

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Шосткинський інститут

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»  
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»  
заочної форм навчання  
У п'яти частинах  
Частина 2

**Складні лінійні та нелінійні електричні кола  
змінного струму**

Затверджено  
на засіданні кафедри системоте-  
хніки та інформаційних техноло-  
гій як конспект лекцій з дисци-  
пліни «Теорія електричних та  
магнітних кіл».

Протокол № 1 від 31.08.2009 р.

Суми  
Видавництво СумДУ  
2010

Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій у п'яти частинах. – Частина 2: Складні лінійні та нелінійні електричні кола змінного струму / Укладач А.В. Булашенко. – Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 175с.

Кафедра системотехніки та інформаційних технологій

## Зміст

	С.
Вступ .....	6
1 ТРИФАЗНІ КОЛА .....	7
1.1 Загальні співвідношення у трифазних колах .....	7
1.2 З'єднання у зірку і трикутник, фазні та лінійні величини	10
1.3 Розрахунки трифазних кіл .....	14
1.4 Деякі режими роботи трифазних кіл .....	19
1.5 Вирази фазних напруг трифазної системи зірка – зірка без нейтрального проводу через лінійну напругу .....	26
1.6 Потужності у трифазних колах .....	27
1.7 Колове обертове магнітне поле трифазного струму.....	28
2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ ДЖЕРЕЛАМИ ПЕРІОДИЧНИХ НЕГАРМОНІЧНИХ ВПЛИВІВ .....	32
2.1 Максимальне, середнє діюче значення несинусоїдальної функції.....	38
2.2 Коефіцієнти, що характеризують періодичні несинусоїдальні функції.....	41
2.3 Активна та повна потужність несинусоїдального струму	42
2.4 Розрахунки лінійного електричного кола при несинусоїдальних періодичних впливах.....	44
2.5 Вищі гармоніки у трифазних колах.....	50
3 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ .....	54
3.1 Класифікація чотириполюсників .....	55
3.2 Основні рівняння чотириполюсників.....	56
3.3 Режим зворотного живлення чотириполюсників .....	62
3.4 Визначення А-параметрів за допомогою режимів короткого замикання та холостого ходу .....	63
3.5 Навантажувальний режим чотириполюсника .....	65
3.6 Еквівалентні схеми заміщення чотириполюсника .....	66
3.7 Симетричний чотириполюсник.....	68
3.8 Родинні чотириполюсники .....	68
3.9 Характеристичні параметри чотириполюсника.....	70
3.10 Рівняння чотириполюсника у гіперболічних функціях..	72

3.11	Режим узгодженого навантаження чотириполюсника ...	73
3.12	Передавальні функції чотириполюсника .....	76
3.13	З'єднання чотириполюсників.....	78
3.13.1	Каскадне з'єднання .....	78
3.13.2	Паралельне з'єднання .....	80
3.13.3	Послідовне з'єднання .....	81
4	<b>ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ</b> .....	83
4.1	Визначення довгої лінії.....	83
4.2	Диференціальні рівняння для однорідної лінії .....	85
4.3	Розв'язання телеграфних рівнянь .....	87
4.4	Падаючі та відбиті хвилі у лінії.....	91
4.5	Фазова швидкість і довжина хвилі.....	94
4.6	Лінія без спотворень .....	95
4.7	Узгоджене навантаження.....	96
4.8	Лінія без втрат .....	99
4.9	Режими неробочого ходу та короткого замикання.....	100
4.10	Режими хвиль у лінії.....	106
4.11	Перехідні процеси у довгих лініях .....	111
5	<b>НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ТА МАГНІТНІ КОЛА</b> .....	120
5.1	Загальні відомості про нелінійні кола.....	120
5.2	Нелінійні елементи .....	122
5.3	Статистичний та диференціальний опори .....	125
5.4	Заміна нелінійного елемента лінійним опором та ЕРС ..	125
5.5	Розрахунок режиму нелінійних резистивних кіл .....	126
5.6	Магнітні кола .....	130
5.6.1	Основні поняття магнітного кола.....	130
5.6.2	Основні закони магнітних кіл постійного струму ...	132
5.6.3	Розгалужене магнітне коло постійного струму .....	137
5.7	Магнітні кола змінного струму з феромагнітними елементами.....	140
5.7.1	Деякі особливості кіл змінного струму із феромагнітними елементами.....	140
5.7.2	Котушка із феромагнітним осердям .....	143
5.8	Явище ферорезонансу.....	147
5.8.1	Ферорезонанс напруг .....	148

5.8.2 Ферорезонанс струмів .....	150
5.9 Трансформатор із феромагнітним осердям.....	152
5.10 Магнітний підсилювач.....	156
5.11 Феромагнітні стабілізатори напруги .....	159
5.12 Приклади розв'язування задач .....	163
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ .....	172

## Вступ

Метою конспекта лекцій на тему «Складні лінійні та нелінійні електричні кола змінного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» є розгляд теоретичних питань щодо розрахунку складних електричних кіл трифазного струму, несинусоїдального струму, чотириполюсників, режимів роботи лінійних електричних кіл із розподіленими параметрами та методи розрахунку нелінійних кіл постійного та змінного струмів.

Опрацювання конспекта лекцій і виконання розрахункового завдання сприяють набуттю навичок практичного застосування розрахункових методів складних електричних кіл.

Конспект лекцій містить методи розрахунку складних електричних кіл трифазного струму, несинусоїдального струму та чотириполюсників, методи розрахунку довгих ліній та нелінійних електричних та магнітних кіл.

Для полегшення сприйняття студентами матеріалу кожен розділ після відповідного теоретичного викладення супроводжується прикладами.

Конспект лекцій може бути використаний як допоміжний засіб для проведення лекційних та практичних занять.

## 1 ТРИФАЗНІ КОЛА

### 1.1 Загальні співвідношення у трифазних колах

Трифазні кола знайшли велике поширення в електропостачанні промисловості, транспорту та сільського господарства внаслідок їх економічних і енергетичних переваг.

Під **трифазним колом** (системою) розуміють сукупність трифазного джерела (генератора), навантаження та з'єднувальних проводів.

Трифазний генератор

Відомо, що при обертанні провідника в рівномірному магнітному полі у ньому наводиться ЕРС

$$e = E_m \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.1)$$

Закріпимо жорстко на одній осі три однакові котушки (обмотки), зміщені одна щодо одної у просторі на  $\frac{2\pi}{3}$  ( $120^\circ$ ) і почнемо їх обертати в рівномірному магнітному полі з кутовою швидкістю  $\omega$  (рис. 1.1).

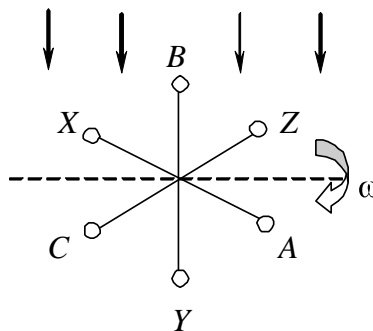


Рисунок 1.1

При цьому у котушці А буде наводитися

$$e_A = E_m \sin(\omega t + \psi) \quad (1.2)$$

Такі самі значення ЕРС виникнуть у котушках  $B$  і  $C$ , але відповідно через  $120^\circ$  і  $240^\circ$  після початку обертання, тобто

$$\begin{aligned} e_B &= E_m \sin(\omega t + \psi - 120^\circ) \\ e_C &= E_m \sin(\omega t + \psi - 240^\circ) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Сукупність трьох котушок (обмоток), що обертаються на одній осі з кутовою швидкістю  $\omega$ , у яких наводяться ЕРС, що дорівнюють за модулем і зсунуті одна від одної на кут  $120^\circ$ , називають *симетричним трифазним генератором*. Кожна котушка генератора – це *фаза* генератора. У генераторі на рис. 1.1 фаза  $B$  «випливає» за фазою  $A$ , фаза  $C$  – за фазою  $B$ . Така послідовність чергування фаз називається *прямою послідовністю*. При зміні напрямку обертання генератора спостерігається *зворотна послідовність* чергування фаз. Прямої послідовності на підставі співвідношень (1.2, 1.3) відповідає векторна діаграма ЕРС, зображена на рис. 1.2 а, для зворотної – векторна діаграма ЕРС на рис. 1.2 б.

Надалі всі міркування з розрахунку трифазних кіл будуть стосуватися тільки трифазних систем із прямою послідовністю проходження генераторних ЕРС.

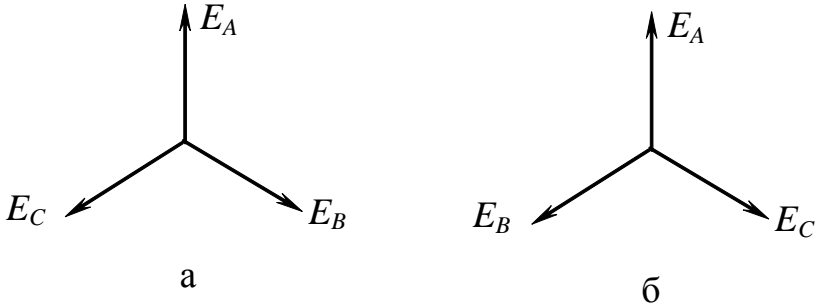


Рисунок 1.2

Перейдемо від миттєвих значень ЕРС до їх комплексів:



$$\begin{aligned}
 e_A &= E_m \sin(\omega t + \psi) \rightarrow \dot{E}_A = E_A e^{j\psi}, \\
 e_B &= E_m \sin(\omega t + \psi - 120^\circ) \rightarrow \dot{E}_B = \dot{E}_A e^{-j120^\circ} = \dot{E}_A e^{j240^\circ}, \\
 e_C &= E_m \sin(\omega t + \psi - 240^\circ) \rightarrow \dot{E}_C = \dot{E}_A e^{-j240^\circ} = \dot{E}_A e^{j120^\circ}.
 \end{aligned}
 \tag{1.4}$$

Сумі миттєвих ЕРС відповідає сума комплексів цих ЕРС

$$e_A + e_B + e_C \rightarrow \dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0. \tag{1.5}$$

Графік зміни миттєвих значень ЕРС при  $\psi = 90^\circ$  поданий на рис. 1.3. Алгебраїчна сума ЕРС дорівнює нулю.

Крайнім точкам котушок (обмоток) дають назву *кінець* і *початок*. Початки котушок позначають  $A, B, C$ , кінці відповідно  $X, Y, Z$  (рис. 1.4 а).

Фазні обмотки трифазного генератора можуть бути зображені у вигляді джерел ЕРС  $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$  (рис. 1.4 б).

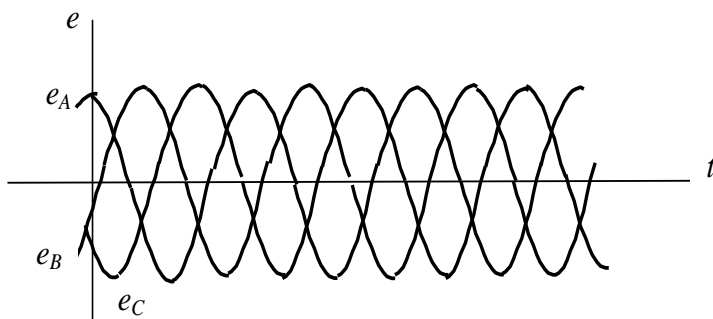
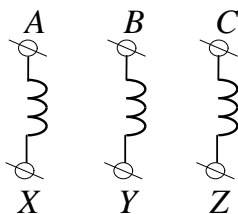
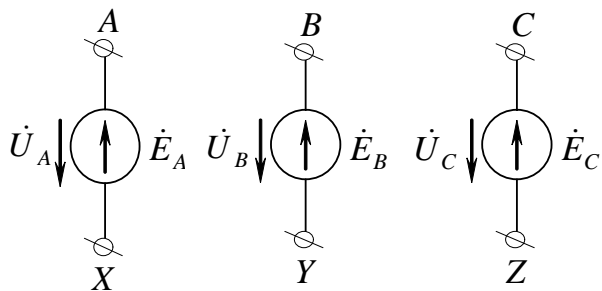


Рисунок 1.3



а



б  
Рисунок 1.4

**1.2 З'єднання у зірку і трикутник, фазні та лінійні величини**

У трифазних колах застосовують два види з'єднань генераторних обмоток – у зірку і трикутник (рис. 1.5).

