# ПРИГАМУВАННЯ СТОХАСТИЧНИХ ОСЦИЛЯЦІЙ ШУМАМИ ЛЕВІ

# SUPPRESSION OF STOCHASTIC OSCILLATIONS BY THE LEVI NOISES

*Шуда І.О., доцент, Давиденко Т.А., студент, СумДУ, Суми*

*Shuda I.O., associate professor, Davydenko T.A., student, SumSU, Sumy*

Як відомо, дія стохастичних джерел (шумів) в нелінійних системах може грати конструктивну роль, яка найяскравіше виявляється в критичній перебудові поведінки таких систем. Важливий приклад вказаної перебудови представляють фазові переходи, перебіг яких приводить до появи особливих точок на фазовій площині; складнішою є коливальна поведінка типу модульованого випромінювання лазера, якому відповідає граничний цикл, що виникає в результаті біфуркації Хопфа.

Згідно теореми про центральне різноманіття, повний опис граничного циклу досягається використанням двох степенів свободи, що відповідають стохастичним змінним $X_i,\ i=1,2$. У результаті еволюція системи визначається рівняннями Ланжевена

$$X_i = f_i dt + g_i dL_i, i=1,2 \qquad (1)$$

з довільними силами і амплітудами шумів $g_i = g_i(x_1, x_2)$, які є функціями обох змінних $x_i,\ i=1,2$; стохастичні доданки відповідають процесам Леві $L_i = L_i(t)$, які визначаються характеристичною функцією

$$\left\langle e^{ik_i dX_i} \right\rangle := e^{\Lambda_i dt} \qquad (2)$$

з інкрементами $\Lambda_i = \Lambda_i(k_1, k_2; x_1, x_2)$ виду

$$\Lambda_i = ik_i(f_i + \gamma_i g_i) - \left|m_i g_i k_i\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_i\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{j=1}^{2} \left|m_j g_j k_j\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_j\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (3)$$

Тут і далі кути асиметрії $\varphi_i$ та модулі $m_i$ визначені рівняннями

$$\begin{aligned} &\tan\left[\varphi_i(\alpha)\right] = \beta_i \operatorname{sgn}(g_i k_i) \tan(\pi\alpha/2), \\ &m_i^{\alpha} = \sqrt{1+\beta_i^2 \tan^2(\pi\alpha/2)}; \end{aligned} \qquad (4)$$

показник Леві $\alpha \in (0,2)$ визначає степеневу асимптотику $x_i^{-(\alpha+1)}$ з $1 \neq \alpha < 2$ (випадок $\alpha = 2$ відповідає розподілу Гаусса), параметри $\beta_i = [-1,+1]$ задають асиметрію процесу Леві, параметри $-\infty < \gamma_i < +\infty$ представляють середні значення стохастичних змінних $X_i$ при $\alpha > 1$, $D \in [0,+\infty)$ – скейлінговий параметр типу коефіцієнта дифузії, кутові дужки означають усереднення за шумами Леві.

Еволюція фур'є образу функції розподілу ймовірностей

$$\tilde{P}(k_1, k_2; t) = \iint dx_1 dx_2 P(x_1, x_2; t) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \qquad (5)$$

описується рівнянням Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \left[ i(f_i + \gamma_i g_i)k_i - \left|m_i g_i k_i\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_i\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{j=1}^{2} \left|m_j g_j k_j\right|^{\frac{\alpha}{2}} e^{-i\varphi_j\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right] \tilde{P}. \qquad (6)$$

Будучи результатом фур'є-перетворення, права частина цього рівняння містить компоненти хвильового вектора $k_i$, $i=1,2$, тоді як сили $f_i = f_i(x_1, x_2)$ і амплітуди мультиплікативних шумів $g_i = g_i(x_1, x_2)$ визначаються координатами $x_1$ і $x_2$.

Згідно рівняння (6), записаному в $x$-представленні, компоненти стаціонарного потоку ймовірності задовольняють умову $\sum_i \partial J_i / \partial x_i = 0$, яка означає, що перша з них $J_1 = J_1(x_2)$ є функцією єдиної змінної $x_2$, і навпаки – для другої $J_2 = J_2(x_1)$. У результаті поведінка системи визначається двома виразами, що визначають єдину функцію розподілу $\tilde{P}(k_1, k_2)$, де повинна виконуватись умова узгодження

$$\left[\left(f_1+\gamma_1 g_1\right)+ie^{-i\varphi_1(\alpha)}\left|m_1 g_1\right|^{\alpha}\left|k_1\right|^{\alpha-2}k_1\right]\delta\left(k_2\right)J_2\left(k_1\right)$$
$$=\left[\left(f_2+\gamma_2 g_2\right)+ie^{-i\varphi_2(\alpha)}\left|m_2 g_2\right|^{\alpha}\left|k_2\right|^{\alpha-2}k_2\right]\delta\left(k_1\right)J_1\left(k_2\right),$$

яка обмежує вибір компонент потоку ймовірностей $J_1\left(k_2\right)$ и $J_2\left(k_1\right)$.

Дослідження отриманих рівнянь стохастичної системи, що мають шуми Леві, показало неможливість коливальної поведінки стаціонарного нерівноважного стану, який відповідає гранично великим значенням густини ймовірності, що реалізуються на граничному циклі, породженому біфуркацією Хопфа.