

НЕСКОЛЬКО ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ УТОЧНЁННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
УПРУГОЙ ЛИНИИ

SEVERAL APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE IMPROVED ELASTIC CURVE DIFFERENTIAL
EQUATION

Павленко И.В., Жигилий Д.А., ассистенты, Ткач П.Ю., студент,
СумГУ, Сумы

Pavlenko I.V., Zhigiliy D.A., assistants, Tkach P.Y., student, SumSU, Sumy

При расчёте конструкций важна не только её прочность, но и жёсткость – деформация в заранее заданных пределах. Это заставляет оценивать влияние разного рода допущения, принятые при выводе формул, в частности, для деформаций балки.

Под действием внешних сил, расположенных в одной из главных плоскостей прямой балки, её ось искривляется в той же плоскости; при этом точки оси перемещаются. Изогнутая ось балки называется упругой линией, а перемещения точек оси балки по нормали к её недеформированной оси называются прогибами балки.

При изгибе сечения балка приобретает некоторые прогибы и углы поворота. Для адекватного их определения следует решить задачу Коши для дифференциального уравнения упругой линии, в нашем случае – двухопорной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 1):

$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}$, где ρ - радиус кривизны оси, M_x - функция изгибающих моментов, а EI_x - жёсткость сечения балки при изгибе в плоскости действия M_x .

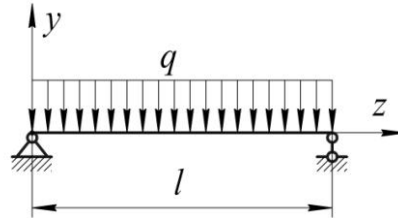


Рисунок 1 - Двухопорная балка, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой

Из математического анализа известна зависимость $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$. В сопротивлении материалов принято

линейное приближение: $\frac{1}{\rho} \approx y''$, следовательно $y'^2 \ll 1$ и $y' = tg(\theta) \approx \theta$. Представляет интерес оценка влияния

этих допущений на прогибы балки. Ранее в работе [1] точная зависимость $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ раскладывалась в

полиномиальный ряд. В данной работе предлагается первоначальная замена переменной $y' = tg(\theta)$, что

соответствует геометрическому смыслу производной, $\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}} = \frac{tg'(\theta)}{\sqrt{(1+tg^2(\theta))^3}} = \cos(\theta)\theta'$ с

последующим разложением в ряд Маклорена по углу поворота сечения θ :

$$\begin{aligned} \frac{M_x}{EI_x} = & \theta'(\cos(0) + \frac{\cos'(0)}{1!}(\theta-0) + \frac{\cos''(0)}{2!}(\theta-0)^2 + \frac{\cos'''(0)}{3!}(\theta-0)^3 + \frac{\cos^{IV}(0)}{4!}(\theta-0)^4 + \\ & + \frac{\cos^V(0)}{5!}(\theta-0)^5 + \frac{\cos^{VI}(0)}{6!}(\theta-0)^6 + \frac{\cos^{VII}(0)}{7!}(\theta-0)^7 + \frac{\cos^{VIII}(0)}{8!}(\theta-0)^8 + \\ & + \frac{\cos^X(0)}{9!}(\theta-0)^9 + \frac{\cos^X(0)}{10!}(\theta-0)^{10} + \frac{\cos^{XI}(0)}{11!}(\theta-0)^{11} + \frac{\cos^{XII}(0)}{12!}(\theta-0)^{12} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Для двухопорной балки

$$\text{нагруженной равномерно распределенной нагрузкой: } M_x(z) = \frac{q}{2}(l^2 - z^2) = \frac{ql^2}{2} \left(1 - \left(\frac{z}{l} \right)^2 \right).$$

Решаются уравнения 2-х приближений:

$$\frac{M_x(z)}{EI_x} = \theta' \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} \right); \quad \frac{M_x(z)}{EI_x} = \theta' \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} - \frac{\theta^6}{720} \right).$$

Последовательным интегрированием с граничными условиями $y(0)=0$ и $y(l)=0$ численно решается задача Коши для этих двух уточненных уравнений, если $y' = tg(\theta)$. Дана процентная оценка расхождения

прогибов в зависимости от $\frac{ql^3}{2EI_x}$.

Список литературы

1. Жигилий Д.А., Ткач П.Ю. Определение перемещений в балках постоянного сечения методом непосредственного интегрирования уточнённого дифференциального уравнения упругой линии. Матеріали науково-технічної конференції, співробітників, аспірантів і студентів факультету технічних систем та енергоефективних технологій. - Суми: Вид-во СумДУ, 2009. - Ч. II, Вип. 11. - 139.