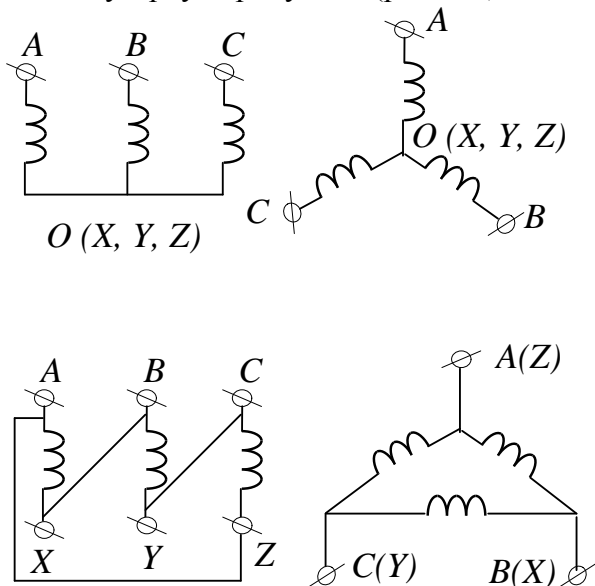


Рисунок 1.5

При з'єднанні в зірку всі кінці фазних обмоток з'єднують в один вузол, що має називу *нейтральної*, або *нульової точки*, і позначають, як правило, літерою  $O$ . При з'єднанні у трикутник обмотки генератора з'єднують так, щоб початок однієї з'єднувалося з кінцем іншої. ЕРС у котушках у цьому разі позначають відповідно  $\dot{E}_{BA}$ ,  $\dot{E}_{CB}$ ,  $\dot{E}_{AC}$ . Якщо генератор не під'єднаний до навантаження, то по його обмотках не проходять струми, тому що сума ЕРС дорівнює нулю.

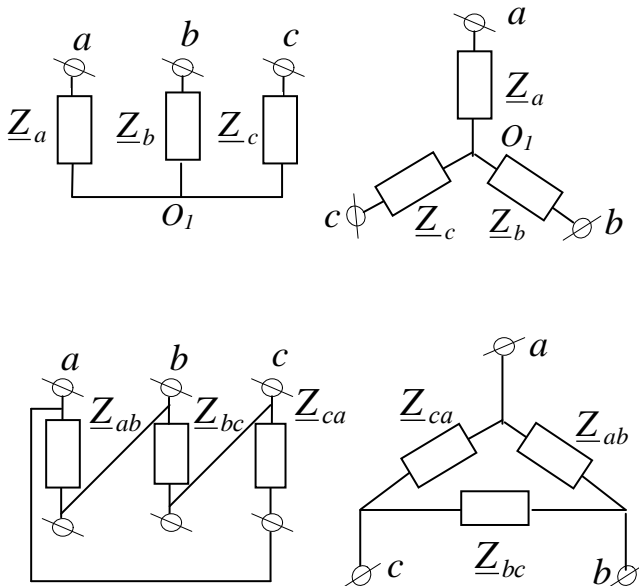


Рисунок 1.6

У зірку та трикутник включаються й опори навантаження так, як показано на рис. 1.6.

Фазні опори  $\underline{Z}_a$ ,  $\underline{Z}_b$ ,  $\underline{Z}_c$ ,  $\underline{Z}_{ab}$ ,  $\underline{Z}_{bc}$ ,  $\underline{Z}_{ca}$ , з'єднані у трикутник або у зірку, називають *фазами навантаження*.

Існує п'ять видів з'єднання генераторів з навантаженням: зірка – зірка з нульовим проводом, зірка – зірка без нейтрального проводу, трикутник – трикутник, зірка – трикутник і трикутник – зірка (рис. 1.7).

З'єднувальні проводам між початками фаз навантаження та початками фаз генератора називають **лінійними проводами**.

Як правило, початок фаз генераторів позначають заголовними літерами, а навантаження – прописними. Провід, що з'єднує нульові точки генератора і навантаження, називають *нульовим, або нейтральним, проводом*.

Напрямок струмів у лінійних проводах прийнято вибирати від генератора до навантаження, а в нульовому – від навантаження до генератора.

На рис. 1.7  $\dot{U}_{ab(AB)}, \dot{U}_{bc(BC)}, \dot{U}_{ca(CA)}, \dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$  – лінійні напруги та струми.

$\dot{U}_{a(A)}, \dot{U}_{b(B)}, \dot{U}_{c(C)}, \dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca}$  – фазні напруги та струми.

Лінійні напруги (напруги між лінійними проводами) – це різниця відповідних фазних напруг:

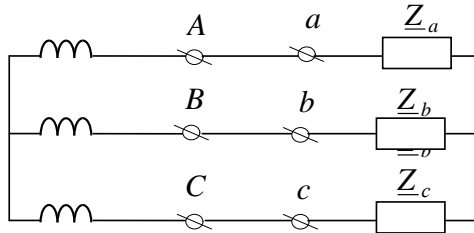
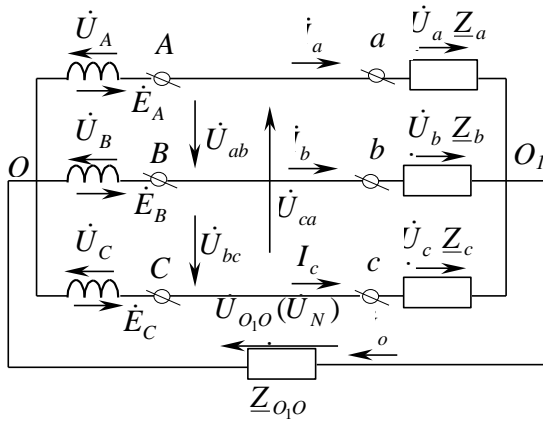
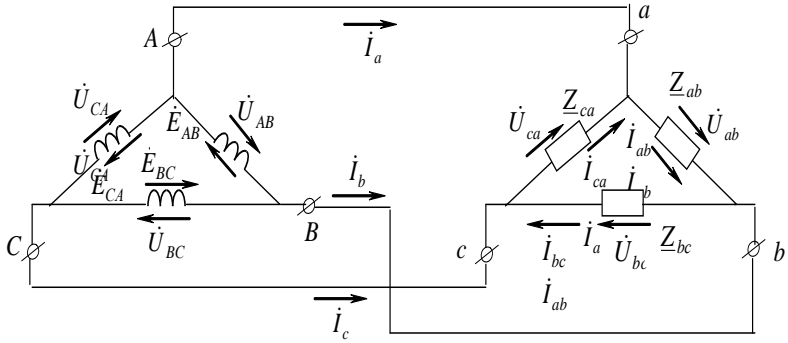
$$\dot{U}_{ab} = \dot{U}_a - \dot{U}_b, \quad \dot{U}_{bc} = \dot{U}_b - \dot{U}_c, \quad \dot{U}_{ca} = \dot{U}_c - \dot{U}_a. \quad (1.6)$$

Лінійні струми при прийнятих напрямках струмів (рис. 1.7) визначаються за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}, \quad \dot{I}_b = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}, \quad \dot{I}_c = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (1.7)$$

Таким чином, фазні напруги на генераторі – це напруги, прикладені до обмоток генератора  $\dot{U}_{AO}, \dot{U}_{BO}, \dot{U}_{CO}$ , а напруги фаз навантаження – це напруги на відповідних опорах  $\dot{U}_{aO_1}, \dot{U}_{bO_1}, \dot{U}_{cO_1}$ . Фазні струми – це струми, що проходять у фазах генератора або навантаження. Необхідно зазначити, що фазні та лінійні напруги в трикутнику однаков, як і фазні та лінійні струми у зірці.

Сукупність відповідної фази генератора, з'єднувального провода та фази навантаження називають *фазою трифазного кола*. (Не плутати з початковою фазою гармонічної функції!).



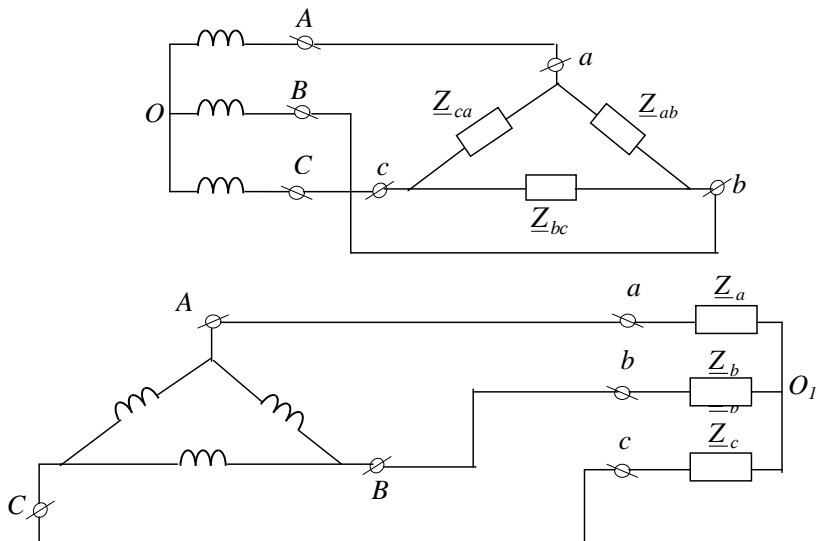


Рисунок 1.7

### 1.3 Розрахунки трифазних кіл

Розглянемо розрахунки трифазного кола зірка – зірка з нейтральним проводом (рис. 1.7). Розрахунки такого кола можна здійснювати будь-якими відомими методами розрахунків розгалужених кіл. Найчастіше раціонально застосовувати метод вузлових потенціалів, тому що в цій схемі два вузли  $O$  і  $O_1$ , і для визначення невідомих струмів і напруг потрібно скласти одне рівняння. Візьмемо потенціал крапки  $O_1$  такими, що дорівнює нулю, тоді напруга нейтралі

$$\dot{\Phi}_{O_1} = \dot{U}_{O_1O} = \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_a + \dot{E}_B \underline{Y}_b + \dot{E}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_o}, \quad (1.8)$$

де  $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$  – комплекси ЕРС відповідних фаз генератора,  $\dot{E}_A = \dot{U}_A, \dot{E}_B = \dot{U}_B, \dot{E}_C = \dot{U}_C$ ;  $\underline{Y}_a, \underline{Y}_b, \underline{Y}_c, \underline{Y}_o$  – комплексні

провідності відповідних фаз навантаження та нульового проводу.

Напруга на фазах навантаження

$$\begin{aligned} \dot{U}_a &= \dot{I}_a \underline{Z}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{O_1O}, & \dot{U}_b &= \dot{I}_b \underline{Z}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{O_1O}, \\ \dot{U}_c &= \dot{I}_c \underline{Z}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{O_1O}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Струми у фазах

$$\dot{I} = \underline{Y}_a \dot{U}_a, \quad \dot{I}_b = \underline{Y}_b \dot{U}_b, \quad \dot{I}_c = \underline{Y}_c \dot{U}_c. \quad (1.10)$$

Розглянемо кілька випадків.

1. Відсутній опір у нейтральному проводі  $\underline{Z}_O = 0$ , тоді  $\dot{U}_{O_1O} = 0$ .

2. Опір навантаження однаковий  $\underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \underline{Y}_c$ , навантаження симетричне. З (1.8) випливає, що у цьому випадку також напруга нейтралі  $\dot{U}_{O_1O} = 0$ . Лінійні струми відповідно однакові

$$\dot{i}_a = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_a} = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a}, \quad \dot{i}_b = \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_b} = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b}, \quad \dot{i}_c = \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_c} = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c}. \quad (1.11)$$

Враховуючи співвідношення (1.11), векторні діаграми напруг на навантаженні та на генераторі збігаються і мають вигляд, показаний на рис. 1.8 а.

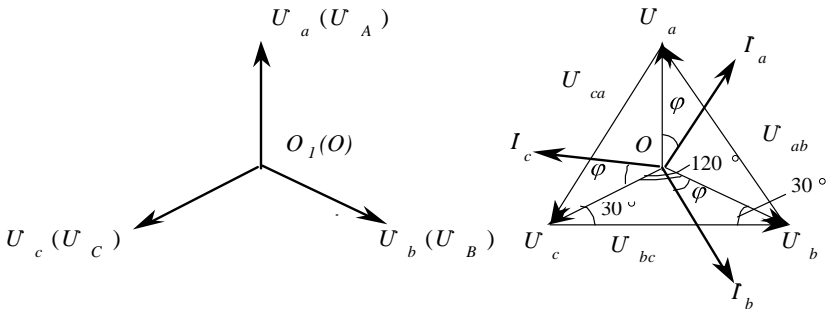


Рисунок 1.8

При активно-індуктивному характері навантаження  $\varphi > 0$ , векторні діаграми струмів і напруг на навантаженні показані на рис. 1.8 б. Враховуючи співвідношення між фазними та лінійними напругами, одержимо, з'єднуючи відповідні точки "a" з "b", "b" з "c", "c" з "a", лінійні напруги  $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$ . З діаграм на рис. 1.8 очевидно, що модулі всіх лінійних напруг однакові  $U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = U_{\ell}$ .

