = 5 \cdot 10^4$ Па з температурою $T_1 = 273$ К, а в другій – аргон під тиском $p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па з температурою $T_2 = 373$ К. Якими будуть рівноважні значення тиску та температури, якщо відкрити кран?

Розв'язання

$T - ?$ $p - ?$
$V_1 = 1$ л = $1 \cdot 10^{-3}$ м^3,
$V_2 = 3$ л = $3 \cdot 10^{-3}$ м^3,
$p_1 = 5 \cdot 10^4$ Па,
$p_2 = 1{,}5 \cdot 10^5$ Па,
$T_1 = 273$ К,
$T_2 = 373$ К

Після відкриття крана азот та аргон рівномірно розподіляться в системі двох посудин. Завдяки перемішуванню газів установлюються рівноважна температура T та рівноважний тиск p. Цей рівноважний тиск p згідно із законом Дальтона (7 б) буде дорівнювати сумі парціальних тисків азоту p_1' та аргону p_2':

$$p = p_1' + p_2'\,. \tag{1}$$

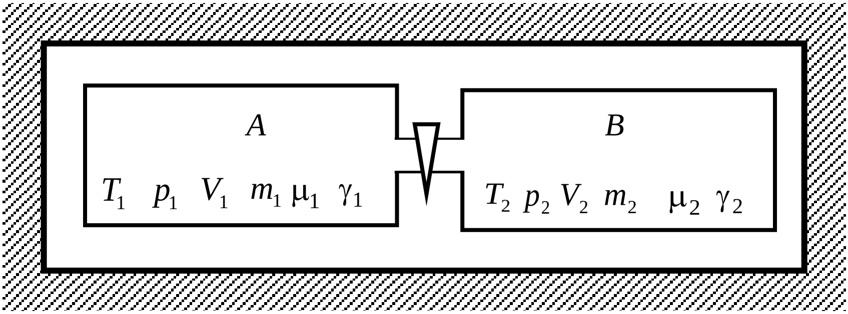


Рисунок 8.3

Для знаходження рівноважної температури T необхідно взяти до уваги, що система двох посудин теплоізольована. Це означає, що теплообмін із зовнішніми тілами відсутній ($Q=0$). Об'єм системи двох посудин не змінюється. Це означає, що робота газів над зовнішніми тілами дорівнює нулю ($A=0$). Тому, виходячи з першого закону термодинаміки, можемо записати для системи газів:

$$Q=\Delta U_{сист}+A, \quad Q=0, \quad A=0,$$

де $\Delta U_{сист}$ – зміна внутрішньої енергії системи. Звідси знаходимо

$$\Delta U_{сист}=0 \quad \text{або} \quad U_{сист}=const. \qquad (2)$$

Тобто внутрішня енергія системи газів в умовах цієї задачі не змінюється.

Таким чином, для розв'язування задачі необхідно використати умову збереження внутрішньої енергії газів, закон Дальтона та рівняння ідеального газу (7 а).

Перейдемо до безпосереднього розв'язування задачі. Знайдемо рівноважний тиск p, виходячи з співвідношення (1). Позначимо через m_1 та μ_1 відповідно масу та молярну масу азоту, а через m_2 та μ_2 – відповідно масу та молярну масу аргону. Тоді парціальні тиски газів у кінцевому стані будуть дорівнювати:

$$p_1' = \frac{1}{(V_1 + V_2)} \cdot \frac{m_1}{\mu_1} RT \ ,$$

$$p_2' = \frac{1}{(V_1 + V_2)} \cdot \frac{m_2}{\mu_2} RT \ . \qquad (3)$$

Тут використали рівняння ідеального газу (7 а), а також те, що обидва гази рівномірно розподілилися в об'ємі двох посудин $V_1 + V_2$, через T позначили рівноважну температуру. Щоб знайти m_1 / μ_1 та m_2 / μ_2, застосуємо рівняння Менделєєва – Клапейрона до початкового стану газів:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu_1} RT_1 , \quad p_2 V_2 = \frac{m_2}{\mu_2} RT_2 .$$

Звідси:

$$\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{p_1 V_1}{RT_1} , \quad \frac{m_2}{\mu_2} = \frac{p_2 V_2}{RT_2} . \qquad (4)$$

Тоді рівноважний тиск p знайдемо, підставляючи в (1) формули (3) та (4):

$$p = \frac{1}{(V_1 + V_2)} \cdot \frac{p_1 V_1}{RT_1} RT + \frac{1}{(V_1 + V_2)} \cdot \frac{p_2 V_2}{RT_2} RT$$

або

$$p = \frac{T}{V_1 + V_2} \cdot \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) . \qquad (5)$$

Знайдемо рівноважну температуру T. Для цього використаємо те, що повна внутрішня енергія газів згідно з (2) не змінюється. Вона однакова в початковому та кінцевому станах:

$$U_{сист} = U_1 + U_2 = U_1' + U_2' = const\,, \tag{6}$$

де через U_1 та U_2 позначено внутрішні енергії азоту та аргону в початковому стані; U_1' та U_2' – внутрішні енергії азоту та аргону в кінцевому стані. Внутрішні енергії в початковому стані азоту та аргону відповідно дорівнюють

$$U_1 = \frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{RT_1}{\gamma_1 - 1}, \quad U_2 = \frac{m_2}{\mu_2}\cdot\frac{RT_2}{\gamma_2 - 1}. \tag{7}$$

Внутрішні енергії азоту та аргону в кінцевому стані відповідно дорівнюють:

$$U_1' = \frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{RT}{\gamma_1 - 1}, \quad U_2' = \frac{m_2}{\mu_2}\cdot\frac{RT}{\gamma_1 - 1}. \tag{8}$$

Для одержання співвідношень (7), (8) використали формулу (8 в). У формулах (7) та (8) γ_1 та γ_2 – сталі адіабати для азоту та аргону відповідно. Як відомо, ці сталі пов'язані з кількістю ступенів вільності молекули газу співвідношеннями (8 д):

$$\gamma_1 = \frac{i_1 + 2}{i_1}, \quad \gamma_2 = \frac{i_2 + 2}{i_2}.$$

Азот – двоатомний газ, для якого кількість ступенів вільності $i_1 = 5$. Аргон – одноатомний газ, для якого кількість ступенів вільності $i_2 = 3$. Тому:

$$\gamma_1 = \frac{5+2}{5} = 1{,}4, \quad \gamma_2 = \frac{3+2}{3} = 1{,}67.$$

Далі підставляємо (7), (8) в (6) і знаходимо:

$$\frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{RT_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{m_2}{\mu_2}\cdot\frac{RT_2}{\gamma_2 - 1} = \frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{RT}{\gamma_1 - 1} + \frac{m_2}{\mu_2}\cdot\frac{RT}{\gamma_2 - 1},$$

$$T=\left[\frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{RT_1}{\gamma_1-1}+\frac{m_2}{\mu_2}\cdot\frac{RT_2}{\gamma_2-1}\right]\Big/\left[\frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{R}{\gamma_1-1}+\frac{m_2}{\mu_2}\cdot\frac{R}{\gamma_2-1}\right]. \quad (9)$$

Тепер у (9) підставимо (4) й одержуємо розрахункову формулу рівноважної температури T у кінцевому стані:

$$T=\left(\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right)\Big/\left(\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right). \quad (10)$$

Тиск газів у кінцевому стані знаходимо, підставивши в (5) знайдену рівноважну температуру (10):

$$p=\frac{\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\cdot\left(\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right)}{\left(\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right)(V_1+V_2)}. \quad (11)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (10) та (11), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$T=\left(\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right)\Big/\left(\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right)=$$

$$=\frac{\left(\frac{5\cdot10^4\cdot1\cdot10^{-3}}{1,4-1}+\frac{1,5\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3}}{1,67-1}\right)}{\left(\frac{5\cdot10^4\cdot1\cdot10^{-3}}{273\cdot(1,4-1)}+\frac{1,5\cdot10^5\cdot3\cdot10^{-3}}{373\cdot(1,67-1)}\right)}\text{К} = 353\ \text{К}.$$

$$p=\frac{\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\cdot\left(\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right)}{\left(\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right)(V_1+V_2)} = 1,23\cdot10^5\ \text{Па}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли тиски та температури газів у вихідному стані є однаковими ($p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$). Зрозуміло, що в цьому випадку після відкриття крана тиск та температура змінюватися не будуть. Тобто в кінцевому стані рівноважні тиск та температура будуть такими самими, як і у вихідному стані ($p = p_1 = p_2$). З розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $p_1 = p_2$, $T_1 = T_2$, то

$$T = \left(\frac{p_1 V_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{p_2 V_2}{\gamma_2 - 1} \right) \Big/ \left(\frac{p_1 V_1}{T_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{p_2 V_2}{T_2(\gamma_2 - 1)} \right) =$$

$$= p_1 \left(\frac{V_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{V_2}{\gamma_2 - 1} \right) \Big/ \left(\frac{p_1}{T_1} \left(\frac{V_1}{(\gamma_1 - 1)} + \frac{p_2 V_2}{T_2(\gamma_2 - 1)} \right) \right) = T_1 .$$

$$p = \frac{\left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) \cdot \left(\frac{p_1 V_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{p_2 V_2}{\gamma_2 - 1} \right)}{\left(\frac{p_1 V_1}{T_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{p_2 V_2}{T_2(\gamma_2 - 1)} \right)(V_1 + V_2)} =$$

$$= \frac{\frac{p_1}{T_1}(V_1 + V_2) \cdot p_1 \left(\frac{V_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{V_2}{\gamma_2 - 1} \right)}{\frac{p_1}{T_1} \left(\frac{V_1}{(\gamma_1 - 1)} + \frac{V_2}{(\gamma_2 - 1)} \right)(V_1 + V_2)} = p_1 .$$

Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь:

$$T = \left(\frac{p_1 V_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{p_2 V_2}{\gamma_2 - 1} \right) \Big/ \left(\frac{p_1 V_1}{T_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{p_2 V_2}{T_2(\gamma_2 - 1)} \right) = 353 \text{ К},$$

$$p=\frac{\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\cdot\left(\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right)}{\left(\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right)(V_1+V_2)}=1{,}23\cdot 10^5\ \text{Па}.$$

8.2 Задачі для самостійного розв'язування

8.1 Обчислити питомі теплоємності c_V і c_p газів: 1) гелію; 2) водню; 3) вуглекислого газу.

8.2 Різниця питомих теплоємностей $c_V - c_p$ деякого двоатомного газу дорівнює 260 Дж/(кг·К). Знайти молярну масу μ газу та його питомі теплоємності c_V і c_p.

8.3 Які питомі теплоємності c_V і c_p суміші газів, що містить кисень масою m_1 = 10 г і азот масою m = 20 г?

8.4 Визначити питому теплоємність c_V суміші газів, що містить V_1 = 5 л водню і V_2 = 3 л гелію. Гази знаходяться в однакових умовах.

8.5 Визначити питому теплоємність c_p суміші кисню і азоту, якщо кількість речовини ν_1 першої компоненти дорівнює 2 молі, а кількість речовини ν_2 другої компоненти дорівнює 4 молі.

8.6 У балоні містяться аргон і азот. Визначити питому теплоємність c_V суміші цих газів, якщо масові частки аргону (ω_1) й азоту (ω_2) однакові і дорівнюють ω = 0,5.

8.7 Суміш газів складається з хлору і криптону, взятих в однакових умовах і в однакових об'ємах. Визначити питому теплоємність c_p суміші.

8.8 Визначити питому теплоємність c_V суміші ксенону і кисню, якщо кількості речовини газів у суміші однакові і дорівнюють ν.

8.9 Знайти показник адіабати γ для суміші газів, що містить гелій масою m_1 = 10 г і водень масою m_2 = 4 г.

8.10 Суміш газів складається з аргону й азоту, взятих в однакових умовах і в однакових об'ємах. Визначити показник адіабати γ такої суміші.

8.11 Знайти показник адіабати γ суміші водню і неону, якщо масові частки обох газів у суміші однакові і дорівнюють ω = 0,5.

8.12 Знайти показник адіабати γ суміші газів, що містить кисень і аргон, якщо кількості речовини того й іншого газу в суміші однакові і дорівнюють ν.

8.13 На нагрівання кисню масою m = 160 г на ΔT = 12 К було витрачено кількість теплоти Q = 1,76 кДж. Як проходив процес: за умови сталого об'єму або сталого тиску?

8.14 Під час адіабатного стискання газу його об'єм зменшився в n = 10 разів, а тиск збільшився в k = 21,4 разів. Визначити відношення C_p / C_V теплоємностей газів.

8.15 Водень масою m = 4 г був нагрітий на ΔT = 10 К за умови сталого тиску. Визначити роботу A, яку виконує газ під час розширення.

8.16 Газ, що займав об'єм V_1 = 12 л під тиском p = 100 кПа, був ізобарно нагрітий від температури T_1 = 300 К до T_2 = 400 К. Визначити роботу розширення газу A.

8.17 Яка робота A виконується під час ізотермічного розширення водню масою m = 5 г, температура якого T = 290 К, коли об'єм газу збільшується в три рази?

8.18 Під час адіабатного стискання кисню масою m = 1 кг здійснена робота A = 100 кДж. Визначити кінцеву температуру T_2 газу, якщо до стискання кисень мав температуру $T_1 = 300$ К.

8.19 Визначити роботу A адіабатного розширення водню масою $m = 4$ г, якщо температура газу зменшилася на $\Delta T = 10$ К.

8.20 Азот масою $m = 2$ г мав температуру $T_1 = 300$ К, був адіабатно стиснутий так, що його об'єм зменшився в $n = 10$ разів. Визначити кінцеву температуру T_2 газу і роботу A на стискання газу.

8.21 Кисень, що займав об'єм $V_1 = 1$ л під тиском $p_1 = 1{,}2$ МПа, адіабатно розширився до об'єму $V_2 = 10$ л. Визначити роботу розширення газу A.

8.22 Азот масою $m = 5$ кг нагріли на $\Delta T = 150$ К за умови сталого об'єму. Знайти: 1) кількість теплоти Q, що надана газу; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) виконану газом роботу A.

8.23 Водень займає об'єм $V_1 = 10$ м^3, має тиск $p_1 = 100$ кПа. Газ нагріли за умови сталого об'єму до тиску $p_2 = 300$ кПа. Визначити: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) роботу A, виконану газом; 3) кількість теплоти Q, одержану газом.

8.24 Під час ізохорного нагрівання кисню об'ємом $V = 50$ л тиск газу змінився на $\Delta p = 0{,}5$ МПа. Знайти кількість теплоти Q, одержану газом.

8.25 Балон ємністю $V = 20$ л містить водень із температурою $T = 300$ К під тиском $p = 0{,}4$ МПа. Якими будуть температура T_1 і тиск p_1, якщо газу передати кількість теплоти $Q = 6$ кДж?

8.26 Кисень нагрівається за умови сталого тиску $p = 80$ кПа. Його об'єм збільшується від $V_1 = 1$ м^3 до $V_2 = 3$ м^3. Визначити: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії кисню; 2) роботу A, виконану киснем під час розширення; 3) кількість теплоти Q, одержану газом.

8.27 Азот нагрівається за умови сталого тиску. Йому було надано кількість теплоти Q = 21 кДж. Визначити роботу A, яку виконав газ, зміну його внутрішньої енергії ΔU.

8.28 Гелій масою m = 1 г був нагрітий на ΔT = 100 К за умови сталого тиску p. Визначити: 1) кількість теплоти Q, передану газу; 2) роботу газу A; 3) приріст ΔU внутрішньої енергії.

8.29 Яка частина ω_1 кількості теплоти Q, що підводиться до ідеального газу під час ізобарного процесу, витрачається на збільшення ΔU внутрішньої енергії газу і яка частина ω_2 – на роботу A розширення? Розглянути три випадки, коли газ: 1) одноатомний; 2) двоатомний; 3) триатомний.

8.30 Водяна пара розширюється за умови сталого тиску. Визначити роботу A розширення, якщо парі надана кількість теплоти Q = 4 кДж.

8.31 Азот масою m = 200 г розширився ізотермічно, температура азоту T = 280 К. Під час цього об'єм газу збільшується в два рази. Знайти: 1) зміну ΔU внутрішньої енергії газу; 2) виконану під час розширення газу роботу A; 3) кількість теплоти Q, одержану газом.

8.32 Водень масою m = 10 г нагрівали на ΔT = 200 К, за цих умов газу була передана кількість теплоти Q = 40 кДж. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу і виконану ним роботу A.'

8.33 Водень масою m = 1 г за умови ізотермічного розширення мав температуру T = 280 К. Об'єм газу збільшився в три рази. Визначити роботу A розширення газу й одержану газом кількість теплоти Q.

8.34 Азот, що займав об’єм V_1 = 10 л під тиском p_1= 0,2 МПа, ізотермічно розширився до об'єму V_2 = 28 л.

Визначити роботу A розширення газу і кількість теплоти Q, одержану газом.

8.35 Під час ізотермічного розширення кисню, кількість речовини якого $\nu = 1$ моль і температура $T = 300$ К, газу була передана кількість теплоти $Q = 2$ кДж. У скільки разів збільшився об'єм газу?

8.36 Яка кількість теплоти Q виділиться, коли азот масою $m = 1$ г, що має температуру $T = 280$ К і тиск $p_1 = 0{,}1$ МПа, ізотермічно стиснути до тиску $p_2 = 1$ МПа?

8.37 Під час розширення водень виконав роботу $A = 6$ кДж. Визначити кількість теплоти Q, підведену до газу, якщо процес проходив: 1) ізобарно; 2) ізотермічно.

8.38 Під час адіабатного розширення кисню з початковою температурою $T_1 = 320$ К внутрішня енергія зменшилася на $\Delta U = 8{,}4$ кДж, а його об'єм збільшився в $n = 10$ разів. Визначити масу m кисню.

8.39 Водень за нормальних умов мав об'єм $V_1 = 100$ м^3. Знайти зміну ΔU внутрішньої енергії газу під час його адіабатного розширення до об'єму $V_2 = 150$ м^3.

8.40 У циліндрі під поршнем міститься водень, масою $m = 0{,}02$ кг і температурою $T_1 = 300$ К. Водень спочатку розширився адіабатно, збільшивши свій об'єм у п'ять разів, а потім був стиснений ізотермічно. Причому об'єм газу зменшився у п'ять разів. Знайти температуру T_2 в кінці адіабатного розширення і повну роботу A, виконану газом. Зобразити процес графічно.

8.41 Під час адіабатного стискання кисню масою $m = 20$ г його внутрішня енергія збільшилася на $\Delta U = 8$ кДж і температура підвищилася до $T_2 = 900$ К. Знайти: 1) зміну температури ΔT; 2) кінцевий тиск газу p_2, якщо початковий тиск $p_1 = 200$ кПа.

8.42 Повітря, що займало об’єм V_1 = 10 л та мало тиск p_1 = 100 кПа, було адіабатно стиснено до об'єму V_2 = 1 л. Під яким тиском p_2 знаходиться повітря після стискання?

8.43 Горюча суміш у двигуні дизеля займається, коли його температура T_2 = 1100 К. Початкова температура суміші T_1 = 350 К. У скільки разів потрібно зменшити об'єм суміші під час стискання, щоб вона зайнялася? Стискання вважати адіабатним. Показник адіабати γ для суміші взяти таким, що дорівнює 1,4.

8.44 Вуглекислий газ CO_2 масою m = 400 г був нагрітий на ΔT = 50 К за умови сталого тиску. Визначити зміну внутрішньої енергії газу ΔU, кількість теплоти Q, одержану газом, і виконану ним роботу A.

8.45 Кисень масою m = 800 г, охолоджений від температури t_1 = 100 °C до температури t_2 = 20 °C, зберіг незмінним свій об'єм V. Визначити: 1) кількість теплоти Q, яку одержав газ; 2) зміну внутрішньої енергії ΔU; 3) виконану газом роботу A.

8.46 Тиск азоту об'ємом V = 3 л під час нагрівання збільшився на Δp = 1 МПа. Визначити кількість теплоти Q, яку одержав газ, якщо об'єм газу залишився незмінним.

8.47 Показати, що внутрішня енергія U повітря в кімнаті не залежить від температури, якщо зовнішній тиск p постійний. Обчислити внутрішню енергію U, коли тиск p дорівнює нормальному атмосферному тиску, об’єм кімнати V = 40 м^3.

8.48 Два термоізольованих балони *1* і *2* наповнені повітрям і з’єднані короткою трубкою з краном. Відомі об'єми балонів, а також тиск і температура повітря в них (V_1, p_1, T_1 і V_2, p_2, T_2). Знайти температуру і тиск повітря, які встановляться після відкриття крана.

8.49 Водень, що міститься за нормальних умов у закритій посудині об'ємом V = 5,0 л, охолодили на

$\Delta T = 55$ К. Знайти приріст внутрішньої енергії газу і кількість відданого ним тепла.

8.50 Яку кількість тепла необхідно передати азоту під час ізобарного нагрівання, щоб газ виконав роботу $A = 2{,}0$ Дж?

8.51 Один моль деякого ідеального газу ізобарно нагріли на $\Delta T = 72$ К. У цьому процесі йому передали кількість тепла $Q = 1{,}60$ кДж. Знайти виконану газом роботу, приріст його внутрішньої енергії і величину $\gamma = C_p/C_V$.

8.52 Два молі ідеального газу з температурою $T_0 = 300$ К охолодили ізохорно, внаслідок чого його тиск зменшився в $n = 2{,}0$ рази. Потім газ ізобарно розширили так, що в кінцевому стані його температура дорівнювала початковій. Знайти кількість тепла, поглиненого газом у цьому процесі.

8.53 Обчислити величину $\gamma = C_p / C_V$ для газової суміші, що складається з $\nu_1 = 2{,}0$ молей кисню і $\nu_2 = 3{,}0$ молей вуглекислого газу. Гази вважати ідеальними.

8.54 Обчислити питомі теплоємності c_p і c_V для газової суміші, що складається з 7,0 г азоту і 20 г аргону. Гази вважати ідеальними.

8.55 У вертикальному циліндрі під поршнем міститься один моль деякого ідеального газу з температурою T. Простір над поршнем з'єднується з атмосферою. Яку роботу необхідно виконати, щоб, повільно піднімаючи поршень, ізотермічно збільшити об'єм газу під ним у n разів? Тертям поршня об стінки циліндра знехтувати.

8.56 Усередині закритого з обох кінців горизонтального циліндра знаходиться поршень. Спочатку поршень ділить циліндр на дві однакові частини, кожна об'ємом V_0, в яких міститься ідеальний газ однакової температури і під одним і тим самим тиском p_0. Яку роботу необхідно виконати, щоб, повільно рухаючи поршень, ізотермічно збільшити об'єм однієї частини газу в n разів порівняно з об'ємом іншої частини?

8.57 Зобразити для ідеального газу наближені графіки ізохорного, ізобарного, ізотермічного та адіабатного процесів на діаграмі: 1) p, T; 2) V, T.

8.58 Один моль кисню, що має температуру T_0 = 290 К, адіабатно стиснули так, що його тиск підвищився у η = 10,0 разів. Знайти: 1) температуру газу після стискання; 2) роботу, виконану над газом.

