

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

для студентів спеціальності  
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»  
галузі знань 14 «Електрична інженерія»  
усіх форм навчання

Затверджено  
на засіданні  
кафедри електроенергетики  
як конспект лекцій  
із дисципліни «Теоретичні основи  
електротехніки».  
Протокол № 2 від 01.12.2016.

Суми  
Сумський державний університет  
2016

Теоретичні основи електротехніки : конспект лекцій / укладачі:  
І. Л. Лебединський, В. І. Романовський, Т. М. Загородня. – Суми : Сумський  
державний університет, 2016. – 325 с.

Кафедра електроенергетики

# Лекція 1

## Тема «Елементи електричних кіл»

### План

#### 1. Основні поняття.

#### 2. Пасивні елементи електричного кола.

##### 1. Основні поняття

Електромагнітні процеси, що проходять в електротехнічних пристроях, як правило, досить складні. Однак переважно їх основні характеристики можна описати за допомогою таких інтегральних понять, як:

- напруга;
- струм;
- електрорушійна сила (ЕРС).

Електричний струм у провідниках – це впорядкований рух електричного заряду  $q$ .

Силу струму  $i$  визначають кількістю електричного заряду  $q$ , що пройшов через поперечний переріз провідника за одиницю часу:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}. \quad (1.1)$$

Тобто струм  $i$  визначають швидкістю зміни заряду  $q$  у часі. У системі СІ заряд  $q$  вимірюється в кулонах (К), час  $t$  – у секундах (с), струм  $i$  – в амперах (А).

Струм  $i$  є скалярною величиною, тому його знак залежить від напрямку руху зарядів  $q$  одного знака. Для однозначного визначення знака струму  $i$  за позитивний напрямок вибирають один із двох можливих напрямків, який на схемах позначається стрілкою.

Проходження електричного струму  $i$  пов'язане з перетворенням або споживанням енергії  $W$ . Для визначення енергії  $W$ , що витрачається під час переміщення заряду  $q$  між двома точками провідника, вводиться величина – напруга  $u$ .

Напругою  $u$  називають кількість енергії  $W$ , що витрачається на переміщення одиниці заряду  $q$  з однієї точки в іншу:

$$u = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta q} = \frac{dW}{dq} . \quad (1.2)$$

При вимірюванні енергії  $W$  в джоулях (Дж) і заряду  $q$  в кулонах (К) напругу  $u$  вимірюють у вольтах (В).

Напруга також є скалярною величиною. Для однозначного визначення знака напруги  $u$  між двома выводами розглядуваної ділянки кола одному з выводів умовно приписують позитивну полярність, позначаючи його знаком «+» або позначають стрілкою, спрямованою від виводу. Приймається, що потенціал виводу зі знаком «+» вищий за потенціал іншого виводу.

Напруга додатна, якщо її полярність збігається з обраною полярністю.

Перед початком розрахунку електричного кола необхідно вибрати позитивні напрямки струмів і напруг. Рекомендується вибирати узгоджені напрямки струмів і напруг.

Перетворимо вираз (1.2):

$$W = \int_{-\infty}^t u dq = \int_{-\infty}^t u i dt . \quad (1.3)$$

Диференціювання виразу (1.3) дає вираз швидкості зміни енергії в часі, тобто потужності, що вимірюють у ватах (Вт):

$$P = \frac{dW}{dt} = ui . \quad (1.4)$$

Потужність в електричному колі дорівнює добутку напруги та струму. Якщо знак потужності на ділянці кола додатний, то це означає, що на цій ділянці відбувається споживання енергії. При від'ємному знаку потужності ділянка кола є джерелом енергії.

При такому підході сукупність електротехнічних пристроїв, що складається з джерел і приймачів електричної енергії, з'єднаних відповідним чином і призначених для генерації, передавання, розподілу та перетворення електричної енергії й (чи) інформації, розглядають як електричне коло.

Електричне коло складається з окремих частин (об'єктів), що виконують певні функції і називають елементами кола.

**Вузлом** електричного кола (схеми) називають точку, в якій сходиться не менше трьох гілок.

**Віткою** електричного кола (схеми) називають ділянку, складену з послідовно увімкнених елементів, розміщених між двома суміжними вузлами.

**Контуром** електричного кола (схеми) називають замкнений шлях, що проходить через вітки і вузли.

Основними елементами кола є джерела і приймачі електричної енергії (сигналів).

Електротехнічні пристрої, що виробляють електричну енергію, називають *генераторами*, або джерелами електричної енергії, а пристрої, які її споживають, – *приймачами* (споживачами) електричної енергії.

У кожного елемента кола можна виділити певну кількість затискачів (полюсів), за допомогою яких він з'єднується з іншими елементами. Розрізняють дво- і багатополюсні елементи. Двополюсники мають два затискачі.

До них належать:

– джерела енергії (за винятком керованих і багатофазних джерел);

– резистори;

– котушки індуктивності;

– конденсатори.

Багатополюсні елементи – це:

– тріоди;

– трансформатори;

– підсилювачі тощо.

Усі елементи електричного кола умовно можна розподілити на активні та пасивні.

**Активним** називають елемент, що містить у своїй структурі джерело електричної енергії.

До **пасивних** належать елементи, в яких розсіюється (резистори) або накопичується (котушка індуктивності та конденсатори) енергія.

*До основних характеристик* елементів кола відносять їх вольт-амперні, вебер-амперні і кулон-вольтні характеристики,

що описують диференціальними або (і) алгебраїчними рівняннями.

Якщо елементи описуються лінійними диференціальними або алгебраїчним рівняннями, то їх називають *лінійними*, в іншому випадку їх відносять до *класу нелінійних*.

Якщо параметри елемента не є функціями просторових координат, що визначають його геометричні розміри, то його називають елементом із зосередженими параметрами.

Якщо елемент описується рівняннями, до яких входять просторові змінні, то його відносять до класу елементів із розподіленими параметрами. Класичним прикладом останніх є лінія передачі електроенергії (довга лінія).

Кола, що містять тільки лінійні елементи, називають лінійними. Наявність у схемі хоча б одного нелінійного елемента відносить її до класу нелінійних.

Розглянемо пасивні елементи ланцюга, їх основні характеристики і параметри.

## 2. Пасивні елементи електричного кола

### 2.1. Резистивний елемент (резистор)

Ідеальний резистор  $R$  – це схемний елемент, в якому відбувається тільки процес перетворення електричної енергії в інші види, має символічне позначення, показане на рис. 1.1, характеризується опором, вимірюваним в омах [Ом]. Основною характеристикою резистивного елемента є залежність  $u(i)$ , так звана вольт-амперна характеристика (рис. 1.2).

Зв'язок між напругою і струмом виражається законом Ома через миттєві значення в колі постійного струму:

$$u_R = Ri_R, \quad (1.5)$$

$$U_R = I_R R. \quad (1.6)$$

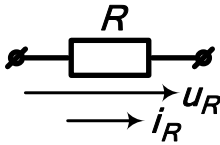


Рисунок 1.1 – Схема заміщення резистора

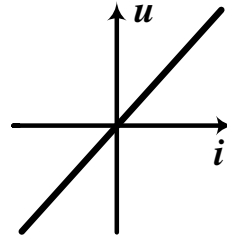


Рисунок 1.2 – Вольт-амперна характеристика

Чисельно опір дорівнює величині напруги на елементі під час проходження по ньому струму, що дорівнює 1 А. При цьому вважають, що опір (провідність)  $R$  ( $G$ ) є сталим.

Потужність, що виділяється у вигляді тепла в резисторі, виражається законом Джоуля-Ленца:

$$P = \frac{dW}{dt} = ui = Ri^2 = Gu^2, \quad (1.7)$$

де  $G = \frac{1}{R}$  – провідність.

Потужність в резисторі є квадратичною функцією струму або напруги, тому вона не може набувати від’ємних значень, отже, енергія завжди надходить від джерела до резистора.

## 2.2. Індуктивний елемент (котушка індуктивності)

Ідеальна котушка індуктивності  $L$  – це схемний елемент, в якому відбувається тільки процес накопичення (чи повернення) енергії в магнітному полі

$$W_M = \frac{Li_L^2}{2}. \quad (1.8)$$

Котушка індуктивності має символічне позначення, показане на рис. 1.3, і характеризується індуктивністю, вимірюваною в генрі [Гн].

Основною характеристикою котушки індуктивності є залежність, зображена на рис. 1.4, так звана вебер-амперна характеристика (ВАХ).

Проходження струму  $i$  по котушці пов'язане з магнітним потоком  $\Phi$ , що є потоком вектора магнітної індукції, вимірюваним у веберах (Вб).

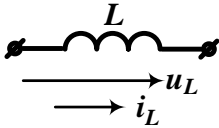


Рисунок 1.3 – Схема заміщення котушки індуктивності

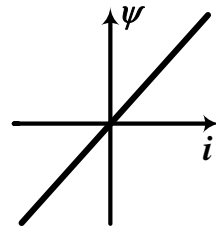


Рисунок 1.4 – Вебер-амперна характеристика

Лінії магнітного поля є замкненими кривими, зчепленими з витками котушки. Оскільки кількість ліній, зчеплених з окремими витками неоднакова, то вводять поняття потокозчеплення  $\psi$ , що є сумою усіх потоків, зчеплених з окремими витками котушки:

$$\psi = \sum_{k=1}^N \Phi_k \tag{1.9}$$

де  $N$  – загальна кількість витків котушки.

Індуктивність визначають відношенням потокозчеплення  $\psi$  до струму  $i$ , що проходить по витках котушки:

$$L = \frac{\psi}{i} \text{ [Гн]}. \tag{1.10}$$

Зв'язок між струмом і напругою в котушці індуктивності встановлюють на основі закону електромагнітної індукції: під час зміни магнітного потоку, зчепленого з контуром, у ньому наводиться електрорушійна сила, що дорівнює швидкості зміни потокозчеплення і спрямована так, щоб струм, викликаний нею, прагнув перешкодити зміні навідного потоку.

Спад напруги на котушці індуктивності збігається за знаком зі струмом котушки, отже є протилежним дії ЕРС:



$$u_L = -e_L = \frac{d\psi}{dt} = L \frac{di}{dt}. \quad (1.11)$$

У колі постійного струму похідна дорівнює нулю, тому напруга на котушці дорівнює нулю:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0, \quad (1.12)$$

що відповідає короткому замиканню цього елемента. Отже, у режимі постійного струму схемний елемент  $L$  не впливає на режим роботи електричного кола і може бути закороченим.

Виразимо струм котушки індуктивності з рівняння (1.7):

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u_L dt + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt, \quad (1.13)$$

де  $i(0) = \psi(0)/L$  – початковий струм, тобто значення струму у момент  $t = 0$ , що враховує всі процеси в елементі до моменту  $t = 0$ .

Розглянемо енергетичні характеристики котушки індуктивності. Вираз для миттєвої потужності з урахуванням рівнянь (1.4) і (1.11) набирає такого вигляду:

$$P = ui = Li \frac{di}{dt}. \quad (1.14)$$

Якщо миттєва потужність додатна, то в котушці індуктивності відбувається запасання енергії і навпаки. Енергію, що запасується в котушці індуктивності, визначимо відповідно до формули (1.3):

$$W_L = \int_{-\infty}^t Li \frac{di}{dt} dt = \int_{-\infty}^t Lidi = \frac{Li^2}{2}. \quad (1.15)$$

### 2.3. Ємнісний елемент (конденсатор)

*Ідеальний конденсатор*  $C$  – це схемний елемент, у якому відбувається тільки процес накопичення (чи повернення) енергії в електричному полі,

$$W_E = \frac{Cu_C^2}{2}. \quad (1.16)$$

Конденсатор має символічне позначення, показано на рис. 1.5, характеризується величиною ємності, вимірюваною у фарадах [Ф]. Основною характеристикою котушки індуктивності є залежність  $q(u)$  (рис. 1.6) – кулон-вольтна характеристика (КВХ).

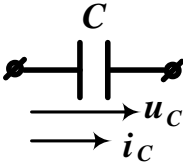


Рисунок 1.5 – Схема заміщення конденсатора

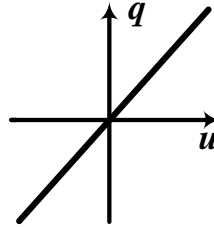


Рисунок 1.6 – Кулон-вольтна характеристика

Для розрахунку ємності  $C$  необхідно розрахувати електричне поле в конденсаторі.

Напруженість електричного поля пропорційна напрузі  $u$  між обкладками конденсатора, тому його заряд  $q$  буде пропорційним напрузі  $u$ :

$$q = Cu_C. \quad (1.17)$$

Ємність визначається відношенням заряду  $q$  на обкладках конденсатора до напруги  $u_C$  між ними, тобто

$$C = \frac{q}{u_C} \quad (1.18)$$

і залежить від геометрії обкладок і властивостей діелектрика, розміщеного між ними.

Для встановлення зв'язку між струмом і напругою конденсатора розглядають сумісно рівняння (1.1) і (1.18):

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.19)$$

Оскільки струм у конденсаторі визначають швидкістю зміни напруги, то при постійній напрузі джерела струм дорівнюватиме нулю. Тому ідеальний конденсатор в колах постійного струму замінюється розривом вітки. Отже, в режимі постійного струму, вітка схеми з конденсатором не чинить впливу на режим роботи електричного кола і може бути видаленою зі схеми.

Напруга конденсатора виражається з рівняння (1.19):

$$u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt, \quad (1.20)$$

де  $u(0) = q(0)/C$  – початкова напруга, тобто значення напруги в момент  $t = 0$ , яка враховує усі процеси в елементі до моменту  $t = 0$ .

Розглянемо енергетичні характеристики конденсатора. Вираз для миттєвої потужності з урахуванням рівнянь (1.4) і (1.19) набуває такого вигляду:

$$P = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt}. \quad (1.21)$$

Якщо миттєва потужність додатна, то в конденсаторі відбувається запасання енергії й навпаки. Енергія, що запасується в конденсаторі, визначається відповідно до формули (1.3):

$$W_C = \int_{-\infty}^t C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \int_{-\infty}^t C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2}. \quad (1.22)$$

### Контрольні питання і завдання

1. Що називають електричним колом?
2. Що розуміють під позитивним напрямком струму?
3. Назвіть елементи електричних кіл і наведіть їх умовні графічні позначення. Як впливають характеристики елементів на назву електричних кіл?
4. Наведіть основні співвідношення між струмом і напругою для  $R$ ,  $L$  і  $C$  елементів.
5. Як поділяють усі приймачі електричної енергії?
6. Визначте індуктивність  $L$  і енергію магнітного поля котушки, якщо при струмі в ній  $I = 20\text{А}$  потокозчплення

$\psi = 2$  Вб.

Відповідь:  $L = 0,1$  Гн;  $W_M = 40$  Дж.

7. Визначте ємність і енергію електричного поля  $W_E$  конденсатора, якщо при напрузі на його обкладках  $U = 400$  В, заряд конденсатора  $q = 0,2 \cdot 10^{-3}$  Кл.

Відповідь:  $C = 0,5$  мкФ,  $W_E = 0,04$  Дж.

8. Що називають віткою, вузлом і контуром електричного кола?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 2

### Тема «Активні елементи електричного кола»

#### План

1. Джерело напруги.
2. Джерело струму.
3. Еквівалентні перетворення джерел енергії.
4. Взаємні еквівалентні перетворення джерел енергії.

#### 2.1. Джерело напруги

Схема заміщення реального джерела ЕРС показана на рис. 2.1 всередині пунктирного прямокутника. До зовнішніх за- тискачів джерела ЕРС увімкнено навантаження у вигляді резистора з опором  $R$ . Послідовно з джерелом  $E$  вмикається внутрішній опір  $R_{вн}$ .

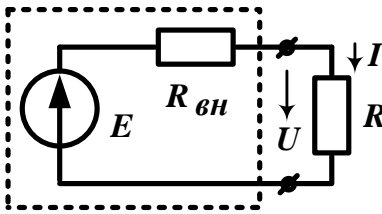


Рисунок 2.1 – Схема заміщення джерела ЕРС

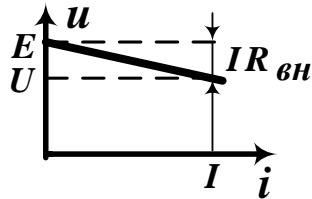


Рисунок 2.2 – Вольт-амперна характеристика джерела ЕРС

Для схеми заміщення джерела ЕРС (рис. 2.1) записується рівняння за другим законом Кірхгофа

$$IR_{вн} + IR = E, \quad IR = U, \quad U = E - IR_{вн}. \quad (2.1)$$

Одержане рівняння називається вольт-амперною характеристикою джерела ЕРС (рис. 2.2).

Для розрахунку електричних кіл застосовується ідеальне джерело ЕРС, у якого внутрішній опір береться таким, що дорівнює нулю,  $R_{вн} = 0$ .

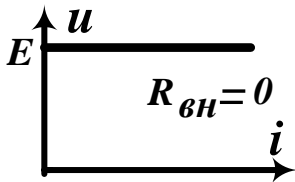


Рисунок 2.3 – ВАХ ідеального джерела ЕРС

**Ідеальне джерело напруги (ЕРС)**  
 $E$  – це схемний елемент, що генерує на своїх виводах сталу за величиною ЕРС ( $E = const$ ), незалежну від струму, що проходить по ньому і характеризується напругою, вимірюваною у вольтах [В]. Вольт-амперна характеристика

ідеального джерела ЕРС показана на рисунку 2.3.

## 2.2. Джерело струму

Схема заміщення реального джерела струму показана на рисунку 2.4 всередині пунктирного прямокутника. До зовнішніх затискачів джерела струму ввімкнено навантаження у вигляді резистора з опором  $R$ . Паралельно джерелу струму вмикають внутрішню провідність  $G_{вн}$ .

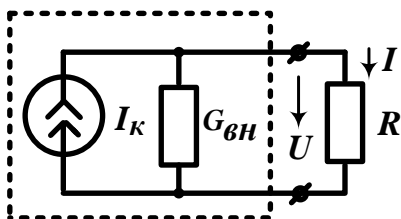


Рисунок 2.4 – Схема заміщення джерела струму

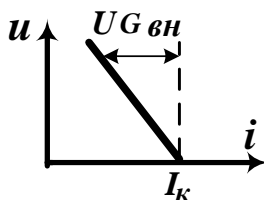


Рисунок 2.5 – Вольт-амперна характеристика джерела струму

Для схеми заміщення джерела струму (рис. 2.4) записують рівняння за першим законом Кірхгофа

$$I = I_k - U G_{вн}. \quad (2.2)$$

Одержане рівняння називається вольт-амперною характеристикою джерела струму (рис. 2.5). Для розрахунку електрич-

них кіл застосовують ідеальне джерело струму, у якого внутрішня провідність дорівнює нулю ( $G_{вн} = 0$ ).

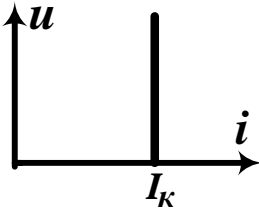


Рисунок 2.6 – ВАХ ідеального джерела струму

**Ідеальне джерело струму  $I_k$**  – це схемний елемент, який генерує у колі сталий за величиною струм ( $I_k = \text{const}$ ), не залежить від напруги на його затискачах. Вольт-амперна характеристика ідеального джерела струму показана на рисунку 2.6.

### 2.3. Еквівалентні перетворення джерел енергії

Для спрощення розрахунків електричних кіл раціонально застосовувати взаємні перетворення джерел енергії. При цьому необхідно враховувати внутрішній опір ( $R_{вн}$ ) джерела ЕРС і внутрішню провідність ( $G_{вн}$ ) джерела струму.

Схеми джерел енергії еквівалентні за умови рівності для обох схем напруги  $U$  і струмів  $I$  на навантаженні:

$$U = E - IR_{вн} = IR = (I_k - I) \frac{1}{G_{вн}} = \frac{I_k}{G_{вн}} - \frac{I}{G_{вн}}. \quad (2.3)$$

Формули, що використовуються для еквівалентної заміни джерел енергії, мають такий вигляд:

$$R_{вн} = \frac{1}{G_{вн}}, \quad E = \frac{I_k}{G_{вн}}, \quad I_k = \frac{E}{R_{вн}}. \quad (2.7)$$

### 2.4. Взаємні еквівалентні перетворення джерел енергії

**Перший випадок.** Розглядають схемні перетворення джерел ЕРС щодо вузлів «а» і «б» для схеми, наведеної на рис. 2.7.

Проводять еквівалентну заміну джерел ЕРС (рис. 2.7) на джерела струму (рис. 2.8). Під час перетворень застосовують такі вирази:

$$I_{k1} = \frac{E_1}{R_1}, \quad I_{k2} = \frac{E_2}{R_2}, \quad I_{k3} = \frac{E_3}{R_3 + R_4}. \quad (2.5)$$

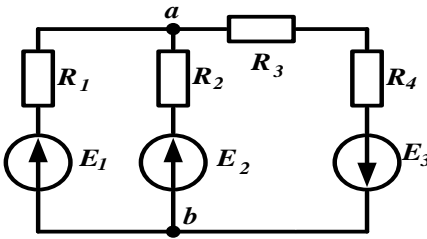


Рисунок 2.7 – Початкова схема

Потім, враховуючи напрямки дії джерел, замінюють джерела струму  $I_{k1}$ ,  $I_{k2}$ ,  $I_{k3}$  у схемі (рис. 2.8) одним  $I_{КЕКВ}$  (рис. 2.9)

$$I_{КЕКВ} = I_{k1} + I_{k2} - I_{k3}. \quad (2.6)$$

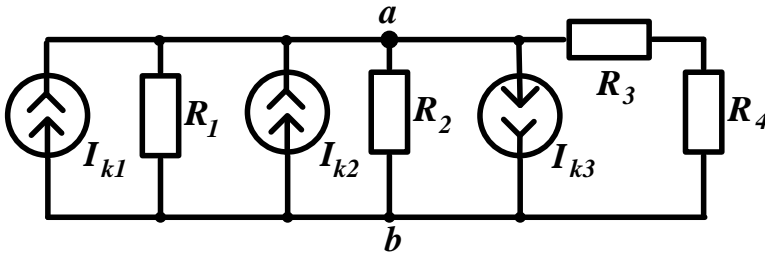


Рисунок 2.8

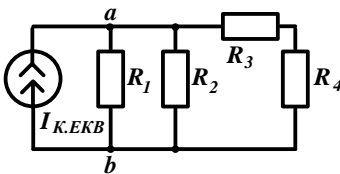


Рисунок 2.9

Джерело струму  $I_{КЕКВ}$  і резистор  $R_1$  перетворюють в еквівалентне джерело ЕРС  $E_{ЕКВ}$  (рис. 2.10). (рис. 2.10), а потім

замінюють резистори  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$  одним (рис. 2.11):

$$R_{ЕКВ} = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}. \quad (2.7)$$



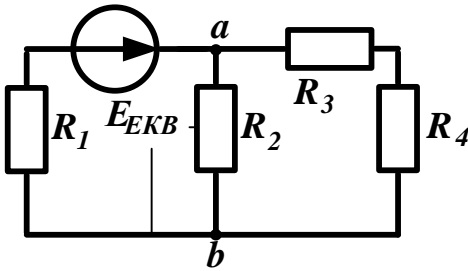


Рисунок 2.10

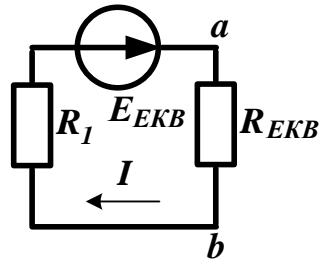


Рисунок 2.11

Для схеми (рис. 2.11) визначають струм  $I$  і напругу  $U_{ab}$  :

$$I = \frac{E_{EKB}}{R_1 + R_{EKB}}, \quad U_{ab} = I \cdot R_{EKB}. \quad (2.8)$$

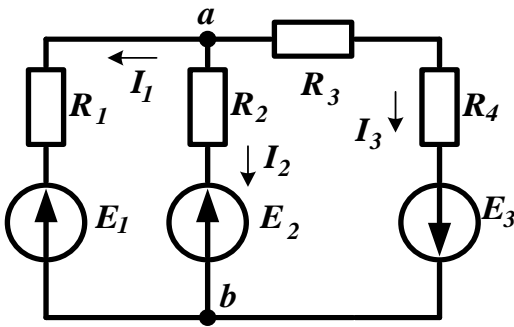


Рисунок 2.12

Позначають довільні напрямки струмів  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  для початкової схеми (рис. 2.7).

Записують вирази для визначення струмів гілок, використовуючи узагальнений закон Ома (рис. 2.12), звідси

$$I_1 = \frac{U_{ab} - E_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_{ab} - E_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{U_{ab} + E_3}{R_3 + R_4}. \quad (2.9)$$

**Другий випадок.** Розглядають схемні перетворення джерел ЕРС і джерел струму щодо вузлів «а» і «b» для схеми, показаної на рис. 2.13.

Тут можливі такі шляхи перетворень:

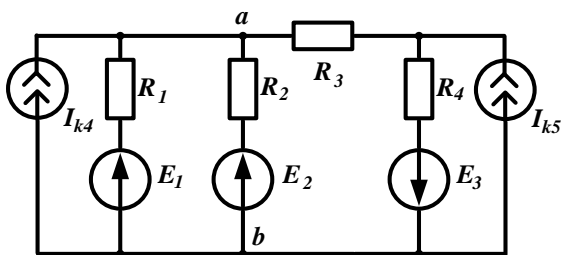


Рисунок 2.13

*Перший*  
Замінюють джерела струму  $I_{k4}$  і  $I_{k5}$  на джерела ЕРС  $E_{k4}$  і  $E_{k5}$ , які увімкнені послідовно до резисторів  $R_1$  і  $R_4$  (рис. 2.14).

Значення джерел ЕРС  $E_{k4}$  і  $E_{k5}$  визначають за такими виразами:

$$E_{k4} = I_{k4} \cdot R_1, \quad E_{k5} = I_{k5} \cdot R_4. \quad (2.10)$$

Потім замінюють увімкнені послідовно джерела ЕРС  $E_1$  і  $E_{k4}$  на  $E_{1.EKB}$  а джерела ЕРС  $E_3$  і  $E_{k5}$  на  $E_{3.EKB}$  (рис. 2.15).

$$E_{1.EKB} = E_1 + E_{k4}, \quad E_{3.EKB} = E_3 - E_{k5}. \quad (2.11)$$

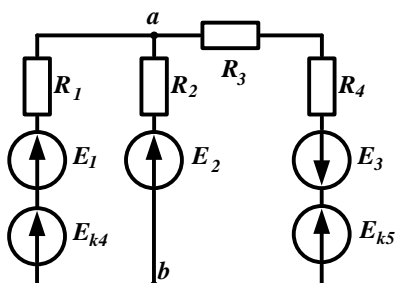


Рисунок 2.14

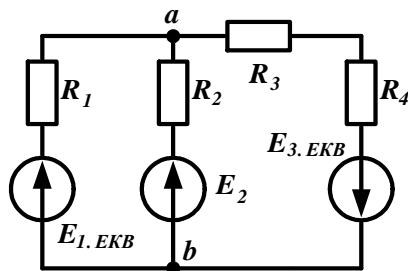


Рисунок 2.15

*Другий*

Замінюють джерела ЕРС  $E_1$ ,  $E_2$  на джерела струму  $I_{k1}$  і  $I_{k2}$ , а джерело струму  $I_{k5}$  на джерело ЕРС  $E_{k5}$  (рис. 2.16):

$$I_{k1} = \frac{E_1}{R_1}, \quad I_{k2} = \frac{E_2}{R_2}, \quad E_{k5} = I_{k5} \cdot R_4. \quad (2.12)$$

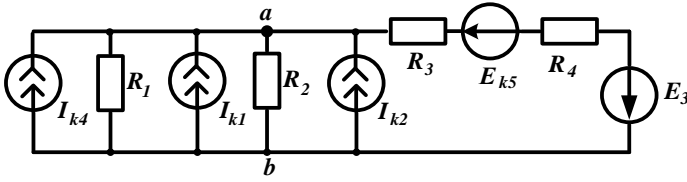


Рисунок 2.16

Перетвориться вітка з резисторами  $R_3$  і  $R_4$  і джерелами ЕРС  $E_3$  і  $E_{k5}$  (рис. 2.17)

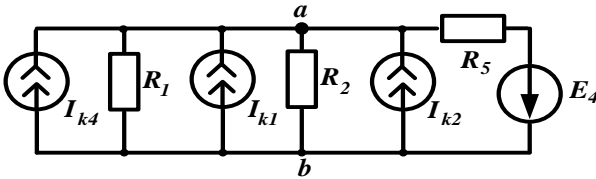


Рисунок 2.17

$$R_5 = R_3 + R_4, \quad E_4 = E_3 - E_{k5}.$$

Потім замінюють джерело ЕРС  $E_4$  на джерело струму  $I_{k6}$  (рис. 2.18) Перетворюють джерела струму  $I_{k1}$ ,  $I_{k4}$ ,  $I_{k2}$ ,  $I_{k6}$  на еквівалентне джерело струму  $I_{КЕКВ}$  (рис. 2.19).

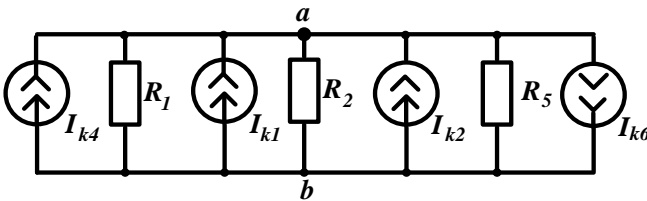


Рисунок 2.18

$$I_{КЕКВ} = I_{k4} + I_{k1} + I_{k2} - I_{k6}. \quad (2.13)$$

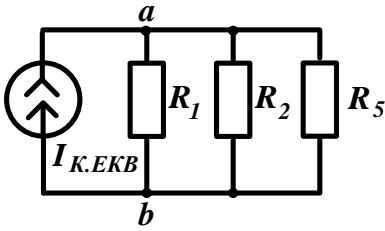


Рисунок 2.19

Потім перетворюють вітки з паралельно з'єднаними резисторами  $R_2$  і  $R_5$ , а джерело струму  $I_{K.EKB}$  замінюють на джерело ЕРС  $E_{K.EKB}$  (рис. 2.20):

$$R_6 = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_5}, \quad (2.14)$$

$$E_{K.EKB} = I_{K.EKB} \cdot R_1. \quad (2.15)$$

Визначають струм джерела ЕРС  $E_{K.EKB}$  за узагальненим законом Ома

$$I = \frac{E_{K.EKB}}{R_1 + R_6}. \quad (2.16)$$

Обчислюють напругу між точками «а» і «b»:

$$U_{ab} = I \cdot R_6.$$

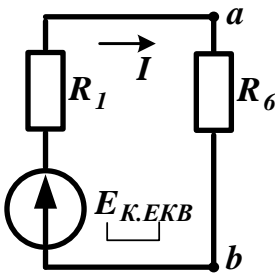


Рисунок 2.20

Вибирають додатні напрямки струмів на початковій схемі (рис. 2.21). Визначають струми  $I_1$  та  $I_2$  за узагальненим законом Ома

$$I_1 = \frac{U_{ab} - E_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_{ab} - E_2}{R_2}. \quad (2.17)$$

Струми  $I_3$  і  $I_4$  обчислюють за першим законом Кірхгофа

$$I_3 = I_{k4} - I_1 - I_2,$$

$$I_4 = I_3 + I_{k5}.$$

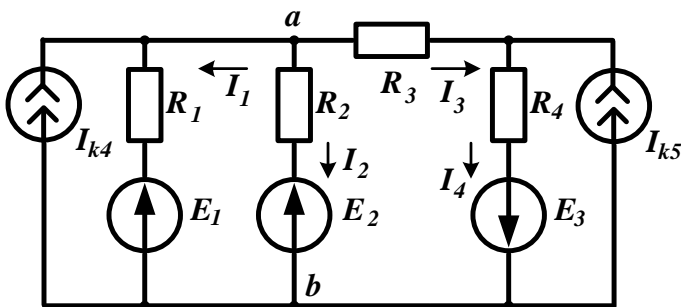


Рисунок 2.21

### Контрольні питання і завдання

1. Що розуміють під термінами джерело струму, джерело напруги?

2. Чи може зовнішня характеристика джерела проходити через початок координат?

3. Який режим (холостий хід або коротке замикання) є аварійним для джерела струму?

4. Який режим (холостий хід або коротке замикання) є аварійним для джерела ЕРС?

5. У чому полягають еквівалентність і відмінність послідовної та паралельної схем заміщення джерела?

6. У генератора постійного струму при струмі в навантаженні  $I_H = 50$  А напруга на затискачах  $U = 210$  В, а при струмі, що дорівнює  $I_2 = 100$  А, вона знижується до  $U_2 = 190$  В. Визначити параметри послідовної схеми заміщення джерела і струм короткого замикання.

Відповідь:  $E = 230$  В,  $R_{BH} = 0,4$  Ом.  $I_{k1} = 575$  А.

7. Яким повинне бути співвідношення між опором  $R_{вн}$  джерела ЕРС і опором  $R_H$  увімкненого до нього навантаження, щоб напруга на затискачах джерела менше залежала від струму навантаження?

8. Чому намагаються використовувати такі джерела ЕРС, значення внутрішнього опору яких повинне бути зведене до мінімального значення?

9. Якому режиму роботи джерела ЕРС відповідає точка перетину його зовнішньої характеристики з осями абсцис і ординат?

10. Якому режиму роботи джерела струму відповідає точка перетину його зовнішньої характеристики з осями абсцис і ординат?

11. Які досліді необхідно поставити і які величини виміряти для визначення внутрішнього опору джерела ЕРС?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 3

### Тема «Методи розрахунку складних резистивних кіл»

#### План

1. Основні визначення.
2. Метод перетворення схем із пасивними елементами.
3. Застосування законів Кірхгофа.
4. Метод контурних струмів.

#### 3.1. Основні визначення

*Складним* називають електричне коло (схема), що містить не менше двох вузлів, трьох віток і двох джерел енергії в різних вітках.

У складному електричному колі спостерігають одночасно тією чи іншою мірою різнорідні фізичні процеси, а саме: процеси генерування електричної енергії, її перетворення в інші види і процес обміну енергією між магнітним полем, електричним полем та джерелами енергії.

#### 3.2. Метод перетворення схем із пасивними елементами

Якщо схема електричного кола містить тільки одне джерело енергії ( $E$  або  $I_K$ ), то пасивна частина схеми може бути перетворена до одного еквівалентного елемента  $R_{ЕКВ}$ .

Перетворення схеми починається з найвіддаленіших від джерела віток, проводиться у декілька етапів до досягнення  $R_{ЕКВ}$ . Потім визначається струм джерела за законом Ома

$$I = \frac{U}{R_{ЕКВ}}. \quad (3.1)$$

Струми в інших елементах початкової схеми знаходять у процесі зворотної розгортки схеми. Такий метод розрахунку струмів дістав назву **методу послідовного перетворення схеми**.

Під час застосування цього методу можливі такі види перетворень:

1. **Послідовне перетворення** полягає в заміні декількох елементів (рис. 3.1), увімкнених послідовно, одним еквівалентним (рис. 3.2).

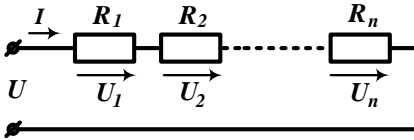


Рисунок 3.1 – Початкова схема

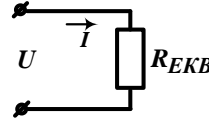


Рисунок 3.2 – Перетворена схема

Рівняння для схеми (рис. 2.1) записують за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned}
 U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n, \\
 U &= IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n, \\
 U &= I(R_1 + R_2 + \dots + R_n), \\
 R_{EKB} &= R_1 + R_2 + \dots + R_n.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

2. **Паралельне перетворення** полягає в заміні декількох елементів (рис. 3.3), увімкнених паралельно, одним еквівалентним (рис. 3.4).

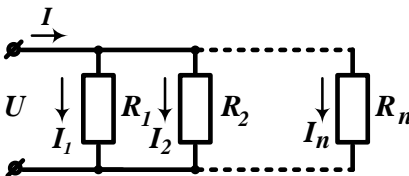


Рисунок 3.3 – Початкова схема

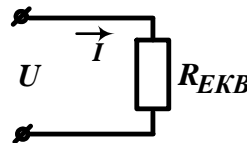


Рисунок 3.4 – Перетворена схема

Рівняння для схеми (рис. 3.3) записують за першим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n, \\
 \frac{I}{R_{EKB}} &= \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} + \dots + \frac{I}{R_n}.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

3. **Взаємне перетворення** схем зірка (трикутник (рис. 3.5, 3.6) виникає при еквівалентній заміні складних схем.



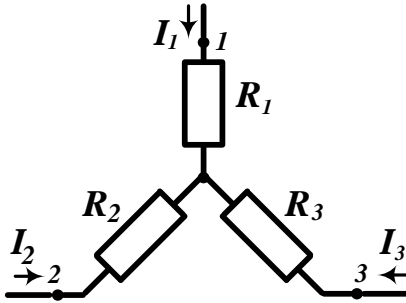


Рисунок 3.5 – Схема з'єднання зіркою

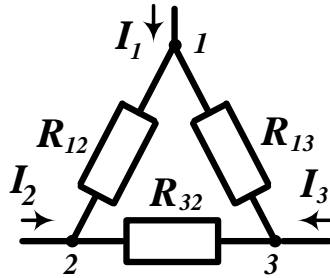


Рисунок 3.6 – Схема з'єднання трикутником

Умовою еквівалентності двох схем є рівність для них струмів ( $I_1, I_2, I_3$ ), напруги ( $U_{12}, U_{23}, U_{31}$ ), а отже, і вхідних опорів відносно точок 1 – 2, 2 – 3, 1 – 3 ( $R_{BX.1-2}, R_{BX.2-3}, R_{BX.1-3}$ ).

Прирівнюють вхідні опори для обох схем з боку двох довільних віток за відімкненої третьої вітки (рис. 3.5, 3.6):

$$R_{BX.1-2} = R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{31} + R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (3.4)$$

$$R_{BX.2-3} = R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31} + R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (3.5)$$

$$R_{BX.3-1} = R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3.6)$$

У результаті почленного додавання рівнянь (3.4) і (3.5) і віднімання з одержаної суми рівняння (3.6) випливає:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (3.7)$$

аналогічно

$$R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad (3.8)$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (3.9)$$

Для одержання виразів, що дозволяють замінити зірку опорів трикутником, проводять такі перетворення:

$$R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \times \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} +$$

$$+ \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \times \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} + \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \times$$

$$\times \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

а потім одержаний вираз по черзі ділять на вирази (3.7) (3.8) (3.9).

Після нескладних перетворень одержують такі рівності:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}, \quad (3.10)$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}, \quad (3.11)$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}. \quad (3.12)$$

**4. Перенесення джерела ЕРС через вузол схеми:** джерело ЕРС  $E$  можна перенести через вузол в усі вітки, що відходять від вузла (рис. 3.7, а, б):



Рисунок 3.7 – Перенесення джерела ЕРС через вузол схеми

**5. Перенесення джерела струму згідно зі схемою** (рис. 3.8, а, б):

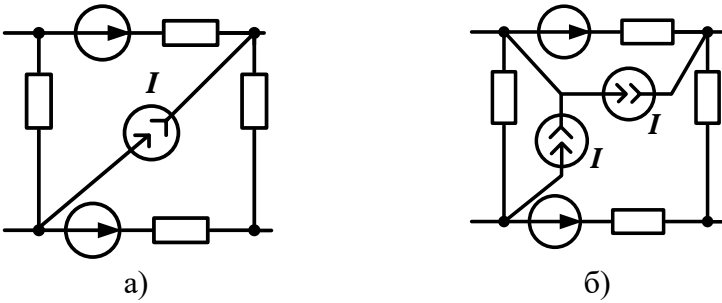


Рисунок 3.8

### 3.3. Застосування законів Кірхгофа

**1-й закон Кірхгофа:** алгебраїчна сума струмів віток у вузлі схеми дорівнює нулю

$$\sum I_n = 0. \quad (3.13)$$

**2-й закон Кірхгофа:** алгебраїчна сума падінь напруги в довільному контурі схеми дорівнює алгебраїчній сумі ЕРС

$$\sum_n I_n R_n = \sum_m E_m. \quad (3.14)$$

Припустимо, що необхідно виконати розрахунок режиму роботи заданої складної схеми (рис. 3.9) і визначити струми у вітках, напругу на окремих елементах, потужності джерел і приймачів енергії.

Задано схему ділянки і параметри її окремих елементів.

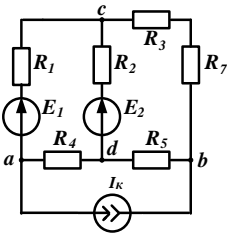


Рисунок 3.9 –  
Початкова схема

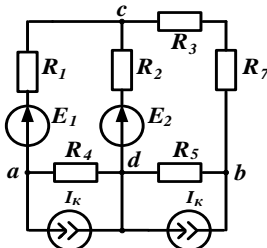


Рисунок 3.10 –  
Перетворення  
джерел струму

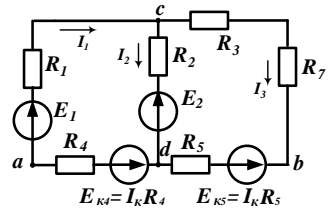


Рисунок 3.11 –  
Заміна джерел  
струму

Джерела струму перетворюються в джерела ЕРС  $E_{k4}$  і  $E_{k5}$ .

Проаналізуємо структуру схеми (рис. 3.11): схема містить  $n = 2$  ( $c, d$ ) вузлів і  $m = 3$  віток з невизначеними струмами. Загальна кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості струмів, що визначаються « $m$ ».

*Послідовність (алгоритм) розрахунку.*

1. Задають (довільно) позитивний напрямок струмів у вітках схеми (рис. 3.11).

2. Складають  $(n-1)$  рівнянь для вузлів за першим законом Кірхгофа.

3.  $m - (n-1)$  рівнянь, яких не вистачає, складають за другим законом Кірхгофа.

**Правило вибору контурів** для складання рівнянь: кожен наступний контур повинен мати хоча б одну нову вітку, не охоплену попередніми рівняннями.

Нижче наводиться система рівнянь Кірхгофа для схеми рис. 3.11.

Вузол  $c$ :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (3.15)$$

Контур  $a - c - d$ :

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_4 = E_1 - E_2 - E_{k4}. \quad (3.16)$$

Контур  $c - b - d$ :

$$I_3 R_3 - I_2 R_2 + I_3 R_7 + I_3 R_5 = E_2 - E_{k5} \quad (3.17)$$

#### Баланс потужності

Для перевірки правильності розрахунків складається рівняння балансу потужності.

$$\sum P_{джер} = \sum P_{нагр}. \quad (3.18)$$

$$\sum P_{джер} = E_1 I_1 - E_2 I_2 - E_4 I_1 \quad (3.19)$$

$$\sum P_{нагр} = I_1^2 (R_1 + R_4) + I_2^2 R_2 + I_3^2 (R_3 + R_5 + R_7). \quad (3.20)$$

### 3.4. Метод контурних струмів

Передбачається, що в кожному контурі схеми проходить «свій» контурний струм  $I_{kk}$ , а дійсні струми віток виходять за принципом накладання контурних струмів як їх алгебраїчні су-

ми. Як невідомі величини, що підлягають визначенню, в цьому методі виступають контурні струми. Загальна кількість невідомих визначається кількістю незалежних контурів.

Необхідно виконати розрахунок режиму в заданій складній схемі рис. 3.12. Параметри окремих елементів схеми задані.

*Послідовність (алгоритм) розрахунку.*

1. Задають (довільно) додатні напрямки контурних струмів у контурах схеми ( $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ). Контури необхідно вибирати так, щоб вони не мали віток з джерелами струму.

2. Складають систему контурних  $m(n1)$  рівнянь за 2-м законом Кірхгофа для вибраних контурів із контурними струмами  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ .

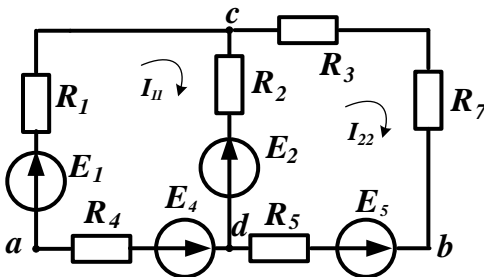


Рисунок 3.12 – Початкова схема

У рівняннях ураховують спад напруги як від власного контурного струму, так і від суміжних контурних струмів. В узагальненій формі система контурних рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} &= E_{11}, \\ I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} &= E_{22}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Тут введено такі позначення:

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_2; \quad R_{22} = R_3 + R_2 + R_5 + R_7 - \text{власні}$$

опори контурів, що дорівнюють сумі опорів усіх елементів контуру, по яких проходить відповідний контурний струм;

$$R_{12} = R_{21} = -R_2 - \text{взаємні опори між двома суміжними контурами, вони додатні, якщо контурні струми в гілці збігаються, і від'ємні, якщо контурні струми у вітці протиле-$$

жного напрямку, і завжди негативні, коли усі контурні струми мають однаковий напрямок (наприклад, за годинниковою стрілкою), дорівнюють нулю, якщо контури не мають загальної вітки.

$E_{11} = E_1 - E_2 - E_4$ ,  $E_{11} = E_2 - E_5$  – контурні ЕРС, що дорівнюють алгебраїчній сумі ЕРС відповідного контуру.

3. Вибирають додатні напрями струмів у вітках початкової схеми ( $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ). Струми віток визначають як алгебраїчні суми контурних струмів, що проходять у цій вітці:

$$I_1 = I_{11}, \quad I_2 = I_{11} + I_{22}, \quad I_3 = I_{22}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. Яке з'єднання ділянок електричного кола називають послідовним? Наведіть співвідношення для еквівалентного опору кола з  $n$  послідовно з'єднаними опорами.
2. Яке з'єднання ділянок електричного кола називають паралельним? Наведіть співвідношення для еквівалентного опору кола з  $n$  паралельно з'єднаними опорами.
3. Наведіть схеми з'єднань трикутником і зіркою.
4. У яких випадках можна і доцільно застосовувати для аналізу електричних кіл метод еквівалентних перетворень?
5. Сформулюйте перший і другий закони Кірхгофа.
6. Як визначають знаки членів рівнянь, складених:
  - а) за першим законом Кірхгофа;
  - б) за другим законом Кірхгофа?
7. У чому полягає суть методу контурних струмів?
8. У яких випадках доцільно застосовувати метод контурних струмів?
9. Який порядок визначення незалежних контурів у електричному колі?
10. Як визначаються значення контурних опорів і контурних ЕРС, взаємних опорів?

## Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 4

### Тема «Методи розрахунку складних резистивних кіл» (продовження)

#### План

1. Метод вузлових потенціалів.
2. Метод двох вузлів.
3. Принцип накладання. Метод накладання.
4. Метод еквівалентного генератора.

#### 4.1. Метод вузлових потенціалів

У цьому методі потенціал одного з вузлів схеми беруть таким, що дорівнює нулю, а потенціали інших  $(n - 1)$  вузлів вважають невідомими, такими, які потрібно визначити. Загальна кількість невідомих становить  $(n - 1)$ .

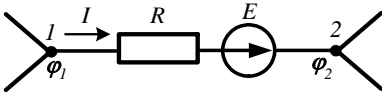


Рисунок 4.1 – Схема  
узагальноної вітки

Потенціали кінців вітки (вузлів) пов'язані між собою через спад напруги на окремих ділянках (рис. 4.1):

$$\varphi_1 = \varphi_2 + IR - E \quad (4.1)$$

Рівняння, що пов'язує потенціали кінцевих точок вітки через спад напруги на її окремих ділянках, називається потенціальним рівнянням вітки. Із потенціального рівняння вітки може бути визначений струм вітки:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E}{R}. \quad (4.2)$$

Припустимо, що нам потрібно виконати розрахунок режиму в заданій складній схемі рис. 4.2. Параметри окремих елементів схеми задані.

Послідовність (алгоритм) розрахунку.

1. Вважають, що потенціал одного з вузлів схеми дорівнює нулю, а потенціали інших  $(n - 1)$  вузлів вважають невідомими, такими, які потрібно визначити.

2. Записують систему вузлових рівнянь.

3. Визначають коефіцієнти вузлових рівнянь.



4. У результаті розв'язання системи вузлових рівнянь визначають невідомі потенціали вузлів  $\varphi_a, \varphi_b$ .

5. Вибирають додатні напрями струмів у вітках початкової схеми  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ . Струми віток визначають з потенціальних рівнянь віток через потенціали вузлів  $\varphi_a, \varphi_b$ .

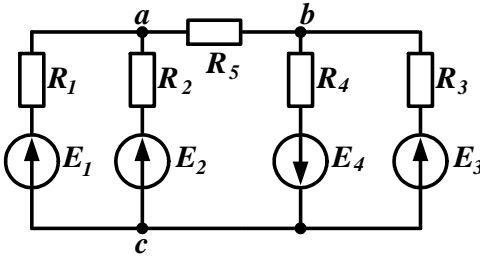


Рисунок 4.2 – Початкова схема

Тут вводять такі позначення:

$$G_{aa} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5}, \quad G_{bb} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \quad \text{– власна провідність}$$

вузлів, дорівнює сумам провідності усіх віток, що збігаються в цьому вузлі, завжди додатна;

$$G_{ab} = G_{ba} = -\frac{1}{R_5} \quad \text{– взаємна провідність між суміжними вузлами}$$

( $a, b$ ), дорівнює сумі провідності віток, що з'єднують ці вузли, завжди від'ємна;

$$I_{aa} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}, \quad I_{bb} = \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_4}{R_4} \quad \text{– вузлові струми вузлів дорівнюють алгебраїчній сумі доданків}$$

$E/R$  від усіх віток, що збігаються у вузлі (знак «+», якщо джерело діє до вузла, і знак «-», якщо джерело діє від вузла).

Потенціал вузла «с» вважають таким, що дорівнює нулю.

В узагальненій формі система вузлових рівнянь має такий вигляд:

$$\varphi_a G_{aa} + \varphi_b G_{ab} = I_{aa}, \quad (4.3)$$

$$\varphi_a G_{ba} + \varphi_b G_{bb} = I_{bb}.$$

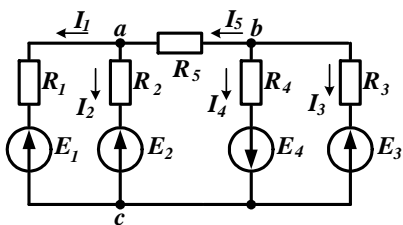


Рисунок 4.3 – Метод вузлових потенціалів

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_c - E_1}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_c - E_2}{R_2},$$

$$I_3 = \frac{\varphi_b - \varphi_c - E_3}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{\varphi_b - \varphi_c + E_4}{R_4},$$

$$I_5 = \frac{\varphi_b - \varphi_a}{R_5}.$$

#### 4.2. Метод двох вузлів

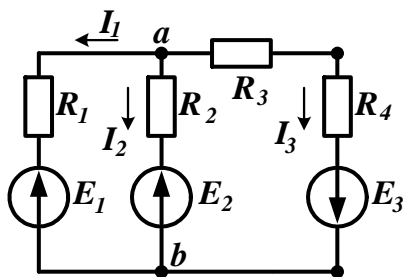


Рисунок 4.4 – Метод двох вузлів

Метод двох вузлів є окремим випадком методу вузлових потенціалів за кількістю вузлів на схемі  $n = 2$ .

Нам необхідно виконати розрахунок струмів в заданій схемі (рис. 4.4). Потенціал вузла « $b$ » вважають таким, що

дорівнює нулю ( $\varphi_b = 0$ ), тоді рівняння для вузла « $a$ » за методом вузлових потенціалів матиме такий вигляд:  $\varphi_{aa} G_{aa} = I_{aa}$ , звідси випливає безпосереднє визначення напруги між вузлами схеми :

$$U_{ab} = \frac{I_{aa}}{G_{aa}} = \frac{\sum \frac{E_n}{R_n}}{\sum R_n}, \quad (4.4)$$

$$U_{ab} = \frac{I_{aa}}{G_{aa}} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_3}{R_3 + R_4}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4}}, \quad (4.5)$$

$$I_1 = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{\varphi_a - \varphi_b - E_2}{R_2}, \quad I_3 = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_3}{R_3 + R_4}.$$

### 4.3. Принцип накладання. Метод накладання

**Принцип (теорема) накладання** полягає в тому, що струм в будь-якій гілці (напруга на будь-якому елементі) складної схеми, що містить кілька джерел, дорівнює алгебраїчній сумі часткових струмів (напруг), які виникають в цій гілці (на цьому елементі) незалежно від дії кожного джерела окремо.

Принцип накладання покладений в основу методу розрахунку складних кіл, що дістав назву **методу накладання**. Суть цього методу полягає в тому, що у складній схемі з декількома джерелами послідовно розраховують часткові струми від кожного джерела окремо. Розрахунок часткових струмів виконують, як правило, методом перетворення схеми. Дійсні струми визначають шляхом алгебраїчного додавання часткових струмів з урахуванням їх напрямків.

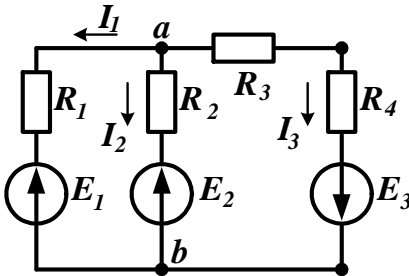


Рисунок 4.5 – Метод накладання. Початкова схема

Задано схему кола (рис. 4.5) і параметри її елементів.

Потрібно визначити струми у вітках схеми методом накладання.

На рис. 4.6 подано схему кола для визначення часткових струмів від дії джерела ЕРС  $E_1$ . Інші ЕРС схеми рис. 4.5 беруться такими, що дорівнюють нулю.

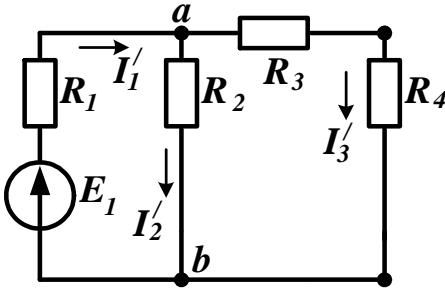


Рисунок 4.6 – Метод накладання. Діє  $E_1$

Визначають другий і третій струми (рис. 4.6):

$$I_2' = \frac{U_{ab}'}{R_2}, \quad I_3' = \frac{U_{ab}'}{R_3 + R_4}. \quad (4.8)$$

Складають схеми для визначення часткових струмів віток при дії  $E_2$  і  $E_3$  (рис. 4.7 і 4.8).

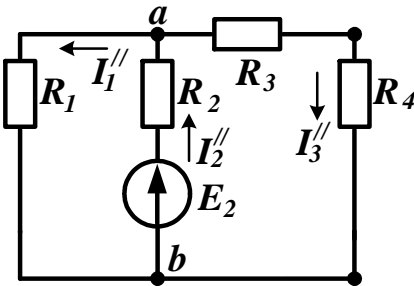


Рисунок 4.7 – Метод накладання. Діє  $E_2$

Визначають другий і третій струми (рис. 4.7):

$$I_1'' = \frac{U_{ab}''}{R_1}, \quad I_3'' = \frac{U_{ab}''}{R_3 + R_4}. \quad (4.11)$$

Визначають часткові струми при діючій тільки першій ЕРС (рис. 4.3).

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4}}. \quad (4.6)$$

Обчислюють напругу  $U_{ab}$ :

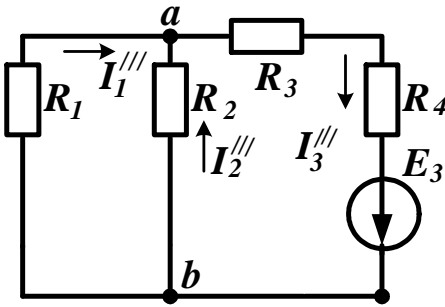
$$U_{ab}' = E_1 - I_1' R_1. \quad (4.7)$$

Визначають часткові струми при дії тільки другої ЕРС (рис. 4.7).

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1(R_3 + R_4)}{R_1 + R_3 + R_4}}. \quad (4.9)$$

Обчислюють напругу  $U_{ab}$ :

$$U_{ab}'' = E_2 - I_2'' R_2. \quad (4.10)$$



Визначають часткові струми при дії тільки третьої ЕРС (рис. 4.8).

$$I_3''' = \frac{E_3}{R_3 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}. \quad (4.12)$$

Обчислюють напругу  $U_{ab}$ :

$$U_{ab}''' = E_3 - I_3'''(R_3 + R_4). \quad (4.13)$$

Рисунок 4.8 – Метод накладання. Діє  $E_3$

Потім обчислюють другий і третій струми (рис. 4.8)

$$I_2''' = \frac{U_{ab}'''}{R_2}, \quad I_1''' = \frac{U_{ab}'''}{R_1}. \quad (4.14)$$

Потім визначають струми в початковій схемі (рис. 4.5)

$$I_1 = -I_1' + I_1'' - I_1''', \quad I_2 = I_2' - I_2'' - I_2''', \quad I_3 = I_3' + I_3'' + I_3'''.$$

#### 4.4. Метод еквівалентного генератора

Метод розрахунку струму у виділеній вітці складної схеми, що ґрунтується на використанні теореми про еквівалентний генератор, дістав назву методу еквівалентного генератора ЕРС.

Послідовність розрахунку:

- 1) зі схеми вилучають вітку, в якій потрібно обчислити струм;
- 2) виконують розрахунок частини схеми, що залишилася, будь-яким методом і визначають напругу холостого ходу  $U_{ab.xx} = \varphi_a - \varphi_b = E_E$  між точками підключення вилученої вітки;
- 3) для одержаної схеми після вилучення вітки усі джерела ЕРС  $E$  вимикають, залишаючи замість них проводи, а вітки з джерелами струму  $I_k$  вилучають зі схеми;
- 4) методом еквівалентних перетворень для одержаної пасивної схеми щодо точок підключення вилученої вітки визначають  $R_{ab.ox}$ ;

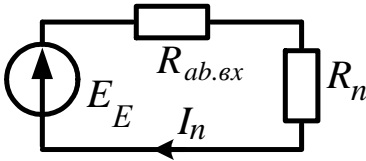


Рис.4.9 – Схема заміщення еквівалентного генератора ЕРС

5) складають схему заміщення еквівалентного генератора ЕРС, наведену на рис. 4.9;

б) виконують розрахунок цієї схеми рис. 4.9 і знаходять шуканий струм за

такою формулою:

$$I_n = \frac{E_E}{R_{ab.вх} + R_n} \quad (4.15)$$

### Приклад 1

*Приклад.* На схемі рис. 4.10 із заданими параметрами елементів визначити струм у вилученій гілці  $I_6$  методом еквівалентного генератора.

Розв'язання задачі виконується поетапно.

1. Визначають  $U_{ab.хх} = E_E$  на схемі рис. 4.11.

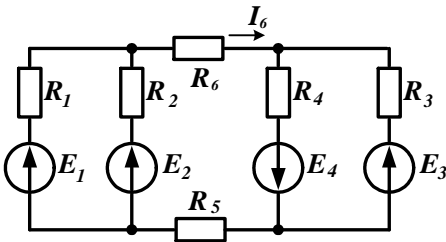


Рисунок 4.10 – Початкова схема

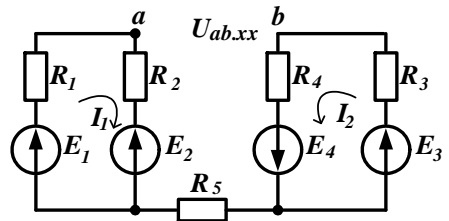


Рисунок 4.11 – Перетворена схема

На схемі (рис. 4.11) одержали два незалежні контури, що складаються з опорів:

$$-R_1, R_2, E_1, E_2 \quad \text{і} \quad -R_4, R_3, E_3, E_4$$

Вибирають додатні напрямки струмів у цих контурах і записують вирази для струмів за законом Ома:

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}, \quad I_2 = \frac{E_3 + E_4}{R_3 + R_4}$$

Виражають потенціал точки «b» через потенціал точки «a»:

$$\varphi_a - I_1 R_2 - E_2 + 0 \cdot R_5 - E_4 + I_2 R_4 = \varphi_b.$$

Вираз для визначення  $U_{ab.xx}$  набирає такого вигляду:

$$U_{ab.xx} = \varphi_a - \varphi_b = I_1 R_2 + E_2 + E_4 - I_2 R_4 = E_E.$$

2. Визначають опір щодо точок «a» і «b»  $R_{ab.xx}$  для схеми, зображеної на рис. 4.12.

Для складання схеми (рис. 4.12) вилучають усі джерела ЕРС  $E$  (рис. 4.11), залишаючи замість них проводи:

$$R_{ab.sb} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_5 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}.$$

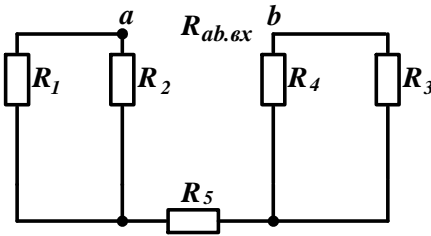


Рисунок 4.12 – Схема для визначення  $R_{ab.xx}$

3. Визначають шуканий струм  $I_6$  (рис. 4.10):

$$I_6 = \frac{E_E}{R_6 + R_{ab.bx}}.$$

### Приклад 2

Визначити струм у вітці з шостим резистором методом еквівалентного генератора (рис. 4.10). Послідовність розрахунку:

1. Зі схеми (рис. 4.13 а) вилучають вітку з резистором  $R_6$ , в якій потрібно розрахувати струм (рис. 4.13 б).

2. На схемі, наведеній на рис. 4.13 б, визначають додатні напрямки струмів у вітках  $I_1$  і  $I_3$ .

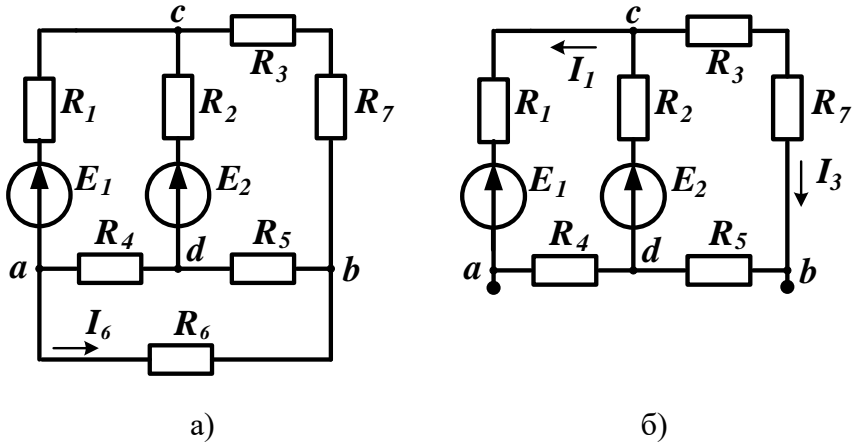


Рисунок 4.13 – Схема для визначення значення струму  $I_6$

3. Напругу між вузлами  $U_{cd}$  розраховують за методом двох вузлів:

$$U_{cd} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_4} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1 + R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_5 + R_7}}.$$

4. Струми у вітках  $I_1$  та  $I_3$  визначають за законом Ома

$$I_1 = \frac{U_{cd} - E_1}{R_1 + R_4}, \quad I_3 = \frac{U_{cd}}{R_3 + R_5 + R_7}.$$

5. Потенціали точок « $a$ » і « $b$ » виражають через струми  $I_1$  та  $I_3$  потенціал точки « $d$ »:

$$\varphi_a = \varphi_d + I_1 R_4, \quad \varphi_b = \varphi_d + I_3 R_5.$$

6. Записують вираз для визначення  $U_{ab}$ :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

7. Складають схему для визначення вхідного опору  $R_{ab,ex}$ . При цьому зі схеми (рис.4.13 б) вилучають усі джерела ЕРС  $E$ , залишаючи замість них проводи (рис. 4.14 а).