Розраховувавши трикутник, утворений, наприклад, фазними напругами  $\dot{U}_b, \dot{U}_c$  та лінійним  $\dot{U}_{bc}$ , одержимо

$$U_{bc} = U_{\ell} = U_b \cdot 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_b = \sqrt{3} U_{\phi}, \quad (1.12)$$

де  $U_{\phi} = U_a = U_b = U_c$  – модулі фазної напруги симетричного навантаження.

3. Нейтральний провід відсутній, що відповідає схемі «зірка – зірка без нейтрального проводу». Розрахунки здійснюються за формулами (1.8, 1.9) з урахуванням того, що  $\underline{Y}_0 = 0$ .

У схемі «зірка – зірка без нейтрального проводу» із симетричним генератором і несиметричним навантаженням у випадку рівності комплексних опорів тільки у двох фазах напругу нейтралі можна визначити зі співвідношень

$$\dot{U}_{00_1} = \dot{U}_A \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_a}{\underline{Z} + 2\underline{Z}_a} \angle = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c \neq \underline{Z}_a \angle$$

$$\dot{U}_{00_1} = \dot{U}_B \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_b}{\underline{Z} + 2\underline{Z}_b} \angle = \underline{Z}_a = \underline{Z}_c \neq \underline{Z}_b \angle$$

$$\dot{U}_{00_1} = \dot{U}_C \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_c}{\underline{Z} + 2\underline{Z}_c} \angle = \underline{Z}_a = \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c \angle$$

Покажемо справедливність цих формул на прикладі  $\underline{Z} = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c \neq \underline{Z}_a$ .



$$\begin{aligned} \dot{U}_{00_1} &= \frac{\dot{U}_A \left( \frac{1}{\underline{Z}_a} + \frac{1}{\underline{Z}} \left( -0,5 - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{1}{\underline{Z}} \left( -0,5 + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)}{\frac{1}{\underline{Z}_a} + \frac{1}{\underline{Z}} + \frac{1}{\underline{Z}}} = \\ &= \dot{U}_A \frac{\underline{Z} - \underline{Z}_a}{\underline{Z} + 2\underline{Z}_a}. \end{aligned}$$

При з'єднанні навантаження у трикутник струми в його фазах визначаються за законом Ома:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}. \quad (1.13)$$

Лінійні струми знаходять за першим законом Кірхгофа:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_b = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_c = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}. \quad (1.14)$$

Оскільки лінійні напруги на навантаженні дорівнюють лінійним напругам на генераторі, які, у свою чергу, однакові відповідним ЕРС на обмотках генератора, векторна діаграма лінійних напруг на навантаженні (рис. 1.9) повністю збігається з векторною діаграмою генераторних ЕРС, наведених на рис. 1.2.

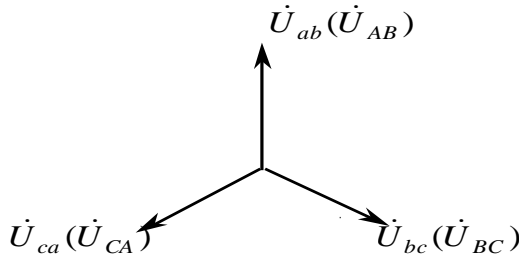


Рисунок 1.9

Нехай навантаження симетричне і носить активно-індуктивний характер, тоді векторні діаграми напруг, фазних і лінійних струмів мають вигляд, показаний на рис. 1.10.

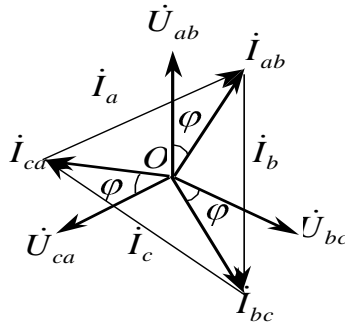


Рисунок 1.10

За допомогою отриманої діаграми можна визначити, що модулі лінійних струмів однакові (вони є сторонами рівностороннього трикутника)

$$I_a = I_b = I_c = I_{\text{л}}.$$

З розрахунку трикутників, утворених двома фазними струмами (бісектриси рівностороннього трикутника) і лінійним струмом, випливає, що

$$I_{\text{л}} = I_{\phi} 2 \cos 30^{\circ} = \sqrt{3} I_{\phi}. \quad (1.15)$$

При несиметричному навантаженні векторні діаграми струмів мають найрізноманітніший вигляд. Приклад такої діаграми наведений на рис. 1.11, де  $Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}$ .

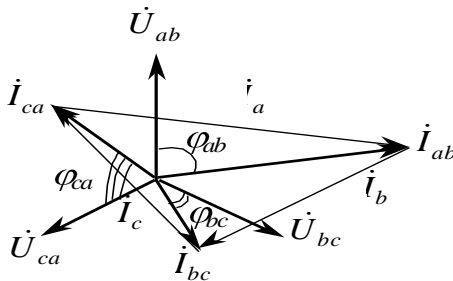


Рисунок 1.11

## 1.4 Деякі режими роботи трифазних кіл

Розглянемо режими роботи трифазних кіл на прикладі з'єднання «зірка – зірка» і з'єднання навантаження у трикутник.

Розглянемо три режими роботи схеми, зображеної на рис. 1.12.

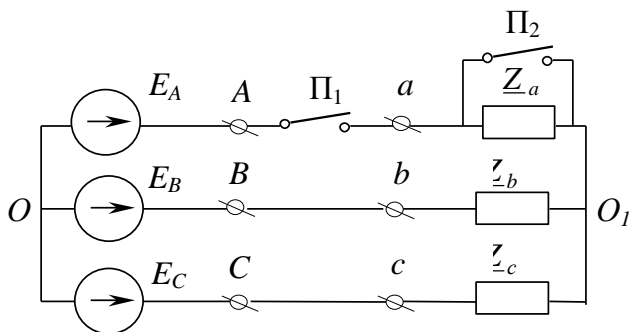


Рисунок 1.12

1.  $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$ , перемикач  $\Pi_1$  замкнутий, перемикач  $\Pi_2$  розімкнутий. Має місце симетричний режим роботи трифазного кола:

$$\dot{i}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}}; \quad \dot{i}_b = \frac{\dot{U}_a e^{-j120^\circ}}{\underline{Z}}; \quad \dot{i}_c = \frac{\dot{U}_a e^{j120^\circ}}{\underline{Z}};$$

$$I_a = I_b = I_c = I_\phi = \frac{U_\phi}{\sqrt{3}Z},$$

$$\text{за величиною } I_a = I_b = I_c = I_\phi = \frac{U_\phi}{\sqrt{3}Z}.$$

Векторні діаграми при активно-індуктивному навантаженні подані на рис. 1.13. Усі фазні струми  $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$  зміщені щодо відповідних фазних напруг на кут  $\phi$ . Лінійні напруги випереджають фазні напруги на  $30^\circ$  ( $\dot{U}_{ab} \rightarrow \dot{U}_a, \dot{U}_{bc} \rightarrow \dot{U}_b, \dot{U}_{ca} \rightarrow \dot{U}_c$ ).

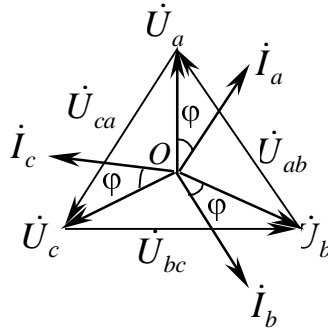


Рисунок 1.13

2. Перемикачі  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  розімкнуті (режим холостого ходу або обрив фази  $A$ ). При цьому схема із трифазного кола перетворюється в однофазну з напругою  $\dot{U}_{bc}$  на опорах  $\underline{Z}_b + \underline{Z}_c = 2\underline{Z}$  (рис. 1.14). Потенціал точки  $O_1$  стає дорівнює  $\frac{\dot{U}_{BC}}{2}$ .

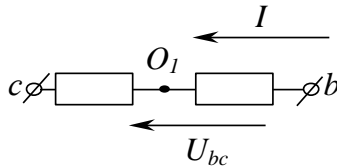


Рисунок 1.14

Векторні діаграми зображені на рис. 1.15.

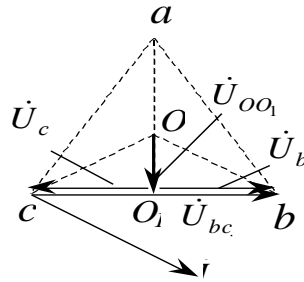


Рисунок 1.15

Струм у опорах  $\underline{Z}_b$  і  $\underline{Z}_c$  дорівнює

$$\dot{I}_b = \dot{I}_c = \dot{I} = \frac{\dot{U}_{bc}}{2\underline{Z}} = \frac{\dot{U}_{ab} e^{-j120^\circ}}{2\underline{Z}}.$$

Фазні струми

$$I_{\phi_b} = I_{\phi_c} = \frac{U_{\phi}}{2Z}.$$

Напруги

$$U_{O_1 O_1} = U_{\phi} \sin 30^\circ = 0,5U_{\phi}, \quad U_{a_1 O_1} = 3U_{O_1 O_1} = 1,5U_{\phi}.$$

Таким чином, фазний струм і фазна напруга неушкоджених фаз зменшилися у  $2/\sqrt{3} \approx 1,15$  раза.

3. Перемикачі  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  замкнені (режим короткого замикання фази  $A$ ). Потенціал точки  $O_1$  враховує значення потенціалу точки  $a$ . Векторні діаграми подані на рис. 1.17.

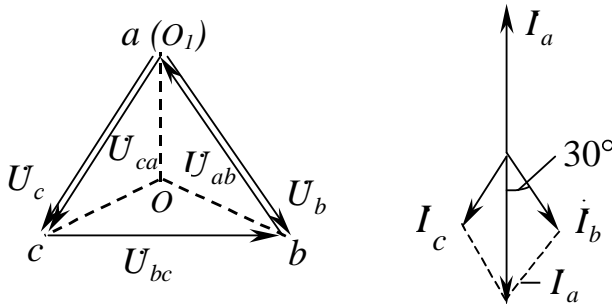


Рисунок 1.17

У цьому режимі  $\dot{U}_c = \dot{U}_{ca}$   $\dot{U}_b = -\dot{U}_{ab}$   $U_c = U_b = U_{\phi}$ .

$$I_b = I_c = \frac{U_{\phi}}{Z} = I_{\phi} \quad I_a = I_{\phi} \cos 30^\circ = \sqrt{3}I_{\phi}.$$

Таким чином, фазні напруги та струми неушкоджених фаз  $B$  і  $C$  збільшилися в  $\sqrt{3}$  раз, а струм закороченої фази ( $I_a$ ) – в 3 рази у порівнянні із симетричним режимом роботи схеми.

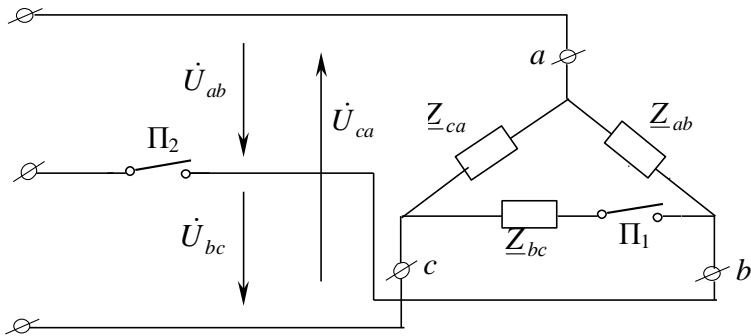


Рисунок 1.18

На рис. 1.18 наведена схема, що містить три однакові опори

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca},$$

з'єднаних трикутником, які підключені до симетричної системи лінійних напруг  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$ . Розглянемо три режими роботи цієї схеми.

1. Перемикачі  $\Pi_1$  і  $\Pi_2$  замкнені. При цьому має місце *симетричний режим* роботи трифазного кола:

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_{\phi}, \quad I_a = I_b = I_c = I_n = \sqrt{3}I_{\phi}. \quad (1.16)$$

Векторні діаграми напруг і струмів при активно-індуктивному навантаженні наведені на рис. 1.19.

