А. Кузнецова,
научный руководитель – канд. экон. наук, доц. ***Т.И. Малютина,***
Украинская академия банковского дела НБУ

ДЕМОКРАТИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Считается, что демократия – это искусство политического маневрирования. Наверное, во многом это так, но далеко не во всем. Цель этой статьи – показать, что и математика играет не последнюю роль в политике. Обсудим проблему выбора, которую мы будем понимать достаточно широко. Это может быть выбор должностного лица, лауреата какого-нибудь конкурса, выбор проекта (конституции, закона, освоения нового региона, стратегии политической или экономической деятельности) и так далее. Главное условие – выбирается один вариант из нескольких альтернативных и обязательно путем голосования. В основе демократических принципов и лежит это правило – наиболее важные решения принимаются путем прямого голосования самых широких слоев общества. Казалось бы, при таком подходе к делу все должны быть удовлетворены, однако на практике получается, что каждый раз после очередного голосования число недовольных вполне сравнимо (если не превышает) с числом удовлетворенных его результатом. Случайно ли это? Попробуем рассмотреть этот вопрос детально.

Некоторые правила голосования

Несколько слов о терминологии. Пусть имеется n избирателей и x кандидатов, например, в депутаты, президенты, мэры и т. д. Каждый из избирателей упорядочивает кандидатуры, определяя для себя наиболее предпочтительного кандидата, затем занимающего второе, третье и т. д. места. Например, если избиратель с номером 6 считает, что наилучшим является кандидат a, затем идет b, а затем c, то мы это запишем в виде его системы индивидуальных предпочтений так:

$$A>B>C$$

и будем говорить, что a лучше, b лучше c с точки зрения 6-го избирателя. Сведя эти системы индивидуальных предпочтений в одну итоговую таблицу, мы получим профиль голосования. Например, пусть число избирателей n=17, а кандидатов четверо: a, b, c и d; и пусть пять избирателей упорядочивают кандидатов так: $a>d>c>b$, трое других: $a>d>b>c$, еще пятеро: $b>c>d>a$, а оставшиеся четверо так: $c>d>b>a$. В таком случае профиль голосования выглядит следующим образом:

Профиль A_1

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	a	a	b	c
	c	b	c	d
	b	c	a	a

Рассмотрим теперь некоторые правила голосования.

1. *Правило относительного большинства*. Каждый избиратель отдает ровно один голос за своего кандидата. Побеждает тот, кто получит наибольшее количество голосов.

Для профиля *A* это означает, что при голосовании *a* получит 8 голосов, *b* – 5 голосов, *c* – 4 голоса. Следовательно, по этому правилу побеждает *a*.

2. *Правило абсолютного большинства*. Каждый избиратель отдает ровно один голос за своего кандидата. Набравший более половины голосов побеждает. Если никто не набрал более половины голосов, то проводится второй тур голосования. При этом во второй тур выходят два кандидата, набравшие наибольшее количество голосов. Во втором туре побеждает тот, кто набрал большинство голосов (а следовательно, и более половины числа отданных голосов).

Что это означает для нашего профиля *A*?

В первом туре число голосов, поданное за кандидатов, равно $n_a = 8$, $n_b=5$, $n_c = 4$. Следовательно, во второй тур проходят *a* и *b*. Вычеркнув из профиля А кандидатов *c* и *d*, не прошедших во второй тур, мы получим следующий профиль второго тура:

5	3	5	4
a	a	b	b
b	b	a	a

Это означает, что во втором туре выигрывает кандидат *b*, за которого подано 9 голосов, тогда как за *a* – лишь 8.

К сожалению, это правило не всегда определяет победителя.

3. *Правило Борда*. Каждый избиратель дает нуль очков кандидату, находящемуся на последнем месте, одно очко – предпоследнему, два очка – находящемуся на третьем месте с конца и т. д. Побеждает кандидат, набравший наибольшую сумму очков.

(Это правило часто используется с небольшой модификацией на спортивных соревнованиях: каждый судья определяет место спортсмена, и побеждает набравший наименьшую сумму мест).

Для профиля *A* имеем:

Число избирателей	5	3	5	4
3	a	a	b	c
Очки 2	d	d	c	d
за места: 1	c	b	d	b

0	b	c	a	a

Это означает, что число очков n_a, набранных кандидатом a, равно $n_a=8\cdot 3+9\cdot 0=24$, аналогично $n_b= 5\cdot 3+7\cdot 1+5\cdot 0=22$, $n_c = 4\cdot 3+5\cdot 2+5\cdot 1+3\cdot 0=27$ и $n_d = 12\cdot 2+5\cdot 1=29$. Таким образом, побеждает d, на втором месте оказывается c, а победители по предыдущим правилам занимают наихудшие места! Взглянем теперь на голосование с другой стороны. Что, например, представляет собой с точки зрения избирателей кандидат d! Из профиля A видно, что 8 избирателей считают его хуже a, а 9 – лучше a. Иначе говоря, и выигрывает дуэль с а девятью голосами против восьми, что мы запишем так:

$$d>a\text{- } 9:8.$$

Аналогично в сравнении с b имеем $d>b$- 12:5, т.е. еще больше d выигрывает в сравнении с победителем голосования по правилу абсолютного большинства.

Результаты других дуэлей:

$$b>a \text{ -}9:8;\ c>a\text{-}9:8$$
$$c>b\text{-}9:8;\ c>d\text{-}9:8$$

4. *Правило Кондорсе*. Победителем по Кондорсе называется такой кандидат x, который выигрывает в парных сравнениях у всех остальных кандидатов. В профиле A победитель по Кондорсе – кандидат c. Отметим, что победителя по Кондорсе может и не оказаться. Рассмотрим, наконец, еще одно правило, обобщающее два из уже перечисленных.

5. *Правило с подсчетом очков*. Пусть число кандидатов равно m. Фиксируем числа $s_1,s_2,\dots,\ s_m$ такие, что $0=s_1\le s_2\le\dots\le s_m$, где $s_m\ge 0$. Избиратели дают s_1 очков своим последним кандидатам, s_2 – предпоследним, s_3 – третьим с конца, ..., s_m – первым кандидатам. Побеждает кандидат, набравший максимальную сумму очков.

При $s_1=s_2=\dots=s_{m-1}=0$ и $s_1=1$ мы получим правило относительного большинства, а при $s_1=0,\ s_2=1$, ..., $s_m=m$ – правило Борда. Таким образом, разные шкалы голосования могут выводить разных кандидатов в победители.

Литература

Пахомов В. Научно-популярный физико-математический журнал “Квант”, № 9, 1992 г.

Кузнецова, А. Демократия с точки зрения математики [Текст] / А. Кузнецова ; науч. руков. Т. И. Малютина // Проблеми і перспективи розвитку банківської системи України: погляд у майбутнє : збірник тез доповідей за матеріалами Восьмої науково-практичної конференції студентів (18-22 квітня 2005 р.) та Дев'ятої науково-практичної конференції студентів (27 квітня 2006 р.)./ Державний вищий навчальний заклад «Українська академія банківської справи Національного банку України».– Суми, 2006. - С. 144-147