8. Зірку резисторів, що складається з  $R_2, R_4, R_5$ , замінюють трикутником резисторів  $R_{ab}, R_{ac}, R_{bc}$  (рис. 4.14 б):

$$R_{ab} = R_5 + R_4 + \frac{R_5 R_4}{R_2}, \quad R_{ac} = R_2 + R_4 + \frac{R_2 R_4}{R_5},$$

$$R_{cb} = R_2 + R_5 + \frac{R_2 R_5}{R_4}.$$

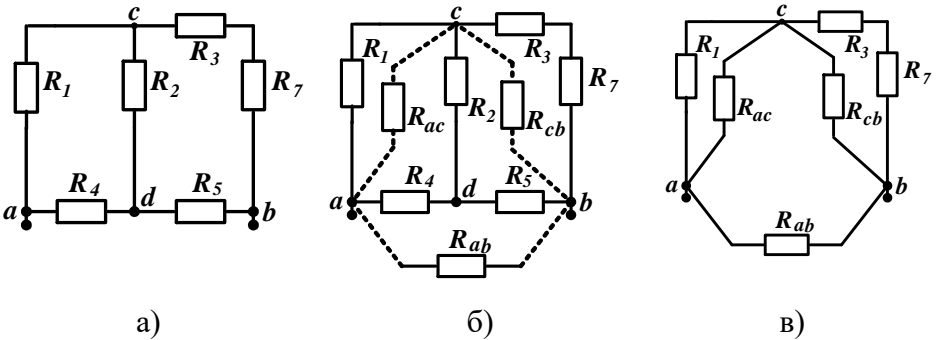


Рисунок 4.14 – Еквівалентне заміщення зірки резисторів на трикутник резисторів

9. Після еквівалентної заміни зірки резисторів трикутником одержимо схему, зображену на рис. 4.14 в. Записують вираз для визначення  $R_{ab.bx}$ :

$$R_{ab.bx} = \frac{R_{ab} \left( \frac{R_1 R_{ac}}{R_1 + R_{ac}} + \frac{(R_3 + R_7) R_{cb}}{R_3 + R_7 + R_{cb}} \right)}{R_{ab} + \frac{R_1 R_{ac}}{R_1 + R_{ac}} + \frac{(R_3 + R_7) R_{cb}}{R_3 + R_7 + R_{cb}}}.$$

10. Записують вираз для визначення струму  $I_6$ :

$$I_6 = \frac{U_{ab}}{R_6 + R_{ab.bx}}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. У чому полягає суть методу накладання?
2. Часткові струми та їх зв'язок із шуканими значеннями струмів у вітках електричного кола.

3. У чому полягає суть методу вузлових потенціалів?
4. Як визначають знаки ЕРС у виразі для міжвузлової напруги?
5. У яких випадках доцільно застосовувати метод вузлових потенціалів?
6. Як визначають значення власної провідності вузлів?
7. Як розраховують значення взаємної провідності віток?
8. Для яких випадків розрахунку електричних кіл використовують метод активного еквівалентного джерела струму?
9. Сформулюйте правила визначення параметрів активного еквівалентного джерела струму.
10. Як можна експериментально визначити параметри еквівалентного генератора?
11. Як можна визначити параметри активного джерела струму розрахунковим шляхом?
12. Як необхідно перетворити початкову схему активного джерела струму для розрахунку його вхідного опору?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 5

### Тема «Основні поняття»

#### План

1. Змінний струм (напруга) і величини, що його характеризують.
2. Середні та діючі значення змінного струму і напруги.
3. Векторні діаграми змінних струмів і напруг.
4. Теоретичні основи комплексного методу розрахунку кіл змінного струму.

#### 5.1. Змінний струм (напруга) і величини, що його характеризують

Змінним називають струм  $i(t)$  (напругу  $u(t)$ ), періодично змінний у часі за довільним законом.

В електроенергетиці поняття «змінний» використовують у вужчому розумінні, а саме: під змінним розуміють струм (напругу), що змінюється в часі за синусоїдальним законом:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + i),$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + u).$$

Графічні діаграми цих функцій мають такий вигляд (рис. 5.1):

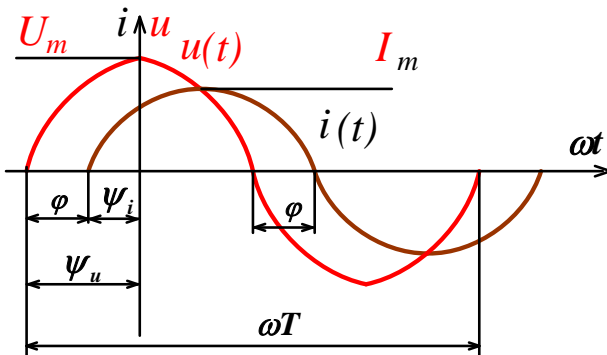


Рисунок 5.1

$T$  — називають періодом. Це час, за який відбувається одне повне коливання;

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Гц]} -$$

частота,

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad [c^{-1}] \text{ або } [\text{рад/с}] - \text{кутова частота } u(t),$$

$i(t)$  або  $u, i$  – миттєві значення функцій, тобто їх значення у довільно вибраній момент часу;

$U_m, I_m$  – амплітудні (максимальні) значення функцій;

$(\omega t + \psi)$  – фаза, що визначає момент часу;

$\psi_u, \psi_i$  – початкові фази функцій, що визначають їх у момент часу  $t=0$ , залежать від вибору початку відліку часу ;

$\varphi = \psi_u - \psi_i$  – кут зсуву фаз (різниця початкових фаз) між напругою і струмом, не залежить від вибору початку відліку часу.

Під час проходження синусоїдального струму  $i = I_m \sin \omega t$  через будь-який лінійний елемент електричного кола напруга на його затискачах також буде синусоїдальною, і навпаки, при синусоїдальній напрузі струм також матиме синусоїдальну форму.

## 5.2. Середні та діючі значення змінного струму і напруги

Середнє значення  $F_{cp}$  довільної функції часу  $f(t)$  за інтервал часу  $T$  визначається формулою

$$F_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt.$$

Чисельно середнє значення  $F_{cp}$  дорівнює висоті прямокутника, рівновеликого за площею фігури, обмеженої кривою  $f(t)$ , віссю  $t$  і межами інтегрування  $0 - T$ .

Для синусоїдальної функції середнє значення за повний період  $T$  (або за ціле число повних періодів) дорівнює нулю, оскільки площі додатної і від'ємної півхвиль цієї функції однакові.

Для змінного синусоїдального струму (напруги) середнє значення визначають за половину періоду ( $T/2$ ) між двома нульовими значеннями:

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \cdot dt = \frac{2I_m}{\omega T} \int_0^{\pi} \sin \omega t \cdot d(\omega t) =$$

$$= \frac{2I_m}{2\pi \cdot T} \left| -\cos \omega t \right|_0^{\pi} \approx \frac{2I_m}{\pi} \approx 0,637 \cdot I_m.$$

*Діюче значення* змінного струму (напруги) визначають як середньоквадратичне значення функції за період:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t \right) dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{1}{2} T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot I_m.$$

Параметри електричної енергії на змінному струмі (кількість енергії, потужність) характеризують діючими значеннями напруги  $U$  і струму  $I$ . Тому в електроенергетиці прийнято усі теоретичні розрахунки і експериментальні вимірювання виконувати для діючих значень струмів і напруги.

Коефіцієнт амплітуди	Коефіцієнт форми
$K_a = \frac{I_m}{I} = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2} \approx 1,41$	$K_\phi = \frac{I}{I_{cp}} = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$

### 5.3. Векторні діаграми змінних струмів і напруги

Із курсу математики відомо, що будь-яку синусоїдальну функцію часу, наприклад  $i(t) = I_m \sin(t + \psi)$ , можна зобразити вектором, що обертається, при додержанні таких умов:

- а) довжина вектора у масштабі дорівнює амплітуді функції  $I_m$  ;
- б) початкове положення вектора при  $t = 0$  визначається початковою фазою  $\psi$  ;
- в) вектор рівномірно обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , що дорівнює кутовій частоті функції.

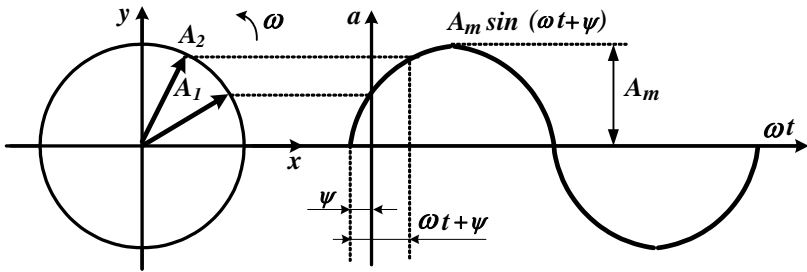


Рисунок 5.2

При додержанні названих умов проекція вектора, що обертається, на вертикальну вісь у в системі координат  $xy$  в будь-який момент часу  $t'$  дорівнює миттєвому значенню функції  $i(t')$ , отже,  $i = I_m \sin(t + \psi)$ .

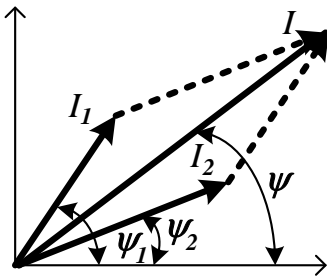


Рисунок 5.3 – Векторна діаграма струмів

Припустимо, що задано два струми, записані у вигляді синусоїдальних функцій:

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1),$$

$$i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Обчислимо їх суму у вигляді векторної діаграми (рис. 5.3).

### 5.4. Теоретичні основи комплексного методу розрахунку кіл змінного струму

Зобразимо вектор струму на комплексній площині (рис. 5.4).

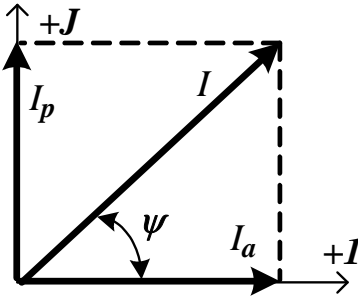


Рисунок 5.4 – Вектор струму на комплексній площині

Із курсу математики відомо, що комплексне число може бути подане у таких трьох формах:

- алгебраїчний;
- тригонометричний;
- показниковий.

Запишемо струм у комплексній формі:

$$\dot{I} = I_a + jI_p = I \cos \psi + jI \sin \psi = I e^{j\psi}.$$

В основі переходу від однієї форми комплексного числа до іншої лежить відома з математики формула Ейлера:

$$e^{j\psi} = \cos \psi + j \sin \psi.$$

Тут позначено:

$j = \sqrt{-1}$  – уявне одиничне число;

$I$  – модуль комплексного числа;

$\psi$  – аргумент комплексного числа;

$I_a$  – дійсна частина комплексного числа;

$I_p$  – уявна частина комплексного числа.

Співвідношення між коефіцієнтами різних форм комплексного числа випливають з формули Ейлера:

$$I_a = I \cos \psi, \quad I_p = I \sin \psi, \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}, \quad \psi = \arctg \frac{I_p}{I_a}.$$

Запишемо числові співвідношення, що найчастіше використовуються:

$$e^{j0} = 1, \quad e^{j180} = -1, \quad e^{j90} = j, \quad e^{-j90} = -j, \quad j^2 = -1, \quad \frac{1}{j} = -j.$$

Під час розрахунку кіл змінного струму виникає необхідність виконання різного роду математичних операцій із синусоїдальними функціями. При заміні синусоїдальних функцій комплексними числами відповідні математичні операції виконують з комплексними числами.

Припустимо, що задано два числа, записані в алгебраїчній показниковій формі. Розглянемо основні математичні операції з комплексними числами.

$$\dot{e} A = a_1 + ja_2 = Ae^{j\alpha}, \quad \dot{B} = b_1 + jb_2 = Be^{j\beta}.$$

Додавання (віднімання) комплексних чисел виконують в алгебраїчній формі:

$$\dot{A} + \dot{B} = (a_1 + ja_2) + (b_1 + jb_2) = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2).$$

Множення (ділення) комплексних чисел може виконуватися як в алгебраїчній, так і в показниковій формі:

$$\dot{A} \cdot \dot{B} = (a_1 + ja_2) \cdot (b_1 + jb_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1),$$

$$\dot{A} \cdot \dot{B} = Ae^{j\alpha} \cdot Be^{j\beta} = A \cdot Be^{j(\alpha+\beta)},$$

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{(a_1 + ja_2)}{(b_1 + jb_2)} = \frac{(a_1 + ja_2) \cdot (b_1 - jb_2)}{(b_1 + jb_2) \cdot (b_1 - jb_2)} =$$

$$= \frac{(a_1 + ja_2) \cdot (b_1 - jb_2)}{(b_1 + jb_2) \cdot (b_1 - jb_2)} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2},$$

$$\frac{\dot{A}}{\dot{B}} = \frac{Ae^{j\alpha}}{Be^{j\beta}} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}.$$



Піднесення до степеня (добування кореня) комплексного числа виконують тільки в показниковій формі:

$$\dot{A} = (A \cdot e^{j\alpha})^n = A^n \cdot e^{jna}, \quad \dot{A} = \sqrt{A \cdot e^{j\alpha}} = \sqrt{A} \cdot e^{j\frac{\alpha}{2}}.$$

Установимо порядок диференціювання та інтегрування синусоїдальних функцій у комплексній формі. Візьмемо певну функцію струму й її комплексне зображення:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi) \Leftrightarrow \dot{I} = I e^{j\psi}.$$

Похідна й інтеграл від цієї функції та їх комплексні зображення будуть однаковими:

$$\frac{di}{dt} = I_m \omega \cdot \cos(\omega t + \psi) = I_m \omega \cdot \sin(\omega t + \psi + 90^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow I \cdot \omega \cdot e^{j(\psi+90^\circ)} = I \cdot \omega \cdot e^{j\psi} e^{j90^\circ} = j\omega \cdot \dot{I},$$

$$\int i \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega} \cdot \cos(\omega t + \psi) = \frac{I_m}{\omega} \cdot \sin(\omega t + \psi - 90^\circ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{\omega} e^{j(\psi-90^\circ)} = \frac{I}{\omega} e^{j\psi} e^{-j90^\circ} = \frac{\dot{I}}{j\omega}.$$

Таким чином, диференціюванню синусоїдальної функції часу відповідає в комплексній формі множення її комплексного зображення на множник  $j\omega$ , а інтегруванню – відповідно ділення на той самий коефіцієнт:

$$\frac{di}{dt} \Leftrightarrow j\omega \dot{I}, \quad \int idt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \dot{I}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. Визначте значення струму  $i(t) = 10 \sin(314t + 30)$  у момент часу  $t = 0,005$  с.

2. Сформулюйте визначення і запишіть вирази для середнього і діючого значень струму. Визначте середнє і діюче значення струму за п. 1.

3. Покажіть векторне зображення струму за п. 3.1. Додайте цей струм до струму  $i(t) = 5 \sin(314t - 30)$ .

4. Чи можна на одній векторній діаграмі зображувати синусоїдальні струми, що мають різні частоти?

5. Що називають топографічною векторною діаграмою електричного кола? Сформулюйте правила побудови векторних діаграм.

6. Для яких дій над синусоїдальним струмом зручно використовувати комплексну алгебраїчну форму його подання?

7. Зобразіть струм за п. 1. у комплексній алгебраїчній формі. Додайте його до струму за п. 3.

8. Заданий струм  $\dot{I}_m = 0,707 + j0,707$ . Покажіть цей струм за допомогою дійсної синусної функції.

9. Наведіть співвідношення між струмами і напругою на  $R$ -,  $L$ -, і  $C$ - елементах у комплексній показниковій формі.

10. Які фазові співвідношення між струмом і напругою на  $R$ -,  $L$ -, і  $C$ - елементах?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 6

### Тема «Властивості ідеальних елементів у колі змінного синусоїдального струму»

#### План

1. Змінний струм в однорідних ідеальних елементах.
2. Електричне коло з послідовним з'єднанням  $R$ -,  $L$ - і  $C$ -елементів.

#### 6.1. Змінний струм в однорідних ідеальних елементах

Існує три типи ідеальних схемних елементів:

- резистор  $R$ ;
- котушка індуктивності  $L$ ;
- конденсатор  $C$ .

Розглянемо процеси в колі з кожним із вищеназваних елементів окремо.

##### 6.1.1. Коло з ідеальним резистором $R$

Нехай до кола з резистором  $R$  (рис. 6.1) прикладена змінна напруга:

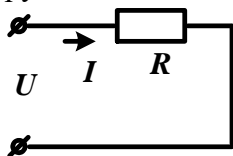


Рисунок 6.1

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{U} = U e^{j0}.$$

Струм і напруга на затискачах резистора зв'язані між собою за фізичним законом Ома, тобто

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{I} = I e^{j0},$$

де  $I_m = \frac{U_m}{R}$ ,  $I = \frac{U}{R}$  – рівняння закону Ома для амплітудних і діючих значень функцій.

Кут зсуву фаз між напругою і струмом  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 = 0$  відповідно в колі з резистором  $R$  струм і напруга збігаються за фазою.

Комплексний опір резистора є суто уявним:

Миттєва потужність в колі з резистором  $R$  завжди додатна:

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m I_m \sin^2 \omega t \geq 0.$$

Це означає, що в колі з резистором  $R$  проходить лише процес перетворення електричної енергії в інші види (активний процес). З цієї причини опір резистора  $R$  на змінному струмі називають активним.

Графічні діаграми функцій часу  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  зображені на рис. 6.2, а векторна діаграма напруги і струму – на рис. 6.3.

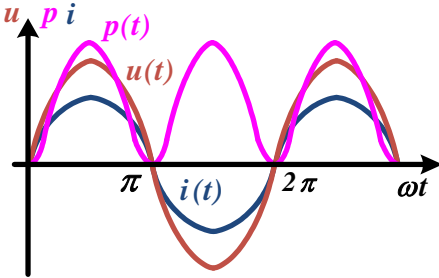


Рисунок 6.2 – Часова діаграма

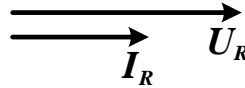


Рисунок 6.3 – Векторна діаграма

### 6.1.2. Коло з ідеальною котушкою $L$

Припустимо, що до кола з ідеальною котушкою  $L$

(рис. 6.4) прикладена змінна напруга:  $u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{U} = Ue^{j\omega t}$ .

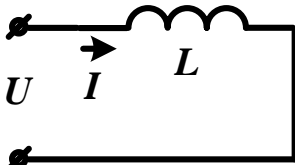


Рисунок 6.4 – Коло з ідеальною котушкою

Струм і напруга на затискачах котушки зв'язані між собою за законом електромагнітної індукції

$$u_L = -e = L \frac{di}{dt}, \text{ звідси випливає:}$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{1}{L} \int u_L \cdot dt = \frac{U_m}{L} \int \sin \omega t \cdot dt = \frac{U_m}{\omega L} (-\cos \omega t) = \\ &= I_m \sin(\omega t - 90^\circ) \Leftrightarrow \dot{I} = Ie^{-j90^\circ}. \end{aligned}$$

Рівняння закону Ома для амплітудних і діючих значень функцій:  $I_m = \frac{U_m}{X_L}, I = \frac{U}{X_L},$

де  $X_L = \omega L$  – індуктивний реактивний опір котушки.

Кут зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - (-90^\circ) = 90^\circ$ , тобто в колі з котушкою  $L$  струм відстає від напруги (напруга випереджає струм) на кут  $90^\circ$ .

Комплексний опір котушки є суто уявним і позитивним:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j0}}{Ie^{-j90^\circ}} = \frac{U}{I}e^{j90^\circ} = j\omega L = jX_L.$$

Миттєва потужність кола змінюється за синусоїдальним законом із частотою  $2\omega$ :

$$p = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t - 90^\circ) = \frac{U_m I_m}{2} \cos 90^\circ - \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t - 90^\circ) = -\frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t.$$

Це означає, що в колі з котушкою  $L$  відбувається тільки періодичний процес обміну енергією між магнітним полем котушки  $W_L = \frac{Li^2}{2}$  і джерелом (реактивний процес).

З цієї причини опір котушки змінного струму  $X_L = \omega L$  називають реактивним.

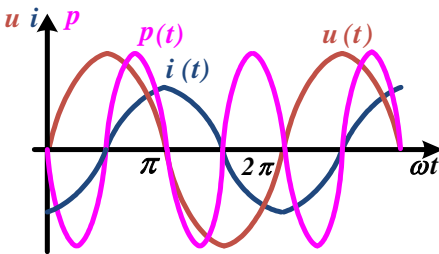


Рисунок 6.5 – Графічні діаграми функцій часу  $u(t), i(t), p(t)$

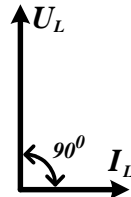


Рисунок 6.6 – Векторна діаграма напруги і струму

Графічні діаграми функцій часу  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  зображені на рис. 6.5, а векторна діаграма напруги і струму – на рис. 6.6.

### 6.1.3. Коло з ідеальним конденсатором $C$

Нехай до кола з ідеальним конденсатором  $C$  (рис. 6.7) прикладена змінна напруга:

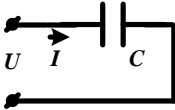


Рисунок 6.7

$$u = U_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{U} = U e^{j0}$$

Струм і напруга на затискачах конденсатора зв'язані між собою фізичним законом збереження заряду:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} = U_m C \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \frac{U_m}{\omega C} \cos \omega t =$$

$$I_m \sin(\omega t + 90^\circ) \Leftrightarrow \dot{I} = I e^{j90^\circ},$$

де  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  – реактивний ємнісний опір.

Рівняння закону Ома для амплітудних і діючих значень функцій

$$I_m = \frac{U_m}{X_C}, \quad I = \frac{U}{X_C}.$$

Кут зсуву фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i = 0 - 90^\circ = -90^\circ$ , тобто в колі з конденсатором  $C$  струм випереджає напругу (напруга відстає від струму) на кут  $90^\circ$ .

Комплексний опір конденсатора є суто уявним і від'ємним:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j0}}{I e^{j90^\circ}} = \frac{U}{I} e^{-j90^\circ} = -j \frac{1}{\omega C} = -j X_C.$$

Миттєва потужність кола змінюється за синусоїдальним законом із частотою  $2\omega$ .

$$\begin{aligned}
 p &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin (\omega t + 90^\circ) = \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} \cos (-90^\circ) - \frac{U_m I_m}{2} \cos (2\omega t + 90^\circ) = \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} \sin 2\omega t.
 \end{aligned}$$

Це означає, що в колі з конденсатором  $C$  відбувається тільки періодичний процес обміну енергією між електричним полем конденсатора і джерелом (реактивний процес).

З цієї причини опір конденсатора змінного струму  $X_C = \frac{1}{\omega C}$  називають реактивним.

Графічні діаграми функцій часу  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$  показані на рис. 6.8, а векторна діаграма напруги і струму – на рис. 6.9.

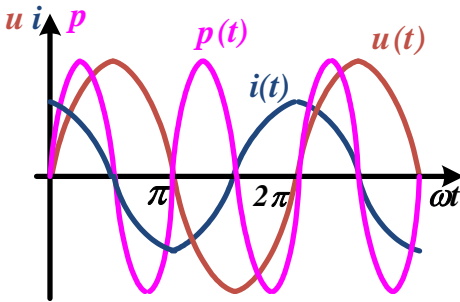


Рисунок 6.8 – Графічні діаграми функцій часу  $u(t)$ ,  $i(t)$ ,  $p(t)$

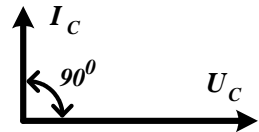


Рисунок 6.9 – Векторна діаграма напруги і струму

## 6.2. Електричне коло з послідовним з'єднанням елементів $R$ , $L$ і $C$

Припустимо, що на заданій схемі з послідовним з'єднанням елементів  $R$ ,  $L$  і  $C$  (рис. 6.10) проходить змінний струм

$$i = I_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{I} = I e^{j\omega t}.$$

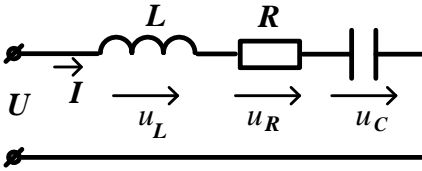


Рисунок 6.10 – Схема з послідовним з'єднанням елементів  $R, L$  і  $C$

За другим законом Кірхгофа для миттєвих значень функцій отримаємо рівняння в диференціальній формі:

$$u = u_L + u_R + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt.$$

Те саме рівняння в комплексній формі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_L + \dot{U}_R + \dot{U}_C = \dot{I}R + \dot{I}jX_L - \dot{I}jX_C = \\ &= \dot{I}(R + jX_L - jX_C) = \dot{I}\underline{Z}, \end{aligned}$$

де  $\underline{Z} = (R + jX_L - jX_C)$  – комплексний опір;

$X = X_L - X_C$  – реактивний опір;

$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  – модуль комплексного опору або повний опір;

$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R}$  – аргумент комплексного опору або

кут зсуву фаз між напругою і струмом на вході схеми.

При  $(X_L - X_C) > 0$  фазний кут  $\varphi > 0$ , при цьому коло має активно-індуктивний характер, а при  $(X_L - X_C) < 0$  і  $\varphi < 0$  – коло має активно-ємнісний характер.

Рівняння закону Ома для послідовної схеми матиме вигляд

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{\dot{U}}{R + j(X_L - X_C)} \quad \text{– у комплексній формі;}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \quad \text{– у звичайній формі для моду-}$$

лів.



Векторна діаграма струму і напруги при  $\varphi > 0$  показана на рис. 6.11.

У цьому колі на змінному струмі відбуватимуться одночасно два фізичні процеси: перетворення енергії в інші види в резисторі  $R$  (активний процес) і взаємний обмін енергією між магнітним полем котушки, електричним полем конденсатора і джерелом енергії (реактивний процес). Отже,

$$\dot{U} = U_a + jU_p, \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2} = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$

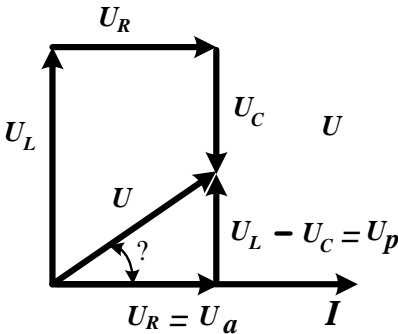


Рисунок 6.11

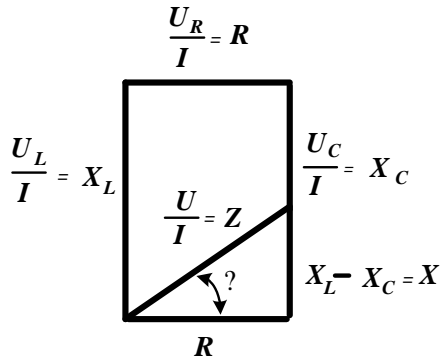


Рисунок 6.12

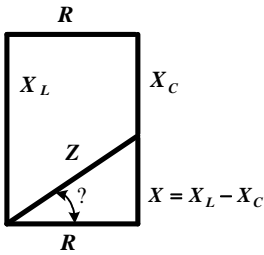


Рисунок 6.13

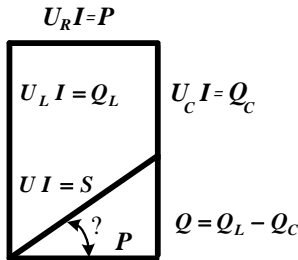


Рисунок 6.14

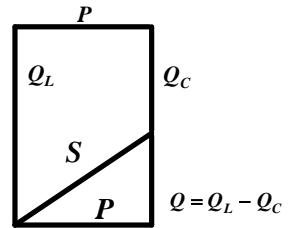


Рисунок 6.15

### Контрольні питання і завдання

1. Запишіть співвідношення між струмами і напругою на  $R$ -,  $L$ -, і  $C$ - елементах у комплексній показниковій формі.
2. Які фазові співвідношення між струмом і напругою на  $R$ -,  $L$ -, і  $C$ - елементах?

3. Що привело до необхідності ввести поняття комплексного опору і комплексної провідності  $R$ -,  $L$ -, і  $C$ - елементів електричного кола?

4. Наведіть співвідношення, що визначають комплексний опір  $R$ ,  $L$  і  $C$  елементів. Сформулюйте фізичне значення уявної одиниці  $j$ .

5. Запишіть співвідношення між складовими комплексного опору.

6. Сформулюйте закон Ома в комплексній формі.

7. Чи можна при аналізі електричних кіл синусоїдального струму скористатися методами, що використовують у в колі постійного струму?

8. На схемі рис. 6.10 напруга змінюється за законом:  $u(t) = 10\sin \cdot 314t$ ,  $R = 10$  Ом,  $L = 0,1$  Гн, а  $C = 50,7 \cdot 10^6$  Ф. Визначте комплексний опір кола у алгебраїчній і показниковій формах.

9. Використовуючи дані п. 4.6, визначте струм кола рис. 6.10.

10. Використовуючи дані п. 4.6, визначте напругу на  $R$ -,  $L$ -, і  $C$ - елементах кола на рис. 6.10.

11. Що характеризує миттєва потужність кола?

12. Наведіть співвідношення для активної потужності кола. Чи може активна потужність набувати від'ємних значень?

13. Наведіть співвідношення для реактивної потужності кола. Який фізичний процес характеризує реактивна потужність? Чи може вона набувати від'ємних значень?

14. Що визначає коефіцієнт потужності кола? Чому його намагаються підвищити?

15. Чи може миттєва потужність кола набувати від'ємних значень?

16. Наведіть співвідношення між повною, активною і реактивною потужностями кола.

17. Наведіть комплексне зображення повної потужності.

## Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 7

### Тема «Еквівалентні перетворення електричних кіл змінного струму»

#### План

1. Електричне коло з паралельним з'єднанням  $R$ -,  $L$ - і  $C$ -елементів.
2. Еквівалентні перетворення опорів і провідностей.

#### 7.1. Електричне коло з паралельним з'єднанням $R$ -, $L$ - і $C$ -елементів.

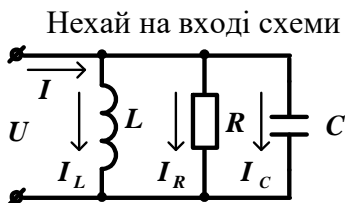


Рисунок 7.1

За 1-м законом Кірхгофа для миттєвих значень функцій одержимо рівняння в диференціальній формі:

$$i = i_L + i_R + i_C = \frac{1}{L} \int idt + \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}.$$

Те саме рівняння в комплексній формі набере такого вигляду:

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_R + \dot{I}_C = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX_L} + \frac{\dot{U}}{-jX_C} = \dot{U}(G - jB_L + jB_C) = \dot{U}\underline{Y},$$

де  $\underline{Y} = G - jB_L + jB_C = G - jB$  – комплексна провідність;

$G = \frac{1}{R}$  – активна провідність;

$B_L = \frac{1}{X_L}$  – реактивна індуктивна провідність;

$B_C = \frac{1}{X_C}$  – реактивна провідність ємності;

$B = B_L - B_C$  – реактивна (еквівалентна) провідність;

$\underline{Y} = \sqrt{G^2 + B^2}$  – модуль комплексної провідності або повна провідність;

$\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}$  – аргумент комплексної провідності або

кут зсуву фаз між напругою і струмом на вході схеми.  $(B_L - B_C) > 0$  і  $\varphi > 0$ .

При  $(B_L - B_C) > 0$  і  $\varphi > 0$  коло в цілому має активно-емнісний характер.

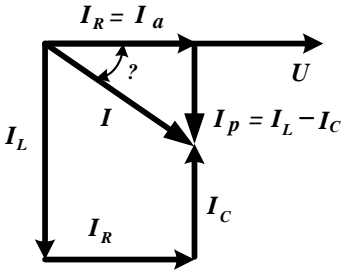


Рисунок 7.2

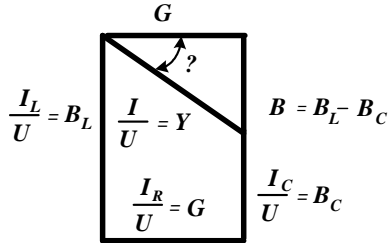


Рисунок 7.3

Векторна діаграма струмів і напруги при  $\varphi > 0$  показана на рис. 7.2.

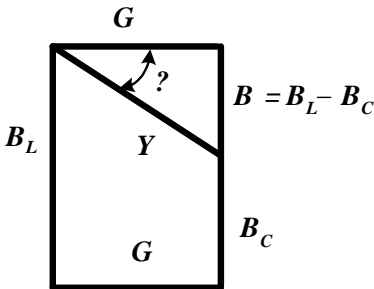


Рисунок 7.4

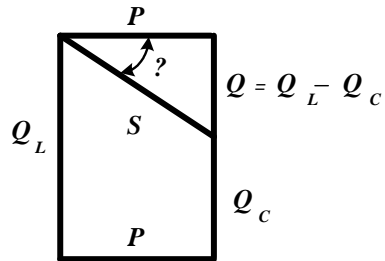


Рисунок 7.5

## 7.2. Еквівалентні перетворення опорів і провідності

Під час розрахунку електричних кіл змінного струму реальні елементи кола (приймачі) замінюють еквівалентними схемами заміщення, що складаються з комбінації ідеальних схемних елементів  $R, L$  і  $C$  або  $G, B$ .

Припустимо, що певний приймач енергії має в цілому активно-індуктивний характер (наприклад, електродвигун). Такий приймач може бути поданий двома простішими схемами заміщення, що складаються з двох схемних елементів:

- $R$  і  $L$  – з'єднані послідовно (рис. 7.7);
- $G$ ,  $B$  – з'єднані паралельно (рис. 7.8).

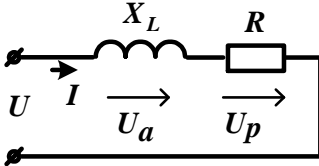


Рисунок 7.7

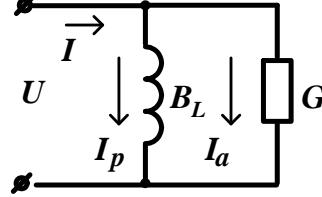


Рисунок 7.8

Обидві схеми будуть еквівалентними одна одній за умови рівності параметрів режиму на вході, тобто напруги і струму.

Для послідовної схеми (рис. 7.7) справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{U}}{R + jX_L} = \frac{\dot{U}(R - jX_L)}{(R + jX_L) \cdot (R - jX_L)} = \frac{\dot{U}(R - jX_L)}{R^2 + X_L^2} = \\ &= \dot{U} \cdot \left( \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} \right) = \dot{U} \cdot \underline{Y}. \end{aligned}$$

Для паралельної схеми (рис. 7.8) справедливі співвідношення:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{U} \cdot \underline{Y} = \dot{U} \cdot (G - jB_L), \\ \dot{U} &= \frac{\dot{I}}{G - jB_L} = \frac{\dot{I}(G + jB_L)}{(G - jB_L) \cdot (G + jB_L)} = \frac{\dot{I}(G + jB_L)}{G^2 + B_L^2} = \\ &= \dot{I} \cdot \left( \frac{G}{G^2 + B_L^2} + j \frac{B_L}{G^2 + B_L^2} \right) = \dot{I} \cdot \underline{Z}. \end{aligned}$$

Порівнюючи праві частини рівнянь для  $\dot{I}$  і  $\dot{U}$ , одержимо співвідношення між параметрами еквівалентних схем:

$$G = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{Z^2}, \quad B = \frac{X}{R^2 + X_L^2} = \frac{X}{Z^2},$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B_L^2} = \frac{G}{Y^2}, \quad X = \frac{B_L}{G^2 + B_L^2} = \frac{B_L}{Y^2}.$$

Із аналізу одержаних рівнянь необхідно зробити висновок, що у загальному випадку  $R \neq \frac{1}{G}$  і  $X \neq \frac{1}{B}$ , як це має місце для кіл постійного струму.

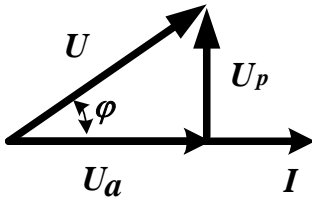


Рисунок 7.9 – Послідовна схема заміщення

Послідовній схемі заміщення (рис. 7.7) відповідає подання вектора напруги у вигляді суми двох складових: активної складової  $U_a$ , що збігається

з вектором струму  $I$ , і реактивної складової  $U_p$ , перпендикулярної до вектора струму (рис. 7.9).

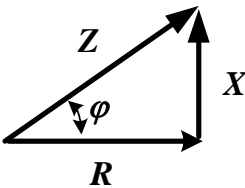


Рисунок 7.10 – Діаграма опорів

Схемі, зображеній на рис. 7.7 відповідає діаграма опорів (рис. 7.10). Із одержаного трикутника напруги рис. 7.9 випливають співвідношення:

$$U_a = U \cos \varphi, \quad U_p = U \sin \varphi, \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}.$$

Якщо сторони трикутника напруги поділити на струм  $I$ , то одержимо новий трикутник опорів, подібний до початкового, гіпотенузою якого є повний опір  $Z$ , а катетами – активний опір  $R$  і реактивний опір  $X$ .

Із трикутника опорів (рис. 7.10) одержимо такі співвідношення:

$$R = Z \cos \varphi, \quad X = Z \sin \varphi, \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

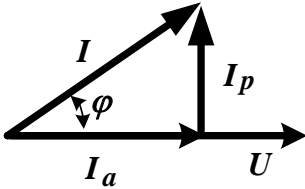


Рисунок 7.11

Паралельній схемі заміщення (рис. 7.8) відповідає подання вектора струму у вигляді суми двох складових: активної складової  $I_a$ , що збігається з вектором напруги  $U$ , і реактивної складової  $I_p$ , що перпендикулярна до вектора  $U$  (рис. 7.11).

Із одержаного трикутника струмів рис. 7.11 випливають співвідношення:

$$I_a = I \cos \varphi, \quad I_p = I \sin \varphi, \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}.$$

Якщо сторони трикутника струмів (рис 7.11) поділити на напругу  $U$ , то одержимо новий трикутник провідності (рис. 7.12), подібний до початкового.

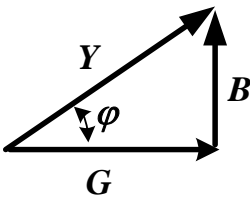


Рисунок 7.12

У цьому трикутнику гіпотенузою буде повна провідність  $Y$ , а катетами – активна провідність  $G$  і реактивна провідність  $B$ . Із трикутника провідності (рис. 7.12) маємо співвідношення:

$$G = Y \cos \varphi, \quad B = Y \sin \varphi, \quad Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. Як обчислюють струм у колі з  $R$ -,  $L$ - і  $C$ - елементами?
2. Яке співвідношення між активною, реактивною і повною потужностями в колі з паралельним з'єднанням елементів?
3. У яких випадках доцільно застосовувати комплексну провідність  $R$ -,  $L$ - і  $C$ - елементів кіл?



4. Запишіть співвідношення, що визначають комплексну провідність  $R$ -,  $L$ - і  $C$ - елементів.

5. Покажіть, який існує зв'язок між опорами і провідністю в електричному колі?

6 Чому дорівнюють модуль і аргумент комплексної провідності в паралельному колі з  $R$ -  $L$ -,  $R$ -  $C$ -,  $L$ -  $C$ -,  $R$ -  $L$  -  $C$ - елементами?

7. Як пов'язані опори і провідність однієї й тієї самої ділянки?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 8

### Тема «Застосування законів Кірхгофа. Резонанс»

#### План

1. Основи комплексного розрахунку кіл синусоїдального струму.
2. Резонанс в електричних колах.

#### 8.1. Основи комплексного розрахунку кіл синусоїдального струму

Розрахунок кіл змінного синусоїдального струму може здійснюватися шляхом операцій із комплексами, що **символічно зображують** синусоїдальні ЕРС, напруги і струмів. Символічний метод розрахунку кіл синусоїдального струму ґрунтується на законах Кірхгофа і законі Ома в комплексній формі. Рівняння, що виражають закони Кірхгофа в комплексній формі, мають абсолютно такий самий вигляд, як і відповідні рівняння для кіл постійного струму. Лише струми, ЕРС, напруга і опори входять до рівняння у вигляді комплексних величин.

Перший закон Кірхгофа в комплексній формі

$$\sum \dot{I} = 0.$$

Другий закон Кірхгофа в комплексній формі

$$\sum \dot{U} = \sum \dot{E}.$$

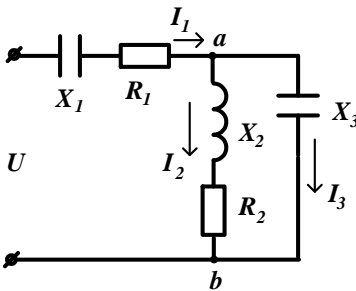


Рисунок 8.1 – Схема розгалуженого електричного кола

Розглянемо застосування законів Кірхгофа для розгалуженого електричного кола (рис. 8.1), для якого задані такі параметри:

$$U = 120 \text{ В}, \quad X_1 = 100 \text{ Ом}, \\ R_1 = 25 \text{ Ом}, \quad X_2 = 50 \text{ Ом}, \\ R_2 = 20 \text{ Ом}, \quad X_3 = 50 \text{ Ом}.$$

Визначити струми у вітках електричного кола.

Розв'язання

1. Запишемо вираз для визначення еквівалентного опору кола:

$$\underline{Z}_{EKK} = R_1 - jX_1 + \frac{(R_2 + jX_2)(-jX_3)}{R_2 + jX_2 - jX_3},$$
$$\underline{Z}_{EKK} = 25 - j100 + \frac{(20 + j50)(-j50)}{20 + j50 - j50} = 150 - j150 \text{ Ом.}$$

2. Беручи початкову фазу джерела за нуль, запишемо  $\dot{U} = Ue^{j0} = 120 \text{ В.}$

3. Визначимо перший струм за законом Ома:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{EKK}} = \frac{120}{150 - j150} = 0,4 + j0,4 \text{ А.}$$

4. Обчислимо напругу між вузлами «a» і «b»  $U_{ab}$ :

$$\dot{U}_{ab} = \dot{U} - \dot{I}_1(R_1 - jX_1) = 120 - (0,4 + j0,4)(25 - j100) = 70 + j30.$$

5. Тоді струми у другій і третій вітках розрахуємо за законом Ома:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{R_2 + jX_2} = \frac{70 + j30}{20 + j50} = 1 - j1 \text{ А,}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{-jX_3} = \frac{70 + j30}{-j50} = -0,6 + j1,4 \text{ А.}$$

6. Складемо рівняння балансу потужності:

$$\sum \underline{S}_{ДЖЕР} = \sum \underline{S}_{НАГР},$$

$$\sum \underline{S}_{ДЖЕР} = \dot{U} \dot{I}_1 = 120(0,4 - j0,4) = (48 - j48) \text{ ВА} =$$
$$= P_{ДЖЕР} - jQ_{ДЖЕР},$$

$$\sum P_{\text{НАГР}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = (0,4^2 + 0,4^2) 25 + (1^2 + 1^2) 20 = 8 + 40 = 48 \text{ (Вт)},$$

$$\begin{aligned} \sum Q_{\text{НАГР}} &= I_1^2 (-X_1) + I_2^2 X_2 + I_3^2 (-X_3) = \\ &= (0,4^2 + 0,4^2)(-100) + (1^2 + 1^2) 50 + (0,6^2 + 1,4^2)(-50) = \\ &= -32 + 100 - 116 = -48 \text{ (Вт)}. \end{aligned}$$

## 8.2. Резонанс в електричних ланцюгах

### 8.2.1. Визначення резонансу

В електричному колі, що містить котушки індуктивності  $L$  і конденсатори  $C$ , можливі вільні гармонійні коливання енергії

між магнітним полем котушки  $W_M = \frac{Li^2}{2}$  і електричним полем

конденсатора  $W_E = \frac{Cu^2}{2}$ .

У резонансному режимі коливання енергії між магнітним і електричним полями замикаються усередині кола, обмін енергією між джерелом і колом відсутній, а уся енергія, що надходить від джерела, перетворюється в інші види, тобто електричне коло щодо джерела енергії поводить як чистий активний опір  $R$  (активна провідність  $G$ ).

На цій підставі умову для резонансного режиму можна сформулювати через параметри елементів схеми, а саме: вхідний опір і відповідно вхідна провідність схеми з боку виводів джерела енергії повинні мати суто активний характер:  $Z_{\text{BX}} = R_{\text{BX}}$ ;  $Y_{\text{BX}} = G_{\text{BX}}$ ;  $X_{\text{BX}} = 0$ ;  $B_{\text{BX}} = 0$  або в комплексній формі  $\text{Im} [Z_{\text{BX}}] = 0$ ,  $\text{Im} [Y_{\text{BX}}] = 0$ ,  $\text{Im} [Z_{\text{BX}}] = 0$ ,  $\text{Im} [Y_{\text{BX}}] = 0$ .

### 8.2.2. Резонанс напруги

Резонанс у колі з послідовним з'єднанням джерела енергії та реактивних елементів  $L$  і  $C$  дістав назву резонансу напруги. Найпростіша схема такого кола показана на рис. 8.2.

Комплексний вхідний опір схеми:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = R + j(X_L - X_C) = R.$$

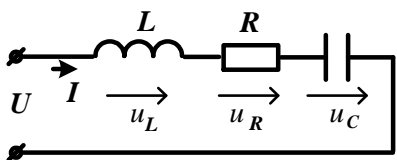


Рисунок 8.2 – Коло з послідовним з'єднанням джерела енергії та реактивних елементів  $L$  і  $C$

вхідний опір схеми:

Умова резонансу напруги:

$$X_E = X_L, X_C = 0$$

або

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0,$$

звідки  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансна

або власна частота.

Із одержаної рівності випливає, що резонансного режиму в колі можна досягти зміною параметрів елементів  $L$  і  $C$  або частоти джерела  $\omega$ .

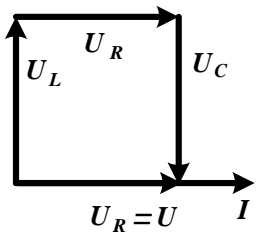


Рисунок 8.3 – Векторна діаграма напруги і струму

У резонансному режимі повний опір схеми має мінімальне значення і дорівнює активному опору:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R,$$

а струм максимальний і збігається за фазою з напругою джерела:

$$I = U / R, \varphi = 0.$$

Векторна діаграма напруги і струму показана на рис. 8.3. Напруга на резисторі дорівнює напрузі джерела:  $U_R = IR = U$ .

Напруга на реактивних елементах однакова за модулем, протилежна за фазою і взаємно компенсує одна одну:

$$U_L = I X_L = \frac{U}{R} X_L, U_C = -I X_C = -\frac{U}{R} X_C.$$

Напруга на реактивних елементах

$$U_L = U_C = U \frac{X_L}{R} = U \frac{X_C}{R}$$

може суттєво перевищувати напругу джерела  $U$  за умови, що  $X_L = X_C \gg R$ .

Електричне коло з послідовним з'єднанням елементів  $R$ ,  $L$ ,  $C$  в техніці одержало назву послідовного коливального контуру. Властивості такого кола, як коливальний контур, характеризують такі параметри:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ – резонансна частота;}$$

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \text{ – хвильовий опір;}$$

$$Q = \frac{\rho}{R} \text{ – добротність контуру.}$$

Чим більшою є добротність контуру  $Q$ , тим виразніше виявляються в ньому резонансні явища, наприклад, напруги на реактивних елементах більші за напругу джерела в  $Q$  разів:  $U_L = U_C = UQ$ .

Під час зміни частоти джерела  $\omega = \text{var}$  змінюється опір реактивних елементів і, як наслідок, змінюватимуться струм у колі та напруги на окремих ділянках.

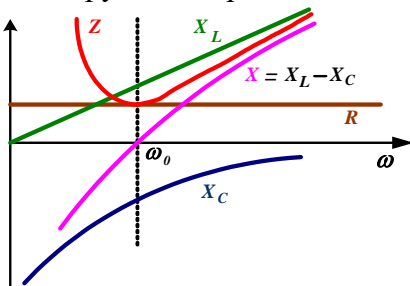


Рисунок 8.5 – Частотні характеристики

Частотними характеристиками контуру називають залежності опорів окремих елементів і ділянок від частот  $X_L(\omega)$ ,  $X_C(\omega)$ ,  $Z(\omega)$ ,  $X_C(\omega)$  (рис. 8.5).

Резонансними характеристиками називають залежності режимних параметрів від частоти (рис. 8.6):

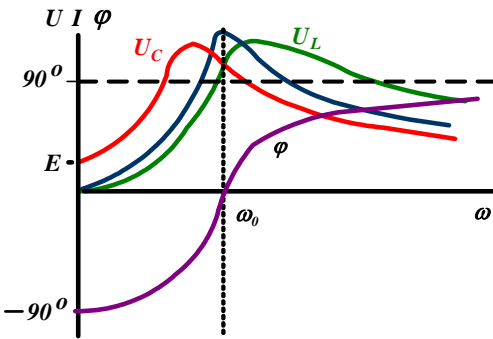


Рисунок 8.6 – Резонансні характеристики

замкнутої на приймальному кінці на навантаження (у режимі холостого ходу), все коло може виявитися в резонансному режимі, при цьому на окремих ділянках кола може з'явитися висока напруга.

### 8.2.3. Резонанс струмів

Резонанс у колі з паралельним з'єднанням джерела енергії та реактивних елементів  $L$  і  $C$  дістав назву **резонансу струмів**. Проста схема такого кола показана на рис. 8.7.

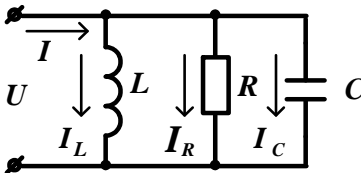


Рисунок 8.7 – Схема кола з паралельним з'єднанням джерела енергії та реактивних елементів  $L$  і  $C$

$U_L, U_C, I, \varphi = f(\omega)$   
 В електроенергетиці явище резонансу напруг може призвести до небажаних наслідків через перенапруження, що його супроводжують. Наприклад, при підключенні до генератора або трансформатора кабельної лінії, не

Комплексна вхідна провідність схеми:

$$\underline{Y}_{BX} = G - j(B_L - B_C) = G,$$

$$G = \frac{1}{R}, \quad B_L = \frac{1}{\omega \cdot L},$$

$$b_C = \omega \cdot C.$$

Умова резонансу струмів:  $B = B_L - B_C = 0$  або  $\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0$ , звідки  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансна (власна) частота.

Із одержаної рівності випливає, що резонансного режиму в колі можна досягти зміною параметрів елементів  $L$  і  $C$  або частоти

джерела  $\omega$ . У резонансному режимі повна провідність схеми дорівнює активній провідності і має мінімальне значення:

$$Y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = G,$$

а струм джерела також мінімальний і збігається за фазою з напругою джерела ( $\varphi = 0$ ):  $I = UY = UG$ .

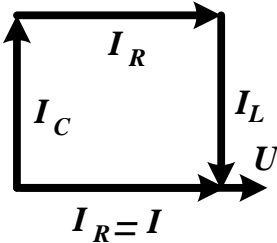


Рисунок 8.8 – Векторна діаграма струмів і напруги

Струми у вітках із реактивними елементами

$$I_L = UB_L, \quad I_C = UB_C$$

однакові за модулем, протилежні за фазою і компенсують один одного, а струм у резисторі  $R$  дорівнює струму джерела ( $I = I_R = UG$ ). Однакові за модулем струми в реактивних елементах

$I_L = I_C$  можуть значно перевищувати струм джерела  $I$  за умови, що  $B_L = B_C \gg G$ . Векторна діаграма струмів і напруги показана на рис. 8.8.

Електричне коло з паралельним з'єднанням елементів  $R$ ,  $L$  і  $C$  в техніці одержала назву паралельного коливального контуру. Властивості такого кола, як коливальний контур, характеризують такі параметри:

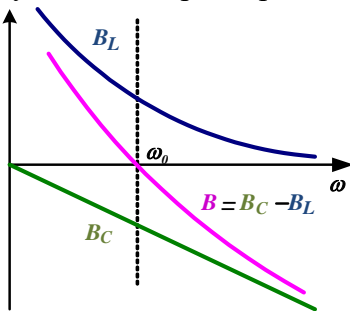


Рисунок 8.9 – Частотні характеристики

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – резонансна частота;

$\gamma = \frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}}$  – хвильова провідність;

$Q = \frac{\gamma}{G}$  – добротність контуру.



Частотні характеристики провідності окремих елементів  $B_L(\omega)$ ,  $B_C(\omega)$ ,  $B(\omega)$  показані на рис. 8.9.

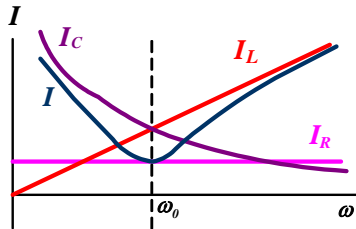


Рисунок 8.10 – Резонансні характеристики

Резонансні характеристики паралельного контуру подані на рис. 8.10.

В електроенергетиці компенсація реактивної потужності на промислових підприємствах за допомогою

паралельного вмикання конденсаторних батарей, по суті справи, є заходом, при якому також досягається резонанс струмів.

### Контрольні питання і завдання

1. Поясніть, чим визначають характер опору електричного кола синусоїдального струму і як його можна змінювати.
2. Сформулюйте визначення резонансу кола. Назвіть види резонансу, наведіть їх суттєві ознаки і загальні властивості.
3. Запишіть вирази для добротності паралельного і послідовного коливальних контурів. Чим відрізняються ці вирази?
4. На схемі рис. 8.2 відомо, що напруга змінюється за законом:  $u(t) = 14,1 \sin 314 t$ ,  $R = 200$  Ом, а  $L = 0,1$  Гн. Визначте значення ємності, при якому в колі виникне резонанс.
5. За даними завдання 4 визначте добротність кола рис. 8.2, загальний струм кола, а також струми його віток.
6. Використовуючи дані задачі 5, визначте повну, активну і реактивну потужності кола за схемою рис. 8.2.
7. Сформулюйте пропозицію за способом збільшення коефіцієнта потужності колів синусоїдального струму.
8. Сформулюйте визначення характеристичного опору.
9. На схемі рис. 8.7 задано:  $e(t) = 14,1 \sin 314 t$ ,  $R = 4,9$  Ом, а  $L = 0,1$  Гн. Визначте значення ємності, при якому в колі виникне резонанс.

10. За даними завдання 9 визначте добротність кола рис. 6.5, загальний струм кола, а також спад напруги на  $R$ -,  $L$ - і  $C$ - елементах.

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 9

### Тема «Розрахунок складних кіл у синусоїдальному режимі»

#### План

1. Резонанс струмів у складних колах.
2. Індуктивно з'язані електричні кола.

#### 9.1. Резонанс струмів у складних колах

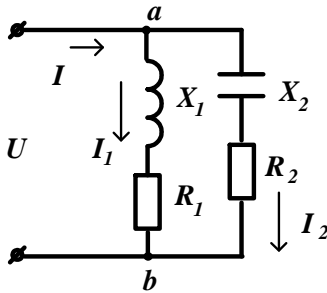


Рисунок 9.1 – Резонанс у складних колах

Розглянемо коло з двома паралельними вітками, зображеними на рис. 9.1.

Таке коло часто називають паралельним контуром. Оскільки вітки з реактивними елементами з'єднані паралельно, то в колі може виникнути резонанс струмів.

Вхідна комплексна провідність схеми:

$$\underline{Y}_{BX} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{R_2 - jX_2} = \left( \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) - j \left( \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} - \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) = G_{EKB} - jB_{EKB}.$$

Запишемо умову резонансу для кола, зображеного на рис. 9.1:

$$B_{EKB} = \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} - \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = 0$$

або

$$\frac{\omega_0 L}{R_1^2 + (\omega_0 L)^2} - \frac{\left( \frac{1}{\omega_0 C} \right)^2}{R_2^2 + \left( \frac{1}{\omega_0 C} \right)^2} = 0.$$

Розв'язуючи рівняння резонансу відносно частоти, одержимо

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}$$

Умовою виникнення резонансу є рівність реактивної провідності:

$$b_L = b_C, \quad b_L = \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2}, \quad b_C = \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2},$$

$$\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} = \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}, \quad G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2}, \quad G_2 = \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2}.$$

Запишемо вирази для визначення активних і реактивних складових струмів у вітках:

$$I_{1a} = U \cdot G_1,$$

$$I_{2a} = U \cdot G_2,$$

$$I_{1p} = U \cdot b_L,$$

$$I_{2p} = U \cdot b_C.$$

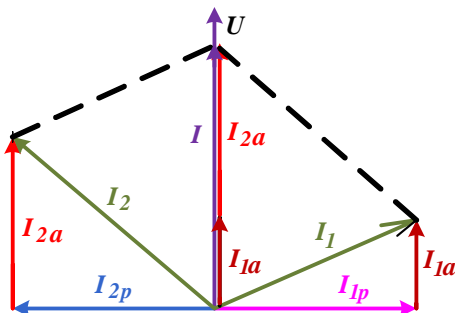


Рисунок 9.2 – Векторна діаграма при резонансі в складних колах

Побудуємо векторну діаграму струмів (рис. 9.2), для електричного кола (рис. 9.1), що перебуває у режимі резонансу струмів.

## 9.2. Індуктивно зв'язані електричні кола

### 9.2.1. Загальні визначення

Якщо магнітне поле, створене однією з котушок, перетинає площину витків (зчеплене з витками) другої котушки, то такі котушки називають індуктивно зв'язаними (рис. 9.3).

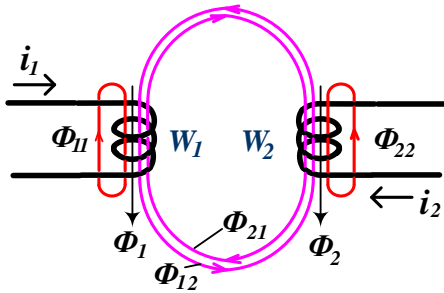


Рисунок 9.3

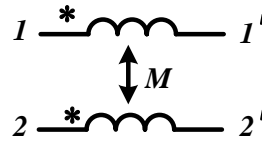


Рисунок 9.4

Зазначимо, що

$\Phi_{11}$  – частина магнітного потоку, створеного струмом  $i_1$  і зчепленого тільки з витками котушки  $W_1$ ;

$\Phi_{22}$  – частина магнітного потоку, і зчепленого лише з витками котушки  $W_2$ ;

$\Phi_{12}$  – частина магнітного потоку, створеного струмом  $i_1$ , і зчепленого з витками обох котушок (взаємний потік);

$\Phi_{21}$  – частина магнітного потоку, створеного струмом  $i_2$ , і зчепленого з витками обох котушок (взаємний потік);

$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$  – сумарний магнітний потік, створений струмом  $i_1$ ;

$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$  – сумарний магнітний потік, створений струмом  $i_2$ .

Власною індуктивністю котушки  $L$  називають відношення її власного потокозчеплення до струму в ній:

$$L_1 = \frac{\Psi_1}{i_1} = \frac{\Phi_1 w_1}{i_1}, \quad L_2 = \frac{\Psi_2}{i_2} = \frac{\Phi_2 w_2}{i_2}.$$

Взаємною індуктивністю  $M$  називають відношення взаємного потокозчеплення 2-ї котушки до струму в 1-й або навпаки:

$$M = \frac{\Phi_{12} W_2}{i_1} = \frac{\Phi_{21} W_1}{i_2}.$$

Міра магнітного зв'язку між котушками характеризується коефіцієнтом зв'язку:

$$k_{зв} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

значення якого змінюється в межах від 0 до 1.

Під час проходження одночасно по обох котушках постійних струмів  $i_1$  та  $i_2$  їх власні та взаємні магнітні потоки можуть збігатися за напрямком (співнапрямлені), і тоді відбувається посилення магнітного поля, або можуть не збігатися (спрямовані у зустрічних напрямках), тому відбувається послаблення магнітного поля.

Якщо при вибраних напрямках струмів у котушках їх власні і взаємні потоки збігаються, то такі напрямки струмів прийнято називати узгодженими (в іншому випадку – зустрічними).

Виводи котушок, відносно яких узгоджені струми орієнтовані однаково (наприклад, від вводу в котушку), називають однойменними, або однополярними.

На схемах електричних кіл однойменні виводи котушок позначаються однаковими символічними позначками (зірочка, точка), а наявність взаємного магнітного зв'язку – дугою із стрілками на кінцях (рис. 9.4).

Полярність виводів індуктивно зв'язаних котушок може бути визначена на підставі правила правого гвинта, якщо відомі їх геометрія і напрямок намотування, або шляхом експериментальних вимірювань.

Під час протікання по котушках змінних синусоїдальних струмів  $i_1 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \alpha_1)$  і  $i_2 = I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \alpha_2)$  у них за законом електромагнітної індукції наводиться одночасно ЕРС самоіндукції і ЕРС взаємоіндукції, що в сумі врівноважить прикладену до котушок напругу:

– диференціальна форма рівнянь 2-го закону Кірхгофа:

$$u_1 = -e_{1сам} - e_{1вз} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = -e_{2сам} - e_{2вз} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt};$$

– комплексна форма рівнянь 2-го закону Кірхгофа:

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_1 jX_1 \pm \dot{I}_2 jX_M ,$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 jX_2 \pm \dot{I}_1 jX_M ,$$

де  $X_1 = \omega L_1$ ,  $X_2 = \omega L_2$  – індуктивні опори котушок індуктивності;

$X_M = \omega M$  – опір взаємодукції.

### 9.2.2. Послідовне з'єднання індуктивно зв'язаних котушок

Нехай дві індуктивно зв'язані котушки ( $R_1, L_1, R_2, L_2, M$ ) з'єднані послідовно з джерелом напруги  $U$  (рис. 9.5).

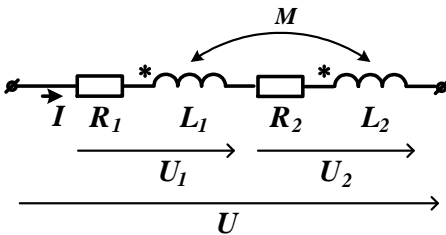


Рисунок 9.5

При послідовному з'єднанні додатний напрям струму вибирається одночасно для обох котушок, тому його напрям відносно однойменних виводів залежить тільки від

способу з'єднання котушок між собою. При узгодженому вмиканні власні та взаємні магнітні потоки будуть додаватися, а при зустрічному – відніматися. За другим законом Кірхгофа це виглядає так:

– диференціальна форма

$$u = u_1 + u_2 = iR_1 + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} + iR_2 + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} ;$$

– комплексна форма:

$$\dot{E} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{I} R_1 + \dot{I} jX_1 \pm \dot{I} jX_M + \dot{I} R_2 + \dot{I} jX_2 \pm \dot{I} jX_M .$$

Комплексному рівнянню відповідають векторні діаграми струму і напруги (рис. 9.6 – для узгодженого вмикання, рис. 9.7 – для зустрічного вмикання).

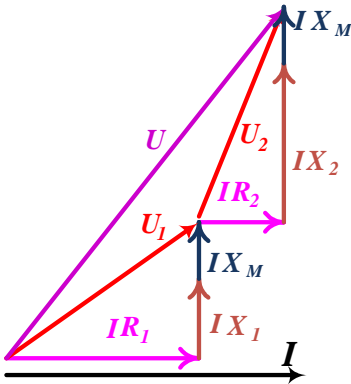


Рисунок 9.6 – Векторна діаграма струму і напруги для узгодженого вмикання

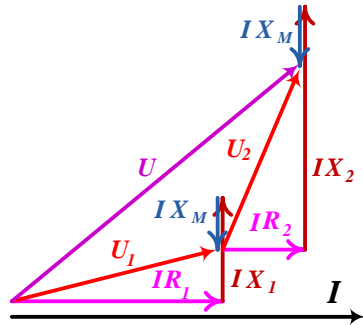


Рисунок 9.7– Векторна діаграма струму і напруги для зустрічного вмикання

З комплексного рівняння маємо

$$\underline{Z}_{ЕКВ} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2 \pm 2X_M) = R_{ЕКК} + jX_{ЕКК} ,$$

де  $R_{ЕКК} = R_1 + R_2$ ,  $X_{ЕКК} = X_1 + X_2 \pm 2X_M$ ,

звідси випливає, що

$$X_{ЕКК.УЗГОДЖ} = X_1 + X_2 + 2X_M, \quad X_{ЕКК.ЗУСТР} = X_1 + X_2 - 2X_M .$$

Розв'язуючи разом останні рівняння, одержуємо

$$X_M = \frac{X_{ЕКВ.УЗГОДЖ} - X_{ЕКВ.ЗУСТР}}{4} ;$$

$$M = \frac{L_{ЕКВ.УЗГОДЖ} - L_{ЕКВ.ЗУСТР}}{4} .$$

Одержане співвідношення використовують на практиці для експериментального визначення взаємного реактивного опору  $X_M$  і відповідно до взаємної індуктивності  $M$ . Для цього в колі фіксують покази трьох вимірювальних приладів ( $U$ ,  $I$ ,  $\varphi$ ) при узгодженому і зустрічному вмиканні котушок і за показами приладів визначають еквівалентні параметри кола.

Більшому значенню  $X_{ЕКВ}$  відповідає узгоджене вмикання, меншому – зустрічне.



### 9.2.3. Паралельне з'єднання індуктивно зв'язаних котушок

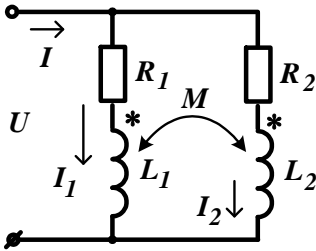


Рисунок 9.8

Дві котушки з опорами  $R_1$  і  $R_2$ , індуктивностями  $L_1$  і  $L_2$  і взаємною індуктивністю  $M$  з'єднані паралельно, причому однойменні виводи приєднані до одного й того самого вузла (рис. 9.8).