8.59 Деяку масу азоту стиснули в η = 5,0 разів (за об'ємом) один раз адіабатно, інший раз ізотермічно. Початковий стан газу в обох випадках однаковий. Знайти відношення відповідних робіт, що витрачаються на стискання.

8.60 Усередині закритого термоізольованого циліндра з ідеальним газом знаходиться легкий теплопровідний поршень. У рівноважному стані поршень ділить циліндр на дві однакові частини, температура газу дорівнює T_0. Поршень почали повільно переміщувати. Знайти температуру газу як функцію відношення η об'єму більшої частини до об'єму меншої частини. Показник адіабати газу γ.

8.61 Об'єм ідеального газу з показником адіабати γ змінюють за законом $V = a/T$ де a – стала. Знайти кількість тепла, яку одержав один моль газу в цьому процесі, коли температура газу підвищилася на ΔT.

8.62 Знайти молярну теплоємність ідеального газу за умови політропного процесу pV^n = const, якщо показник адіабати газу дорівнює γ. За яких значень показника політропи n теплоємність газу буде від'ємною?

8.63 Під час деякого політропного процесу об'єм аргону був збільшений у α = 4,0 рази. Тиск за цих умов зменшився в β = 8,0 разів. Знайти молярну теплоємність аргону в цьому процесі, вважаючи газ ідеальним.

8.64 Один моль аргону розширили політропно з показником n = 1,50. За цих умов температура газу змінилася на $\Delta T = -26$ К. Знайти: 1) кількість одержаного газом тепла; 2) роботу, виконану газом.

8.65 Ідеальний газ з показником адіабати γ розширюють так, що передане газу тепло дорівнює зменшенню його внутрішньої енергії. Знайти: 1) молярну теплоємність газу в цьому процесі; 2) рівняння процесу в параметрах T, V; 3) виконану молем газу роботу під час збільшення його об'єму в η разів.

8.66 Один моль ідеального газу з показником адіабати γ виконує процес, під час якого його тиск залежить від температури за законом $p = aT^{\alpha}$, де a і α – сталі. Знайти: 1) роботу, яку виконає газ, якщо його температура підвищиться на ΔT; 2) молярну теплоємність газу в цьому процесі. За яких значень α теплоємність буде від’ємною?

8.67 Ідеальний газ із показником адіабати γ виконує процес, під час якого його внутрішня енергія залежить від об'єму згідно із законом $U = aV^{\alpha}$, де a і α – сталі. Знайти: 1) роботу, яку виконає газ, і тепло, яке потрібно надати йому, щоб внутрішня енергія збільшилася на ΔU; 2) молярну теплоємність газу в цьому процесі.

8.68 Один моль ідеального газу, теплоємність якого за умови сталого тиску дорівнює C_p, виконує процес за законом $T = T_0 + \alpha V$, де T_0 і α – сталі. Знайти: 1) теплоємність газу як функцію його об'єму; 2) надане газу тепло, якщо його об'єм збільшився від V_1 до V_2.

8.69 Знайти для ідеального газу рівняння процесу (в змінних T, V), коли молярна теплоємність газу змінюється згідно із законом: 1) $C = C_V + \alpha T$; 2) $C = C_V + \beta V$; 3) $C = C_V + ap$. Тут α, β і a – сталі.

8.70 Молярна теплоємність ідеального газу з показником адіабати γ під час деякого процесу змінюється згідно із законом $C = \alpha / T$, де α – стала. Знайти: 1) роботу, виконану одним молем газу під час його нагрівання від температури T_0 до температури, більшої в η разів; 2) рівняння процесу в параметрах p, V.

9 ДРУГИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ЕНТРОПІЯ

Основні формули

ККД теплової машини

$$\eta = A / Q_1 = 1 - Q_2' / Q_1 , \tag{9 а}$$

де Q_1 *– тепло, що одержує робоче тіло;* Q_2' *– тепло, яке віддає робоче тіло.*

ККД циклу Карно

$$\eta = (T_1 - T_2) / T_1 , \tag{9 б}$$

T_1 *і* T_2 *– температури нагрівача й холодильника.*

Зміна ентропії системи в оборотному процесі

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} , \tag{9 в}$$

де δQ *– елементарне тепло, одержане системою;* T *– температура системи.*

9.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 9.1

Газ, що є робочим тілом у циклі Карно, одержав від нагрівача теплоту $Q_1 = 4{,}38$ кДж і виконав роботу $A = 2{,}4$ кДж. Визначити температуру T_1 нагрівача, якщо температура холодильника $T_2 = 273$ К.

Розв'язання

$T_1 - ?$
$Q_1 = 4{,}38$ кДж, $A = 2{,}4$ кДж, $T_2 = 273$ К

Для розв'язування задачі використаємо відомі формули для ККД теплової машини та ККД циклу Карно (9 а), (9 б). З одержаної системи рівнянь знайдемо шукану величину T_1.

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Як відомо, ККД теплової машини визначається співвідношенням (9 а):

$$\eta = A / Q_1, \qquad (1)$$

а ККД циклу Карно – (9 б):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2)$$

Система рівнянь (1), (2) є системою двох рівнянь з двома невідомими (η_1, T_1). Розв'язуємо цю систему і знаходимо шукану температуру нагрівача:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \qquad \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{A}{Q_1},$$

$$T_1 = \frac{T_2 \cdot Q_1}{Q_1 - A}. \qquad (3)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (3), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$T_1 = \frac{T_2 \cdot Q_1}{Q_1 - A} = \frac{273 \cdot 4{,}38 \cdot 10^3}{4{,}38 \cdot 10^3 - 2{,}4 \cdot 10^3} \text{ К} = 604 \text{ К}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо уявний випадок, коли корисна робота газу наближено дорівнює нулю $A \to 0$. Це означає, що ККД циклу, як це випливає з (9 а), теж дорівнює нулю $\eta = A / Q_1 \to 0$. У цьому випадку, як можна з'ясувати з (9 б), температури нагрівача та холодильника є однаковими $T_1 - T_2 = \eta T_1 \to 0$. З розрахункової формули випливає такий самий результат. Коли $A \to 0$, то $T_1 = \frac{T_2 \cdot Q_1}{Q_1 - A} \approx \frac{T_2 \cdot Q_1}{Q_1} = T_2$.

Відповідь: $T_1 = \frac{T_2 \cdot Q_1}{Q_1 - A}$ =604 К.

Приклад 9.2

Один моль одноатомного ідеального газу виконує у тепловій машині цикл Карно між тепловими резервуарами з температурами $T_1 = 400$ К та $T_2 = 300$ К. Найменший об'єм газу в циклі становить $V_1 = 5$ л, а найбільший – $V_3 = 20$ л. Яку роботу A виконує машина за один цикл? Скільки теплоти Q_1 вона бере від нагрівника за один цикл? Скільки теплоти Q_2' надходить у холодильник?

Розв'язання

Q_1 –? A – ? Q_2' – ?
ν = 1 моль,
T_1 = 400 К,
T_2 = 300 К,
V_1 = 5 л = 5 · 10^{-3} м^3,
V_3 = 20 л = 20 · 10^{-3} м^3

Для знаходження теплоти, яку передає нагрівник робочому тілу Q_1, розглянемо відповідні ділянки циклу Карно і застосуємо перший закон термодинаміки. Також використаємо рівняння стану ідеального газу (7 а) та рівняння адіабати (8 е), щоб виразити шукану теплоту Q_1 із заданими з умови задачі величинами. Для визначення A та Q_2' використаємо формули (9 а) та (9 б).

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Розглянемо цикл Карно (рис. 9.1). Як відомо, циклом Карно називають цикл, що складається із двох ізотерм (ділянки 1–2 та 3–4) та двох адіабат (ділянки 2–3 та 4–1). З рисунка випливає, що найменший об'єм V_1 газ займає у стані 1, а найбільший об'єм V_3 – у стані 3. Передавання теплоти Q_1 від нагрівника робочому тілу відбувається саме на ділянці 1–2. За рахунок цього відбувається ізотермічне розширення.

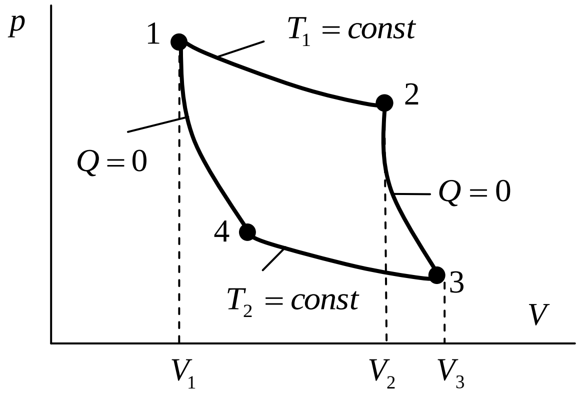


Рисунок 9.1

Знайдемо теплоту Q_1 за допомогою першого закону термодинаміки:

$$Q_1 = \Delta U_{12} + A_{12}, \tag{1}$$

де ΔU_{12} та A_{12} – відповідно зміна внутрішньої енергії та робота на ділянці 1–2. Через те що процес розширення на ділянці 1–2 відбувається за умови сталої температури, зміна внутрішньої енергії дорівнює нулю:

$$\Delta U_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} - \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1} = 0. \tag{2}$$

Робота під час ізотермічного розширення визначається співвідношенням

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu R T_1}{V} dV = \nu R T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{3}$$

Тут використали рівняння Менделєєва – Клапейрона; V_1 – об’єм у стані 1, V_2 – об’єм в стані 2. Підставляємо (3) та (2) в (1) і одержуємо

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \tag{4}$$

Таким чином, щоб знайти Q_1, необхідно визначити об’єм V_2. Для визначення об’єму V_2 розглянемо ділянку 2–3 (рис. 9.1), на якій відбувається адіабатне розширення. Адіабатний процес описується рівнянням адіабати (8 е), яке в координатах температура – об’єм має вигляд $TV^{\gamma-1} = const$. Тобто

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}. \tag{5}$$

Тут використали, що температура в стані 2 дорівнює T_1, а температура в стані 3 – T_2. Зазначимо, що для одноатомного газу число ступенів вільності дорівнює 3 ($i = 3$), тому стала адіабати (8 д) дорівнює $\gamma = (i+2)/i = (3+2)/3 \approx 1{,}67$. Із співвідношення (5) знаходимо

$$V_2 = V_3 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \tag{6}$$

Далі підставляємо формулу (6) в (4) і знаходимо шукану кількість теплоти, яку нагрівник передає газу:

$$Q_1 = \nu R T_1 \ln \left(\frac{V_3}{V_1} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \right) = \nu R T_1 \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1} \right) + \frac{1}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1} \right) \right]. \tag{7}$$

Для знаходження роботи A та теплоти, яку робоче тіло передає холодильнику, Q_2' використаємо формули для

ККД теплової машини (9 а) та ККД циклу Карно (9 б):

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}, \quad \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Звідси знаходимо, що

$$A = Q_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \nu R(T_1 - T_2)\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right], \quad (8)$$

$$Q_2' = Q_1 - A = Q_1 - Q_1 \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1} = Q_1\frac{T_2}{T_1} = \nu R T_2\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right].$$

(9)

Формули (7), (8) та (9) визначають шукані в задачі величини.

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункових формул (7), (8) та (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$Q_1 = \nu R T_1\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] =$$

$$= 1 \cdot 8{,}3 \cdot 400 \cdot \left[\ln\left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}}\right) + \frac{1}{1{,}67 - 1}\ln\left(\frac{300}{400}\right)\right] \text{Дж} = 3{,}18 \text{ кДж}.$$

$$A = \nu R(T_1 - T_2)\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] =$$

$$= 1 \cdot 8{,}3 \cdot (400 - 300) \cdot \left[\ln\left(\frac{20 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3}}\right) + \frac{1}{1{,}67 - 1}\ln\left(\frac{300}{400}\right)\right] \text{Дж} =$$

= 0,80 кДж.

$$Q_2' = \nu R T_2\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] =$$

$$=1\cdot 8{,}3\cdot 300\cdot\left[\ln\left(\frac{20\cdot 10^{-3}}{5\cdot 10^{-3}}\right)+\frac{1}{1{,}67-1}\ln\left(\frac{300}{400}\right)\right]\text{Дж} = 2{,}38\ \text{кДж}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли температури нагрівник та холодильника є однаковими $T_1 = T_2 = T$. У цій ситуації згідно з формулою (9 б) ККД циклу дорівнює нулю $\eta = (T - T)/T = 0$. Отже, робота газу теж дорівнює нулю (див. формулу (9 а), з якої випливає $A = \eta\cdot Q_1 = 0$). Зрозуміло, в цьому випадку теплота, яка передається холодильнику, дорівнює теплоті, яку газ одержує від нагрівника: $Q_2' = Q_1 - A = Q_1$

Із розрахункових формул випливає такий самий результат. Якщо $T_1 = T_2 = T$, то

$$A = \nu R(T_1 - T_2)\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right]\sim (T_1 - T_2) = 0,$$

$$Q_1 = \nu R T_1\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] = \nu R T\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T}{T}\right)\right],$$

$$Q_2' = \nu R T_2\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] = \nu R T\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T}{T}\right)\right].$$

Ці співвідношення показують, що $A = 0$, $Q_2' = Q_1$. Отже, розрахункові формули не суперечать фізичним міркуванням.

Відповідь: $Q_1 = \nu R T_1\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] = 3{,}18$ кДж,

$$A = \nu R(T_1 - T_2)\left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right)+\frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right] = 0{,}80\ \text{кДж},$$

$$Q_2' = \nu R T_2 \left[\ln\left(\frac{V_3}{V_1}\right) + \frac{1}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \right] = 2{,}38 \text{ кДж}.$$

Приклад 9.3

Знайти ККД циклу, що складається з двох ізобар та двох адіабат, коли в межах циклу тиск змінюється в n разів. Робоча речовина – ідеальний газ із показником адіабати γ.

Розв'язання

$\eta - ?$
$\dfrac{p_1}{p_3} = n,\ \gamma$

Для розв'язування задачі використаємо формулу для ККД теплової машини (9 а):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2'}{Q_1}. \qquad (1)$$

Кількість теплоти, яку передає нагрівник газу Q_1, та кількість теплоти, яку газ передає холодильнику Q_2', знайдемо за допомогою першого закону термодинаміки. Також використаємо рівняння стану ідеального газу (7 а) та рівняння адіабати (8 е).

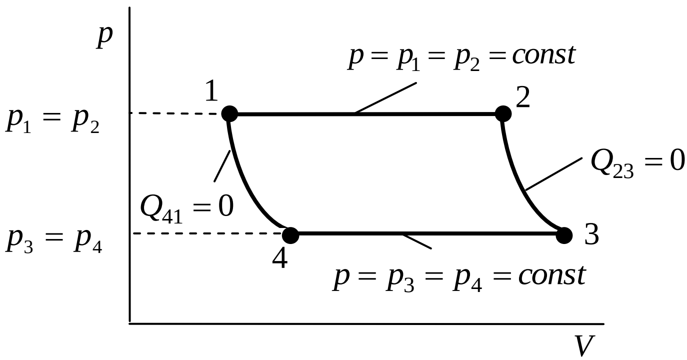


Рисунок 9.2

Розглянемо детально процеси, про які йде мова в задачі. Зобразимо процес, що складається з двох ізобар (ділянки 1–2 та 3–4) і двох адіабат (ділянки 2–3 та 4–1), в координатах $p-V$ (рис. 9.2).

На ділянці 1–2 відбувається ізобарне розширення газу за рахунок передачі теплоти Q_1 від нагрівника. Тиск у цьому ізобарному процесі не змінюється. Тому тиск у стані 1 дорівнює тиску в стані 2 ($p_1 = p_2$). Теплоту Q_1 визначимо за допомогою першого закону термодинаміки:

$$Q_1 = \Delta U_{12} + A_{12}\,. \qquad (2)$$

Зміну внутрішньої енергії ΔU_{12} на ділянці 1–2 знайдемо за допомогою формули (8 в):

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1} - \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{p_1 V_2}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right). \qquad (3)$$

У цій формулі об'єм у стані 1 позначено через V_1, об'єм у стані 2 – через V_2. Тут також використали, що $p_1 = p_2$. Роботу на цій самій ділянці A_{12} знайдемо за допомогою співвідношення (8 б):

$$A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1\left(V_2 - V_1\right) = p_1 V_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right). \qquad (4)$$

Далі підставимо співвідношення (3) та (4) в (2) і одержимо

$$Q_1 = \frac{p_1 V_2}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) + p_1 V_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) =$$

$$= p_1 V_2\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)\left[\frac{1}{\gamma - 1} + 1\right]. \qquad (5)$$

На ділянці 2–3 має місце адіабатне розширення. Тобто тут теплообмін відсутній: $Q_{23} = 0$.

На ділянці 3–4 відбувається ізобарне стискання, в процесі якого газ охолоджується і передає холодильнику теплоту Q_2'. Цей процес можемо трактувати як процес передачі газу від'ємної теплоти $Q_2 = -Q_2'$. Через те що процес 3–4 як і 1–2 ізобарний, то кількість теплоти, що передається газу Q_2, знаходиться аналогічно, як і у випадку 1–2:

$$Q_2 = \Delta U_{34} + A_{34}. \tag{6}$$

Зміну внутрішньої енергії ΔU_{34} знаходимо аналогічно до формули (3):

$$\Delta U_{34} = U_4 - U_3 = \frac{p_4 V_4}{\gamma - 1} - \frac{p_3 V_3}{\gamma - 1} = -\frac{p_3 V_3}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right). \tag{7}$$

Тут ураховано, що $p_4 = p_3$. Роботу на ділянці циклу 3–4 знаходимо аналогічно до формули (4):

$$A_{34} = \int_{V_3}^{V_4} p dV = p_3 (V_4 - V_3) = -p_3 V_3 \left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right). \tag{8}$$

Далі підставляємо (8) та (7) в (6) і одержуємо

$$Q_2 = -\frac{p_3 V_3}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right) - p_3 V_3 \left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right) = -p_3 V_3 \left(1 - \frac{V_4}{V_3}\right)\left[\frac{1}{\gamma - 1} + 1\right]. \tag{9}$$

На ділянці циклу 4–1 теплообмін відсутній Q_{41} через те, що тут процес є адіабатним.

Підставимо вирази (5) та (9) в (1). Також візьмемо до уваги, що $Q_2' = -Q_2$, і знайдемо

$$\eta = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1} = 1 - \frac{p_3 V_3 \left(1 - \dfrac{V_4}{V_3}\right)\left[\dfrac{1}{\gamma - 1} + 1\right]}{p_1 V_2 \left(1 - \dfrac{V_1}{V_2}\right)\left[\dfrac{1}{\gamma - 1} + 1\right]} =$$

$$=1-\frac{1}{n}\cdot\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{\left(1-V_4/V_3\right)}{\left(1-V_1/V_2\right)}. \qquad (10)$$

У формулі (10) використали, що згідно з умовою задачі $\frac{p_3}{p_1}=\frac{1}{n}$. З'ясуємо, чому дорівнюють відношення об'ємів, які входять до формули (10). Для цього запишемо рівняння адіабати (8 ж) для адіабатних процесів 2–3 та 4–1:

$$p_1V_1^{\gamma}=p_4V_4^{\gamma}, \quad p_2V_2^{\gamma}=p_3V_3^{\gamma}. \qquad (11)$$

Звідси знаходимо ураховуючи, що $p_1=p_2$ та $p_4=p_3$:

$$\frac{p_1V_1^{\gamma}}{p_2V_2^{\gamma}}=\frac{p_4V_4^{\gamma}}{p_3V_3^{\gamma}} \Rightarrow \frac{V_1^{\gamma}}{V_2^{\gamma}}=\frac{V_4^{\gamma}}{V_3^{\gamma}} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{V_4}{V_3}.$$

Це означає, що

$$\left(1-\frac{V_4}{V_3}\right)/\left(1-\frac{V_1}{V_2}\right)=1. \qquad (12)$$

Також із другого рівняння (11) знаходимо

$$\frac{p_2}{p_3}=\left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2}=\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=(n)^{\frac{1}{\gamma}}. \qquad (13)$$

Тепер підставимо (13) та (12) в (10) і знайдемо шуканий ККД цього циклу:

$$\eta=1-\frac{1}{n}\cdot n^{\frac{1}{\gamma}}=1-n^{\frac{1}{\gamma}-1}=1-n^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}. \qquad (14)$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли в межах циклу тиск не змінюється. Тобто $p_1 / p_3 = n = 1$. У цій ситуації стани 2 та 3, а також стани 4 та 1 будуть відповідно збігатися. На діаграмі $p - V$ цикл 1–2–3–4 (рис. 9.2) перетвориться на відрізок, площа якого дорівнює нулю. А як відомо, площа циклу 1–2–3–4 на діаграмі $p - V$ чисельно дорівнює роботі, яку газ у цьому циклі виконує. Тому можемо зробити висновок: якщо $n = 1$, то робота газу дорівнює нулю, а отже, і ККД циклу дорівнює нулю $\eta = 0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $n = 1$, то $\eta = 1 - n^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = 1 - 1^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma}} = 1 - 1 = 0$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\eta = 1 - n^{-\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$.

Приклад 9.4

У скільки разів потрібно збільшити ізотермічно об’єм ідеального газу кількістю ν = 4,0 моля, щоб його ентропія мала приріст ΔS = 23 Дж/К?

Розв’язання

V_2 / V_1–?
ν = 4 моль,
ΔS = 23 Дж·К,
$T = const$

Для розв’язування задачі використаємо вираз для зміни ентропії (9 в) за умови оборотного процесу, перший закон термодинаміки та рівня стану ідеального газу. Знайдемо співвідношення між зміною ентропії ΔS та параметрами оборотного процесу. Використовуючи це співвідношення, знайдемо шукане відношення V_2 / V_1.

Як відомо з (9 в), зміна ентропії за час оборотного процесу має вигляд

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \qquad (1)$$

Щоб виконати інтегрування в (1), використаємо перший закон термодинаміки у вигляді

$$dQ = dU + \delta A = \frac{\nu R \cdot dT}{\gamma - 1} + pdV. \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1) і знайдемо

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\nu R}{\gamma - 1} \cdot \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{p}{T} dV. \qquad (3)$$

Візьмемо до уваги рівняння стану (7 а), з якого знаходимо

$$pV = \nu RT \Rightarrow \frac{p}{T} = \nu \frac{R}{V}.$$

Тоді формула (3) набере вигляду

$$\Delta S = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \nu R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{\nu R}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \quad (4)$$

Рівняння (4) описує зміну ентропії за умови оборотного процесу. Далі використаємо умову, що процес ізотермічний $T_2 = T_1$ $\left(\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \ln(1) = 0\right)$, і знайдемо з формули (4):

$$\Delta S = \nu \cdot R \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Звідси знаходимо шукане відношення об’ємів

$$\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right). \qquad (5)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (5), в одиницях СІ й виконаємо обчислення: $\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right) = \exp\left(\frac{23}{4 \cdot 8{,}3}\right) = 2.$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо уявний випадок, коли зміна ентропії дорівнюватиме нулю $\Delta S = 0$. Якщо врахувати, що тут також не змінюється і температура, то можемо зробити висновок, що газ перебуває у рівноважному стані, розширення не відбувається, відношення відповідних об'ємів дорівнює одиниці $V_2 / V_1 = 1$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\Delta S = 0$, то $\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right) = \exp\left(\frac{0}{\nu R}\right) = 1$.

