# КОНТРПРИКЛАДИ В МАТЕМАТИЦІ
# COUNTEREXAMPLES IN MATHEMATICS

*Бойко О.М., студентка, СумДПУ ім. А. С. Макаренка;*
*Маслов О.П., доцент, СумДУ, Суми*
*Boyko O.M., student, SumSPU A.S. Makarenko;*
*Maslov A.P., associate professor, SumSU, Sumy*

У лекційних курсах математики і навіть у підручниках досить рідко наводяться приклади, які можна було б назвати «експериментальними» [4], оскільки вони подають нам знайомі поняття в неочікуваних і крайніх ракурсах. Для обґрунтування істинності якогось твердження проводять певні міркування. Але, щоб переконатися у хибності, досить навести відповідний приклад – «експериментальний». Приклади, які спростовують ті або інші твердження, і називають контрприкладами.

Отже, відмінність між прикладами і контрприкладами полягає в тому, що приклади ілюструють загальні положення, а контрприклади ілюструють хибність певних тверджень [2, с. 4]. Побудова контрприкладу – це класичний спосіб заперечення гіпотези. Наприклад: «Всі прості числа непарні». Очевидно, що контрприкладом до даного твердження є число 2, яке хоч і просте, але парне.

Розглянемо вплив контрприкладів на розвиток поняття функції. Поняття функції у своєму розвитку пройшло складний шлях. Ідея залежності деяких величин сягає корінням давньогрецької науки, але там величини мали лише геометричну природу. Сам термін «функція» виник в 1694 р. в працях німецького вченого Лейбніца, але й у нього поняття функції мало дуже вузький зміст. Тільки учень Лейбніца І. Бернуллі у 1718 р. дав означення функції, незалежне від геометричних образів: «Функцією змінної величини називається кількість, яка утворена будь-яким способом із цієї змінної величини і сталих».

Наступний крок у розвитку поняття функції пов'язаний з іменем Л. Ейлера. Він дає означення функції: «Величини, які залежать від інших так, що зі зміною других змінюються й перші, прийнято називати функціями». Але воно було пов’язане з можливістю виразити функцію формулою. З точки зору математиків XVIII ст. запис

$$\begin{cases} x, \text{ якщо } x < 0 \\ x^2, \text{ якщо } x \geq 0 \end{cases}$$

визначає не одну, а дві функції.

Побудований контрприклад (означення Ейлера) свідчить про те, що означення І. Бернуллі є окремим випадком. У зв’язку з цим, знову постає питання про уточнення поняття функції. Розв’язуючи задачу про коливання струни, Д. Бернуллі отримав відповідь у вигляді так званого тригонометричного ряду. Цю ж задачу розв’язував і французький вчений Ж. д’Аламбер. Розвиток д’Аламбера мав зовсім інший вигляд, ніж у Бернуллі, і міг задаватися різними формулами для різних значень аргументу.

Це стало підґрунтям для запеклої суперечки, в якій взяли участь математики XVIII ст. – Л. Ейлер, Ж. д’Аламбера, Д. Бернуллі та інші. Під час розв’язування даної проблеми обговорювалося поняття функції, зв'язок між функціональною залежністю і можливістю виразити цю залежність формулою.

Остаточне вирішення даного питання було отримано на початку XIX ст., коли Ж. Фур’є показав, що сума безкінечного ряду, членами якого є тригонометричні функції, може на різних проміжках виражатися різними формулами. Й. Діріхле уточнив результати Фур’є: «Змінна величина *y* називається функцією змінної величини *x*, якщо кожному значенню величини *x* відповідає єдине визначене значення величини у. Він розглядав таку функцію.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x - \text{ірраціональне число}, \\ 1, \text{ якщо } x - \text{раціональне число}, \end{cases}$$

яку називають функцією Діріхле. Означення Діріхле було остаточним для числових функцій числового аргументу. З іншого боку, воно дозволило будувати функції з «найхимерніщими» властивостями – було побудовано ряд контрприкладів до поширених переконань про те, що таких функцій не існує.

Анрі Пуанкаре в [3, с. 357] пише: «Протягом піввіку ми бачили, як виникло безліч химерних функцій; ці нові функції немов намагались якомога менше походити на ті благородні функції, які для чогось та придатні. Такі, наприклад, функції неперервні, але без похідних. Більше того, з логічного погляду саме ці химерні функції і є загальними; а ті функції, котрі ми знаходимо без довгих пошуків, становлять начебто окремий випадок».

Подальший розвиток математики показав хибність поглядів А. Пуанкаре та ряду інших учених відносно «химерних» функцій. Побудова та аналіз таких функцій, а також докладний аналіз таких понять, як довжина, площа, множина, інтеграл, простір, відображення сприяли побудові теорії функцій дійсної змінної, а згодом, і функціонального аналізу, який є джерелом розвитку математичної фізики, квантової механіки [1, с. 118 – 120].

Все це дає підстави зробити висновок, що побудова контрприкладів сприяла розвитку ряду важливих як для теорії, так і для практики галузей сучасної науки.

Список літератури

1.Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. 3-е издание. – М.: МЦНМО, 2005. – 150 с.
2.Кужель О.В. Контрприклади в математиці. – К.: Рад. Школа, 1988. – 96 с.

3.Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 467 с.
4.Шибинский В. М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2007. – 543 с.