Для вибраних позитивних напрямів струмів за законами Кірхгофа запишемо такі вирази:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2,$$

$$\dot{U} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_M,$$

$$\dot{U} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_M + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2.$$

де  $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$ ,  $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$ ,  $\underline{Z}_M = j\omega M$ .

У цих рівняннях комплексна напруга  $\dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_M$  і  $\dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_M$  узяті зі знаком плюс, оскільки позитивні напрямки струмів у вітках відносно однойменних виводів однакові.

Розв'язавши рівняння, одержимо вхідний опір кола:

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M}.$$

#### Контрольні питання і завдання

1. Поясніть, чим визначають напрямок ЕРС взаємоіндукції.
2. У чому полягають особливості розрахунку простих і складних кіл за наявності в них (колах) взаємоіндукції?
3. Які елементи називають індуктивно зв'язаними?
4. Запишіть для узгодженого послідовного вмикання індуктивно зв'язаних котушок рівняння за 2-м законом Кірхгофа.
5. Зобразіть векторну діаграму напруги для зустрічного

вмикання індуктивно зв'язаних котушок.

6. Наведіть правило складання рівнянь за 2-м законом Кірхгофа для кіл із взаємною індукцією для складних кіл.

7. Що таке коефіцієнт зв'язку, і в яких межах він змінюється?

8. Запишіть рівняння для розрахунку кола на рис. 9.8, використовуючи закони Кірхгофа.

9. Розрахуйте вхідний опір на рис. 9.5, якщо  $X_{L1} = 10 \text{ Ом}$ ,  $X_{L2} = 20 \text{ Ом}$ ,  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ,  $X_M = 4 \text{ Ом}$

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 10

### Тема «Еквівалентні перетворення індуктивно зв'язаних кіл»

#### План

1. Еквівалентна заміна індуктивно зв'язаних кіл.
2. Складне коло з індуктивно зв'язаними котушками.
3. Лінійний (без осердя) трансформатор.

#### 10.1. Еквівалентна заміна індуктивно зв'язаних кіл

Часто для спрощення розрахунків частину схеми замінюють еквівалентною схемою без індуктивних зв'язків. Такий прийом ще називають **розв'язкою індуктивних зв'язків**.

Розглянемо еквівалентну заміну для схеми, показаної на рис. 10.1. Тут струми  $i_1$  та  $i_2$  однаково орієнтовані відносно одноїменних затискачів, тому вмикання котушок узгоджене.

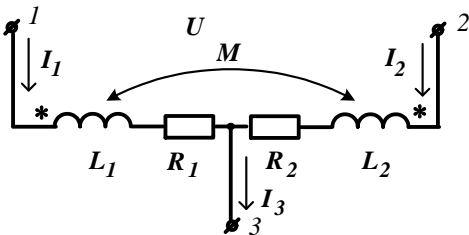


Рисунок 10.1

Запишемо вираз:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_M,$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_M + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2,$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2,$$

$$\underline{Z}_M = j\omega M,$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2.$$

Перетворимо рівняння для напруги між виводами 1 – 3 і 2 – 3:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_M, \text{ додамо доданок } (\pm \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_M), \text{ одержимо}$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_M + \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_2, \text{ додамо доданок } (\pm \dot{I}_2 \cdot \underline{Z}_M).$$

Після перетворення одержимо такі вирази:

$$\dot{U}_{13} = \dot{I}_1 \cdot (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) + (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \cdot \underline{Z}_M,$$

$$\dot{U}_{23} = \dot{I}_2 \cdot (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \cdot \underline{Z}_M.$$

Підставимо третій струм у рівняння для напруги:

$$\begin{aligned} \dot{I}_3 &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2, \\ \dot{U}_{13} &= \dot{I}_1 \cdot (\underline{Z}_1 - \underline{Z}_M) + \dot{I}_3 \cdot \underline{Z}_M, \\ \dot{U}_{23} &= \dot{I}_2 \cdot (\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) + \dot{I}_3 \cdot \underline{Z}_M. \end{aligned}$$

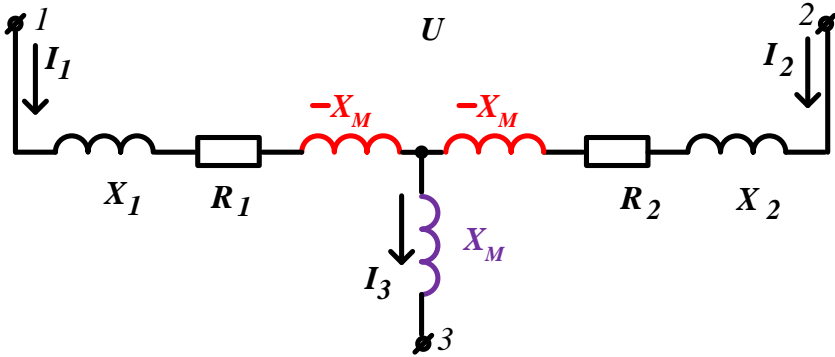


Рисунок 10.2

Зобразимо схему (рис. 10.2) відповідно до перетворених рівнянь.

Розглянемо еквівалентну заміну індуктивно зв'язаних кіл на прикладі трьох віток, підключених до вузла схеми (рис. 10.3). На рисунку показана схема, де здійснено еквівалентну заміну індуктивного зв'язку між першою і другою котушками  $M_{12}$ .

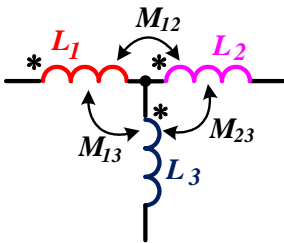


Рисунок 10.3

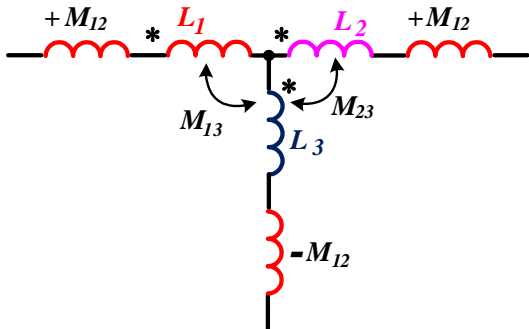


Рисунок 10.4

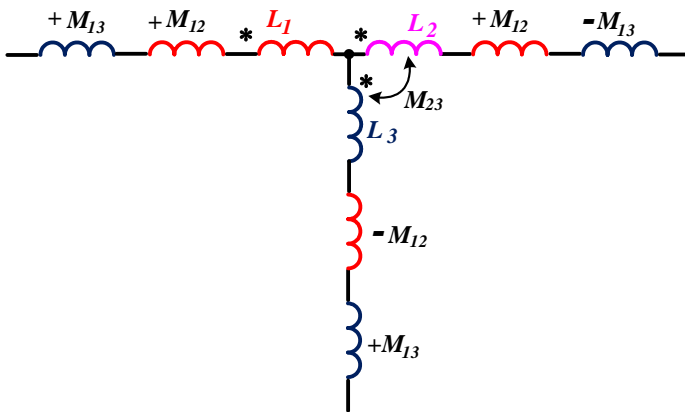


Рисунок 10.5

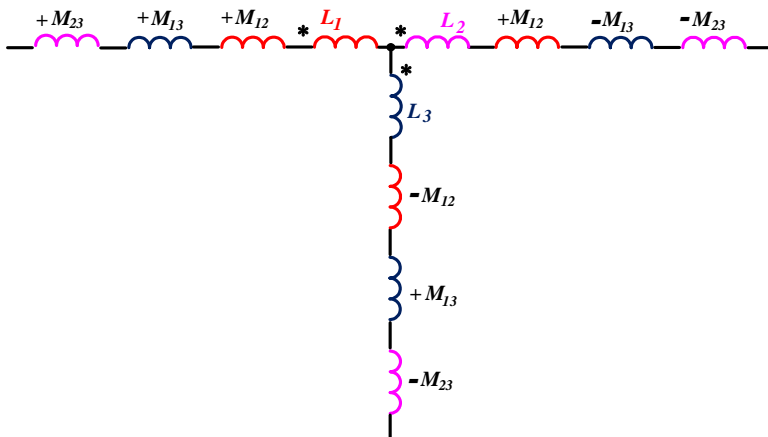


Рисунок 10.6

## 10.2. Складне коло з індуктивно зв'язаними котушками

У складному колі індуктивно зв'язані котушки можуть перебувати у будь-яких вітках. Оскільки напрямки струмів у вітках схеми вибирають довільно, то струми у вітках, що мають індуктивно зв'язані котушки, можуть бути спрямовані як узгоджено, так і зустрічно.

Розрахунок струмів в складній схемі з індуктивно зв'язаними котушками проходить, як правило, методом застосування законів Кірхгофа. До розрахунку таких кіл не можна ви-

користувати метод вузлових потенціалів і метод еквівалентного генератора.

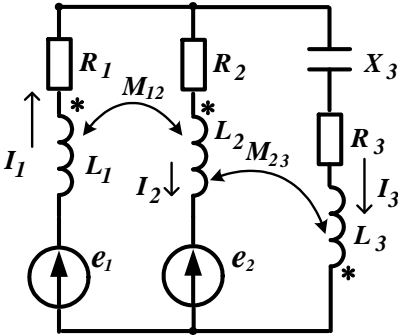


Рисунок 10.7

Для розрахунку складних кіл можна використовувати метод контурних струмів.

Розглянемо розрахунок схеми на конкретному прикладі (рис. 10.7).

Позначимо позитивні напрямки струмів у вітках схеми.

Приймаємо напрямки обходу контурів за годинниковою стрілкою. Запишемо систему рівнянь за законами Кірхгофа у диференціальній формі:

$$\begin{aligned}
 i_1 - i_2 - i_3 &= 0, \\
 i_1 R_1 + i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{12} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_3}{dt} + L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} &= \\
 &= e_1 - e_2, \\
 -i_2 R_2 + \frac{1}{C} \int i_3 dt + i_3 R_3 + L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} + \\
 + M_{23} \frac{di_3}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} &= e_2.
 \end{aligned}$$

Перейдемо до комплексної форми запису системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0, \\
 \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_2 R_2 + jX_2 \dot{I}_2 - jX_{M12} \dot{I}_1 - jX_{M23} \dot{I}_3 + jX_1 \dot{I}_1 - jX_{M12} \dot{I}_2 &= \\
 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\dot{I}_2 R_2 - jX_{C3} \dot{I}_3 + jX_3 \dot{I}_3 - jX_{M23} \dot{I}_2 - jX_2 \dot{I}_2 + \\
 & + jX_{M23} \dot{I}_2 + jX_{M12} \dot{I}_1 = \dot{E}_2.
 \end{aligned}$$

Скористаємося методом контурних струмів для запису рівнянь для схеми, запропонованої на рисунку 10.7. Напрямки контурних струмів беруться за годинниковою стрілкою. Отже,

$$\underline{Z}_{11} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{22} = \dot{E}_{11},$$

$$\underline{Z}_{21} \dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22} \dot{I}_{22} = \dot{E}_{22},$$

$$\underline{Z}_{11} = R_1 + R_2 + jX_1 + jX_2 - 2jX_{M12},$$

$$\underline{Z}_{22} = R_3 + R_2 - jX_{C3} + jX_3 + jX_2 + 2jX_{M23},$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(R_2 + jX_2 - jX_{M12} + jX_{M23}).$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}, \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_{22}.$$

### 10.3. Лінійний (без осердя) трансформатор

Схема лінійного трансформатора складається з двох індуктивно зв'язаних котушок, до однієї з яких (первинної) увімкнено джерело ЕРС  $E$ , а до другої (вторинної) – навантаження  $Z_H$  (рис. 10.8).

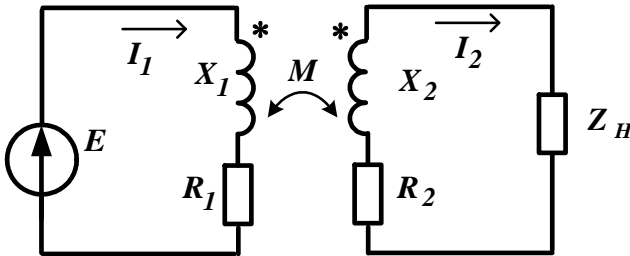


Рисунок 10.8

Рівняння Кірхгофа для схеми трансформатора в комплексній формі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 jX_1 - \dot{I}_2 jX_M + \dot{I}_1 R_1 &= \underline{E}, \\ \dot{I}_2 jX_2 - \dot{I}_1 jX_M + \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_H &= 0. \end{aligned}$$

Із метою магнітної розв'язки схеми додамо до рівняння (1) доданки  $\dot{I}_1 jX_M - \dot{I}_1 jX_M$ , а до рівняння (2) доданки  $\dot{I}_2 jX_M - \dot{I}_2 jX_M$ .

У результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} [R_1 + j(X_1 - X_M) + jX_M] - \dot{I}_{22} jX_M &= \underline{E}, \\ -\dot{I}_{11} jX_M + \dot{I}_{22} [R_2 + j(X_2 - X_M) + \underline{Z}_H] &= 0. \end{aligned}$$

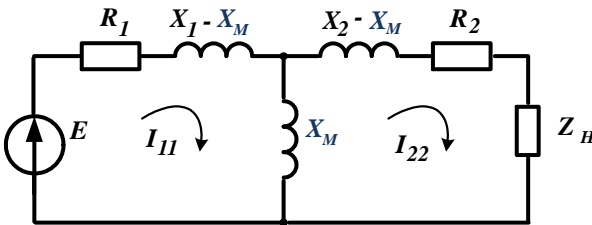


Рисунок 10.9

Нові рівняння є контурними для нової еквівалентної схеми без магнітних зв'язків

(рис. 10.9).

### Контрольні питання і завдання

1. Запишіть контурні рівняння для кола на рис. 10.7, використовуючи еквівалентну заміну індуктивних зв'язків.
2. Що таке повітряний трансформатор? Чому він називається лінійним?
3. Запишіть рівняння повітряного трансформатора, зобразіть його схему заміщення.
4. Як впливають індуктивно зв'язані елементи на баланс потужностей?
5. Які методи розрахунку можна використовувати для аналізу кіл з індуктивно зв'язаними елементами?



6. Идеальный трансформатор: розрахункова схема і рівняння за 2-м законом Кірхгофа для первинного і вторинного контурів.

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 11

### Тема «Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом»

#### План

1. Основні поняття.
2. Закони комутації.
3. Початкові умови перехідного процесу.
4. Математичні основи аналізу перехідних процесів.
5. Алгоритм розрахунку перехідних процесів.

#### 11.1. Основні поняття

У сталому режимі струми і напруга в елементах кола можуть існувати необмежено довго, не змінюючи своїх величин і характеристик.

**Перехідним** називається процес, що виникає в електричному колі під час переходу його від одного сталого режиму (старого) до іншого режиму, який встановився (нового).

Перехідні процеси в колі виникають в результаті комутацій.

Під **комутацією** розуміють стрибкоподібні (миттєві) зміни структури (схеми) кола або параметрів її окремих елементів, викликані вмиканням, вимиканням або перемикуванням окремих її ділянок.

На електричних схемах комутація позначається у вигляді ключів у розімкненому (рис. 11.1 а) або замкненому (рис. 11.1 б) положенні, при цьому розімкнений ключ у момент  $t = 0$  замикається, а замкнений у момент  $t = 0$  розмикається.

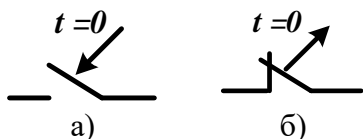


Рисунок 11.1 – Позначення комутації на схемах

Під час розгляду перехідних процесів припускають, що комутація відбувається миттєво, а опір ключа змінюється стрибкоподібно від нескінченно великого значення до нуля при вмиканні і навпаки – при вимиканні.

Введемо такі поняття часу :

$t = - 0$  – час безпосередньо перед комутацією;

$t = + 0$  – час безпосередньо після комутації.

Перехідний процес в колі триває певний час, що називають часом перехідного процесу. До початку перехідного процесу і після його закінчення в електричному колі спостерігають сталий (вимушений) режим, який визначається джерелом енергії при незмінній схемі кола і незмінних параметрах його елементів.

Під час перехідного процесу струми в електричному колі та напругу на її ділянках визначають не лише «зовнішніми» джерелами енергії, але й «внутрішніми» джерелами – накопичувачами енергії (такими джерелами є котушки індуктивності і конденсатори).

У режимі, що існував до комутації, в котушках індуктивності та конденсаторах було накопичено певну кількість енергії або якщо коло не було підключене до джерел, запас енергії був відсутній.

При перехідних процесах можуть виникати великі перенапруження, надструми, електромагнітні коливання, що можуть порушити роботу пристрою аж до виходу його з ладу. З іншого боку, перехідні процеси мають корисне практичне застосування, наприклад, у різного роду електронних генераторах.

Розглянемо основні методи аналізу перехідних процесів у лінійних колах.

**Класичний метод** полягає в безпосередній інтеграції диференціальних рівнянь, що описують електромагнітний стан кола.

**Операторний метод** полягає у розв'язанні системи алгебраїчних рівнянь щодо зображень шуканих змінних із подальшим переходом від знайдених зображень до оригіналів.

**Частотний метод** ґрунтується на перетворенні Фур'є і дістав широкого застосування при розв'язанні задач синтезу.

Метод розрахунку за допомогою **інтеграла Дюамеля**, використовують при складній формі кривої збудовальної дії.

**Метод змінних стану**, що є впорядкованим способом визначення електромагнітного стану кола на основі розв'язання

системи диференціальних рівнянь першого порядку, записаних у нормальній формі (формі Коші).

## 11.2. Закони комутації

Кожному стану електричного кола відповідає запас енергії електричного і магнітного полів. Відповідно до закону збереження енергії під час переходу кола від одного стану до іншого енергія не може змінюватися стрибком. Це пояснюється кінцевою швидкістю поширення електромагнітної енергії.

На підставі закону збереження енергії запишемо вираз для магнітної енергії котушки індуктивності та електричної енергії конденсатора :

$$W_M(-0) = W_M(+0); \quad W_E(-0) = W_E(+0),$$

де  $W_M(-0)$ ,  $W_E(-0)$  – значення енергії, запасеної в магнітному і електричних полях безпосередньо перед комутацією.

Виразимо енергію магнітного і електричного полів через струм котушки  $i_L$  індуктивності та напругу  $u_C$  на конденсаторі:

$$W_M = \frac{\psi_L i_L}{2}, \quad W_E = \frac{q u_C}{2}.$$

Виразимо потокозчеплення котушки індуктивності через струм, а заряд конденсатора через напругу:

$$\psi_L = L i_L, \quad q_C = C u_C.$$

У разі постійної індуктивності ( $L = \text{const}$ ) і ємності ( $C = \text{const}$ ) кола вирази для енергії магнітного і електричного полів набирають вигляду

$$W_M = \frac{L i_L^2}{2}, \quad W_E = \frac{C u_C^2}{2}.$$

Запишемо закон збереження енергії через струм котушки індуктивності та напругу конденсатора:

$$\frac{L i_{L(-0)}^2}{2} = \frac{L i_{L(+0)}^2}{2}, \quad \frac{C u_{C(-0)}^2}{2} = \frac{C u_{C(+0)}^2}{2}.$$

Сформулюємо закони комутації.

*Перший закон комутації* свідчить, що струм  $i_L$  в колі з котушкою індуктивності  $L$  у момент комутації не може змінюватися стрибкоподібно, тобто

$$i_L(-0) = i_L(+0) = i_L(0) = \text{const} .$$

*Другий закон комутації* свідчить, що напруга  $u_C$  на виводах конденсатора  $C$  у момент комутації не може змінюватися стрибкоподібно, тобто

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) = \text{const} .$$

### 11.3. Початкові умови перехідного процесу

Початковими умовами називають миттєві значення окремих струмів і напруги, а також їх перших, других і так далі похідних на початку перехідного процесу, тобто у момент комутації при  $t = 0$ .

Початкові умови поділяються на 2 види: незалежні та залежні.

До незалежних початкових умов відносять струми в котушках  $i_L(0)$  і напругу на конденсаторах  $u_C(0)$ . Незалежні початкові умови визначають законами комутації, вони не можуть змінюватися стрибкоподібно і не залежать від виду комутації. Їх значення визначають з розрахунку схеми кола у сталому докомутаційному режимі на момент комутації  $t = 0$ .

До залежних початкових умов відносять значення усіх інших струмів і напруги, а також значення похідних від усіх змінних у момент комутації при  $t = 0$ . Залежні початкові умови можуть змінюватися стрибкоподібно, їх значення залежать від виду і місця комутації.

Залежні початкові умови визначають на момент комутації  $t = 0$  із системи диференціальних рівнянь (рівнянь Кірхгофа), складених для схеми у стані після комутації, шляхом підстановки в них знайдених раніше незалежних початкових умов.

## 11.4. Математичні основи аналізу перехідних процесів

1. Для кола, одержаного після комутації, записують рівняння, складені за законами Кірхгофа або за методом контурних струмів. При складанні рівнянь необхідно враховувати струм конденсатора і спад напруги на котушці індуктивності у вигляді

$$i_c = c \frac{du_c}{dt}, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

2. Після складання системи рівнянь, що описує електричне коло, здійснюється її розв'язування щодо вибраної змінної. Як шукану змінну рекомендують вибирати струм  $i_L$  котушки індуктивності або напругу  $u_C$  конденсатора.

3. У результаті розв'язання одержуємо диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$a_n \frac{d^n i_L}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_L}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{di_L}{dt} + a_0 i_L = f(t),$$

або

$$b_n \frac{d^n u_c}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} u_c}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{du_c}{dt} + b_0 u_c = f(t),$$

де  $a_n$  ( $b_n$ ),  $a_{n-1}$  ( $b_{n-1}$ ),  $\dots$ ,  $a_0$  ( $b_0$ ) – сталі коефіцієнти, що залежать від вигляду схеми та її параметрів;

$f(t)$  – зовнішня дія на коло.

Повне розв'язання лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами обчислюють у вигляді суми частинного розв'язку неоднорідного рівняння і загального розв'язання відповідного однорідного рівняння:

$$i_L = i_{L_{\text{вим}}} + i_{L_{\text{вільн}}}, \quad u_L = u_{L_{\text{вим}}} + u_{L_{\text{вільн}}}.$$

4. Визначають вимушену складову для вибраної змінної.

Для її обчислення у разі дії джерела постійної напруги або струму досить прирівняти до нуля усі похідні в диференціальному рівнянні. Із перетвореного рівняння необхідно виразити вимушену складову відповідно до струму (напруги).

5. Складають вираз для вільної складової вибраної змінної.

При визначенні виразу для вільної складової змінної  $i_{L_B}$  ( $u_{C_B}$ ) складають однорідне диференціальне рівняння, одержане з неоднорідного шляхом прирівнювання до нуля його правої частини. Потім записують характеристичне рівняння і обчислюють його корені.

Характеристичне рівняння одержують при заміні  $\frac{d}{dt} = \lambda$ , де  $\lambda$  – це корінь характеристичного рівняння.

**6.** Визначають корені характеристичного рівняння.

Після складання характеристичного рівняння і підстановки чисельних даних визначають його корені. Залежно від числа і виду коренів записують у загальному вигляді алгоритм розв'язання.

Можливі такі види коренів і відповідні до них розв'язки:

1. Різні дійсні корені  $-\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ , де  $n$  кількість коренів;

$$i_{L_{\text{вільн}}} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t},$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – сталі інтегрування.

2. Серед  $n$  дійсних коренів є пара рівних коренів  $\lambda_3 = \lambda_4$ ,

$$i_{L_{\text{вільн}}} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + A_3 e^{\lambda_3 t} + A_4 t e^{\lambda_4 t} + \dots + A_n e^{\lambda_n t}.$$

3. Серед  $n$  коренів є пара комплексних коренів  $\lambda_1 = -\delta + j\omega$ ,  $\lambda_2 = -\delta - j\omega$ ,

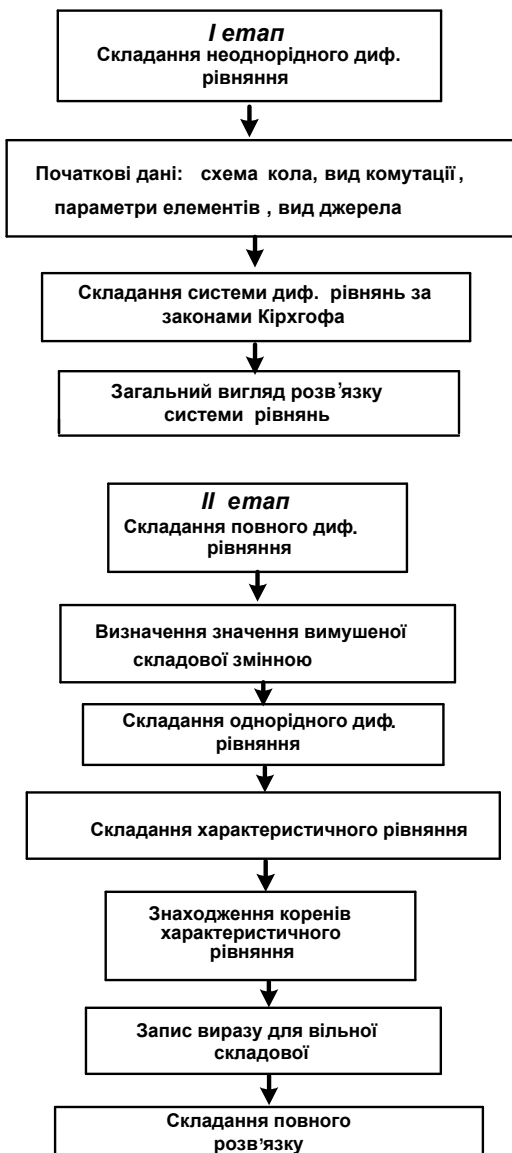
$$i_{L_{\text{вільн}}} = e^{-\delta t} (A_1 \cos \omega_0 t + A_2 \sin \omega_0 t) + \dots + A_n e^{\lambda_n t}$$

або

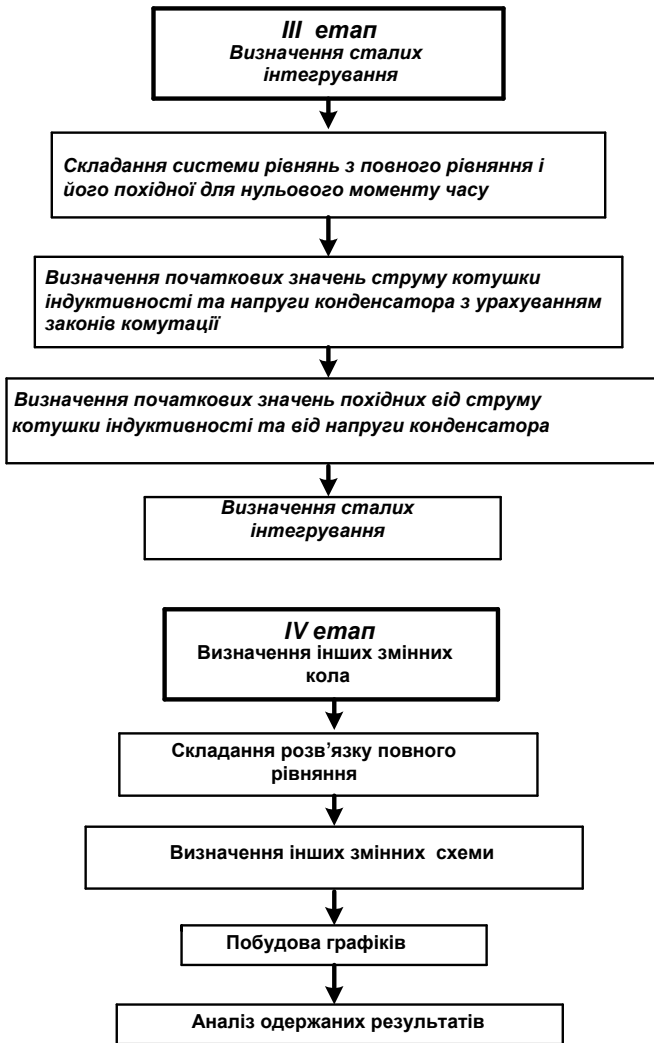
$$i_{L_{\text{вільн}}} = e^{-\delta t} A_1 \sin(\omega_0 t + \gamma) + \dots + A_n e^{\lambda_n t}.$$

**7.** Сталі інтегрування  $A_1, A_2, \dots, A_n$  і кут  $\gamma$  визначають з початкових умов.

## 11.5. Алгоритм розрахунку перехідних процесів







### Контрольні питання і завдання

1. Який режим у лінійному електричному колі можна вважати сталим?
2. Яким чином за виглядом електричного кола можна визначити порядок диференціального рівняння, що описує перехідний процес?

3. Чому напруга на конденсаторах і струми котушок індуктивності залишаються незмінними у момент комутації?
4. Чим обумовлені перехідні процеси?
5. Як визначається порядок диференціального рівняння, що описує перехідний процес?
6. Для яких кіл можна застосовувати класичний метод розрахунку перехідних процесів?
7. Довести закони комутації з енергетичних позицій.
8. Чи впливає на сталу часу кола тип джерела живлення: джерело напруги або джерело струму?
9. Чим обумовлені перехідні процеси?
10. Як визначається порядок диференціального рівняння, що описує перехідний процес?

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 12

### Тема «Аналіз перехідних процесів у простих колах класичним методом»

#### План

1. Перехідний процес в електричному колі з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності при постійній напрузі.
2. Перехідний процес в електричному колі з послідовним з'єднанням резистора і конденсатора при постійній напрузі.
3. Перехідний процес в електричному колі з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності при синусоїдальній напрузі.

#### 12.1. Перехідний процес в електричному колі з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності при постійній напрузі

Розглянемо електричне коло з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності при вмиканні на джерело постійної напруги (рис. 12.1).

**I етап. Складання неоднорідного диференціального рівняння**

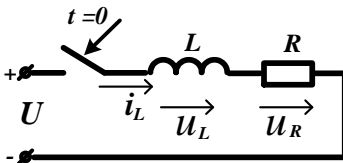


Рисунок 12.1

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для схеми рис. 12.1:

$$u_L + u_R = U,$$

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = U.$$

**II етап. Розв'язання неоднорідного диференціального рівняння**

Запишемо розв'язок одержаного рівняння у вигляді

$$i_L = i_{L_{\text{ВИМ}}} + i_{L_{\text{ВІЛЬН}}},$$

де  $i_{L_{\text{ВИМ}}}$  – вимушена складова струму. Це струм в колі після закінчення перехідного процесу;

$i_{L_{\text{вільн}}}$  – вільна складова струму. Це струм в колі під час перехідного процесу.

Розрахуємо вимушену складову струму шляхом порівняння до нуля похідної:

$$L \frac{di_L}{dt} = 0 .$$

Тоді одержимо

$$i_{L_{\text{вим}}} = \frac{U}{R} = I .$$

Складемо однорідне диференціальне рівняння

$$L \frac{di_{L_{\text{вільн}}}}{dt} + i_{L_{\text{вільн}}} R = 0 .$$

Позначимо корінь характеристичного рівняння через  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{d}{dt} ,$$

$$\lambda L i_{L_{\text{вільн}}} + i_{L_{\text{вільн}}} R = 0 ,$$

$$i_{L_{\text{вільн}}} (\lambda L + R) = 0 .$$

Запишемо характеристичне рівняння і визначимо корінь цього рівняння:

$$(\lambda L + R) = 0, \quad \lambda = -\frac{R}{L} .$$

Розв'язком однорідного диференціального рівняння є такий вираз:

$$i_{L_{\text{вільн}}} = A e^{\lambda t} ,$$

де  $A$  – стала інтегрування.

Вираз для повного струму набирає вигляду

$$i_L = \frac{U}{R} + A e^{\lambda t} .$$

### III етап. Визначення сталих інтегрування

Запишемо рівняння для повного струму у момент часу, що дорівнює нулю:

$$i_{L(+0)} = \frac{U}{R} + A,$$

де  $A$  – стала інтегрування.

Обчислимо значення струму котушки індуктивності для  $t = +0$ , використовуючи перший закон комутації:

$$i_{L(-0)} = i_{L(+0)} = 0.$$

Підставивши в рівняння для повного струму, обчислюємо значення сталої інтегрування  $A$ :

$$A = -\frac{U}{R}.$$

Вираз для повного струму набирає вигляду

$$i_L = \frac{U}{R} - \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

#### IV етап. Визначення інших змінних кола

Для визначення виразу для напруги на котушці індуктивності візьмемо похідну від повного струму:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L \left( -\frac{R}{L} \right) \left( -\frac{U}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = U e^{-\frac{R}{L}t}.$$

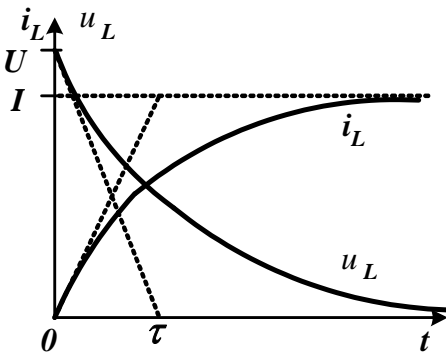


Рисунок 12.2

Побудуємо графіки зміни в часі струму і напруги на котушці індуктивності (рис. 12.2).

Проведемо дотичну до початку графіка напруги до перетину з віссю часу. Точка перетину  $\tau$  називається сталою часу кола,

$$\tau = \frac{1}{|\lambda|}.$$

Визначимо час, за який значення напруги на котушці індуктивності буде близьким до нуля.

$t$	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$
$\frac{u_L}{U} = \frac{1}{e^{\frac{t}{\tau}}}$	0,3663	0,134176	0,049149	0,018003

Аналізуючи одержані результати, можна зробити висновок, що напруга котушки індуктивності дорівнюватиме нулю з двовідсотковою точністю за час, що дорівнює  $4\tau$ :

$$t_{\text{ПЕР.ПР}} = 4\tau.$$

## 12.2. Перехідний процес в електричному колі з послідовним з'єднанням резистора і конденсатора при постійній напрузі

Розглянемо електричне коло з послідовним з'єднанням резистора і конденсатора при вмиканні на джерело постійної напруги (рис. 12.3).

**I етап. Складання неоднорідного диференціального рівняння**

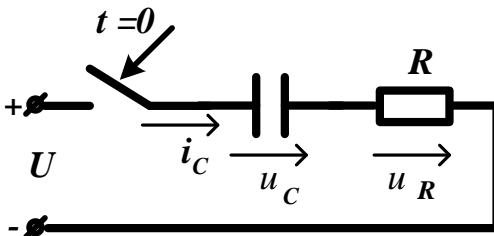


Рисунок 12.3

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для схеми рис. 12.3:

$$u_C + u_R = U,$$

$$u_C + i_C R = U.$$

Струм  $i_C$  подамо через напругу конденсатора  $u_C$  :

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Після підстановки одержимо неоднорідне диференціальне рівняння

$$u_C + C \frac{du_C}{dt} R = U.$$

## II етап. Розв'язання неоднорідного диференціального рівняння

Запишемо розв'язок одержаного рівняння у вигляді

$$u_C = u_{C_{\text{ВИМ}}} + u_{C_{\text{ВІЛЬН}}},$$

де  $u_{C_{\text{ВИМ}}}$  – вимушена складова напруги. Це напруга на конденсаторі після закінчення перехідного процесу;

$u_{C_{\text{ВІЛЬН}}}$  – вільна складова напруги. Це напруга на конденсаторі під час перехідного процесу.

Знайдемо вимушену складову напруги шляхом прирівнювання до нуля похідної

$$C \frac{du_C}{dt} = 0.$$

Тоді одержимо

$$u_{C_{\text{ВИМ}}} = U.$$

Складемо однорідне диференціальне рівняння

$$u_{C_{\text{ВІЛЬН}}} + C \frac{du_{C_{\text{ВІЛЬН}}}}{dt} R = 0.$$

Позначимо корінь характеристичного рівняння через  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{d}{dt}.$$

$$u_{C_{\text{ВІЛЬН}}} + C \lambda R u_{C_{\text{ВІЛЬН}}} = 0,$$

$$u_{C_{\text{ВІЛЬН}}} (1 + CR \lambda) = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння і визначимо корінь цього рівняння:

$$(1 + CR \lambda) = 0,$$

$$\lambda = -\frac{1}{CR}.$$

Розв'язком однорідного диференціального рівняння є такий вираз:

$$u_{C_{\text{ВІЛЬН}}} = A e^{\lambda t},$$

де  $A$  – стала інтегрування.

Вираз для повної напруги набирає вигляду

$$u_C = U + Ae^{\lambda t}.$$

### III етап. Визначення сталих інтегрування

Запишемо рівняння для повної напруги для моменту часу, що дорівнює нулю:

$$u_{C(+0)} = U + A.$$

Обчислимо значення напруги на конденсаторі для  $t = +0$ , використовуючи другий закон комутації:

$$u_{C(-0)} = u_{C(+0)} = 0.$$

Підставивши у рівняння для повної напруги, розрахуємо значення сталої інтегрування  $A$ :

$$uA = -U.$$

Вираз для повної напруги набирає вигляду

$$u_C = U - Ue^{-\frac{1}{RC}t}.$$

### IV етап. Визначення інших змінних кола

Для визначення виразу струму на конденсаторі візьмемо похідну від повної напруги:

$$i_c = C \frac{du_C}{dt} = C \left( -\frac{1}{RC} \right) \left( -\frac{U}{R} \right) e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{U}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

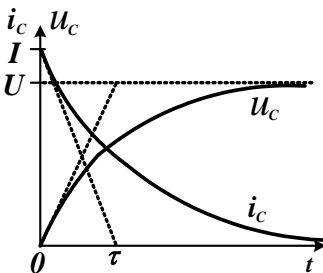


Рисунок 12.4 – Графіки зміни в часі струму і напруги на конденсаторі

Побудуємо графіки зміни в часі струму і напруги на конденсаторі (рис. 12.4).

Проведемо дотичну до початку графіка струму з точкою перетину з віссю часу. Точка перетину  $\tau$  називається сталою

часу кола,  $\tau = \frac{1}{|\lambda|}$ .



### 12.3. Перехідний процес в електричному колі з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності при синусоїдальній напрузі

Розглянемо електричне коло з послідовним з'єднанням резистора і котушки індуктивності при вмиканні на джерело синусоїдальної напруги (рис. 12.5).

**I етап. Складання неоднорідного диференціального рівняння**

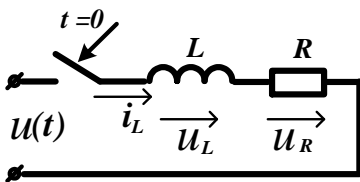


Рисунок 12.5

Напруга джерела змінюється за таким законом:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа для схеми рис. 12.5:

$$u_L + u_R = u(t), \quad L \frac{di_L}{dt} + i_L R = u(t).$$

**II етап. Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння**

Запишемо розв'язок одержаного рівняння у вигляді

$$i_L = i_{L_{\text{вим}}} + i_{L_{\text{вільн}}},$$

Знайдемо вимушену складову струму шляхом розрахунку кола при дії джерела синусоїдальної напруги:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad \psi = \arctg \frac{\omega L}{R}, \quad i_{L_{\text{вим}}} = I_m \sin(\omega t + \varphi - \psi).$$

Для обчислення виразу вільної складової струму котушки індуктивності складемо однорідне диференціальне рівняння:

$$L \frac{di_{L_{\text{вільн}}}}{dt} + i_{L_{\text{вільн}}} R = 0,$$

$$(\lambda L + R) = 0, \quad \lambda = -\frac{R}{L}.$$

Розв'язком однорідного диференціального рівняння є такий вираз:

$$i_{L_{\text{вільн}}} = A e^{\lambda t},$$

де  $A$  – стала інтегрування.

Вираз для повного струму набирає вигляду:

$$i_L = I_m \sin(\omega t + \varphi - \psi) + Ae^{\lambda t}.$$

### III етап. Визначення сталих інтегрування

Запишемо рівняння для повного струму у момент часу, який дорівнює нулю:

$$i_{L(+0)} = I_m \sin(\varphi - \psi) + A.$$

Обчислимо значення струму котушки індуктивності для  $t = +0$ , використовуючи перший закон комутації:

$$i_{L(-0)} = i_{L(+0)} = 0.$$

Підставивши в рівняння для повного струму, обчислюємо значення сталої інтегрування  $A$ :

$$A = -I_m \sin(\varphi - \psi).$$

Вираз для повного струму набирає вигляду

$$i_L = I_m \sin(\omega t + \varphi - \psi) - I_m \sin(\varphi - \psi)e^{-\frac{R}{L}t}.$$

### IV етап. Побудова графіка струму котушки

Для аналізу одержання виразу струму котушки розглянемо такі два випадки співвідношення кутів  $\psi$  і  $\varphi$ :

- 1)  $\varphi - \psi = 0$ ,
- 2)  $\varphi - \psi = 90^\circ$ .

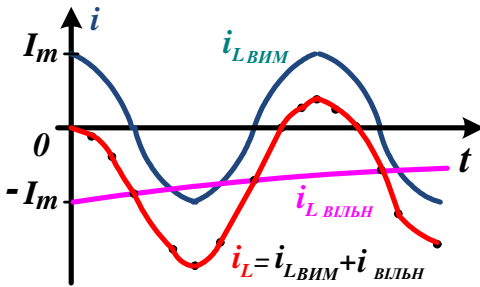
*Перший випадок*

$$i_L = I_m \sin(\omega t) - I_m \sin(0)e^{-\frac{R}{L}t} = I_m \sin \omega t.$$

У цьому випадку в колі відсутній перехідний процес, відразу настає встановлений режим роботи.

*Другий випадок*

$$i_L = I_m \sin(\omega t + 90^\circ) - I_m \sin 90^\circ e^{-\frac{R}{L}t} = I_m \cos \omega t - I_m e^{-\frac{R}{L}t}.$$



Побудуємо графіки зміни в часі струму котушки індуктивності (рис. 12.6).

Рисунок 12.6 – Графіки зміни в часі струму котушки індуктивності

### Контрольні запитання і завдання

1. Як можна визначити сталу часу в колі з одним накопичувачем енергії за осцилограмою струму або напруги в якій-небудь вітці?

2. Чи впливає на сталу часу кола тип джерела живлення: джерело напруги або джерело струму?

3. У скільки разів зміниться стала часу кола з послідовно з'єднаними ділянками  $R, L$  (чи  $R, C$ ), якщо:

а) збільшити опір  $R$  резистора у 2 рази;

б) зменшити індуктивність  $L$  котушки (чи ємність  $C$  конденсатора) у 2 рази?

4. У скільки разів зміниться вільна складова струму в колах з послідовно з'єднаними ділянками  $R, L$  (чи  $R, C$ ) за час  $t = t, t = 3t, t = 5t$ ?

5. До кола з послідовно з'єднаними ділянками  $R, C$  у момент часу  $t = 0$  вмикають джерело синусоїдальної напруги  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ . Як залежать від величини  $\varphi$ :

а)  $u_C(+0)$ ;

б)  $i_C(+0)$ ;

в) максимальне значення струму  $i_C(t)$ ?

6. Зобразить криві, що відповідають функціям  $u_L(t), i_L(t)$ , при вмиканні кола з послідовно сполученими ділянками  $R, L$  джерела синусоїдальної напруги  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ , при  $\varphi = 90^\circ$ . Тут  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  – кут зсуву фаз між напругою і струмом в колі після закінчення перехідного процесу.

7. Зобразіть криві, що відповідають функціям  $u_L(t)$ ,  $i_C(t)$ , при вмиканні до кола з послідовно з'єднаними ділянками  $R$ -,  $C$ - джерела синусоїдальної напруги  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$  при  $\varphi = 90$ . Тут  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  – кут зсуву фаз між напругою і струмом у колі після закінчення перехідного процесу  $u_C(0) = 0$ .

8. Запропонуйте спосіб розрахунку сталої часу кола, що містить довільну кількість резисторів та:

- 1) одну котушку індуктивності;
- 2) один конденсатор.

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 13

### Тема «Аналіз перехідних процесів у розгалужених колах з одним накопичувачем енергії»

#### План

1. Розрахунок перехідних процесів із нульовими початковими умовами.
2. Розрахунок перехідних процесів із ненульовими початковими умовами.

#### 13.1. Розрахунок перехідних процесів із нульовими початковими умовами

Розрахунок перехідних процесів у розгалужених колах з одним реактивним елементом проводять із використанням законів Кірхгофа. Розглянемо електричне коло, зображене на рис. 13.1.

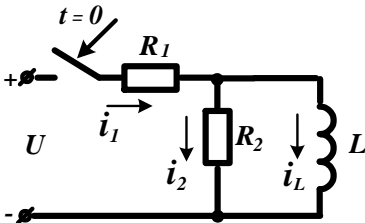


Рисунок 13.1

#### I етап

Складання неоднорідного диференціального рівняння:

$$i_1 - i_2 - i_L = 0,$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = U,$$

$$L \frac{di_L}{dt} - i_2 R_2 = 0.$$

Виразимо струм  $i_1$  з першого рівняння і підставимо в друге рівняння:

$$i_1 = i_2 + i_L,$$

$$(i_2 + i_L)R_1 + i_2 R_2 = U.$$

Виразимо струм  $i_2$  з другого рівняння і підставимо в третє рівняння:

$$i_2(R_1 + R_2) + i_L R_1 = U, \quad i_2 = \frac{U - i_L R_1}{R_1 + R_2},$$

$$L \frac{di_L}{dt} - \frac{U - i_L R_1}{R_1 + R_2} R_2 = 0.$$

Перетворимо одержаний вираз:

$$L \frac{di_L}{dt} - \frac{U - i_L R_1}{R_1 + R_2} R_2 = 0.$$

## II етап. Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

Запишемо розв'язок одержаного рівняння у вигляді

$$i_L = i_{L_{\text{вим}}} + i_{L_{\text{вільн}}},$$

Знайдемо вимушену складову струму шляхом прирівнювання до нуля похідної

$$L \frac{di_L}{dt} = 0.$$

Тоді одержимо

$$i_{L_{\text{вим}}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$i_{L_{\text{вим}}} = \frac{U}{R_1}.$$

Складемо однорідне диференціальне рівняння

$$L \frac{di_{L_{\text{вільн}}}}{dt} + i_{L_{\text{вільн}}} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння і визначимо корінь цього рівняння:

$$\lambda L + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0, \quad \lambda = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Розв'язком однорідного диференціального рівняння є такий вираз:

$$i_{L_{\text{вільн}}} = Ae^{\lambda t}.$$

Вираз для повного струму набирає вигляду

$$i_L = \frac{U}{R_1} + Ae^{\lambda t}.$$

### III етап. Визначення сталих інтегрування

Запишемо рівняння для повного струму у момент часу, що дорівнює нулю:

$$i_{L(+0)} = \frac{U}{R_1} + A.$$

Знайдемо значення струму котушки індуктивності для  $t = +0$ , використовуючи перший закон комутації:

$$i_{L(-0)} = i_{L(+0)} = 0.$$

Підставивши у рівняння для повного струму, знаходимо значення сталої інтегрування  $A$ :

$$A = -\frac{U}{R_1}.$$

Вираз для повного струму набирає вигляду

$$i_L = \frac{U}{R_1} - \frac{U}{R_1} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}.$$

### IV етап. Визначення інших змінних кола

Для визначення виразу для напруги на котушці індуктивності візьмемо похідну від повного струму:

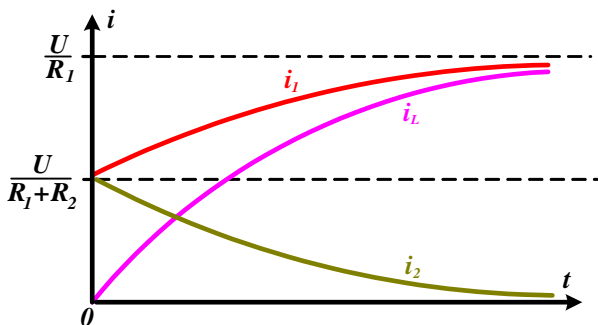
$$\begin{aligned} u_L &= L \frac{di_L}{dt} = L \left( -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right) \left( -\frac{U}{R_1} \right) e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} = \\ &= \frac{R_2 U}{(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}. \end{aligned}$$

Струм другої вітки знайдемо за законом Ома:

$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}.$$

Струм першої вітки знайдемо за першим законом Кірхгофа:

$$i_1 = i_L + i_2 = \frac{U}{R_1} + \left( \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{U}{R_1} \right) e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}.$$



Побудуємо графіки зміни в часі струмів кола (рис. 13.2).

Рисунок 13.2 – Графіки зміни в часі струмів кола

### 13.2. Розрахунок перехідних процесів із ненульовими початковими умовами

Розрахунок перехідних процесів у розгалужених колах з одним реактивним елементом здійснюють із використанням законів Кірхгофа. Розглянемо електричне коло, показане на рис. 13.3.

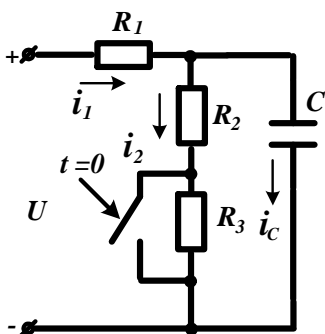


Рисунок 13.3

#### I етап

Складання неоднорідного диференціального рівняння:

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_C &= 0, \\ i_1 R_1 + i_2 R_2 &= U, \\ u_C - i_2 R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Виразимо струм конденсатора через напругу і підставимо в систему рівнянь:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

$$i_1 - i_2 - C \frac{du_C}{dt} = 0,$$

$$i_1 R_1 + i_2 R_2 = U,$$

$$u_C - i_2 R_2 = 0.$$



Виразимо перший струм із першого рівняння і підставимо в друге рівняння системи:

$$i_1 = i_2 + C \frac{du_C}{dt},$$
$$R_1(i_2 + C \frac{du_C}{dt}) + i_2 R_2 = U.$$

Виразимо другий струм і підставимо в третє рівняння початкової системи рівнянь:

$$R_1(i_2 + C \frac{du_C}{dt}) + i_2 R_2 = U,$$
$$i_2(R_1 + R_2) + R_1 C \frac{du_C}{dt} = U,$$
$$i_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} C \frac{du_C}{dt},$$
$$u_C - R_2 \left( \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} C \frac{du_C}{dt} \right) = 0,$$
$$u_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{du_C}{dt} = \frac{U R_2}{R_1 + R_2}.$$

## II етап. Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

Запишемо розв'язок одержаного рівняння у вигляді

$$u_C = u_{C_{\text{вим}}} + u_{C_{\text{вільн}}}.$$

Знайдемо вимушену складову напруги шляхом прирівнювання похідної до нуля:

$$C \frac{du_C}{dt} = 0.$$

Тоді одержимо

$$u_{C_{\text{вим}}} = \frac{U R_2}{R_1 + R_2}.$$

Складемо однорідне диференціальне рівняння

$$u_{C_{\text{вільн}}} + C \frac{du_{C_{\text{вільн}}}}{dt} R = 0.$$

Запишемо характеристичне рівняння і визначимо корінь цього рівняння:

$$1 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \lambda = 0, \quad \lambda = -\frac{R_1 + R_2}{C R_1 R_2}.$$

Розв'язком однорідного диференціального рівняння є такий вираз:

$$u_{C_{\text{вільн}}} = A e^{\lambda t}.$$

Вираз для повної напруги набирає вигляду

$$u_C = \frac{U R_2}{R_1 + R_2} + A e^{\lambda t}.$$

### III етап. Визначення сталих інтегрування

Запишемо рівняння для повної напруги у момент часу, що дорівнює нулю:

$$u_{C(+0)} = \frac{U R_2}{R_1 + R_2} + A.$$

Знайдемо значення напруги на конденсаторі для  $t = +0$ , використовуючи другий закон комутації :

$$u_{C(-0)} = u_{C(+0)}.$$

Для визначення напруги на конденсаторі в початковий момент часу необхідно розрахувати напругу на конденсаторі до комутації.

До замикання ключа напругу на конденсаторі можна обчислити за таким виразом:

$$u_{C(-0)} = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Підставивши у рівняння для повної напруги, обчислюємо значення сталої інтегрування  $A$ :

$$\frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U R_2}{R_1 + R_2} + A, \quad A = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{U R_2}{R_1 + R_2}.$$

Вираз для повної напруги набирає вигляду

$$u_C = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + \left( \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{UR_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda t}.$$

#### IV етап. Визначення інших змінних кола

Для обчислення виразу для струму на конденсаторі візьмемо похідну від повної напруги:

$$\begin{aligned} i_c &= C \frac{du_C}{dt} = C \left( -\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \right) \left( \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{UR_2}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda t} = \\ &= U \frac{R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)R_2} e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda t}. \end{aligned}$$

Вираз для другого струму обчислюють за допомогою закону Ома :

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{u_C}{R_2} = \frac{U}{R_1 + R_2} + \left( \frac{U(R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_2 + R_3)} - \frac{U}{R_1 + R_2} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda t} = \\ &= \frac{U}{R_1 + R_2} + U \left( \frac{R_1 R_3}{R_2(R_1 + R_2 + R_3)(R_1 + R_2)} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda t}. \end{aligned}$$

Перший струм визначають за першим законом Кірхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_c,$$

$$i_1 = \frac{U}{R_1 + R_2} + U \left( \frac{R_3(R_2 + 2R_1)}{R_2(R_1 + R_2 + R_3)(R_1 + R_2)} \right) e^{-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2} \lambda t}.$$

#### Контрольні питання і завдання

1. Як можна визначити сталу часу в колі з одним накопичувачем енергії за осцилограмою струму або напруги в якій-небудь вітці?

2. Як визначають початкові значення струму котушки індуктивності та напруги конденсатора?

3. Спосіб визначення вимушених значень струмів і напруги реактивних елементів.
4. Вплив параметрів реактивних елементів на сталу часу кола.

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 14

### Тема «Аналіз перехідних процесів у розгалужених колах із двома накопичувачами енергії»

#### План

#### 1. Розрахунок перехідного процесу у колі із двома накопичувачами енергії при дії джерела постійної напруги.

#### 14.1 Розрахунок перехідного процесу в колі з двома накопичувачами енергії при дії джерела постійної напруги

##### I етап. Складання неоднорідного диференціального рівняння

Позначимо позитивні напрямки струмів у вітках. Складемо систему рівнянь для миттєвих значень для схеми (рис. 14.1), одержаної після комутації:

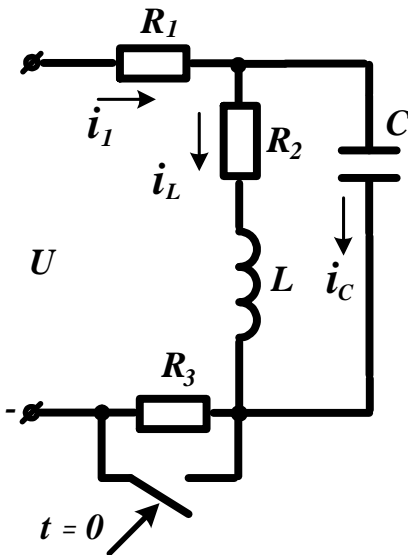


Рисунок 14.1

$$\begin{cases} i_1 - i_L - i_C = 0, \\ i_1 R_1 + i_L R_2 + L \frac{di_L}{dt} = U, \\ u_C - i_L R_2 - L \frac{di_L}{dt} = 0. \end{cases}$$

Як шукана змінна вибирається струм  $i_L$  котушки індуктивності. Перетворимо початкову систему рівнянь відносно струму  $i_L$ .

Для цього з першого рівняння виразимо струм  $i_1 = i_L + i_C$  і підставимо у друге рівняння:

$$(i_L + i_C)R_1 + i_L R_2 + L \frac{di_L}{dt} = U.$$

Із одержаного рівняння виразимо струм  $i_C$ :

$$i_C = \frac{1}{R_1} (U - L \frac{di_L}{dt} - i_L (R_1 + R_2))$$

і підставимо в третє рівняння, де замість напруги  $u_C$  на конденсаторі підставимо його вираз, поданий через струм конденсатора  $i_C$ :

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt,$$

$$\frac{1}{C} \int_0^t \frac{1}{R_1} (U - L \frac{di_L}{dt} - i_L (R_1 + R_2)) dt - i_L R_2 - \frac{L di_L}{dt} = 0.$$

Продиференціюємо одержане рівняння і перетворимо його до такого вигляду:

$$\frac{1}{C} \frac{1}{R_1} (U - L \frac{di_L}{dt} - i_L (R_1 + R_2)) - R_2 \frac{di_L}{dt} - L \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0,$$

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} (R_2 + \frac{L}{CR_1}) + i_L (\frac{R_1 + R_2}{CR_1}) = \frac{U}{CR_1}.$$

## II етап. Розв'язання неоднорідного диференціального рівняння

Загальний розв'язок одержаного рівняння – це струм, що складається із двох доданків:

$$i_L = i_{L\text{вим}} + i_{L\text{вільн}}.$$

Вимушена складова струму у разі дії джерела з постійною напругою може бути визначена з неоднорідного диференціального рівняння. У сталому режимі похідні від струму  $i_2$  дорівнюють нулю, тому це рівняння набирає вигляду:

$$i_{L\text{вим}} (\frac{R_1 + R_2}{CR_1}) = \frac{U}{CR_1},$$

$$i_{L\text{вим}} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Вільна складова струму  $i_{L\text{вільн}}$  визначається розв'язком одержаного однорідного диференціального рівняння, прирівнюючи до нуля праву частину рівняння:

$$L \frac{d^2 i_{L\text{вільн}}}{dt^2} + \frac{di_{L\text{вільн}}}{dt} \left( R_2 + \frac{L}{CR_1} \right) + i_{L\text{вільн}} \left( \frac{R_1 + R_2}{CR_1} \right) = 0.$$

Для одержання характеристичного рівняння візьмемо таке позначення:

$$\frac{di_{L\text{вільн}}}{dt} = \lambda i_{L\text{вільн}}, \quad \frac{d^2 i_{L\text{вільн}}}{dt^2} = \lambda^2 i_{L\text{вільн}}.$$

Із урахуванням взятих позначень перетворимо однорідне диференціальне рівняння:

$$L\lambda^2 i_{L\text{вільн}} + i_{L\text{вільн}} \lambda \left( R_2 + \frac{L}{CR_1} \right) + i_{L\text{вільн}} \left( \frac{R_1 + R_2}{CR_1} \right) = 0,$$

$$i_{L\text{вільн}} \left( L\lambda^2 + \lambda \left( R_2 + \frac{L}{CR_1} \right) + \frac{R_1 + R_2}{CR_1} \right) = 0,$$

$$L\lambda^2 + \lambda \left( R_2 + \frac{L}{CR_1} \right) + \frac{R_1 + R_2}{CR_1} = 0.$$

У результаті перетворень одержимо квадратне алгебраїчне рівняння. Беручи корені цього рівняння дійсними і різними, запишемо розв'язок у такому вигляді:

$$i_{L\text{вільн}} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Вираз для повного струму набирає вигляду

$$i_L = i_{L\text{вим}} + i_{L\text{вільн}} = \frac{U}{R_1 + R_2} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

### III етап. Визначення сталих інтегрування

В одержаному рівнянні повного струму, окрім невідомого струму  $i_L$ , невідомими є сталі інтегрування  $A_1$ ,  $A_2$ . Для визначення цих сталих потрібне ще одне рівняння, яке можна одержати шляхом диференціювання виразу для повного струму,

$$\frac{di_L}{dt} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Запишемо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування:

$$\begin{cases} i_L = \frac{U}{R_1 + R_2} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \frac{di_L}{dt} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Для визначення значень сталих  $A_1$ ,  $A_2$  розглянемо розв'язок системи рівнянь для моменту часу  $t = +0$ :

$$\begin{cases} i_{L(+0)} = \frac{U}{R_1 + R_2} + A_1 + A_2, \\ \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(+0)} = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \end{cases}$$

У цій системі рівнянь, окрім сталих інтегрування  $A_1$  і  $A_2$ , невідомими є струм  $i_{L(+0)}$  і його похідна  $(di_L/dt)_{(+0)}$  у момент часу  $t = +0$ . Для визначення похідної струму  $i_L$  скористаємося системою рівнянь, складеною за законами Кірхгофа, розглянувши її для моменту часу  $t = +0$ :

$$\begin{cases} i_{1(+0)} - i_{L(+0)} - i_{C(+0)} = 0, \\ i_{1(+0)} R_1 + i_{L(+0)} R_2 + L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(+0)} = U, \\ u_{C(+0)} - i_{L(+0)} R_2 - L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(+0)} = 0. \end{cases}$$

У системі рівнянь невідомими змінними є  $i_{1(+0)}$ ,  $i_{L(+0)}$ ,  $i_{C(+0)}$ ,  $u_{C(+0)}$ ,  $(di_L/dt)_{(+0)}$ , тому необхідно дописати ще два рівняння, складені за законами комутації:

$$\begin{cases} i_{L(-0)} = i_{L(+0)}, \\ u_{C(-0)} = u_{C(+0)}. \end{cases}$$



Знайдемо значення струму в котушці індуктивності, використовуючи перший закон комутації:

$$i_{L(-0)} = i_{L(+0)}.$$

До комутації коло перебувало у вимушеному режимі роботи, тому струм котушки індуктивності та напруга на конденсаторі у момент часу  $t = -0$  дорівнюють їх **вимушеним значенням**.

Оскільки під час вимушеного режиму роботи струм конденсатора і напруга на котушці індуктивності дорівнюють нулю, то система рівнянь за законами Кірхгофа для **вимушених значень** набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} i_{1\text{вим}} - i_{L\text{вим}} = 0, \\ i_{L\text{вим}}(R_1 + R_3) + i_{L\text{вим}}R_2 = U, \\ u_{C\text{вим}} - i_{L\text{вим}}R_2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{1\text{вим}} = i_{L\text{вим}}, \\ i_{L\text{вим}}(R_1 + R_3 + R_2) = U, \\ u_{C\text{вим}} = i_{L\text{вим}}R_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{L\text{вим}} = \frac{U}{R_1 + R_3 + R_2}, \\ u_{C\text{вим}} = \frac{UR_2}{R_1 + R_3 + R_2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{L(-0)} = \frac{U}{R_1 + R_3 + R_2}, \\ u_{C(-0)} = \frac{UR_2}{R_1 + R_3 + R_2}. \end{cases}$$

Підставимо одержані значення струму котушки індуктивності та напруги конденсатора в систему рівнянь, складену для моменту часу  $t = +0$ :

$$\begin{cases} i_{1(+0)} - \frac{U}{R_1 + R_3 + R_2} - i_{C(+0)} = 0, \\ i_{1(+0)} R_1 + \frac{U}{R_1 + R_3 + R_2} R_2 + L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(+0)} = U, \\ \frac{UR_2}{R_1 + R_3 + R_2} - \frac{U}{R_1 + R_3 + R_2} R_2 - L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(+0)} = 0. \end{cases}$$

Із останнього рівняння знаходимо значення похідної струму котушки індуктивності для  $t = +0$ :

$$\left\{ L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(+0)} = \frac{UR_2}{R_1 + R_3 + R_2} - \frac{UR_2}{R_1 + R_3 + R_2} = 0. \right.$$

Запишемо систему рівнянь для визначення сталих інтегрування:

$$\begin{cases} \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U}{R_1 + R_2} + A_1 + A_2, \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \end{cases}$$

Із розв'язку системи рівнянь знаходимо значення сталих інтегрування.

#### IV етап. Визначення інших змінних колах

Для визначення виразу напруги на котушці індуктивності візьмемо похідну від струму:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = L(\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Вираз для напруги на конденсаторі записують з рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа:

$$\begin{aligned} u_C - i_L R_2 - L \frac{di_L}{dt} &= 0, \\ u_C &= i_L R_2 + L \frac{di_L}{dt}, \end{aligned}$$

$$u_C = \left( \frac{U}{R_1 + R_2} + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \right) R_2 +$$

$$+ L(\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}),$$

$$u_C = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + (R_2 + L\lambda_1)A_1 e^{\lambda_1 t} + (R_2 + L\lambda_2)A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Вираз для струму конденсатора знаходять з похідної напруги:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = C((R_2 + L\lambda_1)\lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + (R_2 + L\lambda_2)\lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Вираз для першого струму знаходять з рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа:

$$i_1 = \frac{U - u_C}{R_1} = \frac{U}{R_1} - \frac{(R_2 + L\lambda_1)A_1 e^{\lambda_1 t}}{R_1} - \frac{(R_2 + L\lambda_2)A_2 e^{\lambda_2 t}}{R_1}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. Як визначають початкові значення струму котушки індуктивності та напруги конденсатора в колі з двома накопичувачами енергії?
2. Визначення вимушених значень струмів і напруги на реактивних елементах у колі з двома накопичувачами енергії.
3. Який порядок визначення значень похідних напруги на котушці індуктивності та струму конденсатора в колі з двома накопичувачами енергії?
4. Чому саме струми котушок індуктивності та напруги конденсаторів визначають енергетичний стан електричного кола?
5. Характеристичне рівняння, складене для кола з резисторів, котушки індуктивності та конденсатора має один із таких коренів:
  - а)  $+j20$ ;

б) –  $2+j5$ ;

в) –  $j20$ ;

г) – 2.