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\frac{V_2}{V_1} = \exp\left(\frac{\Delta S}{\nu R}\right) = 2.$

Приклад 9.5

Два балони ємністю $V_1 = V_2 = 1$ л кожний з'єднані трубкою з краном. Один із них містить водень, який має тиск $p_1 = 10^5$ Па та температуру $T_1 = 293$ К, інший – гелій, який має тиск $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Па і температуру $T_2 = 373$ К. Знайти зміну ентропії системи ΔS після відкриття крана та досягнення рівноважного стану. Стінки балона та трубки забезпечують повну теплову ізоляцію від зовнішнього середовища.

Розв'язання

ΔS – ?
$V_1 = 1$ л $= 1\cdot10^{-3}$ м^3,
$V_2 = 1$ л $= 1\cdot10^{-3}$ м^3,
$p_1 = 1\cdot10^5$ Па,
$p_2 = 3\cdot10^5$ Па,
$T_1 = 293$ К,
$T_2 = 373$ К

Після відкривання крана водень та гелій рівномірно розподіляться в системі двох посудин (рис. 9.3). Завдяки перемішуванню газів установляться рівноважна температура T та рівноважний тиск p. Детально процеси, які за цих умов відбуваються, описані в прикладі 2.5. У цьому самому прикладі знайдені параметри кінцевого стану, які ми використаємо для розв'язування цієї задачі.

Необхідно зазначити, що процес перемішування газів є необоротним. Оборотний до перемішування процес самовільно проходити не може. Тому безпосередньо застосувати формулу (9 в) до цієї задачі ми не можемо. Але ми можемо процес перемішування розглядати як сукупність двох процесів: 1) квазістатичного розширення водню від початкової температури T_1, об'єму V_1 до кінцевого об'єму $V_1 + V_2$ й рівноважної температури T; 2) квазістатичного розширення гелію від початкової температури T_2, об'єму V_2 до кінцевого об'єму $V_1 + V_2$ й рівноважної температури T. Кожний із цих окремих процесів є квазістатичним, а отже, і оборотним. До кожного з цих процесів маємо право застосувати формулу (9 в), а отже, і формулу (4) з прикладу 9.4, і знайти зміну ентропії для водню ΔS_1 і зміну ентропії для гелію ΔS_2. Загальна зміна ентропії системи буде визначатися співвідношенням

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 . \qquad (1)$$

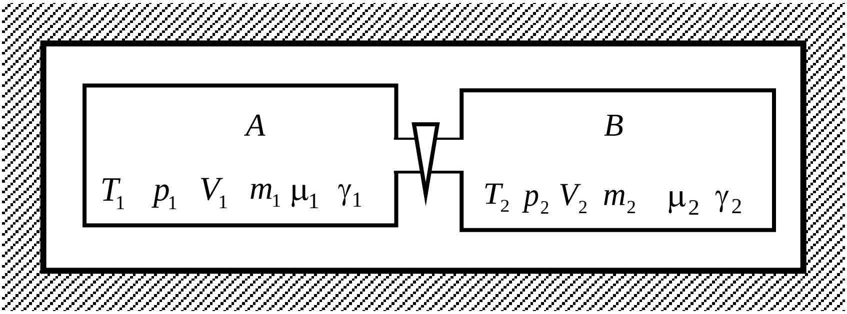


Рисунок 9.3

Реалізуємо вищевикладений план розв'язування задачі. Для того щоб знайти зміну ентропії для водню та гелію, використаємо формулу (4) прикладу 9.4 й одержимо

$$\Delta S_1 = \frac{\nu_1 R}{\gamma_1 - 1}\ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \nu_1 R \ln\left(\frac{V_2 + V_1}{V_1}\right), \qquad (2)$$

$$\Delta S_2 = \frac{\nu_2 R}{\gamma_2 - 1}\ln\left(\frac{T}{T_2}\right) + \nu_2 R \ln\left(\frac{V_2 + V_1}{V_2}\right). \qquad (3)$$

У цих формулах ν_1, ν_2 – кількість молів відповідно водню та гелію; γ_1, γ_2 – стала адіабати відповідно водню та гелію; T – рівноважна температура, що визначається формулою (10) прикладу 8.5:

$$T = \left[\frac{p_1 V_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{p_2 V_2}{\gamma_2 - 1}\right] \Big/ \left[\frac{p_1 V_1}{T_1(\gamma_1 - 1)} + \frac{p_2 V_2}{T_2(\gamma_2 - 1)}\right]. \qquad (4)$$

Як відомо, водень є двоатомним газом, і тому має 5 ступенів вільності ($i_1 = 5$). Для цього газу стала адіабати (8 д) дорівнює

$$\gamma_1 = \frac{i_1 + 2}{i_1} = \frac{5 + 2}{5} = 1{,}4.$$

Гелій є одноатомним газом і тому має 3 ступені вільності ($i_2 = 3$). Для цього газу стала адіабати (8 е) дорівнює

$$\gamma_2 = \frac{i_2 + 2}{i_2} = \frac{3+2}{3} \approx 1{,}67.$$

Кількість молей водню та гелію знайдемо, використовуючи для цих газів рівняння Менделєєва–Клапейрона (7 а):

$$p_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \quad p_2 V_2 = \nu_2 R T_2.$$

Звідси

$$\nu_1 = \frac{p_1 V_1}{R T_1}, \quad \nu_2 = \frac{p_2 V_2}{R T_2}. \qquad (5)$$

Підставляємо (5) і (4) в (2) та (3), а потім у формулу (1). Внаслідок перетворень знаходимо шукану зміну ентропії:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{p_1 V_1}{R T_1} \frac{R}{(\gamma_1 - 1)} \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \frac{p_1 V_1}{R T_1} R \ln\left(\frac{V_1 + V_2}{V_1}\right) +$$

$$+ \frac{p_2 V_2}{R T_2} \frac{R}{(\gamma_2 - 1)} \ln\left(\frac{T}{T_2}\right) + \frac{p_2 V_2}{R T_2} R \ln\left(\frac{V_1 + V_2}{V_2}\right),$$

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1}\left(\frac{\ln(T/T_1)}{\gamma_1 - 1} + \ln\left(1 + \frac{V_2}{V_1}\right)\right) + \frac{p_2 V_2}{T_2}\left(\frac{\ln(T/T_2)}{\gamma_2 - 1} + \ln\left(1 + \frac{V_1}{V_2}\right)\right). \qquad (6)$$

У формулі (6) рівноважна температура визначається виразом (4).

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (6), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$T=\left[\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right]/\left[\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right]=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1\cdot10^5\cdot1\cdot10^{-3}}{1{,}4-1}+\dfrac{3\cdot10^5\cdot1\cdot10^{-3}}{1{,}67-1}\right)}{\left(\dfrac{1\cdot10^5\cdot1\cdot10^{-3}}{293\cdot(1{,}4-1)}+\dfrac{3\cdot10^5\cdot1\cdot10^{-3}}{373\cdot(1{,}67-1)}\right)}\text{ К}=340\text{ К},$$

$$\Delta S=\frac{p_1V_1}{T_1}\left(\frac{\ln(T/T_1)}{\gamma_1-1}+\ln\left(\frac{V_1+V_2}{V_1}\right)\right)+$$

$$+\frac{p_2V_2}{T_2}\left(\frac{\ln(T/T_2)}{\gamma_2-1}+\ln\left(\frac{V_1+V_2}{V_2}\right)\right)=$$

$$=\frac{10^5\cdot10^{-3}}{293}\left(\frac{\ln(340/293)}{1{,}4-1}+\ln\left(\frac{10^{-3}+10^{-3}}{10^{-3}}\right)\right)+$$

$$+\frac{3\cdot10^5\cdot10^{-3}}{373}\left(\frac{\ln(340/373)}{1{,}67-1}+\ln\left(\frac{10^{-3}+10^{-3}}{10^{-3}}\right)\right)\text{ Дж/К}=$$

$$=0{,}81\text{ Дж/К}.$$

Аналіз одержаного результату

Проаналізуємо одержану розрахункову формулу (6). Необхідно зазначити, що гази знаходяться в теплоізольованій оболонці. Тому відповідно до другого закону термодинаміки у цьому випадку ентропія не може зменшуватися, вона може лише збільшуватись або не змінюватися. Тобто $\Delta S\geq0$. У результаті розрахунків ми одержали, що $\Delta S=+0{,}8$ Дж/К. Це задовольняє умову $\Delta S\geq0$. Отже, одержаний результат не суперечить другому закону термодинаміки.

Відповідь: $\Delta S=\dfrac{p_1V_1}{T_1}\left(\dfrac{\ln(T/T_1)}{\gamma_1-1}+\ln\left(\dfrac{V_1+V_2}{V_1}\right)\right)+$

$$+\frac{p_2V_2}{T_2}\left(\frac{\ln(T/T_2)}{\gamma_2-1}+\ln\left(\frac{V_1+V_2}{V_2}\right)\right)=0{,}81 \text{ Дж/К},$$

де $T=\left[\frac{p_1V_1}{\gamma_1-1}+\frac{p_2V_2}{\gamma_2-1}\right]/\left[\frac{p_1V_1}{T_1(\gamma_1-1)}+\frac{p_2V_2}{T_2(\gamma_2-1)}\right]=340$ К.

9.2 Задачі для самостійного розв’язування

9.1 У результаті кругового процесу газ виконав роботу $A = 1$ Дж і передав холодильнику кількість теплоти $Q_2' = 4{,}2$ Дж. Визначити ККД циклу η.

9.2 Виконавши замкнений цикл, газ одержав від нагрівника кількість теплоти $Q_1 = 4$ кДж. Визначити роботу A газу в цьому циклі, якщо його ККД $\eta = 0{,}1$.

9.3 Ідеальний двоатомний газ, кількість якого $\nu = 1$ моль, виконує цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар. Найменший об'єм $V_{min} = 10$ л, найбільший $V_{max} = 20$ л, найменший тиск $p_{min} = 246$ кПа, найбільший $p_{max} = 410$ кПа. Побудувати графік циклу. Визначити температуру T газу для характерних точок циклу і його ККД η.

9.4 Один кмоль ідеального двоатомного газу виконує замкнений цикл, графік якого зображений на рис. 9.4. Визначити: 1) кількість теплоти Q_1, яку газ одержав від нагрівника; 2) кількість теплоти Q_2', передану холодильнику; 3) роботу A, виконану газом за цикл; 4) ККД η циклу.

9.5 Одноатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 0{,}1$ кмоль, під тиском $p_1 = 100$ кПа займає об'єм $V_1 = 5$ м^3. Потім газ стискають ізобарно до об'єму $V_2 = 1$ м^3, далі стискають адіабатно і розширяють за умови сталої температури до початкових об'єму і тиску. Побудувати графік процесу. Знайти: 1) температури T_1, T_2, об'єми V_1, V_2 і тиск p_3, що відповідає характерним точкам циклу; 2) кількість теплоти Q_1, одержану газом від нагрівника; 3) кількість теплоти Q_2', передану газом охолоджувачу; 4) роботу A, виконану газом за весь цикл; 5) термічний ККД η циклу.

9.6 Ідеальний двоатомний газ, що містить кількість речовини $\nu = 1$ моль і знаходиться під тиском $p_1 = 0{,}1$ МПа та температурою $T_1 = 300$ К, нагрівають за умови сталого об'єму до тиску $p_2 = 0{,}2$ МПа. Після цього газ ізотермічно розширяють до початкового тиску і потім ізобарно стискають до початкового об'єму V_1. Побудувати графік циклу. Визначити температуру T газу для характерних точок циклу і його ККД η.

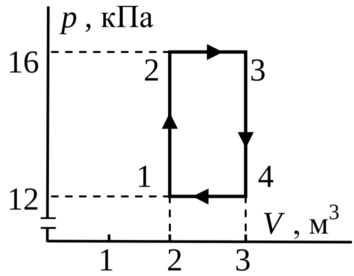


Рисунок 9.4

9.7 Ідеальний багатоатомний газ виконує цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар, причому найбільший тиск газу в два рази більший від найменшого, а найбільший об'єм у чотири рази більший від найменшого. Визначити ККД η циклу.

9.8 Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_2 охолоджувача дорівнює 290 К. У скільки разів збільшиться ККД циклу, якщо температура нагрівника підвищиться від $T_1' = 400$ К до $T_1'' = 600$ К?

9.9 Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_1 нагрівника в три рази вища за температуру T_2 охолоджувача. Нагрівник передав газу кількість теплоти $Q_1 = 42$ кДж. Яку роботу A виконав газ?

9.10 Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_1 нагрівника дорівнює 470 К, температура T_2 охолоджувача – 280 К. Під час ізотермічного розширення газ виконує роботу A = 100 Дж. Визначити ККД η циклу, а також кількість теплоти Q_2', яку газ віддає охолоджувачу під час ізотермічного стискання.

9.11 Ідеальний газ виконує цикл Карно. Температура T_1 нагрівника в чотири рази вища за температуру T_2 охолоджувача. Яку частку ω кількості теплоти, одержаної за один цикл від нагрівника, газ віддає охолоджувачу?

9.12 Ідеальний газ, який виконує цикл Карно, одержав від нагрівника кількість теплоти Q_1 = 4,2 кДж і виконав роботу A = 590 Дж. Знайти ККД η цього циклу. У скільки разів температура T_1 нагрівника більша від температури T_2 охолоджувача?

9.13 Ідеальний двоатомний газ виконує цикл Карно, графік якого зображений на рис. 9.5. Об'єми газу в станах B і C відповідно V_1 = 12 л і V_2 = 16 л. Знайти ККД η циклу.

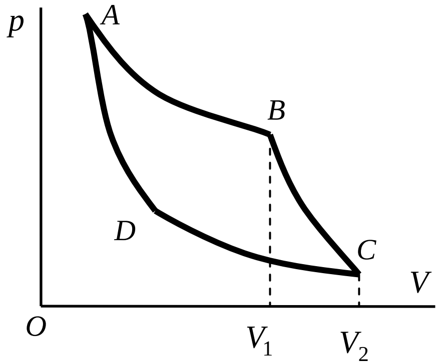


Рисунок 9.5

9.14 Ідеальний газ виконує цикл Карно. Робота A_1 ізотермічного розширення газу дорівнює 5 Дж. Визначити роботу A_2 ізотермічного стискання, якщо ККД η циклу дорівнює 0,2.

9.15 Найменший об'єм V_1 газу, що виконує цикл Карно, дорівнює 153 л. Визначити найбільший об'єм V_3, якщо об’єм V_2 в кінці ізотермічного розширення і об’єм V_4 в кінці ізотермічного стискання дорівнюють відповідно 600 і 189 л.

9.16 Змішали воду масою $m_1 = 5$ кг, яка має температуру $T_1 = 280$ К, з водою масою $m_2 = 8$ кг, яка має температуру $T_2 = 350$ К. Знайти: 1) температуру T суміші; 2) зміну ΔS ентропії, що має місце під час змішування.

9.17 У результаті ізохорного нагрівання водню масою $m = 1$ г тиск p газу збільшився в два рази. Визначити зміну ΔS ентропії газу.

9.18 Знайти зміну ΔS ентропії для ізобарного розширення азоту масою $m = 4$ г від об'єму $V_1 = 5$ л до об'єму $V_2 = 9$ л.

9.19 Лід масою $m = 200$ г, що має температуру $t_1 = –10$ °С, нагрівають до температури $t_2 = 0$ °С і плавлять. Далі утворену вода нагрівають до температури $t = 10$ °С. Визначити зміну ΔS ентропії.

9.20 Лід масою $m_1 = 2$ кг, який має температуру $t_1 = 0$ °С, перетворюють на воду тієї самої температури за допомогою пари, що має температуру $t_2 = 100$ °*С*. Визначити масу m_2 витраченої пари. Яка зміна ΔS ентропії системи лід – пара?

9.21 Кисень масою $m = 2$ кг збільшив свій об'єм у $n = 5$ разів: один раз ізотермічно, інший – адіабатно. Знайти зміни ентропії в кожному із зазначених процесів.

9.22 Водень масою $m = 100$ г ізобарно нагрівають так, що об'єм його збільшується в $n = 3$ разів, потім водень ізохорно охолоджують так, що тиск його зменшується в $n = 3$ разів. Знайти зміну ΔS ентропії.

9.23 В якому випадку ККД циклу Карно підвищиться більше: за умови збільшення температури нагрівника на

ΔT або за умови зменшення температури холодильника на таку саму величину?

9.24 Водень виконує цикл Карно. Знайти ККД циклу, коли під час адіабатного розширення: 1) об'єм газу збільшується в n =2,0 рази; 2) тиск зменшується в n = 2,0 рази.

9.25 Ідеальний газ виконує цикл, що складається з чергування ізотерм і адіабат (рис. 9.6). Температури, за яких відбуваються ізотермічні процеси, дорівнюють T_1, T_2 і T_3. Знайти ККД такого циклу, якщо під час кожного ізотермічного розширення об'єм газу збільшується в одну і ту саму кількість разів.

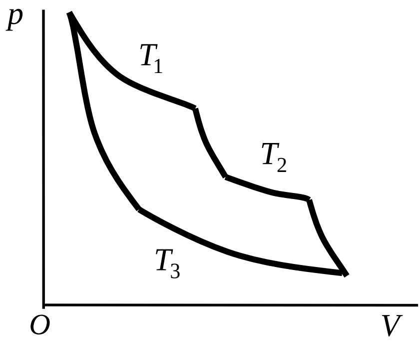


Рисунок 9.6

9.26 Знайти ККД циклу, що складається з двох ізохор і двох адіабат, якщо в межах циклу об'єм ідеального газу змінюється в n = 10 разів. Робочою речовиною є азот.

9.27 Ідеальний газ із показником адіабати γ виконує цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар. Знайти ККД такого циклу, якщо абсолютна температура газу зростає в n разів як для ізохорного нагрівання, так і для ізобарного розширення.

9.28 Ідеальний газ виконує цикл, що складається з: 1) ізохори, адіабати та ізотерми; 2) ізобари, адіабати та ізотерми, причому ізотермічний процес відбувається за умови мінімальної температури циклу. Знайти ККД кожного циклу, якщо абсолютна температура в його межах змінюється в n разів.

9.29 Ідеальний газ виконує цикл, що складається з ізотерми, політропи та адіабати, причому ізотермічний процес відбувається за умови максимальної температури циклу. Знайти ККД такого циклу, якщо абсолютна температура в його межах змінюється в *n* разів.

9.30 Ідеальний газ із показником адіабати γ виконує прямий цикл, що складається з адіабати, ізобари та ізохори. Знайти ККД циклу, якщо під час адіабатного процесу об'єм ідеального газу: 1) збільшується в *n* разів; 2) зменшується в *n* разів.

9.31 Обчислити ККД циклу, що складається з ізотерми, ізобари та ізохори, якщо під час ізотермічного процесу об'єм ідеального газу з показником адіабати γ: 1) збільшується в *n* разів; 2) зменшується в *n* разів.

9.32 Знайти ККД циклу, що складається з двох ізохор і двох ізотерм, якщо в межах циклу об'єм змінюється в ν разів, а абсолютна температура – в τ разів. Робочою речовиною є ідеальний газ із показником адіабати γ.

9.33 Ідеальний газ із показником адіабати γ виконує цикл (рис. 9.7), у межах якого абсолютна температура змінюється в τ разів. Знайти ККД цього циклу.

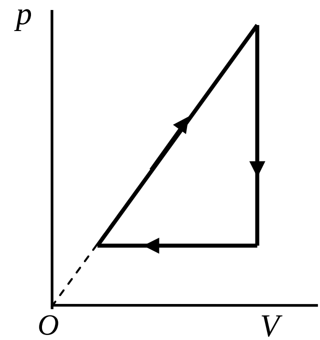


Рисунок 9.7

9.34 Знайти приріст ентропії одного моля вуглекислого газу для збільшення його абсолютної температури в $n = 2{,}0$ рази, якщо процес нагрівання: 1) ізохорний; 2) ізобарний. Газ вважати ідеальним.

9.35 Визначити ККД циклу, що складається з двох ізобар і двох ізотерм, якщо в межах циклу тиск змінюється в n разів, а абсолютна температура – в τ разів. Робочою речовиною є ідеальний газ із показником адіабати γ.

9.36 Два молі ідеального газу спочатку ізохорно охолодили, а потім ізобарно розширили так, що температура газу стала дорівнювати початковій. Знайти приріст ентропії газу, якщо його тиск у даному процесі змінився в $n = 3{,}3$ раза.

9.37 Гелій масою $m = 1{,}7$ г адіабатно розширили в $n = 3{,}0$ рази і потім ізобарно стиснули до початкового об'єму. Знайти приріст ентропії газу в цьому процесі.

9.38 Знайти приріст ентропії $\nu = 2{,}0$ моль ідеального газу з показником адіабати $\gamma = 1{,}30$, якщо в результаті деякого процесу об'єм газу збільшився в $\alpha = 2{,}0$ рази, а тиск зменшився в $\beta = 3{,}0$ рази.

9.39 У посудинах *1* і *2* міститься по $\nu = 1{,}2$ моля газоподібного гелію. Відношення об'ємів посудин $V_2/V_1 = \alpha = 2$, а відношення абсолютних температур гелію в них $T_1/T_2 = \beta = 1{,}5$. Вважаючи газ ідеальним, знайти різницю ентропії гелію в цих посудинах $(S_2 - S_1)$.

9.40 Один моль ідеального газу з показником адіабати γ виконує політропний процес, у результаті якого абсолютна температура газу збільшується в τ разів. Показник політропи n. Знайти приріст ентропії газу в цьому процесі.

9.41 Процес розширення $\nu = 2{,}0$ моль аргону відбувається так, що тиск газу збільшується прямо пропорційно його об'єму. Знайти приріст ентропії газу для збільшення його об'єму в $\alpha = 2{,}0$ рази.

9.42 Ідеальний газ із показником адіабати γ виконує процес за законом $p = p_0 - \alpha V$, де p_0 і α – додатні сталі; V – об’єм. Знайти значення об'єму, коли ентропія газу буде максимальною?

9.43 Один моль ідеального газу виконує процес, під час якого ентропія газу змінюється з температурою T за законом $S = aT + C_V \ln T$, де a – додатна стала; C_V – молярна теплоємність даного газу за умови сталого об'єму. Знайти, як залежить температура газу від його об'єму в цьому процесі, якщо для $V = V_0$ температура $T = T_0$.

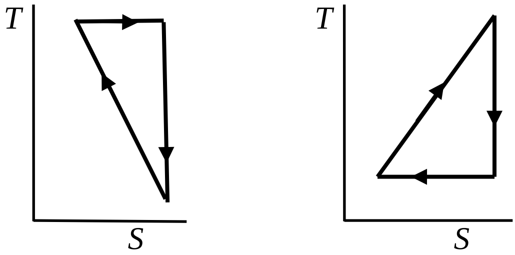
9.44 У деякому процесі температура речовини залежить від його ентропії S за законом $T = aS^n$, де a і n – сталі. Знайти відповідну теплоємність C речовини як функцію S. За якої умови $C < 0$?