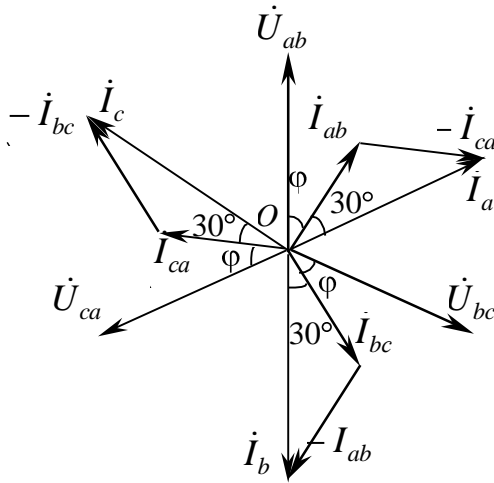


Рисунок 1.19

Усі фазні струми  $\dot{I}_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc}$ ,  $\dot{I}_{ca}$  відстають від відповідних фазних напруг  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_{bc}$ ,  $\dot{U}_{ca}$  на кут  $\varphi$ . Лінійні струми  $\dot{I}_a$ ,  $\dot{I}_b$ ,  $\dot{I}_c$  відстають від відповідних фазних струмів  $\dot{I}_{ab}$ ,  $\dot{I}_{bc}$ ,  $\dot{I}_{ca}$  на  $30^\circ$ :

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = I_\varphi, \quad I_l = \sqrt{3}I_\varphi. \quad (1.17)$$

2. Перемикач  $\Pi_1$  розімкнутий (режим холостого ходу або обрив фази  $bc$ ):

$$\dot{I}_{bc} = 0, \quad \dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}, \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}, \quad I_{ab} = I_{ca} = I_\varphi. \quad (1.18)$$

Лінійні струми  $\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}$ ;  $\dot{I}_b = -\dot{I}_{ab}$ ;  $\dot{I}_c = \dot{I}_{ca}$ , тобто  $I_a = \sqrt{3}I_\varphi$ ,  $I_b = I_c = I_\varphi$ . Таким чином, лінійний струм у проводі, не зв'язаному гальванічно з «пошкодженою» фазою, залишається незмінним у порівнянні із симетричним режимом, а два інші лінійні струми  $I_b$  та  $I_c$  дорівнюють фазним струмам

при симетричному режимі. Векторні діаграми напруг і струмів наведені на рис. 1.20.

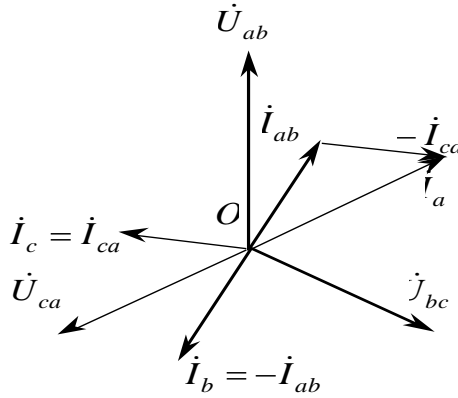


Рисунок 1.20

3. Перемикач  $\Pi_1$  замкнутий, а перемикач  $\Pi_2$  розімкнутий (обрив лінії  $B$ ). При цьому трифазне коло перетвориться в однофазне, і всі три опори підключаються до напруги  $\dot{U}_{ca}$  (рис. 1.21). Векторні діаграми напруг і струмів для цієї схеми подані на рис. 1.22.

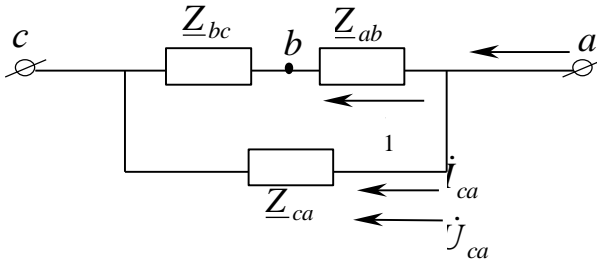


Рисунок 1.21



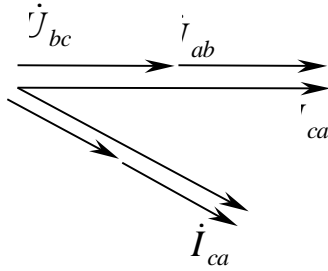


Рисунок 1.22

Струм, що проходить за двома опорами  $\underline{Z}_{bc}$  і  $\underline{Z}_{ab}$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{ab} = \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{ca}}{2\underline{Z}} \quad I_1 = \frac{U}{2Z} = \frac{1}{2} I_\phi,$$

струм у фазі "ca"

$$\dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}, \quad I_{ca} = I_\phi.$$

Лінійні струми

$$I_c = I_a = I_1 + I_{ca} = \frac{1}{2} I_\phi + I_\phi = \frac{3}{2} I_\phi = \frac{3}{2} \frac{U_{ca}}{Z}.$$

Таким чином, при обриві лінійного проводу у фазах, гальванічно пов'язаних з ним, струми зменшуються удвічі, у третій фазі струм залишається незмінним, лінійний струм у непошкодженій лінії зменшується в порівнянні із симетричним режимом в 1,5 рази.

## 1.5 Вирази фазних напруг трифазної системи зірка – зірка без нейтрального проводу через лінійну напругу

У схемі, що зображена на рис. 1.23, у загальному випадку  $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$ .

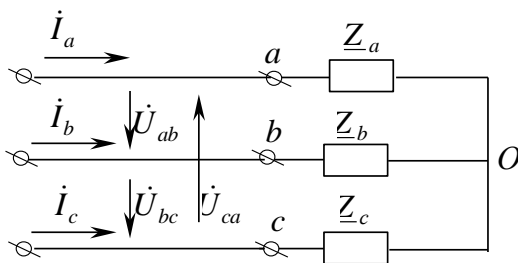


Рисунок 1.23

Струми у фазах визначаються зі співвідношень

$$\dot{I}_a = \underline{Y}_a \dot{U}_a; \quad \dot{I}_b = \underline{Y}_b \dot{U}_b; \quad \dot{I}_c = \underline{Y}_c \dot{U}_c. \quad (1.19)$$

За першим законом Кірхгофа

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = \underline{Y}_a \dot{U}_a + \underline{Y}_b \dot{U}_b + \underline{Y}_c \dot{U}_c = 0. \quad (1.20)$$

Виразимо  $\dot{U}_b$  та  $\dot{U}_c$  через фазну напругу  $\dot{U}_a$  та лінійні напруги  $\dot{U}_{ab}$  та  $\dot{U}_{ca}$ :

$$\dot{U}_b = \dot{U}_a - \dot{U}_{ab}; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_a + \dot{U}_{ca}.$$

Підставимо ці вирази у (1.20)

$$\underline{Y}_a \dot{U}_a + \underline{Y}_b (\dot{U}_a - \dot{U}_{ab}) + \underline{Y}_c (\dot{U}_a + \dot{U}_{ca}) = 0$$

Звідси

$$\dot{U}_a = \frac{\underline{Y}_b \dot{U}_{ab} - \underline{Y}_c \dot{U}_{ca}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}. \quad (1.21)$$

Заміняючи у (1.21) відповідно  $\dot{U}_a$  і  $\dot{U}_c$  через  $\dot{U}_{bc}$  і  $\dot{U}_{ab}$ ,  $\dot{U}_c$  через  $\dot{U}_{ca}$  і  $\dot{U}_{bc}$ , одержимо значення  $\dot{U}_b$  і  $\dot{U}_c$  через лінійні напруги:

$$\dot{U}_b = \frac{\underline{Y}_c \dot{U}_{bc} - \underline{Y}_a \dot{U}_{ab}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}, \quad \dot{U}_c = \frac{\underline{Y}_a \dot{U}_{ca} - \underline{Y}_b \dot{U}_{bc}}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}. \quad (1.22)$$

## 1.6 Потужності у трифазних колах

Потужності у трифазних колах розраховують так само, як і потужності в розгалужених гармонійних колах. Потужність трифазного генератора, з'єднаного в трикутник:

$$\tilde{S}_\Delta = \tilde{S}_{AB} + \tilde{S}_{BC} + \tilde{S}_{CA} = \dot{U}_{AB}^* I_{AB} + \dot{U}_{BC}^* I_{BC} + \dot{U}_{CA}^* I_{CA} \quad (1.23)$$

Для зірки

$$\tilde{S}_\lambda = \tilde{S}_A + \tilde{S}_B + \tilde{S}_C = \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C. \quad (1.24)$$

Потужності споживачів, з'єднаних у трикутник:

$$\begin{aligned} P_{\text{СПОЖ}_\Delta} &= U_{ab} I_{ab} \cos \varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \cos \varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \cos \varphi_{ca} = \\ &= I_{ab}^2 R_{ab} + I_{bc}^2 R_{bc} + I_{ca}^2 R_{ca}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{СПОЖ}_\Delta} &= U_{ab} I_{ab} \sin \varphi_{ab} + U_{bc} I_{bc} \sin \varphi_{bc} + U_{ca} I_{ca} \sin \varphi_{ca} = \\ &= I_{ab}^2 X_{ab} + I_{bc}^2 X_{bc} + I_{ca}^2 X_{ca}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Для зірки

$$\begin{aligned} P_{\text{СПОЖ}_\lambda} &= U_a I_a \cos \varphi_a + U_b I_b \cos \varphi_b + U_c I_c \cos \varphi_c + \\ &+ U_{o_o} I_o \cos \varphi_o = I_a^2 R_a + I_b^2 R_b + I_c^2 R_c + I_o^2 R_o, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} Q_{\text{СПОЖ}_\lambda} &= U_a I_a \sin \varphi_a + U_b I_b \sin \varphi_b + U_c I_c \sin \varphi_c + \\ &+ U_{o_o} I_o \sin \varphi_o = I_a^2 X_a + I_b^2 X_b + I_c^2 X_c + I_o^2 X_o. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Тут  $U_{o_o}$ ,  $I_o$ ,  $\varphi_o$ ,  $R_o$ ,  $X_o$  – відповідно напруга, струм, аргумент, активний і реактивний опори нейтралі (нульового проводу).

У симетричних трифазних колах

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\Delta} &= 3\dot{U}_{\phi} I_{\phi}^* & S_{\Delta} &= 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\phi} I_{\text{л}}, \\ P_{\text{СПОЖ}_{\Delta}} &= 3U_{\phi} I_{\phi} \cos\varphi = \sqrt{3}U_{\phi} I_{\text{л}} \cos\varphi = 3I_{\phi}^2 R_{\phi}, \\ Q_{\text{СПОЖ}_{\Delta}} &= 3U_{\phi} I_{\phi} \sin\varphi = \sqrt{3}U_{\phi} I_{\text{л}} \sin\varphi = 3I_{\phi}^2 X_{\phi}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{\lambda} &= 3\dot{U}_{\phi} I_{\phi}^* & S_{\lambda} &= 3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\phi}, \\ P_{\text{СПОЖ}_{\lambda}} &= 3U_{\phi} I_{\phi} \cos\varphi = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\phi} \cos\varphi = 3I_{\phi}^2 R_{\phi}, \\ Q_{\text{СПОЖ}_{\lambda}} &= 3U_{\phi} I_{\phi} \sin\varphi = \sqrt{3}U_{\text{л}} I_{\phi} \sin\varphi = 3I_{\phi}^2 X_{\phi}.\end{aligned}\tag{1.30}$$

## 1.7 Колове обертове магнітне поле трифазного струму

Під час проходження по котушці струму у напрямку, зазначеному на рис. 1.24, вектор магнітної індукції  $\vec{B}$  спрямований вгору. Якщо змінити напрямок струму на протилежний, то вектор  $\vec{B}$  змінить напрямок на протилежний.

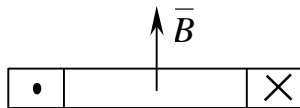


Рисунок 1.24

При зміні струму за синусоїдальним законом  $i = I_m \sin \omega t$  вектор  $\vec{B}$  змінить свій напрямок двічі за період. Відомо, що модуль  $B$  при цьому теж є синусоїдальною функцією  $B = B_m \sin \omega t$ , тобто  $\vec{B}$  за даних умов у просторі може набирати два протилежні напрямки, а у часі змінюватися за гармонійним законом.

Розмістимо три (1, 2, 3) однакові котушки, зсувані у просторі на  $120^\circ$  один щодо одного (рис. 1.25).