Зазначте, які ще корені повинне мати це рівняння.

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 15

### Тема «Перехідні процеси при дії синусоїдального джерела»

#### План

### 1 Аналіз перехідних процесів у розгалужених колах із двома накопичувачами енергії при дії синусоїдального джерела.

#### 15.1. Аналіз перехідних процесів у розгалужених колах із двома накопичувачами енергії при дії синусоїдального джерела

Рівняння, що визначає будь-яку змінну кола, – струми у вітках, напругу на елементах, у загальному випадку містить дві складові: вимушену і вільну. Вільну складову визначають розв’язком однорідного диференціального рівняння, тобто рівнянням без правої частини. Це означає, що вид вільної складової не залежить від виду джерела, діючого в колі, а визначається тільки схемою з’єднання елементів кола та їх параметрами.

Вимушена складова шуканої змінної залежить від виду джерела, діючого в колі. Розрахунок вимушеної складової при дії джерела синусоїдальної форми здійснюють в комплексній формі.

Крім розрахунку вимушеної складової, необхідно звернути увагу на визначення початкових умов при визначенні сталих інтегрування. У цьому випадку здійснюють розрахунок значень струмів і напруги в комплексній формі для кола до комутації. Потім одержані значення змінних записують у синусоїдальній формі та в одержані вирази підставляють  $t = 0$ .

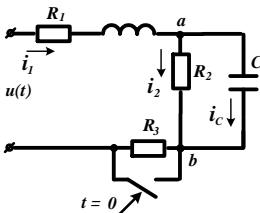


Рисунок 15.1

Розглянемо розрахунок початкових значень змінних на прикладі кола, наведеного на рисунку 15.1.

На вході кола діє напруга, що змінюється за синусоїдальним законом

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Визначимо струми у вітках схеми комплексним методом.

Запишемо напругу джерела в комплексній формі:

$$\dot{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi} = U e^{j\varphi}.$$

Визначимо перший струм кола до комутації:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}},$$

$$\text{де } \underline{Z} = R_1 + R_3 + j\omega L + \frac{R_2 \frac{1}{j\omega}}{R_2 + \frac{1}{j\omega}}.$$

Тоді вираз для струму в комплексній формі матиме такий вигляд:

$$\dot{I}_1 = I e^{j\varphi_1}.$$

Виразимо струми  $\dot{I}_C$  і  $\dot{I}_2$  через параметри кола:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{R_2} = \dot{I}_1 \cdot \frac{R_2 \frac{1}{j\omega}}{R_2 + \frac{1}{j\omega}} \cdot \frac{1}{R_2} = \dot{I}_1 \frac{1}{R_2 j\omega + 1},$$

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{U}_{ab}}{\frac{1}{j\omega}} = \dot{I}_1 \cdot \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega}}{R_2 + \frac{1}{j\omega}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{j\omega}} = \dot{I}_1 \frac{R_2 j\omega}{R_2 j\omega + 1}.$$

Тоді вирази для струмів  $\dot{I}_C$  і  $\dot{I}_2$  матимуть такий вигляд:

$$\dot{I}_2 = I_2 e^{j\varphi_2}, \quad \dot{I}_C = I_C e^{j\varphi_C}.$$

Запишемо струми кола в синусоїдальній формі:

$$\begin{cases} i_1 = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_1), \\ i_2 = I_2 \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_2), \\ i_c = I_c \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_c). \end{cases}$$

Підставимо в одержані вирази  $t = +0$  і обчислимо значення цих струмів у момент часу безпосередньо перед комутацією:

$$\begin{cases} i_{1(-0)} = I_1 \sqrt{2} \sin \varphi_1, \\ i_{2(-0)} = I_2 \sqrt{2} \sin \varphi_2, \\ i_{c(-0)} = I_c \sqrt{2} \sin \varphi_c. \end{cases}$$

Аналогічно розраховують початкові значення напруги на елементах кола.

### Контрольні питання і завдання

1. До кола з послідовно з'єднаними ділянками  $R$ ,  $C$  у момент часу  $t = 0$  вмикають джерело синусоїдальної напруги  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

Як залежать від величини  $\varphi$ :

а)  $u_{C(+0)}$ ; б)  $i_{C(+0)}$ ; в) максимальне значення струму  $i_C(t)$ ?

2. Зобразіть криві, що відповідають функціям  $u_L(t)$ ,  $i_L(t)$ , при вмиканні до кола з послідовно з'єднаними ділянками  $R$ ,  $L$  джерела синусоїдальної напруги  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$  при  $\varphi = 90^\circ$ . Тут  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  – кут зсуву фаз між напругою і струмом в колі після закінчення перехідного процесу.

3. Параметри кола з послідовно з'єднаними ділянками  $R$ ,  $L$ ,  $C$  такі, що має місце аперіодичний розряд конденсатора. Чи може розряд стати коливальним, якщо: а) зменшувати опір  $r$  резистора; б) збільшувати індуктивність  $L$  котушки; в) зменшувати ємність  $C$  конденсатора; г) зменшувати відношення  $R/L$ ;

д) збільшувати частоту резонансу контуру;

е) збільшувати добротність контуру;

ж) збільшувати хвильовий опір контуру?

4. Коло, складене з послідовно з'єднаних ділянок  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , вмикають до постійної напруги  $U_0$  за нульових початкових умов. Доведіть, що при аперіодичному перехідному процесі напруга на конденсаторі не може перевищувати величину  $U_0$ .

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.



## Лекція 16

### Тема «Операторний метод розрахунку перехідних процесів»

#### План

1. Основні поняття.
2. Операторні зображення деяких функцій часу.
3. Закони електричних кіл в операторній формі.

#### 16.1. Основні поняття

Суть операторного методу полягає в тому, що функції  $f(t)$  дійсної змінної  $t$ , яку називають оригіналом, ставиться у відповідність до функції  $F(p)$  комплексна змінна  $p$ , яку називають **зображенням**.

У результаті цього, похідні та інтеграли від оригіналів замінюють алгебраїчними функціями від відповідних зображень (диференціювання замінюють множенням на оператор  $p$ , а інтегрування – діленням на нього), що, у свою чергу, визначає перехід від системи інтегрально-диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь відносно зображень шуканих змінних.

Під час розв'язування цих рівнянь знаходять зображення і далі шляхом зворотного переходу – оригінали. Найважливішим моментом при цьому в практичному плані є необхідність визначення тільки незалежних початкових умов, що істотно полегшує розрахунок перехідних процесів у колах високого порядку порівняно з класичним методом.

Зображення  $F(p)$  заданої функції  $f(t)$  визначають відповідно до прямого перетворення Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad \text{або} \quad f(t) \bullet = F(p), \text{ де } \bullet = \text{ знак}$$

відповідності;

$p = \sigma + j\omega p$  – комплексний оператор Лапласа.

Розрахунок перехідних процесів операторним методом умовно виконується за 3 етапи.

На 1-му етапі розрахунку систему диференціальних рівнянь складають за законами Кірхгофа для оригіналів функцій, після застосування перетворення Лапласа перетворюють на сис-

тему алгебраїчних рівнянь для операторних зображень цих функцій.

На 2-му етапі виконують розв'язання системи операторних алгебраїчних рівнянь відносно шуканої функції, внаслідок чого одержують вирази шуканої функції в операторній формі  $F(p)$ .

На завершальному 3-му етапі виконують зворотний перехід від знайденого операторного розв'язку для шуканої функції  $F(p)$  до відповідної їй функції часу  $f(t)$ , тобто виконують перехід від зображення функції  $F(p)$  до її оригіналу  $f(t)$ .

## 16.2. Операторні зображення деяких функцій часу

Знайдемо операторні зображення деяких функцій часу, які трапляються в електротехніці.

1. Зображення сталої функції  $f(t) = A$ :

$$f(t) = A \Leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} A e^{-pt} dt = -\frac{A}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{p}.$$

2. Зображення експоненціальних функцій:

$$f(t) = e^{\pm\alpha t} \Leftrightarrow F(p) = \int_0^{\infty} e^{\pm\alpha t} e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{-p \pm \alpha} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p \mp \alpha},$$

$$f(t) = e^{j(\alpha t + \psi)} = e^{j\psi} e^{j\alpha t} \Leftrightarrow F(p) = \frac{e^{j\psi}}{p - j\alpha}.$$

3. Зображення гармонійних функцій:

$$f(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{p - j\omega} - \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2},$$

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(p) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p - j\omega} + \frac{1}{p + j\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2},$$

$$f(t) = \sin(\omega t + \psi) = \cos \psi \sin \omega t + \sin \psi \cos \omega t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(p) = \frac{\omega \cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + \omega^2}.$$

4. Зображення 1-ї та 2-ї похідних від функції часу:

$$\frac{df}{dt} \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot df =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot df = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \cdot d(e^{-pt}) =$$

$$= 0 - f(0) + p \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = pF(p) - f(0),$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Leftrightarrow p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0).$$

5. Зображення певного інтеграла від функції:

$$\int_0^t f(t) \cdot dt \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot e^{-pt} \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \left[ \int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot d(e^{-pt}) =$$

$$= -\frac{1}{p} \left[ \int_0^t f(t) \cdot dt \right] \cdot e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt = 0 + \frac{1}{p} F(p).$$

Для зручності користування зведемо одержані результати в загальну таблицю, що називається таблицею відповідності.

Таблиця 16.1 – Таблиця відповідності

Оригінал функції $f(t)$	Зображення функції $F(p)$
$A$	$\frac{A}{p}$
$e^{\pm\alpha t}$	$\frac{1}{p \pm \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \alpha^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \alpha^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{df}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \frac{df}{dt}(0)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{p} F(p)$

### 16.3. Закони електричних кіл в операторній формі

Миттєві значення струму  $i(t)$  і напруги  $u(t)$  на ідеальних елементах електричних схем пов'язані між собою диференціальною формою рівнянь:

$$u_R(t) = iR \text{ – для резистора;}$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \text{ – для котушки індуктивності;}$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) \text{ – для конденсатора.}$$

Застосуємо до диференціальних рівнянь перетворення Лапласа і одержимо відповідні їм операторні зображення:

$$U_R(p) = I(p) \cdot R \text{ – для резистора;}$$

$$U_L(p) = I(p) \cdot pL - Li(0) \text{ – для котушки індуктивності;}$$

$$U_C(p) = I(p) \frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} \text{ – для конденсатора.}$$

Таким чином, ідеальним елементам  $R$ ,  $L$ ,  $C$  електричної схеми відповідатимуть нові схемні подання цих елементів в операторній схемі (див. таблицю 16.2.).

Тут  $R$ ,  $pL$ ,  $1/pC$  – операторні опори відповідні до резистора  $R$ , котушки  $L$  і конденсатора  $C$ .

Операторний опір  $Z(p)$  будь-якої ділянки схеми можна одержати з його комплексного опору  $Z(j\omega)$ , замінюючи у виразі множник  $j\omega$  на оператор  $p$ .

$Li(0)$ ,  $u_C(0)/p$  – внутрішні джерела ЕРС, обумовлені запасами енергії в магнітному і електричному полях у момент комутації при  $t = 0$ .

Напрявлення дії внутрішніх джерел ЕРС беруться за напрямком струму  $i(0)$  для джерела  $Li(0)$  і назустріч напрузі  $u_C(0)$  для джерела  $u_C(0)/p$ .

Нижче в таблиці 16.2 наведено основні електричні схеми, відповідні диференціальні рівняння, операторні рівняння та операторні схеми.

Таблиця 16.2 – Основні схеми

Електрична схема				
Диференціальне рівняння	$u_R = Ri_R$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$u = \frac{1}{C} \int_0^t idt + u(0)$	$E = \text{const}$
Операторне рівняння	$U_R(p) = RI_R(p)$	$U_L(p) = pLI_L(p) - Li_L(0)$	$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}$	$\frac{E}{p}$
Операторна схема				

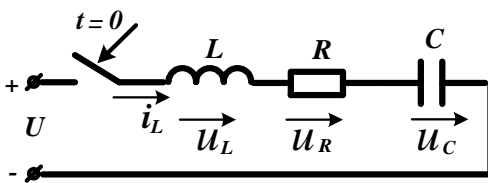


Рисунок 16.1

Із урахуванням одержаних співвідношень будь-яку електричну схему для оригіналів функцій  $i(t)$ ,  $u(t)$ , (рис. 16.1) можна замінити відповідною їй операторною схемою для

зображень функцій  $I(p)$ ,  $U(t)$ , (рис. 7.2).

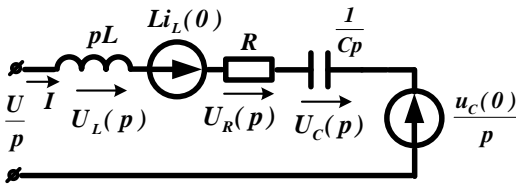


Рисунок 16.2

Для схеми, зображеної на рис. 16.2, запишемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$U_L(p) + U_R(p) + U_C(p) = Li(0) - \frac{u_c(0)}{p} + \frac{U}{p},$$

$$I(p) = \frac{\frac{U}{p} + Li(0) - \frac{u_c(0)}{p}}{R + pL + \frac{1}{pC}} \frac{\Sigma E(p)}{Z(p)},$$

де  $Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC}$  – операторний опір усієї схеми;

$\Sigma E(p)$  – сума усіх джерел ЕРС контуру, зокрема і внутрішніх.

Для складних операторних схем справедливі 1-й і 2-й закони Кірхгофа в операторній формі:

$$\sum I(p) = 0,$$

$$\sum I(p)Z(p) = \sum E(p).$$

Для розрахунку таких схем можна застосовувати будь-які методи розрахунку лінійних кіл: метод законів Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів та інші.

### Контрольні питання і завдання

1. Чи є операторне зображення функції  $f(t)$  : а) функцією часу; б) функцією оператора  $p$ ?
2. Які розмірності зображення: а) напруги  $U(p)$ ; б) струму  $I(p)$ ; в) опору  $Z(p)$ ; г) провідності  $Y(p)$ ?
3. Чи дорівнює зображення добутку  $f_1(t) \cdot f_2(t)$  функцій добутку їх операторних зображень  $F_1(p) \cdot F_2(p)$ ?

4. У чому полягає відмінність в урахуванні початкових умов при розрахунку перехідних процесів у колах класичним і операторним методами?

5. За виконання якої умови можна одержати вхідний операторний опір  $Z(p)$  двополюсника, замінюючи величину  $j\omega$  на  $p$  у виразі його комплексного вхідного опору  $Z(j\omega)$ ?

6. Ділянки електричного кола з'єднані послідовно (паралельно). Чи можна додавати їх операторні опори (провідність), якщо початкові умови: а) нульові; б) ненульові?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.



## Лекція 17

### Тема «Складання операторних розв'язків»

#### План

1. Електричні кола з одним накопичувачем енергії.
2. Електричні кола з двома накопичувачами енергії.
3. Перехід від зображення функції  $F(p)$  до її оригіналу  $f(t)$ .  
Формула розкладання.

#### 17.1. Електричні кола з одним накопичувачем енергії

##### 17.1.1. Схеми з нульовими початковими умовами

Потрібно скласти операторні вирази для струмів віток електричного кола, наведеного на рис. 17.1.

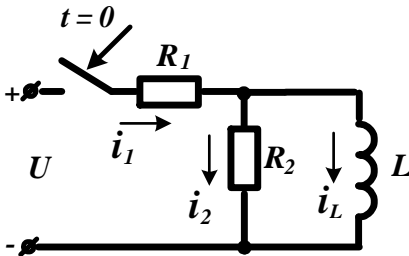


Рисунок 17.1

Знаходимо початкове значення струму котушки індуктивності. Оскільки ключ стоїть на вході кола, то на момент вмикання струм дорівнюватиме нулю. На рисунку 17.2 наведена операторна схема заміщення.

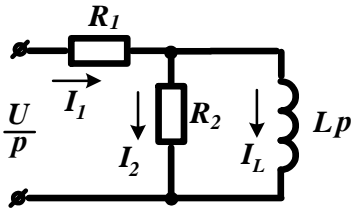


Рисунок 17.2

Визначимо перший струм:

$$I_1 = \frac{U}{pZ(p)},$$

де

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 L p}{R_2 + L p},$$

$$I_1 = \frac{U}{p \left( R_1 + \frac{R_2 L p}{R_2 + L p} \right)} = \frac{U(R_2 + L p)}{p(R_1(R_2 + L p) + R_2 L p)}.$$

Вираз для другого струму набирає такого вигляду:

$$I_2 = I_1 \frac{R_2 L p}{R_2 + L p} \cdot \frac{1}{R_2} = I_1 \frac{L p}{R_2 + L p} =$$

$$\frac{U(R_2 + Lp)Lp}{p(R_1(R_2 + Lp) + R_2Lp)(R_2 + Lp)} = \frac{UL}{(R_1(R_2 + Lp) + R_2Lp)}$$

Аналогічно знаходять вираз для струму котушки індуктивності :

$$I_L = I_1 \frac{R_2Lp}{R_2 + Lp} \cdot \frac{1}{Lp} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + Lp} =$$

$$= \frac{U(R_2 + Lp)R_2}{p(R_1(R_2 + Lp) + R_2Lp)(R_2 + Lp)} = \frac{UR_2}{p(R_1(R_2 + Lp) + R_2Lp)}$$

### 17.1.2. Схеми з ненульовими початковими умовами

Скласти операторні вирази для струмів віток електричного кола, наведеного на рис. 17.3.

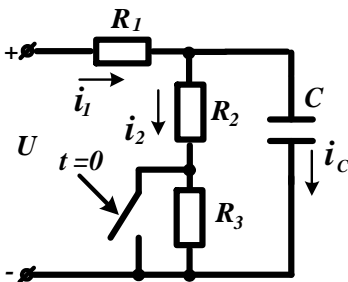


Рисунок 17.3

Знаходимо початковою значення напруги на конденсаторі.

До замикання ключа ця напруга дорівнюватиме

$$u_{C(-0)} = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

При складанні операторної схеми заміщення (рис. 17.4) послідовно з конденсатором вмикається додаткове джерело енергії.

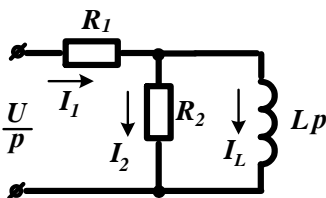


Рисунок 17.4 – Операторна схема заміщення

Знайдемо напругу між вузлами «a» і «b» :

$$U_{ab} = \frac{\frac{U}{p} + \frac{u_C(0)Cp}{p}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + Cp}$$

Струми у вітках визначають за узагальненим законом Ома:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + \frac{U}{p}}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}, \quad I_C = \frac{U_{ab} - \frac{u_C(0)}{p}}{\frac{1}{Cp}}.$$

## 17.2. Електричні кола з двома накопичувачами енергії

Розглянемо складання операторної схеми заміщення на прикладі електричного кола, наведеного на рис. 17.5.

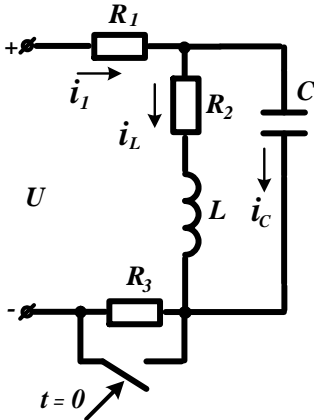


Рисунок 17.5

На вході цього кола діє постійна напруга, величина якої  $U$ . Визначаємо величини струму в котушці індуктивності  $i_L$  і напругу на конденсаторі  $u_C$  до комутації.

Для їх визначення складається система рівнянь за законами Кірхгофа, що описує режим роботи кола, до замикання ключа. Отже,

$$\begin{cases} i_{1(-0)} - i_{L(-0)} - i_{c(-0)} = 0, \\ U = i_{1(-0)}R_1 + i_{L(-0)}R_2 + L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(-0)} + i_{1(-0)}R_3, \\ 0 = U_{c(-0)} - L \left( \frac{di_L}{dt} \right)_{(-0)} - i_{L(-0)}R_2. \end{cases}$$

Розглянемо систему рівнянь з точки зору сталого режиму, оскільки до початку перехідного процесу в колі спостерігається сталий режим. Під час дії постійної напруги похідні від струмів і напруги кола дорівнюватимуть нулю. Із урахуванням останнього зауваження система рівнянь набирає вигляду

$$\begin{cases} i_{1(-0)} - i_{L(-0)} = 0, \\ U = i_{1(-0)}(R_1 + R_3) + i_{L(-0)}R_2, \\ 0 = U_{c(-0)} - i_{L(-0)}R_2. \end{cases}$$

У системі рівнянь струм конденсатора і напруга котушки індуктивності вважають такими, що дорівнюють нулю, оскільки

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}, \quad u_L = C \frac{di_L}{dt}.$$

Визначимо з системи рівнянь значення струму індуктивності та напруги на конденсаторі:

$$i_{L(-0)} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad u_{c(-0)} = \frac{UR_2}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Використовуючи таблицю відповідності і схеми заміщення, наведені в таблиці 16.1, складемо операторну схему заміщення електричного кола, наведеного на рис. 7.8. Схему складають для кола, одержаного після комутації кола.

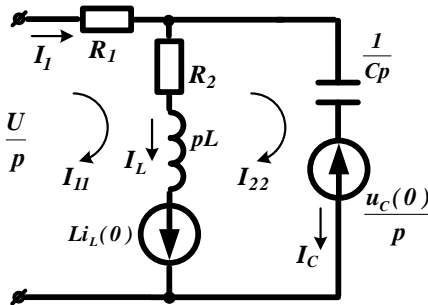


Рисунок 17.6

В одержаному електричному колі діють три джерела енергії: незалежне джерело енергії, увімкнуте на вході кола, величиною  $U/p$ , і два джерела, що враховують енергію, накопичену в реактивних елементах кола, до комутації величиною

$$Li_{(-0)} \text{ і } U_{c(-0)}/p.$$

Складемо рівняння за методом контурних струмів для кола, наведеного на рис. 17.6. Виберемо напрямки контурних струмів і напрямків обходу контурів за годинниковою стрілкою. Тобто

$$I_{11}(p)(R_1 + Lp + R_2) - I_{22}(p)(Lp + R_2) = \frac{U}{p} + Li_{L(0)},$$

$$-I_{11}(p)(Lp + R_2) + I_{22}(p)(Lp + R_2 + \frac{1}{pc}) = \frac{-u_{c(0)}}{p} - Li_{L(0)} .$$

Знайдемо операторні вирази для контурних струмів. Виразимо з першого рівняння системи струм  $I_{22}(p)$  :

$$I_{22}(p) = \frac{1}{Lp + R_2} (I_{11}(p)(R_1 + R_2 + Lp) - \frac{U}{p} - Li_{L(0)}) .$$

Підставимо одержаний вираз для струму  $I_{22}(p)$  у друге рівняння системи рівнянь і виразимо струм  $I_{11}(p)$  :

$$\begin{aligned} I_{22}(p) &= \frac{I_{11}(p)(R_1 + R_2 + Lp)}{Lp + R_2} - \frac{1}{Lp + R_2} (\frac{U}{p} + Li_{L(0)}) , \\ -I_{11}(p)(Lp + R_2) + &(\frac{I_{11}(p)(R_1 + R_2 + Lp)}{Lp + R_2} - \\ & - \frac{1}{Lp + R_2} (\frac{U}{p} + Li_{L(0)}))(Lp + R_2 + \frac{1}{pc}) = \frac{-u_{c(0)}}{p} - Li_{L(0)} . \\ I_{11}(p) &(\frac{(R_1 + R_2 + Lp)}{Lp + R_2} - (Lp + R_2))(Lp + R_2 + \frac{1}{pc}) = \\ &= \frac{-u_{c(0)}}{p} - Li_{L(0)} + \frac{1}{Lp + R_2} (\frac{U}{p} + Li_{L(0)})(Lp + R_2 + \frac{1}{pc}) , \\ &\frac{-u_{c(0)}}{p} - Li_{L(0)} + \frac{1}{Lp + R_2} (\frac{U}{p} + Li_{L(0)})(Lp + R_2 + \frac{1}{pc}) \\ I_{11}(p) &\frac{\frac{-u_{c(0)}}{p} - Li_{L(0)} + \frac{1}{Lp + R_2} (\frac{U}{p} + Li_{L(0)})(Lp + R_2 + \frac{1}{pc})}{(\frac{R_1 + R_2 + Lp}{Lp + R_2} - (Lp + R_2))(Lp + R_2 + \frac{1}{pc})} , \end{aligned}$$

$$I_{11}(p) = I_1(p) .$$

### 17.3. Перехід від зображення функції $F(p)$ до її оригіналу $f(t)$ .

#### Формула розкладання

У результаті спільного розв'язання системи операторних рівнянь одержують вираз для шуканої функції в операторній

формі, тобто її операторне зображення  $F(p)$ . Перехід від операторного зображення функції до її оригіналу, тобто до функції часу  $f(t)$ , є найбільш трудомісткою частиною операторного методу розрахунку. На практиці для цієї мети застосовують два способи.

*Перший спосіб* – за таблицею відповідності. У цьому разі вираз операторної функції  $F(p)$  перетвориться на один із табличних видів і за таблицею відповідності визначають оригінал функції  $f(t)$ . Необхідно відзначити, що таке перетворення вдається здійснити лише для простих виразів, що істотно обмежує можливість цього способу.

*Другий спосіб* – за формулою розкладання є більш універсальним, тому здебільшого застосовується на практиці. Суть цього способу викладена нижче. При розв'язуванні системи операторних рівнянь для шуканої функції одержують операторний вираз  $F(p)$  у вигляді дробу, в чисельнику і знаменнику якого стоять степеневі поліноми:

$$F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0} = \frac{N(p)}{M(p)}.$$

Із курсу математики відомо, що при виконанні таких умов:

а)  $m > n$

б) рівняння  $M(p) = 0$  не містить кратного кореня, то вираз

$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$  може бути поданий у вигляді суми простих

дробів:

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_m}{p - p_m} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{A_k}{p - p_k},$$

де  $A_1, A_2, \dots, A_m$  – сталі коефіцієнти,  $p_1, p_2, \dots, p_m$  – корені рівняння  $M(p) = 0$ .

Для визначення коефіцієнта  $A_1$  помножимо обидві частини рівняння на множник  $(p - p_1)$  і знайдемо границю виразу  $F(p)$  при  $p \rightarrow p_1$ . Очевидно, що в правій частині рівняння одержимо

$A_1$ , а в лівій – невизначеність, оскільки  $M(p_1) = 0$ . Розкриємо цю невизначеність за правилом Лопіталія:

$$\begin{aligned} A_1 &= \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p)}{M(p)} (p - p_1) = \\ &= \lim_{p \rightarrow p_1} \frac{N(p) \cdot 1 + (p - p_1) \cdot N'(p)}{M'(p)} = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)}. \end{aligned}$$

Отже, формула для довільного коефіцієнта

$$A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}.$$

Тоді вираз шуканої функції набере вигляду

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} \cdot \frac{1}{p - p_1} + \dots + \frac{N(p_m)}{M'(p_m)} \cdot \frac{1}{p - p_m} = \\ &= \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k}. \end{aligned}$$

За таблицею відповідності знаходимо, що операторному зображенню  $F(p) = \frac{A_k}{p - p_k}$  відповідає оригінал  $f(t) = A_k e^{p_k t}$ ,

отже, оригінал шуканої функції набере вигляду

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Це рівняння дістало назву формули розкладання і використовується для переходу від операторного зображення функції до її оригіналу, тобто функції часу:

$$f(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{N(p_3)}{M'(p_3)} e^{p_3 t} + \dots + \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}.$$

#### *Порядок використання формули розкладання*

1. Операторне зображення шуканої функції  $F(p)$  перетворюють до вигляду дроби  $F(p) = \frac{N(p)}{M(p)}$ , щоб у її чисельнику і знаменнику стояли степеневі поліноми.

2. Прирівнюють до нуля знаменник  $M(p) = 0$  дробу і знаходять корені цього рівняння  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

3. Знаходять вираз похідної знаменника дробу  $M'(p) = \frac{dM(p)}{dp}$ .

4. Визначають коефіцієнти  $A_k = \frac{N(p_k)}{M'(p_k)}$  шляхом чергової підстановки значень кожного з коренів  $p_1, p_2, \dots, p_m$  у цей вираз.

5. Записують розв'язок для шуканої функції часу  $f(t)$  у вигляді суми окремих доданків-експонент, за необхідності спрощують одержаний вираз:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{k=m} A_k e^{p_k t}.$$

#### *Зауваження до формули розкладання*

1. Якщо на початковій схемі є джерела постійних ЕРС  $E$ , то рівняння  $M(p) = 0$  може мати один корінь, що дорівнює нулю ( $p_1 = 0$ ). Підстановка цього кореня у формулу розкладання дає сталу величину  $f_1(t) = \frac{N(0)}{M'(0)} e^{0 \cdot t} = \text{const}$ , яка відповідає сталій складовій шуканої функції.

2. Якщо на початковій схемі є джерела синусоїдальних ЕРС  $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$ , то рівняння  $M(p) = 0$  матиме два суто уявних і спряжених корені  $p_1 = j\omega$  і  $p_2 = -j\omega$ . Підстановка цих коренів у формулу розкладання в сумі дає синусоїдальну функцію часу, що відповідає сталій складовій шуканої функції:



$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= \frac{N(j\omega)}{M'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{N(-j\omega)}{M'(-j\omega)} e^{-j\omega t} = \\
 &= (C + jD)(\cos \omega t + j \sin \omega t) + (C - jD)(\cos \omega t - j \sin \omega t) = \\
 &= 2C \cos \omega t - 2D \sin \omega t = A \sin(\omega t + \psi).
 \end{aligned}$$

3. Якщо рівняння  $M(p) = 0$  має два комплексно зв'язаних корені  $p_1 = -\sigma + j\omega_0$  і  $p_2 = -\sigma - j\omega_0$ , то підстановка цих коренів у формулу розкладання в сумі дає синусоїдальну функцію із загасаючою амплітудою:

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = \\
 &= (C + jD) e^{(-\sigma + j\omega_0)t} + (C - jD) e^{(-\sigma - j\omega_0)t} = \\
 &= e^{-\sigma t} \cdot (2C \cos \omega_0 t - 2D \sin \omega_0 t) = A \cdot e^{-\sigma t} \cdot \sin(\omega_0 t + \psi).
 \end{aligned}$$

4. Якщо рівняння  $M(p) = 0$  має кратні корені ( $p_1 = p_2$ ), то формулу розкладання використовувати не можна. Випадок кратних коренів може трапитися на практиці вкрай рідко. Щоб використати формулу розкладання, в цьому разі досить несуттєво змінити параметри одного з елементів схеми  $i_L(0)$ .

## Алгоритм розрахунку перехідних процесів операторним методом

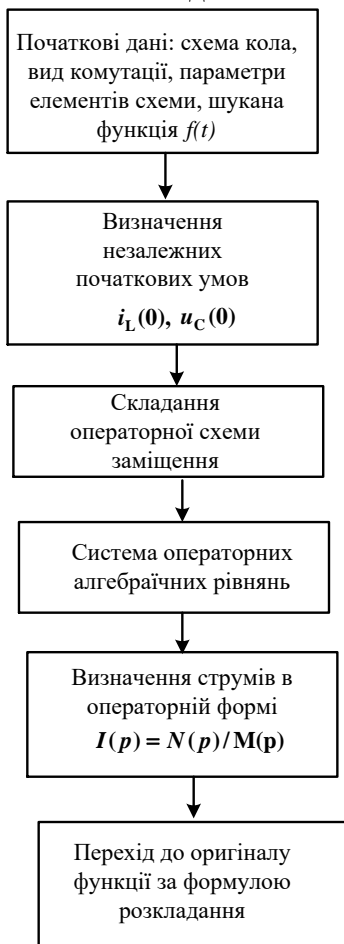


Рисунок 17.7

### Контрольні питання і завдання

1. Перехідний процес у певному лінійному електричному колі розраховують операторним методом за нульових початкових умов. Чи можна стверджувати, що система рівнянь законів

Кірхгофа в операторній формі збігається з аналогічною системою рівнянь, складеною для цього самого кола комплексним методом під час заміни  $p$  на  $j\omega$ .

2. Як зміняться поліноми  $G(p)$ ,  $H(p)$  виразу  $I(p) = G(p)/H(p)$  під час заміни в колі початкових умов?

3. Чому величини  $G(p_k)/H(p_k)$  у правій частині теореми розкладання можуть бути комплексними, адже в її лівій частині функція дійсного аргументу  $i(t)$ ?

4. Чи можна, знаючи операторний опір кола, визначити корені характеристичного рівняння, відповідного йому диференціального рівняння?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 18

### Тема «Розрахунок перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля»

#### План

1. Одиничні функції та їх властивості.
2. Перехідні характеристики кола.
3. Визначення перехідної характеристики кола.
4. Розрахунок перехідних процесів методом інтеграла Дюамеля.

#### 18.1. Одиничні функції та їх властивості

Одиничною східчастою функцією (функцією Хевісайда) називають функцію, зображену на рис. 18.1:

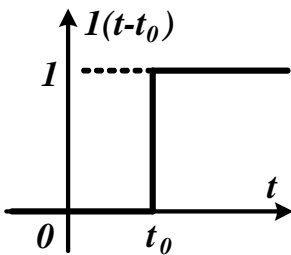


Рисунок 18.1 – Східчаста функція

$$1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ 1 & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Графік функції  $1(t-t_0)$  має вигляд сходинки або стрибка, висота якого дорівнює 1. Стрибок такого типу називатимемо одиничним.

Функцію Хевісайда  $1(t-t_0)$  зручно використовувати для аналітичного подання різних

зовнішніх дій на колах, значення яких змінюється стрибкоподібно у момент комутації:

$$f(t) \cdot 1(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ f(t) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

де  $f(t)$  – обмежена функція часу.

При підключенні кола до джерела постійного струму або напруги значення зовнішньої дії на коло матиме такий вигляд:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ X = \text{const} & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

де  $t_0$  – момент комутації.

Зовнішню дію такого виду називають неединичним стрибком. Запишемо цю функцію, використовуючи функцію Хевісайда:

$$x(t) = X \cdot \mathbf{1}(t - t_0) .$$

Якщо при  $t = t_0$  до кола вмикають джерело гармонійного струму або напруги, тоді:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ X_m \cos(\omega t + \psi) & \text{при } t \geq t_0, \end{cases}$$

то з використанням функції  $\mathbf{1}(t - t_0)$  зовнішню дію на коло можна записати у такому вигляді:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \psi) \cdot \mathbf{1}(t - t_0) .$$

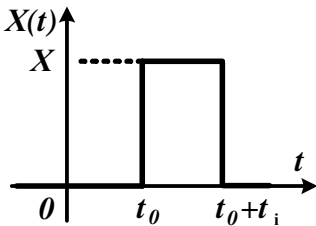


Рисунок 18.2

Розглянемо зовнішню дію на коло, що має форму прямокутного імпульсу заввишки  $X$  і тривалістю  $t_i$  (рис.18.2), і подамо його у вигляді різниці двох однакових стрибків:

$$x_1(t) = X \cdot \mathbf{1}(t - t_0) \text{ і}$$

$$x_2(t) = -X \cdot \mathbf{1}(t - (t_0 + t_i)),$$

зміщених у часі на  $t_i$  (рис. 18.3),

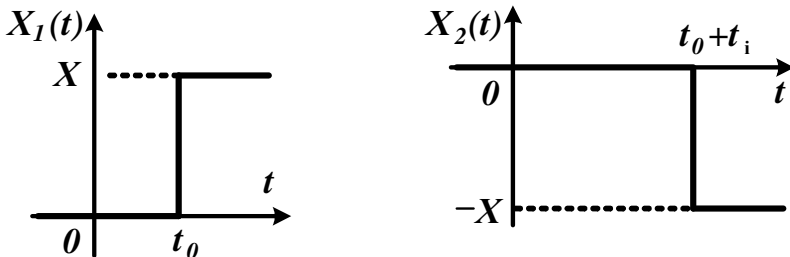


Рисунок 18.3

$$x(t) = X \cdot [\mathbf{1}(t - t_0) - \mathbf{1}(t - (t_0 + t_i))] .$$

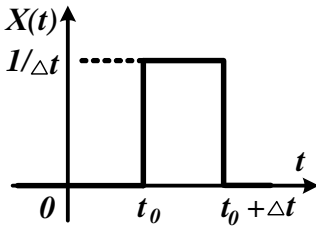


Рисунок 18.4

Розглянемо прямокутний імпульс тривалістю  $\Delta t$  і заввишки  $1/\Delta t$  (рис. 18.4). Очевидно, що площа цього імпульсу дорівнює 1 і не залежить від  $\Delta t$ .

При зменшенні тривалості імпульсу його висота зростає, причому при  $\Delta t \rightarrow 0$  вона

прямує до нескінченності, але площа залишається рівною 1. Імпульс нескінченно малої тривалості, нескінченно великої висоти, площа якого дорівнює 1, називається одиничним імпульсом.

Функція, що визначає одиничний імпульс, позначається  $\delta(t - t_0)$  (рис. 18.5) і називається  $\delta$ - функцією, або функцією Дірака:

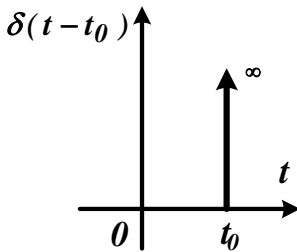


Рисунок 18.5 – Функція Дірака

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq t_0, \\ \infty & \text{при } t = t_0, \end{cases}$$

причому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

## 18.2. Перехідні характеристика кола

Розглянемо лінійне електричне коло, що не містить незалежних джерел енергії. Нехай зовнішньою дією на коло є не-одиничний стрибок:

$$x(t) = x^1(t) = X \cdot \mathbf{1}(t - t_0),$$

а реакція кола на цю дію дорівнює

$$y(t) = y^1(t).$$

Перехідною характеристикою  $h^1(t - t_0)$  лінійного електричного кола, що не містить незалежних джерел енергії, називається відношення реакції цього кола на дію неединичного стри-

бка струму або напруги до висоти цього стрибка за нульових початкових умов:

$$h^1(t-t_0) = \frac{y^1(t)}{X}$$

Якщо  $X = 1$ , то

$$h^1(t-t_0) = y^1(t),$$

отже, перехідна характеристика кола чисельно дорівнює реакції кола на дію одиничного стрибка струму або напруги.

### 18.3. Визначення перехідної характеристики кола

Розглянемо визначення перехідної характеристики вхідного струму для схеми, наведеної на рис. 18.6.

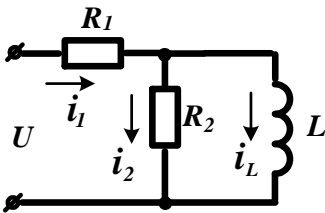


Рисунок 18.6

Знайдемо вираз для миттєвого значення струму  $i_1(t)$  при вмиканні електричного кола на джерело постійної напруги.

Скористаємося операторним методом розрахунку. Складемо операторну схему заміщення, наведену на рис. 18.7.

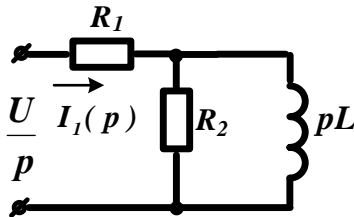


Рисунок 18.7

Визначимо струм  $I_1(p)$  за законом Ома:

$$I_1(p) = \frac{U}{pZ(p)},$$

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 L p}{R_2 + L p},$$

$$I_1(p) = \frac{U(R_2 + L p)}{p(R_1 R_2 + L p(R_1 + R_2))}.$$

Для визначення миттєвого значення струму  $i_1(t)$  скористаємося теоремою розкладання:

$$I_1(p) = \frac{N(p)}{M(p)},$$

$$N(p) = U(R_2 + Lp) ,$$

$$M(p) = p (R_1 R_2 + Lp (R_1 + R_2)).$$

Знайдемо корені чисельника  $N(p) = 0$ ,  $p_1 = -R_2/L$ .

Визначимо корені знаменника  $M(p) = 0$ ,

$$p_1 = 0, p_2 = -R_1 R_2 / L(R_1 + R_2).$$

Із порівняння коренів чисельника і знаменника роблять висновки, що у многочленів  $N(p)$  і  $M(p)$  немає однакових коренів, тому можна скористатися такою формою запису теореми розкладання:

$$i_1(t) = \sum_{k=1}^m \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t} .$$

Знайдемо значення многочлена  $N(p)$  для кожного кореня знаменника:

$$N(p_1) = UR_2 ,$$

$$N(p_2) = UR_2^2 / (R_1 + R_2) .$$

Знайдемо похідну від знаменника:

$$M'(p) = R_1 R_2 + 2Lp(R_1 + R_2) .$$

Розрахуємо значення многочлена  $M'(p)$  для коренів знаменника:

$$M'(p_1) = R_1 R_2 ,$$

$$M'(p_2) = +R_1 R_2 + 2L(R_1 + R_2) \left( -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \right) = -R_1 R_2 .$$

Знайдемо вираз для миттєвого значення струму  $i_1(t)$  за формулою

$$i_1(t) = \frac{N(p_1)}{M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{M'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{U}{R_1} - \frac{UR_2}{R_1(R_1 + R_2)} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} .$$

Перехідна характеристика кола для струму  $i_1(t)$  чисельно дорівнює перехідному струму  $i_1(t)$  при вмиканні кола на джерело постійної напруги, що дорівнює одному вольту:



$$h'(t) = \frac{i_1(t)}{U} = \frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{(R_1 + R_2)R_1} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}$$

### Контрольні питання і завдання

1. Який принцип покладений в основу методу розрахунку перехідних процесів із використанням інтеграла Дюамеля, і для яких кіл може бути використаний цей метод?
2. У яких випадках доцільно використовувати метод розрахунку з використанням інтеграла Дюамеля?
3. Який вигляд повинна мати прикладена до кола дія при визначенні її перехідної та імпульсної характеристик?
4. Чи може перехідна характеристика електричного кола мати розмірності опору, провідності чи бути безрозмірною?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Ли-бромком», 2013. – 552 с.

## Лекція 19

### Тема «Застосовування інтеграла Дюамеля»

#### План

1. Інтеграл Дюамеля.

2. Порядок застосовування інтеграла Дюамеля.

#### 19.1. Інтеграл Дюамеля

Метод інтеграла Дюамеля застосовується для розрахунку перехідних процесів в електричних колах у тому разі, якщо в цьому колі діє джерело ЕРС довільної форми, відмінної від стандартної (постійної або синусоїдальної).

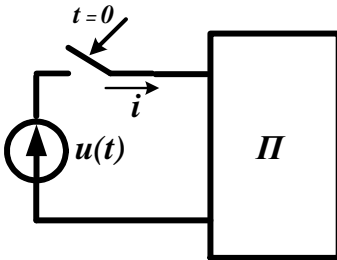


Рисунок 19.1

Припустимо, що до джерела ЕРС довільної форми  $u(t)$  увімкнене коло з нульовими початковими умовами (рис. 19.1) і із заданою перехідною характеристикою  $h^1(t)$  (рис. 19.2).

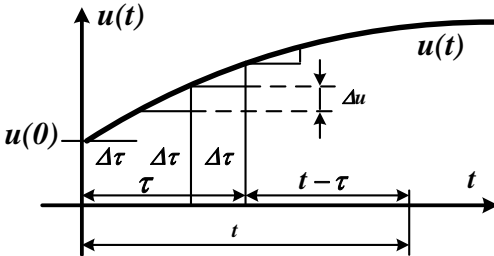


Рисунок 19.2

Замінімо неперервну криву ЕРС  $u(t)$  кривою, подібною до східчастої з інтервалами по осі  $t$  між окремими стрибками, що дорівнюють  $\Delta\tau$ . Перший стрибок ЕРС дорівнює  $u(0)$  і діє у момент  $t = 0$ .

Усі наступні стрибки ЕРС можна визначити як  $\Delta u = \Delta\tau \cdot \operatorname{tg}\alpha = u'(\tau)\Delta\tau$  і діють вони із запізненням на  $\tau$ , тобто у момент  $t - \tau$ .

Струм на виході кола у довільний момент часу  $t$  можна розглядати відповідно до принципу накладання як суму часткових струмів, які виникають під дією окремих стрибків ЕРС, що відбуваються один за одним через проміжки  $\Delta\tau$  в інтервалі часу від 0 до  $t$ .

Частковий струм, викликаний першим джерелом ЕРС, буде дорівнювати  $i'(t) = u(0) \cdot h^1(t)$ , а часткові струми, викликані наступними стрибками ЕРС, будуть дорівнювати:

$$i''(t) = \Delta u \cdot h^1(t - \tau) = u'(\tau) \cdot \Delta\tau \cdot h^1(t - \tau).$$

Результуючий струм дорівнює сумі часткових струмів:

$$i(t) = i'(t) + \sum_0^t i''(t) = u(0) \cdot h^1(t) + \sum_{\tau=0}^{t-1} u'(\tau) \cdot h^1 \Delta\tau.$$

Перейдемо до нескінченно малих інтервалів  $\Delta\tau \Rightarrow d\tau$  і замінимо суму інтегралом

$$i(t) = u(0) \cdot h^1(t) + \int_0^t u'(\tau) \cdot h^1(t - \tau) d\tau.$$

Одержаний вираз для  $i(t)$  має назву інтеграла Дюамеля і використовується на практиці для розрахунку перехідних процесів в електричних колах при дії на них джерел ЕРС або струму довільної форми.

## 19.2. Порядок використання інтеграла Дюамеля

1. Виконують розрахунок перехідного процесу класичним або операторним методом при вмиканні досліджуваного кола до джерела постійної напруги, що дорівнює 1 вольту, і таким чином визначають необхідну перехідну характеристику  $h^1(t)$ .

2. Визначають перехідну характеристику  $h^1(t - \tau)$  шляхом заміни у виразах  $h^1(t)$  змінної  $t$  на  $t - \tau$ .

3. Знаходять похідну від функції напруги  $u'(t) = \frac{d[u(t)]}{dt}$  і в одержаному виразі замінюють змінну  $t$  на  $\tau$ , в результаті одержують функцію  $u^1(\tau)$ .

4. Вирази для функцій  $u'(\tau)$ ,  $h^1(t-\tau)$  підставляють у формулу інтеграла Дюамеля, виконують інтегрування за змінною  $\tau$  і підставляють межі інтегрування за змінною  $t$ . За необхідності спрощують структуру одержаного виразу шуканої функції  $i(t)$  або  $u(t)$ .

*Зауваження*

1. Якщо функція  $u(t)$  зазнає стрибка або розриву, то вона розбивається на окремі ділянки з плавною зміною функції, при цьому інтеграл Дюамеля застосовується до кожної ділянки окремо.

2. Під час розрахунку перехідних процесів у колах постійного або синусоїдального струму метод інтеграла Дюамеля програє класичному і операторному методам, тому для таких кіл він не використовується.

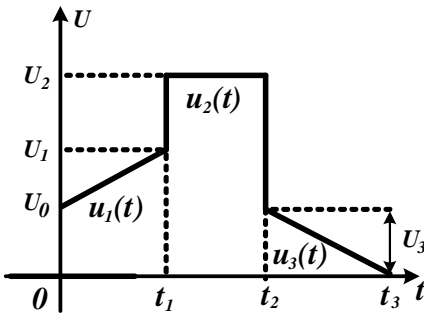


Рисунок 19.3

Припустимо, що задана зовнішня напруга змінюється згідно із законом, наведеним на рис. 8.1, де  $U_1(t)$ ,  $U_2(t)$ ,  $U_3(t)$  – закони зміни напруги на відповідних ділянках.

Розглянемо використання інтеграла Дюамеля на прикладі цього графіка.

Заданий графік зміни зовнішньої напруги розіб'ємо на такі ділянки і запишемо вирази для струму кожної ділянки:

1)  $0 \leq t \leq t_1$ ,

$$i(t) = U(0)h^1(t) + \int_0^t u'_1(\tau)h^1(t-\tau)d\tau;$$

2)  $t_1 \leq t \leq t_2$ ,

$$i(t) = U(0)h^1(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)h^1(t-\tau)d\tau + (U_2 - U_1) \times h^1(t-t_1) + \int_{t_1}^t u'_2(\tau)h^1(t-\tau)d\tau;$$

3)  $t_2 \leq t \leq t_3$ ,

$$\begin{aligned} i(t) = & U(0)h^1(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau)h^1(t-\tau)d\tau + (U_2 - U_1) \times \\ & \times h^1(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau)h^1(t-\tau)d\tau + (U_3 - U_2) \times \\ & \times h^1(t-t_2) + \int_{t_2}^t u'_3(\tau)h^1(t-\tau)d\tau; \end{aligned}$$

4)  $t_3 \leq t < \infty$ ,

$$\begin{aligned} i(t) = & U(0)h^1(t) + \int_0^t u'_1(\tau)h^1(t-\tau)d\tau + (U_2 - U_1) \times \\ & \times h^1(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau)h^1(t-\tau)d\tau + (U_3 - U_2) \times \\ & \times h^1(t-t_2) + \int_{t_2}^{t_3} u'_3(\tau)h^1(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

У виразах взяті такі позначення:

$u'_1(\tau)$ ,  $u'_2(\tau)$ ,  $u'_3(\tau)$  – похідні від напруги цих ділянок за часом, в яких замість часу  $t$  підставлена змінна;

$h^1(t-\tau)$  – перехідна характеристика кола при підстановці замість  $t - (t - \tau)$ ;

$h^1(t-t_1)$ ,  $h^1(t-t_2)$  – перехідна характеристики кола при підстановці замість  $t - (t-t_1)$   $t - (t-t_2)$  відповідно.

### Контрольні питання і завдання

1. Коло увімкнене під дію напруги довільної форми. Чи можна розрахувати перехідний процес у колі за допомогою інтеграла Дюамеля, якщо в ній задані ненульові початкові умови або вона є активним двополюсником?

2. Коло з послідовно з'єднаним резистором і конденсатором приєднане до джерела імпульсного струму. Чи змінюється напруга  $u_C$  на конденсаторі у момент дії імпульсу або після закінчення дії імпульсу?

3. Чи залежить струм у колі з послідовним з'єднанням елементів  $R$ ,  $L$  до моменту закінченні дії імпульсної ЕРС на її вході від опору  $R$  або площі імпульсу?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 20

### Тема «З'єднання обмоток трифазних генераторів»

#### План

1. Основні поняття і визначення.
2. Способи з'єднання обмоток трифазних генераторів.

#### 20.1. Основні поняття і визначення

Багатофазною системою називають сукупність, складену з « $n$ » окремих однакових електричних кіл або електричних схем, режимні параметри в яких ( $e$ ,  $u$ ,  $i$ ) зміщені в часі на рівні відрізка  $\Delta t = T/n$  або за фазою  $\Delta \omega t = 2\pi/n = 360^\circ/n$ .

Окремі частини системи називають фазами. Термін «фаза» в електротехніці має два змістові значення: перше – як момент часу для синусоїдальної функції струму або напруги, друге – як частина багатофазної системи.

В електроенергетиці великого поширення дістала трифазна система, що має ряд переваг перед системами з іншою кількістю фаз.

Трифазна система складається з трьох електричних кіл або електричних схем (фаз), параметри режиму ( $u$ ,  $i$ ) в яких зміщені в часі на  $\Delta \omega t = 2\pi/3 = 360^\circ/3 = 120^\circ$ . Окремі фази трифазної системи згідно із ГОСТом позначають (іменують) так:

- великими латинськими літерами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (основне позначення);
- цифрами  $1$ ,  $2$ ,  $3$  (допустиме позначення);
- великими латинськими літерами  $R$ ,  $S$ ,  $T$  (міжнародне позначення).

Прямим порядком додержання фаз називається  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ , при якому параметри режиму ( $u$ ,  $i$ ) у фазі  $B$  відстають від аналогічних параметрів у фазі  $A$  на  $120^\circ$ , а у фазі  $C$  – випереджають на  $120^\circ$ .

При зворотному порядку додержання фаз  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$  параметри режиму у фазі  $C$  відстають від аналогічних параметрів у фазі  $A$  на  $120^\circ$ , а у фазі  $B$  випереджають на  $120^\circ$ .

Трифазною симетричною системою ЕРС називають сукупність трьох ЕРС однакової частоти і амплітуди, зсунутих один відносно одного за фазою на  $120^\circ$ . Ці три ЕРС зображено на часовій (рис. 20.1) і векторній (рис. 20.2.) діаграмах.

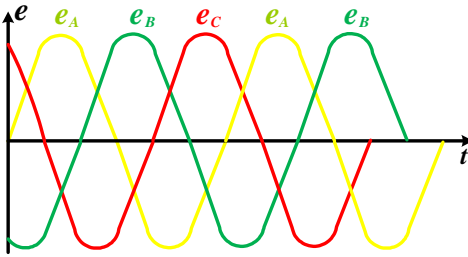


Рисунок 20.1 – Часова діаграма

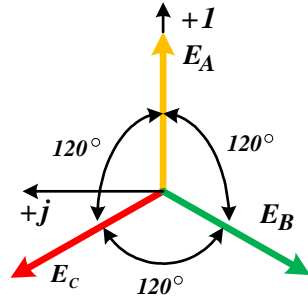


Рисунок 20.2 – Векторна діаграма

Миттєві значення фазних ЕРС генератора:

$$e_A = E_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{E}_A = E e^{j0},$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 120^\circ) \Leftrightarrow \dot{E}_B = E e^{-j120^\circ},$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 120^\circ) \Leftrightarrow \dot{E}_C = E e^{j120^\circ}.$$

Основна властивість будь-яких змінних функцій ( $e$ ,  $u$ ,  $i$ ) у симетричній трифазній системі полягає в тому, що сума їх миттєвих значень у будь-який момент часу дорівнює нулю:

$$e_A + e_B + e_C = 0.$$

Обчислимо цю суму для  $\omega t = 0$ :

$$\begin{aligned} e_A + e_B + e_C &= E_m \sin(0) + E_m \sin(-120^\circ) + E_m \sin(120^\circ) = \\ &= E_m \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Як впливає з векторної діаграми рис. 20.2, геометрична сума векторів фазних ЕРС також дорівнює нулю:



$$\begin{aligned}\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C &= Ee^{j0} + Ee^{-j120^\circ} + Ee^{j120^\circ} = \\ &= E \left( e^{j0^\circ} + e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \right) = E \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Якщо навантаження окремих фаз однакові між собою, тобто  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}e^{j\varphi}$  (симетричне навантаження), то фазні струми будуть однакові за модулем і зміщені за фазою відносно своїх ЕРС (напруги) на один і той самий кут  $\varphi$ , а між собою, як і ЕРС, будуть зміщені за фазою на  $120^\circ$ .

Отже, фазні струми  $i_A, i_B, i_C$  утворюють симетричну трифазну систему і для них будуть справедливими одержані раніше висновки:

$$\begin{aligned}i_A + i_B + i_C &= 0, \\ \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0.\end{aligned}$$

### *Переваги трифазної системи:*

1. Передавання енергії від генератора до споживачів трифазним струмом найбільш вигідне економічно порівняно за будь-якої іншої кількості фаз. Наприклад, порівняно з двофазною системою досягається економія дротів у два рази (3 дроти замість 6), відповідно зменшуються втрати енергії у дротах лінії.

2. Трифазна система дозволяє технічно просто одержати кругове поле, що обертається, покладене в основу роботи усіх трифазних машин (генераторів і двигунів).

3. Елементи трифазної системи (генератори, трансформатори, двигуни) прості за конструкцією, надійні в роботі, мають хороші малогабаритні показники, порівняно дешеві, довговічні.

4. На виході трифазних генераторів є два рівні вихідної напруги – лінійна і фазна, що відрізняються в  $\sqrt{3}$  разів ( $U_L / U_\phi$ ), що дозволяє підключати до такого генератора приймачі з різною номінальною напругою.

Завдяки своїм перевагам трифазна система використовується в електроенергетиці для виробництва, передавання, розподілу і споживання електричної енергії.

Трифазна система та її основні ланки – генератор, трансформатор, лінія електропередачі, двигун – були розроблені у 1889 році інженером М. О. Доліво-Добровольським (фірма Сіменс і Шуккерт). Створення цієї системи стало важливою подією в історії розвитку теоретичної та прикладної електротехніки.

## 20.2. Способи з'єднання обмоток трифазних генераторів

Між собою фазні обмотки генератора можуть з'єднуватися двома різними схемами: зіркою «Y» і трикутником «Δ».

### 20.2.1. Схема з'єднання зіркою

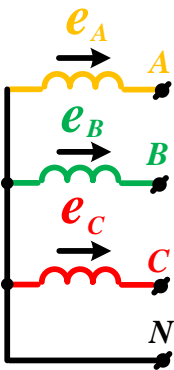


Рисунок 20.3

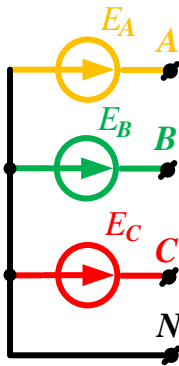


Рисунок 20.4

В обмотках трифазного генератора індуються синусоїдальні ЕРС, зсунуті за фазою на  $120^\circ$ :

$$e_A = E_m \sin \omega t \Leftrightarrow \dot{E}_A = E_\phi e^{j0},$$

$$e_B = E_m \sin (\omega t - 120^\circ) \Leftrightarrow \dot{E}_B = E_\phi e^{-j120^\circ},$$

$$e_C = E_m \sin (\omega t + 120^\circ) \Leftrightarrow \dot{E}_C = E_\phi e^{j120^\circ}.$$

При з'єднанні зіркою кінці фазних обмоток (фаз) генератора з'єднуються у загальну точку  $N$ , що називається нульовою, або нейтральною, а початки обмоток слугують лінійними виводами генератора  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 20.3, 20.4).

Векторна діаграма напруги трифазного генератора при з'єднанні його фазних обмоток зіркою показана на рис. 20.5.

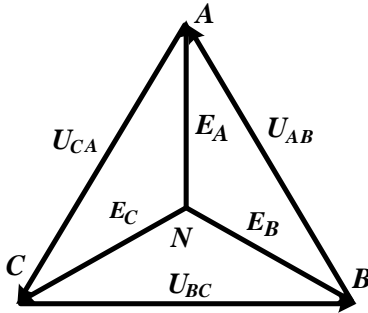


Рисунок 20.5 – Векторна діаграма напруги трифазного генератора при з'єднанні його фазних обмоток зіркою

(індекс  $N$  при фазній напрузі не враховується, оскільки  $\varphi_N = 0$ ). Лінійною називається напруга між двома лінійними виводами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Лінійна напруга дорівнює векторній різниці двох фазних напруг:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A.$$

Під час розрахунку трифазних кіл комплексним методом фазну і лінійну напруги генератора подають у комплексній формі, при цьому напругу фази « $A$ » беруть за початкову і з'єднують її з суттєвою віссю, а інші вектори одержують початкові фази згідно з їх кутами зсуву відносно до початкового вектора.

Фазна напруга генератора

$$\dot{U}_A = U_\phi e^{j0^\circ}, \quad \dot{U}_B = U_\phi e^{-j120^\circ}, \quad \dot{U}_C = U_\phi e^{j120^\circ}.$$

Лінійна напруга генератора

$$\dot{U}_{AB} = U_L e^{j30^\circ}, \quad \dot{U}_{BC} = U_L e^{-j90^\circ}, \quad \dot{U}_{CA} = U_L e^{j150^\circ}.$$

Із геометрії рис. 20.5 одержуємо співвідношення між модулями лінійної і фазної напруги:

У трифазному генераторі розрізняють фазну і лінійну напругу. Фазною називається напруга між початками і кінцями фазних обмоток або між одним з лінійних виводів  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і нульовим виведенням  $N$ .

Фазна напруга дорівнює фазним  $C$ :

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A, \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B, \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C$$

$$U_L = 2U_\Phi \cos 30^\circ = 2U_\Phi \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}U_\Phi .$$

### 20.2.2. Схема з'єднання трикутником

У такій схемі кінець кожної попередньої фази з'єднується з початком наступної, а точки з'єднання є лінійними виводами генератора (рис. 20.6, 20.7).

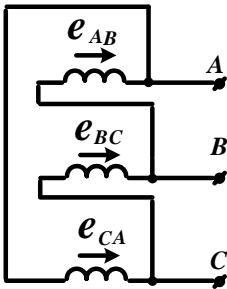


Рисунок 20.6

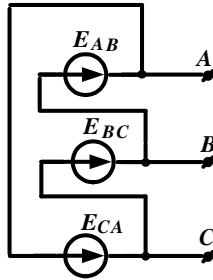


Рисунок 20.7

При з'єднанні фаз трикутником у його контурі діє сума фазних ЕРС:

$$\sum e = e_{AB} + e_{BC} + e_{CA}.$$

У реальних трифазних генераторах технічно неможливо забезпечити рівність нулю для сумарної ЕРС.

Оскільки власні опори обмоток генератора є малими, то навіть незначна за величиною сумарна ЕРС  $\sum e > 0$  може викликати в контурі трикутника зрівнювальний струм, сумірний із номінальним струмом генератора, що призвело б до додаткових втрат енергії і зниження ККД генератора. З цієї причини обмотки трифазних генераторів забороняється з'єднувати за схемою трикутник.

Номінальною напругою к трифазній системі називається лінійна напруга. Номінальну напругу прийнято виражати в кіловольтах (кВ). Шкала номінальної трифазної напруги, що використовується на практиці, має такий вигляд:

0,4; 1,1; 3,5; 6,3; 10,5; 22; 35; 63; 110; 220; 330; 500; 750.

На споживчому рівні номінальна трифазна напруга може позначатися у вигляді відношення  $U_L / U_\Phi$ , наприклад:  $U_L / U_\Phi = 380 / 220$  В.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Які переваги мають багатофазні системи?
2. Чому дорівнює кут зсуву між фазними ЕРС 3-фазної симетричної системи?
3. Чи завжди за симетричної системи фазних ЕРС симетрична система і лінійних ЕРС?
4. Фазні обмотки генератора з'єднані трикутником. Чому дорівнюють струми фаз, якщо приймач від'єднаний, а система фазних ЕРС симетрична?

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 21

### Тема «З'єднання фаз трифазних приймачів»

#### План

1. Схема з'єднання зіркою.
2. Схема з'єднання трикутником.

#### 21. Вступ

Приймачі трифазного струму можуть під'єднуватися до генератора за двома схемами – зіркою «Y» і трикутником «Δ». Як відомо, на виході трифазного генератора виходять дві напруги (лінійна і фазна), що відрізняються у  $U_{\text{Л}}/U_{\text{Ф}} = \sqrt{3}$  раз. З іншого боку, кожен приймач енергії розрахований на роботу за певної напруги, яка називається номінальною. Схема з'єднання фаз приймача повинна забезпечити підключення його фаз на номінальну фазну напругу.

Таким чином, вибір схеми з'єднання фаз трифазного приймача залежить від співвідношення номінальної напруги приймача і генератора (мережі).

#### 21.1. Схема з'єднання зіркою

Схема з'єднання зіркою застосовується у тому разі, якщо номінальна напруга приймача відповідає (дорівнює) фазній напрузі генератора. Під час з'єднання зіркою кінці фаз приймача об'єднуються в одну точку «n», яку називають нульовою, або нейтральною, а початки фаз під'єднують до лінійних виводів трифазного генератора *A*, *B*, *C* лінійними дротами.

Якщо нульова точка приймача «n», з'єднана з нульовою точкою генератора «N» нульовим дротом, то схема дістала назви зірки з нульовим дротом (рис. 21.1).

Струми, що проходять у лінійних проводах у напрямку від генератора до приймача, називаються лінійними.

Струми, що проходять у фазах приймача у напрямку від початку до кінців, називаються фазними. У схемі з'єднання зіркою фази приймача увімкнені послідовно з лінійними дротами і по них проходять одні і ті самі струми ( $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ ). Тому для

схеми з'єднання зіркою поняття лінійні і фазні струми тотожні:  
 $I_L = I_\Phi$ .

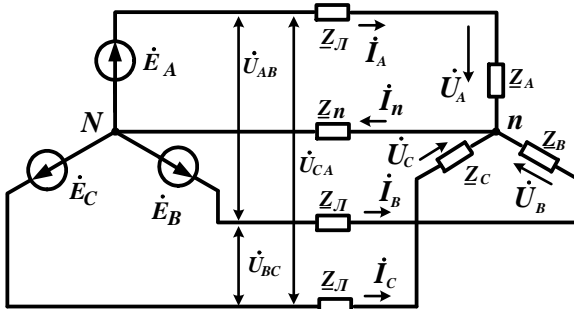


Рисунок 21.1 – Схема з'єднання зіркою з нульовим дротом

Струм, що проходить у нульовому проводі від приймача до генератора, називається нульовим, або нейтральним ( $\dot{I}_n$ ).

Напруги між початками і кінцями фаз приймача називаються фазними ( $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ ), а напруги між лінійними дротами – лінійними ( $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ ).

Під час розрахунків опір лінії  $Z_L$  відносять до фази приймача, оскільки вони з'єднані послідовно. Тому лінійна напруга приймача і генератора тотожно рівні.