9.45 Знайти температуру T як функцію ентропії S речовини для політропного процесу, коли теплоємність речовини дорівнює C. Відомо, що для температури T_0 ентропія речовини дорівнює S_0. Зобразити наближені графіки залежності $T(S)$, коли $C>0$ і $C < 0$.

9.46 Один моль ідеального газу з відомим значенням теплоємності C_V виконує процес, під час якого його ентропія S залежить від температури T як $S = \alpha / T$, де α – стала. Температура газу змінилася від T_1 до T_2. Знайти: 1) молярну теплоємність газу як функцію його температури; 2) кількість тепла, яку надано газу; 3) роботу, яку виконав газ.

9.47 Робоча речовина виконує цикл, у межах якого абсолютна температура змінюється в n разів, а сам цикл має вигляд, показаний: 1) на рис. 9.8 а; 2) на рис. 9.8 б, де T – абсолютна температура; S – ентропія. Знайти ККД кожного циклу.

9.48 Ідеальний газ кількістю $\nu = 2{,}2$ моля знаходиться в одній із двох термоізольованих посудин, з’єднаних між собою трубкою з краном. В іншій посудині – вакуум. Кран відкрили і газ заповнив обидві посудини, збільшивши свій об'єм у $n = 3{,}0$ рази. Знайти приріст ентропії газу.



а б

Рисунок 9.8

9.49 Термоізольований циліндр поділений невагомим поршнем на дві однакові частини. З одного боку поршня знаходиться один моль ідеального газу з показником адіабати γ, а з іншого – вакуум. Початкова температура газу T_0. Поршень відпустили і газ заповнив весь циліндр. Потім поршень повільно перемістили в початкове положення. Знайти приріст внутрішньої енергії та ентропії газу в результаті цих двох процесів.

9.50 Термоізольована посудина поділена перегородкою на дві частини так, що об’єм однієї з них у n = 2,0 рази більший від об'єму іншої. У меншій частині міститься ν_1 = 0,30 моля азоту, а в більшій частині – ν_2 = 0,70 моля кисню. Температура газів однакова. У перегородці відкрили отвір, і гази перемішалися. Знайти відповідний приріст ентропії системи, вважаючи гази ідеальними.

9.51 Кусок міді масою m_1 = 300 г із температурою t_1 = 97 °С помістили в калориметр, де знаходиться вода масою m_2 = 100 г із температурою t_2 = 7 °С. Знайти приріст ентропії системи після вирівнювання температур. Теплоємністю калориметра знехтувати.

9.52 Дві однакові термоізольовані посудини, з’єднані трубкою з краном, містять по одному молю одного і того самого ідеального газу. Температура газу в одній посудині T_1, в іншій – T_2. Молярна теплоємність газу за умови сталого об'єму дорівнює C_V. Після відкриття крану газ перейшов у новий стан рівноваги. Знайти ΔS – приріст ентропії газу. Показати, що $\Delta S > 0$.

10 МОЛЕКУЛЯРНО-КІНЕТИЧНА ТЕОРІЯ. РОЗПОДІЛИ МАКСВЕЛЛА ТА БОЛЬЦМАНА

Основні формули

Число ударів молекул об одиничну поверхню за одиницю часу

$$z = \frac{1}{4} n < \upsilon >, \tag{10 а}$$

де n *– концентрація молекул;* $< \upsilon >$ *– їх середня швидкість.*

Рівняння стану ідеального газу

$$p = nkT. \tag{10 б}$$

Середня енергія молекул

$$\langle \varepsilon \rangle = (i/2)kT, \tag{10 в}$$

де $i = i_{пост} + i_{оберт} + 2 \cdot i_{кол}$.

Функції розподілу Максвелла:

$$\varphi(\upsilon_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT} \right), \tag{10 г}$$

$$F(\upsilon) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right) \cdot 4\pi\upsilon^2, \tag{10 г}$$

$$f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)}{2kT} \right). \tag{10 д}$$

Найбільш імовірна, середня та середня квадратична швидкості молекул:

$$\upsilon_{ім} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \ <\upsilon> = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \ \upsilon_{\text{сер.кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad (10\ \text{е})$$

Розподіл Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right), \qquad (10\ \text{є})$$

де ε_p *є потенціальною енергією молекули у зовнішньому полі.*

Значення деяких визначених інтегралів:

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2n-1)!}{2(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

$$\int_0^\infty x^{2n+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}, \qquad (10\ \text{ж})$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$.

10.1 Приклади розв'язування задач

Приклад 10.1

У посудині об'ємом $V = 5{,}0$ л знаходиться азот масою $m = 1{,}40$ г із температурою $T = 1800$ К. Знайти тиск газу, якщо за цієї температури η = 30 % молекул дисоційовано на атоми.

Розв'язання

p – ?
$V = 5{,}0$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3,
$m = 1{,}40$ г = $1{,}40 \cdot 10^{-3}$ кг,
$T = 1800$ К, η = 0,3,
$\mu = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Згідно з рівнянням стану ідеального газу (10 б) :

$$p = nkT \qquad (1)$$

тиск ідеального газу залежить лише від концентрації n

частинок газу та температури. Тиск не залежить від сорту частинок. Тому, щоб розв'язати задачу, знайдемо концентрацію молекул й атомів азоту в газі та використаємо співвідношення (1).

Позначимо через n_0 концентрацію двоатомних молекул азоту до дисоціації, n_{N2} – концентрацію двоатомних *молекул* азоту в газі після дисоціації, а через n_{N1} – концентрацію *атомів* азоту, що утворилися за рахунок дисоціації молекул азоту. Згідно з умовою задачі ($\eta = 30$ % молекул дисоційовано на атоми) можемо записати, що концентрація дисоційованих атомів дорівнює

$$n_{N1} = 2 \cdot \eta \cdot n_0 . \tag{2}$$

У цьому співвідношенні множник «2» з'явився через те, що кожна молекула азоту дисоціює на два атоми. Концентрація молекул, що не розпалися:

$$n_{N2} = (1 - \eta) \cdot n_0 . \tag{3}$$

Тоді загальна концентрація частинок газу буде дорівнювати

$$n = n_{N2} + n_{N1} = (1 + \eta) n_0 . \tag{4}$$

Щоб знайти n_0, використаємо інформацію, що маса газу дорівнює m. Позначимо через m_{N2} масу однієї молекули азоту. Тоді маса газу буде дорівнювати

$$m = m_{N2} n_0 V . \tag{5}$$

Масу однієї двоатомної молекули азоту знайдемо, розділивши масу одного моля молекул азоту на число Авогадро (кількість молекул в одному молі):

$$m_{N2} = \mu / N_A . \tag{6}$$

Із (5) та (6) знаходимо n_0:

$$n_0 = \frac{mN_A}{\mu V}. \qquad (7)$$

Далі, використовуючи (7), (4) та (1), визначимо шуканий тиск частково дисоційованого газу:

$$p = (1+\eta)\frac{mN_A k}{\mu V}T. \qquad (8)$$

Візьмемо до уваги, що добуток числа Авогадро на сталу Больцмана дорівнює універсальній газовій сталій: $R = N_A k$. Тоді шуканий тиск буде визначатися співвідношенням

$$p = (1+\eta)\frac{mRT}{\mu V}. \qquad (9)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$p = (1+\eta)\frac{mRT}{\mu V} = (1+0{,}3)\frac{1{,}4\cdot 10^{-3} 8{,}31\cdot 1800}{28\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-3}}\,\text{Па} = 1{,}9\cdot 10^{5}\,\text{Па}.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли дисоціація молекул азоту відсутня. Тоді тиск газу можемо знайти за допомогою рівняння ідеального газу Менделєєва – Клапейрона (7 а): $p = mRT/(\mu V)$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. У випадку відсутності дисоціації молекул $\eta = 0$, $p = (1+0)\cdot mRT/(\mu V) = mRT/(\mu V)$. Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $p = (1+\eta)mRT/(\mu V) = 1{,}9\cdot 10^{5}$ Па.

Приклад 10.2

Знайти число атомів у молекулі газу, у якому під час «заморожування» коливальних ступенів вільності стала адіабати γ збільшується в η = 1,20 раза.

Розв'язання

$N - ?$
$\eta = 1{,}20$

Для розв'язування задачі використаємо зв'язок сталої адіабати зі ступенями вільності молекули (8 д)

$$\gamma = (i+2)/i\,, \tag{1}$$

де

$$i = i_{пост} + i_{оберт} + 2 \cdot i_{кол}\,. \tag{2}$$

Візьмемо до уваги, що число ступенів вільності пов'язане з числом атомів у молекулі. Також необхідно врахувати, що молекула може бути як лінійною, тобто всі атоми молекули розміщені вздовж однієї прямої, так і нелінійною.

Відомо, що число поступальних ступенів вільності для молекули дорівнює трьом ($i_{пост} = 3$). Число обертальних ступенів вільності для молекули, в якій усі атоми розміщені вздовж прямої лінії (лінійні молекули), дорівнює двом ($i_{оберт} = 2$), а для нелінійної молекули – трьом ($i_{оберт} = 3$). Усі інші ступені вільності є коливальними. Знайдемо їх кількість. Припустимо, що молекула складається з N атомів. Кожний атом має три ступені вільності. Це означає, що загальна кількість ступенів вільності N-атомної молекули $3N$.

Для лінійної молекули на поступальний та обертальний рух припадає $3+2=5$ ступенів вільності. Отже, число коливальних ступенів вільності для лінійної молекули дорівнює $3N-5$. Це означає, що для лінійної молекули

$$i_л = i_{пост} + i_{оберт} + 2 \cdot i_{кол} = 3 + 2 + 2 \cdot (3N - 5) = 6N - 5 . \quad (3)$$

Для нелінійної молекули на поступальний та обертальний рух припадає $3 + 3 = 6$ ступенів вільності. Отже, число коливальних ступенів вільності для нелінійної молекули дорівнює $3N - 6$. Це означає, що для нелінійної молекули

$$i_{нл} = i_{пост} + i_{оберт} + 2 \cdot i_{кол} = 3 + 3 + 2 \cdot (3N - 6) = 6N - 6 . \quad (4)$$

Використовуючи співвідношення (3), (4) та (1), можемо знайти зв'язок між сталою адіабати та кількістю атомів у молекулі як для лінійної молекули

$$\gamma_л = \left(i_л + 2\right) / i_л = (6N - 5 + 2)/(6N - 5) , \quad (5)$$

так і нелінійної молекули

$$\gamma_{нл} = \left(i_{нл} + 2\right) / i_{нл} = (6N - 6 + 2)/(6N - 6) . \quad (6)$$

У разі якщо відбувається «заморожування» коливальних ступенів вільності, залишаються лише поступальні та обертальні ступені вільності. Як зазначалось вище, у лінійній молекулі на поступальні та обертальні ступені вільності припадає $3 + 2 = 5$ ступенів вільності, а в нелінійній молекулі на поступальні та обертальні ступені вільності – $3 + 3 = 6$ ступенів вільності. В цьому випадку стала адіабати для лінійної молекули дорівнює

$$\gamma_{л0} = \left(5 + 2\right) / 5 = 7/5 , \quad (7)$$

а для нелінійної молекули –

$$\gamma_{нл0} = \left(6 + 2\right) / 6 = 8/6 . \quad (8)$$

Тепер детально розглянемо *випадок лінійної молекули*. З умови задачі відомо, що під час «заморожування» коливальних ступенів вільності стала адіабати γ збільшується в η = 1,20 раза. Це означає, що

$$\frac{\gamma_{л0}}{\gamma_{л}}=\eta \text{ або } \frac{7(6N-5)}{5(6N-3)}=\eta \text{, або } N=\frac{35-15\eta}{6(7-5\eta)}. \qquad (9)$$

Коли підставимо в (9) значення $\eta = 1{,}20$, то отримуємо $N = 2{,}833$. Із фізичних міркувань зрозуміло, що число N атомів у молекулі може бути лише цілим числом. Зі співвідношення (9) одержали, що $N = 2{,}833$ і не є цілим. Отже, молекули, про які іде мова в задачі, не можуть бути лінійними.

Тепер детально розглянемо *випадок нелінійної молекули*. З умови задачі відомо, що під час «заморожування» коливальних ступенів вільності стала адіабати γ збільшується в η = 1,20 раза. Це означає, що

$$\frac{\gamma_{нл0}}{\gamma_{нл}}=\eta \text{ або } \frac{8(6N-6)}{6(6N-4)}=\eta \text{ або } N=\frac{48-24\eta}{6(8-6\eta)}. \qquad (10)$$

Коли підставимо в (9) значення $\eta = 1{,}20$, то одержимо $N = 4$. Таким чином, молекули нелінійні, а число атомів у молекулі

$$N = 2(2-\eta)/(4-3\eta) = 2(2-1{,}2)/(4-3\cdot 1{,}2) = 4.$$

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули (10) у граничних випадках.

Розглянемо випадок нелінійної молекули, яка має нескінченно велику кількість атомів ($N = \infty$). Стала адіабати для такої молекули згідно з (6) дорівнює

$$\gamma_{нл\infty}=\frac{6N-6+2}{6N-6}=\frac{6-4/N}{6-6/N}=\frac{6-4/\infty}{6-6/\infty}=\frac{6}{6}=1.$$

Тоді збільшення сталих адіабат під час «заморожування» коливальних ступенів буде таким:

$$\eta = \frac{\gamma_{нл0}}{\gamma_{нл\infty}} = \frac{8}{6 \cdot 1} = \frac{4}{3}.$$

У цьому виразі використали співвідношення (8). Таким чином, збільшення сталих адіабат під час «заморожування» в $\eta = 4/3$ раза відповідає кількість атомів у молекулі $N = \infty$.

Із розрахункової формули (10) випливає такий самий результат:

$$N = \frac{2(2-\eta)}{4-3\eta} = \frac{2(2-4/3)}{4-3 \cdot 4/3} = \frac{4/3}{0} = \infty.$$

Таким чином, розрахункова формула (10) не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $N = 2(2-\eta)/(4-3\eta) = 4$, молекули нелінійні.

Приклад 10.3

У посудині міститься газ, кількість речовини ν якого дорівнює 1,2 моля. Беручи цей газ за ідеальний, визначити число ΔN молекул, швидкості υ яких менші за 0,001 найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$.

Розв'язання

ΔN – ?
ν =1,2 моля,
$\upsilon_{\max} = \upsilon_{ім} \cdot 10^{-3}$

Кількість молекул, модулі швидкостей яких знаходяться в інтервалі від υ до $\upsilon + d\upsilon$, можемо визначити за допомогою розподілу Максвелла (10 ґ)

$$dN = N \cdot F(\upsilon) \cdot d\upsilon = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT}\right) 4\pi\upsilon^2 d\upsilon. \quad (1)$$

У цій формулі N – загальна кількість молекул, що дорівнює добутку кількості молів речовини на число Авогадро (кількість частинок в одному молі):

$$N = \nu \cdot N_A . \qquad (2)$$

Щоб знайти шукану кількість молекул, потрібно провести підсумовування молекул, швидкість яких менша за 0,001 найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$. Тобто потрібно провести інтегрування (1) в межах від 0 до $\upsilon_{\max} = \upsilon_{ім} \cdot 10^{-3}$:

$$\Delta N = \int dN = \int_0^{0{,}001\upsilon_{ім}} N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon^2}{2kT} \right) 4\pi\upsilon^2 d\upsilon . \qquad (3)$$

Щоб проінтегрувати (3), виконаємо заміну змінної υ на безвимірну величину $u = \upsilon / \upsilon_{ім}$. Також візьмемо до уваги (10 е), а саме

$$\upsilon_{ім} = \sqrt{2kT/m} . \qquad (4)$$

Тоді

$$\upsilon = u \cdot \upsilon_{ім} = u \cdot \sqrt{2kT/m}$$

й інтеграл (3) набирає вигляду

$$\Delta N = \int_0^{0{,}001} \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-u^2\right) u^2 du . \qquad (5)$$

Зазначимо, що величина u належить сегменту $[0,\ 1 \cdot 10^{-3}]$, тобто $u \ll 1$. Це означає, що $\exp\left(-u^2\right) \approx 1 - u^2 \approx 1$ в усьому інтервалі інтегрування. Тоді інтеграл (5) можна легко обчислити

$$\Delta N = \int_0^{0{,}001} \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u^3 \Big|_0^{0{,}001} = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} 10^{-9} . \qquad (6)$$

Далі використаємо (2) й одержуємо розрахункову формулу

$$\Delta N = \frac{4\nu N_A}{3\sqrt{\pi}}10^{-9} = \frac{4\cdot 1{,}2\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{3\sqrt{\pi}}10^{-9}. \qquad (7)$$

Виконаємо обчислення й знаходимо $\Delta N = 5{,}43\cdot 10^{14}$.

Аналіз одержаного результату

Проведемо дослідження розрахункової формули у граничних випадках.

Розглянемо уявний випадок, коли кількість молей речовини дорівнює нулю: $\nu = 0$. Зрозуміло, що тоді в посудині молекули будуть відсутніми і шукана кількість молекул також буде дорівнювати нулю $\Delta N = 0$. З розрахункової формули (7) випливає такий самий результат:

$$\Delta N = \frac{4\nu N_A}{3\sqrt{\pi}}10^{-9} = \frac{4\cdot 0\cdot N_A}{3\sqrt{\pi}}10^{-9} = 0.$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $\Delta N = \dfrac{4\nu N_A}{3\sqrt{\pi}}10^{-9} = 5{,}43\cdot 10^{14}$.

Приклад 10.4

Визначити відносне число молекул, компоненти швидкості яких уздовж осі *X* містяться в інтервалі $(\upsilon_x, \upsilon_x + \delta\upsilon_x)$, а модулі перпендикулярної складової швидкості – в інтервалі $(\upsilon_\perp, \upsilon_\perp + \delta\upsilon_\perp)$. Маса кожної молекули m, температура газу *T*.

Розв'язання

$\delta N / N$ – ?
$(\upsilon_x, \upsilon_x + \delta\upsilon_x)$, $(\upsilon_\perp, \upsilon_\perp + \delta\upsilon_\perp), m$, T

Для розв'язування задачі використаємо функцію розподілу Максвелла за швидкостями υ_x, υ_y, υ_z (10 д). У просторі швидкостей перейдемо від декартових координат до циліндричних і знайдемо шукане число молекул.

Згідно з розподілом Максвелла число молекул, швидкості яких знаходяться в інтервалах $(\upsilon_x, \upsilon_x + d\upsilon_x)$, $(\upsilon_y, \upsilon_y + d\upsilon_y)$, $(\upsilon_z, \upsilon_z + d\upsilon_z)$, визначається співвідношенням (10 д):

$$dN = Nf(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z =$$

$$= N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)}{2kT}\right)d\upsilon_x d\upsilon_y d\upsilon_z, \quad (1)$$

де N – загальне число молекул.

Перейдемо у просторі швидкостей від декартових координат до циліндричних $(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) \to (\upsilon_x, \upsilon_\perp, \varphi)$:

$$\upsilon_x = \upsilon_x,\ \upsilon_y = \upsilon_\perp \cos\varphi,\ \upsilon_z = \upsilon_\perp \sin\varphi. \quad (2)$$

Тоді співвідношення (1) набере вигляду

$$dN = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_\perp^2 \cos^2\varphi + \upsilon_\perp^2 \sin^2\varphi)}{2kT}\right)\times$$

$$\times |I|\, d\upsilon_x d\upsilon_\perp d\varphi, \quad (3)$$

де

$$|I| = \left|\frac{D(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)}{D(\upsilon_x, \upsilon_\perp, \varphi)}\right| = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial\upsilon_x}{\partial\upsilon_x} & \frac{\partial\upsilon_x}{\partial\upsilon_\perp} & \frac{\partial\upsilon_x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\upsilon_y}{\partial\upsilon_x} & \frac{\partial\upsilon_y}{\partial\upsilon_\perp} & \frac{\partial\upsilon_y}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\upsilon_z}{\partial\upsilon_x} & \frac{\partial\upsilon_z}{\partial\upsilon_\perp} & \frac{\partial\upsilon_z}{\partial\varphi} \end{bmatrix} \quad (4)$$

є якобіаном переходу в просторі швидкостей від декартових координат до циліндричних

$(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) \to (\upsilon_x, \upsilon_\perp, \varphi)$. Використаємо (2) та знайдемо якобіан (4):

$$|I| = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\upsilon_\perp \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & +\upsilon_\perp \cos\varphi \end{bmatrix} = \upsilon_\perp \cos^2\varphi + \upsilon_\perp \sin^2\varphi = \upsilon_\perp . \quad (5)$$

Шукана кількість молекул, які знаходяться в інтервалах $(\upsilon_x, \upsilon_x + \delta\upsilon_x)$, $(\upsilon_\perp, \upsilon_\perp + \delta\upsilon_\perp)$ та мають будь-які значення азимутального кута φ, знаходимо шляхом інтегрування (3):

$$\delta N = \int_0^{\delta\upsilon_x} d\upsilon_x \int_0^{\delta\upsilon_\perp} d\upsilon_\perp \int_0^{2\pi} d\varphi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_\perp^2)}{2kT}\right) \upsilon_\perp =$$

$$= N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_\perp^2)}{2kT}\right) 2\pi \upsilon_\perp \delta\upsilon_x \delta\upsilon_\perp . \quad (6)$$

Під час інтегрування (6) взяли до уваги, що через те, що $\delta\upsilon_x << \upsilon_x$, $\delta\upsilon_\perp << \upsilon_\perp$ підінтегральну функцію можна вважати незмінною, константною.

Тоді шукане відносне число молекул буде дорівнювати

$$\frac{\delta N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_\perp^2)}{2kT}\right) 2\pi \upsilon_\perp \delta\upsilon_x \delta\upsilon_\perp . \quad (7)$$

Відповідь: $\dfrac{\delta N}{N} = \left(\dfrac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\dfrac{m(\upsilon_x^2 + \upsilon_\perp^2)}{2kT}\right) 2\pi \upsilon_\perp \delta\upsilon_x \delta\upsilon_\perp$.

Приклад 10.5

Обчислити за допомогою функції $\varphi(\upsilon_x)$ число z молекул газу, які падають за одиницю часу на одиничну площу, якщо концентрація молекул n, температура газу T, маса кожної молекули m.

Розв'язання

z – ?
$\varphi(\upsilon_x)$,
n, T, m

Для розв'язування задачі використаємо функцію розподілу швидкостей молекул за компонентою υ_x (10 г).

Розглянемо групу молекул, які мають швидкості, що належать інтервалу $(\upsilon_x, \upsilon_x + d\upsilon_x)$. Їх кількість можемо знайти за допомогою (10 г):

$$dN_{\upsilon_x} = N \cdot \varphi(\upsilon_x) \cdot d\upsilon_x = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) d\upsilon_x, \quad (1)$$

де N – кількість молекул у деякому об'ємі V. Концентрація таких молекул

$$dn_{\upsilon_x} = \frac{dN_{\upsilon_x}}{V} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) d\upsilon_x. \quad (2)$$

Тут використали, що загальна концентрація дорівнює відношенню загальної кількості молекул на загальний об'єм $n = N/V$.