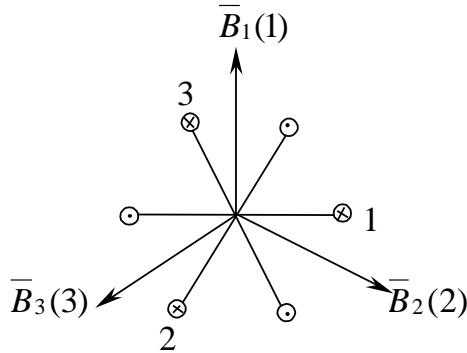


Рисунок 1.25

Візьмемо за позитивний напрямок векторів  $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$  кожної котушки так, як це показано на рис. 1.25 при зазначених напрямках струмів. Підключимо ці котушки до трифазного кола:

$$i_1 = I_m \sin \omega t; \quad i_2 = I_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$i_3 = I_m \sin(\omega t - 240^\circ).$$

При цьому модулі вектора магнітної індукції кожної котушки будуть змінюватися:

$$B_1 = B_m \sin \omega t; \quad B_2 = B_m \sin(\omega t - 120^\circ);$$

$$B_3 = B_m \sin(\omega t - 240^\circ).$$

Проаналізуємо, чому дорівнюватиме сума

$$\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3 = \bar{B} \text{ при } \omega t = 0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3}{2}\pi.$$

1. При  $\omega t = 0$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = B_m \sin \left( \left. \left. 120^\circ \right. \right) \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} B_m,$$

$$B_3 = B_m \sin \left( \left. \left. 240^\circ \right. \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m.$$

Векторна діаграма векторів  $\bar{B}$  для даного моменту показана на рис. 1.26 а. Модуль вектора

$$B = |\bar{B}_2 + \bar{B}_3| = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \cos 30^\circ = 1,5 B_m.$$

2. При  $\omega t = \frac{\pi}{2}$

$$B_1 = B_m, \quad B_2 = B_m \sin \left( \left\langle 30^\circ \right\rangle \right) = -\frac{B_m}{2},$$

$$B_3 = B_m \sin \left( \left\langle 210^\circ \right\rangle \right) = -\frac{B_m}{2}.$$

Векторна діаграма векторів  $\bar{B}$  показана на рис. 1.26 б. Модуль вектора

$$B = |\bar{B}_1 + \bar{B}_2 + \bar{B}_3| = B_m \left( 1 + \frac{1}{2} \cos 60^\circ + \cos 60^\circ \right) = 1,5 B_m.$$

3. При  $\omega t = \pi$

$$B_1 = 0, \quad B_2 = B_m \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m,$$

$$B_3 = B_m \sin \left( \left\langle 60^\circ \right\rangle \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} B_m.$$

Векторна діаграма векторів  $\bar{B}$  для цього випадку показана на рис. 1.26 в. Модуль вектора

$$B = |\bar{B}_2 + \bar{B}_3| = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \cos 30^\circ = 1,5 B_m.$$

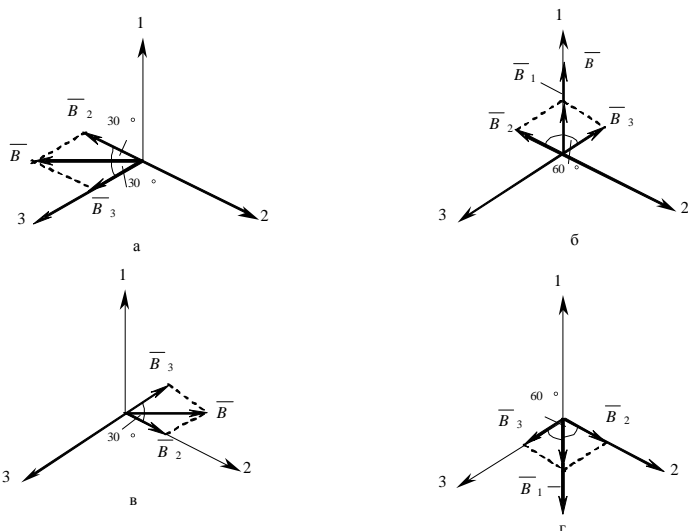


Рисунок 1.26

4. При  $\omega t = \frac{3}{2}\pi$

$$B_1 = -B_m, \quad B_2 = B_m \sin 150^\circ = \frac{B_m}{2},$$

$$B_3 = B_m \sin 30^\circ = \frac{B_m}{2}.$$

Для цього моменту – векторна діаграма  $\vec{B}$  на рис. 1.26 г.  
Модуль вектора

$$B = |\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3| = B_m \left( 1 + \frac{1}{2} \cos 60^\circ + \frac{1}{2} \cos 60^\circ \right) = 1,5B_m.$$

Із поданого аналізу випливає, що при підключенні трифазного кола до трьох однакових котушок, зсунутих одно щодо одної у просторі на  $120^\circ$ , виникає обертове магнітне поле. Вектор магнітної індукції такого поля за модулем дорівнює  $1,5B_m$  і обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ .

Ефект обертового магнітного поля використовується для створення асинхронних і синхронних трифазних двигунів.

## 2 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ ДЖЕРЕЛАМИ ПЕРІОДИЧНИХ НЕГАРМОНІЧНИХ ВПЛИВІВ

*Періодичними несинусоїдальними* струмами та напругами називають струми та напруги, що змінюються у часі за періодичним несинусоїдальним законом.

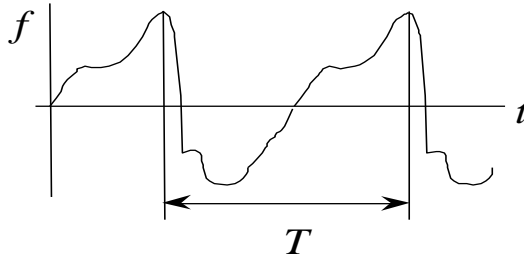


Рисунок 2.1

На рис. 2.1 зображена така крива, період повторення якої  $T$ . Ця крива може бути описана функцією

$$f(t) = f(t + nT) = f(t + T), \quad (2.1)$$

де  $n=0, 1, 2$  і т.д.

Причини появи несинусоїдальних сигналів:

1. Джерело струму або джерело напруги генерують несинусоїдальний струм або несинусоїдальну ЕРС, а всі елементи кола ( $R, L, C$ ) лінійні, тобто від величини струму не залежать.

2. Джерело струму або джерело напруги генерують синусоїдальний струм або синусоїдальну ЕРС, але один або кілька елементів кола нелінійні (вентиль, електрична дуга, котушка зі сталевим магнітопроводом).

3. Вплив періодичних перешкод на синусоїдальний сигнал.

4. Використання генераторів сигналів спеціальної форми (пилкоподібної, східчастої, прямокутної) в автоматичній, обчислювальній техніці, у різних пристроях радіозв'язку.

Існує два шляхи розрахунків лінійного електричного кола при впливі сигналів такої форми:



1. Застосування спеціальних математичних прийомів, що відображають стан кола у кожний момент часу, що приводить до складної системи диференціальних рівнянь. Тому він не знайшов застосування в інженерних розрахунках.

2. Зведення складного завдання до сукупності більш простих і застосування відомих методів розрахунків їх з урахуванням особливостей сигналу, що впливає.

Відомо, що будь-яка періодична несинусоїдальна функція  $f(t)$  з періодом  $2\pi$ , що задовольняє умови Дірихле, тобто що має на будь-якому кінцевому інтервалі часу кінцеве число розривів першого роду та кінцеве число максимумів і мінімумів, може бути розкладена у тригонометричний ряд, тобто бути подана у вигляді суми гармонічних складових – *ряд Фур'є*. Усі періодичні сигнали, використовувані в електротехніці, задовольняють умови Дірихле, тому проводити перевірку на виконання умови Дірихле немає необхідності.

Гармонічний ряд у тригонометричній формі має вигляд

$$\begin{aligned} f(t) &= F_0 + A_{1m} \cos \omega_1 t + B_{1m} \sin \omega_1 t + A_{2m} \cos 2\omega_1 t + \\ &+ B_{2m} \sin 2\omega_1 t + \dots + A_{km} \cos k\omega_1 t + B_{km} \sin k\omega_1 t + \dots = \\ &= F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_{km} \cos k\omega_1 t + B_{km} \sin k\omega_1 t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

де  $F_0$  – стала складова, або нульова гармоніка, що дорівнює середньому значенню функції за період;

$A_{km}$  і  $B_{km}$  – амплітуди косинусоїдальних і синусоїдальних складових.

Як відомо з курсу математики, коефіцієнти ряду Фур'є  $F_0$ ,  $A_{km}$  і  $B_{km}$  визначаються за допомогою формул:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt, \\ B_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt. \end{aligned}$$

Сума косинусоїд та синусоїд, що виражається формулою (2.2), може бути подана у вигляді суми тільки одних синусоїд із відповідними початковими фазами, так звана **фазова-амплітудно-фазова форма**

$$\begin{aligned}
 f(t) &= f(t + nT) = F_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots = \\
 &= F_0 + F_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + F_{2m} \sin(\omega_1 t + \psi_2) + \dots + \\
 &+ F_{km} \sin(\omega_1 t + \psi_k) + \dots = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} F_{km} \sin(\omega_1 t + \psi_k)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

де  $F_0$  – стала складова;  $f_1$  – основна синусоїда, або перша гармоніка;

$f_2, \dots, f_k$  – вищі гармоніки;  $F_{km}$  – амплітуда  $k$ -ї гармоніки;  $\psi_k$  – початкова фаза  $k$ -ї гармоніки;  $\omega_1$  – частота повторення

першої (основної) гармоніки,  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ;  $T$  – період несинусоїдальної періодичної функції.

Гармоніки, для яких  $k$  – непарне число, називають *непарними*, для яких  $k$  – парне число, – *парними*.

Оскільки

$$F_{mk} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) = F_{mk} \sin\psi_k \cos k\omega_1 t + F_{mk} \cos\psi_k \sin k\omega_1 t,$$

то з порівняння двох форм запису гармонічного ряду (2.2) і (2.3) маємо

$$A_{mk} = F_{mk} \sin \psi_k, \quad B_{mk} = F_{mk} \cos \psi_k. \tag{2.4}$$

Співвідношення (2.4) дозволяють переходити від ряду Фур'є у вигляді (2.3) до вигляду (2.2). Зворотний перехід здійснюється за формулами

$$\begin{aligned}
 C_k &= \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \operatorname{tg} \psi_k = \frac{A_k}{B_k} \\
 \text{або } \psi_k &= \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{A_k}{B_k} & \text{при } B_k > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{A_k}{B_k} & \text{при } B_k < 0. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

У загальному випадку ряд Фур'є містить нескінченне число членів. Однак, як правило, він швидко сходиться і достатньо обрати невелике число гармонік для одержання необхідної точності.

Існують прилади, що мають назву гармонічних аналізаторів, які дозволяють визначати коефіцієнти  $A_k$  і  $B_k$  або механічно за графіком кривої  $f(t)$ , або електричним шляхом подачі на затискачі приладу досліджуваної несинусоїдальної напруги.

Періодичні несинусоїдальні функції, що описують зміни струмів або напруг у електричних колах, зазвичай мають який-небудь вигляд симетрії, і це полегшує розкладання їх у ряд Фур'є.

У ряді випадків доцільно подати ряд Фур'є в комплексній формі:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} e^{jq\omega_1 t} F(jq\omega_1), \quad (2.6)$$

де

$$F(jq\omega_1) = \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt. \quad (2.7)$$

У виразі (2.6) кожній  $k$ -й гармоніці відповідає сума двох сполучених членів (при  $q = +k$  і при  $q = -k$ ), що дорівнює подвоєній дійсній частині кожного із цих членів:

$$\frac{1}{T} e^{jk\omega_1 t} F(jk\omega_1) + \frac{1}{T} e^{-jk\omega_1 t} F(-jk\omega_1) = \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{T} F(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right]. \quad (2.8)$$

Позначивши  $F(jk\omega_1) = F(k\omega_1) e^{j\alpha_k}$ , маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[ \frac{2}{T} F(jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t} \right] &= \frac{2}{T} F(k\omega_1) \cos(k\omega_1 t + \alpha_k) = \\ &= \frac{2}{T} F(k\omega_1) \sin(k\omega_1 t + \psi_k), \end{aligned} \quad (2.9)$$

де  $\psi_k = \pi/2 + \alpha_k$ .

Таким чином, величина

$$\frac{2}{T} F(k\omega_1) e^{j\psi_k} = j \frac{2}{T} F(k\omega_1) e^{j\alpha_k} = j \frac{2}{T} F(jk\omega_1) \quad (2.10)$$

являє собою комплексну величину  $k$ -ї гармоніки

$$A_k = A_k e^{j\psi_k}, \quad (2.11)$$

де  $A_k = \frac{2}{T} F(k\omega_1)$ .