У загальному випадку розрахунок струмів і напруги у схемі з'єднання зіркою виконується у такій послідовності:

1. Визначають напругу зміщення нейтральної точки приймача за методом двох вузлів:

$$\dot{U}_{Nn} = \frac{\dot{E}_A Y_A + \dot{E}_B Y_B + \dot{E}_C Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_n},$$

де  $Y_A = \frac{1}{Z_A}$ ,  $Y_B = \frac{1}{Z_B}$ ,  $Y_C = \frac{1}{Z_C}$  – комплексна провідність фаз приймача;

$Y_n = \frac{1}{Z_n}$  – комплексна провідність нейтрального прово-

ду.

2. Визначають фазну напругу приймача як різницю між ЕРС відповідної фази і напругою зміщення нейтральної точки:

$$\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_{Nn}, \quad \dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_{Nn}, \quad \dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_{Nn}.$$

3. Фазні струми приймача визначають за законом Ома:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{Z_A}, \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{Z_B}, \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{Z_C}.$$

4. Струм у нульовому проводі відповідно до першого закону Кірхгофа дорівнює геометричній сумі лінійних (фазних) струмів:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

### 21.1.1. Чотирипровідна трифазна система

Якщо опір нульового дроту дорівнює нулю, схема (рис. 21.1) має вигляд, наведений на рис. 21.2

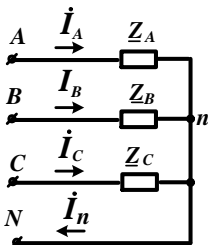


Рисунок 21.2

#### Симетричне навантаження

При симетричному навантаженні

$$Z_A = Z_B = Z_C = Z_\phi e^{j\phi}$$

струми у фазах однакові,

$$\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_C,$$

тому струм у нульовому проводі

$$\dot{I}_N = 0$$

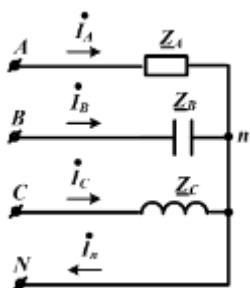
і, отже, потреба в нульовому проводі відпадає. Симетричні трифазні приймачі (наприклад, трифазні електродвигуни) умикаються за схемою з'єднання зіркою без нульового проводу.



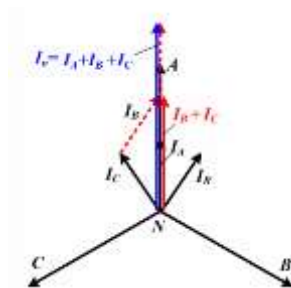
## Несиметричне навантаження

За несиметричного навантаження  $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$  і опору нейтрального проводу, що дорівнює нулю, струми у фазах різні, а відносна величина струму в нульовому дроті залежить від характеру і міри несиметрії фазних струмів. Як правило, трифазні приймачі намагаються спроектувати по можливості близькими до симетричних, тому струм у нульовому проводі в реальних умовах значно менший за лінійні (фазні) струми.

Розглянемо вплив виду навантаження на струм у нульовому проводі.

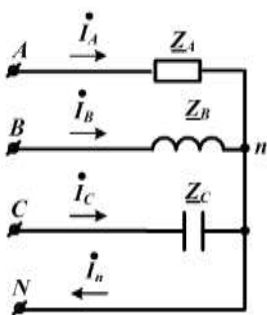


а)

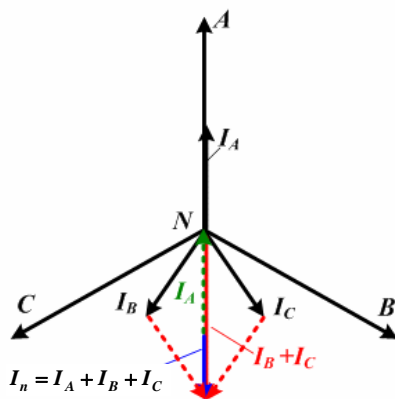


б)

Рисунок 21.3



а)



б)

Рисунок 21.4

### 21.1.2. Трипровідна трифазна система

За умови рівності нулю опору нульового дроту схема має вигляд, показаний на рис. 21.2.

За відсутності нульового проводу схема має назву зірки без нульового дроту (рис. 21.3).

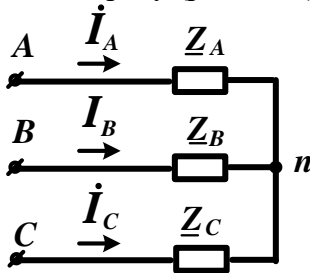


Рисунок 21.3 Схема зірки без нульового дроту

#### Несиметричне навантаження

У схемі з'єднання зіркою без нульового проводу (рис. 21.3) за будь-якого навантаження фаз повинна виконуватися умова першого закону Кірхгофа:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0 .$$

Із рівняння можна зробити висновок, що зміна одного із струмів спричиняє зміну двох інших струмів, тобто окремі фази працюють у залежному один від одного режимі. За несиметричного навантаження потенціал нейтральної точки «n» приймача  $U_n$  стає таким, що не дорівнює нулю, він «зміщується» на комплексній площині з нульового положення (N), при цьому фазна напруга приймача не дорівнює відповідній фазній напрузі генератора, відбувається так званий перекіс фазної напруги приймача (рис. 21.4).

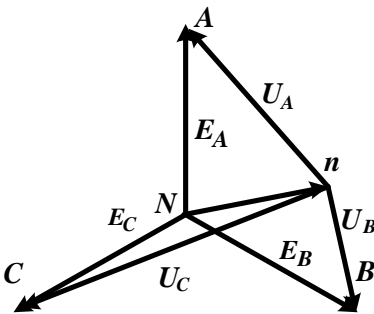


Рисунок 21.4

Режим роботи приймача з перекосом фазної напруги є ненормальним і може призвести до виходу його з ладу.

З цієї причини несиметричне трифазне навантаження забороняється вмикати за схемою з'єднання зіркою без нульового проводу (наприклад, освітлювальне навантаження).

## 21.2. Схема з'єднання трикутником

Схема з'єднання трикутником застосовується у тому разі, якщо номінальна фазна напруга приймача відповідає (дорівнює) лінійній напрузі генератора.

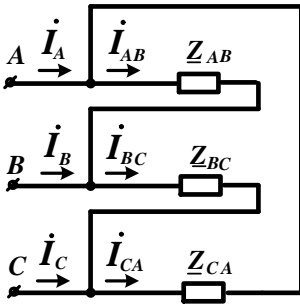


Рисунок 4.12

Під час з'єднання трикутником кінець кожної фази з'єднується з початком наступної, а точки з'єднання (вершини трикутника) під'єднуються до лінійних виводів трифазного генератора  $A, B, C$  лінійними дротами (рис. 4.12).

Струми, що проходять у фазах приймача

у напрямку від їх початків до кінців, називаються фазними  $\dot{I}_{AB}, \dot{I}_{BC}, \dot{I}_{CA}$ . Струми, що проходять у лінійних проводах у напрямку від генератора до приймача, називаються лінійними  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ .

У схемі з'єднання трикутник фазна і лінійна напруги приймача відповідно рівні  $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ .

У цій схемі до кожної фази приймача підводиться безпосередньо лінійна напруга генератора, при цьому окремі фази працюють незалежно одна від одної. Фазні струми визначають за законом Ома:

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}, \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}, \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}.$$

Лінійні струми визначаються з рівнянь першого закону Кірхгофа для вершин трикутника, вони дорівнюють геометричній різниці фазних струмів:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA},$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB},$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$

У симетричному режимі

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}_\phi e^{j\varphi}$$

фазні і лінійні струми симетричні, при цьому відношення їх модулів становить

$$\frac{I_L}{I_\phi} = \sqrt{3}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. За якого способу з'єднань трифазних кіл:
  - а) фазні струми одночасно є лінійними;
  - б) фазна напруга одночасно є лінійною?
2. Чи може трифазна система, в якій приймач і генератор з'єднані зіркою, працювати без нейтрального проводу?
3. У трифазному колі діє симетрична система ЕРС. Чи можна стверджувати, що струми фаз також утворюють симетричну систему?
4. Струм нейтрального проводу  $I$  у колі, де генератор і приймач з'єднані зіркою, дорівнює нулю. Чи означає це, що система фазних ЕРС симетрична?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 22

### Тема «Складні кола. Потужність у трифазних колах»

#### План

1. Розрахунок складних трифазних кіл.
2. Потужність у трифазних колах.
3. Вимірювання потужності у трифазних колах.

#### 22.1. Розрахунок складних трифазних кіл

Складне трифазне коло, наприклад об'єднана енергосистема, може містити велику кількість трифазних генераторів, ліній електропередачі, приймачів трифазної енергії. Схема такого кола є типовим прикладом складного кола змінного струму.

Установлений режим у такій схемі може бути описаний системою алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами, складеними за одним із методів розрахунку складних кіл (метод законів Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів).

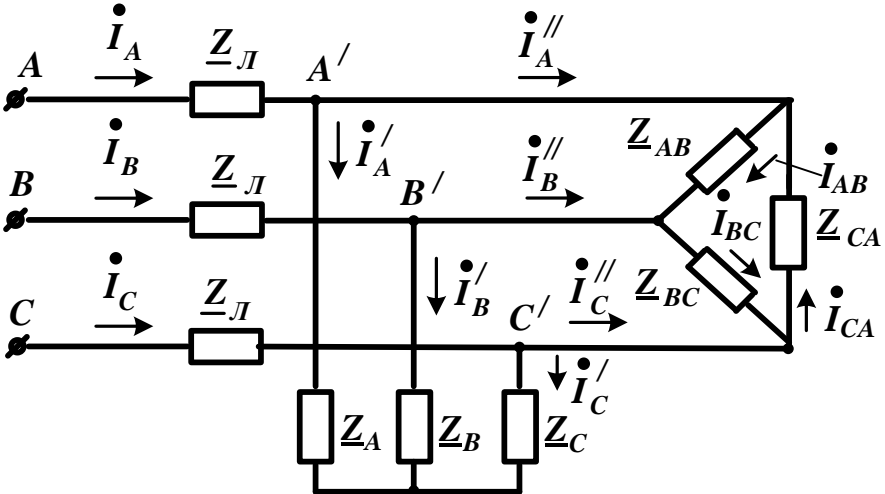


Рисунок 22.1

Безпосереднє застосування методів розрахунку для схеми, наведеної на рис. 22.1, приведе до складних систем рівнянь. Рациональніше заздалегідь перетворити електричне коло, наведене на рис. 22.2.

Перетворимо навантаження, з'єднане зіркою у трикутник (рис. 22.2).

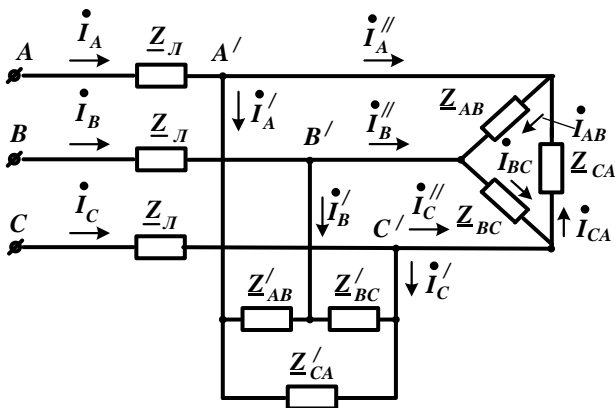


Рисунок 22.2

$$\underline{Z}'_{AB} = \underline{Z}'_A + \underline{Z}'_B + \frac{\underline{Z}'_A \underline{Z}'_B}{\underline{Z}'_C}, \quad \underline{Z}'_{BC} = \underline{Z}'_C + \underline{Z}'_B + \frac{\underline{Z}'_C \underline{Z}'_B}{\underline{Z}'_A},$$

$$\underline{Z}'_{CA} = \underline{Z}'_C + \underline{Z}'_A + \frac{\underline{Z}'_C \underline{Z}'_A}{\underline{Z}'_B}$$

В одержаній схемі (рис. 22.2) опори трикутників  $\underline{Z}_{AB}$ ,  $\underline{Z}_{BC}$ ,  $\underline{Z}_{CA}$  і  $\underline{Z}'_{AB}$ ,  $\underline{Z}'_{BC}$ ,  $\underline{Z}'_{CA}$  з'єднані паралельно.

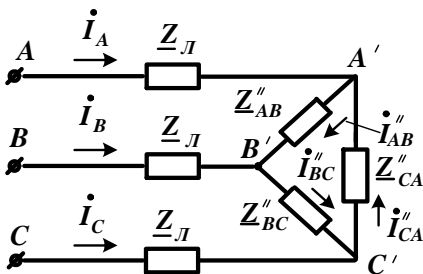


Рисунок 22.3

Визначимо загальні опори фаз трикутника (рис. 22.3):

$$\underline{Z}_{AB}'' = \frac{\underline{Z}_{AB}' \underline{Z}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}' + \underline{Z}_{AB}}, \quad \underline{Z}_{BC}'' = \frac{\underline{Z}_{BC}' \underline{Z}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}' + \underline{Z}_{BC}}, \quad \underline{Z}_{CA}'' = \frac{\underline{Z}_{CA}' \underline{Z}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}' + \underline{Z}_{CA}}.$$

Перетворимо трикутник опорів  $\underline{Z}_{AB}'', \underline{Z}_{BC}'', \underline{Z}_{CA}''$  в зірку (рис. 22.4):

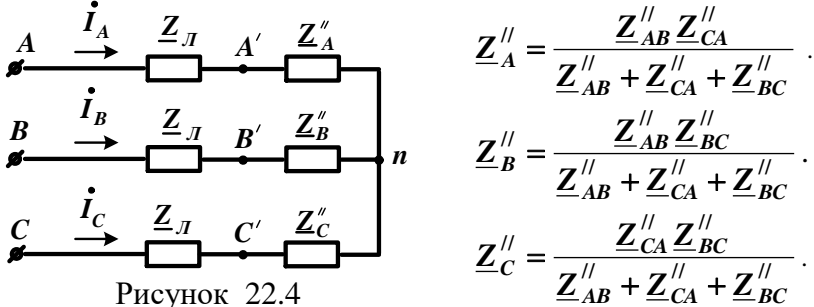


Рисунок 22.4

Визначимо лінійні струми  $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  на схемі, наведеній на рис. 22.4 за методом двох вузлів:

$$\dot{U}_{Nn} = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

де  $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_A''}, \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_B''}, \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_Л + \underline{Z}_C''}$  -

провідність фаз.

Лінійні струми знаходимо за законом Ома

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_{Nn}) \underline{Y}_A, \quad \dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_{Nn}) \underline{Y}_B, \quad \dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_{Nn}) \underline{Y}_C.$$

Вирази для фазної напруги навантаження набирають вигляду

$$\dot{U}_A' = \dot{I}_A \underline{Z}_A'', \quad \dot{U}_B' = \dot{I}_B \underline{Z}_B'', \quad \dot{U}_C' = \dot{I}_C \underline{Z}_C'',$$

тоді лінійна напруга визначається за другим законом Кірхгофа

$$\dot{U}_{AB}' = \dot{U}_A' - \dot{U}_B', \quad \dot{U}_{BC}' = \dot{U}_B' - \dot{U}_C', \quad \dot{U}_{CA}' = \dot{U}_C' - \dot{U}_A'.$$

Визначимо фазні струми на схемі, поданий на рис. 22.2:



$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}, \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}, \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}, \\ \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}, \\ \dot{I}_A &= \dot{I}_A - \dot{I}_A, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_B - \dot{I}_B, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_C - \dot{I}_C. \end{aligned}$$

## 22.2. Потужність у трифазних колах

Миттєва потужність трифазного джерела енергії дорівнює сумі миттєвих потужностей його фаз :

$$p = p_A + p_B + p_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C .$$

Активна потужність генератора, визначена як середнє за період значення миттєвої потужності, дорівнює

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = P_A + P_B + P_C =$$

$$= U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C .$$

Відповідно активна потужність трифазного приймача з урахуванням втрат в опорі нейтрального проводу  $P = P_A + P_B + P_C + P_N$  , реактивна  $Q = Q_A + Q_B + Q_C + Q_N$  і повна  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  .

Сумарна активна потужність симетричної трифазної системи

$$P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi_\phi .$$

Враховуючи, що в симетричному режимі для зірки мають місце співвідношення  $U_{Л} = \sqrt{3}U_{\Phi}$ ,  $I_{Л} = I_{\Phi}$  і для трикутника –  $U_{Л} = U_{\Phi}$ ,  $I_{Л} = \sqrt{3}I_{\Phi}$ , то для обох способів з'єднання фаз маємо

$$P = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} \cos \varphi_{\Phi},$$

де  $\varphi_{\Phi}$  – кут зсуву між фазною напругою і струмом.

Аналогічно  $Q = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л} \sin \varphi_{\Phi}$ ,  $S = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л}$ .

### 22.3. Вимірювання потужності у трифазних колах

#### 1. Чотирипровідна система – симетричний режим.

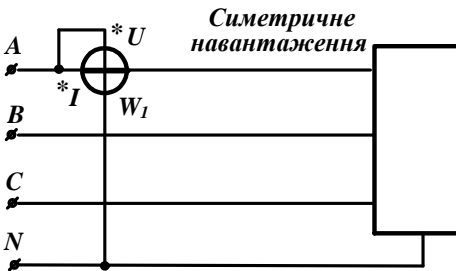


Рисунок 22.5

Якщо режим роботи кола симетричний, то для визначення сумарної активної потужності досить обмежитися одним ватметром (будь-яким), що вмикається за схемою, зображеною на рис. 22.5.

Тоді, наприклад, при вмиканні приладу у фазу  $A$

$$P = 3P_A.$$

#### 2. Чотирипровідна система – несиметричний режим.

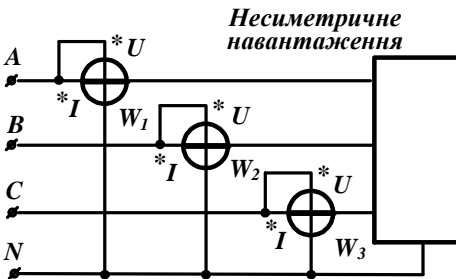


Рисунок 22.6

Зображена на рис. 22.6 схема називається схемою трьох ватметрів.

Сумарна активна потужність кола визначається як сума показів трьох ватметрів:

$$P = P_A + P_B + P_C.$$

3. Трифазна система – симетричний режим.

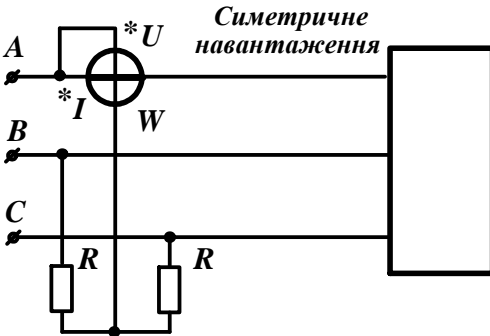


Рисунок 22.7

Тоді сумарна активна потужність трифазної системи визначається як  $P = 3P_A$ . При цьому потрібно, щоб виконувалась умова  $R = R_W$ , де  $R_W$  – власний опір обмотки ватметра за напругою.

4. Трифазна система – несиметричний режим.

Наведена на рис. 22.8 схема називається **схемою двох ватметрів**. У ній сума показів приладів дорівнює сумарній активній потужності кола.

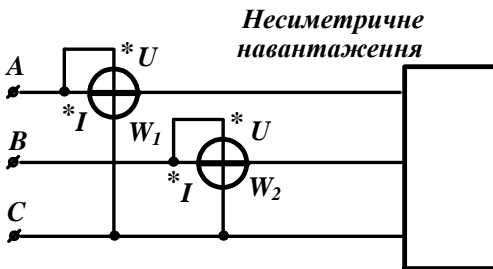


Рисунок 22.8

Дійсно, покази приладів на цій схемі

$$P_1 = \text{Re}(\dot{U}_{AC}^* I_A),$$

$$P_2 = \text{Re}(\dot{U}_{BC}^* I_B),$$

тоді

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = \text{Re}(\dot{U}_{AC}^* I_A + \dot{U}_{BC}^* I_B) = \\ &= \text{Re}((\dot{U}_A - \dot{U}_C)^* I_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_C)^* I_B) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re}(\dot{U}_A \dot{I}_A + \dot{U}_B \dot{I}_B - \dot{U}_C (\dot{I}_A + \dot{I}_B)) = \\
&= \operatorname{Re}(\dot{U}_A \dot{I}_A + \dot{U}_B \dot{I}_B + \dot{U}_C \dot{I}_C) = P_A + P_B + P_C.
\end{aligned}$$

### Контрольні питання і завдання

1. У симетричному трипровідному колі стався обрив фази. Що покаже вольтметр, увімкнений між нейтральними точками джерела і приймача?
2. Струм нейтрального проводу  $I$  у трифазному колі дорівнює нулю. Чи збережеться він таким, що дорівнює нулю:
  - а) під час обривання в одній із фаз генератора;
  - б) збільшенні амплітудних значень ЕРС генератора у 2 рази;
  - в) збільшенні опору однієї з фаз приймача у 2 рази?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 23

### Тема «Основи методу симетричних складових»

#### План

1. Розкладання несиметричної системи на симетричні складові.
2. Деякі властивості трифазних кіл відносно симетричних складових струмів і напруги.

#### 23.1. Розкладання несиметричної системи на симетричні складові

Метод симетричних складових застосовують для розрахунку трифазних кіл у несиметричних режимах. Несиметричні режими в енергосистемі виникають при різноманітних видів коротких замикань. Розрахунок струмів коротких замикань – важливе інженерне завдання в електроенергетиці, що вирішується методом симетричних складових.

Математично будь-яка несиметрична трифазна система векторних величин (напруг, струмів та ін.) може бути подана у вигляді суми (замінена сумою) з трьох симетричних трифазних систем, а саме:

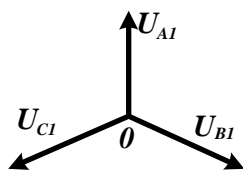
- а) системи **прямої** послідовності з прямим порядком додержання фаз  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ ;
- б) системи **зворотної** послідовності зі зворотним порядком додержання фаз  $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ ;
- в) системи **нульової** послідовності, складеної з трьох рівних векторів, що збігаються за фазою.

Окремі симетричні системи векторів, на які розкладається несиметрична система, називають симетричними складовими.

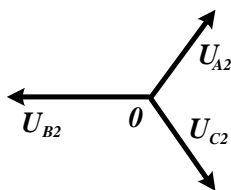
Вектори симетричних складових індексуються цифрами:

- 1 – для прямої послідовності;
- 2 – для зворотної послідовності;
- 0 – для нульової послідовності.

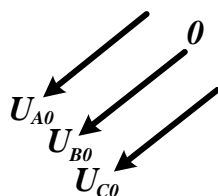
На рисунку 23.1 зображені симетричні складові певної несиметричної трифазної системи напруги  $\dot{U}_A$ ,  $\dot{U}_B$ ,  $\dot{U}_C$ .



а)



б)



в)

Рисунок 23.1

$$\begin{aligned}\dot{U}_{B1} &= \dot{U}_{A1} e^{-j120^\circ}, & \dot{U}_{C1} &= \dot{U}_{A1} e^{j120^\circ}, \\ \dot{U}_{B2} &= \dot{U}_{A2} e^{j120^\circ}, & \dot{U}_{C2} &= \dot{U}_{A2} e^{-j120^\circ}, \\ \dot{U}_{A0} &= \dot{U}_{B0} = \dot{U}_{C0}.\end{aligned}$$

Комплексне число  $e^{j120^\circ}$  називається поворотним множником і скорочено позначається буквою « $a$ ».

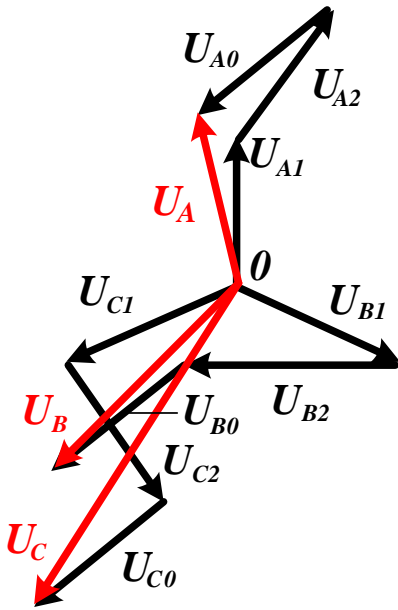
Множення вектора на множник « $a$ » відповідає повороту його проти напрямку руху годинникової стрілки (вперед) на  $120^\circ$  або повороту за рухом годинникової стрілки (назад) на  $240^\circ$ . Множення вектора на « $a^2$ » відповідає повороту його вперед на  $240^\circ$  або повороту назад на  $120^\circ$ .

За допомогою фазного множника « $a$ » вирази, записані вище, можна записати так:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{B1} &= \dot{U}_{A1} a^2, & \dot{U}_{C1} &= \dot{U}_{A1} a, \\ \dot{U}_{B2} &= \dot{U}_{A2} a, \\ \dot{U}_{A0} &= \dot{U}_{B0} = \dot{U}_{C0}.\end{aligned}$$

*Властивості поворотного множника:*

$$\begin{aligned}a^2 &= e^{j240^\circ} = e^{-j120^\circ}, \\ a^3 &= 1, & a^4 &= a, \\ 1 + a + a^2 &= 0.\end{aligned}$$



Вектори початкової несиметричної системи визначаються за принципом накладання як геометричні суми відповідних векторів симетричних складових (рис. 23.2):

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0},$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_{B1} + \dot{U}_{B2} + \dot{U}_{B0},$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{C0}.$$

Використовуючи поворотний множник « $a$ » і « $a^2$ », виразимо усі доданки правої частини рівнянь через симетричні складові фази  $A$ :

Рисунок 23.2

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0}, \quad (23.1)$$

$$\dot{U}_B = a^2 \dot{U}_{A1} + a \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0}, \quad (23.2)$$

помножимо на « $a$ » (23.2)

$$\dot{U}_C = a \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0}, \quad (23.3)$$

помножимо на « $a^2$ » (23.3).

Помножимо усі члени рівняння (23.2) на « $a$ », а усі члени рівняння (23.3) на « $a^2$ »:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_{A1} + \dot{U}_{A2} + \dot{U}_{A0},$$

$$a \dot{U}_B = a^3 \dot{U}_{A1} + a^2 \dot{U}_{A2} + a \dot{U}_{A0},$$

$$a^2 \dot{U}_C = a^3 \dot{U}_{A1} + a^4 \dot{U}_{A2} + a^2 \dot{U}_{A0}.$$

Додамо усі три рівняння почленно і одержимо

$$\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C = \dot{U}_{A1}(1 + a^3 + a^3) + \dot{U}_{A2},$$

$$(1 + a + a^2) + \dot{U}_{A0}(1 + a + a^2) = 3\dot{U}_{A1} + 0\dot{U}_{A2} + 0\dot{U}_{A0} = 3\dot{U}_{A1}.$$

Із одержаного рівняння отримуємо формулу для виділення симетричної складової прямої послідовності з несиметричної системи векторів:

$$\dot{U}_{A1} = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C). \quad (23.4)$$

Помножимо усі члени рівняння (23.2) на « $a^2$ », « $a$ », а усі члени рівняння (23.3) на « $a$ », додамо усі три рівняння почленно і одержимо

$$\dot{U}_{A2} = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C). \quad (23.5)$$

Додамо усі три рівняння (23.1), (23.2) і (23.3) почленно і одержимо

$$\dot{U}_{A0} = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C). \quad (23.6)$$

Одержані формули використовують на практиці для розкладання несиметричних трифазних систем векторів на симетричні складові.

## 23.2 Деякі властивості трифазних кіл відносно симетричних складових струмів і напруги

1. У нейтральному проводі струм дорівнює сумі лінійних струмів і відповідно потрійному значенню складової струму нульової послідовності.

2. Сума лінійних напруг дорівнює нулю, тому лінійна напруга не містить складових нульової послідовності.

3. Симетричні складові прямої і зворотної послідовностей фазних напруг приймача, з'єданого зіркою, однозначно пов'язані з відповідними симетричними складовими лінійної напруги, підведеними до нього. Звідси випливає, що фазна напруга різних приймачів, з'єднаних зіркою, при одних і тих са-



мих лінійних напругах мають однакові симетричні складові прямої і зворотної послідовностей і можуть відрізнятися одна від одної тільки за рахунок симетричних складових нульової послідовності.

Якщо під час несиметричного режиму струм в одній або двох фазах кола відсутній, то сума симетричних складових струмів у цих фазах дорівнює нулю.

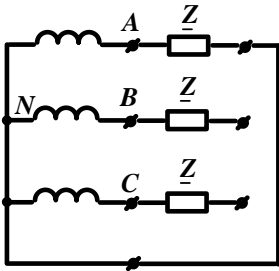


Рисунок 23.3

*Приклад 1*

На схемі, показаній на рис. 23.3, фази *B* і *C* розімкнені,  $\dot{I}_B = \dot{I}_C = 0$ .

Застосовуючи (23.4) – (23.6), одержуємо

$$\dot{I}_{A1} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a \cdot 0 + a^2 \cdot 0) = \frac{1}{3}\dot{I}_A,$$

$$\dot{I}_{A2} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + a^2 \cdot 0 + a \cdot 0) = \frac{1}{3}\dot{I}_A,$$

$$\dot{I}_{A0} = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + 0 + 0) = \frac{1}{3}\dot{I}_A.$$

На рисунку 23.4 зображено вектор струму  $\dot{I}_A$  і побудовані векторні діаграми для систем симетричних складових струмів усіх трьох фаз. Визначення струмів у фазах початкової схеми проведено шляхом геометричного додавання векторів симетричних складових струмів (рис. 23.5):

$$\dot{I}_{A1} + \dot{I}_{A2} + \dot{I}_{A0} = \dot{I}_A,$$

$$\dot{I}_{B1} + \dot{I}_{B2} + \dot{I}_{B0} = \dot{I}_B,$$

$$\dot{I}_{C1} + \dot{I}_{C2} + \dot{I}_{C0} = \dot{I}_C.$$

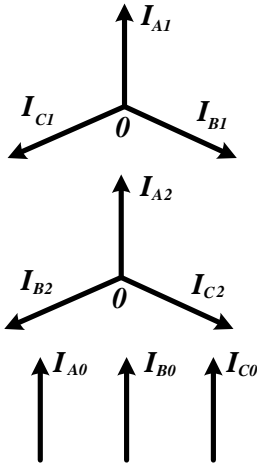


Рисунок 23.4

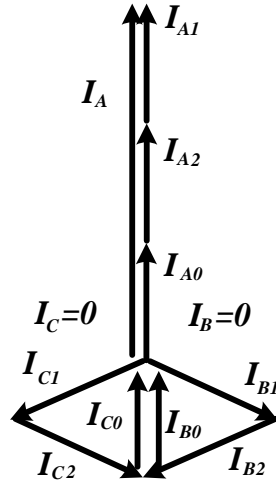


Рисунок 23.5

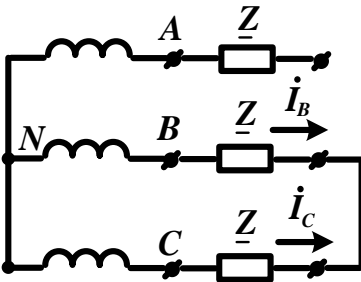


Рисунок 23.5

Приклад 2

На схемі, показаній на рис. 23.5, фаза  $A$  розімкнена,

$$\dot{I}_A = 0, \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_C.$$

Застосовуючи (23.4) – (23.6), одержимо

$$\dot{I}_{A0} = 0,$$

$$\dot{I}_{A1} = \frac{1}{3}(a \dot{I}_B + a^2 \dot{I}_C) = \frac{\dot{I}_B}{3}(a - a^2) = \frac{j \dot{I}_B}{\sqrt{3}},$$

$$\dot{I}_{A2} = \frac{1}{3}(a^2 \dot{I}_B + a \dot{I}_C) = \frac{\dot{I}_B}{3}(a^2 - a) = -\frac{j \dot{I}_B}{\sqrt{3}}.$$

На рисунку 23.6 показані векторна діаграма струмів  $\dot{I}_B$  та  $\dot{I}_C$  і векторні діаграми симетричних відповідних струмів усіх трьох фаз. Геометричне додавання векторів показує, що  $\dot{I}_A = 0$ ,  $\dot{I}_B = -\dot{I}_C$ .

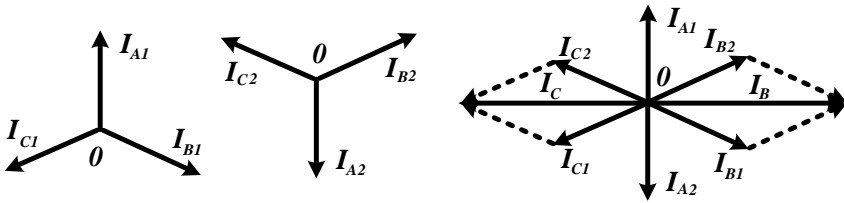


Рисунок 23.6

Симетричні складові струмів і напруги можуть бути не лише обчисленими, але і вимірними за допомогою спеціальних електричних вимірювальних схем, що називаються фільтрами симетричних складових струмів і напруг. Ці фільтри стали поширеними у релейному захисті електроенергетичних кіл.

### Контрольні питання і завдання

1. Через які причини система струмів у симетричному трифазному генераторі може бути несиметричною?
2. Яка амплітуда ЕРС нульової послідовності, якщо відомо, що сума ЕРС фаз дорівнює 100 В?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес,

М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 24

### Тема «Розрахунок кола методом симетричних складових»

#### План

1. Опори симетричного трифазного кола для струмів різних послідовностей.
2. Визначення струмів у симетричному колі.
3. Розрахунок кола із несиметричним навантаженням.

#### 24.1. Опори симетричного трифазного кола для струмів різних послідовностей

Якщо до виводів симетричного трифазного кола прикладена симетрична система напруг прямої, зворотної або нульової послідовностей, то в колі виникає симетрична система струмів відповідно до тієї самої послідовності, яку мають прикладені напруги.

Відношення прикладених комплексних фазних напруг прямої, зворотної і нульової послідовностей до відповідних комплексних фазних струмів називають відповідно комплексними опорами кола прямої ( $\underline{Z}_1$ ), зворотної ( $\underline{Z}_2$ ) і нульової ( $\underline{Z}_0$ ) послідовностей.

У будь-яких симетричних трифазних статичних колах (колах, що не містять машин, які обертаються) зміна порядку додержання фаз прикладеної симетричної напруги з прямого на зворотний не змінює значення струмів (змінюється лише їх послідовність з прямої на зворотну). При цьому для таких кіл опори прямої і зворотної послідовностей однакові ( $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$ ).

Розглянемо, наприклад, трифазне симетричне коло (рис. 24.1), у якому  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$ .

Очевидно, що для цього кола  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$ . Визначимо для неї  $\underline{Z}_0$ . Припустимо, що до виводів кола прикладена симетрична система фазних напруг нульової послідовності

$$\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C = \dot{U}_0,$$

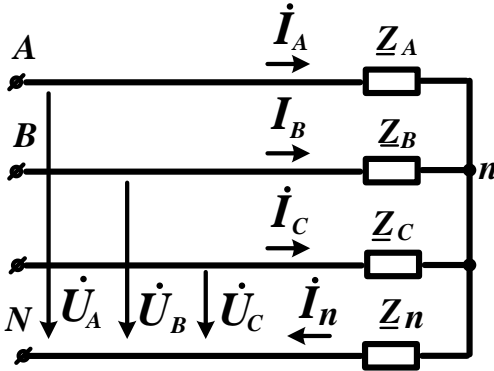


Рисунок 24.1

при цьому система струмів також симетрична і має нульову послідовність, тобто

$$\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_C = \dot{I}_0.$$

Струм у нейтральному проводі

$$\dot{I}_N = 3\dot{I}_0.$$

Складемо для контуру  $AnNA$  рівняння  $\dot{U}_A = \underline{Z}_A \dot{I}_A + \underline{Z}_N \dot{I}_N$  і, підставивши  $\dot{U}_A = \dot{U}_0$ ,  $\dot{I}_A = \dot{I}_0$ ,  $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$ .  $\underline{Z}_A = \underline{Z}$ , одержимо  $U_0 = (Z + 3Z_N) I_0$ , звідси

$$\underline{Z}_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = \underline{Z} + 3\underline{Z}_N.$$

За відсутності нейтрального проводу струми нульової послідовності проходити не можуть:

$$\underline{Z}_0 = \infty \text{ і } \dot{I}_0 = 0.$$

Під час розрахунків кіл методом симетричних складових розглядають окремо схеми для струмів і напругу різних послідовностей. Опір у нейтральному проводі не чинить впливу на симетричні системи струмів прямої і зворотної послідовностей, тому на схемах для струмів цих послідовностей опір в нейтральному проводі не зазначають (рис. 24.2). На схемі для симетричних струмів і напруг нульової послідовності замість опору  $\underline{Z}_N$  у нейтральному проводі вводять потрібні значення цього опору на кожній фазі (рис. 24.3).

Усі розрахунки проводять для однієї фази, яку називають основною.

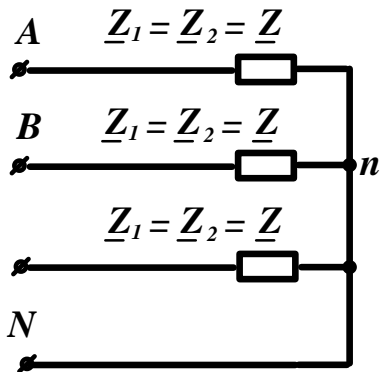


Рисунок 24.3

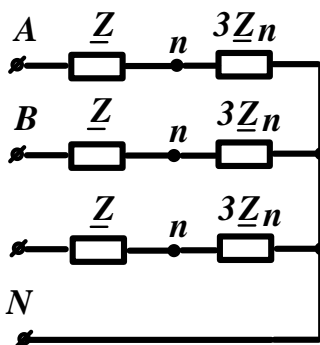
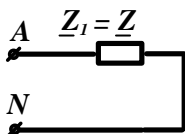


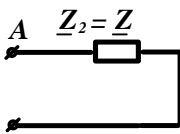
Рисунок 24.2

Зазвичай за основну фазу беруть фазу  $A$ , і у цьому разі для скорочення запису в позначеннях струмів і напруги різних послідовностей індекс  $A$  не пишуть. Так, для цього прикладу (рис. 24.1) на рис. 24.4 показано три однофазні схеми для струмів і напруги різних послідовностей.

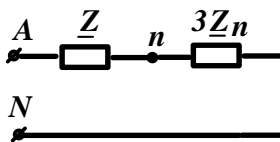
Ці схеми скорочено називають схемами прямої, зворотної та нульової послідовностей.



а) пряма



б) зворотна



в) нульова

Рисунок 24.4 – Однофазні схеми послідовностей

## 24.2. Визначення струмів у симетричному колі

Для того щоб визначити струми в симетричному колі (рис. 24.5), до якого прикладена несиметрична система напруг, передусім знайдемо за (24.4) – (24.6) симетричні складові прикладених напруг.

Симетричні складові струмів визначимо за законом Ома:

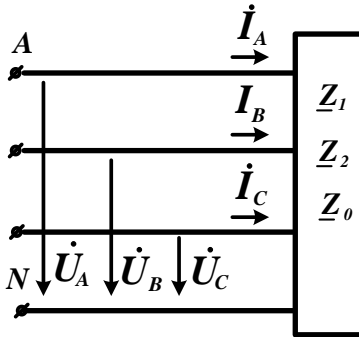


Рисунок 24.5

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{U}_1}{Z_1}, \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{U}_2}{Z_2}, \\ \dot{I}_0 &= \frac{\dot{U}_0}{Z_0}. \end{aligned}$$

Потім знаходимо струми несиметричної системи

$$\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C.$$

### 24.3. Розрахунок кола із несиметричним навантаженням

У нормальних умовах несиметричні режими у високовольтних трифазних колах трапляються відносно рідко (переважно у колах із дуговими електроплавильними печами і однофазними двигунами електротяги).

Зазвичай несиметричні режими виникають у аварійних умовах, коли в якому-небудь колі з'являється несиметрія.

Розрізняють два види несиметрії – *поперечну* і *поздовжню*.

**Поперечна несиметрія** у симетричному трифазному колі виникає під час несиметричного навантаження. До неї, зокрема, відносять різні види несиметричних коротких замикань (замикання між фазами, замикання одної або двох фаз на землю).

**Поздовжня несиметрія** виникає, якщо до розсікання фаз лінії вмикаються елементи з неоднаковими опорами або під час обривання одного або двох проводів (несиметрична ділянка лінії).

Для розрахунків несиметричних режимів трифазних кіл зручно використовувати принцип компенсації, замінюючи несиметричний приймач або несиметричну ділянку в лінії джере-



лами ЕРС (напруги), значення яких до закінчення усього розрахунку залишаються невідомими.

Доцільність цього прийому полягає в тому, що після такої заміни коло стає симетричним, і для нього різнойменні симетричні складові струмів і напруги не залежать одна від одної. Зв'язки ж між симетричними складовими струмів і напруги різних послідовностей, обумовлені несиметрією, і вводяться пізніше.

Розглянемо метод розрахунку на прикладі схеми

рис. 24.6, що містить симетричне динамічне ( $\underline{Z}'_1, \underline{Z}'_2, \underline{Z}'_0 = \infty$ ) і несиметричне статичне навантаження. Візьмемо задані ЕРС генераторів і опори елементів схеми. Потрібно знайти струми і напруги.

На рис. 24.6 схема і опори несиметричного навантаження не показані, оскільки на першому етапі розрахунку вони не потрібні. Замінімо несиметричне навантаження трьома джерелами

ЕРС із невідомими напругами  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  і одержимо симетричну схему, що, крім генератора з симетричною системою ЕРС, містить джерела з несиметричними напругами  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ .

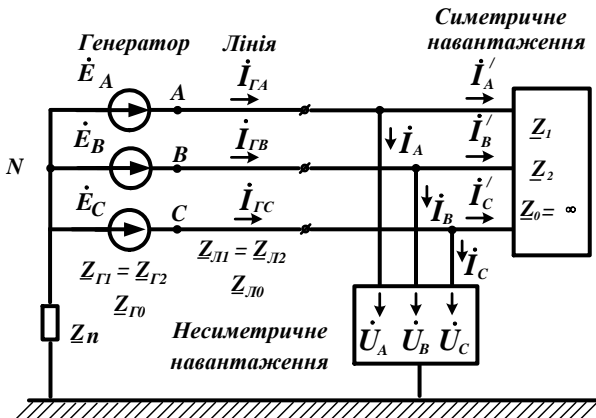


Рисунок 24.6

Розкладемо напруги  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$  на симетричні складові  $\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0$ , взявши фазу  $A$  за основну.

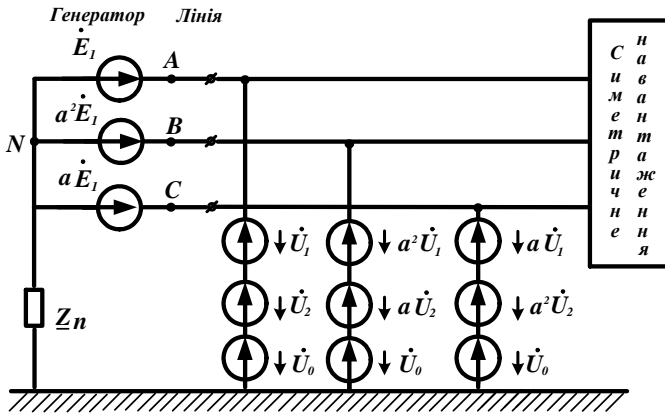
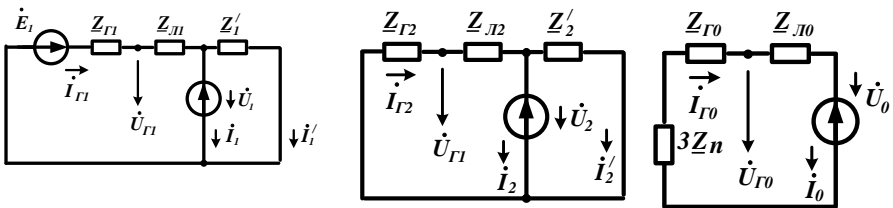


Рисунок 24.7

У результаті одержимо симетричну схему (рис. 24.7), причому у відгалуженні, де було несиметричне навантаження, розміщені джерела трьох симетричних систем напруг прямої, зворотної і нульової послідовностей.

У симетричному колі симетрична система напруг будь-якої послідовності викликає симетричну систему струмів такої самої послідовності.

Отже, можна зіставити три незалежні схеми, показані на рис. 24.8 а – в.



а) пряма

б) зворотна

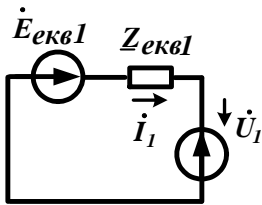
в) нульова

Рисунок 24.8 – Симетрична система напруги

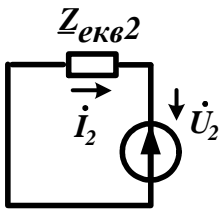
Режим фази *A* початкової схеми (див. рис. 24.7) визначимо шляхом накладання режимів цих трьох схем.

Конфігурації схем прямої і зворотної послідовностей завжди однакові. Схема нульової послідовності зазвичай істотно відрізняється. Необхідно звернути особливу увагу на те, що опір у нейтральному проводі вводиться до схеми нульової послідовності потрійної величини.

Для подальшого розрахунку треба перетворити схеми окремих послідовностей до простого вигляду, не зачіпаючи при цьому віток із джерелами невідомої напруги  $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ .



а)



б)

Рисунок 24.9

На схемі прямої послідовності замінимо вітки генератора і симетричного приймача еквівалентним генератором (рис. 24.9 а):

$$\dot{E}_{ekv1} = \frac{\underline{Y}_1 \dot{E}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}'_1},$$

$$\underline{Y}_{ekv1} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}'_1,$$

де

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_{Л1} + \underline{Z}_{Г1}},$$

$$\underline{Y}'_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}, \quad \dot{E}_1 = \dot{E}_A.$$

На схемі зворотної послідовності об'єднуємо вітки генератора і симетричного приймача (рис. 24.9 б):

$$\underline{Z}_{ekv2} = \frac{(\underline{Z}_{Г2} + \underline{Z}_{Л2})\underline{Z}'_2}{\underline{Z}_{Л2} + \underline{Z}_{Г2} + \underline{Z}'_2}.$$

Схема нульової послідовності в цьому прикладі перетворення не потребує, оскільки вона має простіший вигляд.

Для кожної з трьох схем напишемо рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$\underline{Z}_{екв1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1 = \dot{E}_{екв1},$$

$$\underline{Z}_{екв2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2 = 0,$$

$$\underline{Z}_{екв0} \dot{I}_0 + \dot{U}_0 = 0,$$

$$\text{де } \underline{Z}_{екв0} = \underline{Z}_{Л0} + \underline{Z}_{Г0} + 3\underline{Z}_N.$$

У цих трьох рівняннях шість невідомих:

$$\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0.$$

Додаткові три рівняння пов'язують ці шість невідомих величин і можуть бути складені на підставі заданої схеми і параметрів несиметричного приймача.

Складемо додаткові рівняння для деяких видів несиметричних приймачів.

Для приймача, наведеного на рис. 24.10:

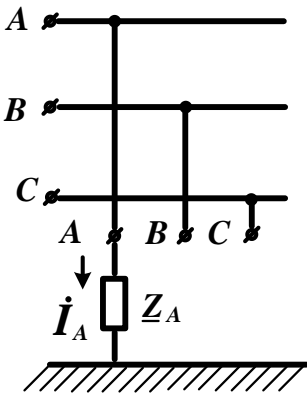


Рисунок 24.10

$$\dot{U}_A = \underline{Z}_A \dot{I}_A, \dot{I}_B = 0, \dot{I}_C = 0$$

або

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = \underline{Z}_A (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0),$$

$$a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0,$$

$$a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0.$$

Для приймача, наведеного на рис. 24.11,

$$\dot{U}_B = \underline{Z}_B \dot{I}_B, \dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C; \dot{I}_A = 0$$

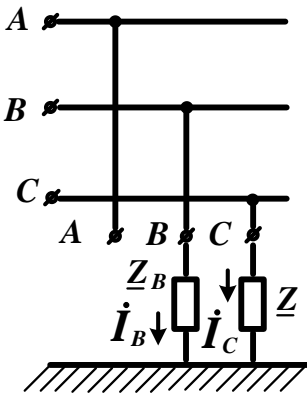


Рисунок 24.11

За відсутності з'єднання несиметричного приймача із землею, наприклад, для схеми, наведеної на рис. 24.12, симетричні складові струмів нульової послідовності дорівнюють нулю, і складання схеми кола нульової послідовності на попередніх етапах розрахунку випадає. Одержимо два основні рівняння з чотирма невідомими, і потрібно скласти лише два додаткових рівняння, а саме:

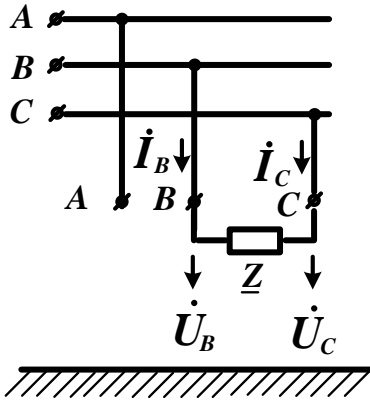


Рисунок 24.12

або

$$cc \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0,$$

$$a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 =$$

$$= \underline{Z}_B (a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0),$$

$$a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 =$$

$$= \underline{Z}_C (a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0).$$

$$\dot{U}_B = \underline{Z}_B \dot{I}_B, \quad \dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C,$$

$$\dot{I}_A = 0$$

або

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0,$$

$$a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 - (a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2) =$$

$$= \underline{Z} (a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2).$$

## Контрольні питання і завдання

1. До трифазного симетричного електричного генератора, обмотки якого з'єднані зіркою, підімкнено несиметричне навантаження, з'єднане трикутником. Чи містять систему нульової послідовності такі системи ЕРС, напруги або струмів:

- а) система фазних ЕРС;
- б) система фазних струмів генератора;
- в) система фазної напруги на навантаженні;
- г) система фазних струмів навантаження;
- д) система лінійної напруги генератора?

## Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 25

### Тема «Визначення параметрів чотириполосників»

#### План

1. Основні поняття.
2. Типові схеми заміщення чотириполосника.
3. Характерні режими роботи чотириполосника.

#### 25.1. Основні поняття

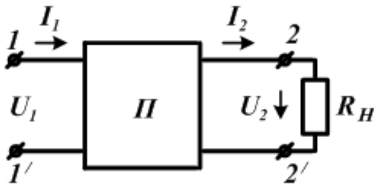
Чотириполосником називається частина електричного кола або схеми, що містить два вхідні виводи (полюси) для підмикання джерела енергії і два вихідних виводи для підключення навантаження. До чотириполосників можна віднести різні за призначенням технічні пристрої:

- двопровідну лінію;
- двообмотковий трансформатор;
- фільтри частот;
- підсилювачі сигналів тощо.

Теорія чотириполосників установлює зв'язок між режимними параметрами на вході ( $U_1, I_1$ ) і режимними параметрами на його виході ( $U_2, I_2$ ), при цьому процеси, що відбуваються усередині чотириполосника, не розглядаються.

Таким чином, єдина теорія чотириполосника дозволяє аналізувати різні за структурою і призначенням електричні кола, які можуть бути віднесені до класу чотириполосників.

Якщо чотириполосник не містить усередині себе джерел енергії, то він називається **пасивним** (позначається буквою  $\Pi$ ), якщо усередині чотириполосника є джерело, то він називається **активним** (позначається буквою  $\Lambda$ ). Надалі аналізуються пасивні лінійні чотириполосники.



На електричних схемах чотириполосники умовно позначаються прямокутником із двома парами виводів (рис. 25.1):

Рисунок 25.1 – Загальна схема

– **1 і 1'** – вхідні (первинні) виводи,  
– **2 і 2'** – вихідні (вторинні) виводи. Існує декілька форм запису рівнянь, що пов'язують режимні параметри на вході і виході.

1. Система основних рівнянь чотириполюсника форми «**A**»:

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2,$$

$$I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2.$$

Між коефіцієнтами цієї форми існує такий зв'язок:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Рівняння зв'язку показує, що незалежними є лише три із чотирьох коефіцієнтів чотириполюсника.

2. Система основних рівнянь чотириполюсника форми «**B**» застосовується під час зворотного вмикання чотириполюсника:

$$U_2 = B_{11}U_1 + B_{12}I_1,$$

$$I_2 = B_{21}U_1 + B_{22}I_1.$$

Крім названих форм рівнянь чотириполюсника «**A**» і «**B**», застосовуються на практиці ще чотири форми, а саме форми «**Z**», «**Y**», «**H**» і «**G**».

Структура цих рівнянь наведена нижче.

3. Система основних рівнянь чотириполюсника форми «**Z**»:

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2,$$

$$U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2.$$

4. Система основних рівнянь чотириполюсника форми «**Y**»:

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2,$$

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2.$$

5. Система основних рівнянь чотириполюсника форми «**H**»:



$$U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2,$$

$$I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2.$$

6. Система основних рівнянь чотириполюсника форми « $G$ »:

$$I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}I_2,$$

$$U_2 = G_{21}U_1 + G_{22}I_2.$$

Співвідношення між коефіцієнтами чотириполюсника різних форм наведено в довідковій літературі, проте їх неважко одержати, виконавши перетворення однієї форми рівнянь в іншу.

## 25.2. Типові схеми заміщення чотириполюсника

Оскільки чотириполюсник характеризується трьома незалежними коефіцієнтами, то з цього випливає, що його проста схема заміщення повинна містити три незалежні елементи.

Існує дві такі схеми:

а)  $T$ -подібна схема, або схема з'єднання зіркою (рис. 25.2);

б)  $\Pi$ -подібна схема, або схема з'єднання трикутником (рис. 25.3).

### 25.2.1. $T$ -подібна схема заміщення чотириполюсника

Установимо співвідношення між коефіцієнтами чотириполюсника  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  і параметрами елементів

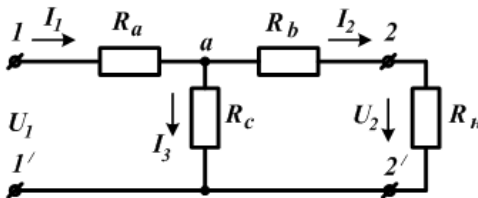


Рисунок 25.2 –  $T$ -подібна схема заміщення

схеми заміщення (рис. 25.2). На підставі законів Кірхгофа складаються рівняння для  $T$ -подібної схеми заміщення (рис. 25.2):

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 - I_3 &= 0, \\
 U_1 &= I_1 R_a + I_3 R_c, \\
 0 &= U_2 + I_2 R_b - I_3 R_c.
 \end{aligned}$$

Потім складена система рівнянь перетвориться до вигляду основної системи рівнянь вигляду «А»:

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad U_1 = (I_2 + I_3)R_a + I_3 R_c,$$

$$I_3 = \frac{1}{R_c}(U_2 + I_2 R_b),$$

$$U_1 = I_2 R_a + I_3(R_a + R_c),$$

$$U_1 = I_2 R_a + \frac{1}{R_c}(U_2 + I_2 R_b)(R_a + R_c),$$

$$U_1 = \frac{R_a + R_c}{R_c} U_2 + I_2(R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}),$$

$$I_1 = I_2 + \frac{1}{R_c}(U_2 + I_2 R_b),$$

$$I_1 = \frac{1}{R_c} U_2 + (1 + \frac{R_b}{R_c}) I_2.$$

Тоді коефіцієнти вигляду «А» записують у такій формі:

$$A_{11} = 1 + \frac{R_a}{R_c}, \quad A_{12} = R_a + R_b + \frac{R_a R_b}{R_c}, \quad A_{21} = \frac{1}{R_c}, \quad A_{22} = 1 + \frac{R_b}{R_c}.$$

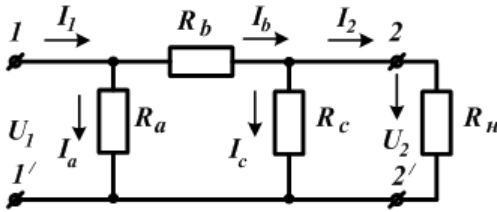
Виразимо опори схеми заміщення через коефіцієнти вигляду «А»:

$$R_c = \frac{1}{A_{21}}, \quad R_a = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}}, \quad R_b = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}}.$$

### 25.2.2. П-подібна схема заміщення чотириполюсника

Установимо співвідношення між коефіцієнтами чотириполюсника і параметрами елементів схеми заміщення (рис. 25.3).

На підставі законів Кірхгофа складають рівняння для П-подібної схеми заміщення(рис. 25.3) :



$$I_1 - I_a - I_b = 0,$$

$$I_b - I_c - I_2 = 0,$$

$$U_1 = I_a R_a.$$

Отже,

Рисунок 25.3 – П-подібна схема заміщення

$$0 = I_b R_b + I_c R_c - I_a R_a,$$

$$0 = U_2 - I_c R_c.$$

Потім складена система рівнянь перетвориться до вигляду основної системи рівнянь вигляду «А»:

$$I_b = I_2 + I_c, \quad U_2 = I_c R_c,$$

$$I_c = \frac{U_2}{R_c}, \quad 0 = R_b \left( I_2 + \frac{U_2}{R_c} \right) + U_2 - U_1,$$

$$U_1 = \left( 1 + \frac{R_b}{R_c} \right) U_2 + R_b I_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{R_a} \left( \left( 1 + \frac{R_b}{R_c} \right) U_2 + R_b I_2 \right) + I_2 + \frac{U_2}{R_c},$$

$$I_1 = \frac{1}{R_a} \left( 1 + \frac{R_b}{R_c} \right) U_2 + \frac{1}{R_a} R_b I_2 + I_2 + \frac{U_2}{R_c},$$

$$I_1 = \left( \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_c} + \frac{R_b}{R_a R_c} \right) U_2 + \left( 1 + \frac{R_b}{R_a} \right) I_2.$$

Тоді коефіцієнти вигляду «А» записуються у такій формі:

$$A_{11} = 1 + \frac{R_b}{R_c}, \quad A_{12} = R_b,$$

$$A_{21} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_a} + \frac{R_b}{R_a R_c}, \quad A_{22} = 1 + \frac{R_b}{R_a}.$$

Виразимо опори схеми заміщення через коефіцієнти вигляду «А»:

$$R_c = \frac{A_{12}}{A_{11} - 1}, \quad R_a = \frac{A_{12}}{A_{22} - 1}, \quad R_b = A_{12}.$$

### 25.3. Характерні режими роботи чотириполюсника

У цьому разі коефіцієнти чотириполюсника визначаються через його вхідні опори з боку вхідних ( $\underline{Z}_{10}$  і  $\underline{Z}_{1K}$ ) і вихідних ( $\underline{Z}_{20}$  і  $\underline{Z}_{2K}$ ) виводів у режимах холостого ходу і короткого замикання за прямого і зворотного вмикання чотириполюсника.

#### 25.3.1. Пряме вмикання чотириполюсника

##### 25.3.1.1 Режим холостого ходу

Схема заміщення наведена на рисунку 25.4.

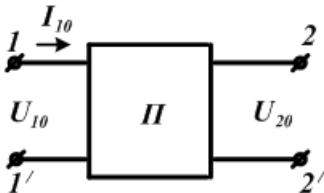


Рисунок 25.4 – Пряме вмикання. Холостий хід

У цьому разі струм навантаження дорівнює нулю, а система рівнянь форми «А» набирає вигляду

$$\dot{U}_{10} = \underline{A}_{11} \dot{U}_{20},$$

$$\dot{I}_{10} = \underline{A}_{21} \dot{U}_{20}.$$

Звідси знаходиться відношення напруги до струму

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{\underline{A}_{11} \dot{U}_{20}}{\underline{A}_{21} \dot{U}_{20}} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}.$$

##### 25.3.1.2 Режим короткого замикання

Схема заміщення наведена на рисунку 25.5.

У цьому разі напруга на навантаженні дорівнює нулю, а система рівнянь форми «А» набирає вигляду

$$\dot{U}_{1K} = \underline{A}_{12} \dot{I}_{2K},$$

$$\dot{I}_{1K} = \underline{A}_{22} \dot{I}_{2K}.$$

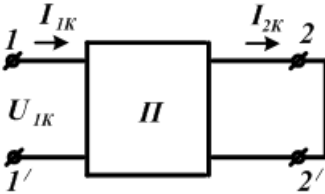


Рисунок 25.5 – Пряме вмикання. Коротке замикання

Звідси знаходять відношення напруги до струму:

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\dot{U}_{1K}}{\dot{I}_{1K}} = \frac{\underline{A}_{12} \dot{I}_{2K}}{\underline{A}_{21} \dot{I}_{2K}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}.$$

### 25.3.2. Зворотнє вмикання чотириполюсника

У цьому разі джерело напруги під'єднують до вторинних або вихідних затискачів чотириполюсника.

#### 25.3.2.1. Режим холостого ходу

Схема заміщення наведена на рисунку 25.6.

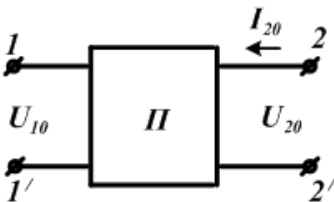


Рис. 25.6 – Зворотнє вмикання. Холостий хід

У цьому разі первинний струм дорівнює нулю, а система рівнянь форми «B» набирає вигляду

$$\dot{U}_{20} = \underline{B}_{11} \dot{U}_{10},$$

$$\dot{I}_{20} = \underline{B}_{21} \dot{U}_{10}.$$

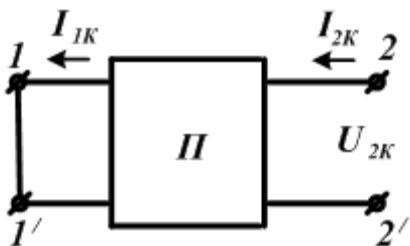
Звідси знаходять відношення напруги до струму:

$$\underline{Z}_{20} = \frac{\dot{U}_{20}}{\dot{I}_{20}} = \frac{\underline{B}_{11} \dot{U}_{10}}{\underline{B}_{21} \dot{U}_{10}} = \frac{\underline{B}_{11}}{\underline{B}_{21}}.$$

### 25.3.2.2. Режим короткого замикання

Схема заміщення наведена на рисунку 25.7.

У цьому разі напруга на навантаженні дорівнює нулю, а система рівнянь форми «**B**» набирає вигляду



$$\begin{aligned} \dot{U}_{2K} &= \underline{B}_{12} \dot{I}_{1K}, \\ \dot{I}_{2K} &= \underline{B}_{22} \dot{I}_{1K}. \end{aligned}$$

Звідси знаходять відношення напруги до струму

Рисунок 25.7 – Зворотнє вмикання. Коротке замикання

$$\underline{Z}_{2K} = \frac{\dot{U}_{2K}}{\dot{I}_{2K}} = \frac{\underline{B}_{12} \dot{I}_{1K}}{\underline{B}_{21} \dot{I}_{1K}} = \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{21}}.$$

Записують вирази для опорів холостого ходу і короткого замикання під час прямого і зворотного увімкнень, що називаються первинними параметрами чотириполюсника:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}, \quad \underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}, \quad \underline{Z}_{20} = \frac{\hat{\underline{A}}_{11}}{\hat{\underline{A}}_{21}}, \quad \underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{B}_{12}}{\underline{B}_{22}}.$$

Співвідношення між коефіцієнтами форм «**A**» і «**B**» мають такий вигляд:

$$\underline{A}_{11} = \underline{B}_{22}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{B}_{12}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{B}_{21}, \quad \underline{A}_{22} = \underline{B}_{11}.$$

Спільний розв'язок отриманих рівнянь дозволяє встановити зв'язок між вхідними опорами чотириполюсника в режимі холостого ходу і короткого замикання:

$$\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{1K}} = \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{2K}}.$$

Для визначення коефіцієнтів чотириполюсника беруть будь-які три з чотирьох рівнянь для вхідних опорів і доповнюють їх рівнянням зв'язку між коефіцієнтами

$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1$ , після цього розв'язують одержану систему із чотирьох рівнянь. Як приклад візьмемо рівняння для  $\underline{Z}_{10}$ ,  $\underline{Z}_{20}$  і  $\underline{Z}_{2K}$ , тоді одержимо

$$\underline{Z}_{10} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}},$$

звідси

$$\underline{Z}_{20} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}},$$

звідси

$$\underline{Z}_{2K} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}, \text{ а}$$

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1.$$

Із вищезаписаних рівнянь одержимо

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{11} \cdot \frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10}} - \underline{A}_{11}\underline{A}_{11} \cdot \frac{\underline{Z}_{2K}}{\underline{Z}_{10}} = 1,$$

звідси випливає  $\underline{A}_{11} = \pm \sqrt{\frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20} - \underline{Z}_{2K}}}$ .