Обчислимо число ударів dz_{υ_x} цією групою молекул об малу площу ΔS за час dt (рис. 10.1). Якщо молекули рухаються в напрямку до площі ΔS, то вони можуть зіштовхнутися з нею. Якщо ж вони рухаються від площі, то зіткнень не буде. Припустимо, що молекули групи, що розглядається, рухаються в напрямку до площі ΔS. Обчислимо число dN'_{υ_x} молекул такої групи, що вдаряються об цю площу за малий час dt. Побудуємо на площі ΔS, як на основі, циліндр із твірними $\upsilon_x \cdot dt$ (рис. 10.1). Кожна молекула досліджуваної групи, яка знаходиться у цьому циліндрі, за час dt встигне досягти

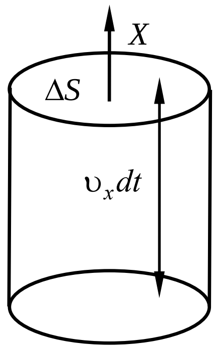


Рисунок 10.1

площі ΔS й вдаритися об неї. Тому число ударів dN'_{υ_x} буде дорівнювати числу молекул цієї групи усередині побудованого циліндра, тобто $dN'_{\upsilon_x} = dn_{\upsilon_x} dV$, де $dV = \Delta S \cdot \upsilon_x dt$ – об'єм циліндра. Отже,

$$dN'_{\upsilon_x} = \Delta S \cdot dn_{\upsilon_x} \cdot \upsilon_x dt .$$

Зрозуміло, що число ударів молекул цієї групи об одиничну поверхню за одиницю часу буде дорівнювати

$$dz_{\upsilon_x} = \frac{dN'_{\upsilon_x}}{\Delta S \cdot dt} = \frac{\Delta S \cdot dn_{\upsilon_x} \cdot \upsilon_x dt}{\Delta S \cdot dt} = dn_{\upsilon_x} \cdot \upsilon_x . \qquad (3)$$

Для того щоб знайти повну кількість ударів молекул, потрібно провести підсумовування за усіма групами молекул, тобто провести інтегрування. Також потрібно взяти до уваги, що необхідно враховувати лише ті молекули, які летять у напрямку до площі ΔS (ті молекули, що летять від площини, не вдаряються об площу ΔS), тобто мають компоненту швидкості $\upsilon_x > 0$. Використовуючи (2), одержуємо

$$z = \int dz_{\upsilon_x} = \int \upsilon_x \cdot dn_{\upsilon_x} =$$

$$= \int_0^\infty \upsilon_x \cdot n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) \cdot d\upsilon_x =$$

$$= n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \int_0^\infty \upsilon_x \cdot \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) \cdot d\upsilon_x . \qquad (4)$$

Інтеграл (4) зводиться до стандартного:

$$\int_0^\infty \upsilon_x \cdot \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) \cdot d\upsilon_x = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{m\upsilon_x^2}{2kT}\right) \cdot \frac{1}{2} d\upsilon_x^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mu}{2kT}\right) \cdot \frac{1}{2} du = -\frac{2kT}{2m} \exp\left(-\frac{mu}{2kT}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{kT}{m} .$$

Тоді вираз (4) набирає вигляду

$$z = n \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot \frac{kT}{m} = \frac{n}{4}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{1}{4} n < \upsilon > .$$

У цій формулі взяли до уваги, що $< \upsilon > = \sqrt{8kT/(\pi m)}$ – середня швидкість молекул газу. Таким чином, число ударів молекул об одиничну поверхню за одиницю часу буде дорівнювати

$$z = \frac{1}{4} n < \upsilon > . \qquad (5)$$

Аналіз одержаного результату

Порівняємо одержану розрахункову формулу (5) з відомою з літературних джерел (10а). Бачимо, що ці формули збігаються. Це означає, що знайдене співвідношення (5) є правильним.

Відповідь: $z = n < \upsilon > / 4$.

Приклад 10.6

Під час спостереження в мікроскоп зважених частинок гумігуту виявлено, що їх середнє число у тонких шарах, відстань між якими $h = 42$ мкм, відрізняється один від одного в $\eta = 2{,}0$ рази. Температура середовища $T = 290$ К. Діаметр частинок $d = 0{,}40$ мкм, а їх густина на $\Delta\rho = 0{,}20$ г/см^3 більша від густини оточуючої рідини. Знайти за цим даними сталу Больцмана.

Розв'язання

k – ?	
$h = 42$ мкм $= 42 \cdot 10^{-6}$ м, $\eta = 2{,}0$, $T = 290$ К, $d = 0{,}40$ мкм $= 0{,}40 \cdot 10^{-6}$ м, $\Delta\rho = 0{,}20$ г/см^3 $=$ $0{,}20 \cdot 10^3$ кг/м^3	Для розв'язування задачі використаємо розподіл Больцмана (10 є):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right), \quad (1)$$

до якого входить стала Больцмана k. Потенціальну енергію молекули ε_p у зовнішньому полі, що є суперпозицією сили тяжіння та сили Архімеда, знайдемо за допомогою зв'язку між роботою консервативної зовнішньої сили та потенціальною енергією:

$$A = \varepsilon_{p1} - \varepsilon_{p2}, \quad (2)$$

де індекс «1» та «2» відповідає першому та другому положенню частинки в зовнішньому полі.

Перейдемо до детального розв'язування задачі. На частинку гумігуту, яка знаходиться в рідині, діють дві сили: сила тяжіння $\vec{F}_{тяж}$ та сила Архімеда $\vec{F}_{Арх}$ (рис. 10.2). Результуюча цих двох сил дорівнює

$$\vec{F}_{рез} = \vec{F}_{тяж} + \vec{F}_{Арх} =$$
$$= -\rho V g \vec{e}_y + \rho_{рід} V g \vec{e}_y = -\Delta\rho V g \vec{e}_y. \quad (3)$$

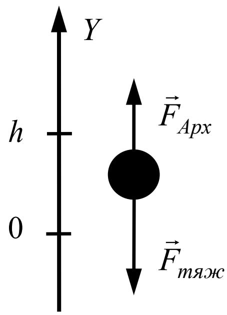


Рисунок 10.2

У цій формулі ρ – густина речовини гумігуту, $\rho_{рід}$ – густина рідини, $\Delta\rho = \rho - \rho_{рід}$, V – об'єм частинки гумігуту, $\vec{e}_y$ – орт осі Y.

Робота результуючої сили з

переміщення частинки з точки з координатою y_1 у точку з координатою y_2 буде дорівнювати

$$A = \vec{F}_{рез} \cdot \Delta\vec{r} = -F_{рез}(y_2 - y_1) = F_{рез}y_1 - F_{рез}y_2 . \qquad (4)$$

Порівнюючи формулу (4) з формулою (2), знаходимо вираз для потенціальної енергії частинки гумігуту:

$$\varepsilon_p = F_{рез}y = \Delta\rho Vgy + C , \qquad (5)$$

де C – константа інтегрування. Будемо вважати, що потенціальна енергія частинки гумігуту дорівнює нулю коли $y = 0$. Із цього випливає, що C в (5) дорівнює нулю. Таким чином,

$$\varepsilon_p = \Delta\rho Vgy . \qquad (6)$$

Тоді, використовуючи (1), можемо записати вираз для концентрації частинок:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon_p}{kT}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{\Delta\rho Vgy}{kT}\right), \qquad (7)$$

де n_0 – концентрація частинок із координатою $y = 0$.

З умови задачі відомо, що концентрація частинок у тонких шарах, відстань між якими h, відрізняються одна від одної в $\eta = 2{,}0$ рази. Це означає, що

$$\eta = \frac{n(y_0)}{n(y_0 + h)} = \frac{n_0 \exp\left(-\frac{\Delta\rho Vgy_0}{kT}\right)}{n_0 \exp\left(-\frac{\Delta\rho Vg(y_0 + h)}{kT}\right)} =$$

$$= \exp\left(\frac{\Delta\rho Vg(y_0 + h)}{kT} - \frac{\Delta\rho Vgy_0}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\Delta\rho Vgh}{kT}\right).$$

Звідси знаходимо сталу Больцмана:

$$\frac{\Delta\rho Vgh}{kT}=\ln\eta \text{ або } k=\frac{\Delta\rho Vgh}{T\ln\eta}. \qquad (8)$$

Візьмемо до уваги, що об'єм частинки гумігуту дорівнює

$$V=\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3.$$

Тоді вираз для шуканої сталої Больцмана набере вигляду

$$k=\frac{\pi\Delta\rho d^3 gh}{6T\ln\eta}. \qquad (9)$$

Запишемо фізичні величини, що входять до розрахункової формули (9), в одиницях СІ й виконаємо обчислення:

$$k=\frac{\pi\cdot 0{,}2\cdot 10^3\cdot 0{,}4^3\cdot 10^{-18}\cdot 9{,}81\cdot 42\cdot 10^{-6}}{6\cdot 290\cdot \ln 2}=1{,}4\cdot 10^{-23}\ \text{Дж/К}.$$

Відповідь: $k=\pi d^3 gh\Delta\rho/(6T\ln\eta)=1{,}4\cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Приклад 10.7

Горизонтальний циліндр, закритий з одного кінця, обертають із сталою кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, що проходить через відкритий кінець циліндра. Тиск повітря зовні p_0, температура T, молярна маса повітря μ. Знайти тиск повітря як функцію відстані r від осі обертання. Молярну масу вважати незалежною від r.

Розв'язання

$p=p(r)$ – ?
ω, p_0, T, μ

Коли горизонтальний циліндр починає обертатися, то відбувається зміщення молекул відносно цього циліндра. Причину зміщення молекул легко зрозуміти, якщо перейти в неінерційну систему відліку, що пов'язана з нерухомим горизонтальним циліндром. У цій системі на молекули діє відцентрова сила. Завдяки цій силі молекули зміщуються від центра циліндра. Це є причиною збільшення тиску біля закритого кінця циліндра. Зміщення молекул припиняється, коли відцентрова сила врівноважується силою, яка виникає за рахунок зміни тиску зі зміною відстані від осі обертання. Саме цю залежність тиску $p = p(r)$ від відстані r і потрібно знайти в задачі.

Виділимо в горизонтальному циліндрі, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо вертикальної осі, елементарний об'єм dV з повітрям (рис. 10.3). Для аналізу руху повітря, що міститься в цьому об'ємі, застосуємо 2-й закон Ньютона. З одержаного співвідношення знайдемо шукану залежність тиску повітря $p(r)$ як функцію відстані r від осі обертання.

Перейдемо до реалізації плану розв'язування задачі. Позначимо через S площу горизонтального циліндра, через r – відстань від осі обертання до досліджуваного об'єму dV, через dr – довжину елементарного об'єму dV (рис. 10.3). Тоді цей елементарний об'єм можемо записати у вигляді

$$dV = Sdr\,. \tag{1}$$

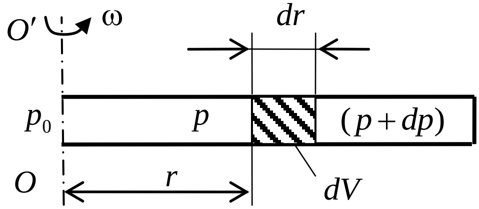


Рисунок 10.3

Повітря, що міститься в елементарному об'ємі dV, рухається по колу з кутовою швидкістю ω. Це означає, що прискорення газу в цьому елементарному об’ємі dV є доцентровим. Воно дорівнює

$$a = \omega^2 r. \tag{2}$$

Причиною цього прискорення є сили, які діють на газ в об’ємі dV (рис. 10.4): сила тяжіння $dm \cdot \vec{g}$ (dm – маса газу в об’ємі dV), сила реакції опори з боку циліндра $d\vec{N}$, сила $\vec{F}_1$ з боку повітря, що міститься між віссю обертання OO' та об’ємом dV, сила $\vec{F}_2$ з боку повітря, що міститься між об’ємом dV та закритим кінцем горизонтального циліндра.

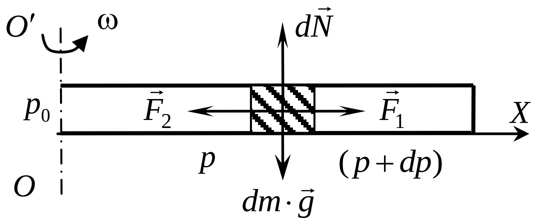


Рисунок 10.4

Через те що тиск змінюється, в точках, для яких відстань від осі обертання OO' дорівнює r, цей тиск дорівнює p, а в точках, для яких відстань $r + dr$, тиск дорівнює $p + dp$. Модуль сили $\left|\vec{F}_1\right|$ дорівнює

$$F_1 = p \cdot S, \tag{3}$$

а модуль сили $\left|\vec{F}_2\right|$:

$$F_2 = (p + dp) \cdot S. \tag{4}$$

Другий закон Ньютона для повітря в об’ємі dV буде мати вигляд

$$dm \cdot \vec{a} = \vec{N} + dm \cdot \vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 . \qquad (5)$$

Це рівняння проектуємо на вісь X, паралельній горизонтальному циліндру і пов'язаній з ним:

$$-dm \cdot a = -F_2 + F_1 = -(p + dp)S + p \cdot S . \qquad (6)$$

Тутураховано (3), (4) та те, що $\vec{N} + dm\vec{g} = 0$ (у вертикальному напрямку повітря не рухається). Масу газу в об'ємі dV знаходимо як

$$dm = \rho dV , \qquad (7)$$

де густину газу знаходимо з рівняння Менделєєва–Клапейрона (7 а):

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} . \qquad (8)$$

Тоді рівняння (6) з урахуванням (1), (2), (8) набирає вигляду

$$\frac{p\mu S dr}{RT}\omega^2 r = (p + dp)S - pS = dpS$$

або

$$\frac{dp}{p} = \frac{\mu\omega^2 r}{RT} dr . \qquad (9)$$

Інтегруємо праву і ліву частини рівняння (9). Також враховуємо, що якщо $r = 0$, то $p = p_0$, і якщо $r = r$, то $p = p$:

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_0^r \frac{\mu\omega^2 r}{RT} dr , \quad \ln\frac{p}{p_0} = \frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT} ,$$

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT}\right). \qquad (10)$$

Співвідношення (10) і є шуканою залежністю цієї задачі.

Аналіз одержаного результату

1 Розглянемо інший варіант розв'язування задачі. Для цього використаємо розподіл Больцмана (10 є) $n = n_0 \exp\left(-\varepsilon_p /(kT)\right)$ та рівняння ідеального газу (10 б) $p = nkT$. Знайдемо потенціальну ε_p, далі визначимо концентрацію, а потім знайдемо і тиск газу.

Перейдемо в неінерційну систему відліку, що пов'язана з нерухомим горизонтальним циліндром. У цій системі відліку на молекули діє відцентрова сила $F_{відц} = m_0\omega^2 r$, де m_0 – маса молекули. Робота цієї сили з переміщення молекули від точки з радіусом r_1 у точку з радіусом r_2 дорівнює

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_{відц} dr = \int_{r_1}^{r_2} m_0\omega^2 r dr = \left(-m_0\omega^2 r_1^2 /2\right) - \left(-m_0\omega^2 r_2^2 /2\right).$$

Це означає, що потенціальна енергія молекули у полі такої сили має вигляд $\varepsilon_p = -m_0\omega^2 r^2 /2$. Тоді концентрація молекул згідно з розподілом Больцмана буде дорівнювати

$$n = n_0 \exp\left(-\varepsilon_p /(kT)\right) = n_0 \exp\left(m_0\omega^2 r^2 /(2kT)\right),$$

а тиск

$$p = nkT = kTn_0 \exp\left(m_0\omega^2 r^2 /(2kT)\right) = p_0 \exp\left(m_0\omega^2 r^2 /(2kT)\right),$$

де p_0 і n_0 – тиск і концентрація в точці з радіусом $r = 0$, тобто біля відкритого кінця циліндра. Також візьмемо до уваги, що добуток маси однієї молекули m_0 на число Авогадро N_A дорівнює молярній масі газу $\mu = m_0 N_A$, добуток числа Авогадро N_A на сталу Больцмана k дорівнює універсальній газовій сталій $R = N_A k$. Тоді тиск буде визначатися виразом

$$p = p_0 \exp\left(\mu\omega^2 r^2 /(2RT)\right).$$

Таким чином, одержали співвідношення, що збігається з розрахунковою формулою (10).

2 Проведемо дослідження розрахункової формули (10) у граничних випадках.

Розглянемо випадок, коли циліндр не обертається, тобто його кутова швидкість дорівнює нулю ($\omega = 0$). Зрозуміло, що в цій ситуації тиск у циліндрі не повинен змінюватися зі зміною відстані від осі обертання. Тобто $p = p_0$. Із розрахункової формули випливає такий самий результат. Якщо $\omega \to 0$, то

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mu\omega^2 r^2}{2RT}\right) \to p_0 \exp(0) = p_0 .$$

Отже, розрахункова формула не суперечить фізичним міркуванням.

Відповідь: $p = p_0 \exp(\mu\omega^2 r^2 /(2RT))$.

10.2 Задачі для самостійного розв'язування

10.1 У посудині ємністю V = 12 л міститься газ, число N молекул якого дорівнює $1{,}44 \cdot 10^{18}$. Визначити концентрацію n молекул газу.

10.2 Визначити ємність V посудини, у якій міститься газ, якщо концентрація молекул $n = 1{,}25 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$, а їх число $N = 2{,}5 \cdot 10^{23}$.

10.3 У посудині ємністю V = 20 л міститься газ кількістю речовини ν = l,5 кмоль. Визначити концентрацію n молекул у посудині.

10.4 Ідеальний газ перебуває за нормальних умов у закритій посудині. Визначити концентрацію n молекул газу.

10.5 У посудині ємністю $V = 5$ л міститься кисень, концентрація n молекул якого дорівнює $9{,}41 \cdot 10^{23}$ м$^{-3}$. Визначити масу m газу.

10.6 У балоні ємністю $V = 5$ л міститься азот масою $m = 17{,}5$ г. Визначити концентрацію n молекул азоту в балоні.

10.7 Визначити кількість речовини ν водню, що заповнює посудину місткістю $V = 3$ л, якщо концентрація n молекул газу в посудині дорівнює $2 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$.

10.8 У двох однакових за об’ємом посудинах містяться різні гази: у першому – водень, у другому – кисень. Знайти відношення n_1/n_2 концентрацій газів, якщо маси газів однакові.

10.9 Газ масою $m = 58{,}5$ г міститься в посудині ємністю $V = 5$ л. Концентрація n молекул газу дорівнює $2{,}2 \cdot 10^{26}$ м$^{-3}$. Який це газ?

10.10 У балоні ємністю $V = 2$ л міститься кисень масою $m = 1{,}17$ г. Концентрація n молекул у посудині дорівнює $1{,}1 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. Визначити сталу Авогадро $N_А$.

10.11 У балоні міститься кисень за нормальних умов. Якщо нагріти його до деякої температури, частина молекул виявилася дисоційованою на атоми. Ступінь дисоціації $\alpha = 0{,}4$. Визначити концентрації частинок: 1) n_1 до нагрівання газу; 2) n_2 молекулярного кисню після нагрівання; 3) n_3 атомарного кисню після нагрівання.

10.12 Визначити концентрацію n молекул ідеального газу за температури $T = 300$ К та тиску $p = 1$ мПа.

10.13 Визначити тиск p ідеального газу для двох значень температури газу: 1) $T = 3$ К; 2) $T = 1$ кК. Взяти концентрацію n молекул газу $\approx 10^{19}$ см$^{-3}$.

10.14 Скільки молекул газу міститься в балоні ємністю $V = 30$ л за температури $T = 300$ К та тиску $p = 5$ МПа?

10.15 Визначити кількість речовини ν і концентрацію n молекул газу, що міститься в колбі ємністю $V = 240$ см^3 за температури $T = 290$ К та тиску $p = 50$ кПа.

10.16 У колбі ємністю $V = 100$ см^3 утримується деякий газ за температури $T = 300$ К. На скільки понизиться тиск p газу в колбі, якщо внаслідок витікання з колби вийде $N = 10^{20}$ молекул?

10.17 У колбі ємністю $V = 240$ см^3 міститься газ за температури $T = 290$ К та тиску $p = 50$ кПа. Визначити кількість речовини ν газу й число N його молекул.

10.18 Визначити число N молекул ртуті, що утримуються в повітрі об'ємом $V = 1$ м^3 у приміщенні, зараженому ртуттю, з температурою $t = 20$ °С, якщо тиск p насиченої пари ртуті за цієї температури дорівнює 0,13 Па.

10.19 Для одержання високого вакууму в скляній посудині необхідно прогрівати його за умови відкачування з метою видалити адсорбовані гази. Визначити, на скільки підвищиться тиск у сферичній посудині радіусом $R = 10$ см, якщо всі адсорбовані молекули перейдуть зі стінок у посудину. Шар молекул на стінках вважати мономолекулярним, перетин σ однієї молекули дорівнює 10^{-15}см^2. Температура T, за якої відбувається відкачування, дорівнює 600 К.

10.20 Вакуумний насос дозволяє одержати тиск $p = 4 \cdot 10^{-19}$ Па (за кімнатної температури). Знайти кількість молекул газу в 1 см^3.

10.21 Густина суміші гелію та азоту за нормальних умов $\rho = 0{,}60$ г/л. Знайти концентрацію атомів гелію в суміші.

10.22 Тиск p газу дорівнює 1 мПа, концентрація n його молекул дорівнює 10^{10} см$^{-3}$. Визначити: 1) температуру T

газу; 2) середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_к \rangle$ поступального руху молекул газу.

10.23 Визначити середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_к \rangle$ поступального руху й середнє значення $\langle \varepsilon \rangle$ повної кінетичної енергії молекули водяної пари за температури $T = 600$ К. Знайти також кінетичну енергію W поступального руху всіх молекул пари, що містить кількість речовини $\nu = 1$ кмоль.

10.24 Визначити середнє значення $\langle \varepsilon \rangle$ повної кінетичної енергії однієї молекули гелію, кисню й водяної пари за температури $T = 400$ К.

10.25 Визначити кінетичну енергію $\langle \varepsilon_1 \rangle$, що припадає в середньому на один ступінь вільності молекули азоту, за температури $T = 1$ кК, а також середню кінетичну енергію $\langle \varepsilon_к \rangle$ поступального руху, $\langle \varepsilon_{об} \rangle$обертового руху й середнє значення повної кінетичної енергії $\langle \varepsilon \rangle$ молекули.

10.26 Нехай ідеальний газ нагрітий до температури, за якої у молекул збуджені всі ступені вільності (поступальні, обертальні та коливальні). Знайти молярну теплоємність такого газу для ізохорного процесу, а також показник адіабати γ, якщо газ складається з N-атомних молекул: 1) лінійних; 2) нелінійних.

10.27 Ідеальний газ із N-атомних молекул розширюють ізобарно. Вважаючи, що у молекул збуджені усі ступені вільності (поступальні, обертальні та коливальні), знайти частку теплоти, яка надається газу в цьому процесі для виконання роботи.