Сукупність амплітуд усіх гармонік цієї функції може розглядатися як **дискретний спектр** цієї функції.

Його можна подати на графіку у вигляді спектра значень амплітуд і спектра значень фаз. За віссю абсцис відкладаємо значення, що дорівнюють частотам гармонік. Для кожної частоти гармонік відкладаємо від осі абсцис паралельно осі ординат відрізки, довжини яких дорівнюють амплітудам  $A_k$  або початковим фазам  $\psi_k$  гармонік. При цьому  $A_k > 0$ , а  $\psi_k$  може бути як позитивним, так і негативним. Такі характеристики звуться *дискретними спектрами* або *дискретними частотними характеристиками* – відповідно до *амплітудно-частотної* та *фазо-частотної характеристик*.

При побудові спектра періодичного сигналу за віссю абсцис відкладають кратні основній частоті значення частот гармонічних складових. Значимо, що чим більший період функції  $f(t)$ , тим щільніше розміщені спектральні лінії та відповідно менше значення амплітуд гармонічних складових. Зрозуміло, у конкретних випадках ті або інші частотні складові спектра сигналу можуть бути відсутні, але складових, частота яких не кратна основній частоті, спектр містити не може.

**Приклад.** Визначимо спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів амплітуди  $F_0$  із тривалістю, що дорівнює половині періоду,  $T/2$  (рис. 2.2 а). Аналітичний вираз часової залежності розглянутого сигналу на періоді має вигляд

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0 & \frac{T}{2} < t < \frac{3}{2}T. \end{cases}$$

*Розв'язання*

Якщо за початок відліку вибрати початок координат, то функція має парну симетрію і містить тільки косинусні складові з коефіцієнтами  $A_k$ . Визначимо амплітуду  $k$ -ї гармоніки:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{T/4}^{-T/4} F_0 \cos k\omega_1 t dt = \frac{2F_0}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Звідси

$$A_1 = \frac{2F_0}{\pi}, \quad A_3 = -\frac{1}{3} \frac{2F_0}{\pi}, \quad A_5 = \frac{1}{5} \frac{2F_0}{\pi}, \\ A_0 = F_0, \quad A_2 = A_4 = 0, \quad B_k = 0.$$

Знайдені коефіцієнти дозволяють записати розкладання Фур'є:

$$f(t) = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{\pi} \left( \cos\omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t \right).$$

Спектри амплітуд і фаз набувають таких значень:

$$A_0 = \frac{F_0}{2}, \quad A_{m_k} = \frac{2F_0}{k\pi} \quad (k=1, 2, 3, \dots), \\ \psi_k = 0 \quad (k=4n+1, \quad n=0, 1, 2, \dots), \\ \psi_k = \pi \quad (k=4n-1, \quad n=1, 2, 3, \dots)$$

і зображені на діаграмах рис. 2.2 б і 2.2 в.

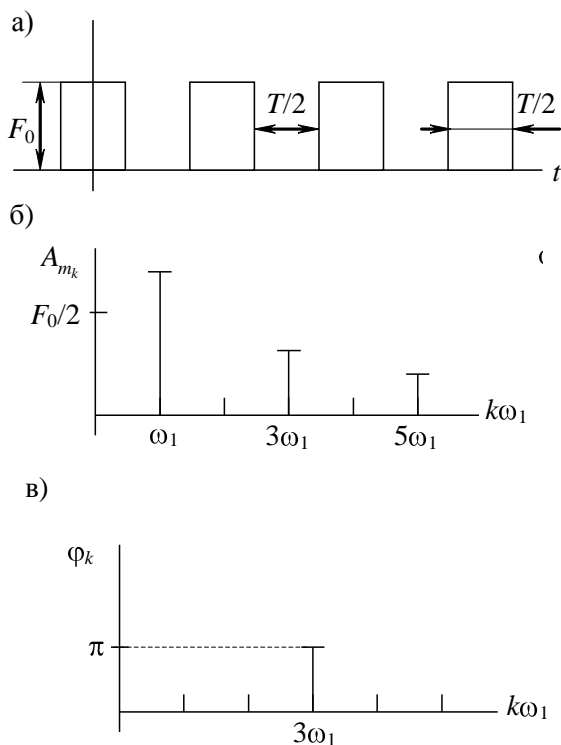


Рисунок 2.2

## 2.1 Максимальне, середнє діюче значення несинусоїдальної функції

Максимальне значення несинусоїдальної періодичної функції – найбільше за модулем значення функції за період.

Середнє за модулем значення визначається за формулою

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt. \quad (2.12)$$

Якщо крива  $f(t)$  симетрична щодо осі абсцис і протягом половини періоду жодного разу не змінила знака, то середнє за модулем значення дорівнює середньому значенню за половину періоду:

$$F_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt,$$

причому початок відліку часу у цьому виразі повинен бути обраний так, щоб  $f(0)=0$ . Якщо за весь період функція жодного разу не змінила знака, то середнє за модулем значення дорівнює сталій складовій.

При несинусоїдальних періодичних впливах, як і при синусоїдальних, як правило, під значенням ЕРС, струму або напруги розуміють діюче значення.

*Діюче значення несинусоїдальної функції – середньоквадратичне за період від миттєвого значення цієї функції*

$$F = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}. \quad (2.13)$$

Розглянемо діюче значення на прикладі напруги. Нехай

$$u(t) = U_0 + U_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + U_{2m} \sin(\omega_2 t + \psi_2) + \dots,$$

тоді

$$\begin{aligned} u^2(t) &= U_0^2 + U_{1m}^2 \sin^2(\omega_1 t + \psi_1) + U_{2m}^2 \sin^2(\omega_2 t + \psi_2) + \dots = \\ &= U_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km}^2 \sin^2(\omega_k t + \psi_k) + U_0 \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(\omega_k t + \psi_k) + \\ &+ \sum_{\substack{p=1, q=1, \\ p \neq q}}^{\infty} U_{pm} U_{qm} \sin(\omega_p t + \psi_p) \sin(\omega_q t + \psi_q) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Розглянемо інтеграл від кожного з доданків окремо.

$$1. \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 dt = U_0^2 \quad \text{– це квадрат сталої складової напруги;}$$

$$2. \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{km}^2 \sin^2(\omega_1 t + \psi_k) dt = \frac{U_{km}^2}{2} = U_k^2,$$

тому що цей інтеграл за визначенням дорівнює квадрату діючого значення  $U_k$  гармонічної складової напруги  $k$ -ї гармоніки;

$$3. \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_0 U_{km} \sin(\omega_1 t + \psi_k) dt = 0,$$

тому що інтеграл від синусоїдальної величини за ціле число періодів дорівнює нулю;

$$4. \quad \frac{1}{T} \int_0^T U_{pm} U_{qm} \sin(\omega_1 t + \psi_p) \sin(\omega_1 t + \psi_q) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U_{pm} U_{qm}}{2} [\cos(p\omega_1 t + \psi_p - q\omega_1 t - \psi_q) -$$

$$- \cos(\omega_1 t + \psi_p + q\omega_1 t + \psi_q)] dt = 0,$$

де  $p \neq q$ ; підінтегральний вираз є різницею двох косинусоїдальних функцій, інтеграл кожної з яких за ціле число періодів дорівнює нулю.

Таким чином, діюче значення періодичної несинусоїдальної напруги

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{1m}^2}{2} + \frac{U_{2m}^2}{2} + \dots} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}, \quad (2.15)$$

тобто діюче значення періодичної несинусоїдальної напруги дорівнює кореню квадратному із суми квадратів сталої складової та квадратів діючих значень усіх гармонічних складових. Так само визначається діюче значення періодичного несинусоїдального струму:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{1m}^2}{2} + \frac{I_{2m}^2}{2} + \dots} = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots}. \quad (2.16)$$

Аналогічним чином визначається діюче значення будь-якої іншої періодичної несинусоїдальної величини.

Несинусоїдальні струми та напруги вимірюють приладами різних систем. Прилади електромагнітної, електродинамічної та



тепловій систем реагують на діюче значення, магнітоелектричні прилади з випрямлячем – на середнє значення, магнітоелектричні без випрямляча – на сталу складову.

## 2.2 Коефіцієнти, що характеризують періодичні несинусоїдальні функції

В електротехніці при оцінці несинусоїдальних періодичних кривих користуються *коефіцієнтом форми* кривої  $k_\phi$ , *коефіцієнтом амплітуди*  $k_a$  та *коефіцієнтом викривлення*  $k_b$ .

Коефіцієнт форми визначається як відношення діючого значення функції до середнього значення функції, взятої за модулем:

$$k_\phi = \frac{F}{F_{\text{cp}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt}}. \quad (2.17)$$

Коефіцієнт амплітуди визначається як відношення максимального значення функції до її діючого значення:

$$k_a = \frac{F_m}{F} = \frac{F_m}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}. \quad (2.18)$$

Для синусоїди  $k_\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$ ;  $k_a = \sqrt{2} = 1,41$ .

Коефіцієнт викривлення визначається як відношення діючого значення основної (першої) гармоніки до діючого значення всієї функції:

$$k_b = \frac{F_1}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}}. \quad (2.19)$$

Для синусоїди  $k_b = 1$ .

В електроніці та радіотехніці для оцінки викривлень користуються коефіцієнтом гармонік, обумовленим як відношення діючого значення вищих гармонік до діючого значення основної гармоніки:

$$k_r = \frac{1}{F_1} \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} F_k^2}. \quad (2.20)$$

### 2.3 Активна та повна потужність несинусоїдального струму

Вираз миттєвої потужності

$$p(t) = u(t)i(t) \quad (2.21)$$

справедливий для струмів і напруг з будь-якою формою кривої.

Під *активною потужністю* несинусоїдального струму розуміють, як і в колах синусоїдального струму, середнє значення миттєвої потужності за період першої гармоніки:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt. \quad (2.22)$$

Якщо подати напруги та струм рядами Фур'є

$$u = U_0 + U_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_{u_1}) + U_{2m} \sin(\omega_1 t + \psi_{u_2}) + \dots,$$

$$i = I_0 + I_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_{i_1}) + I_{2m} \sin(\omega_1 t + \psi_{i_2}) + \dots,$$

то активна потужність буде подана сумою інтегралів таких самих чотирьох типів, що і при розгляді діючого значення періодичного несинусоїдального струму.

Таким чином,

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + \dots = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots, \quad (2.23)$$

де  $\varphi_k = \psi_{u_k} - \psi_{i_k}$ .

Активна потужність при періодичних несинусоїдальних струмах і напругах дорівнює сумі активних потужностей постійної (потужності постійного струму) і всіх гармонічних складових струму та напруги.

*Реактивною* потужністю періодичних несинусоїдальних струмів можна умовно вважати величину, що дорівнює сумі реактивних потужностей окремих гармонік:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots \quad (2.24)$$

За аналогією із синусоїдальними струмами вводять поняття повної потужності, що дорівнює добутку діючих значень струмів і напруг:

$$S = UI = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots} \cdot \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \quad (2.25)$$

На відміну від кола синусоїдального струму,

$$S^2 \neq P^2 + Q^2, \quad S^2 \geq P^2 + Q^2$$

(рівність має місце при активному навантаженні). Це пояснюється тим, що повна потужність містить усі гармоніки, у тому числі і добутку струмів і напруг різної частоти, тому для несинусоїдальних струмів квадрат повної потужності, як правило, більше суми квадратів активної та реактивної потужностей.

Потужність викривлення

$$T = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad (2.26)$$

характеризує ступінь відмінності у формах кривих напруги  $u$  і струму  $i$ .

За аналогією із синусоїдальними функціями відношення активної потужності при несинусоїдальних струмах до повної потужності умовно називають *коефіцієнтом потужності*:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}} \quad (2.27)$$

$\lambda = 1$ , якщо коло має тільки один активний опір, у всіх інших випадках  $\lambda < 1$ .

Нехай напруга синусоїдальна, а струм несинусоїдальний. У цьому разі

$$P = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = UI_1 \cos \varphi_1.$$

Діюче значення струму

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots} > I_1.$$

Отже,

$$\lambda = \frac{UI_1 \cos\varphi_1}{UI} = \frac{I_1}{I} \cos\varphi_1 = k_{\text{и}} \cos\varphi_1, \quad (k_{\text{и}} < 1).$$

Таким чином, поява вищих гармонік у кривих напруги та струму приводить до зниження коефіцієнта потужності у порівнянні з випадком, коли струм і напруга при тих самих діючих значеннях синусоїдальні. Отже, уже хоча б щодо цього поява вищих гармонік небажана. Тому прагнуть конструювати генератори змінного струму так, щоб крива ЕРС у них була по можливості близька до синусоїди.