Інші коефіцієнти  $\underline{A}_{22}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$  одержимо шляхом підстановки знайденого значення  $\underline{A}_{11}$  у рівняння, записані вище.

Під час добування квадратного кореня одержимо два значення коефіцієнта  $\underline{A}$  і відповідно усіх інших коефіцієнтів, що відрізняються знаком (+ або -) або аргументом на  $\pm 180^\circ$ , наприклад  $\underline{A}' = Ae^{j\alpha}$ ,  $\underline{A}'' = -\underline{A}' = Ae^{j(\alpha \pm 180)}$ .

Двоїстість розв'язку пояснюється тим фактом, що вхідні опори будь-якого кола, зокрема чотириполюсника, не залежать від полярності виводів. З іншого боку, зміни полярності двох виводів чотириполюсника (1 1' або 2 2') призводять до зміни знаків перед усіма його коефіцієнтами.

Таким чином, для затвердження знаків перед коефіцієнтами потрібні додаткові дослідження.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Що називається чотириполосником?
2. Як класифікуються чотириполосники?
3. Запишіть шість форм запису рівнянь чотириполосника, зазначити для них позитивні напрямки запису струмів і напруги?
4. У яких випадках кожна форма запису має переваги перед іншими?
5. Яким чином, знаючи коефіцієнти однієї форми запису, можна визначити коефіцієнти іншої форми?
6. Який чотириполосник є симетричним?
7. Як виразити параметри елементів Т- і П-подібних еквівалентних схем чотириполосників через задані параметри чотириполосників.

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.



## Лекція 26

### Тема «Режими роботи чотириполюсника»

#### План

1. Характеристичні параметри симетричного чотириполюсника.
2. Способи з'єднання чотириполюсників.

#### 26.1. Характеристичні параметри симетричного чотириполюсника

Для симетричного чотириполюсника коефіцієнт  $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ , і система рівнянь форми «А» має такий вигляд:

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \cdot \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \cdot \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \cdot \dot{U}_2 + \underline{A}_{11} \cdot \dot{I}_2,$$

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21} = 1.$$

Характеристичним опором чотириполюсника  $\underline{Z}_C$  називається такий опір навантаження  $\underline{Z}_H = \underline{Z}_C$ , за якого вхідний опір чотириполюсника з боку первинних виводів також дорівнює опору навантаження:

$$\underline{Z}_C = \underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Установимо зв'язок між характеристичним опором  $\underline{Z}_C$  і коефіцієнтами чотириполюсника  $\underline{A}_{11}$ ,  $\underline{A}_{12}$ ,  $\underline{A}_{21}$ . Для цього перетворимо рівняння чотириполюсника:

$$\dot{U}_1 = \underline{A}_{11} \dot{U}_2 + \underline{A}_{12} \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \left( \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_C} \right) = \dot{I}_2 (\underline{A}_{11} \underline{Z}_C + \underline{A}_{12}), \quad (26.1)$$

$$\dot{I}_1 = \underline{A}_{21} \dot{U}_2 + \underline{A}_{11} \dot{I}_2 = \dot{U}_2 \left( \underline{A}_{21} + \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_C} \right) = \dot{I}_2 (\underline{A}_{21} \underline{Z}_C + \underline{A}_{11}). \quad (26.2)$$

Поділимо рівняння (26.1) на рівняння (26.2):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_C + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_C + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_C,$$

звідси одержуємо  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = Z_C e^{j\varphi_C}$ , де  $-90^\circ \leq \varphi_C \leq 90^\circ$ ;

$$\begin{aligned} \text{із (1)} \Rightarrow \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} &= \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_C} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = Me^{j\beta} = e^\alpha e^{j\beta} = \\ &= e^{\alpha+j\beta} = e^\gamma, \end{aligned}$$

$$\text{із (2)} \Rightarrow \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{21}\underline{Z}_C = \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = e^\gamma,$$

де  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \ln(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}})$  – стала (коефіцієнт) передачі чотириполюсника.

Дійсна частина коефіцієнта передачі (показує, як зміниться модуль напруги (струму) під час переходу через чотириполюсник, тому називається коефіцієнтом загасання:

$$\alpha = \ln \frac{\left| \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|}{\left| \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|} = \ln \frac{\left| \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|}{\left| \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right|} \quad [\text{Нп}], \text{ або } [\text{Непер}], \text{ – основна одиниця}$$

вимірювання загасання.

Загасання 1 Нп відповідає зменшенню модуля величини в  $e = 2,72$  раза. На практиці для вимірювання затухання сигналів застосовується інша, зручніша для практики одиниця, а саме: 1 децибел [дБ], визначається відповідно до рівняння

$$\alpha = 20 \lg \frac{|U_1|}{|U_2|} \quad [\text{дБ}], \quad 1 \text{ дБ} = 10^{\frac{1}{20}} \approx 1,1221 \text{ раза.}$$

Співвідношення між одиницями загасання:  
1 Нп = 8,086 дБ, 1дБ = 0,115 Нп.

Уявна частина коефіцієнта передачі показує, як змінюється фаза напруги (струму) під час переходу через чотириполусник, тому називається коефіцієнтом фази:

$$\beta = \psi_{U_1} - \psi_{U_2} = \psi_{i_1} - \psi_{i_2} \text{ [рад].}$$

Характеристичний опір  $\underline{Z}_C$  і коефіцієнт передачі  $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ ) називаються *характеристичними параметрами чотириполусника*.

Виразимо коефіцієнти чотириполусника через його характеристичні параметри  $\underline{Z}_C$  і  $\underline{\gamma}$ .

Перетворимо рівняння зв'язку між коефіцієнтами:

$$\underline{A}_{11}^2 - \underline{A}_{11}\underline{A}_{21} = (\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}})(\underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}) = 1.$$

Оскільки  $\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = e^{\underline{\gamma}}$ , то маємо

$$\underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}} = \frac{1}{e^{\underline{\gamma}}} = e^{-\underline{\gamma}}.$$

Розв'язуємо разом одержані рівняння:

$$\begin{cases} \underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = e^{\underline{\gamma}}, \\ \underline{A}_{11} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}} = e^{-\underline{\gamma}}. \end{cases}$$

Звідси випливає, що  $\underline{A}_{11} = \frac{e^{\underline{\gamma}} + e^{-\underline{\gamma}}}{2} = ch\underline{\gamma}$ ,

$$\sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} = \frac{e^{\underline{\gamma}} - e^{-\underline{\gamma}}}{2} = sh\underline{\gamma}.$$

Враховуючи, що  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}} = \frac{\sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}}{\underline{A}_{21}}$ ,

одержуємо для коефіцієнтів

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_C \cdot \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}} = \underline{Z}_C \cdot sh\underline{\gamma} \quad \underline{A}_{21} = \frac{\sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{\underline{Z}_C} sh\underline{\gamma}.$$

З урахуванням цих виразів основні рівняння форми «А» набувають вигляду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} + \dot{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh} \underline{\gamma}, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \underline{\gamma} + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh} \underline{\gamma}. \end{cases}$$

Ця форма рівнянь чотириполюсника використовується у теорії колових схем і у теорії електричних фільтрів.

## 26.2. Способи з'єднання чотириполюсників

Складне коло або схема може містити декілька чотириполюсників, з'єднаних між собою тим чи іншим способом. Під час розрахунку таких схем окремі групи чотириполюсника можна замінити еквівалентними одиночними чотириполюсниками і таким чином спростити схему кола і відповідно розв'язування задачі.

Розрізняють 5 способів з'єднання чотириполюсників між собою:

- а) каскадне;
- б) послідовне;
- в) паралельне;
- г) послідовно-паралельне;
- д) паралельно-послідовне.

На рисунку 26.1 показано каскадне з'єднання двох чотириполюсників  $\Pi'$  і  $\Pi''$ :

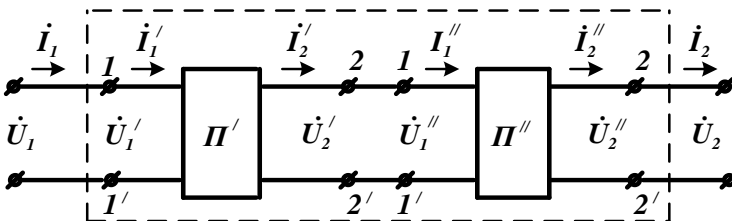


Рисунок 26. – 1 Каскадне з'єднання чотириполюсників

Для каскадного з'єднання, як бачимо зі схеми, задовольняються такі рівняння (у матричній формі) :

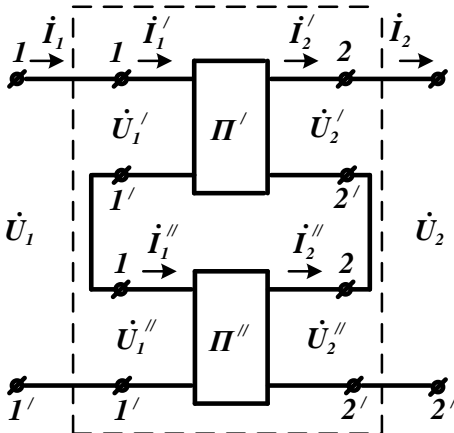
$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix}.$$

Використовуючи рівняння чотириполосника форми «А», одержимо:

$$\begin{vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_1 \end{vmatrix} = |\underline{A}'| \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}'_2 \\ \dot{I}'_2 \end{vmatrix} = |\underline{A}'| \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_1 \end{vmatrix} = |\underline{A}'| \cdot |\underline{A}''| \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}''_2 \\ \dot{I}''_2 \end{vmatrix} = |\underline{A}| \cdot \begin{vmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{vmatrix}.$$

Отже, матриця коефіцієнтів еквівалентного чотириполосника визначається добутком матриць касадних увімкнених чотириполосників  $\Pi'$  і  $\Pi''$ :

$$\begin{aligned} |\underline{A}| &= |\underline{A}'| \cdot |\underline{A}''| = \begin{vmatrix} \underline{A}'_{11} & \underline{A}'_{12} \\ \underline{A}'_{21} & \underline{A}'_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}''_{11} & \underline{A}''_{12} \\ \underline{A}''_{21} & \underline{A}''_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} (\underline{A}'_{11} \underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{12} \underline{A}''_{21}) & (\underline{A}'_{11} \underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{12} \underline{A}''_{22}) \\ (\underline{A}'_{21} \underline{A}''_{11} + \underline{A}'_{22} \underline{A}''_{21}) & (\underline{A}'_{21} \underline{A}''_{12} + \underline{A}'_{22} \underline{A}''_{22}) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$



При послідовному з'єднанні двох чотириполосників умикають послідовно їх входи і послідовно їх виходи (рис. 26.2).

Для послідовного з'єднання, як впливає зі схеми (рис. 26.2), справедливими є такі рівності:

Рисунок 26.2 – Послідовне з'єднання чотириполосників

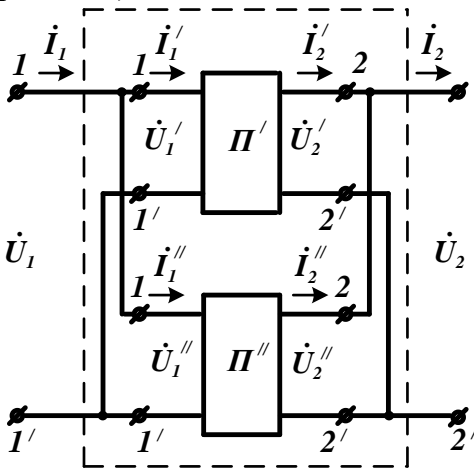
$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2; \\ \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2. \end{aligned}$$

Використовуючи рівняння чотириполюсника форми « $Z$ », одержимо

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = [Z'] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + [Z''] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \\ &= \{ [Z'] + [Z''] \} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [Z] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, матриця коефіцієнтів  $[Z]$  еквівалентного чотириполюсника дорівнює сумі матриць послідовно увімкнених чотириполюсників  $\Pi'$  і  $\Pi''$   $[Z] = [Z'] + [Z'']$ .

При паралельному з'єднанні двох чотириполюсників умикають паралельно їх входи і паралельно їх виходи (рис. 26.3):



Для паралельного з'єднання, як випливає зі схеми (рис. 26.3), правильними є такі рівності:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1, \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2, \\ \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1, \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2. \end{aligned}$$

Рисунок 26.3 – Паралельне з'єднання чотириполюсників

Використовуючи рівняння чотириполюсника формули « $Y$ », одержимо

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \\
 &= \underline{[Y]'} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + \underline{[Y]''} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \\
 &\{ \underline{[Y]'} + \underline{[Y]''} \} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \underline{[Y]} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Отже, матриця коефіцієнтів  $\underline{[Y]}$  еквівалентного чотириполіусника дорівнює сумі матриць паралельно включених чотириполіусників  $\Pi'$  і  $\Pi''$   $\underline{[Y]} = \underline{[Y]'} + \underline{[Y]''}$ .

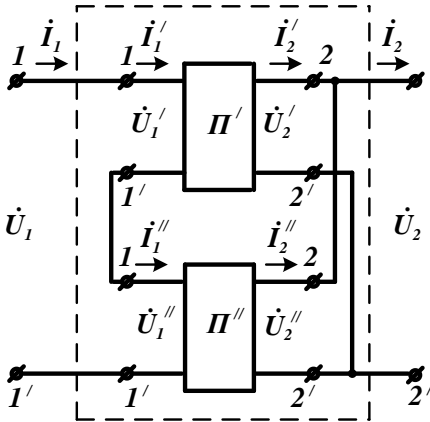


Рисунок 26.4 – Послідовно-паралельне з'єднання чотириполіусників

При послідовно-паралельному з'єднанні чотириполіусників  $\Pi'$  і  $\Pi''$  (рис. 26.4) їх входи вмикають послідовно, а виходи – паралельно.

Запишемо рівняння за законами Кірхгофа:

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 = \dot{I}''_1, \\
 \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2, \\
 \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1, \\
 \dot{U}_2 &= \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2.
 \end{aligned}$$

У цьому разі при згортанні схеми використовують рівняння форми « $\underline{H}$ »:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}'] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} + [\underline{H}''] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \{[\underline{H}'] + [\underline{H}'']\} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = [\underline{H}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де  $[\underline{H}] = [\underline{H}'] + [\underline{H}'']$  – матриця коефіцієнтів  $[\underline{H}]$  еквівалентного чотирьополосника.

При паралельно-последовному з'єднанні двох чотирьополосників  $\Pi'$  і  $\Pi''$  їх входи умикаються паралельно, а виходи – послідовно (рис. 26.5).

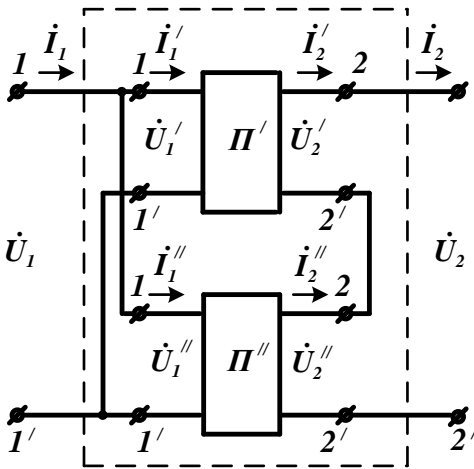


Рисунок 26.5 – Паралельно-последовне з'єднання чотирьополосників

Запишемо рівняння за законами Кірхгофа:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1, \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2, \\ \dot{U}_1 &= \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1, \\ \dot{U}_2 &= \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2. \end{aligned}$$

У цьому разі при згортанні схеми використовують рівняння форми « $\underline{G}$ »:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = [\underline{G}'] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} + [\underline{G}'''] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} =$$



$$= \{[\underline{G}'] + [\underline{G}'']\} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\underline{G}] \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ I_2 \end{bmatrix},$$

де  $[\underline{G}] = [\underline{G}'] + [\underline{G}']$  – матриця коефіцієнтів  $[\underline{G}]$  еквівалентного чотириполюсника.

### Контрольні питання і завдання

1. Що розуміють під характеристичними параметрами чотириполюсника?
2. Яким чином визначають характеристичні опори чотириполюсника?
3. Що називаєть вхідним опором чотириполюсника?
4. Що називаєть сталою передачі?
5. У яких одиницях вимірюють загасання?
6. Чи можливе з'єднання чотириполюсників, що не є ні послідовним, ні каскадним, ні паралельним?
7. В якій системі параметрів доцільно записувати рівняння чотириполюсників при їх каскадному, послідовному, паралельному з'єднаннях?
8. Із зображених двох чотириполюсників, які на вході сполучені послідовно, а на виході – паралельно?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 27

### Тема «Подання періодичних несинусоїдальних функцій»

#### План

1. Загальні визначення.
2. Розкладання періодичних несинусоїдальних функцій у гармонійний ряд Фур'є.
3. Властивості періодичних кривих, що мають симетрію.
4. Діючі значення несинусоїдальних струмів і напруги.

#### 27.1. Загальні визначення

Відомо, що в електроенергетиці за стандартну форму для струмів і напруг беруть синусоїдальну форму. Проте в реальних умовах форми кривих струмів і напруг можуть тією чи іншою мірою відрізнятись від синусоїдальних. Спотворення форм кривих цих функцій у приймачів призводить до додаткових втрат енергії і зниження їх коефіцієнта корисної дії. Синусоїдальність форми кривої напруги генератора є одним із показників якості електричної енергії як товару.

Можливі такі причини спотворення форми кривих струмів і напруг у складному колі:

- 1) наявність в електричному колі нелінійних елементів, параметри яких залежать від миттєвих значень струму і напруги [ $R, L, C = f(u, i)$ ], (наприклад, вирівнювальні пристрої, агрегати електрозварювань тощо);
- 2) наявність в електричному колі параметричних елементів, параметри яких змінюються у часі [ $R, L, C = f(t)$ ];
- 3) джерело електричної енергії (трифазний генератор) унаслідок конструктивних особливостей не може забезпечити ідеальну синусоїдальну форму вихідної напруги;
- 4) вплив у комплексі перелічених вище чинників.

## 27.2. Розкладання періодичних несинусоїдальних функцій у гармонійний ряд Фур'є

Із курсу математики відомо, що будь-яка періодична функція часу  $f(t) = f(t+T)$ , де  $T$  – період, що задовольняє умови Діріхле, може бути розвинена у тригонометричний ряд.

Можна зазначити, що функції, що розглядаються в електротехніці, задовольняють ці умови, у зв'язку з чим перевірку на їх виконання проводити не потрібно.

При розвиненні у ряд Фур'є функція подається таким чином:

$$\begin{aligned} f(\omega t) &= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots = \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k), \end{aligned}$$

де  $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$  – стала складова, або нульова гармоні-

ка,

$A_k \sin(k\omega t + \alpha_k)$  –  $k$ -та гармонічна складова, або скорочено  $k$ -та гармоніка.

Перша гармоніка називається основною, а усі інші – вищими.

Амплітуди окремих гармонік  $A_k$  не залежать від способу розвинення функції  $f(t)$  у ряд Фур'є, у той самий час початкові фази окремих гармонік  $\alpha_k$  залежать від вибору початку відліку часу (початку координат).

Окремі гармоніки ряду Фур'є можна подати у вигляді суми синусної та косинусної складових:

$$\begin{aligned} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) &= A_k \cdot \cos \alpha_k \cdot \sin k\omega t + \\ &+ A_k \sin \alpha_k \cdot \cos k\omega t = B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t. \end{aligned}$$

Тоді увесь ряд Фур'є набирає вигляду

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cos k\omega t .$$

Співвідношення між коефіцієнтами двох форм ряду Фур'є мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} B_k &= A_k \cos \alpha_k, & C_k &= A_k \sin \alpha_k, \\ A_k &= \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, & \alpha_k &= \arctg \frac{C_k}{B_k}. \end{aligned}$$

Якщо  $k$ -ту гармоніку та її синусну і косинусну складові замінити комплексними числами, то співвідношення між коефіцієнтами ряду Фур'є можна подати у комплексній формі

$$\begin{aligned} A_k \sin(k\omega t + \alpha_k) &= B_k \sin k\omega t + C_k \cos k\omega t \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A_k e^{j\alpha_k} &= B_k + jC_k. \end{aligned}$$

Якщо періодична несинусоїдальна функція часу задана (чи може бути виражена) аналітично у вигляді математичного рівняння, то коефіцієнти ряду Фур'є визначаються за формулами, відомими з курсу математики:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot d(\omega t), \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot d(\omega t), \\ C_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot d(\omega t), \\ A_k &= \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, & \alpha_k &= \arctg \frac{C_k}{B_k}. \end{aligned}$$

На практиці досліджувана несинусоїдальна функція  $f(t)$  зазвичай задається у вигляді графічної діаграми (графічно) (рис. 27.1)

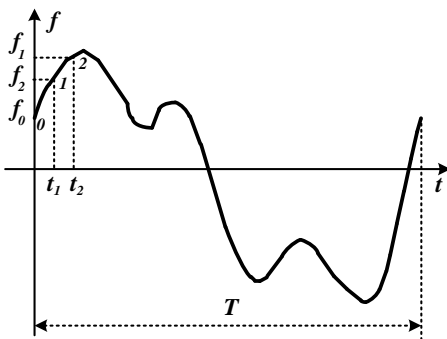


Рисунок 27.1 – Графічна діаграма несинусоїдальної функції

або у вигляді таблиці координат точок (таблицьно) в інтервалі одного періоду (табл. 27.1). Щоб виконати гармонійний аналіз такої функції за наведеними вище рівняннями, її необхідно попередньо

замінити математичним виразом. Заміна функції, заданої графічно або таблицьно математичним рівнянням, одержала назву апроксимації функції.

Таблиця 27.1 – Таблиця координат точок в інтервалі одного періоду

$m$	0	1	2	3	...	...	...	...	$M$
$t_m$	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	...	...	...	$T$
$f_m$	$f_0$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	...	...	...	...	$f_0$

Наразі гармонійний аналіз несинусоїдальних функцій часу  $f(t)$  виконується, як правило, на ЕОМ. В окремому випадку для математичного подання функції застосовують частково-лінійну апроксимацію. Для цього уся функція в інтервалі одного повного періоду розбивається на  $M = 20 - 30$  ділянок так, щоб окремі ділянки були по можливості ближчі до прямих ліній (рис. 1). На окремих ділянках функція апроксимується рівнянням прямої  $f_m(t) = a_m + b_m t$ , де коефіцієнти апроксимації ( $a_m, b_m$ ) визначаються для кожної ділянки через координати її кінцевих точок, наприклад для 1-ї ділянки маємо

$$a_1 = \frac{f_1 \cdot t_1 - f_2 \cdot t_2}{t_1 - t_1}, \quad b_1 = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}.$$

Період функції  $T$  розбивають на велику кількість кроків інтегрування  $N$ , крок інтегрування  $\Delta t = h = \frac{T}{N}$ , поточний час  $t_i = hi$ , де  $i$  – порядковий номер кроку інтегрування. Певні інтеграли у формулах гармонічного аналізу замінюються відповідними сумами, їх підрахунок виконується на ЕОМ методом трапецій або прямокутників, наприклад:

$$B_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt \approx \frac{2}{T} \sum_{i=1}^{m=N} (a_m + b_m \cdot t_i) \cdot \sin(k \frac{2\pi}{T} \cdot t_i) \cdot h.$$

Для визначення амплітуд вищих гармонік з достатньою точністю число кроків інтегрування повинне становити не менше  $100k$ , де  $k$  – номер гармоніки.

У техніці для виділення окремих гармонік з несинусоїдальних напруг і струмів застосовують спеціальні прилади, які називають гармонічними аналізаторами.

### 27.3 Властивості періодичних кривих, що мають симетрію

Коефіцієнти ряду Фур'є для стандартних функцій можуть бути взяті з довідкової літератури або в загальному випадку розраховані за наведеними вище формулами. Проте у разі кривих, що мають симетрію, завдання істотно спрощується, оскільки з їх розвинення випадають цілі спектри гармонік. Знання властивостей таких кривих дозволяє істотно заощадити час та ресурси під час обчислень.

Розрізняють такі види симетрії періодичних несинусоїдальних функцій.

- 1) **Непарна симетрія**: функція симетрична відносно початку координат і задовольняє умову  $f(t) = -f(-t)$  (рис. 27.2).

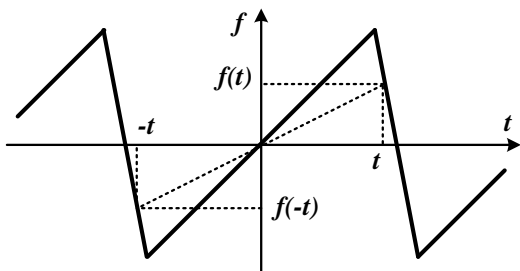


Рисунок 27.2 – Непарна функція

Функції, що мають непарну симетрію, дістали назви *непарних*. У розвиненні таких функцій є лише синусні складові окремих гармонік

$B_k$ , а стала складова  $A_0$  і косинусні складові окремих гармонік

$C_k$ :  $f(\omega t) = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin k\omega t$  – відсутні. При визначенні коефіцієнтів ряду Фур'є непарної функції інтегрування у формулі достатньо буде виконати за половину періоду  $T/2$ :

$B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot d(\omega t)$ .

$$B_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot \sin(k\omega t) \cdot d(\omega t).$$

2) *Парна симетрія*: функція симетрична відносно осі ординат і задовольняє умову  $f(t) = f(-t)$  (рис. 27.3).

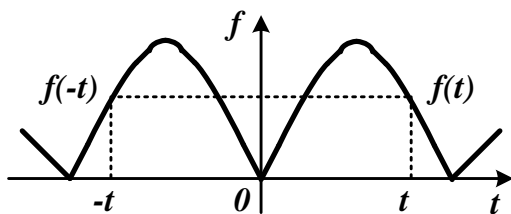


Рисунок 27.3 – Функція, що має парну симетрію

Функції, що мають парну симетрію, називають *парними*. У розвиненні таких функцій є лише стала складова  $A_0$  і косинусні складові окремих гармонік

$C_k$ , а синусні складові окремих гармонік  $B_k$  відсутні:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} C_k \cos k\omega t.$$

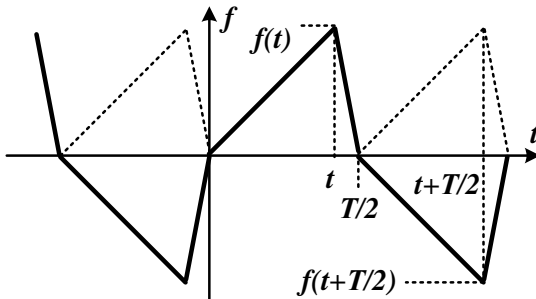


При визначенні коефіцієнтів ряду Фур'є парної функції інтегрування у формулах досить виконати за половину періоду:

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot d(\omega t),$$

$$C_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\omega t) \cdot \cos(k\omega t) \cdot d(\omega t).$$

3) **Коса симетрія:** функція симетрична відносно осі абсцис при зміщенні її додатньої частини [ $f(t) > 0$ ] чи від'ємної частини [ $f(t) < 0$ ] на відрізок часу ( $\pm T/2$ ) і задовольняє умову  $f(t) = -f(t \pm T/2)$  (рис. 27.4).



Функції, що мають косу симетрію, дістали назви *косоісиметричних*. Розвинення таких функцій містять лише непарні гармоніки (синусні і косинусні складові):

Рисунок 27.4 – Косоісиметрична функція

$$f(\omega t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{k=\infty} A_k \sin(k\omega t + a_k) = \sum_{k=1,3,\dots}^{k=\infty} B_k \sin k\omega t + \sum_{k=1,3,\dots}^{k=\infty} C_k \cos k\omega t.$$

Доведемо це твердження методом від супротивного. Припустимо, що косоісиметрична функція містить у розвиненні усі члени ряду Фур'є:

$$f(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

Додамо до аргументу функції  $T/2$ :

$$\begin{aligned}
 f(t + T/2) &= -A_0 - A_1 \sin(\omega t + \alpha_1 + 180^\circ) - \\
 &- A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2 + 360^\circ) + \dots = -A_0 + A_1 \sin(\omega t + \alpha_1) - \\
 &- A_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots
 \end{aligned}$$

Рівність  $f(t) = -f(t \pm T/2)$  виконується за умови  $A_0 = 0$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_4 = 0, \dots$ , що і треба було довести.

Коефіцієнти ряду Фур'є кососиметричної функції визначають за загальними правилами.

Функція  $f(t)$  може мати одночасно два види симетрії, наприклад, непарну і косу або парну і косу, але не може бути одночасно непарною і парною. При розвиненні конкретної функції в ряд Фур'є початок відліку необхідно вибирати так, щоб отримати бажаний вид симетрії функції.

#### 27.4. Діючі значення несинусоїдальних струмів та напруги

Як відомо, в електроенергетиці змінні струми і напруги характеризуються їх діючими значеннями. Математично діюче значення будь-якого струму (напруги), що періодично змінюється, визначається як середньоквадратичне значення функції за період:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}.$$

Припустимо, що функція струму містить у своєму складі усі компоненти ряду Фур'є:

$$\begin{aligned}
 i(\omega t) &= I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots = \\
 &= I_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k).
 \end{aligned}$$

Визначимо діюче значення цієї функції:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 dt + \sum_1^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t - \alpha_k) dt + \sum_{p \neq q} \frac{1}{T} \int_0^T I_{pm}^2 \sin^2(p\omega t + \alpha_p) I_{qm}^2 \sin^2(q\omega t + \alpha_q) dt} =$$

$$= \sqrt{I_0^2 + \sum_1^{\infty} \frac{I_{km}}{2} + \sum 0} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots)} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}$$

При інтегруванні враховано, що добуток двох синусоїдальних функцій часу з різними частотами  $\omega_1 = p\omega$  і  $\omega_2 = q\omega$  дає суму двох нових синусоїдальних функцій із частотами  $(\omega_1 + \omega_2)$  і  $(\omega_1 - \omega_2)$ , певний інтеграл від яких у межах цілого числа періодів дорівнює нулю.

Отже, ми одержали, що діюче значення несинусоїдального струму (напруги) дорівнює квадратному кореню з діючих значень окремих гармонік:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + \dots)},$$

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} = \sqrt{U_0^2 + \frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + \dots)}.$$

Приклади деяких функцій і їх діючих значень наведені нижче:

$$1. i_1 = I \sin \omega t,$$

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707 \text{ А.}$$

$$2. i_2 = 1 \sin \omega t + 0,5 \sin 2\omega t,$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(1^2 + 0,5^2)} = 0,79 \text{ А.}$$

$$3. i_3 = 1 \sin \omega t + 0,1 \sin 2\omega t,$$

$$I_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(1^2 + 0,1^2)} = 0,711 \text{ А.}$$

**Висновок:** при коефіцієнті вищої гармоніки менше 0,1 ( $k_{22} = I_{2m} / I_{1m} \leq 0,1$ ) їх частина в діючому значенні функції

становить менше 1 % ( $I_3/I_1 \leq 1,006$ ), і, отже, при визначенні діючого значення функції із похибкою  $\delta\% \leq 1$  ці гармоніки можуть не враховуватися.

### Контрольні питання і завдання

1. Що є причиною появи несинусоїдальних струмів і напруги в електричних колах?
2. Які величини і коефіцієнти характеризують періодичні несинусоїдальні змінні?
3. Які гармоніки відсутні в спектрах кривих, симетричних відносно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) початку системи координат?
4. Чи можна за допомогою векторних діаграм зображувати періодичні несинусоїдальні величини?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 28

### Тема «Методи розрахунку кіл несинусоїдального струму»

#### План

1. Особливості проходження несинусоїдальних струмів через пасивні елементи кола.
2. Методика розрахунку лінійних кіл при періодичних несинусоїдальних струмах.
3. Потужність у колі несинусоїдального струму.
4. Коефіцієнти, що характеризують несинусоїдальні функції  $u(t)$ ,  $i(t)$ .

#### 28.1. Особливості проходження несинусоїдальних струмів через пасивні елементи кола

##### 28.1.1. Резистор

Припустимо, що до резистора з опором  $R$  прикладена напруга такої форми

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Визначимо струм резистора

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + \frac{U_{1m}}{R} \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{U_{2m}}{R} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + \frac{U_{km}}{R} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Таким чином, на резистивному елементі несинусоїдальна напруга і струм збігаються за формою і подібні один до одного. Це дозволяє на практиці осцилографувати форму струму за допомогою реєстрації напруги на шунті.

##### 28.1.2. Конденсатор

Припустимо, що напруга на конденсаторі  $C$  описується гармонійним рядом

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Тоді струм через конденсатор визначатиметься виразом

$$i(t) = U_{1m} \omega C \sin(\omega t + \varphi_1 + 90^\circ) + \\ + U_{2m} 2\omega C \sin(2\omega t + \varphi_2 + 90^\circ) + \dots + \\ + U_{km} k\omega C \sin(k\omega t + \varphi_k + 90^\circ).$$

На підставі порівняння виразів для напруги і струму на конденсаторі бачимо, що конденсатор спотворює форму кривої струму порівняно із напругою шляхом збільшення вищих гармонік.

### 28.1.3. Котушка індуктивності

Припустимо, що напруга на котушці індуктивності  $L$  описується гармонійним рядом

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots + \\ + U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Тоді струм через котушку визначатиметься за виразом

$$i(t) = \frac{U_{1m}}{\omega L} \sin(\omega t + \varphi_1 - 90^\circ) + \frac{U_{2m}}{2\omega L} \sin(2\omega t + \varphi_2 - 90^\circ) + \dots + \\ + \frac{U_{km}}{k\omega L} \sin(k\omega t + \varphi_k - 90^\circ).$$

На підставі порівняння виразів для напруги і струму на котушці бачимо, що форма кривої напруги ближча до синусоїди, ніж форма кривої струму. Таким чином, котушка індуктивності є згладжувальним елементом для струму.

З урахуванням вищезазначеного на практиці, наприклад у силевій напівпровідниковій техніці, для згладжування випрямленої напруги застосовують конденсаторні фільтри, а для струму – дроселі.

## 28.2. Методика розрахунку лінійних кіл при періодичних несинусоїдальних струмах

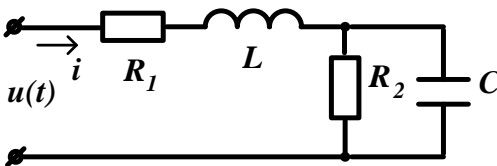


Рисунок 28.1

Припустимо, що на вході кола, наведеного на рис. 28.1, діє джерело, що має несинусоїдальний характер.

Розвинення у ряд Фур'є напруги цього джерела наведено у вигляді гармонійного ряду

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2).$$

Розрахунок струму джерела проводиться шляхом застосування методу накладення. Зображується схема (рис. 28.2) під час дії джерела постійної напруги. Припускають, що джерело має лише сталу складову  $u(t) = U_0$ .

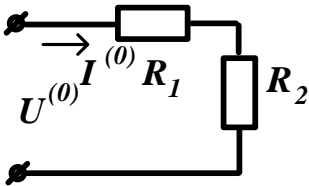


Рисунок 28.2

Вхідний струм визначається за законом Ома:

$$I^{(0)} = \frac{U^{(0)}}{R_1 + R_2}.$$

Подальший розрахунок проводиться із застосуванням комплексного методу. Вважають, що джерело має лише першу гармоніку напруги

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1).$$

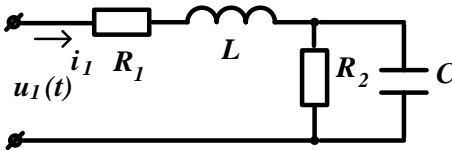


Рисунок 28.3

Для цього зображують схему заміщення (рис. 28.3) і записують вирази для вхідного струму:

$$\dot{I}^{(1)} = \frac{\dot{U}^{(1)}}{R_1 + j\omega L + \frac{R_2(-j\frac{1}{\omega C})}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}}} = I^{(1)} e^{j\psi_1}.$$

Вираз для миттєвого струму першої гармоніки набирає вигляду

$$i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1),$$

де  $I_{1m} = \sqrt{2}I^{(1)}$ .

Потім вважають, що джерело має лише другу гармоніку напруги

$$u_2(t) = U_{2m} \sin(2\omega t + \varphi_2).$$

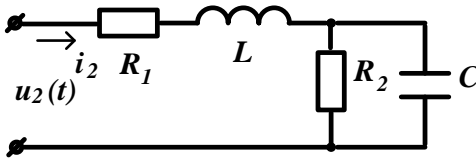


Рисунок 28.4

Для цього зображують схему заміщення (рис. 28.4) і записують вирази для вхідного струму:

$$\dot{I}^{(2)} = \frac{\dot{U}^{(2)}}{R_1 + j2\omega L + \frac{R_2(-j\frac{1}{2\omega C})}{R_2 - j\frac{1}{2\omega C}}} = I^{(2)} e^{j\psi_2}.$$

Вираз для миттєвого струму другої гармоніки набирає вигляду

$$i_2(t) = I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2),$$

де  $I_{2m} = \sqrt{2I^{(2)}}$

Миттєве значення шуканого струму визначають на основі принципу накладання шляхом додавання знайдених під час розрахунку гармонійних складових струмів і постійної складової струму:

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \psi_2).$$

Необхідно пам'ятати, що, зважаючи на відмінність частот, додавати комплекси різних гармонік неприпустимо.

Таким чином, *методика розрахунку лінійних кіл* при несинусоїдальних струмах зводиться до такого:

1. ЕРС і струми джерел розвивають у ряди Фур'є.
2. Здійснюють розрахунок кола окремо для сталої і кожної гармонічної складової.
3. Шукані величини струму визначають як алгебраїчні суми відповідних постійної і гармонічної складових.



### 28.3. Потужність у колі несинусоїдального струму

Під активною потужністю  $P$  розуміють кількість енергії, що споживється (генерується) об'єктом за одиницю часу. Математично активну потужність визначають як середнє значення миттєвої потужності за повний період.

Припустимо, що деякий елемент кола споживає струм  $i(t)$  при несинусоїдальній напрузі  $u(t)$ :

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots$$

$$i(t) = I_0 + I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1 - \varphi_1) + I_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2 - \varphi_2) + \dots$$

Миттєва потужність  $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ , тоді активна потужність буде дорівнювати:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_0 I_0 dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T (U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) \cdot I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k - \varphi_k)) dt + \\ &+ \sum_{p \neq q}^0 \frac{1}{T} \int_0^T U_{pm} \sin(p\omega t + \alpha_p) \cdot I_{qm} \sin(q\omega t + \alpha_q - \varphi_q) dt = \\ &= U_0 I_0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{2} U_{km} I_{km} \cos(\varphi) + \sum 0 = \\ &= U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos(\varphi_1) + U_2 I_2 \cos(\varphi_2) + \dots = \\ &= P_0 + P_1 + P_2 + \dots \end{aligned}$$

Таким чином, активна потужність несинусоїдального струму дорівнює сумі активних потужностей окремих гармонік:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = \sum_0^{\infty} P_k.$$

Реактивна потужність  $Q$  несинусоїдального струму визначається аналогічно, як активна потужність  $P$ , тобто як алгебраїчна сума реактивних потужностей окремих гармонік:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots = U_1 I_1 \sin(\varphi_1) + U_2 I_2 \sin(\varphi_2) + \dots = \sum_1^{\infty} Q_k.$$

Як відомо, реактивна потужність  $Q$  синусоїдального струму характеризує інтенсивність коливань енергії ( $Q = \omega \cdot W_{\max}$ ) з частотою  $\omega$  між електромагнітним полем елемента і рештою кола. У колі несинусоїдального струму коливання енергії відбуваються на різних частотах. Складання реактивних потужностей окремих гармонік, що характеризують коливання енергії на різних частотах, позбавлене фізичного змісту.

Математично випливає, що реактивні потужності окремих гармонік мають різні знаки і в сумі дають нуль, хоча коливання енергії при цьому мають місце. Таким чином, для кола несинусоїдального струму поняття реактивної потужності позбавлене фізичного змісту.

Для кола несинусоїдального струму застосовується також і поняття повної потужності, яка визначається як добуток діючих значень напруг і струму:

$$S = U \cdot I = \sqrt{(U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots)} \sqrt{(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots)}.$$

Як відомо, для кола синусоїдального струму потужності  $P$ ,  $Q$ ,  $S$  утворюють прямокутний трикутник, із якого випливає співвідношення  $S^2 = P^2 + Q^2$ . Для кіл несинусоїдального струму це співвідношення між потужностями виконується лише для резистивних елементів, в яких відповідно до законом Ома ( $u = i \cdot R$ ) форми кривих функцій  $u(t)$  і  $i(t)$  ідентичні. Якщо в колі знаходяться реактивні елементи  $L$  і  $C$ , то це співвідношення не виконується:  $S^2 \geq P^2 + Q^2$ . Для балансу цього рівняння до його правої частини вносять доданок  $S^2 = P^2 + Q^2 + T^2$ , звідки

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2},$$

де  $T$  – потужність спотворення – поняття математичне, характеризує міру відмінності у формах кривих напруги  $u(t)$  і струму  $i(t)$ .

## 28.4. Коефіцієнти, що характеризують несинусоїдальні функції $u(t)$ , $i(t)$

Припустимо, що несинусоїдальна функція  $u(t)$  містить лише гармонійні складові:

$$u(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1) + U_{2m} \sin(2\omega t + \alpha_2) + U_{3m} \sin(3\omega t + \alpha_3) + \dots$$

Несинусоїдальні функції струмів і напруги, що не містять сталих складових ( $I^{(0)} = 0$ ,  $U^{(0)} = 0$ ) характеризуються такими параметрами і коефіцієнтами.

Діюче значення усієї функції визначається за формулою

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots)} .$$

Діюче значення вищих гармонік

$$U_{BG} = \sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots} = \sqrt{\frac{1}{2}(U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots)} .$$

Максимальні значення функції в додатній області ( $U_{\max+}$ ) і у від'ємній області ( $U_{\max-}$ ) не дорівнюватимуть одне одному за наявності в гармонійному ряду функції парних гармонік і залежать як від амплітуд окремих гармонік, так і від їх фазових зсувів (початкових фаз).

Середнє за модулем значення функції визначається як середнє арифметичне значення модулів миттєвих значень функції за повний період:

$$U_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T ABS[u(t)] dt .$$

Середнє значення функції залежить як від амплітуд окремих гармонік, так і від їх початкових фаз.

Коефіцієнтом амплітуди функції називається величина, що дорівнює відношенню її максимального (за модулем) значення до діючого значення:

$$k_a = \frac{U_{\max}}{U} ; \quad k_a = \sqrt{2} = 1,41 \quad \text{для синусоїди.}$$

Коефіцієнтом форми кривої функції називається величина, що дорівнює відношенню діючого значення функції до її середнього значення:

$$k_{\phi} = \frac{U}{U_{\text{сеп}}}, \quad k_{\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11 \text{ для синусоїди.}$$

Коефіцієнтом  $k$ -ї гармоніки називається величина, що дорівнює відношенню діючого значення (амплітуди)  $k$ -ї гармоніки до діючого значення (амплітуди) основної гармоніки:

$$k_{zk} = \frac{U_k}{U_1} = \frac{U_{km}}{U_{1m}}.$$

Коефіцієнтом спотворення синусоїдальності форми кривої функції називається величина, що дорівнює відношенню діючого значення усіх вищих гармонік до діючого значення основної гармоніки:

$$k_u = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \dots}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_{2m}^2 + U_{3m}^2 + \dots}}{U_{1m}}.$$

Для приймачів, що працюють у несинусоїдальному режимі, застосовується поняття коефіцієнта потужності, що визначається як відношення активної потужності  $P$  до повної потужності  $S$ :

$$k_p = \cos(\varphi_s) = \frac{P}{S} = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + \dots}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots} \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots}}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. Чи досить для визначення величини повної потужності в колі несинусоїдального струму наявності інформації про активну і реактивну потужності?

2. Для яких кіл справедлива методика розрахунку кіл несинусоїдального струму, що базується на розкладанні ЕРС і розвиненні струмів джерел у ряди Фур'є?

3. Чи можна за видом кривої несинусоїдальної напруги визначити, чи містить вона при розвиненні у ряд Фур'є:

а) постійну складову;

- б) парні гармоніки;
- в) лише функції  $\sin$ ;
- г) лише функції  $\cos$ ?

4. Чи можна розглядати суму комплексних значень гармонік струмів  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$ ,  $I^{(3)}$ ,... вітки як комплексне значення струму  $I$  цієї вітки?

5. До кола підведена несинусоїдальна напруга. Чи однакова форма кривих напруги і струму на затискачах котушки індуктивності, конденсатора і резистора?

6. Як котушка індуктивності змінює форму кривої напруги при під'єднанні її до джерела несинусоїдального струму?

7. Як змінює конденсатор форму кривої напруги при під'єднанні його до джерела несинусоїдального струму?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 29

### Тема «Методи розрахунку простих кіл»

#### План

1. Нелінійні електричні кола постійного струму.
2. Графічно-аналітичний метод розрахунку простих нелінійних кіл.

#### 29.1. Нелінійні електричні кола постійного струму

##### 29.1.1. Нелінійні елементи, їх характеристики і параметри

У теорії лінійних кіл передбачалося, що параметри усіх елементів кола є сталими величинами і не залежать від струмів та напруг. Кожному ідеальному елементу кола приписувалося певне значення його параметра: резистору – опір  $R$ , котушці – індуктивність  $L$ , конденсатору – ємність  $C$ .

Фізичні характеристики таких елементів ( $u = Ri$  – для резистора;  $\psi = Li$  – для котушки;  $q = Cu$  – для конденсатора) описуються рівнянням прямої лінії  $u = ax$ , тому такі елементи отримали загальну назву лінійних, а електричні кола, що складаються із таких елементів, також називаються лінійними.

Ідеальних лінійних елементів у природі не існує. У реальних умовах параметри усіх елементів тією чи іншою мірою залежать від їх фізичного стану, тобто від струму, напруги, температури. Якщо ця залежність не дуже виражена, то при розрахунку кіл нею нехтують і елементи вважають лінійними. Проте існує великий клас елементів електричних кіл, параметри яких істотно залежать від струму і напруги, і цю залежність необхідно враховувати під час розрахунку електричних кіл.

Такі елементи одержали назву нелінійних, оскільки їх фізичні характеристики не можуть бути описані рівнянням прямої лінії. Таким елементам не можна надати певного значення параметра опору  $R$ , індуктивності  $L$  та ємності  $C$ . З метою відмінності нелінійних елементів від лінійних на електричних схемах на позначення елемента наносять додатковий знак – «ключку» (рис. 29.1). Під час розрахунку електричних кіл нелінійні елеме-

нти задаються їх фізичними характеристиками в досліджуваному діапазоні значень фізичних параметрів.

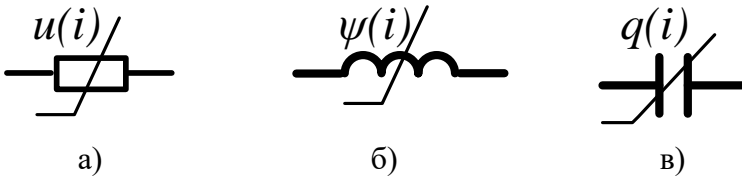


Рисунок 29.1

Ці характеристики дістали такі назви:

а) для нелінійного резистора  $u = f(i)$  – вольт-амперна характеристика, або скорочено ВАХ;

б) для нелінійної котушки  $\psi = f(i)$  – вебер-амперна характеристика;

в) для нелінійного конденсатора  $q = f(u)$  – кулон-вольтна характеристика.

Фізичні характеристики нелінійних елементів можуть бути задані трьома способами:

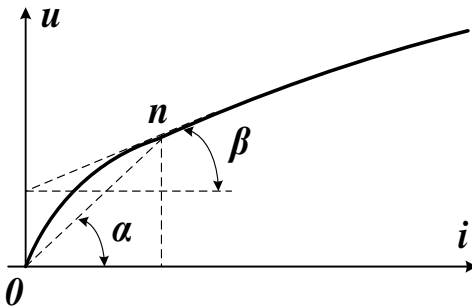


Рисунок 29.2

1) графічною діаграмою функції  $y = f(x)$  із зазначенням масштабів фізичних величин за координатними осями, наприклад, для нелінійного резистора ВАХ  $u = f(i)$  показана на рис. 29.2;

2) таблицею координат точок функції  $y = f(x)$  у досліджуваному діапазоні значень фізичних величин, наприклад, для нелінійного резистора ВАХ  $u = f(i)$ ;

3) у вигляді нелінійного математичного рівняння  $y = f(x)$ , яке наближено описує функцію в досліджуваному діапазоні значень фізичних величин, наприклад, для нелінійного резистора ВАХ  $u = f(i)$  задана рівнянням  $u = 100i^2$ .

Для кожної точки характеристики нелінійного елемента можуть бути визначені статичні та диференціальні параметри. Для даного прикладу нелінійного резистора в кожній точці характеристики  $u = f(i)$  можуть бути визначені статичний і диференціальний опори:

$$R_{cm} = \frac{u}{i} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \alpha, \quad R_d = \frac{du}{di} = \frac{m_u}{m_i} \operatorname{tg} \beta.$$

Як статичний, так і диференціальний опір нелінійного резистора залежить від положення точки на ВАХ, тобто від параметрів режиму ( $u, i$ ). Як впливає із графічної діаграми рис. 29.2 для даної точки  $\alpha \neq \beta$ , отже,  $R_{cm} \neq R_d$ .

Статичний опір нелінійного резистора  $R_{ct}$  в усіх точках ВАХ завжди додатний ( $R_{ct} > 0$ ), а диференціальний опір на деяких ділянках ВАХ може бути від'ємним.

Нижче наведені графічні діаграми ВАХ деяких нелінійних елементів, що найбільш часто спостерігаються у колах електроенергетики (рис. 29.3 а, б, в, г).

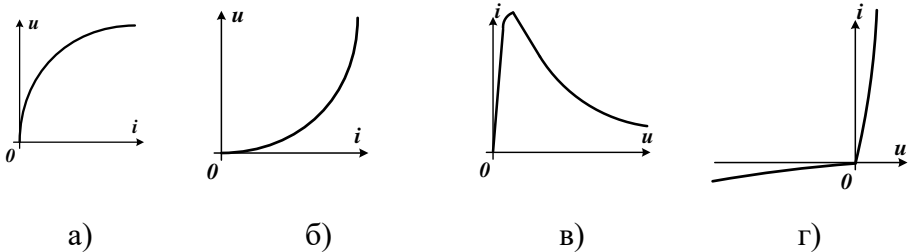


Рисунок 29.3

На рис. 29.3 а наведена графічна діаграма ВАХ  $i = f(u)$  для лампи розжарювання. Характерна особливість ВАХ – збільшення  $R_{ct}$  зі зростанням струму, що пояснюється залежністю опору металів від температури.

На рис. 29.3 б подана графічна діаграма ВАХ  $i = f(u)$  тиристового (вілітового) елемента розрядника. Характерна особливість ВАХ: зменшення  $R_{ct}$  із зростанням струму. Елементи такого типу використовують у розрядниках для гасіння дуги.



На рис. 29.3 в наведена графічна діаграма ВАХ  $i = f(u)$  електричної дуги. Характерна особливість ВАХ – падаюча форма з від’ємним значенням диференціального опору ( $R_{\text{диф}} < 0$ ).

На рис. 29.3 г наведена графічна діаграма ВАХ  $i = f(u)$  напівпровідникового діода. ВАХ має яскраво виражену несиметричну форму в додатній і від’ємній областях, при цьому  $R_{\text{п}} \ll R_{\text{о}}$ . Елементи такого типу застосовуються для перетворення змінного струму у постійний.

### 29.1.2. Нелінійні кола та їх властивості

Електричне коло називається нелінійним, якщо воно містить хоча б один нелінійний елемент.

Стан нелінійного кола постійного струму в сталому режимі можна описати системою нелінійних алгебраїчних рівнянь, складених для схеми кола за законами Кірхгофа. У математиці не існує стандартних методів розв’язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь і, як наслідок, на практиці не існує загальних методів розрахунку нелінійних кіл постійного струму, таких, як метод контурних струмів та метод вузлових потенціалів для лінійних кіл.

У нелінійних колах можуть виникати особливі процеси, які неможливі в лінійних колах. Різноманітністю таких процесів пояснюється широке застосування пристроїв на нелінійних елементах у різних сферах сучасної техніки. Сучасні засоби зв’язку, радіоелектроніка, комп’ютерна техніка базуються на використанні нелінійних властивостей елементів електричних кіл.

Зазначимо деякі явища, що мають місце в нелінійних колах, які знаходять практичне застосування в електроенергетиці:

- 1) перетворення змінного струму на постійний або випрямлення;
- 2) перетворення постійного струму на змінний довільної частоти або інвертування;
- 3) перетворення змінного струму однієї частоти на змінний струм іншої;

- 4) стабілізація режимних параметрів (напруги або струму) на деяких частинах кола при зміні цих параметрів на інших ділянках;
- 5) трансформація постійного струму і напруги;
- 6) посилення сигналів за напругою, струмом або потужністю;
- 7) можливість існування декількох сталих режимів кола при одних і тих самих параметрах елементів;
- 8) стрибкоподібні зміни режиму кола та ін.

## 29.2. Графічно-аналітичний метод розрахунку простих нелінійних кіл

Суть графічного методу розрахунку полягає в тому, що розв'язання нелінійних рівнянь, складених для схеми за законами Кірхгофа, виконується графічно шляхом графічного складання відповідних ВАХ елементів.

### 29.2.1 Послідовне з'єднання

Нехай нелінійне коло складається з двох нелінійних елементів  $HE_1$  і  $HE_2$ , увімкнених послідовно з джерелом ЕРС (рис. 29.4 а). ВАХ нелінійних елементів задана графічно (рис. 29.4 б).

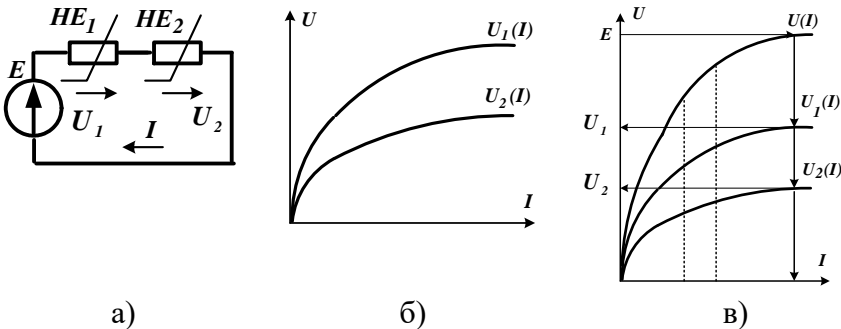


Рисунок 29.4

Рівняння Кірхгофа для схеми:  $I_1 = I_2 = I$ ,  $U_1 + U_2 = E$ .

Відповідно до рівнянь відбувається додавання ВАХ окремих елементів  $U_1(I)$  і  $U_2(I)$  по осі напруги (послідовно), внаслідок чого виходить ВАХ для всієї схеми  $U(I)$ . На цій характе-

риптиці для значення  $U = E$  визначається положення робочої точки. Послідовність графічного рішення показана на рис. 29.4 в стрілками.

### 29.2.2. Паралельне з'єднання

Розглянемо нелінійне коло, що складається з двох нелінійних елементів  $HE_1$  і  $HE_2$ , увімкнених паралельно джерелу ЕРС  $E$  (рис. 29.5 а). ВАХ нелінійних елементів задані графічно (рис. 29.5 б).

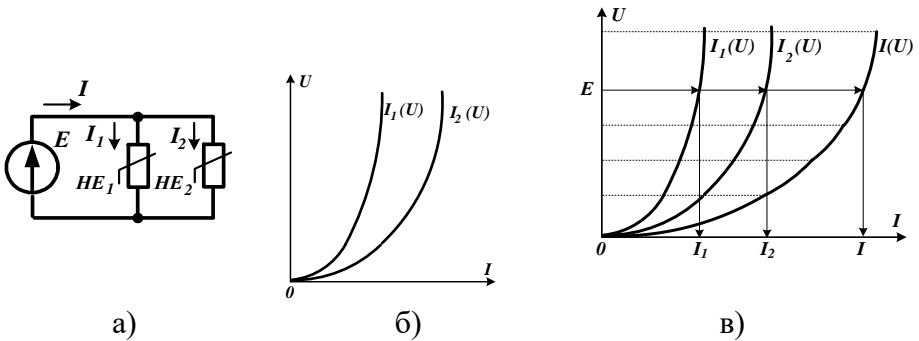


Рисунок 29.6

Рівняння Кірхгофа для схеми:  $I_1 + I_2 = I$ ;  $U_1 + U_2 = E$ .

Відповідно до рівнянь здійснюється додавання ВАХ окремих елементів  $I_1(U)$  і  $I_2(U)$  по осі струмів (паралельно), внаслідок чого маємо ВАХ для всієї схеми  $I(U)$ . На цій характеристиці для заданого значення  $U = E$  визначається положення робочої точки. Послідовність графічного розв'язання показана на рис. 29.5 в стрілками.

### 29.2.3. Змішане з'єднання

Припустимо, що нелінійне коло складається з двох нелінійних елементів  $HE_2$  і  $HE_3$ , з'єднаних паралельно, і нелінійного  $HE_1$ , під'єданого послідовно до них (рис. 29.6 а). ВАХ нелінійних елементів задані графічно (рис. 29.6 б).

Складемо рівняння за законами Кірхгофа для схеми (рис. 29.6 а):

$$\begin{cases} I_2 + I_3 = I_1, \\ U_1 = U_2 = E, \\ U_2 = U_3. \end{cases}$$

Графічне розв'язання виконують у два етапи. На першому етапі проводиться додавання ВАХ  $I_2(U_2)$  і  $I_3(U_3)$  по осі струмів (паралельно), у результаті цього одержуємо ВАХ для паралельної ділянки схеми  $I_1(U_2)$ .

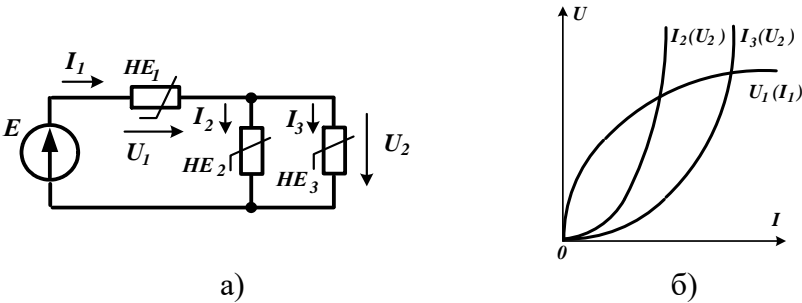


Рисунок 29.6

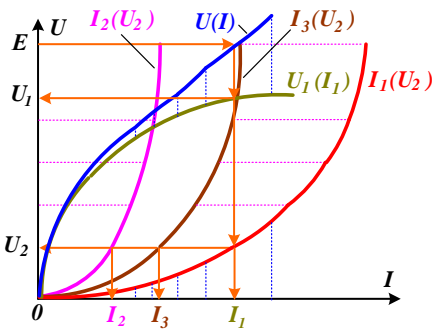


Рисунок 29.7

На 2-му етапі проводиться складання ВАХ  $U_1(I_1)$  і  $I_1(U_2)$  по осі напруг (послідовно), внаслідок чого утворюються ВАХ для всієї схеми  $U(I)$ . На цій характеристиці для  $U = E$  визначається положення робочої точки

Подальша послідовність графічного рішення показана на рис. 29.7 стрілками.

### **Контрольні питання і завдання**

1. Чому метод накладання непридатний до нелінійних кіл?
2. Які параметри характеризують нелінійний резистор?
3. Чому статичний опір завжди більший за нуль, а диференціальний і динамічний можуть мати будь-який знак?
4. Які методи використовують для аналізу нелінійних резистивних кіл постійного струму?
5. Яка послідовність розрахунку графічним методом нелінійного кола із послідовним з'єднанням резисторів?
6. Яка послідовність розрахунку графічним методом нелінійного кола із паралельним з'єднанням резисторів?
7. Який алгоритм аналізу кола із змішаним з'єднанням нелінійних резисторів?

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 30

### Тема «Методи розрахунку нелінійних кіл із декількома джерелами ЕРС»

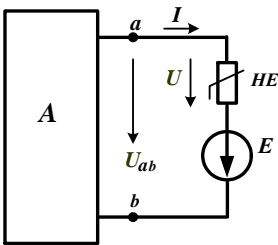
#### План

1. Графоаналітичний метод розрахунку нелінійних кіл із кількома джерелами ЕРС.
2. Метод двох вузлів.

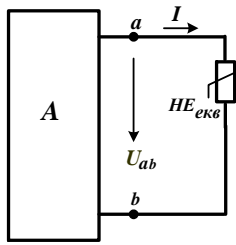
#### 30.1. Графо-аналітичний метод розрахунку нелінійних кіл із декількома джерелами ЕРС

Графічний метод розрахунку можна застосовувати також і для більш складних схем з кількома джерелами ЕРС. Послідовність графічних операцій при розв'язанні одного й того самого завдання може бути різною і залежить від вибору алгоритму розв'язування.

Виділимо зі схеми ланцюга вітку, що містить джерело ЕРС  $E$  і нелінійний елемент із заданою ВАХ  $U$  (рис. 30.1 а).



а)



б)

Рисунок 30.1

з'єднане джерело ЕРС  $E$  новим нелінійним елементом  $HE_{екв}$ .

Побудуємо нову ВАХ  $U_{ab}(I)$  шляхом зміщення заданої ВАХ  $U(I)$  по осі  $U$  на величину  $(E)$  відповідно до рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа (рис. 30.2).

Із рівняння, складеного за другим законом Кірхгофа, маємо:

$$U_{ab}(I) = U(I) - E.$$

Відповідно до цього рівняння замінимо нелінійний елемент  $HE$  і послідовно

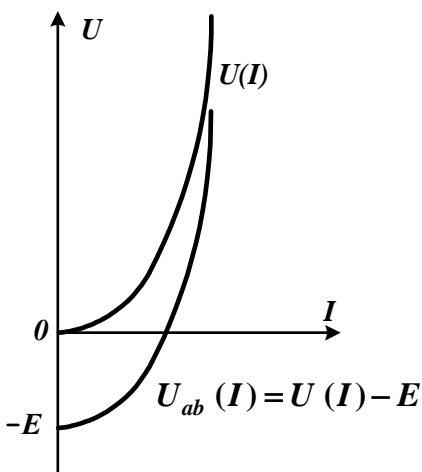


Рисунок 30.2

величину ЕРС  $\pm E$  деякою новою гілкою без джерела ЕРС з ВАХ  $U_{ab}(I)$ . Якщо у схемі знаходиться вітка з джерелом струму  $I_K$ , то така вітка може бути об'єднана із резистивною гілкою і замінена на деяку еквівалентну, при цьому зміщення ВАХ елемента здійснюється по осі  $I$  на величину  $\pm I_K$  згідно із першим законом Кірхгофа для вузла.

Розглянемо розрахунок схеми (рис. 30.3 а), в якій нелінійні елементи  $HE_1$ ,  $HE_2$  і  $HE_3$  задані своїми ВАХ (рис. 30.3 б).

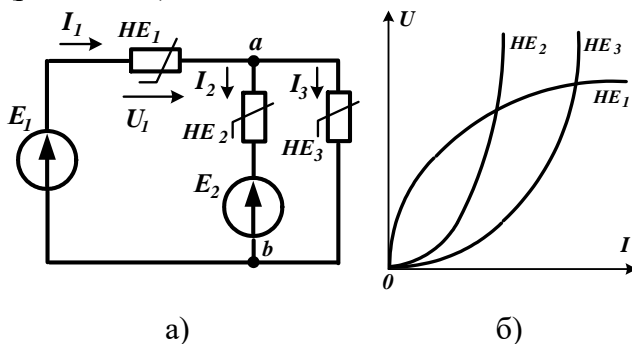


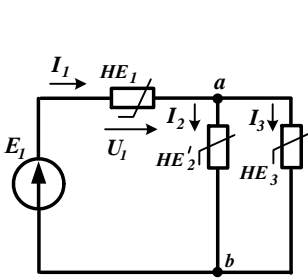
Рисунок 30.3

$HE_2$  і ЕРС  $E_2$ , новою еквівалентною гілкою з елементом  $HE'$ , але без джерела ЕРС.

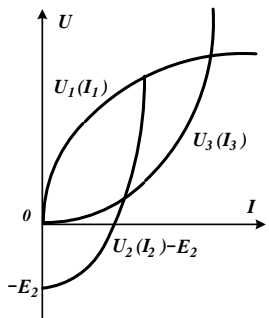
Нова ВАХ  $U_{ab}(I)$  відповідає деякому новому нелінійному елементу  $HE_{екв}$ , що не містить джерела ЕРС.

Таким чином, вітку схеми, що містить джерело ЕРС  $E$  і резистивний нелінійний елемент, можна замінити шляхом паралельного перенесення ВАХ  $U(I)$  заданого елемента на

Метод згортання схеми до одного з джерел ЕРС, наприклад  $E_1$ . Для цього замінимо вітку 2, що містить нелінійний елемент



а)



б)

Після такої заміни схема перетворюється на схему зі змішаним з'єднанням елементів (рис. 30.4 а). Вольтамперні характеристики для елементів схеми рис. 30.4 а показані на рис. 30.4 б.