10.28 Знайти молярну масу і кількість ступенів вільності молекул ідеального газу, якщо відомі його питомі теплоємності: $c_V = 0{,}65$ Дж/(г · К) та $c_p = 0{,}91$ Дж/(г · К).

10.29 Знайти кількість ступенів вільності молекул ідеального газу, молярна теплоємність якого: 1) за постійним тиском $C_p = 29$ Дж/(моль · К); 2) у процесі $pT = const$ дорівнює $C = 29$ Дж/(моль · К).

10.30 Розрахувати показник адіабати γ для суміші, що складається з ν_1 молів одноатомного газу та ν_2 молів двоатомного газу. Гази складаються із жорстких молекул.

10.31 Обчислити за температури $t = 17\,°\text{C}$:
1) середню квадратичну швидкість і середню кінетичну енергію поступального руху молекули кисню;
2) середню квадратичну швидкість крапельки води діаметра d = 0,10 мкм, зваженої в повітрі.

10.32 У скільки разів потрібно розширити адіабатно газ, що складається з твердих двоатомних молекул, щоб їх середня квадратична швидкість зменшилася в η = 1,50 раза?

10.33 Азот масою m = 15 г перебуває в закритій посудині за температури T = 300 К. Яку кількість тепла необхідно передати азоту, щоб середня квадратична швидкість його молекул зросла в η = 2,0 рази?

10.34 Газ, що складається із твердих двоатомних молекул, має температуру T = 300 К. Обчислити середню квадратичну кутову швидкість обертання молекули, якщо її момент інерції $I = 2{,}1 \cdot 10^{-39}$ г · см^2.

10.35 Газ із твердих двоатомних молекул, що перебував за нормальних умов, адіабатно стиснули в η = 5,0 разів за об'ємом. Знайти середню кінетичну енергію обертового руху молекули в кінцевому стані.

10.36 Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями, одержати формулу найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$.

10.37 Використовуючи функцію розподілу молекул за швидкостями, одержати функцію, що виражає розподіл молекул за відносними швидкостями $u = \upsilon/\upsilon_{ім}$.

10.38 Яка ймовірність *W* того, що молекула ідеального газу має швидкість, відмінну від $\frac{1}{2}\upsilon_{ім}$ не більше ніж на 1 %?

10.39 Знайти ймовірність *W* того, що молекула ідеального газу має швидкість, відмінну від $2\upsilon_{ім}$ не більше ніж на 1 %.

10.40 Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями, одержати формулу, що визначає частку ω молекул, швидкості υ яких набагато менші від найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$.

10.41 Визначити відносне число ω молекул ідеального газу зі швидкостями у межах від нуля до однієї сотої від найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$.

10.42 Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями, визначити середню арифметичну швидкість $\langle\upsilon\rangle$ молекул.

10.43 За функцією розподілу молекул за швидкостями визначити середню квадратичну швидкість $\langle\upsilon_{кв}\rangle$.

10.44 Визначити, яка з двох середніх величин, $\langle 1/\upsilon\rangle$ або $1/\langle\upsilon\rangle$, більша, і знайти їх відношення.

10.45 Знаючи функцію розподілу молекул за швидкостями у деякому молекулярному пучку $f(\upsilon) = \dfrac{m^2}{2k^2T^2} e^{-m\upsilon^2/(2kT)}\upsilon^3$, знайти вирази для: 1) найбільш імовірної швидкості $\upsilon_{ім}$; 2) середньої арифметичної швидкості $\langle\upsilon\rangle$.

10.46 Водень перебуває у нормальних умовах і займає об'єм $V = 1$ см^3. Визначити число N молекул у цьому об'ємі, що мають швидкості, менші від деякого значення $\upsilon_{\max} = 1$ м/с.

10.47 Одержати формулу найбільш імовірного імпульсу $p_{ім}$ молекул ідеального газу.

10.48 Знайти число N молекул ідеального газу з імпульсам, значення якого точно дорівнює найбільш імовірному значенню $p_{ім}$.

10.49 Знайти формулу, що визначає середнє значення модуля імпульсу $\langle p \rangle$ молекул ідеального газу.

10.50 На скільки відсотків зміниться найбільш імовірне значення $p_{ім}$ імпульсу молекул ідеального газу, якщо температура зміниться на один відсоток?

10.51 Знайти вираз для імпульсу молекул ідеального газу, енергії яких дорівнюють найбільш імовірному значенню енергії.

10.52 Порошини, зважені в повітрі, мають масу $m = 10^{18}$ г. У скільки разів зменшиться їх концентрація n за умови збільшення висоти на $\Delta h = 10$ м? Температура повітря $T = 300$ К.

10.53 Однакові частинки масою $m = 10^{-12}$ г кожна розподілені в однорідному гравітаційному полі з напруженістю $G = 0{,}2$ мкН/кг. Визначити відношення n_1/n_2 концентрацій частинок, що містяться на еквіпотенціальних рівнях, які віддалені один від одного на $\Delta z = 10$ м. Температура T у всіх шарах однакова й дорівнює 290 К.

10.54 Визначити силу F, що діє на частинку, яка міститься у зовнішньому однорідному полі сили тяжіння, якщо відношення n_1/n_2 концентрацій частинок на двох рівнях, розміщених один від одного на $\Delta z = 1$ м, дорівнює e. Температуру T вважати скрізь однаковою й такою, що дорівнює 300 К.

10.55 Ротор центрифуги обертається з кутовою швидкістю ω. Використовуючи функцію розподілу Больцмана, встановити розподіл концентрації n частинок масою m, що містяться у роторі центрифуги, як функції відстані r від осі обертання.

10.56 У центрифузі з ротором радіусом $a = 0{,}5$ м, який має температуру $T = 300$ К, знаходиться у газоподібному стані речовина з відносною молекулярною масою $M_r = 10^8$. Визначити відношення n_a/n_0 концентрацій молекул біля стінок ротора та у його центрі, коли ротор обертається із частотою $n = 30\ \text{с}^{-1}$.

10.57 Ротор центрифуги, заповнений радоном, обертається із частотою $n = 50\ \text{с}^{-1}$. Радіус a ротора дорівнює 0,5 м. Визначити тиск p газу на стінки ротора, якщо в його центрі тиск p_0 дорівнює нормальному атмосферному. Температуру T у всьому об'ємі вважати однаковою й такою, що дорівнює 300 К.

10.58 У центрифузі перебуває деякий газ з температурою $T = 271$ К. Ротор центрифуги радіусом $a = 0{,}4$ м обертається з кутовою швидкістю $\omega = 500$ рад/с. Визначити відносну молекулярну масу M_r газу, якщо тиск p біля стінки ротора в 2,1 раза більший від тиску p_0 у його центрі.

10.59 Ротор ультрацентрифуги радіусом $a = 0{,}2$ м заповнений атомарним хлором із температурою $T = 3$ кК. Хлор складається із двох ізотопів: ^{37}Cl і ^{35}Cl. Частка ω_1 атомів ізотопу ^{37}Cl становить 0,25. Визначити частки ω'_1 і ω'_2 атомів обох ізотопів поблизу стінок ротора, якщо ротору надати кутової швидкості обертання ω, що дорівнює 10^4 рад/с.

10.60 Термоізольована посудина з газом, молярна маса якого μ і $C_p / C_V = \gamma$, рухається зі швидкістю υ. Знайти приріст температури газу за умови раптової зупинки посудини.

10.61 У скільки разів зміниться кількість ударів твердих двохатомних молекул газу об поверхню стінки за одиницю часу, якщо газ адіабатно розширити в η разів?

ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ
ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1 $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\alpha t^4 / 12\right)^2 + \left(\beta t^2 / 2\right)^2}$ = 1,52 м.

1.2 υ = 13,038 м/с, a = 4,02 м/с^2.

1.3 $\langle \upsilon \rangle$ = 3,4 м/с.

1.4 $\langle \upsilon \rangle = \sqrt{700}$ м/с.

1.5 $s \approx 3{,}3 \cdot 10^2$ м.

1.6 $\upsilon = \upsilon_1 / \mathrm{tg}\alpha \approx 8{,}6$ м/с.

1.7 $s = 100$ м.

1.8 s = 13 м, $|\Delta\vec{r}|$ = 5 м.

1.9 t = 10 с, l = 100 м.

1.10 $< \upsilon > = 3\upsilon_1(\upsilon_2 + \upsilon_3) / \left(\upsilon_2 + \upsilon_3 + 4\upsilon_1\right)$ = 4,09 м/с.

1.11 $a = \sqrt{14}$ м/с^2.

1.12 $R \approx 1275$ м.

1.13 $a_\tau = \dfrac{-g\left(\upsilon_0 \sin\alpha - gt\right)}{\sqrt{\left(\upsilon_0 \cos\alpha\right)^2 + \left(\upsilon_0 \sin\alpha - gt\right)^2}}$ = 2,6 м/с^2,

$a_n = \sqrt{g^2 - a_\tau^2}$ =9,5 м/с^2, $(a_n)_{\max} = g$,

$(a_\tau)_{\max} = g \sin\alpha = 4{,}91$ м/с^2.

1.14 υ = 35,8 м/с, a_τ = 5,38 м/с^2, a_n = 8,22 м/с^2.

1.15 $l = \upsilon_0 t \sqrt{2(1 - \sin\theta)}$ = 22 м.

1.16 $a_\tau = \left(\dfrac{2}{t}\sqrt{\dfrac{a_n}{R}} - \dfrac{4\pi n}{t^2}\right) R = -\,0{,}257$ м/с^2.

1.17 $n \approx 9$ об/с, $a \approx 930$ м/с^2.

1.18 $\upsilon \approx 7{,}55$ км/с, $\omega \approx 9{,}97 \cdot 10^{-4}$ рад/с, $a_{доц} \approx 7{,}53$ м/с^2.

1.19 Не можна, оскільки $\upsilon \approx 52$ м/с.

1.20 $\nu = 6000$ об/хв.

1.21 У 5 разів.

1.22 $\Delta s / \Delta r = \pi/6 \cdot 2 \cdot 4 / \sqrt{2 - 2\cos(\pi/6 \cdot 4)} \approx 2{,}42$.

1.23 $h = 78{,}4$ м, $\upsilon = 39{,}2$ м/с.

1.24 $h = 40$ м.

1.25 $\upsilon_0 = 58{,}8$ м/с, $h = 176{,}4$ м.

1.26 $\upsilon_0 = 44{,}2$ м/с, $h = 75$ м; $\upsilon \approx 22{,}1$ м/с.

1.27 $\upsilon_0 \approx 58{,}8$ м/с.

1.28 $s \approx 990$ м.

1.29 $t \approx 2{,}0$ с, $\upsilon = 25$ м/с, $\alpha \approx 53°$.

1.30 $\upsilon_0 = \dfrac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{g}{2(L\,\mathrm{tg}\alpha - H + h)}} \approx 13{,}8$ м/с.

1.31 $\upsilon_в = 2\upsilon$, $\upsilon_н = 0$.

1.32 $R = 3{,}8$ м.

1.33 $\vec{\upsilon} = 10\cos(5t)\vec{e}_x - 15\sin(10t)\vec{e}_y$,

$\vec{a} = -50\sin(5t)\vec{e}_x - 150\cos(10t)\vec{e}_y$, $y = 3 - 3/4x^2$.

1.34 $\vec{r} = \left(0{,}5t^4 - t\right)\vec{e}_x + (3/2\pi)\cdot\left(\cos(2\pi t/3) - 1\right)\vec{e}_y$.

1.35 $r \approx 1{,}52$ м.

1.36 $t = \sqrt{\upsilon_0/\alpha} \approx 7$ с, $x = \upsilon_0 t - \alpha t^3/3 \approx 236$ м.

1.37 $\upsilon_{01} = (\kappa/3)\sqrt[4]{(12h_0/\kappa)^3} \approx 12{,}1$ км/год.

1.38 $s = 2\upsilon t$.

1.39 $\upsilon_0 = 11{,}3$ м/с, $x = 4$ м, $y = 0{,}8$ м, $t = 0{,}5$ с, $\upsilon_A = 9{,}4$ м/с,
$\upsilon_B = 15{,}2$ м/с.

1.40 1) $l = t\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 + 2\upsilon_1\upsilon_2\cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$;

2) $l = t\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - 2\upsilon_1\upsilon_2\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}$.

1.41 $\tau = (3/2)\sqrt{2(H-h)/g} + \sqrt{(H+3h)/(2g)}$,

$l = \left(\sqrt{3}/2\right)\cdot\left(H - h + \sqrt{H^2 + 2hH - 3h^2}\right)$.

1.42 $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{\sqrt{2H/g}}{\sqrt{2(H-h)/g} + \sqrt{2h/g}}$, $\dfrac{h}{H} = \dfrac{1}{2}$.

1.43 $L = \left(\upsilon_0^2 \sin 2\alpha / g\right) - l \approx 6$ м.

1.44 $L = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g \cos\beta}\left(1 + \mathrm{tg}\beta\,\mathrm{tg}\alpha\right)$.

1.45 $s_{\min} = l(\upsilon_2 - \upsilon_1)/\sqrt{2\left(\upsilon_2^2 + \upsilon_1^2\right)}$.

1.46 $\langle\upsilon\rangle$ = 3 м/с.

1.47 $tg\alpha = 1/(4\pi N)$ = 0,04.

1.48 1) $\omega = \dfrac{\upsilon}{r}\sqrt{1 + (r/R)^2}$, $\beta = \dfrac{\upsilon^2}{rR}$ = 0,5 рад/с^2,

2) $\alpha = \mathrm{arctg}(R/r)$ = 83°.

1.49 $\upsilon_{\max} = \sqrt{\upsilon^2 + \omega^2 d^2/4}$ = 701,9 м/с.

1.50 $t_{1,2} = (\upsilon_0 \sin\alpha \pm \upsilon_0 \cos\alpha\ tg\beta)/g$ = 0,3 с та 1,14 с.

1.51 $l = (\upsilon_1 + \upsilon_2)\sqrt{\upsilon_1\upsilon_2}/g$ = 2,5м.

1.52 $t = 2a/3\upsilon$.

1.53 $t_m = (\upsilon_1 l_1 + \upsilon_2 l_2)/\left(\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2\right)$, $l_{\min} = \left|l_1\upsilon_2 - l_2\upsilon_1\right|/\sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2}$.

1.54 1) $\langle\upsilon\rangle = \pi R/\tau$ =50 см/с; 2) $\left|\langle\vec{\upsilon}\rangle\right| = 2R/\tau$ = 32 см/с;

3) $\left|\langle\vec{a}\rangle\right| = 2\pi R/\tau^2$ = 10 см/с^2.

1.55 1) $\vec{\upsilon} = \vec{b}(1 - 2\alpha t)$, $\vec{a} = -2\alpha\vec{b} = const$;

2) $\Delta t = 1/\alpha$, $s = b/2\alpha$.

1.56 1) 0,7 с; 2) відповідно 0,7 та 1,3 м.

1.57 1) $\upsilon_x = \alpha^2 t/2$, $a_x = \alpha^2/2$; 2) $<\upsilon_x> = (\alpha/2)\sqrt{s}$.

1.58 1) $y = x^2\beta / \alpha^2$; 2) $\vec{\upsilon} = \alpha\vec{e}_x + 2\beta t\vec{e}_y$, $\vec{a} = 2\beta\vec{e}_y$,

$\upsilon = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$, $a = 2\beta$; 3) $\mathrm{tg}\varphi = \alpha / 2\beta t$.

2.1 $s_1 = Ft^2/(2m_1) = 1{,}6$ м, $s_2 = Ft^2/(2m_2) = 2{,}0$ м.

2.2 $s_1 = s\cdot m_2/(m_1+m_2) = 8$ м, $s_2 = s\cdot m_1/(m_1+m_2) = 2$ м.

2.3 $T_1/T_2 = \cos\alpha_2/\cos\alpha_1 = \sqrt{2/3}$,

$\omega_1/\omega_2 = \sqrt{\cos\alpha_2/\cos\alpha_1} = \sqrt[4]{2/3}$.

2.4 Не рухатиметься.

2.5 $m \approx 380$ кг.

2.6 $F = 490$ Н.

2.7 $F_{тепл} = 55\cdot 10^3$ Н, $F_{зчепл1} = 30\cdot 10^3$ Н, $F_{зчепл2} = 15\cdot 10^3$ Н.

2.8 $F_{тер} = \mu(mg - F\sin\alpha)$.

2.9 $F_{тер} = mg\sin\alpha$.

2.10 $F = (M+m)g\mu_0$.

2.11 $F_1/F_2 = \left(gR - \upsilon^2\right)/\left(gR + \upsilon^2\right) = 0{,}43$.

2.12 $\upsilon_0 = \sqrt{gl(n-5)} = 7$ м/с.

2.13 $\upsilon_1/\upsilon_2 = 1$.

2.14 $\mu = \sin\alpha/(1+\cos\alpha)$.

2.15 $\upsilon = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{M}{M+m}} \approx 13{,}8$ м/с, $l = \dfrac{\upsilon_0^2 m^2}{2\mu g M(M+m)} \approx 0{,}37$ м.

2.16 $a = (F/m)(\cos\beta + \mu\sin\beta) - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

2.17 $\upsilon = \sqrt{2gh(1 - \mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha)}$.

2.18 $a = (F_2/m) + (F_1/m)\cdot(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g = 1{,}6$ м/с^2.

2.19 $\alpha = \mathrm{arctg}(a/g) = 17°$, $T = m\sqrt{a^2+g^2} = 20{,}5$ Н.

2.20 $t = \sqrt{2l[g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a_0(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)]^{-1}} = 1{,}4$ с.

2.21 $\rho = (P_2\rho_1 - P_1\rho_2)/(P_2 - P_1)$.

2.22 $\rho_2 = \rho_1 (P - P_2)/(P - P_1)$.

2.23 $T = 2\pi\sqrt{R/g} \approx 1$ год 25 хв.

2.24 $\upsilon_1 = \sqrt{GM_з / R_з} \approx 7{,}9$ км/с.

2.25 $\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \sqrt{\dfrac{R + h_2}{R + h_1}}$, $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{R + h_1}{R + h_2}\right)^{3/2}$.

2.26 $\tau = \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g}$, $l = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left(1 + \dfrac{F}{mg} tg\alpha\right)$, $H = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$.

2.27 $\alpha = \mathrm{arctg}(1/4 - F/(mg))$.

2.28 $\upsilon = (F\cos\alpha - \mu(Mg - F\sin\alpha)) \cdot t / M \approx 37{,}2$ м/с.

2.29 1) $a = (F\cos\alpha - 2kmg + kF\sin\alpha)/(2m) \approx 2{,}6$ м/с^2;

2) $T = (F/2)(\cos\alpha + k\sin\alpha) \approx 42$ Н;

3) $F = 2kmg/(\cos\alpha + k\sin\alpha) \approx 8{,}2$ Н.

2.30 $N = mg(R - 3h)/R$, $h_0 = R/3$.

2.31 $h = (25/27)l$.

2.32 $F = m \cdot l \cdot n^2 = 3{,}6$ Н.

2.33 $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$, $T = \dfrac{2m_2 m_1}{m_2 + m_1} g$, $l = l_0 + \dfrac{4m_2 m_1}{k(m_2 + m_1)} g$.

2.34 $x = 2\pi h^2 \cos\varphi / (\upsilon T) = 1{,}82$ м (T – період обертання Землі). Кулька відхилиться на захід.

2.35 $\alpha = \mathrm{arctg}(g/a) = 84{,}18°$.

2.36 $\rho = 81\pi / 8GT^2$.

2.37 $\rho = 3\pi / T^2 G \approx 110$ кг/м^3.

2.38 $F = mg(H/h + 1) - V\rho_{води} g$, $h_1 = 2h(V\rho_{води}/m - 1) - H$.

3.1 1) 6,3 м/с; 2) – 0,57 м/с.

3.2 1) 1,2 м/с, 5,2 м/с; 2) 2,8 м/с, –1,2 м/с.

3.3 $\upsilon_1 = 0{,}4$ м/с.

3.4 $u_2 = 114$ м/с.

3.5 u_{1x} = 0,385 м/с, u_{2x} = –0,615 м/с.

3.6 $A = \mu \cdot g \cdot m \cdot s + m\upsilon^2/2$ = 996 Дж.

3.7 1,35 кДж.

3.8 2,94 кДж, 6 кДж.

3.9 5 Дж, 15 Дж.

3.10 $P = (1/d)\sqrt{m^3 g^3/(\pi\rho)}$; 1) 139 кВт; 2) 313 кВт.

3.11 0,32 Вт, 56 Вт.

3.12 $\upsilon = \sqrt{5gR}$ =14 м/с.

3.13 $T_2 = (m_1/m_2) \cdot T_1$ = 30 кДж.

3.14 $T_2 = (m_1/m_2) \cdot T_1$ = 12нДж.

3.15 A = 390 Дж.

3.16 $h = m^2\upsilon^2/(2Mg)$= 7,34 см.

3.17 $\upsilon = (M+m)\sqrt{2gh}/m$= 701 м/с.

3.18 $h = l(1-\cos\varphi)m_1/(m_1+m_2)$ = 16 см.

3.19 $\Delta U = m_1 m_2(\upsilon_1-\upsilon_2)^2/(2(m_1+m_2))$; 1) 9,6 Дж;
2) 86,4 Дж.

3.20 $u = m_1\upsilon_1/(m_1+m_2)$, $\omega = m_2/(m_1+m_2)$;
1) u = 1 м/с, ω = 0,8;
2) u = 4 м/с, ω = 0,2.

3.21 1) $p_1' = (m_1-m_2)/(m_1+m_2)$= –6 кг · м/с,
$p_2' = 2m_2/(m_1+m_2)$= 16 кг · м/с; 2) $\Delta p_1 = -p_2'$ = –16 кг · м/с;

3) $T_1' = \dfrac{p_1^2(m_1-m_2)}{2m_1(m_1+m_2)}$ = 9 Дж, $T_2' = \dfrac{2m_2 p_1^2}{(m_1+m_2)^2}$ = 16 Дж;

4) $|\Delta T_1| = T_2'$ = 16 Дж;

5) $\omega = |\Delta T_1|/T_1 = 4m_1 m_2/(m_1+m_2)^2$ = 0,64.

3.22 1) $p_1' = m_1 p_1 / (m_1 + m_2)$ = 3 кг · м/с,
$p_2' = m_2 p_1 / (m_1 + m_2)$ = 2 кг · м/с; 2) $\Delta p_1 = -p_2'$ = –2 кг · м/с;

3) $T_1' = \dfrac{m_1 p_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}$ = 0,75 Дж, $T_2' = \dfrac{m_2 p_1^2}{2(m_1 + m_2)^2}$ = 0,5 Дж;

4) $\Delta T_1 = \dfrac{m_2 (2m_1 + m_2) p_1^2}{2(m_1 + m_2)^2 m_1}$ = 1,33 Дж;

5) $\omega_1 = \dfrac{T_2'}{T_1} = \dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$ = 0,24, $\omega_2 = \dfrac{T_1'}{T_1} = \dfrac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$ = 0,36;

6) $\Delta U = \dfrac{m_2 p_1^2}{2m_1 (m_1 + m_2)^2}$ = 0,833 Дж;

7) $\omega = \Delta U / T_1 = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$ = 0,4.

