Л.В. Бабіч,
науковий керівник – канд. екон. наук, доц. ***К.В. Ніколаєва,***
Українська академія банківської справи НБУ

ДОВЕДЕННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТІ ЧИСЛА π

Відкривачами числа $\boldsymbol{\pi}$ можна вважати людей доісторичного часу, які при плетінні кошиків помітили, що для того, щоб одержати кошик потрібного діаметра, необхідно брати лозини в 3 рази довші за нього. Археологами знайдено таблички з обпаленої глини в Месопотамії, на яких зафіксований даний факт. Єгиптяни майже за 2000 років до н.е. помітили, що діаметр кола не міститься точно 3 рази в її довжині.

Було введене число $\boldsymbol{\pi}$ – відношення довжини кола до його діаметра і виникла задача про можливість за допомогою циркуля і лінійки побудувати квадрат, що має ту ж площу, що і задане коло. Це, так звана, задача про квадратуру круга. Уважно проаналізувавши побудову за допомогою циркуля і лінійки, можна переконатися, що якщо побудова можлива, то число $\boldsymbol{\pi}$ є алгебраїчним. Тому природно виникає питання про те, чи є число $\boldsymbol{\pi}$ таким. Відповідь на це питання, задане ще в далекій давнині, дав лише в 1882 році Ф. Ліндеман. Він довів, що $\boldsymbol{\pi}$ не є алгебраїчним числом, а є трансцендентним, тобто не є коренем ніякого алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами, а дробова частина його десяткового запису нескінченна і неперіодична. Не існує ні коренів алгебраїчного рівняння з раціональними коефіцієнтами, ні дробу з цілими чисельниками і знаменниками, які б у точності були рівні $\boldsymbol{\pi}$.

Отже, задача про квадратуру кола нерозв’язна.

Це чудове відкриття стало можливим завдяки працям принаймні ще двох великих математиків: Ф. Ліндеман використовував формулу Эйлера $e^{i\pi} = -1$, де i – уявна одиниця, і прийом, яким користався Ш. Ерміт при доведенні трансцендентності числа.

Тож доведемо трансцендентність числа $\boldsymbol{\pi}$, використавши теорему Ліндемана:

Якщо α_1, α_2, ... α_n, є різні між собою алгебраїчні числа, а β_1, β_2, ..., β_n є довільні алгебраїчні числа, що не всі дорівнюють нулю одночасно, то рівність $_1e^{\alpha 1} + \beta_2 e^{\alpha 2} + ... + \beta_n e^{\alpha n} = 0$ неможлива. (Тобто $e^{\alpha 1}$, $e^{\alpha 2}$,..., $e^{\alpha n}$ при зазначених α_i лінійно незалежні над полем алгебраїчних чисел.)

З відомої формули Ейлера $e^{i\varphi} = cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi$ при $\varphi = \boldsymbol{\pi}$ $(cos\ \boldsymbol{\pi} = -1;\ sin\ \boldsymbol{\pi} = 0)$ виходить, що $e^{i\pi} = -1$, або $e^{i\pi} + e^0 = 0$. Звідси, за теоремою Ліндемана, отримуємо, що $\boldsymbol{\pi} i$, а тому й $\boldsymbol{\pi}$ не може бути алгебраїчним. Тобто $\boldsymbol{\pi}$ є трансцендентним числом.

Література

Симоненко І.Б. http:/ www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/987.html.

Бабіч, Л.В. Доведення трансцендентності числа [Текст] Л.В. Бабіч Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України погляд у майбутнє збірник тез доповідей за матеріалами Восьмої науково-практичної конференції студентів (18-22 квітня 2005 р.) та Дев'ятої науково-практичної конференції студентів (27 квітня 2006 р.). - Суми УАБС НБУ, 2006. - С.48-49.