## 2.4 Розрахунки лінійного електричного кола при несинусоїдальних періодичних впливах

Якщо у лінійному електричному колі діє один або кілька джерел несинусоїдальних періодичних ЕРС і струмів, то розрахунки такого кола виконується у три етапи.

1. Розкладання ЕРС і струмів джерел на сталу та синусоїдальні складові, тобто в ряд Фур'є. Періодичні криві, що часто зустрічаються в електротехніці, і їх розкладання у ряд Фур'є наведені в підручниках з ТОЕ та математичних і електротехнічних довідниках.

2. Застосування *принципу накладення*, згідно з яким миттєве значення струму будь-якої гілки (напруги на будь-якій ділянці) дорівнює сумі миттєвих значень струмів (напруг) окремих гармонік, і розрахунки струмів і напруг у колі потрібно проводити для кожної гармоніки окремо.

3. Спільний розгляд розв'язків, отриманих для кожної зі складових.

Розглянемо докладніше другий етап, що є основною частиною розрахунків.

Нехай несинусоїдальна ЕРС подана у вигляді суми сталої та синусоїдальних складових

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + E_{2m} \sin(\omega_1 t + \psi_2),$$

тоді згідно із принципом накладання джерело несинусоїдальної ЕРС можна розглядати як послідовне з'єднання джерела постійної ЕРС і джерел синусоїдальних ЕРС із різними кратними частотами (рис. 2.3):

$$e_0 = E_0, \quad e_1 = E_{1m} \sin(\omega_1 t + \psi_1), \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega_1 t + \psi_2).$$

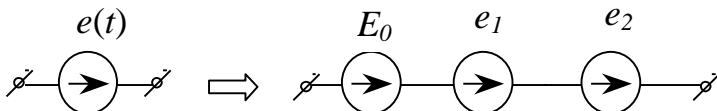


Рисунок 2.3

Якщо задані струми несинусоїдальних джерел, то підхід до розв'язання завдання залишається таким самим. Джерела несинусоїдального струму можна подати у вигляді паралельного з'єднання декількох джерел, синусоїдальний струм кожного з яких дорівнює відповідній складовій несинусоїдального струму (рис. 2.4).

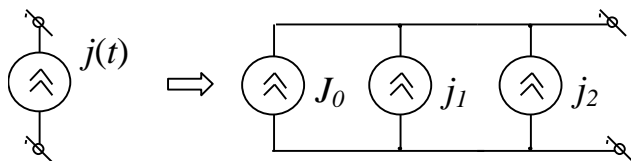


Рисунок 2.4

Далі можна визначити струми та напруги, що виникають від дії сталих складових ЕРС струмів, після цього – струми та напруги від дії перших гармонік, потім від других гармонік і т.д. Миттєве значення струму або напруги у колі дорівнюватиме сумі миттєвих значень складових струмів або напруг від дії кожного із джерел. Якщо, наприклад, у якій-небудь гілці струми, створювані ЕРС  $E_0, e_1, e_2$ , відповідно дорівнюють  $I_0, i_1, i_2$ , то повний струм

$$i = I_0 + i_1 + i_2.$$

Таким чином, розрахунки лінійного кола з несинусоїдальними впливами зводяться до розв'язання  $n$  задач із синусоїдальними ЕРС, де  $n$  – кількість синусоїдальних складових ЕРС різних частот, і однієї задачі з постійною ЕРС. При цьому необхідно пам'ятати, що напруга на індуктивності від постійного струму дорівнює нулю ( $X_{L_0} = 0$ ), а постійний струм через ємність не проходить ( $X_{C_0} = \infty$ ). Необхідно також урахувати, що індуктивний опір  $X_{L_k}$  зростає прямо пропорційно частоті; тому для  $k$ -ої гармоніки

$$X_{L_k} = k\omega_1 L = kX_{L_1}. \quad (2.28)$$

Ємнісний опір зменшується зі зростанням частоти; тому для  $k$ -ї гармоніки  $X_{C_k}$  у  $k$  раз менше, ніж для першої гармоніки:

$$X_{C_k} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{X_{C_1}}{k}. \quad (2.29)$$

Оскільки кожна складова в (2.3) є або постійною, або синусоїдальною функцією часу, то для розрахунків кожної з них окремо можуть бути застосовані всі методи розрахунків кіл: метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів і т.д. При розрахунках кожної з гармонік можна користуватися символічним методом і будувати векторні діаграми для кожної з гармонік окремо. Однак неприпустимі додавання векторів і додавання комплексних напруг і струмів різних гармонік, оскільки кутові швидкості обертання векторів різних частот неоднакові. Додавати можна лише миттєві значення, виражені як функції часу. При побудові графіків окремих гармонік потрібно пам'ятати, що період гармоніки обернено пропорційний її номеру. Отже, якщо за віссю абсцис відкласти  $\omega t$ , то, дотримуючись того самого масштабу, замість кутів  $\psi_k$  потрібно відкладати кути  $\psi_k / k$ .

Таким чином, алгоритм розрахунків кола з несинусоїдальними періодичними впливами такий:

1. Розкладання ЕРС і/або струму, джерела у тригонометричний ряд Фур'є.

2. Розрахунки струмів і напруг для кожної гармоніки.

2.1. Для сталої складової коло перетвориться з урахуванням того, що  $X_L(0) = 0$ ,  $X_C(0) = \infty$ , і розраховується одним з методів постійного струму.

2.2. Для основної (першої) гармоніки символічним методом (метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод еквівалентного генератора, метод накладення) розраховуються необхідні струми й напруги.

2.3. Для вищих гармонік визначаються параметри кола за формулами (2.28) і (2.29) та при використанні того самого методу розрахунків, що і у 2.2, обчислюються струми та напруги.

3. Спільний розгляд розв'язувань для кожної гармоніки.

**Приклад.** Визначити струм  $i_1(t)$  у колі, що зображене на рис. 2.5. Відомо, що у колі діє несинусоїдальне періодичне джерело з напругою

$$e(t) = E_0 + E_{1m} \sin(\omega_1 t + \alpha) + E_{2m} \sin(\omega_1 t + \beta) \text{ та}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

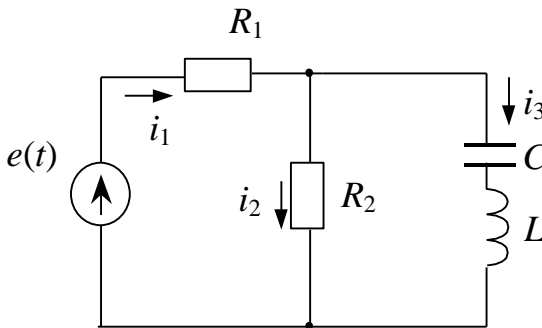


Рисунок 2.5

#### Розв'язання

Для визначення струму  $i_1(t)$  необхідно незалежно розрахувати три схеми (рис. 2.5).

Сталу складову струму  $i_1(t)$  знаходимо, використовуючи схему рис. 2.6 а. Оскільки конденсатор не пропускає постійного

струму, а індуктивність становить нульовий опір постійному струму, то схема стає одноконтурною і стала складова струму  $i_1(t)$

$$I_{1(0)} = \frac{E_0}{R_1 + R_2},$$

де перший індекс означає номер гілки, а другий індекс, взятий у дужки, – номер гармоніки.

Першу гармоніку струму знаходимо згідно зі схемою рис. 2.6 б. З умови завдання зрозуміло, що на частоті  $\omega_1$  у колі спостерігається резонанс напруг, тому

$$\dot{i}_{1(1)} = \frac{\dot{E}_1}{R_1} = \frac{E_{1m}}{\sqrt{2}} e^{j\alpha}.$$

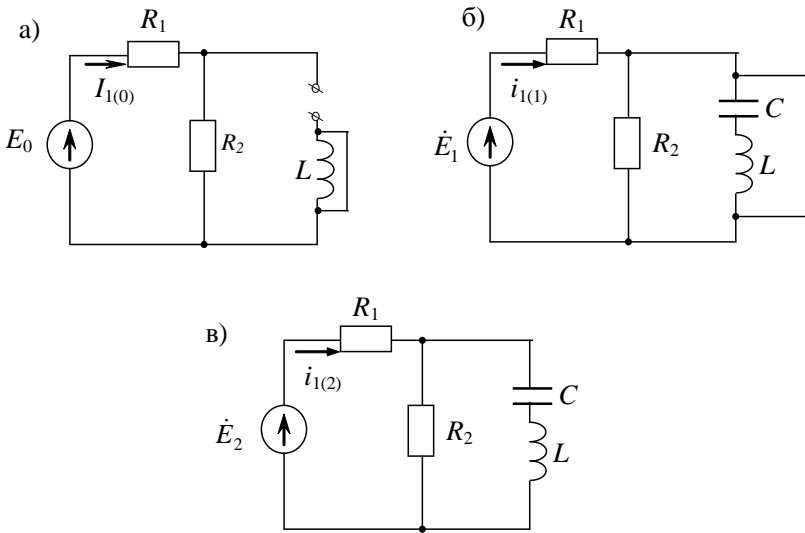


Рисунок 2.6

Якщо діюча ЕРС несинусоїдальна, то в електричному колі можуть виникати резонансні режими (резонанси струмів або резонанси напруг) не тільки на першій гармоніці, але і на вищих гармоніках. Під *резонансом* на  $k$ -й гармоніці розуміють такий режим роботи, при якому струм  $k$ -ї гармоніки на вході кола за



фазою збігається з  $k$ -ю гармонікою діючої на вході ЕРС (але при цьому струми інших гармонік не збігаються за фазою ЕРС, що їх вимикають). Резонансу можна досягти, змінюючи частоту, ємність або індуктивність. При виникненні резонансного або близького до нього режиму на якій-небудь вищій гармоніці струми або напруги цієї гармоніки можуть виявитися більшими, ніж струми та напруги першої гармоніки на ділянках кола, незважаючи на те, що амплітуда відповідної вищої гармоніки ЕРС на вході кола може бути у кілька разів менша від амплітуди першої гармоніки ЕРС.

Другу гармоніку визначаємо у відповідності зі схемою рис. 2.6 в. Визначимо опори реактивних елементів:

$$X_{L(2)} = 2\omega_1 L = 2X_{L(1)}, \quad X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega_1 C} = \frac{X_{C(1)}}{2}.$$

Комплексне діюче значення другої гармоніки струму  $i_1$

$$\dot{I}_{1(2)} = \frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_{\text{эКВ}(2)}} = \frac{E_{2m} e^{j\beta}}{\sqrt{2} \left( R_1 + \frac{R_2(jX_{L(2)} - jX_{C(2)})}{R_2 + jX_{L(2)} - jX_{C(2)}} \right)}.$$

Миттєве значення струму  $i_1(t)$  для схеми, що зображена на рис. 2.5, дорівнює сумі миттєвих значень струму окремих гармонік:

$$i_1(t) = I_{1(0)} + i_{1(1)}(t) + i_{1(2)}(t) = \frac{E_0}{R_1 + R_2} + \frac{E_{1m}}{R_1} \sin(\omega_1 t + \alpha) + i_{1(2)}(t).$$

Діюче значення струму

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2}.$$

## 2.5 Вищі гармоніки у трифазних колах

Фазні ЕРС симетричного трифазного генератора часто містять вищі гармоніки. Кожна ЕРС ( $e_a, e_b, e_c$ ) повторює за формою всі інші зсуви на одну третину періоду  $T/3$  і може бути розкладена на гармоніки. Стала складова, як правило, відсутня.