3.23 $\eta = m_2 / (m_1 + m_2)$ = 0,952.

3.24 $\eta = m_1 / (m_1 + m_2)$ = 0,833.

3.25 $\eta = m_1 / (m_1 + m_2)$ = 0,93.

3.26 1) $u_1 = \upsilon_1 \cos\alpha$ = 1,73 м/с, $u_2 = \upsilon_1 \sin\alpha$ = 1 м/с;
2) $\beta = \pi/2 - \alpha$ = 60°.

3.27 $\alpha = \arccos\left(\dfrac{T_1 + (T_1 - T_2) - (m_1 / m_2) T_2}{2\sqrt{T_1 (T_1 - T_2)}}\right)$ = 144°.

3.28 $A_1 \approx 1{,}0 \cdot 10^4$ Дж, $A_2 \approx 1{,}1 \cdot 10^6$ Дж.

3.29 $A = r\upsilon_0 t^2 / 2 - r^2 t^4 / (8m) \approx 2{,}5 \cdot 10^6$ Дж.

3.30 $A = h^2 \rho g \pi (D^2 - d^2)/8$ = 86,3 МДж.

3.31 A = 18,7·10^8 Дж.

3.32 $\upsilon = \sqrt{2gl/3} = 3{,}6$ м/с.

3.33 $\upsilon = \sqrt{2GM/r}$.

3.34 $p = (2m/3)\sqrt{2gl} = 3{,}5$ кг · м/с.

3.35 $\vec{\upsilon}_{задн} = \vec{\upsilon}_0 - \vec{u}m/(M+m)$, $\vec{\upsilon}_{пер} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{u}mM/(M+m)^2$.

3.36 $F = 2\alpha s\sqrt{1+(s/R)^2}$.

3.37 $P = mR\alpha t$, $<P> = mR\alpha t/2$.

3.38 $A_{стор} = m\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right)/2 + \alpha(x_2 y_2 - x_1 y_1) = 6$ мДж.

3.39 $h = H/2$, $s_{макс} = H$.

3.40 $F = \sqrt{km\left(2gl - \upsilon^2\right)} = 8$ Н.

3.41 $m_1/m_2 = 1 + 2\cos\theta = 2{,}0$.

3.42 $\alpha = \arccos(2/3)$ = 0,268π рад.

3.43 n = 8 $с^{-1}$, $A = 2ml_1^2\pi^2 n^2\left((l_1/l_2)^2 - 1\right)$ = 20,44 Дж.

3.44 $n_2 = n_1\left(I + 2ml_1^2\right)/\left(I + 2ml_2^2\right) = 2{,}55\ c^{-1}$,

$A = \left(I + 2ml_2^2\right)2\pi^2 n_2^2 - \left(I + 2ml_1^2\right)2\pi^2 n_1^2$ = 227 Дж.

3.45 $\alpha = \arccos\left(1 - m^2\upsilon^2/\left(4(m+M)^2 gR\right)\right)$ = 27°.

3.46 $\upsilon_0 = Ml\omega/(2m) = Ml\sqrt{3g(1-\cos\alpha)/l}\,/(2m)$ = 0,27 м/с.

4.1 $a = 2g(m_2 - m_1)/(2(m_1 + m_2) + m)$ = 1,78 м/с^2,

$T_1 = m_1 g(4m_2 + m)/(2(m_1 + m_2) + m)$ = 23,19 Н,

$T_2 = m_2 g(4m_1 + m)/(2(m_1 + m_2) + m)$ = 24,08 Н.

4.2 $a = 2\left(m_1 g - 3t - 2t^3\right)/(2m_1 + m)$, a_1 = 1,92 м/с^2 – вантаж рухається вниз; a_2 = 4,88 м/с^2 – вантаж рухається вгору.

4.3 $M = mA\omega R^2\cos\omega t/2$, $L = mA\omega^2 R^2\sin\omega t/2$.

4.4 $a = 0{,}71g\sin\alpha$ = 3,5 м/с^2,

$F_{тер} = 2mg\sin\alpha/7$ = 0,14 Н, A = 0.

4.5 $h = 7\upsilon^2/(10g)$ = 7,14 м.

4.6 $M = 100\eta P/(2\pi n)$ = 2695 Н · м.

4.7 $T = L\beta t_2^2 / 2t_1$ = 281 кДж.

4.8 $P = Mm_1\upsilon/\left((m_1 + m_2)R\right)$ = 0,57 мВт.

4.9 $T_{\text{пост}} / T_{\text{об}} = 2(m_1 + m_2)/m$ = 1,5.

4.10 $I_z = 2m_1 d^2\left(1 - \cos^2(a/2)\cdot\dfrac{2m_1}{(2m_1 + m_2)}\right)$ = 6,80 10^{-4} кг·м^2.

4.11 $a = 2m_2 g/(m_1 + 2m_2)$ = 2,8 м/с^2.

4.12 1) $M = -mr^2\pi n/t = -1$ Н · м;
2) $M = -mr^2\pi n^2/(2N) = -1$ Н · м.

4.13 $I = ma^2$; 1) 4 · 10^{-4} кг · м^2; 2) 2 · 10^{-4} кг · м^2.

4.14 1) $I = ml^2/3$ = 3 · 10^{-3} кг · м^2;
2) $I = ml^2/12$ = 0,75·10^{-3} кг · м^2; 3) $I = ml^2/9$ = 10^{-3} кг · м^2.

4.15 $I = ml^2/12 + m(l/2 - a)^2$ = 0,004 кг · м^2;
$I = ml^2/12 + m(l/2 + a)^2$ = 0,028 кг · м^2.

4.16 $I = (\tau a^2/2)(a/3 + b)$ = 1,44·10^{-4} кг · м^2.

4.17 $I = 3mR^2/4$ = 6 · 10^{-3} кг · м^2.

4.18 $I = ma^2/3$ = 4,27·10^{-2} кг · м^2.

4.19 $I = \sigma a^3 b/12$ = 2·10^{-5} кг · м^2.

4.20 $\langle P\rangle$ = 12,8 кВт.

4.21 $M = \text{const}$ = 200 Н · м, $P = D + Et$, де D = 3,2 кВт;
E = –0,8 кВт/с; $P(3) = 0{,}8$ кВт.

4.22 $A = n\pi^2 mR^2$, A_1 = 7,11 Дж, A_2 = 28,44 Дж.

4.23 $T = M^2 t^2/(2I)$ = 500 Дж.

4.24 T_1 = 10 Дж, T_2 = 4 Дж.

4.25 $t = 2l/\sqrt{gh}$ = 4,04 с.

4.26 1) $I = \pi\rho bR^4/2$ = 2,8 г · м^2; 2) $I = 3mR^2/10$.

4.27 $\omega = \sqrt{6F\sin\varphi/(ml)}$.

4.28 $t = 3\omega R/(4\mu g)$.

4.29 $\langle\omega\rangle = \omega_0/3$.

4.30 1) $\mu \geq 2/7\ \mathrm{tg}\alpha$; 2) $T = 5/14\ mg^2t^2\sin^2\alpha$.

4.31 $a = 2/3(g - a_0)$, $F = 1/3m(g - a_0)$.

4.32 $a_1 = F/(m_1 + 2m_2/7)$, $a_2 = 2a_1/7$.

4.33 1) $t = \omega_0 R/(3\mu g)$; 2) $A = -m\omega_0^2R^2/6$.

4.34 $\omega = \sqrt{10g(R+r)/(17r^2)}$.

4.35 $\upsilon = \omega_0 l/\sqrt{1 + 3m/M}$.

4.36 $F = 9p^2/(2ml)$ = 9 Н.

4.37 $F = \dfrac{8M\upsilon^2}{l(1 + 4M/3m)^2}$.

4.38 $M_z = -\dfrac{m_1 m_2 R}{2m_1 + m_2}\dfrac{d\upsilon(t)}{dt}$.

4.39 I_1 = 63,5·10^{-3} кг · м^2, I_2 = 62,5·10^{-3} кг·м^2, δ = 1,6 %.

4.40 β = 2,35 рад/с^2.

4.41 F = 0,4 Н.

4.42 M = 100 Н · м.

4.43 $T_2 \approx$ 2,4 Дж.

4.44 A = 355 Дж.

4.45 L = 229 кг · м^2/с.

4.46 s = 4,1 м.

4.47 $H = 2R + 0{,}5R(1 + m_1/m)$ = 7,56 м.

4.48 $\upsilon = \sqrt{2mgh/(m + I/R^2)}$; 1) 2,65 м/с; 2) 2,56 м/с; 3) 2,21 м/с; 4) 3,13 м/с.

4.49 $t = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h(m + I/R^2)}{mg}}$, $t_{ал} = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{3h}{g}}$ =0,78 с,

$$t_{св} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}\left(1+\frac{2\rho_{св}-\rho_{ал}}{2\rho_{св}}\right)} = 0{,}88 \text{ с.}$$

4.50 1) $M_{тр}$ = 308 Н·м; 2) t = 100 с.

4.51 $t = T/(\pi\cdot n\cdot M)$ = 5 с.

4.52 $T = F^2\Delta t^2/m$ = 2 кДж.

4.53 $\beta = \dfrac{8Fr}{mD^2}$ = 42,7 рад/с^2, $n = \dfrac{8Frt}{2\pi mD^2}$ = 68 с$^{-1}$.

4.54 $I = (m_2(g-\beta R) - m_1(g+\beta R))R/\beta$ = 1,26 кг · м^2.

4.55 $M = -\pi mnD^2/(2t)$ = –1,27 Н · м.

4.56 $a_c = 4F/(3m)$ = 4 м/с^2, $F_{тер} = F/3$ = 10 Н.

4.57 $a_c = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3M}{8m}\right)^{-1} g$,

$$a = \left(1+\frac{3M}{8m}\right)^{-1} g,\ T = \frac{3M}{8}\left(1+\frac{3M}{8m}\right)^{-1} g.$$

4.58 $\omega = m\sqrt{2gh}/[(m+0{,}5M)R]$.

4.59 ω = 3,42 рад/с.

4.60 $\upsilon = 2\pi nRm_1/(m_1+2m_2)$ = 0,942 м/с.

4.61 $u = \upsilon(3m-4M)/(3m+4M)$.

4.62 1) $\omega = \dfrac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1+I_2}$; 2) $A = -\dfrac{I_1 I_2}{2(I_1+I_2)}(\omega_1-\omega_2)^2$.

4.63 Q = 2,52·10^{-3} Дж.

4.64 υ = 7,1 м/с.

4.65 $\omega_1 = \omega_2$ = 14 рад/с; 1) υ_1 = 1,05 м/с; 2) υ_2 = 2,8 м/с.

4.66 $\omega = 4m_2u_2/[(2+m_2/m_1)D]$ = 0,98 рад/с.

4.67 $\varphi_n = 2\pi m_2/(0{,}5m_n + m_2) = 8\pi/11$.

4.68 A = 162 Дж.

4.69 n = 21 об/хв, у 1,05 раза.

4.70 $T = 3m^2\upsilon_0^2 / 2m_c$ = 25 Дж,

$\alpha = \arccos\left(1 - 3m^2\upsilon_0^2 / (m_c gl)\right) \approx 54°$.

4.71 $m_2 = 2m_1 n_1 / (n_2 - n_1)$ = 560 кг.

4.72 $N = 3R\omega_0^2 / (16\pi\mu g) \approx 15$.

5.1 σ = 22,2 мН/м.

5.2 d_2 = 4,4 мм.

5.3 A = 3 мДж.

5.4 E = 2,6 мкДж.

5.5 ρ = 3,2 кг/м^3.

5.6 62,5 Па.

5.7 σ = 62 мН/м.

5.8 σ = 22,5 мН/м.

5.9 σ = 22 мН/м.

5.10 m = 23,1 мг.

5.11 h = 6,37 см.

5.12 p = 26 кПа.

5.13 h = 7,3 см.

5.14 υ_2 = 0,45 м/с.

5.15 υ_2 = 4,33 м/с.

5.16 $Q_V = S_1\upsilon_1 = S_1 S_2 \sqrt{2g\Delta h / (S_1^2 - S_2^2)}$ = 1,88 л/с.

5.17 υ_2 = 100 м/с, p = 5 МПа.

5.18 υ = 8,80 м/с.

5.19 F = 31,4 Н.

5.20 l = 1,4 м.

5.21 $p = \dfrac{\rho g l^2}{4H}\left[1 - \left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)^2\right]$ = 77,9 кПа.

5.22 h = 1 м.

5.23 $\mathrm{Re} = \rho\langle\upsilon\rangle d/\eta$ = 5000; $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, тому рух турбулентний.

5.24 $Q_{m_{\max}} = \pi\eta \mathrm{Re}_{кр} d/4 =$ 54,2 г/с.

5.25 $\mathrm{Re} = \rho_2(\rho_1 - \rho_2)gd^3/(18\eta^2)$ = 4,17; $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{кр}$, тому рух турбулентний.

5.26 $\upsilon = (\rho_1 - \rho_2)gd^2/(18\eta)$ = 6,71 мм/с; 2) обтікання кульки ламінарне.

5.27 $\upsilon_2 = \dfrac{\rho_1 r_1 \eta_1}{\rho_2 r_2 \eta_2}\upsilon_1$ = 27,7 см/с.

5.28 $Q = S\sqrt{2g\Delta h\rho_0/\rho}$.

5.29 $\upsilon = \sqrt{2g(h_1 + h_2\rho_2/\rho_1)}$ = 3 м/с.

5.30 $\tau \approx (S/s)\sqrt{2h/g}$.

5.31 $h = \upsilon^2/2g - h_0$ = 20 см.

5.32 $p = p_0 + \rho gh(1 - R_1^2/r^2)$, де $R_1 < r < R_2$; p_0 – атмосферний тиск.

5.33 1) $Q = (\pi/2)\upsilon_0 R^2$; 2) $T = (\pi/6)lR^2\rho\upsilon_0^2$;

3) $F_{тр} = 4\pi\eta l\upsilon_0$; 4) $\Delta p = 4\eta l\upsilon_0/R^2$.

5.34 $\exp(\alpha\Delta x)$=5.

5.35 $d = \sqrt[3]{18\cdot\mathrm{Re}\cdot\eta^2/((\rho-\rho_0)\cdot\rho_0\cdot g)}$ = 5,4 мм.

5.36 $t = -(\rho d^2/18\eta)\ln n$ = 0,20 с.

6.1 $\tau = \upsilon_0^2\tau_0/(2c^2)$ = 0,55 с.

6.2 1,25.

6.3 $l = l_0\sqrt{1 - \upsilon_0^2/c^2\cos_2\varphi}$ = 0,825 м,

$\varphi = \mathrm{arctg}[\mathrm{tg}\varphi_0/(1 - \upsilon^2/c^2)]$ = 59°.

6.4 $\varphi' = 2\mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}\right)$ = 145,3°.

6.5 $\tau_0 = (l/\upsilon)\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ = 25 нс.

6.6 $\upsilon = c/\sqrt{1+\tau_0^2 c^2/l^2}$ = 0,995*c*.

6.7 1) 0,195 *c*; 2) 0,974*c*.
6.8 0,268 *c*.
6.9 1*c*.
6.10 p = 2,05 · 10^{-22} кг·м/с.
6.11 $\upsilon = c/\sqrt{2} = 0{,}707c$.
6.12 $\upsilon_C = 3c/13 = 0{,}231c$.
6.13 $1{,}11 \cdot 10^{-17}$ кг.
6.14 90 ТДж.
6.15 0,341 МеВ.
6.16 1) 298 Мм/с; 2) 18,9 Мм/с.
6.17 1) 13,8 Мм/с; 2) 263 Мм/с.
6.18 1) 0,866 *c;* 2) 0,9897 *c;* 3) $6m_0c^2$.

6.20 $1{,}73m_0c$.

6.21 $0{,}414m_0c^2$.

6.22 2,82.
6.23 1) 2,98; 2) 1,58.
6.24 1) 0,707*c*; 2) 2,4142m_0; 3) 0,414*c*; 4) 2,1973m_0; 5) 0,414m_0c^2, 0,217m_0c^2 .
6.25 0,551m_0c^2.
6.26 1) 13 нс; 2) 4,0 м.

6.27 1) $\mathrm{tg}\alpha' = \mathrm{tg}\alpha/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}, \alpha' \approx 49°$;

2) $l' = a/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2+\mathrm{tg}^2\alpha}$ = 3,8 м, l'/l_0 = 0,66.

6.28 $s = c\Delta t\sqrt{1-(\Delta t_0/\Delta t)^2}$ = 5 м.

6.29 $\upsilon' = \left[\left(\upsilon_x - V\right)^2 + \upsilon_y^2\left(1 - V^2/c^2\right)\right]^{1/2} / \left(1 - \upsilon_x V/c^2\right)$.

6.30 $\upsilon = \sqrt{\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 - \left(\upsilon_1\upsilon_2/c^2\right)}$.

6.31 1) $a' = a\left(1 - V^2/c^2\right)^{3/2} / \left(1 - \left(V\upsilon/c^2\right)\right)^3$; 2) $a' = a\left(1 - V^2/c^2\right)$.

6.32 $\upsilon = c\sqrt{\eta(2+\eta)}/(1+\eta) = 0{,}6c$.

6.33 $\upsilon = (c/\eta)\sqrt{\eta^2 - 1} = 0{,}70c$.

6.34 $A = 0{,}42mc^2$, замість $0{,}14mc^2$.

6.35 $\upsilon = c\sqrt{3}/2$ =$2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

6.36 $\Delta E/m = \left(1/\sqrt{1 - (\upsilon/2)^2} - 1\right)c^2$ = $3{,}6 \cdot 10^{17}$ Дж/кг.

6.38 1) $\widetilde{T} = 2mc^2\left(\sqrt{1 + T/2mc^2} - 1\right)$= 777 МеВ;

2) $\widetilde{p} = \sqrt{mT/2}$ = 940 МеВ/с.

6.39 $T' = 2T\left(T + 2mc^2\right)/mc^2$ = $1{,}43 \cdot 10^3$ ГеВ.

6.40 $\upsilon/c = \left[1 - \left(m/m_0\right)^{2u/c}\right] / \left[1 + \left(m/m_0\right)^{2u/c}\right]$.

7.1 $F = \dfrac{l}{l_1} pS = 32{,}3$ кН.

7.2 $p = p_0\left(1 - \dfrac{m}{\rho V}\right) = 2{,}67$ кПа.

7.3 $m = \rho V\left(1 - p/p_0\right)$ = 0,05 кг, де $\rho = 1000$ кг/м^3 – густина води.

7.4 $p = 2\dfrac{\left(p_0 + \rho g \Delta h_1\right)l}{2l + \Delta h_2 - \Delta h_1} - \rho g \Delta h_1 = 47{,}2$ кПа.

7.5 $t_2 = \frac{p_2}{p_1}\left(t_1 + T_0\right) - T_0 = 473$ °C. ($T_0 = 273$ °C).

7.6 350 К.

7.7 $m = \rho V \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 66{,}5$ г (ρ – густина води).

7.8 $V = \frac{\left(l_2 - l_1\right) S T_1}{T_2 - T_1} - l_1 S = 106$ см^3.

7.9 $\Delta h = 4{,}5$ см.

7.10 $m = \mu p V / \left(RT\right) = 0{,}212$ кг.

7.11 $V = \nu RT / p = 3{,}32$ м^3.

7.12 $p = mRT / \left(\mu V\right) = 1{,}16$ МПа.

7.13 $T = p\mu V / \left(mR\right) = 275$ К.

7.14 $\rho = \mu p / \left(RT\right) = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3.

7.15 642 Н.

7.16 $V = \frac{\Delta m \cdot R \cdot T_1 \cdot T_2}{(T_2 - T_1) \cdot p_0 \cdot \mu} = 67{,}5$ м^3.

7.17 $F = \left(\mu_2 - \mu_1\right) g \frac{pV}{RT} = 10{,}9$ кН.

7.18 $m = \frac{\mu V}{RT} \Delta p = 8{,}3$ г.

7.19 $\Delta m = \mu \frac{V}{R}\left(k \frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) = 6{,}16$ кг ($k = 7/8$).

7.20 $V = \left(m_1 / \mu_1 + m_2 / \mu_2\right) \frac{RT}{p} = 6{,}42$ м^3.

7.21 $p_1' = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2} = 0{,}76$ МПа; $p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 1{,}12$ МПа;

$p = p_1' + p_2' = 1{,}88$ МПа.

7.22 $p=\left(\dfrac{m_1}{\mu_1}+\dfrac{m_2}{\mu_2}\right)\dfrac{RT}{V}=175$ кПа.

7.23 $\rho=\dfrac{9\mu_1\mu_2}{8\mu_1+\mu_2}\dfrac{p}{RT}=0{,}481$ кг/м^3.

7.24 $p_1=\dfrac{\omega_1\mu_2 p}{(1-\omega_1)\mu_1+\omega_1\mu_2}0{,}18$ МПа;

$p_2=\dfrac{(1-\omega_1)\mu_1 p}{(1-\omega_1)\mu_1+\omega_1\mu_2}=0{,}82$ МПа.

7.25 $\mu=\dfrac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1/\mu_1+\omega_2/\mu_2}=28{,}9\cdot 10^{-3}$ кг/моль.

7.26 $m=\dfrac{pV}{\left[\dfrac{\omega_1}{\mu_1}+\dfrac{1-\omega_1}{\mu_2}\right]RT}=6{,}87$ г;

$m_1=\omega_1 m=4{,}81$ г;

$m_2=(1-\omega_1)m=2{,}06$ г.

7.27 $T=\dfrac{pV}{\left(\dfrac{\omega_1}{\mu_1}+\dfrac{1-\omega_1}{\mu_2}\right)mR}=259$ К.

7.28 $\nu=0{,}788$ моля; $\nu_1=0{,}068$ моля; $\nu_2=0{,}720$ моля.

7.29 $m=\rho V\Delta p/p_0$ = 30 г, де p_0 – нормальний атмосферний тиск.

7.30 $p=(p_1T_2/\mathrm{T}_1-\Delta p)/2=10$ кПа (0,10 атм).

7.31 $m_1/m_2=(1-a/\mu_2)/(a/\mu_1-1)$ = 0,50, де $a = mRT/p$.

7.32 $\rho=\dfrac{p_0(m_1+m_2)}{RT(m_1/\mu_1+m_2/\mu_2)}$ = 15 г/л.

7.33 а) $p=(\nu_1+\nu_2+\nu_3)RT/V$ = 2,0 атм;

б) $\mu=(\nu_1\mu_1+\nu_2\mu_2+\nu_3\mu_3)/(\nu_1+\nu_2+\nu_3)$ = 36,7 г/моль.

7.34 $p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V} = 3{,}44 \cdot 10^5$ Па;

$\mu = \frac{m_1 + m_2}{m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2} = 5{,}25 \cdot 10^{-3}$ кг/моль;

$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = 0{,}75$ кг/м^3.