Рисунок 30.4  
Графічний метод розрахунку показано на рис. 30.5.

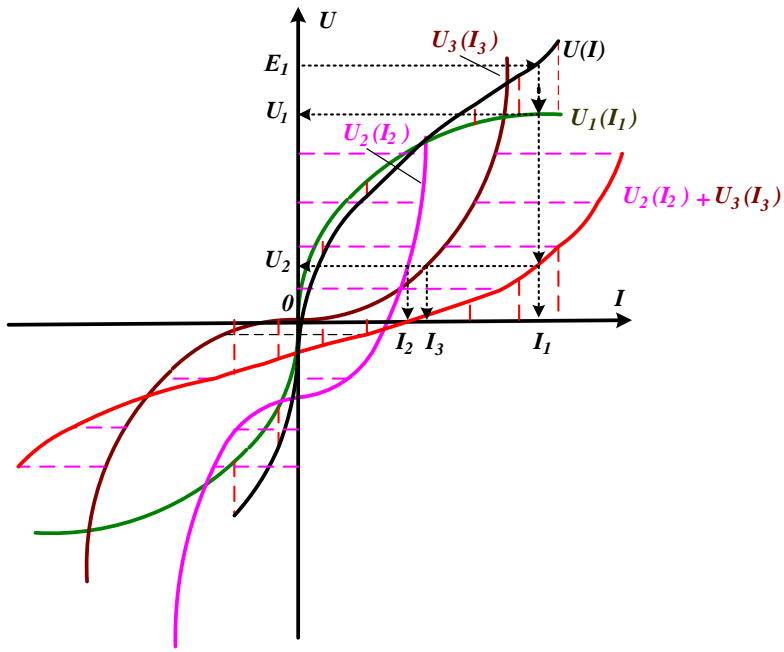


Рисунок 30.5



### 30.2. Метод двох вузлів

Задамо позитивні напрямки струмів в усіх вітках схеми від вузла  $a$  до вузла  $b$  (рис. 30.4 а). Для кожної вітки за другим законом Кірхгофа запишемо вирази для вузлової напруги і рівняння за першим законом Кірхгофа:

$$U_{ab}(I_1) = -U_1(I_1) + E_1, \quad (1)$$

$$U_{ab}(I_2) = U_2(I_2) - E_2, \quad (2)$$

$$U_{ab}(I_3) = U_3(I_3), \quad (3)$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (4)$$

Графічне розв'язання задачі здійснюється відповідно до одержаного рівняння в такій послідовності:

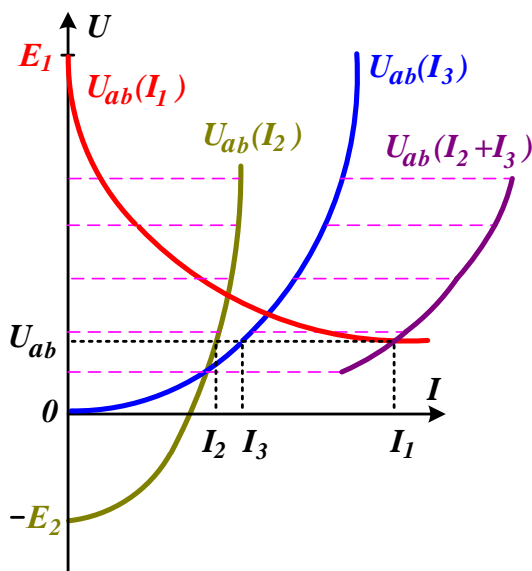


Рисунок 30.6

1) будується діаграма ВАХ шляхом зміщення заданої ВАХ  $U_1(I_1)$  по осі  $U$  на величину  $+E_1$  відповідно до рівняння (1) (рис. 30.6);

2) будується діаграма ВАХ  $U_{ab}(I_2)$  шляхом зміщення заданої ВАХ  $U_2(I_2)$  по осі  $U$  на величину  $-E_2$  відповідно до рівняння (2) (рис. 30.6);

3) діаграма ВАХ  $U_{ab}(I_3)$  збігається із заданою  $U_3(I_3)$  відповідно до рівняння (3) (рис. 30.6);

4) здійснюється графічне додавання діаграм ВАХ віток  $U_{ab}(I_2)$ ,  $U_{ab}(I_3)$  по осі  $I$  відповідно до рівняння (4), внаслідок

чого одержуємо діаграму результуючої ВАХ  $U_{ab}(I_2 + I_3)$  (рис. 30.6);

5) робоча точка задовольняє рівняння (4)  $\sum I = 0$ , що відповідає точці перетину діаграми результуючої ВАХ  $U_{ab}(I_2 + I_3)$  і ВАХ  $U_{ab}(I_1)$ .

### Контрольні питання і завдання

1. У чому полягає метод двох вузлів?
2. Як розраховують кола з одним нелінійним резистором і довільним числом лінійних?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 31

### Тема «Нелінійні магнітні кола постійного струму»

#### План

1. Основні поняття і закони магнітного кола.
2. Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола.
3. Розрахунок розгалуженого магнітного кола.

#### 31.1. Основні поняття і закони магнітного кола

Електромагнітне поле, яке лежить в основі усіх різноманітних явищ та процесів, досліджуваних в електротехніці, має дві рівнозначні складові – електричну і магнітну. Як відомо, в електричному колі під впливом джерел енергії виникають електричні струми, що проходять електричними проводами. Подібно електричним колам існують також магнітні кола, що складаються з магнітних проводів або коротких магнітопроводів, в яких під впливом магніторушійних сил (МРС) виникають і замикаються магнітні потоки  $\Phi$ . Формальну схожість або аналогію між електричними і магнітними колами надалі називатимемо принципом подвійності. Треба пам'ятати, що при формальній схожості електричні і магнітні явища фізично різні.

Магнітні кола застосовуються в електричних машинах, трансформаторах, електромагнітних апаратах, реле, приладах і так далі. Їх призначенням є створення заданої величини і форми магнітного потоку  $\Phi(t)$  та проведення його заданим шляхом.

Як відомо, магнітне поле характеризується векторними величинами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$ , між якими існує зв'язок

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \cdot \vec{H},$$

де  $\vec{B}$  – вектор індукції (або щільність) магнітного поля [Тл];

$\vec{H}$  – вектор напруженості магнітного поля [А/м], який створюється електричним струмом і є першопричиною магнітного поля;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6}$  [Гн/м] (магнітна проникність вакууму),

$\mu$  – відносна магнітна проникність, що характеризує властивість матеріалу до намагнічування.

Усі матеріали за здатністю їх до намагнічування умовно поділяють на дві групи:

- феромагнітні;
- неферомагнітні.

Для феромагнітних матеріалів  $\mu \gg 1$ . До них відносять залізо ( $Fe$ ), нікель ( $Ni$ ), кобальт ( $Co$ ) та їх сплави. Феромагнітні матеріали здатні до намагнічення і створюють малий магнітний опір для магнітного потоку, тому застосовуються в техніці для виготовлення магнітопроводів.

Для неферомагнітних матеріалів  $\mu = 1$  вони створюють великий опір магнітному потоку в магнітному колі і виконують роль магнітних ізоляторів. Треба зазначити, що якщо в електричному колі співвідношення між питомою провідністю металу (провід) і діелектрика (ізоляція) становить  $10^{12} - 10^{15}$ , то для магнітного кола це співвідношення становить лише близько  $10^3$ . Це означає, що ізоляція в магнітних колах дуже недосконала, що в таких колах істотна частина магнітного потоку розсіюється, тобто замикається через ділянки з недосконалою магнітною ізоляцією.

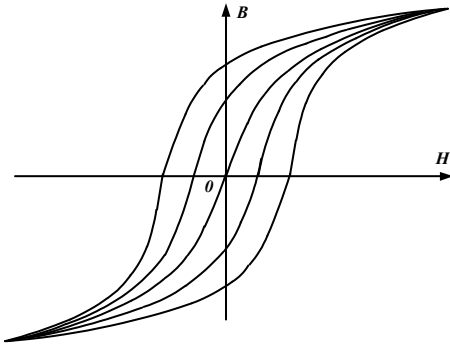


Рисунок 31.1

Залежність між векторами  $\vec{B}$  і  $\vec{H}$  для феромагнітних матеріалів не має точного аналітичного виразу, на графічній діаграмі це залежність  $B = f(H)$ , має форму петлі і називається петлею гістерезису (рис. 31.1).

При періодичному перемагнічуванні матеріалу із збільшенням амплітуди індукції  $B_m$  площа петлі гістерезису збіль-

шується, а її вершина все більше зміщується в область насичення матеріалу.

Крива, що проходить через вершини симетричних петель гістерезису, називається основною кривою намагнічування  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  для цього матеріалу. Відомості про основні криві намагнічення  $\mathbf{B} = f(\mathbf{H})$  для феромагнітних матеріалів, які застосовуються у техніці для виготовлення магнітопроводів, є в довідковій літературі у вигляді таблиць або графічних діаграм і використовуються в інженерній практиці для розрахунку магнітних кіл.

В основу розрахунку магнітних кіл покладений відомий із фізики закон повного струму

$$\oint_l \overline{\mathbf{H}} \cdot d\overline{\mathbf{l}} = \sum i .$$

При застосовуванні закону повного струму до магнітного кола його розбивають на окремі однорідні ділянки, для яких  $\mathbf{H} = \text{const}$ , а контур інтегрування вибирають уздовж магнітних ліній. При виконанні цих умов інтеграл по замкненому контуру замінюється на суму простих добутоків  $H_k l_k$ , а  $\sum i = i \cdot w$ .

Для цього прикладу одержимо

$$\sum H_k I_k = F .$$

Тут добуток  $Iw = F$  називається магніторушійною силою (МРС) або намагнічувальною силою (НС) і є джерелом магнітного потоку  $\Phi$ .

Доданки типу  $H_k \cdot l_k$  називаються магнітною напругою  $U_{Mk} = H_k l_k$  [A], а одержане вище рівняння є другим законом Кірхгофа для магнітного кола

$$\sum U_M = F .$$

Для складних магнітних кіл, що мають розгалуження і містять кілька джерел МРС, повною мірою виконуються обидва закони Кірхгофа:

1) 1-й закон Кірхгофа:  $\sum \Phi = 0$  – алгебраїчна сума магнітних потоків у вузлі магнітного кола дорівнює нулю;

2) 2-й закон Кірхгофа:  $\sum H_k I_k = \sum I w$  – алгебраїчна сума спадів магнітних напруг у замкненому контурі магнітного кола дорівнює алгебраїчній сумі МРС.

Магнітні кола постійного потоку належать до класу нелінійних кіл. Через принцип двоїстості для їх розрахунку можна застосовувати усі методи розрахунку нелінійних електричних кіл постійного струму.

Треба зазначити, що магнітні кола мають свої характерні особливості, які вносять деякі відмінності до методів їх розрахунку.

### 31.2. Розрахунок нерозгалуженого магнітного кола

Розглянемо задачу розрахунку магнітного кола електромагнітного реле, ескізний вигляд якого і схема магнітного кола показані на рис. 31.2 а, б. Будемо вважати, що геометричні розміри ділянок і основна крива намагнічування матеріалу  $B = f(H)$  задані.

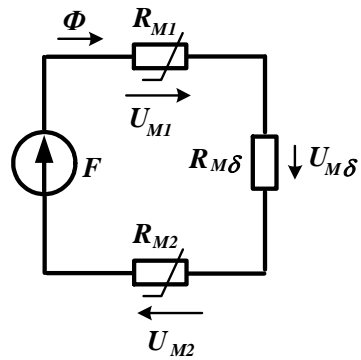
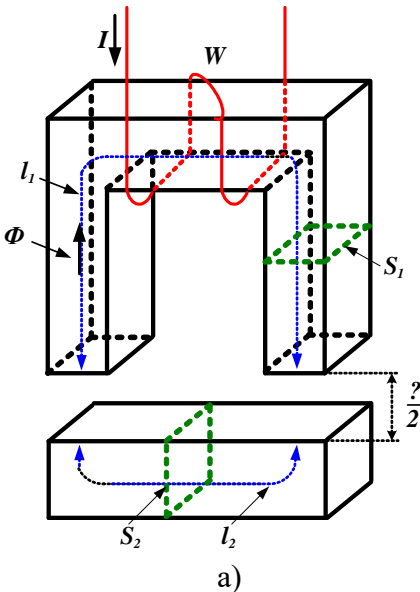


Рисунок 31.2

де  $R_{MK} = \frac{l_K}{\mu_K \mu_0 S_k}$  – магнітний опір  $k$ -ї ділянки магнітного

кола;

$$R_{M0} = \frac{\delta}{\mu_0 S_0} = \frac{\delta}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot S_0} \approx 8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\delta}{S_0} = \text{const} \text{ – магнітний}$$

опір повітряного проміжку.

Магнітні опори для ділянок магнітопроводу залежать від магнітної проникності  $\mu\mu_0$ , яка є функцією магнітного стану  $(\bar{B}, \bar{H})$ .

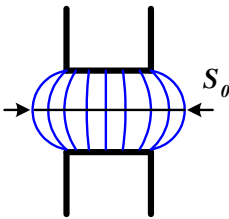


Рисунок 31.3

Отже, магнітні опори окремих ділянок магнітопроводу є нелінійними і на схемі показані нелінійними елементами. Зважаючи на криволінійність силових ліній магнітного поля в повітряному проміжку, його переріз вважають на 20 відсотків більшим від перерізу осердя (рис. 31.3)

$$S_0 = 1,2 \cdot S_1 \text{ .}$$

Можливі два варіанти постановки задачі.

### Пряма задача

За заданим магнітним потоком  $\Phi$  (чи індукцією  $B$  у заданому перерізі) необхідно визначити струм  $I$  в обмотці.

Пряма задача розв'язується аналітичним шляхом. За заданим магнітним потоком  $\Phi$  знаходимо значення магнітних індукцій для ділянок кола

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_0 = \frac{\Phi}{S_0},$$

де  $S_1, S_2, S_0$  – площі перерізів для відповідних ділянок магнітного кола.

Значення координат  $H_1$  і  $H_2$  знаходимо за заданою кривою намагнічення  $B = f(H)$  (рис. 31.4) для розрахункових точок  $B_1$  і  $B_2$ . Значення напруженості поля в проміжку  $H_0$  визначаємо з рівняння

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = 8 \cdot 10^5 B_0.$$

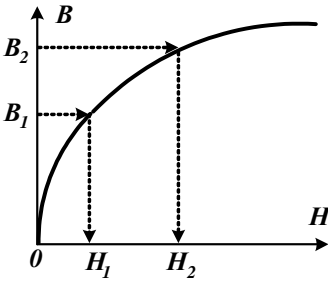


Рисунок 31.4

Складемо рівняння за 2-м законом Кірхгофа для схеми заміщення (рис. 31.2 б)

$$U_{M1} + U_{M2} + U_{M\delta} = F,$$

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \delta = I w.$$

Тоді струм в обмотці дорівнює:

$$I = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_0 \delta}{w}.$$

Обернену задачу розв'язують геометричним шляхом.

Припустимо, що заданий струм в обмотці реле  $I$  і потрібно визначити магнітний потік  $\Phi$ . Задаємо декілька значень магнітного потоку  $\Phi$ . Потім для цих значень  $\Phi$  знаходимо магнітну індукцію і напруженість магнітного поля по ділянках магнітного кола. Значення розрахункових точок для усіх ділянок зводять у загальну таблицю (табл.31.1)

Таблиця 31.1 – Таблиця розрахункових точок

$\Phi$	Вб	Задають	...	...	...	...	...	...	...
$B_1$	Тл	$\Phi / S_1$							
$B_2$	Тл	$\Phi / S_2$							
$B_0$	Тл	$\Phi / S_0$							
$H_1$	А/м	$H_1 = f(B_1)$							
$H_2$	А/м	$H_2 = f(B_2)$							
$H_0$	А/м	$H_0 = 815^5 B$							
$U_1$	А	$H_1 l_1$							
$U_2$	А	$H_2 l_2$							
$U_0$	А	$H_0 \delta_0$							
$I w$	А	$\sum H_k I_k$							



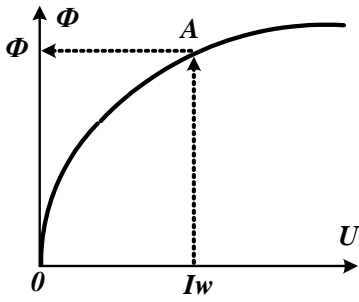


Рисунок 31.5

За результатами розрахунку будуть графік залежності магнітного потоку від магнітної напруги (рис. 31.5)

$$\Phi = f(\sum U_M).$$

Для заданого значення струму знаходимо робочу точку «А» і відповідне значення магнітного потоку.

### 31.3. Розрахунок розгалуженого магнітного кола

Розрахунок розгалужених магнітних кіл може виконуватися графічним або аналітичним методом точно так, як і нелінійних електричних кіл.

Задані геометричні розміри розгалуженого магнітного кола (рис. 31.6 а) і основна крива намагнічення  $B = f(H)$  для матеріалу магнітопроводу, струми  $I_1$ ,  $I_2$  і число витків в обмотках  $W_1$ ,  $W_2$ . Необхідно знайти магнітні потоки окремих ділянок кола.

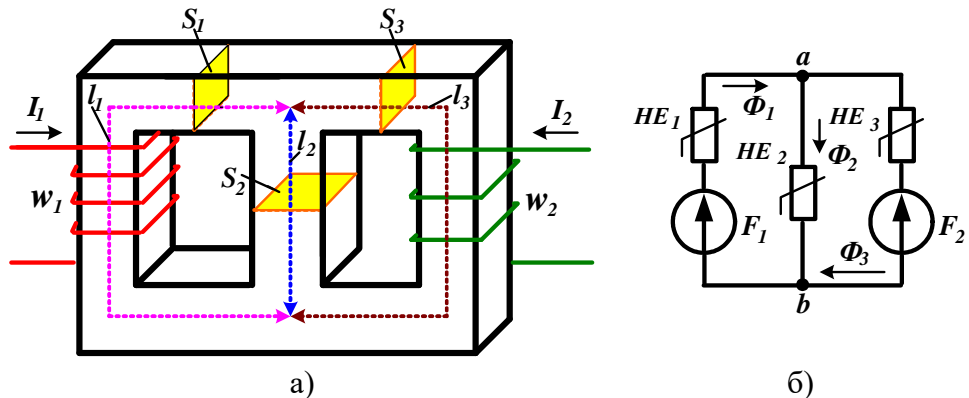


Рисунок 31.6

Графічне розв'язування задачі виконується методом двох вузлів у такій послідовності.

1. Магнітне коло розбивається на однорідні ділянки і згідно з цим розбиттям складають еквівалентну схему (рис. 31.6 б).

2. Складають систему нелінійних рівнянь методом двох вузлів для еквівалентної схеми кола (рис. 31.6 б):

$$\begin{cases} U_{ab}(\Phi_1) = -H_1 l_1 + I_1 w_1, \\ U_{ab}(\Phi_2) = H_2 l_2, \\ U_{ab}(\Phi_3) = H_3 l_3 - I_2 w_2, \\ \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 = 0. \end{cases}$$

3. На основі заданих геометричних розмірів ( $l, S$ ) і основної кривої намагнічування  $B = f(H)$  виконується розрахунок ВАХ для кожної виділеної ділянки кола.

4. Результати розрахунку ВАХ зводяться в загальну таблицю.

Таблиця 31.2 – Результати розрахунку ВАХ

B	Тл	Задано	...	...	...	...	...	...	...
H	A/м	Задано	...	...	...	...	...	...	...
$\Phi_1$	Bб	$B \cdot S_1$							
$\Phi_2$	Bб	$B \cdot S_2$							
$\Phi_3$	Bб	$B \cdot S_3$							
$U_{M1}$	A	$H \cdot l_1$							
$U_{M2}$	A	$H \cdot l_2$							
$U_{M3}$	A	$H \cdot l_3$							
$U_{ab}(\Phi_1)$	A	$-H \cdot l_1 + I_1 w_1$							
$U_{ab}(\Phi_2)$	A	$H \cdot l_2$							
$U_{ab}(\Phi_3)$	A	$H \cdot l_3 + I_2 w_2$							

5. В одній системі координат у вибраних масштабах для  $U_{ab}(\Phi)$  будують графічні діаграми ВАХ для окремих ділянок кола (рис. 31.7).

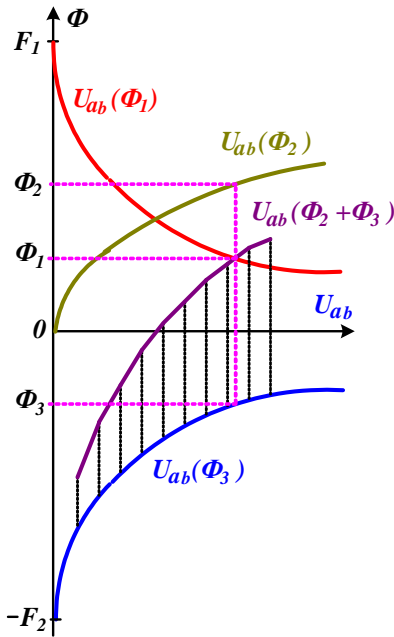


Рисунок 31.7

Виконують графічне додавання ВАХ другої і третьої ділянок за рівнянням

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3.$$

ВАХ  $U_{ab}(\Phi_2)$  і  $U_{ab}(\Phi_3)$  додають послідовно (по осі  $\Phi$ ), у результаті їх додавання отримують ВАХ  $U_{ab}(\Phi_2 + \Phi_3)$ .

Знаходять точку перетину ВАХ  $U_{ab}(\Phi_1)$  і ВАХ  $U_{ab}(\Phi_2 + \Phi_3)$ .

Через цю точку проводять лінію, паралельну осі магнітного потоку. Знаходять точки перетину з

ВАХ окремих ділянок кола, які відповідають магнітним потокам  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$ .

### Контрольні питання і завдання

1. Які векторні величини характеризують магнітне поле?
2. Які основні поняття пов'язані з петлею гістерезису?
3. Що характеризує площу гістерезисної петлі?
4. Назвіть основні закони магнітного поля?
5. Які два типи задач трапляються під час розрахунку магнітних кіл? Дайте їх характеристику.

6. Які існують методи розрахунку магнітних кіл?

7. Проведіть аналогію між електричними і магнітними колами.

### **Список Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 32

### Тема «Методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму»

#### План

1. Загальна характеристика нелінійних кіл змінного струму та методів їх дослідження.
2. Заміна несинусоїдальних функцій  $u(t)$  та  $i(t)$  еквівалентними синусоїдальними.
3. Розрахунок нелінійних кіл змінного струму методом послідовних наближень.

#### 32.1. Загальна характеристика нелінійних кіл змінного струму та методів їх дослідження

Нелінійні кола змінного струму можуть містити у своїй структурі нелінійні елементи будь-якого роду:

- нелінійні резистори  $u(i)$ ;
- нелінійні котушки  $\psi(i)$ ;
- нелінійні конденсатори  $q(u)$ .

Фізичні характеристики нелінійних елементів на змінному струмі можуть істотно відрізнятися від їх аналогічних характеристик на постійному струмі.

Існують нелінійні елементи, в яких час встановлення режиму співрозмірний з періодом змінного струму, тобто проявляється інерційність. За цим показником усі нелінійні елементи розділяють на **інерційні** та **безінерційні**.

До **інерційних** відносять ті нелінійні елементи, нелінійність характеристик яких обумовлена температурним режимом (лампи розжарювання, термістори). Для встановлення температурного режиму в таких елементах необхідним є деякий час. Температура, а отже, опір такого елемента визначаються діючим значенням струму в ньому. Таким чином, для діючих значень струму і напруги інерційний елемент є нелінійним, а для миттєвих значень в інтервалі періоду – лінійним.

Фізичні характеристики **безінерційних** нелінійних елементів залишаються практично незмінними в широкому діапазоні частот. Нелінійність таких елементів виявляється як для діючих, так і для миттєвих значень величин. Нелінійність фізич-

них характеристик призводить до спотворення форм кривих фізичних величин на затискачах таких елементів. Так, наприклад, при синусоїдальній напрузі на затискачах безінерційного нелінійного резистора струм у ньому буде несинусоїдальним  $i$ , навпаки, при синусоїдальному струмі напруга на його затискачах буде несинусоїдальною.

До **безінерційних** нелінійних елементів відносять напівпровідникові прилади:

- діоди;
- тунельні діоди;
- транзистори;
- стабілітрони;
- тиристори тощо.

**Статичними** характеристиками нелінійних елементів називаються відповідні залежності

- $u(i)$  – для резистора;
- $\psi(i)$  – для котушки;
- $q(u)$  – для конденсатора,

отримані при повільній зміні змінних.

**Динамічними** характеристиками нелінійних елементів називають ті самі залежності  $u(i)$ ,  $\psi(i)$ ,  $q(u)$ , але одержані при швидких змінах змінних.

При порівняно невисоких частотах динамічні характеристики практично збігаються із статичними. Істотні відмінності цих характеристик починають проявлятися в області високих частот (радіочастот).

Електромагнітні процеси в нелінійному колі змінного струму можуть бути описані системою нелінійних диференціальних рівнянь, складених для схеми кола за рівняннями Кірхгофа. У математиці не існує загальних методів розв'язання таких систем рівнянь і, отже, не існує загальних методів розрахунку нелінійних кіл змінного струму.

Усі задачі щодо розрахунку нелінійних кіл змінного струму у встановленому режимі можна поділити на дві групи.

До **першої групи** задач належать такі, в яких метою розрахунку є визначення діючих значень струмів та напруги. Такі за-

даци трапляються в тих випадках, де спотворення форм кривих струмів і напруги незначні і не відіграють важливої ролі, а визначають діючі значення цих величин.

До *другої групи* завдань відносять такі, в яких метою розрахунку є визначення миттєвих значень струмів і напруги, а також форм кривих і гармонійних спектрів функцій. Такі задачі є в електроніці, де принцип дії пристроїв базується на перетворенні форм кривих змінних за допомогою нелінійних характеристик елементів.

Методи розв'язання завдань першої і другої груп можуть істотно відрізнятися.

### 32.2. Заміна несинусоїдальних функцій $u(t)$ та $i(t)$ еквівалентними синусоїдальними

У електричних колах електроенергетики, що містять нелінійні елементи, спотворення форм кривих струмів і напруги незначні, відіграють другорядну роль і ними можна нехтувати. Для дослідження таких кіл можна застосовувати так званий метод еквівалентних синусоїд. Суть методу полягає в тому, що при незначних спотвореннях форм кривих несинусоїдальні функції струмів і напруги  $i(t)$  та  $u(t)$  замінюються на еквівалентні за діючими значеннями синусоїдальних функцій (рис. 32.1 а, б).

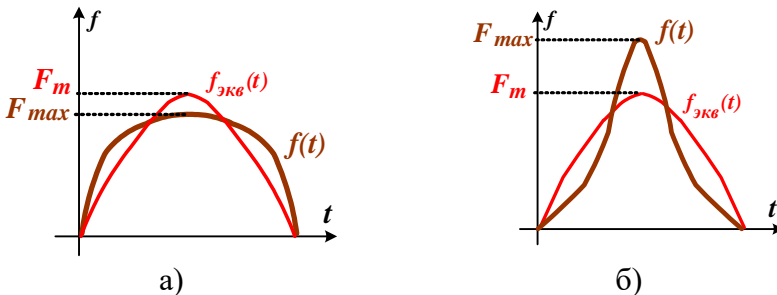


Рисунок 32.1

При малих спотвореннях форм кривих вищі гармоніки практично не впливають на величину діючого значення функції, тому діюче значення несинусоїдальної функції практично дорівнює діючому значенню її першої гармоніки.

При переході до еквівалентних синусоїд відбувається повна втрата інформації про форми кривих функцій, їх гармонічні складові, максимуми і мінімуми тощо.

При розрахунку нелінійних кіл методом еквівалентних синусоїд фізичні характеристики нелінійних елементів  $u(t)$  – для резистора,  $\psi(i)$  – для котушки та  $q(u)$  – для конденсатора замінюються розрахунковими вольт-амперними характеристиками  $U(I)$  або  $I(U)$  для діючих значень еквівалентних синусоїдальних величин.

Розрахункові ВАХ для конкретних нелінійних елементів можуть бути одержані експериментально шляхом проведення вимірювань діючих значень  $U$  та  $I$  в довільному режимі. Якщо задано фізичні характеристики для миттєвих значень величин, то відповідні ВАХ можуть бути одержані розрахунковим шляхом для синусоїдального режиму за напругою або струмом. Наприклад, нехай веберамперна характеристика нелінійної котушки виражається рівнянням

$$i(\psi) = a\psi + b\psi^5.$$

При синусоїдальній напрузі на затискачах котушки  $u(t) = U_m \sin(\omega t - 90^\circ)$  її потокозчеплення також буде змінюватися за синусоїдальним законом

$$\psi(t) = \int u \cdot dt = \frac{U_m}{\omega} \cdot \sin \omega t = \Psi_m \cdot \sin \omega t,$$

де  $\Psi_m = \frac{U_m}{\omega}$ .

Закон зміни струму в котушці одержуємо з рівняння апроксимації:

$$\begin{aligned} i(t) &= a\psi + b\psi^5 = a\Psi_m \cdot \sin \omega t + b\Psi_m^5 \sin^5 \omega t = \\ &= \dots = I_{1m} \sin \omega t - I_{3m} \sin 3\omega t + I_{5m} \sin 5\omega t. \end{aligned}$$

Діюче значення струму дорівнюватиме

$$I = \sqrt{\frac{1}{2}(I_{1m}^2 + I_{3m}^2 + I_{5m}^2)}.$$



### 32.3. Розрахунок нелінійних кіл змінного струму методом послідовних наближень

Метод послідовних наближень можна застосовувати до розрахунку схем будь-якої складності. Обчислення в окремому циклі для складних схем виконуються в комплексній формі. Як приклад наведемо розрахунок схеми рис. 32.2.

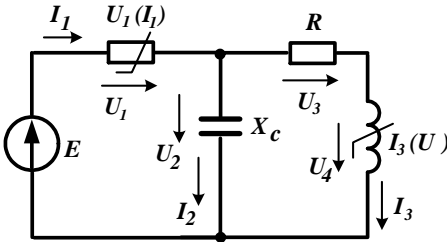


Рисунок 32.2

Подані параметри лінійних елементів  $E, R, X_C$ . ВАХ нелінійних елементів задано аналітично у вигляді рівнянь апроксимації:  $U_1 = aI + bI^3$ ,  $I_3 = cU + dU^5$

Для досліджуваної схеми система комплексних рівнянь Кірхгофа разом із рівняннями апроксимації має вигляд

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0, \quad (1) \\ \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{E}, \quad (2) \\ -\dot{U}_1 + \dot{U}_3 + \dot{U}_4 = 0, \quad (3) \\ U_1 = aI_1 + bI_1^3, \quad (4) \\ I_3 = cU_4 + dU_4^5. \quad (5) \end{array} \right.$$

1. Задають у першому наближенні комплексну напругу на нелінійній котушці, наприклад:

$$\dot{U}'_4 = 50e^{j0}.$$

2. Визначають модуль струму аналітично з рівняння (5). Аргумент цього комплексу береться таким, що дорівнює  $-90^\circ$  (у котушці струм відстає від напруги на кут  $\varphi = -90^\circ$ ). У комплексній формі  $\dot{I}'_3 = I'_3 \cdot e^{-j90}$ .

3. Визначають напругу на  $\dot{U}'_3$  на лінійному резисторі за законом Ома:

$$\dot{U}'_3 = \dot{I}'_3 \cdot R.$$

4. Із рівняння (3) знаходять напругу на конденсаторі:

$$\dot{U}'_2 = \dot{U}'_3 + \dot{U}'_4.$$

5. За законом Ома визначають струм конденсатора:

$$\dot{I}'_2 = \frac{\dot{U}'_2}{-jX_C}.$$

6. Із рівняння (1) знаходять перший струм:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = \dot{I}'_1 \cdot e^{j\alpha}.$$

7. Визначають модуль напруги  $U'_1$  аналітично з рівняння (4). Аргумент цього комплексу береться таким, що дорівнює аргументу комплексу струму  $I'_1$  (у резисторі струм збігається із напругою).

У комплексній формі

$$\dot{U}'_1 = U'_1 \cdot e^{j\alpha}.$$

8. Із рівняння (2) знаходять розрахункове значення ЕРС:

$$\dot{E}' = \dot{U}'_1 + \dot{U}'_2 = E' \cdot e^{j\beta}.$$

9. Порівнюють знайдене в першому наближенні значення модуля ЕРС із заданими значенням ЕРС  $E$  і з урахуванням виду одержаної нерівності  $E' > E$  задають нове значення напруги

$\dot{U}''_4$  у другому наближенні і повторюють розрахунок за тим самим алгоритмом. Цикли розрахунку (ітерації) повторюють до досягнення бажаної точності

$$\delta = \frac{|E - E'|}{E} < 0,01.$$

## Контрольні питання і завдання

1. У чому полягають особливості нелінійних кіл змінного струму?
2. Які типи характеристик використовуються в колах змінного струму для опису нелінійних елементів?
3. Наведіть статичні гістерезисні петлі трьох феромагнітних матеріалів, у яких:
  - а) найбільша (найменша) коерцитивна сила;
  - б) найбільша (найменша) залишкова намагніченість;
  - в) найбільші (найменші) втрати на перемагнічування?Який із матеріалів найбільше підходить для виготовлення постійних магнітів? Чи можуть гістерезисні петлі а) і б) бути характеристиками одного й того самого матеріалу, одержаними за різної частоти?
4. На чому заснований метод еквівалентних синусоїд?
5. У якому випадку і як метод еквівалентних синусоїд можна застосовувати для аналізу кіл з інерційними нелінійними елементами?

## Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 33

### Тема «Режими роботи нелінійних кіл змінного струму»

#### План

1. Резонансні явища в нелінійних колах.
2. Нелінійна котушка з осердям на змінному струмі.
3. Трансформатор з осердям і його схема заміщення.

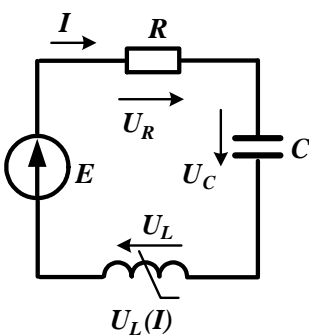
#### 33.1. Резонансні явища в нелінійних колах

Резонанс у колі, що містить нелінійну котушку із феромагнітним осердям, і лінійний конденсатор дістали назву ферорезонансу. Для якісного дослідження явища ферорезонансу скористаємося методом еквівалентних синусоїд.

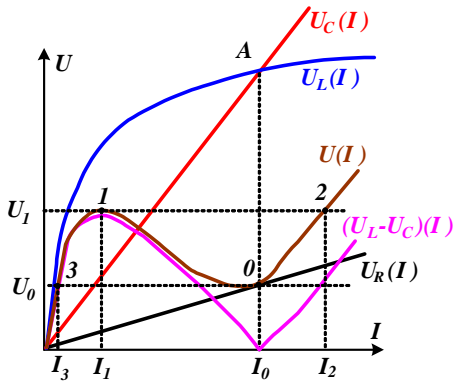
Ферорезонанс напруги матиме місце у схемі із послідовним з'єднанням елементів (рис. 33.1 а) під час виконання умови  $U_L = U_C$ .

Графічний розрахунок схеми наведений на рис. 33.1 б. Складання ВАХ окремих елементів  $U_R(I)$ ,  $U_L(I)$  і  $U_C(I)$  відбувається відповідно до рівняння

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}.$$



а)



б)

Рисунок 33.1

При плавному підвищенні напруги від 0 до  $U_1$  струм буде також плавно змінюватися від 0 до  $I_1$ . При  $U = U_1$  відбувається стрибкоподібна зміна струму від  $I_1$  до  $I_2$ . При подальшому підвищенні напруги знову спостерігатиметься плавна зміна струму.

При плавному зменшенні напруги відбудеться зворотний стрибок струму від  $I_0$  до  $I_3$  при напрузі  $U = U_0$ . Ділянка ВАХ 1 – 0 із від'ємним диференціальним опором є ділянкою з нестійким режимом роботи і при живленні кола від джерела ЕРС експериментально не може бути зафіксованою.

Якщо живити коло від джерела струму  $I_K$ , можна одержати усі точки ВАХ, включаючи і ділянку із нестійким режимом роботи.

Резонансу напруги на результуючій ВАХ відповідає точка 0, для якої виконується умова  $U_L = U_C$ . Тому досліджуване нелінійне коло має такі властивості, нехарактерні для лінійного кола:

- 1) резонансний режим у колі досягається зміною прикладених до нього напруг;
- 2) у колі можуть мати місце стрибкоподібні зміни струму або тригерний ефект;
- 3) при одній і тій самій напрузі джерела в колі можуть спостерігатися три різних режими, один з яких нестійкий.

Ферорезонанс струмів спостерігатиметься при паралельному з'єднанні тих самих елементів у колі. На рис. 33.2 а наведено схему кола, а на рис. 33.2 б – її графічний розрахунок.

Векторне додавання ВАХ окремих елементів  $I_R(U)$ ,  $I_C(U)$ ,  $I_L(U)$  здійснюється відповідно до рівняння

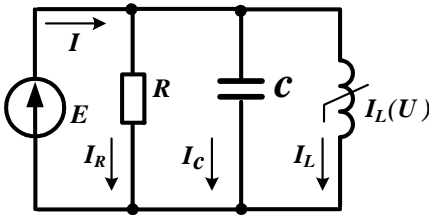
$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2}.$$

При живленні кола від джерела струму  $I_K$  спостерігатимуться стрибкоподібні зміни напруги на її вході напруги.

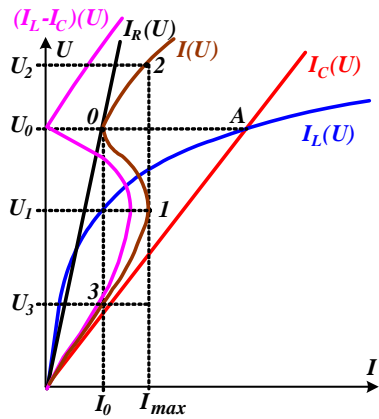
При плавному збільшенні струму  $I_K$  напруга спочатку плавно збільшується до значення  $U_1$  (точка 1). При подальшому

збільшенні струму  $I_K$  напруга стрибком збільшується до значення  $U_2$  (точка 2). При зменшенні струму  $I_K$  до значення  $I_0$  напруга зменшується до значення  $U_0$  (точка 0). При подальшому зменшенні струму  $I_K$  спостерігатиметься стрибкоподібне зменшення напруги до значення  $U_3$  (точка 3).

Резонансному режиму відповідає точка 0 на результативній ВАХ, для якої виконується умова  $I_L = I_C$ .



а)



б)

Рисунок 33.2

### 33.2. Нелінійна котушка з осердям на змінному струмі

Розглянемо фізичні процеси, що відбуваються у котушці з осердям на змінному струмі (рис. 33.3 а).

Струм  $i$ , що проходить по обмотці  $w$ , створює магнітний потік  $\phi$ , більша частина якого (основний потік)  $\phi_0$  замикається на осерді, і незначна частина (потік розсіяння)  $\phi_s$  – в повітрі.

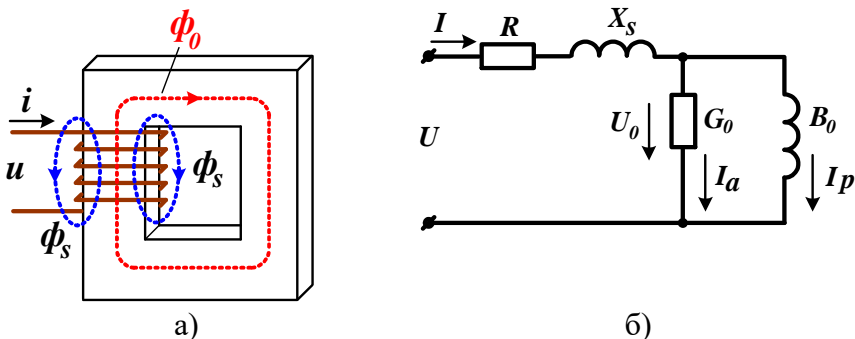


Рисунок 33.3

Основний потік  $\phi_0$  нелінійно залежить від струму  $i$ , а потік розсіювання пропорційний струму, отже,

$$L_S = \frac{\phi_S \cdot w}{i} = \frac{\psi_S}{i} = \text{const} \quad - \text{індуктивність}$$

розсіювання.

Електричний стан кола можна описати нелінійним диференціальним рівнянням:

$$\begin{aligned} u &= Ri + \frac{d\psi}{dt} = Ri + \frac{d\psi_S}{dt} + \frac{d\psi_0}{dt} = \\ &= Ri + L_S \frac{di}{dt} + w \frac{d\phi_0}{dt} = Ri + L_S \frac{di}{dt} + u_0. \end{aligned}$$

При синусоїдальній напрузі на затискачах спотворення форм кривих інших змінних ( $i$ ,  $\phi_0$ ) будуть незначні, тому для дослідження режиму котушки можна застосовувати метод еквівалентних синусоїд.

Рівняння кола в комплексній формі набирає вигляду для комплексних діючих значень

$$\dot{U} = \dot{I}(R + jX_S) + \dot{U}_0.$$

Цьому рівнянню відповідає еквівалентна схема заміщення котушки з осердям (рис. 33.3 б), у якій взяті такі позначення:

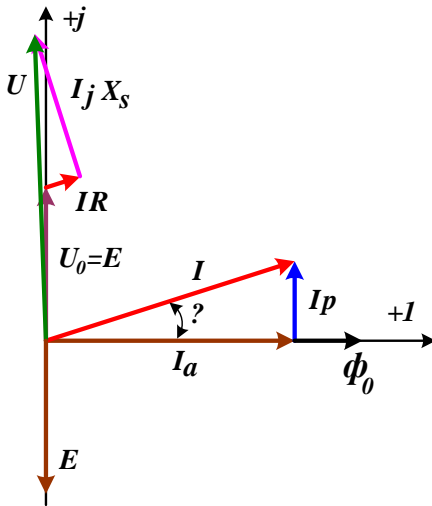
$R, X_S$  – активний і реактивний (розсіяння) опори обмотки котушки;

–  $G_0, B_0$  – активна і реактивна провідності, що вносяться осердям, значення яких для конкретної котушки визначаються через потужність втрат в осерді,

$$G_0 = \frac{P_{cm}}{U_0^2}$$

і намагнічувальна потужність

$$B_0 = \frac{Q_{cm}}{U_0^2} .$$



Векторна діаграма для схеми заміщення показана на рис. 33.4 Внаслідок наявності втрат в осерді, магнітний потік  $\phi_0$  буде відставати від струму  $I$  на кут  $\alpha$ , який прийнято називати кутом втрат.

Рисунок 33.4 – Векторна діаграма для схеми заміщення

### 33.3. Трансформатор з осердям і його схема заміщення

Розподіл магнітних потоків у трансформаторі з осердям показано на рис. 33.5.



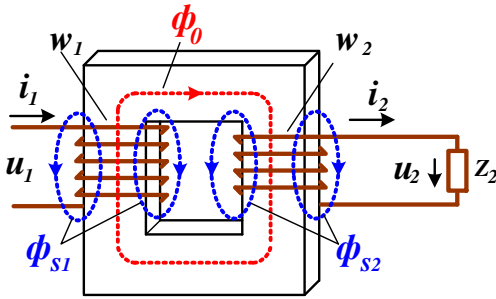


Рисунок 33.5 – Розподіл магнітних потоків у трансформаторі з осердям

Основний потік  $\phi_0$ , що замикається по осердю, створюється з сумарною МРС, з якою він пов'язаний нелінійно:

$$F = i_1 w_1 + i_2 w_2.$$

Запишемо для первинного і вторинного кіл рівняння за другим законом Кірхгофа в диференціальній формі :

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} + w_1 \frac{d\phi_0}{dt}, \\ R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + w_2 \frac{d\phi_0}{dt} + u_2 = 0, \end{cases}$$

де  $L_{S1} = \frac{w_1 \cdot \phi_{S1}}{i_1}$  – індуктивність розсіяння первинної обмотки;

мотки;

$L_{S2} = \frac{w_2 \cdot \phi_{S2}}{i_2}$  – індуктивність розсіяння вторинної обмотки.

тки.

Уведемо позначення:  $e_1 = -w_1 \frac{d\phi_0}{dt}$ ,  $e_2 = -w_2 \frac{d\phi_0}{dt}$ , тоді система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 + R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt}, \\ e_2 = R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + u_2. \end{cases}$$

Аналіз одержаних рівнянь показує, що ЕРС у первинному колі  $e_1$  направлена назустріч прикладеному рівнянню  $u_1$  і урівноважує більшу його частину, тобто відіграє роль протидіючої

ЕРС, а ЕРС у вторинному колі  $e_2$  створює струм  $i_2$ , тобто відіграє роль генераторної ЕРС.

Запишемо систему рівнянь у комплексній формі:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + \dot{I}_1 R_1 + \dot{I}_1 jX_{S1} = -\dot{E}_1 + (R_1 + jX_{S1})\dot{I}_1, \\ \dot{E}_2 = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 jX_{S2} + \dot{U}_2 = (R_2 + jX_{S2})\dot{I}_2 + \dot{U}_2. \end{cases}$$

Для складання електричної схеми заміщення трансформатора використовується зведення параметрів вторинної обмотки до первинної.

Зведення полягає в заміні реального трансформатора з  $k_T = \frac{w_1}{w_2} \neq 1$  на еквівалентний розрахунковий трансформатор із

коефіцієнтом трансформації  $k_T = \frac{w_1}{w_2} = 1$ . Усі зведені величини

позначаються штрихом угорі.

Умовою еквівалентності зведеної схеми є :

- 1) збереження без зміни намагнічувальної сили  $F_2 = I_2 w_2 = I_2' w_2'$  ;
- 2) збереження без зміни потужності  $S_{тр} = U_1 I_1 = U_2 I_2 = U_2' I_2'$  .

#### Формули зведення:

- 1)  $w_2' = w_1$  – згідно з умовою,
- 2)  $I_2' w_2' = I_2 w_2 \Rightarrow I_2' = I_2 \frac{w_2}{w_2'} = \frac{1}{k_T} I_2$  ,
- 3)  $U_2' I_2' = U_2 I_2 \Rightarrow U_2' = U_2 \frac{I_2}{I_2'} = k_T U_2$  ,
- 4)  $Z_2' = \frac{U_2'}{I_2'} = \frac{k_T U_2}{\frac{1}{k_T} I_2} = k_T^2 Z_2$  ,
- 5)  $Y_2' = \frac{1}{Z_2'} = \frac{1}{k_T^2} Y_2$  .

Рівняння зведеного трансформатора наберуть вигляду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\dot{E}_1 + (R_1 + jX_{S1})\dot{I}_1, \\ \dot{E}_2 = (R'_2 + jX'_{S2})\dot{I}'_2 + \dot{U}_2. \end{cases}$$

Цим рівнянням відповідає схема заміщення (рис. 33.6). Основний магнітний потік  $\Phi_0$  створюється сумою МРС обох обмоток.

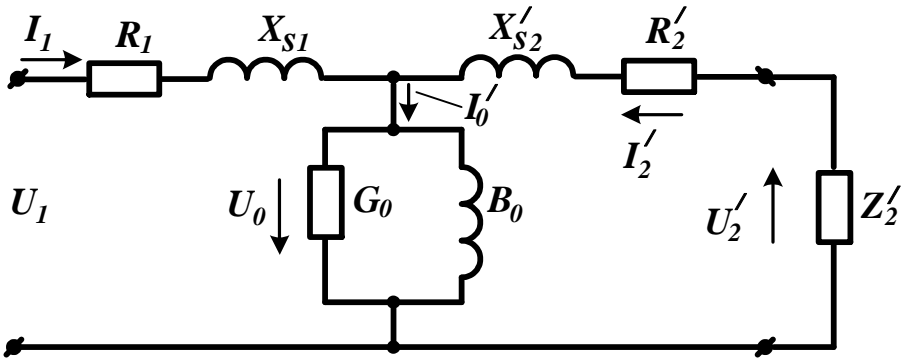


Рисунок 33.6

За законом Ома для магнітного кола

$$\dot{\Phi}_0 = \frac{\dot{I}_1 w_1 + \dot{I}'_2 w'_2}{\underline{Z}_M} = \frac{(\dot{I}_1 + \dot{I}'_2) w_1}{\underline{Z}_M} = \frac{\dot{I}_0 w_1}{\underline{Z}_M}.$$

де  $\underline{Z}_M$  – комплексний магнітний опір осердя,

$\dot{I}_0 = \dot{I}_1 + \dot{I}'_2$  – сумарний намагнічувальний струм, що дорівнює струму холостого ходу.

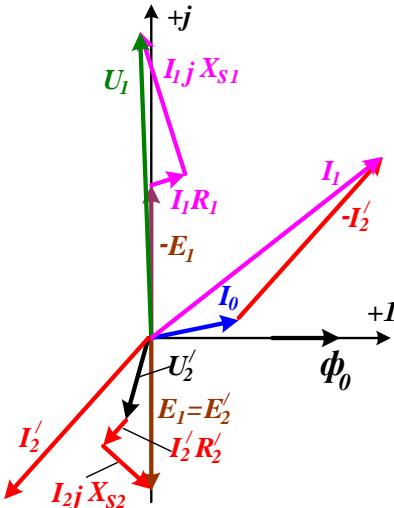


Рис. 33.7 – Векторна діаграма струмів і напруги

Із одержаного рівняння маємо

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_0 - \dot{I}'_2,$$

тобто струм первинного кола трансформатора дорівнює сумі струму холостого ходу  $\dot{I}_0$  і зведеного вторинного струму із протилежним знаком ( $-\dot{I}'_2$ ).

Векторна діаграма струмів і напруги для зведеного трансформатора показана на рис. 33.7.

### Контрольні питання і завдання

1. Які кола відносять до ферорезонансних?
2. Що називається ферорезонансом напруги? За допомогою чого можна забезпечити цей режим?
3. Що називається ферорезонансом струмів? За допомогою чого можна забезпечити цей режим?
4. У чому полягає ефект перекидання фази?
5. Зобразіть послідовну і паралельну схеми заміщення котушки з феромагнітним осердям і відповідні їм векторні діаграми.
6. Накресліть схему заміщення і векторну діаграму для трансформатора з феромагнітним осердям.

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с. : ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с. : ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 34

### Тема «Основні рівняння лінії із розподіленими параметрами»

#### План

1. Загальні визначення.
2. Рівняння однорідної двопровідної лінії.
3. Усталений режим однорідної лінії.

#### 34.1. Загальні визначення

У попередніх лекціях уже розглядалися лінії електропередачі при частоті 50 Гц і напрузі до 35 кВ *невеликої* довжини, в яких можна нехтувати струмами, обумовленими ємністю між проводами (струмами зміщення) та провідністю ізоляції (струмами втрат через гірлянди ізоляторів та струмами, обумовленими *коронним* електричним розрядом поблизу поверхні дротів).

При великій напрузі, що спостерігається в електроенергетиці, і при великих частотах, і часто трапляються у електров'язку, а також при значній довжині ліній нехтувати струмами зміщення і втрат неприпустимо. Отже, струм у проводах не однаковий у різних перерізах лінії.

Струм у проводах лінії призводить до спаду напруги в активному опорі проводів і створює змінне магнітне поле, яке, у свою чергу, наводить уздовж усієї лінії ЕРС самоіндукції. Тому уздовж лінії напруга між проводами також не залишається сталою.

Щоб урахувати зміну струму і напруги уздовж лінії, необхідно вважати, що кожен наскільки завгодно малий елемент лінії має опір та індуктивність, а між проводами – провідність та ємність, тобто розглядати лінію як коло із розподіленими параметрами. Таку лінію називають довгою.

Вважатимемо опір, індуктивність, провідність та ємність рівномірно розподіленими уздовж лінії, що є деякою ідеалізацією дійсних умов. Таку лінію будемо називати однорідною. Про ідеалізацію потрібно говорити, оскільки в реальних повітряних лініях електропередачі (ЛЕП) і зв'язку вихід струму через гірлянди ізоляторів треба розглядати як сукупність ряду зосередже-

них процесів. Крім того, провисання дротів на довжині прольоту ЛЕП змінює рівномірність розподілу їх ємності, індуктивності та опору. У лініях зв'язку – двопровідного кабелю зі скрученими проводами, строго кажучи, також є нерівномірність розподілу параметрів.

### 34.2. Рівняння однорідної двопровідної лінії

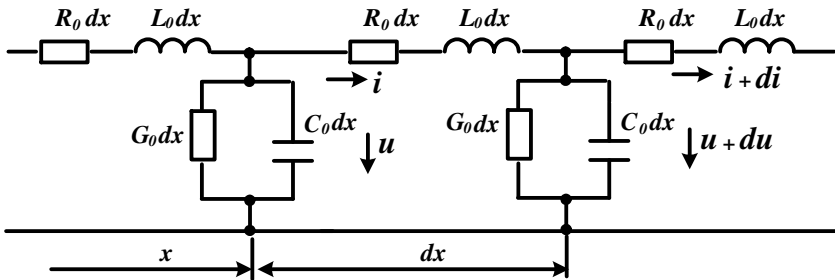


Рисунок 34.1

Складемо диференціальні рівняння, які задовольняють напруги і струми в будь-якому перерізі двопровідної лінії. Будемо називати верхній провід (рис. 34.1) двопровідної лінії прямим, а нижній – зворотним. Додатні напрями струму і напруги виберемо, як показано на рис. 34.1. Візьмемо відомі первинні параметри однорідної лінії, віднесені до одиниці її довжини:

$R_0$  – опір прямого і зворотного проводів;

$L_0$  – індуктивність петлі, що утворюється прямим і зворотним проводом;

$G_0$  – провідність (витікання) між проводами;

$C_0$  – ємність між проводами.

Довгу лінію можна подати у вигляді множини з'єднаних у ланцюжок нескінченно малих елементів завдовжки  $dx$ , кожен з яких має (рис. 34.1):

- опір  $R_0 dx$  ;
- індуктивність  $L_0 dx$  ;
- провідність  $G_0 dx$  ;
- ємність  $C_0 dx$  .

Опір  $R_0 dx$  та індуктивність  $L_0 dx$  вважатимемо увімкненим в один провід.

Позначимо через  $x$  відстань від початку лінії до поточного елемента її довжини. Миттєві значення напруги і струму на початку вибраного елемента лінії  $dx$  позначимо через  $u$  і  $i$ , а на початку наступного – через  $u + du$  та  $i + di$ .

Для елемента лінії завдовжки  $dx$  на підставі законів Кірхгофа запишемо такі рівняння:

$$\begin{cases} i - (i + di) - G_0 dx (u + du) - C_0 dx \frac{\partial}{\partial t} (u + du) = 0, \\ R_0 dx i + L_0 dx \frac{\partial i}{\partial t} + u + du - u = 0. \end{cases}$$

Позначимо прирости напруги і струму

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad di = \frac{\partial i}{\partial x} dx$$

і, наводячи подібні члени, нехтуючи величинами другого порядку малості і скорочуючи на  $dx$ , одержуємо диференціальні рівняння:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{cases}$$

Розв'язок системи рівнянь у частинних похідних за певних початкових і граничних умов дає можливість визначити струм і напругу як функції відстані від початку лінії і часу. Ці рівняння справедливі за будь-яких змін струму і напруги в часі.

### 34.3. Сталий режим в однорідній лінії

Розглянемо сталий режим у довгій лінії при синусоїдальній напрузі джерела живлення:

$$u = U_m \sin(\omega \cdot t + \psi_u); \quad i = I_m \sin(\omega \cdot t + \psi_i).$$

Запишемо струм і напругу в комплексній формі:



$$\dot{U} e^{j\omega t}; \dot{I} e^{j\omega t}.$$

Знайдемо вирази для часткових похідних струму і напруги за відстанню і часом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\dot{U}}{dx} e^{j\omega t}; \quad \frac{\partial \dot{U}}{\partial t} = \dot{U} j\omega e^{j\omega t},$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = \frac{d\dot{I}}{dx} e^{j\omega t}; \quad \frac{\partial \dot{I}}{\partial t} = \dot{I} j\omega e^{j\omega t}.$$

Переписуючи рівняння для сталого режиму і вводячи комплексну напругу, струми, опори і провідність, одержуємо

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = R_0 \dot{I} + j\omega L_0 \dot{I} = (R_0 + j\omega L_0) \dot{I} = \underline{Z}_0 \dot{I}, \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = G_0 \dot{U} + j\omega C_0 \dot{U} = (G_0 + j\omega C_0) \dot{U} = \underline{Y}_0 \dot{U}, \end{cases}$$

де  $\underline{Z}_0$  – поздовжній опір;

$\underline{Y}_0$  – поперечна провідність лінії одиничної довжини.

Продиференціюємо рівняння, записані вище:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\dot{I}}{dx}, \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \frac{d\dot{U}}{dx} \end{cases}$$

і, замінивши  $d\dot{I}/dx$  і  $d\dot{U}/dx$ , одержимо диференціальні рівняння, що визначають зміни комплексної напруги і струму уздовж лінії:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U} = \underline{\gamma}^2 \dot{U}, \\ -\frac{d^2 \dot{I}}{dx^2} = \underline{Y}_0 \underline{Z}_0 \dot{I} = \underline{\gamma}^2 \dot{I}. \end{cases}$$

Розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = \dot{A}_1 e^{-\alpha \cdot x} e^{-j\beta \cdot x} + \dot{A}_2 e^{\alpha \cdot x} e^{j\beta \cdot x},$$

де коефіцієнт поширення

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)},$$

$\dot{A}_1, \dot{A}_2$  – комплексні сталі інтегрування.

Вираз для струму  $\dot{I}$  набирає такого вигляду:

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_0} (\dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}) = \frac{\dot{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}}}.$$

Знаменник одержаного виразу, що має розмірність опору, називають хвильовим опором лінії  $\underline{Z}_B$ .

Для однорідної лінії, що розглядається між її вхідними і вихідними виводами як чотириполосник, хвильовий опір збігається із характеристичним, тобто

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_c = z_c e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} e^{j\theta},$$

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_c = z_c e^{j\theta} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{z_0}{y_0}} e^{j\theta},$$

де

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega(G_0 L_0 - R_0 C_0)}{R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0}.$$

Хвильовий опір і коефіцієнт поширення називають **вторинними параметрами однорідної лінії**.

Підставивши  $\underline{Z}_C$  у вираз для струму, запишемо

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\alpha \cdot x} e^{-j\beta \cdot x} - \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{\alpha \cdot x} e^{j\beta \cdot x}.$$

Виразимо комплекси  $\dot{A}_1, \dot{A}_2$ , що мають розмірність напруги у показниковій формі:

$$\dot{A}_1 = A_1 e^{j\psi_1}, \quad \dot{A}_2 = A_2 e^{j\psi_2},$$

запишемо миттєві значення напруги і струму :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1) + \\ &+ \sqrt{2}A_2 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2), \\ i &= \frac{\sqrt{2}A_1}{z_C} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \beta x + \psi_1 - \theta) + \\ &+ \frac{\sqrt{2}A_2}{z_C} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \beta x + \psi_2 - \theta). \end{aligned}$$

Кожен із доданків правої частини двох останніх виразів можна розглядати як біжучу хвилю, що рухається у напрямку зростання або спадання координати  $x$ , і загасальну – у напрямку руху.

Насправді кожен із доданків у будь-якій фіксованій точці  $x = x_1$  є періодичною функцією часу. У будь-який фіксований момент часу  $t = t_1$  кожен із доданків є загасальним коливанням уздовж лінії (тобто зі зміною  $x$ ).

**Основними характеристиками біжучої хвилі є фазова швидкість і довжина хвилі.**

**Фазовою швидкістю** хвилі називається швидкість переміщення фази коливання, яка упродовж часу  $t$  у міру збільшення відстані  $x$ , пройденої хвилею, залишається сталою, тобто

$$\omega t - \beta x + \psi_1 = \text{const},$$

звідки випливає, що

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta x + \psi_1) = 0 \quad \text{і} \quad \frac{dx}{dt} = C = \frac{\omega}{\beta}.$$

Аналогічне дослідження другого доданка правої частини рівності дало б для фазової швидкості таке саме значення, але із *протилежним* знаком. Звідси робимо висновок, що ці доданки

можуть розглядатися як хвилі, що рухаються у протилежних напрямках.

*Довжиною хвилі* називається відстань між найближчими двома точками, узята у напрямку поширення хвилі, фази коливання в яких відрізняються на  $2\pi$ :

$$\alpha t - \beta(x + \lambda) + \psi_1 = \alpha t - \beta x - 2\pi + \psi_1,$$

звідки

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

і

$$c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi f}{\beta} = \lambda f = \frac{\lambda}{T},$$

тобто за час, що дорівнює періоду, хвиля проходить відстань, що дорівнює довжині хвилі.

Вважатимемо хвилю, що рухається від початку лінії, *прямою*, а ту, що рухається від кінця лінії, – *зворотною*.

Загасальна пряма хвиля наведена на рис. 34.2. Для її зображення будують обвідні  $\pm \sqrt{2}A_1 e^{-\alpha x}$  і вписують хвилю в область, обмежену такими обвідними.

Виберемо тепер додатні напрямки напруг та струмів окремих хвиль. Оскільки обидва доданки в правій частині рівності, що визначає напругу і входить з додатними знаками, то цілком природно вибрати додатні напрямки напруги прямої і зворотної хвиль, що збігаються з позитивним напрямком напруги, тобто від прямого проводу лінії до зворотного (рис. 34.1).

Для струму існують два напрямки. Можна залишити обидва доданки у правій частині рівності з різними знаками або ж поставити між доданками знак плюс, а мінус внести до другого доданка.

Визначатимемо струм  $\dot{I}$  як різницю струмів прямої і зворотної хвиль, тобто додатний напрямок струму прямої хвилі виберемо таким, що збігається із додатним напрямком струму  $\dot{I}$ , а

додатний напрямок струму зворотної хвилі – протилежним до додатного напрямку струму  $\dot{I}$ .

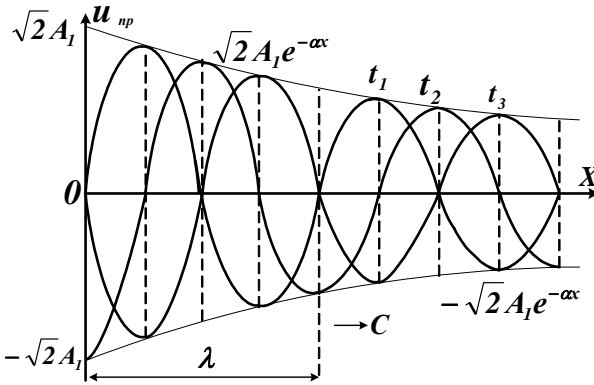


Рисунок 34.2

Відповідно до цього можна записати

$$\dot{U} = \dot{U}_{np} + \dot{U}_{zv},$$

$$\dot{I} = \dot{I}_{np} - \dot{I}_{zv},$$

де  $\dot{U}_{np} = A_1 e^{-\gamma x},$

$$\dot{U}_{zv} = A_2 e^{\gamma x},$$

$$\dot{I}_{np} = \frac{A_1}{Z_c} e^{-\gamma x},$$

$$\dot{I}_{zv} = \frac{A_2}{Z_c} e^{\gamma x}.$$

Струми і напруги як прямої, так і зворотної хвиль пов'язані між собою законом Ома:

$$\dot{I}_{np} = \frac{\dot{U}_{np}}{Z_c}; \dot{I}_{zv} = \frac{\dot{U}_{zv}}{Z_c}.$$

Уведені поняття про прямі і зворотні хвилі в лініях при сталому синусоїдальному режимі полегшують подання й аналіз процесів. Проте треба мати на увазі, що фізично існують у лінії лише результуючі струм  $\dot{I}$  і напруга  $\dot{U}$  і що розкладання їх на прямі та зворотні хвилі необхідно вважати лише зручним прийомом.

Криві розподіли миттєвих значень напруги зворотної хвилі наведені на рис. 34.3.

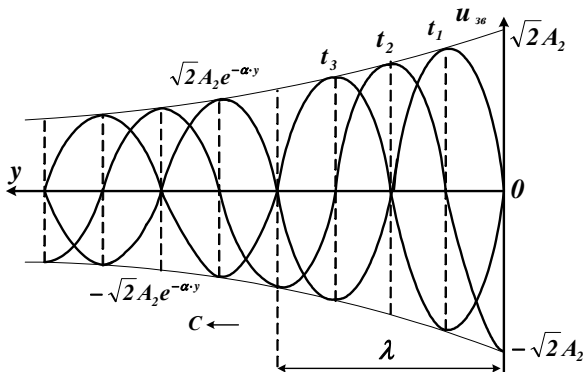


Рисунок 34.3

Зазначимо, на-  
решті, що усі  
одержані ре-  
зультати засто-  
совні і до трифа-  
зних симетрич-  
них або несиме-  
тричних, але  
транспонованих  
ліній.