7.35 $T = T_0(\eta - 1/\eta)/(\eta' - 1/\eta') \approx 420$ К.

7.36 $p = p_0 e^{-Ct/V}$.

7.37 $t = \frac{V}{C}\ln\eta = 1{,}0$ хв.

7.38 $\Delta T = (mg + p_0\Delta S)l/R = 0{,}9$ К.

7.39 1) $T_{\max} = \frac{2}{3}(p_0/R)\sqrt{p_0/3\alpha}$; 2) $T_{\max} = \frac{p_0}{e\beta R}$.

7.40 1,18 кПа.

7.41 5,88 км.

7.42 885 м.

7.43 1) 8,75 м; 2) 25.8 м.

7.44 $\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g}{R} = -33$ мК/м.

7.45 $\frac{dT}{dh} = -\frac{\mu g(n-1)}{nR}$.

7.46 1) $h = \frac{RT}{\mu g} = 8{,}0$ км; 2) $h \approx \frac{\eta RT}{\mu g} = 0{,}08$ км.

7.47 $m = \left(1 - e^{-\mu gh/RT}\right)p_0 S/g$.

7.48 $h_C = \int_0^\infty h\rho dh \Big/ \int_0^\infty \rho dh = RT/(\mu g)$.

7.49 1) $p = p_0(1 - ah)^n$, $h < \frac{1}{a}$;

2) $p = p_0 / (1 + ah)^n$, де $n = \dfrac{\mu g}{aRT_0}$.

8.1 1) 3,12 кДж/(кг·К), 5,19 кДж/(кг·К); 2) 10,4 кДж/(кг·К), 14,6 кДж/(кг·К); 3) 567 Дж/(кг·К), 756 Дж/(кг·К).
8.2 0,032 кг/моль, 650 Дж/(кг·К), 910 Дж/(кг·К).
8.3 715 Дж/(кг·К); 1,01 кДж/(кг·К).
8.4 4,53 кДж/(кг·К).
8.5 5 981 Дж/(кг·К).
8.6 6 526 Дж/(кг·К).
8.7 417 Дж/(кг·К).
8.8 204 Дж/(кг·К).
8.9 1,51.
8.10 1,50.
8.11 1,42.
8.12 1,50.
8.13 За умови сталого тиску.
8.14 1,33.
8.15 166 Дж.
8.16 400 Дж.
8.17 6,62 кДж.
8.18 454 К.
8.19 416 Дж.
8.20 $T_2 = T_1 n^{\gamma - 1} = 754$ К; $A = \dfrac{m}{\mu} \dfrac{R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = 674$ Дж.
8.21 1,81 кДж.
8.22 1) 556 кДж; 2) 556 кДж; 3) 0.
8.23 1) 5 МДж; 2) 0; 3) 5 МДж.
8.24 62,5 Дж.
8.25 390 К; 520 кПа.
8.26 1) 0,4 МДж; 2) 160 кДж; 3) 560 кДж.
8.27 6 кДж; 15 кДж.

8.28 1) 520 Дж; 2) 208 Дж; 3) 312 Дж.
8.29 1) 0,6; 0,4; 2) 0,71; 0,29; 3) 0,75; 0,25.
8.30 1 кДж.
8.31 1) 0; 2) 11,6 кДж; 3) 11,6 кДж.
8.32 20,8 кДж; 19,2 кДж.
8.33 $A = Q = 1{,}28$ кДж.
8.34 $A = Q = 2{,}06$ кДж.
8.35 $V_2 / V_1 = e^{Q/(\nu RT)} = 2{,}23$ (ν – кількість речовини кисню).
8.36 191 Дж.
8.37 1) 21 кДж; 2) 6 кДж.
8.38 $m = \dfrac{\mu(\gamma-1)n^{\gamma-1}\Delta U}{RT_1\left(n^{(\gamma-1)}-1\right)} = 67{,}2$ г.
8.39 –3,8 МДж.
8.40 157 К; 8,7 кДж.
8.41 1) $\Delta T = (\gamma-1)\mu\Delta U/(mR) = 616$ К;
2) $p_2 = p_1(T_2 - T_1)^{\gamma(\gamma-1)} = 11{,}4$ МПа, де $T_1 = T_2 - \Delta T$.
8.42 2,52 МПа.
8.43 17,6.
8.44 1) $\Delta U = 11{,}3$ кДж; 2) $Q = 17{,}1$ кДж; 3) $A = 5{,}8$ кДж.
8.45 1) –41,6 кДж; 2) –41,6 кДж; 3) 0.
8.46 $Q = \Delta U = 7{,}5$ кДж.
8.47 $U = pV/(\gamma-1) = 10$ МДж.
8.48 $T = T_1T_2(p_1V_1 + p_2V_2)/(p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1)$;
$p = (p_1V_1 + p_2V_2)/(V_1 + V_2)$.
8.49 $\Delta U = -p_0V\Delta T/T_0(\gamma-1) = -0{,}25$ кДж; $Q' = -\Delta U$.
8.50 $Q = A\gamma/(\gamma-1) = 7$ Дж.
8.51 $A = R\Delta T = 0{,}60$ кДж; $\Delta U = Q - R\Delta T = 1{,}00$ кДж;
$\gamma = Q/(Q - R\Delta T) = 1{,}6$.

8.52 $Q = \nu R T_0 (1 - 1/\eta) = 2{,}5$ кДж.

8.53 $\gamma = \dfrac{\nu_1\gamma_1(\gamma_2 - 1) + \nu_2\gamma_2(\gamma_1 - 1)}{\nu_1(\gamma_2 - 1) + \nu_2(\gamma_1 - 1)} = 1{,}33$.

8.54 $c_V = 0{,}42$ Дж/(г $\cdot$ К), $c_p = 0{,}65$ Дж/(г $\cdot$ К).

8.55 $A' = RT(n - 1 - \ln n)$.

8.56 $A' = p_0 V_0 \ln\left[(\eta + 1)^2/(4\eta)\right]$.

8.57 Див. рис. 1, де V – ізохорний процес; p – ізобарний; T – ізотермічний; S – адіабатний.

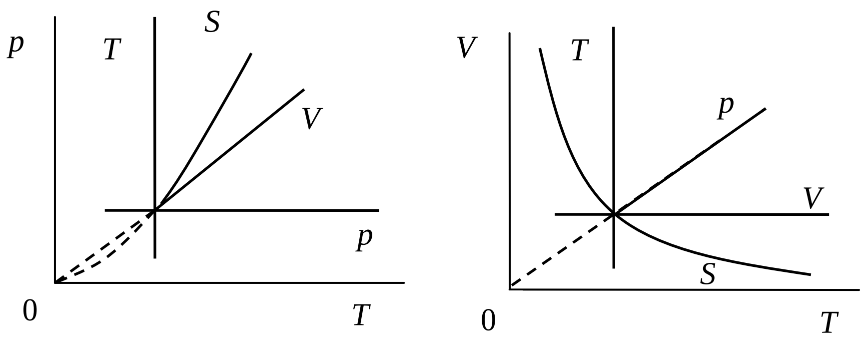


Рисунок 1

8.58 1) $T = T_0 \eta^{(\gamma-1)/\gamma} = 560$ К;

2) $A' = RT_0\left(\eta^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right)/(\gamma - 1) = 1{,}6$ кДж.

8.59 Для адіабатного стискання більше в $n = \left(\eta^{\gamma-1} - 1\right)/(\gamma - 1)\ln\eta = 1{,}4$ раза.

8.60 $T = T_0\left[(\eta + 1)^2/4\eta\right]^{(\gamma-1)/2}$.

8.61 $Q = R\Delta T(2 - \gamma)/(\gamma - 1)$.

8.62 $C_n = R(n - \gamma)/(n - 1)(\gamma - 1)$; $C_n < 0$ при $1 < n < \gamma$.

8.63 $C = R(n - \gamma)/(n - 1)(\gamma - 1) = -4{,}2$ Дж/(К $\cdot$ моль), де $n = \ln\alpha/\ln\beta$.

8.64 1) $Q = R(n-\gamma)\Delta T/(n-1)(\gamma-1) = 0{,}11$ кДж;
2) $A = -R\Delta T/(n-1) = 0{,}43$ кДж.
8.65 1) $C = -R/(\gamma-1)$; 2) $TV^{(\gamma-1)/2} = const$;
3) $A = 2RT_0\left(1-\eta^{(\gamma-1)/2}\right)/(\gamma-1)$.
8.66 1) $A = (1-\alpha)R\Delta T$; 2) $C = R/(\gamma-1) + R(1-\alpha)$; $C < 0$, коли $\alpha > \gamma/(\gamma-1)$.
8.67 1) $A = \Delta U\,(\gamma-1)/\alpha$; $Q = \Delta U[1+(\gamma-1)/\alpha]$;
2) $C = R/(\gamma-1) + R/\alpha$.
8.68 1) $C = C_p + RT_0/\alpha V$;
2) $Q = \alpha C_p(V_2 - V_1) + RT_0 \ln(V_2/V_1)$.
8.69 1) $Ve^{-\alpha T/R} = const$;
2) $Te^{R/\beta V} = const$;
3) $V - aT = const$.
8.70 1) $A = \alpha \ln\eta - RT_0(\eta-1)/(\gamma-1)$;
2) $pV^{\gamma}e^{\alpha(\gamma-1)/pV} = const$.

9.1 0,193.
9.2 400 Дж.
9.3 300 К; 500 К; 1000 К; 605 К; 8,55 %.
9.4 1) 7,61 МДж; 2) 7,21 МДж; 3) 0,4 МДж; 4) 5,3 %.
9.5 1) $T_1 = 600$ К; $T_2 = 120$ К; $V_2 = 1$ м^3; $V_3 = 0{,}09$ м^3; $p_3 = 5{,}56$ МПа; 2) 2 МДж; 3) 1 МДж; 4) 1 МДж; 5) 50 %.
9.6 $T_2 = T_3 = T_1 \dfrac{p_2}{p_1} = 600$ К;

$$\eta = \frac{T_2 \ln\dfrac{p_2}{p_1} - (T_2 - T_1)}{T_2 \ln\dfrac{p_2}{p_1} + \dfrac{i}{2}(T_2 - T_1)} = 0{,}099 = 9{,}9\ \%.$$

9.7 0,14.
9.8 1,88.
9.9 28 кДж.
9.10 0,404; 59,6 Дж.
9.11 0,25.
9.12 14 %; 1,16 раза.
9.13 10,9 %.
9.14 4 Дж.
9.15 0,74 м^3.

9.16 $T = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = 323$ К;

$$\Delta S = c\left(m_1 \ln\frac{T}{T_1} + m_2 \ln\frac{T}{T_2}\right) = 0{,}3 \text{ кДж/К}$$

(c – питома теплоємність води).
9.17 7,2 Дж/К.
9.18 2,43 Дж/К.
9.19 291 Дж/К.

9.20 $m_2 = \dfrac{m_1 r}{\lambda + c(t_2 - t_1)} = 251$ г;

$\Delta S = \dfrac{m_1 r}{T_1} - \dfrac{m_2 \lambda}{T_2} - c m_2 \ln\dfrac{T_2}{T_1} = 610$ Дж/кг (r – питома теплота пароутворення; λ – питома теплота плавлення).

9.21 $\Delta S_1 = 836$ Дж/К; $\Delta S_2 = 0$.

9.22 $\Delta S = \dfrac{m}{\mu}\left(C_p - C_V\right)\ln n = \dfrac{m}{\mu} R \ln n = 457$ Дж/К.

9.23 У другому випадку.
9.24 1) $\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 0{,}25$; 2) $\eta = 1 - n^{1/(\gamma-1)} = 0{,}18$.
9.25 $\eta = 1 - 2T_3/(T_1 + T_2)$.
9.26 $\eta = 1 - n^{1-\gamma} = 60\,\%$.
9.27 $\eta = 1 - (n + \gamma)/(1 + \gamma n)$.

9.28 В обох випадках $\eta = 1 - \frac{\ln n}{n-1}$.

9.29 $\eta = 1 - \frac{n-1}{n \ln n}$.

9.30 1) $\eta = 1 - \gamma \frac{n-1}{n^\gamma - 1}$; 2) $\eta = 1 - \frac{n^\gamma - 1}{\gamma (n-1) n^{\gamma-1}}$.

9.31 1) $\eta = 1 - \frac{\gamma (n-1)}{n - 1 + (\gamma - 1) n \ln n}$; 2) $\eta = 1 - \frac{n - 1 + (\gamma - 1) \ln n}{\gamma (n-1)}$.

9.32 $\eta = \frac{(\tau - 1) \ln \nu}{\tau \ln \nu + (\tau - 1)/(\gamma - 1)}$.

9.33 $\eta = 1 - 2 \frac{\gamma + \sqrt{\tau}}{(1+\gamma)(1 + \sqrt{\tau})}$.

9.34 1) $\Delta S = \frac{R \ln n}{\gamma - 1} = 19$ Дж/(К · моль);

2) $\Delta S = \frac{\gamma R \ln n}{\gamma - 1} = 25$ Дж/(К · моль).

9.35 $\eta = \frac{(\tau - 1) \ln n}{\tau \ln n + (\tau - 1)\gamma/(\gamma - 1)}$.

9.36 $\Delta S = \nu R \ln n = 20$ Дж/К.

9.37 $\Delta S = -\frac{m}{\mu} \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln n = -10$ Дж/К.

9.38 $\Delta S = (\gamma \ln \alpha - \ln \beta) \nu R/(\gamma - 1) = -11$ Дж/К.

9.39 $S_2 - S_1 = \nu R \left(\ln \alpha - \frac{\ln \beta}{\gamma - 1} \right) = 0{,}85$ Дж/К.

9.40 $\Delta S = \frac{(n - \gamma) R}{(n-1)(\gamma - 1)} \ln \tau$.

9.41 $\Delta S = \frac{\nu (\gamma + 1) R}{\nu - 1} \ln \alpha = 46$ Дж/К.

9.42 $V_m = \dfrac{\gamma p_0}{\alpha(1+\gamma)}$.

9.43 $T = T_0 + \dfrac{R}{a}\ln\left(\dfrac{V}{V_0}\right)$.

9.44 $C = S/n$; $C < 0$, коли $n < 0$.

9.45 $T = T_0 e^{(S-S_0)/C}$, рис. 2.

9.46 1) $C = -\alpha / T$;

2) $Q = \alpha\ln(T_1/T_2)$;

3) $A = \alpha\ln(T_1/T_2) + C_V(T_1 - T_2)$.

9.47 1) $\eta = (n-1)/2\pi$;

2) $\eta = (n-1)/(n+1)$.

9.48 $\Delta S = \nu R\ln n = 20$ Дж/К.

9.49 $\Delta U = \left(2^{\gamma-1} - 1\right)RT_0/(\gamma - 1)$,

$\Delta S = R\ln 2$.

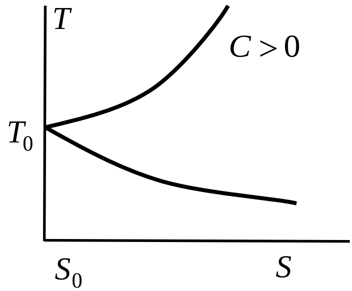


Рисунок 2

9.50 $\Delta S = \nu_1 R\ln(1+n) + \nu_2 R\ln(1+1/n) = 5{,}1$ Дж/К.

9.51 $\Delta S = m_1 c_1 \ln(T/T_1) + m_2 c_2 \ln(T/T_2) = 4{,}4$ Дж/К, де $T = (m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2)/(m_1 c_1 + m_2 c_2)$; c_1 і c_2 – питомі теплоємності міді і води.

9.52 $\Delta S = C_V \ln\dfrac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2} > 0$.

10.1 $1{,}2\cdot 10^{20}$ м$^{-3}$.

10.2 2 л.

10.3 $n = \nu N_A / V = 4{,}52\cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

10.4 $n = N_A / V_m = 2{,}69\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$, де V_m – молярний об’єм газу за нормальних умов).

10.5 $m = MnV/N_A = 0{,}25$ г.

10.6 $n = mN_A/(VM_r k) = 7{,}52\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ (k =10^{-3} кг/моль).

10.7 $\nu = nV/N_A = 9{,}97 \cdot 10^{-9}$ моль.
10.8 $n_1/n_2 = M_{r,2}/M_{r,1} = 16$.
10.9 $M_r = mN_A/(knV) = 32$ ($k = 10^{-3}$ кг/моль), газ – кисень.
10.10 $N_A = knVM_r/m = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.
10.11 $n_1 = N_A/V_m = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$;
$n_2 = n_1(1-\alpha) = 1{,}61 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$;
$n_3 = 2n_1\alpha = 2{,}15 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.
10.12 $2{,}42 \cdot 10^{17}$ м$^{-3}$.
10.13 414 Па; 138 кПа.
10.14 $N = pV/(kT) = 3{,}62 \cdot 10^{25}$ молекул.
10.15 $\nu = pV/(RT) = 4{,}98$ ммоль;
$n = \nu N_A/V = 1{,}25 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.
10.16 $\Delta p = \dfrac{N}{V}kT = 4{,}14$ кПа.
10.17 $\nu = 4{,}97$ ммоль; $N = 2{,}99 \cdot 10^{21}$ молекул.
10.18 $3{,}22 \cdot 10^{-19}$.
10.19 $\Delta p = 3kT/(\sigma R) = 2{,}48$ Па.
10.20 $n = p/(kT) = 10^5$ см$^{-3}$.
10.21 $n = (p/(kT) - \rho/m_2)/(1 - m_1/m_2) = 1{,}6 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$, де m_1 та m_2 – молекули гелію та азоту.
10.22 1) $T = 7{,}25$ кК; 2) $\langle \varepsilon_к \rangle = 1{,}5 \cdot 10^{-19}$ Дж.
10.23 $\langle \varepsilon_к \rangle = 1{,}24 \cdot 10^{-20}$ Дж; $\langle \varepsilon \rangle = 2{,}48 \cdot 10^{-20}$ Дж;
$W = \langle \varepsilon \rangle \nu N_A = \dfrac{i}{2}kT\nu N_A = \dfrac{i}{2}RT\nu = 7{,}48$ МДж.
10.24 $8{,}28 \cdot 10^{-21}$ Дж; $13{,}8 \cdot 10^{-21}$ Дж; $16{,}6 \cdot 10^{-21}$ Дж.

10.25 $6{,}9\cdot 10^{-21}$ Дж; $20{,}7\cdot 10^{-21}$ Дж; $13{,}8\cdot 10^{-21}$ Дж; $34{,}5\cdot 10^{-21}$ Дж.

10.26 1) $C_V = 3(N-5/2)R$, $\gamma = (6N-3)/(6N-5)$;

2) $C_V = 3(N-1)R$, $\gamma = (N-2/3)/(N-1)$.

10.27 $A/Q = 1/(3N-2)$ для нелінійних молекул та $1/(3N-3/2)$ – для лінійних.

10.28 $M = R/(c_p - c_V) = 32$ г/моль; $i = 2/(c_p/c_V - 1) = 5$.

10.29 1) $i = 2(C_p/R - 1) = 5$; 2) $i = 2(C/R - 2) = 3$.

10.30 $\gamma = (5\nu_1 + 7\nu_2)/(3\nu_1 + 5\nu_2)$.

10.31 1) $\upsilon_{кв} = \sqrt{3RT/M} = 0{,}47$ км/с,

$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT = 6\cdot 10^{-31}$ Дж;

2) $\upsilon_{кв} = 3\sqrt{2лT/(\pi\rho d^3)} = 0{,}15$ м/с.

10.32 У $\eta' = 7{,}6$ раза, $i = 5$.

10.33 $Q = (\eta^2 - 1)imRT/(2m) = 10$ кДж.

10.34 $\omega_{об} = \sqrt{2kT/I} = 6{,}3\cdot 10^{12}$ рад/с.

10.35 $\langle\varepsilon\rangle_{об} = kT_0\eta^{3/i} = 0{,}7\cdot 10^{-20}$ Дж.

10.36 $\upsilon_{ім} = \sqrt{2kT/m}$.

10.37 $f(u)du = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du$.

10.38 $4{,}39\cdot 10^{-3}$.

10.39 $6{,}63\cdot 10^{-3}$.

10.40 $\omega = \dfrac{\Delta N}{N} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\dfrac{m}{kT}\right)^{3/2}\upsilon^3$.

10.41 $\omega = 7{,}52\cdot 10^{-7}$.

10.42 $\langle\upsilon\rangle = \sqrt{8kT/(\pi m)}$.

10.43 $\upsilon_{кв} = \sqrt{\langle\upsilon^2\rangle} = \sqrt{3kT/m}$.

10.44 $\dfrac{\langle 1/\upsilon\rangle}{1/\langle\upsilon\rangle} = \dfrac{4}{\pi} = 1{,}27$.

10.45 $\upsilon_{ім} = \sqrt{3kT/m}$; $\langle\upsilon\rangle = 3\sqrt{\pi kT/(8m)}$.

10.46 $6{,}0\cdot 10^9$.

10.47 $p_{ім} = \sqrt{2mkT}$.

10.48 0.

10.49 $\langle p_x\rangle = \sqrt{mkT/(2\pi)}$.

10.50 0,5 %.

10.51 $p = \sqrt{mkT}$.

10.52 В $e^{23,6}$ раза.

10.53 1,65

10.54 $4{,}14\cdot 10^{-21}$ Н.

10.55 $n = n_0 e^{m\omega^2 r^2/(2kT)}$ (n_0 – концентрація частинок на осі ротора).

10.56 5,91.

10.57 304 кПа.

10.58 84.

10.59 28 %; 72 %.

10.60 $\Delta T = \dfrac{1}{2}\mu\upsilon^2(\gamma - 1)/R$.

10.61 Зменшиться у $\eta^{(i+1)/i}$ раза, де $i = 5$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Савельев И. В. Курс физики : учебник : в 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная фізика / И. В. Савельев. – Москва : Наука, 1989. – 352 с.
2. Бушок Г. Ф. Курс фізики : навч. посібник : у 2 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – 2-ге вид. – Київ : Либідь, 2001. – 448 с.
3. Бушок Г. Ф. Курс фізики : навч. посібник : у 2 кн. Кн. 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – 2-ге вид. – Київ : Либідь, 2001. – 424 с.
4. Иродов И. Е. Задачи по общей физике : учеб. пособие / И. Е. Иродов. – 9-е изд., перераб. – Москва : Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 431 с.
5. Чертов А. Г. Задачник по физике : учеб. пособие / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. – Москва : Издательство физико-математической литературы, 2001. – 640 с.
6. Гаркуша І. П. Збірник задач з фізики : навч. посібник / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний, М. Ш. Певзнер ; за заг. ред. І. П. Гаркуші. – Київ : Вища шк., 1995. – 334 с.

Навчальне видання

Лисенко Олександр Володимирович,
Коваль Віталій Вікторович,
Ромбовський Михайло Юрійович

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ІЗ ФІЗИКИ: МЕХАНІКА, МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА, ТЕРМОДИНАМІКА

Навчальний посібник

Художнє оформлення В. В. Коваля
Редактор Н. З. Клочко
Комп'ютерне верстання О. В. Лисенка

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 17,67. Обл.-вид. арк. 18,81. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.