У цьому разі напруга  $\dot{U}$  і струм  $\dot{I}$  – це фазна напруга, а параметри  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$  і  $C_0$  повинні бути віднесені до однієї фази.

### Контрольні питання і завдання

1. У чому полягає різниця між колами із зосередженими і розподіленими параметрами?
2. За яким критерієм коло відносять до класу кіл із розподіленими або зосередженими параметрами?
3. Накресліть схему заміщення довгої лінії.
4. Поясніть поняття прямої і зворотної біжучих хвиль.

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с.: ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехниче-

ских, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Лекція 35

### Тема «Рівняння однорідної лінії»

1. Рівняння однорідної лінії із гіперболічними функціями.
2. Характеристики однорідної лінії.

#### 35.1. Рівняння однорідної лінії з гіперболічними функціями

Вважатимемо, що задані напруга  $\dot{U}_1$  і струм  $\dot{I}_1$  на початку лінії ( $x = 0$ ). Зазначимо, що вибрати довільно  $\dot{U}_1$  і  $\dot{I}_1$  – означає задати певний опір навантаження  $\underline{Z}_H$  у кінці лінії. Якщо ж, навпаки, заданий опір навантаження  $\underline{Z}_H$ , то вибрана може бути лише одна з величин –  $\dot{U}_1$  або  $\dot{I}_1$ .

Із

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma x} + \dot{A}_2 e^{\gamma x}, \\ \dot{I} = \frac{\dot{A}_1 e^{-\gamma x} - \dot{A}_2 e^{\gamma x}}{\underline{Z}_c}. \end{cases}$$

при  $x = 0$  одержимо

$$\dot{U}_1 = \dot{A}_1 + \dot{A}_2; \quad \dot{I}_1 \underline{Z}_c = \dot{A}_1 - \dot{A}_2,$$

звідки

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_c), \\ \dot{A}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_c). \end{aligned}$$

Підставивши  $\dot{A}_1$  і  $\dot{A}_2$ , для напруги  $\dot{U}$  і струму  $\dot{I}$  в будь-якій точці лінії (на відстані  $x$  від її початку) одержимо



$$\begin{cases} \dot{U} = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 \underline{Z}_c) e^{-\gamma x} + \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_c) e^{\gamma x}, \\ \dot{I} = \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} + \dot{I}_1 \right) e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} - \dot{I}_1 \right) e^{\gamma x}. \end{cases}$$

Групуючи члени в правій частині і вводячи гіперболічні функції  $\underline{ch}\gamma x$  і  $\underline{sh}\gamma x$ , матимемо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \dot{I}_1 \underline{Z}_c \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \dot{U}_1 \underline{ch}\gamma x - \dot{I}_1 \underline{Z}_c \underline{sh}\gamma x, \\ \dot{I} = \dot{I}_1 \frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} = \dot{I}_1 \underline{ch}\gamma x - \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_c} \underline{sh}\gamma x. \end{cases}$$

Ці формули дозволяють визначити струм і напругу в будь-якій точці лінії за їх значеннями на початку лінії.

Візьмемо тепер задані значення напруги  $\dot{U}_2$  і струму  $\dot{I}_2$ , у кінці лінії, тобто заданий режим приймача, а отже, і опір

$$\underline{Z}_n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}.$$

У цьому разі доцільно відраховувати відстань поточної точки від кінця лінії. Позначивши її через  $y$ , одержимо  $x = L - y$ , де  $L$  – довжина усієї лінії. При новому позначенні знайдемо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_1 e^{-\gamma(L-y)} + \dot{A}_2 e^{\gamma(L-y)} = \dot{A}_1 e^{-\gamma L} e^{\gamma y} + \dot{A}_2 e^{\gamma L} e^{-\gamma y}, \\ \dot{I} \underline{Z}_c = \dot{A}_1 e^{-\gamma(L-y)} - \dot{A}_2 e^{\gamma(L-y)} = \dot{A}_1 e^{-\gamma L} e^{\gamma y} + \dot{A}_2 e^{\gamma L} e^{-\gamma y}. \end{cases}$$

Позначивши  $\dot{A}_3 = \dot{A}_1 e^{-\gamma L}$ ,  $\dot{A}_4 = \dot{A}_2 e^{\gamma L}$ , підставимо у записану вище систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{A}_3 e^{\gamma y} + \dot{A}_4 e^{-\gamma y}, \\ \dot{I} \underline{Z}_c = \dot{A}_3 e^{\gamma y} - \dot{A}_4 e^{-\gamma y}. \end{cases}$$

де  $\dot{A}_3 e^{\gamma y}$  – напруга прямої хвилі, а  $\dot{A}_4 e^{-\gamma y}$  – зворотної.  
Підставляємо  $y = 0$ , одержимо

$$\dot{U}_2 = \dot{A}_3 + \dot{A}_4; \quad \dot{I}_2 \underline{Z}_c = \dot{A}_3 - \dot{A}_4,$$

звідси

$$\begin{cases} \dot{A}_3 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_c), \\ \dot{A}_4 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_c). \end{cases}$$

Підставимо і перетворимо отримані вирази

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_c) e^{\gamma y} + \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_c) e^{-\gamma y} = \\ &= \dot{U}_2 \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma y, \\ \dot{I}_2 \underline{Z}_c &= \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_c) e^{\gamma y} - \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_c) e^{-\gamma y} = \\ &= \dot{I}_2 \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \frac{e^{\gamma y} - e^{-\gamma y}}{2} = \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma y, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{U}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh} \gamma y, \\ \dot{I}_2 \operatorname{ch} \gamma y + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh} \gamma y. \end{cases}$$

Співвідношення для ліній постійного струму, в яких опір проводів і витікання між проводами, обумовлені недосконалістю ізоляції, – рівномірно розподілені уздовж лінії, можуть бути

отримані як окремий випадок з виведених співвідношень при  $\omega = 0$ .

Насправді  $\omega = 0$  означає, що при постійних у часі струмах і напрузі відсутні ЕРС самоіндукції (але не магнітне поле між проводами) і струми зміщення між проводами (але не електричне поле між ними). Тому, припустивши, що  $\omega = 0$ , одержимо для ліній постійного струму

$$\gamma = \alpha = \sqrt{R_0 G_0} ; z_c = R_c = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}} .$$

Крім того, для ліній постійного струму ні про які фазові співвідношення, тобто ні про який зсув фаз між напругою та струмами мови йти не може. Тому для лінії постійного струму рівняння для струму і напруги будуть записані так:

$$\begin{cases} U = U_2 \operatorname{ch} \alpha y + I_2 R_c \operatorname{sh} \alpha y, \\ I = I_2 \operatorname{ch} \alpha y + \frac{U_2}{R_c} \operatorname{sh} \alpha y. \end{cases}$$

### 35.2. Характеристики однорідної лінії

У зв'язку з тим, що напругу і струми в лініях можна отримати накладенням прямих і зворотних хвиль, використовують певні назви, введені вище величини. Як було зазначено вище, комплексна величина  $\underline{\gamma}$  називається коефіцієнтом поширення,  $\alpha$  – коефіцієнтом послаблення,  $\beta$  – коефіцієнтом фази (іноді додають на одиницю довжини).

Насправді бачимо, що послаблення (загасання) амплітуд прямої і зворотної хвиль, коефіцієнтів  $\alpha$ ,  $\beta$ , що входять до аргументу синуса, характеризує зміну фази хвилі залежно від координати  $x$  точки лінії.

Коефіцієнт послаблення визначають у децибелах (чи неперах) на одиницю довжини, а коефіцієнт фази – у радіанах на одиницю довжини.

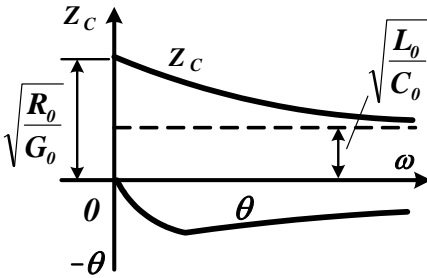
Для підрахунку  $\alpha$  і  $\beta$  і для побудови їх частотних характеристик можна використати формули

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(Z_0 Y_0 + R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0)},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(Z_0 Y_0 - R_0 G_0 + \omega^2 L_0 C_0)}.$$

Зокрема, щодо коефіцієнта фази потрібно зробити висновок, що він монотонно зростає зі збільшенням частоти.

Опір  $\underline{Z}_C$  визначає струми прямої і зворотної хвиль за відповідною напругою. Середні значення модуля  $\underline{Z}_C$  для повітряних ліній 300–400 Ом, а для кабелів – 60–80 Ом. У кабелів ємність  $C_0$  значно більша, а індуктивність  $L_0$  менша, ніж у повітряних ліній, оскільки проводи кабелю розміщені ближче один до одного, а відносна діелектрична проникність ізоляції – близько 4–5. Тому  $\underline{Z}_C$  кабелів у 6–8 разів менше, ніж



повітряних ліній.

На рис. 35.1 наведено частотні характеристики зміни модуля  $\underline{Z}_C$  і аргументу  $\theta$  хвильового опору для повітряних і кабельних ліній.

Рисунок 35.1

Бачимо, що при  $\omega = 0$

$$Z_C = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}},$$

а при  $\omega = \infty$

$$Z_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Як для повітряної, так і для кабельної лінії  $\frac{R_0}{G_0} > \frac{L_0}{C_0}$ , що пояснюється незначним значенням провідності витікання  $G_0$  і додатково щодо кабельних ліній – досить великою ємністю  $C_0$ .

Оскільки практично  $\omega C_0 \gg G_0$ , аргумент комплексу  $G_0 + j\omega C_0$  близький до  $90^\circ$  і більший за аргумент комплексу  $R_0 + j\omega L_0$  в чисельнику. Тому аргумент  $\theta$  хвильового опору, як правило, від'ємний.

Із зазначеного випливає, що  $\theta = 0$  при  $\omega = 0$  і  $\omega = \infty$ .

Фазова швидкість хвиль у лініях визначається коефіцієнтом фази  $\beta$ .

Нижче буде показано, що для ліній без спотворень  $\left(\frac{R_0}{G_0} = \frac{L_0}{C_0}\right)$  і для ліній без втрат ( $R_0 = 0; G_0 = 0$ )

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}},$$

де  $c_0$  – швидкість світла у вакуумі;

$\epsilon_r$  і  $\mu_r$  – відносні діелектрична і магнітна проникності діелектрика, що оточує проводи.

У повітряних лініях  $\epsilon_r \approx 1$ ,  $\mu_r \approx 1$  за відсутності втрат швидкість хвиль  $c$  практично дорівнює  $c_0$ . У кабелях із  $\epsilon_r \approx 4 \div 5$  швидкість хвиль у 2–2,5 раза менша за  $c_0$ . У повітряних лініях із втратами фазова швидкість хоча і ненабагато, але все ж менша за  $c_0$ .

На рис. 35.2 показані залежності фазової швидкості від частоти для однорідних повітряних та кабельних ліній зв'язку. Із них бачимо, що при  $f \geq 1\,000$  Гц фазова швидкість у повітряних лініях із мідними і біметалічними дротами майже досягає  $c_0$ , тоді як у лініях зі сталевими дротами і кабельних лініях вона при  $f \approx 1\,500$  Гц ще приблизно удвічі менша за  $c_0$ .

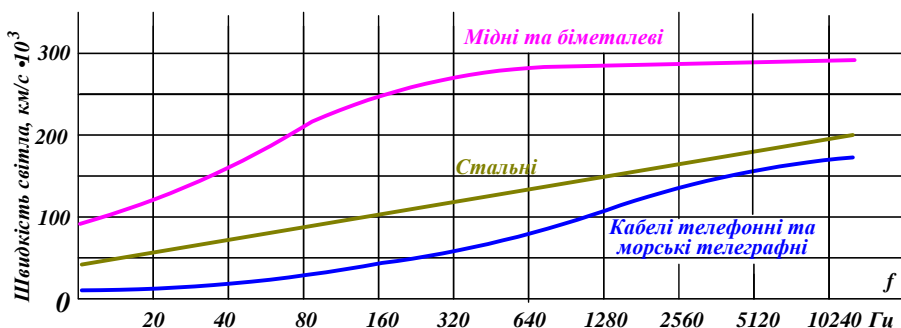


Рисунок 35.2 – Залежності фазової швидкості від частоти для однорідних повітряних та кабельних ліній зв'язку

У повітрі ЛЕП, для яких швидкість  $c$  близька до  $c_0$  при

$$f = 50 \text{ Гц, довжина хвилі } \lambda = cT \approx \frac{c_0}{f} = 6\,000 \text{ км.}$$

Наприклад, будівництво Волжських гідроелектростанцій вимагало спорудження ліній завдовжки близько 1 000 км для передачі енергії цих гідроелектростанцій до Москви. Навіть на таких лініях укладається порівняно невелика частка довжини хвилі і не можна спостерігати хвилеподібної зміни струму або напруги по довжині, а можна спостерігати лише їх монотонну зміну.

Хвилеподібну зміну напруги і струму уздовж лінії можна спостерігати в засобах зв'язку, де лінії сполучають, наприклад, радіопередавач з антеною. Для передавачів, що працюють у діапазоні коротких хвиль, довжина лінії може бути у багато разів більшою за довжину хвилі.

### Контрольні питання і завдання

1. Чи залежить довжина хвилі напруги (струму) в лінії від параметрів лінії?
2. Чи дорівнюють один одному фазова швидкість та швидкість поширення хвилі напруги і струму уздовж лінії?

3. Який характер має залежність вхідного опору лінії від її довжини і чому?

4. За допомогою чого можна змінювати характер і величину вхідного опору кола із розподіленими параметрами?

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.

2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с.: ил.

3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.

4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

**Лекція 36**  
**Тема «Режими роботи лінії»**  
**План**

- 1. Вхідний опір лінії.**
- 2. Коефіцієнт віддзеркалення хвилі.**
- 3. Узгоджене навантаження лінії.**
- 4. Лінія без спотворень.**

**36.1. Вхідний опір лінії**

Під час дослідження процесів у лінії часто важливо знати вхідний опір лінії. Під *вхідним опором* лінії  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  розуміють опір двополюсника, на який можна замінити лінію разом із приймачем на її кінці при розрахунку режиму на початку лінії.

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh}\gamma l}{\dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l + \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh}\gamma l} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c \operatorname{th}\gamma l}{\underline{Z}_n \operatorname{th}\gamma l + \underline{Z}_c}$$

Вхідний опір при будь-якому опорі навантаження  $\underline{Z}_n$  можна виразити через вхідні опори лінії при холостому ході  $\underline{Z}_x$  і короткому замиканні  $\underline{Z}_k$ . Із виразу для  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  знаходимо при холостому ході ( $\underline{Z}_n = \infty$ ;  $\dot{I}_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_x = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{I}_{1x}} = \frac{\dot{U}_2 \operatorname{ch}\gamma l}{\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} \operatorname{sh}\gamma l} = \underline{Z}_c \operatorname{cth}\gamma l = \frac{\underline{Z}_c}{\operatorname{th}\gamma l}.$$

і при короткому замиканні ( $\underline{Z}_n = 0$ ;  $\dot{U}_2 = 0$ )

$$\underline{Z}_k = \frac{\dot{U}_{1k}}{\dot{I}_{1k}} = \frac{\dot{I}_2 \underline{Z}_c \operatorname{sh}\gamma l}{\dot{I}_2 \operatorname{ch}\gamma l} = \underline{Z}_c \operatorname{th}\gamma l.$$

Розділивши чисельник і знаменник правої частини  $\underline{Z}_{\text{вх}}$  на  $\operatorname{th}\gamma l$ , з урахуванням  $\underline{Z}_x$  і  $\underline{Z}_k$  одержимо



$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_x \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_K}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_x} = \underline{z}_{ex} e^{j \alpha x}.$$

Цією формулою зручно користуватися, якщо відомі  $\underline{Z}_x$  і  $\underline{Z}_K$ , які можуть бути визначені, наприклад, з дослідів холостого ходу і короткого замикання лінії.

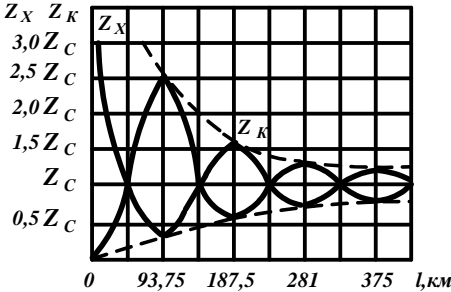


Рисунок 36.1

На рис. 36.1 показана зміна  $\underline{Z}_x$  і  $\underline{Z}_K$ , для мідної двопровідної повітряної лінії зв'язку при діаметрі провідів 3 мм і частоті  $f = 800$  Гц ( $\lambda = 375$  км) залежно від довжини лінії  $L$ .

Зазначимо також, що через вхідні опори лінії при холостому ході і короткому

замиканні легко виразити  $\underline{Z}_c$  і  $\underline{\gamma}$ .

Перемноживши, а потім розділивши почленно  $\underline{Z}_x$  і  $\underline{Z}_K$  одержимо

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_x \underline{Z}_K}$$

і, добуваючи корінь, одержимо

$$\text{th } \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_K}{\underline{Z}_x}}.$$

### 36.2. Коефіцієнт віддзеркалення хвилі

При довільному опорі навантаження  $\underline{Z}_H$  у кінці лінії коефіцієнт  $\dot{A}_4 \neq 0$ , тобто в лінії виникає зворотна хвиля.

Це можна врахувати, ввівши так званий комплексний коефіцієнт віддзеркалення хвилі і визначивши його у загальному випадку як відношення комплексів напруги або струмів зворотної і прямої хвиль у будь-якій точці лінії :

$$\underline{\rho} = \frac{\dot{U}_{зв}}{\dot{U}_{np}} = \frac{\dot{I}_{зв}}{\dot{I}_{np}} = \frac{\dot{A}_4 e^{-\gamma x}}{\dot{A}_3 e^{\gamma x}} = \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_c}{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_c} e^{-2\gamma x} = \frac{\underline{Z}_n - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_n + \underline{Z}_c} e^{-2\gamma x}.$$

У вузькому розумінні слова коефіцієнт віддзеркалення визначається в точках, де є яка-небудь неоднорідність (кінець або початок лінії). Відсутність зворотної хвилі має таку перевагу, що уся потужність, що переноситься прямою хвилею до кінця лінії, поглинається опором навантаження. За наявності зворотної хвилі частина потужності прямої хвилі повертається до джерела зворотної хвилі. Тому потужність в опорі навантаження буде меншою, якщо вважати, що потужність джерела залишається незмінною.

### 36.3. Узгоджене навантаження лінії

Якщо у кінці лінії увімкнений опір навантаження, що дорівнює хвильовому

$$\underline{Z}_n = \underline{Z}_c = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2},$$

то

$$\dot{A}_3 = \dot{U}_2, \quad \dot{A}_4 = 0,$$

тобто відбитої хвилі не виникає. Таке навантаження називають *узгодженим* навантаженням, або навантаженням без віддзеркалення. При цьому коефіцієнт віддзеркалення  $\underline{\rho} = 0$ .

Із записаних вище співвідношень одержимо

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_{np} = \dot{U}_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{U}_{зв} = 0, \\ \dot{I} &= \dot{I}_{np} = \frac{\dot{U}_{np}}{\underline{Z}_c} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_c} e^{\gamma x} = \dot{I}_2 e^{\gamma x}; \quad \dot{I}_{зв} = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \underline{Z}_c,$$

тобто для будь-якої точки лінії відношення комплексів  $\dot{U}$  та  $\dot{I}$  дорівнює хвильовому опорю  $\underline{Z}_C$ . Тому режим роботи генератора, що живить таку лінію, не зміниться, якщо в будь-якому перерізі лінії її розрізати і замість відрізаної частини лінії увімкнути хвильовий опір. Режим роботи ділянки лінії, що залишилася, також не зміниться.

У режимі узгодженого навантаження в лінії відсутні відбиті хвилі – напруга і струм. Уся енергія, що доставляється падаючою хвилею на кінець лінії, повністю використовується навантаженням, при цьому активна потужність, що передається приймачу, має максимальне значення:

$$P_{2\max} = U_2 I_2 \cos \varphi_C = U_1 e^{-\alpha l} I_1 e^{-\alpha l} \cos \varphi_C = U_1 I_1 e^{-2\alpha l} \cos \varphi_C .$$

Потужність джерела енергії

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_C .$$

Коефіцієнт корисної дії

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_1 I_1 e^{-2\alpha l} \cos \varphi_C}{U_1 I_1 \cos \varphi_C} = e^{-2\alpha l} .$$

Якщо опір навантаження неузгоджено із хвильовим опором лінії  $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_C$ , то частина енергії падаючої хвилі, що доставляється, відбивається і повертається генератору у вигляді відбитих хвиль – напруги і струму.

У лініях зв'язку відбиті хвилі погіршують якість основного сигналу (знижується розбірливість мови, чіткість зображення та ін.). Усі лінії зв'язку працюють у режимі, близькому до узгодженого. За різних опорів навантаження і лінії  $\underline{Z}_H \neq \underline{Z}_C$  вживають спеціальних технічних заходів для їх узгодження.

У лініях електропередачі узгодження режиму не вимагається, оскільки в них основним критерієм є передача енергії з найменшими втратами.

Потужність, що передається узгодженою лінією, називається *природною*, або *натуральною*. Режим передачі природної потужності може мати місце в лініях, якщо опір навантаження дорівнює хвильовому опорю. Середні значення природної поту-

жності для ліній 500, 400, 220, 110 і 35 кВ відповідно дорівнюють 600, 360, 120, 30 і 3 МВт. Звідси бачимо, як сильно збільшується природна потужність зі збільшенням напруги лінії.

### 36.4. Лінія без спотворень

Сигнали, що передаються лініями зв'язку, є несинусоїдальними функціями часу і складаються із суми гармонік різних частот. Якщо в лінії створені неоднакові умови для різних гармонік, то у кінці лінії гармонійний склад сигналу відрізнятиметься від гармонійного складу цього самого сигналу на початку лінії, тобто сигнал буде спотвореним. Для ліній зв'язку дуже важливою умовою є створення такого режиму роботи, при якому було б відсутнє спотворення сигналу.

Розрізняють два види *спотворень* сигналу :

- амплітудні;
- фазові.

**Амплітудні спотворення** мають місце у тому разі, коли коефіцієнт загасання  $\alpha$  залежить від частоти, при цьому амплітуди окремих гармонік загасають із неоднаковою швидкістю, що призводить до спотворення форми сигналу.

**Фазові спотворення** виникають у тому разі, коли фазова швидкість  $c$  залежить від частоти, при цьому відбувається зсув окремих гармонік за фазою, що призводить до спотворення форми сигналу.

Отже, спотворення сигналу буде відсутнє при сталості двох параметрів:

$$\alpha = const, C = const.$$

Вторинні параметри лінії  $\underline{Z}_c$  і  $\gamma$  залежать від частоти, що в цілому створює в лінії неоднакові умови для проходження хвиль напруги і струму різних частот і така лінія є спотворювальною.

Відсутність спотворень у лінії спостерігається лише при певному співвідношенні між її первинними параметрами.

$$\frac{L_0}{C_0} = \frac{R_0}{G_0}.$$

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0 \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right)}{C_0 \left( \frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \text{ – хвильовий опір лінії}$$

є чисто активним і не залежить від частоти;

$$\begin{aligned} \underline{\gamma} &= \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} = \sqrt{L_0 \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) \cdot C_0 \left( \frac{G_0}{C_0} + j\omega \right)} = \\ &= \sqrt{L_0 C_0} \cdot \left( \frac{R_0}{L_0} + j\omega \right) = R_0 \cdot \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + j\omega \cdot \sqrt{L_0 C_0} = \sqrt{R_0 G_0} + j\omega \sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta, \end{aligned}$$

де

$$\alpha = \sqrt{R_0 G_0} \text{ – коефіцієнт загасання, що не залежить}$$

від частоти:

$$\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0} \text{ – коефіцієнт фази;}$$

$$C = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \text{ – фазова швидкість, що не залежить від}$$

частоти.

У реальних кабельних лініях зв'язку співвідношення між первинними параметрами  $\frac{R_0}{L_0} > \frac{G_0}{C_0}$ , оскільки внаслідок досконалості ізоляції активна провідність  $G_0$  дуже мала.

Режим без спотворень може бути одержаний штучним шляхом вмикання до перерізу лінії через певні інтервали додаткових котушок індуктивності  $L_d$  з умови  $\frac{R_0}{L_0 + L_d} = \frac{G_0}{C_0}$ .

Проте зі збільшенням еквівалентної індуктивності  $L_T = L_0 + L_d$  знижується фазова швидкість  $C$ , унаслідок чого збільшується загальний час проходження сигналу  $T$ , який за технічними нормами не повинен перевищувати певну величину.

Реальні лінії зв'язку переважно є спотворювальними, а спотворення сигналів на приймальних кінцях лінії усуваються за допомогою спеціальних коригувальних пристроїв.

### Контрольні питання і завдання

1. Яка розмірність коефіцієнтів : а) загасання  $\alpha$ ; б) фази  $\beta$ ; в) поширення  $\gamma$ ?
2. Чому дорівнює вхідний опір лінії, замкненої на приймач, опір якого дорівнює хвильовому опорю лінії?
3. Яким має бути опір приймача, щоб коефіцієнти віддзеркалення напруги  $q_u$  і струму  $q_i$  були однаковими?
4. При яких значеннях  $Z_{np}$  коефіцієнт віддзеркалення напруги  $q_u$  досягає максимального (мінімального) значення, якщо хвильовий опір  $Z_C$  лінії і опір  $Z_{np}$  приймача активні?
5. Чи можуть величини  $q_u$  і  $q_i$  бути уявними?

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с.: ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

**Лекція 37**  
**Тема «Властивості ліній без втрат»**  
**План**

- 1. Лінії без втрат.**
- 2. Застосування ліній без втрат.**

**37.1. Лінії без втрат**

Для кабельних ліній із розподіленими параметрами, що працюють на високих частотах (лінії зв'язку), реактивні параметри значно більші за активні  $\omega L_0 \gg R_0$  і  $\omega C_0 \gg G_0$ . При розрахунку режимів таких ліній можна без особливого впливу для точності розрахунку нехтувати активними параметрами і прийняти їх такими, що дорівнюють нулю  $R_0 = 0$ ,  $G_0 = 0$ . У такому разі лінія стає ідеальною або без втрат.

Хвильовий опір лінії без втрат

$$Z_C = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = Z_C \cdot e^{j0}.$$

Він є чисто активним і не залежить від частоти.

Стала поширення лінії без втрат:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega L_0 \cdot j\omega C_0} = 0 + j\omega\sqrt{L_0 C_0} = \alpha + j\beta,$$

де  $\alpha = 0$ ;  $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ ;  $C = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = const.$

У лінії без втрат відсутнє загасання сигналу  $\alpha = 0$ , а фазова швидкість  $C$  не залежить від частоти, отже, лінія без втрат є неспотворювальною.

Ураховуючи математичні співвідношення, що  $\underline{\gamma} = j\beta$  і

$$shjx = \frac{1}{2}(e^{jx} - e^{-jx}) = \frac{1}{2}(\cos x + j\sin x - \cos x + j\sin x) = j\sin x,$$

$$chjx = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) = \frac{1}{2}(\cos x + j\sin x + \cos x - j\sin x) = \cos x,$$

$$thjx = \frac{shjx}{chjx} = \frac{j \sin x}{\cos x} = jtgx,$$

перетворимо комплексні рівняння сталого синусоїдального режиму лінії при відліку координати  $x$  від початку лінії:

$$\begin{cases} \dot{U}(x) = \dot{U}_1 \cos \beta x - j \dot{I}_1 Z_C \sin \beta x, \\ \dot{I}(x) = \dot{I}_1 \cos \beta x - j \frac{\dot{U}_1}{Z_C} \sin \beta x, \end{cases}$$

при відліку координати  $y$  від кінця лінії:

$$\begin{cases} \dot{U}(y) = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 Z_C \sin \beta y, \\ \dot{I}(y) = \dot{I}_2 \cos \beta y + j \frac{\dot{U}_2}{Z_C} \sin \beta y. \end{cases}$$

Тоді вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_1 = Z_C \frac{\underline{Z}_2 + jZ_C \operatorname{tg} \beta \cdot l}{Z_C + j\underline{Z}_2 \operatorname{tg} \beta \cdot l}.$$

Режим лінії без втрат визначається властивостями (параметрами) самої лінії і величиною та характером навантаження  $\underline{Z}_2 = Z_2 e^j$  на її кінці.

Перетворимо формулу  $c = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$  для фазової швидкості до іншого вигляду.

Це перетворення проведемо, наприклад, для двопровідної лінії. Ємність одиниці довжини двопровідної лінії, Ф/км:

$$C_0 = \frac{\pi \varepsilon_r \varepsilon_0}{\ln \frac{d}{r_0}},$$

а індуктивність цієї самої лінії, Гн/км:

$$L_0 = \frac{\mu_r \mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0},$$



де  $r_0$  – радіус проводу;

$d$  – відстань між осями проводів.

Підставивши значення  $L_0$  і  $C_0$  в  $c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$ , одержимо

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a \mu_a}},$$

де  $\varepsilon_a, \mu_a$  – абсолютна діелектрична і магнітна проникності середовища між проводами.

Але, як відомо, швидкість світла у вакуумі

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}},$$

і для фазової швидкості можна записати

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}.$$

Для повітряних ліній  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$  і фазова швидкість у вакуумі збігається зі швидкістю світла. Для кабельних ліній  $\varepsilon_r > 1$  і  $c < c_0$ . Аргумент хвильового опору лінії без втрат  $\theta = 0$ , тобто струми прямої і зворотної хвиль збігаються за фазою з напругою.

Рівняння довгої лінії із гіперболічними функціями від комплексного аргументу для лінії без втрат переходять у рівняння з круговими функціями від дійсного аргументу. Якщо задані на-

пруга  $\dot{U}_1$  і струм  $\dot{I}_1$  на початку лінії, то

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_1 \cos \beta x - j \dot{I}_1 z_c \sin \beta x, \\ \dot{I} = -j \frac{\dot{U}_1}{z_c} \sin \beta x + \dot{I}_1 \cos \beta x. \end{cases}$$

Якщо задані напруга  $\dot{U}_2$  і струм  $\dot{I}_2$  у кінці лінії, то

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 z_c \sin \beta y,$$

$$\dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{z_c} \sin \beta y + \dot{I}_2 \cos \beta y,$$

де  $y$  – відстань від кінця лінії.

Вхідний опір лінії

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = z_c \frac{\underline{Z}_n + j z_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l}{\underline{Z}_n j \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} l + z_c}.$$

Переходячи до миттєвих значень при  $\dot{U}_2 = U_2$ ,  
 $\dot{I}_2 = I_2 e^{-j \varphi_2}$ , одержуємо

$$u = U_{2m} \cos \beta \cdot y \sin \omega t + I_{2m} z_c \sin \beta y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} - \varphi_2),$$

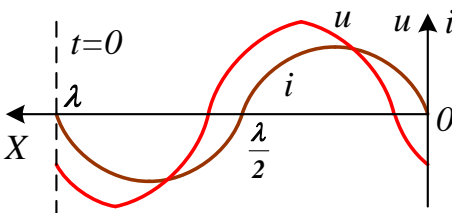
$$i = \frac{U_{2m}}{z_c} \sin \beta \cdot y \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + I_{2m} \cos \beta y \sin(\omega t - \varphi_2).$$

Криві розподіли миттєвих значень струму і напруги уздовж лінії на відстані, що дорівнює довжині хвилі, при  $\varphi_2 > 0$  для трьох моментів часу наведені на рис. 37.1.

Криві і вирази показують, що розподіл напруги і струму уздовж лінії у кожен цей момент є синусоїдальним.

Із рис. 37.1 бачимо, як змінюються криві розподіли струму і напруги в лінії упродовж третини періоду.

Зрозуміло, зміна струму або напруги в часі в будь-якій фіксованій точці лінії також буде синусоїдальною.



Розглянемо ще властивості ліній без втрат завдовжки в чверть і половину довжини хвилі.

$$\text{При } l = \frac{\lambda}{4} \quad i$$

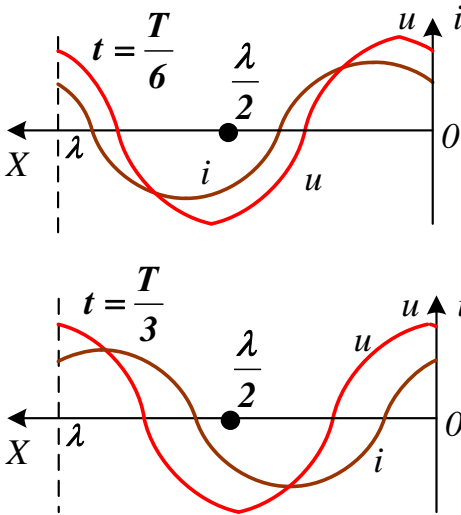


Рисунок 37.1

$$\beta \cdot l = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{2}$$

одержимо

$$\dot{U}_1 = j I_2 z_c ; I_1 = j \frac{\dot{U}_2}{z_c}$$

У цьому разі напруга (струм) на початку лінії пропорційна струму (напрузі) у кінці й випереджає його за фазою на  $90^\circ$ .

Для підтримання постійної напруги у кінці лінії  $\dot{U}_2$ , яка може змінюватися внаслідок зміни навантаження на кінці лінії, на початку лінії необхідно підтримувати постійним не напругу  $\dot{U}_1$  а струм  $\dot{I}_1$ . Для лінії завдовжки в половину хвилі  $l = \frac{\lambda}{2}$  і  $\beta \cdot l = \pi$  маємо

$$\dot{U}_1 = -\dot{U}_2 , s \dot{I}_1 = -\dot{I}_2$$

Тобто напруга і струм на початку лінії однакові за абсолютним значенням і протилежні за фазою до напруги і струму в кінці лінії. Якщо не враховувати зміни фази на  $180^\circ$ , живлення приймача від джерела енергії відбувається таким чином, нібито самої лінії передачі немає.

### 37.2. Застосування ліній без втрат

Лінія без втрат завдовжки у чверть хвилі застосовується як узгоджувальний елемент між деякою лінією без втрат і прийма-

чем із резистивним опором на її кінці  $\underline{Z}_H = R_H$ , що не дорівнює хвильовому опорі лінії.

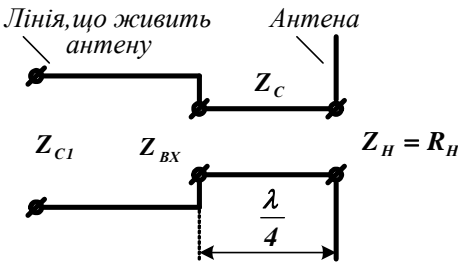


Рисунок 37.2

Наприклад (рис. 37.2), за допомогою лінії завдовжки у чверть хвилі можна узгоджувати лінію (без втрат), що живить антену, із самою антенною, вхідний опір  $\underline{Z}_H = R_H$  якої чисто активний.

Знайдемо вхідний опір чвертьхвильової лінії ( $l = \frac{\lambda}{4}$ ), навантаженої на антену, при  $\underline{Z}_H = R_H$  одержимо

$$\underline{Z}_{ax} = z_c \frac{R_H + jz_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4}}{jR_H \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} + z_c}$$

Оскільки  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$ , то

$$\underline{Z}_{ax} = \frac{z_c^2}{R_H} = z_{ax}$$

Для узгодження лінії живлення з антенною необхідно, щоб  $\underline{Z}_{ax} = z_{c1}$ , де  $z_{c1}$  – хвильовий опір лінії живлення.

Звідси необхідне значення хвильового опору

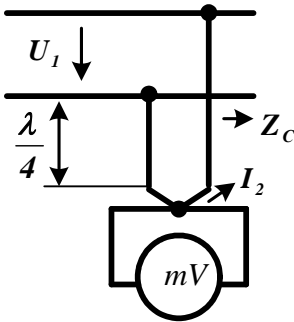
$$z_c = \sqrt{z_{c1} R_H}$$

У цьому разі чвертьхвильова лінія без втрат називається чвертьхвильовим трансформатором, оскільки вона ніби приводить (трансформує) хвильовий опір лінії живлення до опору навантаження.

Лінія без втрат завдовжки у чверть хвилі, замкнена у кінці підігрівачем термопари, тобто практично накоротко, застосовується (як вольтметр) для вимірювання розподілу напруги у дво-

провідній лінії, що живиться генератором із довжиною хвилі  $\lambda$  (рис. 37.3).

Термопара приєднується до мілівольметра, що вимірює її ЕРС. Крім того, дається спеціальна градуовальна крива, тобто залежність ЕРС термопари від струму  $I_2$ , нагріву її спаю.



Співвідношення між напругою в міцності  $U_1$  (початок короткозамкненої лінії) і струмом в пучності  $I_2$  (її кінець) визначається як

$$\dot{U}_1 = \dot{I}_2 jz_c \sin \frac{\beta\lambda}{4}, \quad \text{тобто}$$

$$U_1 = I_2 z_c .$$

Рисунок 37.3

Визначивши за показами мілівольметра струм в пучності чвертьхвильової лінії, за допомогою останньої формули обчислюють напругу на її початку, тобто напругу між проводами досліджуваної лінії. Переміщаючи місце приєднання чвертьхвильової лінії уздовж досліджуваної лінії, можна виміряти розподіл напруги уздовж останньої.

Як бачимо з рис. 37.1, вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат завдовжки  $\lambda/4$  нескінченно великий, тому її під'єднання не впливає на розподіл напруги уздовж досліджуваної лінії.

У сантиметровому і дециметровому діапазонах хвиль для вимірювання комплексного вхідного опору якого-небудь приймача застосовують так звану вимірювальну лінію у вигляді відрізка коаксіальної лінії без втрат.

У коаксіальній лінії прорізають щілину, в яку вводять зонд, що являє собою невеликий стрижень (чи рамку). Щілина вирізається паралельно лініям поверхневого струму в оболонці коаксіальної лінії.

Як показують аналіз і досвід, наявність щілини слабко змінює первинну конфігурацію поля у вимірювальній лінії. Зонд, який витягує невелику частину енергії, що проходить ви-

мірювальною лінією, з'єднується з індикатором. Покази індикатора пропорційні напруженості електричного поля, а отже, і напрузі в цьому перерізі вимірювальної лінії. Переміщаючи зонд уздовж щілини, можна досліджувати поле усередині вимірювальної лінії. У кінці лінії приєднують приймач, комплексний вхідний опір  $\underline{Z}_H$  якого вимірюється. За розподілом напруги уздовж вимірювальної лінії можна визначити опір навантаження (рис. 37.1).

При відліку координати від початку лінії розподіл напруги і струму уздовж лінії визначається рівняннями

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{A}_1 e^{-j\beta x} + \dot{A}_2 e^{j\beta x}, \\ \dot{I} &= \frac{1}{\underline{Z}_c} (\dot{A}_1 e^{-j\beta x} - \dot{A}_2 e^{j\beta x}).\end{aligned}$$

Комплексний коефіцієнт віддзеркалення

$$\underline{\rho} = \frac{\dot{A}_2 e^{j\beta x}}{\dot{A}_1 e^{-j\beta x}} = \frac{A_2 e^{j\psi_2} e^{j\beta x}}{A_1 e^{j\psi_1} e^{-j\beta x}} = \rho e^{j(2\beta x + \psi_2 - \psi_1)},$$

де  $\rho = \frac{A_2}{A_1}$  – його модуль.

Модуль  $\rho$  коефіцієнта віддзеркалення можна обчислити, визначивши коефіцієнт біжучої хвилі напруги:

$$k_{\sigma} = \frac{U_{\min}}{U_{\max}},$$

де  $U_{\min}$ ,  $U_{\max}$  – мінімальна і максимальна напруга в лінії, вимірювані безпосередньо індикатором. У точці  $x = l - x_0$ , де пряма і зворотна хвилі знаходяться в протифазі, маємо  $U_{\min}$ , тому  $U_{\min} = A_1 - A_2$ .

У точці, де вони збігаються за фазою, напруга максимальна:  $U_{\max} = A_1 + A_2$ . Отже,

$$k_{\delta} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{1 - \rho}{1 + \rho},$$

звідки

$$\rho = \frac{1 - k_{\delta}}{1 + k_{\delta}}.$$

Запишемо  $\dot{U}$  і  $\dot{I}$  :

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{-j\beta x} [1 + \rho e^{j(2\beta x + \psi_2 - \psi_1)}],$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-j\beta x} [1 - \rho e^{j(2\beta x + \psi_2 - \psi_1)}].$$

Знайдемо опір навантаження ( $x = l$ ) :

$$\underline{Z}_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_c \frac{1 + \rho e^{j(2\beta \cdot l + \psi_2 - \psi_1)}}{1 - \rho e^{j(2\beta \cdot l + \psi_2 - \psi_1)}}.$$

Оскільки в точці  $x = l - x_0$  мінімуму напруги вектори  $\dot{A}_2 e^{j\beta x}$  і  $\dot{A}_1 e^{-j\beta x}$  знаходяться у протифазі, то

$$\psi_2 + \beta(l - x_0) - [\psi_1 - \beta(l - x_0)] = \pi,$$

і

$$\psi_2 - \psi_1 = \pi - 2\beta(l - x_0).$$

Підставивши значення цієї різниці у вираз для  $\underline{Z}_H$ , одержимо

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_c \frac{1 + \rho e^{j(\pi + 2\beta x_0)}}{1 - \rho e^{j(\pi + 2\beta x_0)}} = \underline{Z}_c \frac{1 - \rho e^{j2\beta x_0}}{1 + \rho e^{j2\beta x_0}}.$$

Враховуючи, що

$$e^{j2\beta x_0} = \frac{1 + jtg\beta x_0}{1 - jtg\beta x_0},$$

і виражаючи  $\rho$  через  $k_{\delta}$ , після перетворень знаходимо, що

$$\underline{Z}_H = z_c \frac{k_{\delta} - jtg\beta x_0}{1 - jk_{\delta}tg\beta x_0}.$$

Таким чином, для обчислення  $Z_H$  необхідно виміряти  $U_{\min}$  і  $U_{\max}$ , тобто коефіцієнт хвилі напруги  $k_\delta$  і відстань  $x_0$  біжучої хвилі від приймача до найближчого мінімуму напруги.

### Контрольні питання і завдання

1. Що називається лінією без втрат? Які властивості вона має?
2. За яких умов в лінії утворюються стоячі хвилі?
3. Визначити вхідний опір лінії без втрат завдовжки в чверть хвилі, навантаженої на навантаження ємності  $C = 50 \text{ нФ}$  при частоті 100 МГц. Хвильовий опір  $Z_C = 500 \text{ Ом}$ .

### Список літератури

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с.: ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.



## Лекція 38

### Тема «Виникнення стоячих хвиль»

#### План

1. Стоячі хвилі.
2. Лінія як чотириполюсник.

#### 38.1. Стоячі хвилі

Розглянемо режими, за яких активна потужність у кінці лінії без втрат дорівнює нулю. Це може бути під час:

- холостого ходу;
- короткого замикання;
- чисто реактивного навантаження.

Під час холостого ходу ( $\dot{I}_2 = 0$  ;  $Z_n = \infty$  )

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y ; \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{z_c} \sin \beta y .$$

При  $\dot{U}_2 = U_2$  миттєві значення напруги і струму

$$u = U_{2m} \cos \beta y \sin \omega t ,$$

$$i = \frac{U_{2m}}{z_c} \sin \beta y \cos \omega t$$

і є рівняння стоячих хвиль. Математично рівняння стоячої хвилі подається множенням двох функцій, причому аргумент однієї залежить лише від часу, а інший – лише від координати.

Стоячою хвилею називається процес, що виходить від накладення прямої і зворотної хвиль з однаковими амплітудами.

Дійсно, при холостому ході  $Z_n = \infty$ ;  $\rho = 1$   $\dot{A}_3 = \dot{A}_4$  .

Вираз для напруги можна подати у вигляді суми (а для струму – у вигляді різниці) напруги (струмів) прямої і зворотної хвиль з однаковими амплітудами:

$$u = \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t + \beta y) + \frac{U_{2m}}{2} \sin(\omega t - \beta y) ;$$

$$i = \frac{U_{2m}}{2z_c} \sin(\alpha x + \beta y) - \frac{U_{2m}}{2z_c} \sin(\alpha x - \beta y).$$

При холостому ході на кінці лінії ( $y = 0$ ) і в точках, віддалених від кінця на відстанях  $y = \frac{k\pi}{\beta} = \frac{k\lambda}{2}$ ,

де  $k$  – ціле число, маємо у будь-який момент часу максимуми напруг, що називаються пучностями, і нулі струму, що називаються вузлами (рис. 38.1).

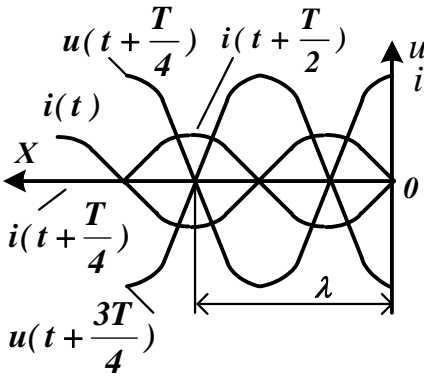


Рисунок 38.1

На відстанях від кінця лінії

$$y = \frac{(2k+1)\pi}{2\beta} = \frac{(2k+1)\lambda}{4}$$

спостерігаються вузли напруги і пучності струму.

Вузли і пучності струму і напруги нерухомі.

Вузли струму збігаються з пучностями напруги і навпаки. Струм випереджає за фазою напругу на  $90^\circ$  на ділянках, для яких знаки  $\sin \beta x$  і  $\cos \beta x$  однакові. ( $0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4}$ ;  $\frac{\lambda}{2} \leq x \leq \frac{3\lambda}{4}$  і т. д.), і відстає за фазою на  $90^\circ$  від напруги, якщо знаки  $\sin \beta x$  і  $\cos \beta x$  протилежні ( $\frac{\lambda}{4} \leq x \leq \frac{\lambda}{2}$ ;  $\frac{3\lambda}{4} \leq x \leq \lambda$  і так далі). Вхідний опір розімкненої лінії без втрат

$$\underline{Z}_x = -jz_c \operatorname{ctg} \beta x = -jz_c \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} x,$$

тобто число реактивне, і характер його визначається довжиною лінії і частотою (чи довжиною хвилі). Зміна абсолютного значення і характеру вхідного опору залежно від довжини лінії показана на рис. 38.2.

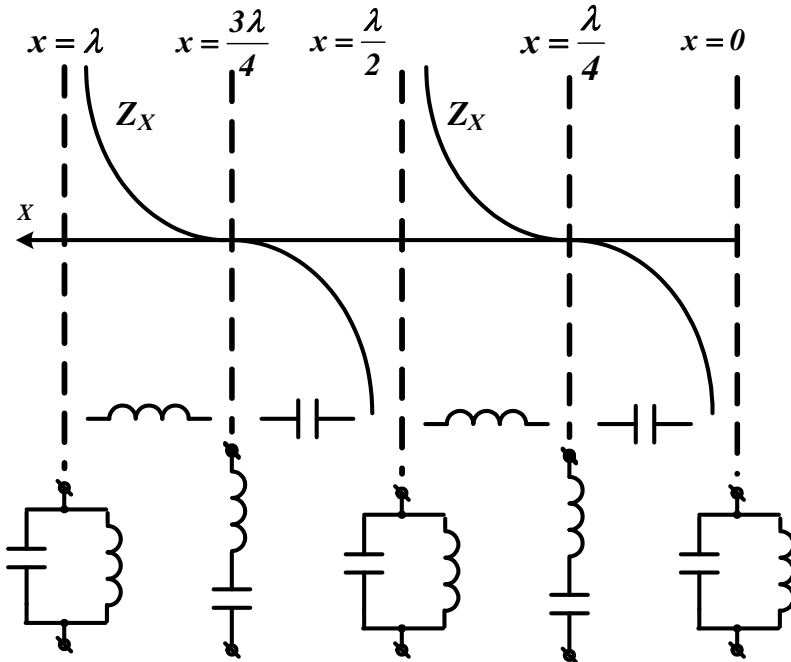


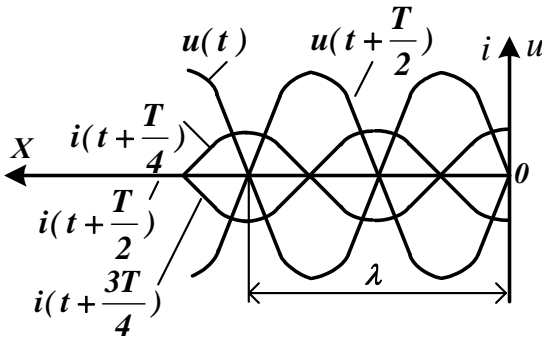
Рисунок 38.2 – Зміна абсолютного значення і характеру вхідного опору залежно від довжини лінії

Від  $x = 0$  до  $x = \lambda/4$ , від  $x = \lambda/2$  до  $x = \frac{3\lambda}{4}$  і т. д. лінія є ємнісним опором, а від  $x = \lambda/4$  до  $x = \lambda/2$ , від  $x = \frac{3\lambda}{4}$  до  $x = \lambda$  і т. д. – індуктивним опором.

При  $x = 0$ ;  $x = \frac{\lambda}{2}$ ;  $x = \lambda$  і т. д. лінія може бути подана

паралельним резонансним контуром, а при  $x = \lambda/4$ ;  $x = \frac{3\lambda}{4}$ ;

$x = \frac{5\lambda}{4}$  і т. д. – послідовним резонансним контуром.



При короткому замиканні

$$(U_2 = 0; Z_n = 0)$$

одержимо

$$\dot{U} = j I_2 z_c \sin \beta y,$$

$$\dot{I} = I_2 \cos \beta y.$$

Рисунок 38.3

Миттєві значення

$$u = I_{2m} z_c \sin \beta y \cos \omega t,$$

$$i = I_{2m} \cos \beta y \sin \omega t,$$

тобто напруга і струм є також стоячими хвилями. Для будь-якого моменту часу на кінці лінії ( $y = 0$ ) і в точках, віддалених

від, нього на ціле число півхвиль ( $\frac{k\lambda}{2}$ ), маємо вузли напруги і

пучності струму, а в точках, віддалених від кінця лінії на відстані, що дорівнюють непарному числу чвертей довжин хвиль

( $\frac{(2k+1)\lambda}{4}$ ), утворюються пучності напруги і вузли струму

(рис. 38.3).

При цьому пучності напруги і пучності струму, а також вузли напруги і вузли струму зміщені на чверть довжини хвилі один відносно одного.

Напруга випереджає за фазою струм на  $90^\circ$  на ділянках лі-

нії, на яких знаки  $\sin \beta x$  і  $\cos \beta x$  однакові ( $0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4}$ ,  $\frac{\lambda}{2} \leq x \leq \frac{3\lambda}{4}$  і т. д.), і відстає на  $90^\circ$  від струму, якщо знаки  $\sin \beta x$  і  $\cos \beta x$  протилежні ( $\frac{\lambda}{4} \leq x \leq \frac{\lambda}{2}$ ;  $\frac{3\lambda}{4} \leq x \leq \lambda$  і так далі).

Вхідний опір короткозамкненої лінії без втрат

$$\underline{Z}_k = jz_c \operatorname{tg} \beta y = jz_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} y$$

\також чисто реактивний і залежить від довжини лінії і частоти може бути індуктивним або ємнісним.

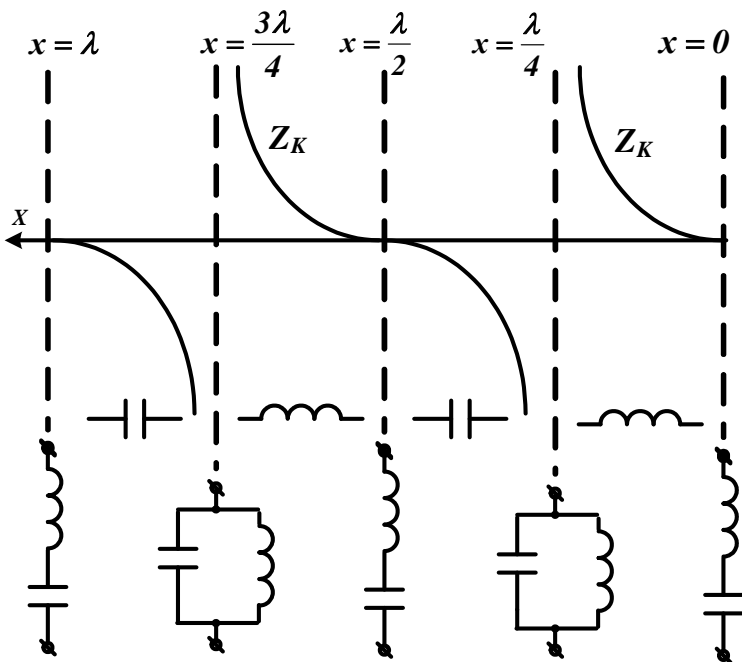


Рисунок 38.4 – Зміна вхідного опору залежно від довжини короткозамкненої лінії

Зміна вхідного опору залежно від довжини короткозамкненої лінії показана на рис. 38.4.

Із цього бачимо, що від  $x = 0$  до  $x = \frac{\lambda}{4}$ , від  $x = \frac{\lambda}{2}$  до  $x = \frac{3\lambda}{4}$  і т. д. лінія є індуктивним опором, а від  $x = \frac{\lambda}{4}$  до  $x = \frac{\lambda}{2}$ , від  $x = \frac{3\lambda}{4}$  до  $x = \lambda$  і т. д. – ємнісним опором.

При  $x = 0$ ;  $x = \frac{\lambda}{2}$ ;  $x = \lambda$  і т. д. лінія може бути замінена послідовним резонансним контуром, а при  $x = \frac{\lambda}{4}$ ;  $x = \frac{3\lambda}{4}$ ;  $x = \frac{5\lambda}{4}$  і т. д. – паралельним резонансним контуром.

Для отримання лінії, узгодженої з навантаженням, доводиться вмикати індуктивні або ємнісні елементи паралельно і послідовно приймачеві. Як такий елемент при високих частотах може застосовуватися короткозамкнена або розімкнена лінія без втрат. Але, скориставшись лінією для узгодження, розумним буде узяти її найменшу довжину, тобто, як показують рис. 38.2 і 38.4, замість ємнісного елемента вибрати розімкнену лінію завдовжки менше  $\frac{\lambda}{4}$ , а замість індуктивного – короткозамкнену – завдовжки менше  $\frac{\lambda}{4}$ . Довжину розімкненої лінії без втрат можна визначити при заданому  $x$  з формули

$$\frac{1}{\omega C} = x_c = z_c \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{\lambda} y .$$

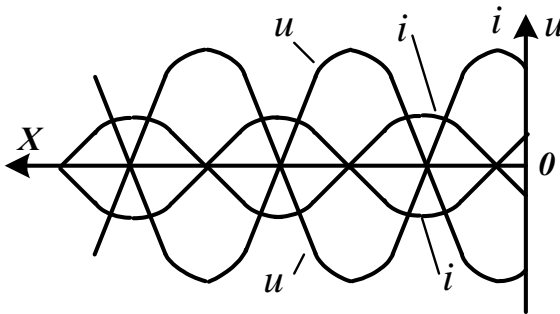
Цю саму довжину  $x$  можна знайти і з кривої, наведеної на рис. 38.2, якщо побудова виконана досить точно. Довжину короткозамкненої лінії без втрат можна визначити при заданому  $x$  із формули

$$\omega L = x_L = z_c \operatorname{tg} \frac{2\pi}{\lambda} y .$$

Довжину  $x$  можна також знайти прямо з кривої  $Z_k$ , наведеної на рис. 38.4.

При чисто реактивному опорі навантаження  $Z_n = \pm jx_n$  у лінії також будуть стоячі хвилі. Дійсно, як було тільки що показано, місткість та індуктивний елементи можуть бути замінені відрізками розімкненої або короткозамкненої лінії.

Отже, лінія з реактивним опором навантаження нічим не відрізняється від розімкненої або короткозамкнутої лінії більшої довжини. Лише у кінці лінії з реактивним опором навантаження не буде ні пучності, ні вузла струму або напруги (рис. 38.5).



У вузлах струм або напруга дорівнюють нулю у будь-який момент часу, тому потужність у них завжди дорівнює

Рисунок 38.5

нулю, і енергія через ці точки проходить не може. Отже, передачу енергії по лінії здійснюють лише біжучі хвилі. У разі стоячих хвиль рух енергії уздовж лінії можливий лише на ділянках між двома суміжними вузлами струму і напруги і пов'язано з обміном енергією між електричним і магнітним полями на кожній з таких ділянок. У розімкненій або короткозамкненій лінії завдовжки дещо менше чверті хвилі рух енергії (обмін енергією між генератором та лінією) відбувається уздовж усієї лінії, оскільки лише на кінці лінії є вузол струму (розімкнена лінія) або вузол напруги (короткозамкнута лінія).

Припустимо тепер, що у лінії без втрат активний опір навантаження  $Z_n = R_n$ . Позначивши  $\frac{z_c}{R_n} = K$  і підставивши у вирази після простих перетворень, отримаємо

$$\dot{U} = \dot{U}_2 [K e^{j\beta \cdot y} + (1 - K) \cos \beta x],$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{z_c} [K e^{j\beta \cdot y} + j(1 - K) \sin \beta x]$$

і при  $\dot{U}_2 = U_2$

$$u = U_{2m} K \sin(\omega t + \beta x) + U_{2m} (1 - K) \cos \beta x \sin \omega t,$$

$$i = \frac{U_{2m}}{z_c} K \sin(\omega t + \beta x) + \frac{U_{2m} (1 - K)}{z_c} \sin \beta x \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}).$$

У цих рівняннях напруга і струм подані сумами двох доданків.

Перший з них – біжуча хвиля, а другий – стояча. Таким чином, якщо лінія не узгоджена із навантаженням ( $K \neq 1$ ), напругу і струм у лінії можна подати сумою біжучої і стоячої хвиль. Чим сильніше  $K$  відрізняється від одиниці в той чи інший бік, тим різкішими виявляться стоячі хвилі. При  $K = 0$  (холостий хід) і  $K = \infty$  (коротке замикання) в лінії спостерігаються лише стоячі хвилі. Чим ближче  $K$  до одиниці, тим різкіше проявляються біжучі хвилі. Стоячі хвилі відсутні при  $K = 1$  або  $R_f = z_c$ , тобто при узгодженому навантаженні.

### 38.2. Лінія як чотириполюсник

Порівнюючи основні рівняння довгої лінії з рівняннями типу А чотириполюсника, можна припустити, що довга лінія є пасивним симетричним чотириполюсником, коефіцієнти якого

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22} = \underline{chyl}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_c \underline{shyl}; \quad \underline{A}_{21} = \frac{\underline{shyl}}{\underline{Z}_c}.$$

Але, як відомо, симетричний чотириполюсник може бути представлений симетричною схемою заміщення, наприклад Т- або П- подібний.

Визначимо спочатку опори  $\underline{Z}_1$  і  $\underline{Z}_2$  симетричної Т- подібної схеми, якою можна замінити довгу лінію при заданій частоті.



Симетрична Т-подібна схема є схемою заміщення симетричного чотириполюсника, якщо однакові які-небудь два коефіцієнти (наприклад,  $\underline{A}_{11}$  і  $\underline{A}_{21}$ ) чотириполюсника і Т-подібної схеми, оскільки пасивний симетричний чотириполюсник задається двома незалежними параметрами.

Для Т- подібної схеми одержимо

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}, \quad \underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

Прирівнявши значення  $\underline{A}_{11}$  і  $\underline{A}_{21}$  для довгої лінії і для Т-подібної схеми, одержимо

$$\underline{Z}_1 = \frac{2(\underline{ch}\underline{\gamma}l - 1)}{\underline{sh}\underline{\gamma}l} \underline{Z}_c,$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{sh}\underline{\gamma}l}.$$

Тепер знайдемо  $\underline{Z}_1$  і  $\underline{Z}_2$  симетричної П- подібної схеми, прирівнявши коефіцієнти  $\underline{A}_{11}$  і  $\underline{A}_{21}$  лінії і схеми.

Таким же розрахунком для П- подібної схеми одержуємо

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}; \quad \underline{A}_{12} = \underline{Z}_1.$$

Прирівнявши коефіцієнти  $\underline{A}_{11}$  і  $\underline{A}_{12}$  для лінії і для П - схеми, одержуємо

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_c \underline{sh}\underline{\gamma}l,$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_c \underline{sh}\underline{\gamma}l}{2(\underline{ch}\underline{\gamma}l - 1)}.$$

### Контрольні питання і завдання

1. За яких умов у лінії утворюються стоячі хвилі?
2. Як знайти параметри елементів Т- подібної схеми заміщення лінії?

3. Як знайти параметри елементів П- подібної схеми заміщення лінії?
4. Як знайти значення коефіцієнтів Т- подібної схеми заміщення лінії?
5. Як знайти значення коефіцієнтів П- подібної схеми заміщення лінії?

### **Список літератури**

1. Основы теории цепей : учебник для вузов / Г. В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В. Нетушил, С. В. Страхов. – 5-е изд., перераб. – Москва : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.: ил.
2. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей : учеб. пособ. / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1990. – 544 с.: ил.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники: электрические цепи : учебник для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. школа, 2008. – 528 с.
4. Буртаев Ю. В. Теоретические основы электротехники : учебник / Ю. В. Буртаев, П. Н. Овсянников. – Москва : КД «Либроком», 2013. – 552 с.

## Зміст

Лекція 1. Елементи електричних кіл.....	3
Лекція 2. Активні елементи електричного кола.....	13
Лекція 3. Методи розрахунку складних резистивних кіл	23
Лекція 4. Методи розрахунку складних резистивних кіл (продовження).....	32
Лекція 5. Основні поняття.....	43
Лекція 6. Властивості ідеальних елементів у колі змінного синусоїдального струму.....	51
Лекція 7. Еквівалентні перетворення електричних кіл змінного струму.....	60
Лекція 8. Застосування законів Кірхгофа. Резонанс.....	66
Лекція 9. Розрахунок складних кіл у синусоїдальному режимі.....	75
Лекція 10. Еквівалентні перетворення індуктивно зв'язаних кіл.....	83
Лекція 11. Алгоритм розрахунку перехідних процесів класичним методом.....	90
Лекція 12. Аналіз перехідних процесів у простих колах класичним методом .....	99
Лекція 13. Аналіз перехідних процесів у розгалужених колах з одним накопичувачем енергії.....	109
Лекція 14. Аналіз перехідних процесів у розгалужених колах із двома накопичувачами енергії.....	117
Лекція 15. Перехідні процеси при дії синусоїдального джерела.....	125
Лекція 16. Операторний метод розрахунку перехідних процесів.....	129
Лекція 17. Складання операторних розв'язків.....	137
Лекція 18. Розрахунок перехідних процесів за допомогою інтеграла Дюамеля.....	148
Лекція 19. Застосування інтеграла Дюамеля.....	154
Лекція 20. З'єднання обмоток трифазних генераторів.....	159
Лекція 21. З'єднання фаз трифазних приймачів.....	166
Лекція 22. Складні кола. Потужність у трифазних колах	174
Лекція 23. Основи методу симетричних складових.....	181

Лекція 24. Розрахунок кола методом симетричних складових.....	189
Лекція 25. Визначення параметрів чотириполюсників.....	199
Лекція 26. Режими роботи чотириполюсника.....	209
Лекція 27. Подання періодичних несинусоїдальних функцій.....	219
Лекція 28. Методи розрахунку кіл несинусоїдального струму.....	229
Лекція 29. Методи розрахунку простих кіл .....	238
Лекція 30. Методи розрахунку нелінійних кіл із декількома джерелами ЕРС.....	246
Лекція 31. Нелінійні магнітні кола постійного струму.....	251
Лекція 32. Методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму.....	261
Лекція 33. Режими роботи нелінійних кіл змінного струму.....	268
Лекція 34. Основні рівняння лінії із розподіленими параметрами.....	278
Лекція 35. Рівняння однорідної лінії.....	288
Лекція 36. Режими роботи лінії .....	296
Лекція 37. Властивості ліній без втрат .....	303
Лекція 38. Виникнення стоячих хвиль .....	313

Навчальне видання

**Лебединський** Ігор Леонідович,  
**Романовський** Володимир Ігорович,  
**Загородня** Тетяна Миколаївна

# **ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЕЛЕКТРОТЕХНІКИ**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

для студентів спеціальності  
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка»  
галузі знань 14 «Електрична інженерія»  
усіх форм навчання

Відповідальний за випуск І. Л. Лебединський  
Редактори: М. Я. Сагун, Н. В. Лисогуб  
Комп'ютерне верстання Т. М. Загородньої

Підписано до друку 20.12.16, поз. 168.  
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 19,1. Обл.-вид. арк. 19,5. Тираж 40 пр. Зам. №  
Собівартість видання      грн    к.

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007