Нехай  $k$ -а гармоніка ЕРС фази  $A$

$$e_{kA} = E_{km} \sin \left( k\omega t + \psi_k \right). \quad (2.30)$$

Оскільки ЕРС фази  $B$  відстає від ЕРС фази  $A$  на  $T/3$ , а ЕРС фази  $C$  випереджає ЕРС фази  $A$  на  $T/3$ , то  $k$ -а гармоніка ЕРС фазах  $B$  і  $C$  відповідно однакові

$$e_{kB} = E_{km} \sin \left( k\omega \left( t - \frac{T}{3} \right) + \psi_k \right) = E_{km} \sin \left( k\omega t - k \frac{2\pi}{3} + \psi_k \right), \quad (2.31)$$

$$e_{kC} = E_{km} \sin \left( k\omega \left( t + \frac{T}{3} \right) + \psi_k \right) = E_{km} \sin \left( k\omega t + k \frac{2\pi}{3} + \psi_k \right). \quad (2.32)$$

Порівнюючи отримані вирази для різних значень  $k$ , можна помітити, що ЕРС гармонік порядку, кратного трьом ( $k = 3n$ , де  $n$  – будь-яке ціле число), у всіх фазах у будь-який момент часу мають те саме значення та напрямок (усі три ЕРС проходять через максимум одночасно – *нульова послідовність фаз*). При  $k = 3n+1$  гармоніки трьох фаз утворюють симетричну систему ЕРС, послідовність якої збігається з послідовністю фаз першої гармоніки (ЕРС проходять через максимуми в порядку  $A, B, C$  – *пряма послідовність фаз*). При  $k = 3n+2$  гармоніки утворюють симетричну систему ЕРС із послідовністю, зворотною основній (ЕРС проходять через максимуми в порядку  $A, C, B$  – *зворотна послідовність фаз*).

Криві ЕРС, індуковані в обмотках трифазних генераторів, симетричні щодо осі абсцис і у їх розкладанні відсутні сталі складові та парні вищі гармоніки. Тому надалі обмежимося дослідженням тільки непарних гармонік.

Розглянемо особливості роботи трифазних кіл, викликані гармоніками, кратними трьом.

1. При з'єднанні обмоток трифазного генератора в трикутник (рис. 2.7 а) по них проходять струми гармонік, кратні трьом, навіть за відсутності зовнішнього навантаження.

Алгебраїчна сума перших гармонік фазних ЕРС і всіх вищих гармонік, не кратних трьом, у контурі трикутника дорівнює нулю. Тому від цих гармонік за відсутності навантаження по замкненому трикутнику струм проходити не буде. Гармоніки ж, порядок яких кратний трьом, збігаються за фазою у всіх фазних обмотках, оскільки утворюють систему нульової послідовності, і їх сума дорівнює  $3\dot{E}_3$  (алгебраїчна сума гармонік, не кратних трьом, дорівнює нулю). Тоді струм третьої гармоніки у трикутнику дорівнює

$$\dot{I}_3 = \frac{3\dot{E}_3}{3Z_3} = \frac{\dot{E}_3}{Z_3}, \quad (2.33)$$

де  $Z_3$  – опір обмотки кожної фази для третьої гармоніки.

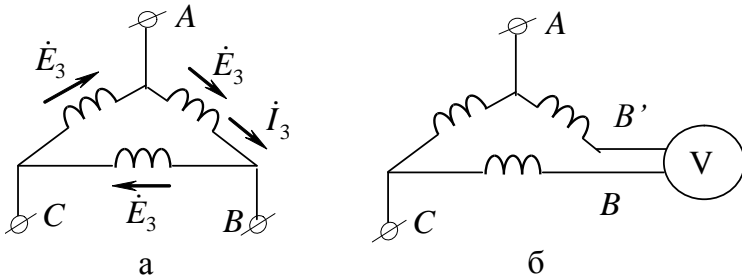


Рисунок 2.7

Аналогічні вирази можна одержати для всіх гармонік, кратних трьом. Тоді діюче значення струму, що проходить по замкненому трикутнику:

$$I = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots} \quad (2.34)$$

Спадання напруги в обмотках внаслідок проходження цього струму компенсують сильні струми ЕРС. Тому напруги між виводами фаз не містять гармонік, порядок яких кратний трьом.

2. Якщо з'єднати обмотки трифазного генератора у відкритий трикутник (рис. 2.7 б), то за наявності у фазних ЕРС гармонік, кратних трьом, на затискачах  $B$  та  $B'$  буде напруга, що дорівнює сумі ЕРС гармонік, кратних трьом:

$$u_{BB'} = 3E_{3m} \sin(\omega t + \psi_3) + 3E_{6m} \sin(\omega t + \psi_6) + \dots \quad (2.35)$$

Показання вольтметра у схемі, що зображена на рис. 2.7 б:

$$U = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + \dots} \quad (2.36)$$

Відкритий трикутник з ЕРС, що містить вищі гармоніки, застосовується як потроювач частоти.

3. У лінійній напрузі незалежно від того, у зірку або трикутник з'єднані обмотки генератора, кратні трьом гармоніки відсутні.

Цю особливість розглянемо для режиму холостого ходу генератора, тобто коли зовнішнє навантаження відсутнє. Однак ця властивість спостерігається й за наявності навантаження.

Розглянемо спочатку схему з'єднання у трикутник (рис. 2.7 а):

$$\dot{\Phi}_{A_3} = \dot{\Phi}_{B_3} - \dot{E}_3 + \dot{I}_3 \underline{Z}_3, \quad (2.37)$$

де  $\dot{\Phi}_{A_3}$ ,  $\dot{\Phi}_{B_3}$  – треті гармоніки потенціалів відповідно точки  $A$  та точки  $B$ .

Але  $\dot{E}_3 = \dot{I}_3 \underline{Z}_3$ , отже,  $\dot{\Phi}_{A_3} = \dot{\Phi}_{B_3}$ .

При з'єднанні у зірку лінійна напруга третьої гармоніки дорівнює різниці відповідних фазових напруг. Оскільки треті гармоніки у фазових напругах утворюють системи нульової послідовності, тобто збігаються за фазою, то при додаванні цієї різниці вони віднімаються. У фазовій напрузі можуть бути присутні усі гармоніки (постійна, що віднімається, як правило, відсутня). Отже, діюче значення фазової напруги

$$U_\phi = \sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots},$$

а у лінійній напрузі відсутні гармоніки, кратні трьом, тому

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} \sqrt{U_1^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots}$$

Звідси випливає, що

$$U_{\text{л}} < \sqrt{3} U_{\phi}. \quad (2.38)$$

При з'єднанні генератора та симетричного навантаження у зірку та за відсутності нейтрального проводу струми третіх і інших гармонік нульової послідовності не можуть проходити по лінійних проводах, тому що у такій схемі сума струмів у будь-який момент часу повинна дорівнюватися нулю, що неможливо при наявності вищих гармонік порядку, кратного трьом. Тому у приймачі немає напруг від струмів нульової послідовності й між нейтральними точками генератора та симетричного навантаження може з'явитися значна напруга, що містить тільки гармоніки, кратні трьом, яке може досягати небезпечних для життя значень:

$$U_{O'O} = E_{3m} \sin(\omega t + \psi_3) + E_{6m} \sin(\omega t + \psi_6) + \dots,$$

а його діюче значення

$$U_{O'O} = \sqrt{\frac{E_{3m}^2}{2} + \frac{E_{6m}^2}{2} + \dots}. \quad (2.39)$$

У схемі зірка – зірка при симетричному навантаженні фаз за наявності нульового проводу по ньому проходить струм потрійної частоти:

$$\dot{I}_{O_3} = \frac{\dot{E}_3}{\underline{Z}_{O_3} + \frac{\underline{Z}_{H_3}}{3}}, \quad (2.40)$$

де  $\underline{Z}_{H_3}$  – опір навантаження для третьої гармоніки;  $\underline{Z}_{O_3}$  – опір нульового проводу для третьої гармоніки.

По кожному лінійному проводу буде проходитиме струм  $\dot{I}_{O_3}/3$ . Аналогічно можна знайти інші струми від гармонік, кратних трьом.

## 3 ЧОТИРИПОЛЮСНИКИ

*Чотириполусником* називають скільки завгодно складне електричне коло, що має чотири зовнішні затискачі, через які вона може взаємодіяти із зовнішніми колами.

Трансформатор, фільтр, лінію електропередачі, мостову схему і т.д. можна розглядати як чотириполусник.

Теорія чотириполусників дозволяє встановлювати зв'язку між напругами, струмами двох гілок, підключених до чотирьох затискачів як завгодно складного кола, без дослідження режимів роботи її окремих ділянок.

Суть теорії полягає у такому:

1. Користуючись деякими узагальненими параметрами чотириполусника, можна визначати напруги та струми на його вході й виході, не розглядаючи процеси, що відбуваються всередині чотириполусника.

2. Складне електричне коло може бути розглянуте як сукупність об'єднаних за певною схемою найпростіших чотириполусників. Теорія чотириполусників дозволяє розрахувати параметри такого складеного чотириполусника за допомогою параметрів вхідних у нього чотириполусників.

3. Одержані у такий спосіб значення електричних величин на вході та виході дозволяють оцінити режим роботи каналу передачі в цілому. При цьому узагальнені параметри чотириполусника дозволяють зіставити та правильно оцінити передавальні властивості електричних кіл, різних за своїми властивостями і структурою.

4. Теорія чотириполусників дозволяє знаходити структуру та елементи чотириполусника за заданими характеристиках, тобто вирішувати завдання синтезу.

### 3.1 Класифікація чотириполюсників

Чотириполюсники класифікуються за різними ознаками. Вони можуть бути активними та пасивними, симетричними та несиметричними, лінійними та нелінійними, зворотними та незворотними, еквівалентними та нееквівалентними.

*Активні* чотириполюсники – це чотириполюсники, які містять гілки з некомпенсованими джерелами енергії, при цьому напруга на розімкнутих затискачах не дорівнює нулю. *Пасивні* чотириполюсники або не містять джерел енергії, або, якщо вони є, то сумарна їх дія взаємно компенсується всередині чотириполюсника таким чином, що напруга на вхідних і вихідних затискачах дорівнює нулю. Надалі розглянемо теорію пасивних чотириполюсників, тому що активний чотириполюсник може бути замінений еквівалентним йому пасивним і винесеним за затискачі останнього еквівалентними джерелами ЕРС.

Якщо чотириполюсник *симетричний*, то зміна місць підключення вхідних і вихідних затискачів не змінить струморозподілу у зовнішньому колі.

У *лінійних* чотириполюсниках зв'язок між струмами і напругами має лінійну залежність. У таких чотириполюсниках нелінійні елементи (її вольт-амперні характеристики мають нелінійний характер) відсутні.

*Зворотні* чотириполюсники – це такі чотириполюсники, для яких виконується принцип взаємності (відношення напруги на вході до струму на виході не залежить від того, яка пара затискачів обрана як вхідні).

*Еквівалентні* чотириполюсники – це такі чотириполюсники, при взаємній заміні яких вхідні та вихідні струми і напруги не змінюються. Чотириполюсники також класифікуються за схемами з'єднання вхідних у них елементів: *T*, *Π*, *Г*-подібні, *мостові* та *ін.*

### 3.2 Основні рівняння чотириполосників

Прийнято умовно зображувати чотириполосники так, як це показано на рис. 3.1.

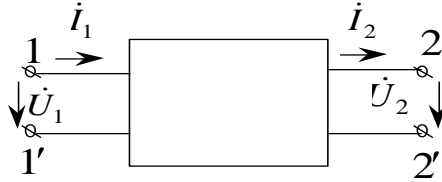


Рисунок 3.1

Це «прохідний» чотириполосник. У ньому електрична енергія передається зліва направо. Одну пару виводів називають *первинною (вхідна)*, а іншу – *вторинною (вихідна)* і позначають відповідно 1–1' і 2–2'. Вхідний струм позначають  $\dot{I}_1$ , вхідну напругу –  $\dot{U}_1$ , струм і напругу на виході –  $\dot{I}_2$  і  $\dot{U}_2$ . Чотириполосник є передатною ланкою між джерелом живлення та навантаженням. До виводів 1–1', як правило, приєднується джерело живлення; до виводів 2–2' – навантаження.

Залежності між двома напругами та двома струмами, що визначають режим на первинних і вторинних виводах, можуть бути записані у різній формі. Якщо вважати дві із зазначених величин заданими, то дві інші величини будуть пов'язані з ними системою двох рівнянь, які називаються *рівняннями чотириполосника*.

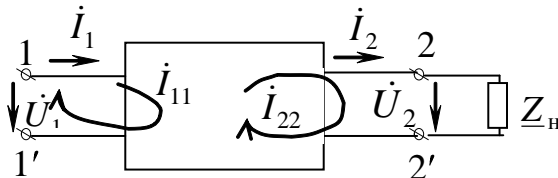


Рисунок 3.2



Нехай схема чотириполюсника містить  $n$  незалежних контурів. За перший (рис. 3.2) оберемо контур, що містить джерело енергії на затискачах 1–1', за другий – контур, що містить приймач, приєднаний до затискачів 2–2'. Будемо розглядати напругу на вхідних затискачах чотириполюсника  $\dot{U}_1$  як вхідну напругу. Таке включення прийнято називати *прямим*.

Складемо рівняння за методом контурних струмів:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{11}, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{22}, \\ \underline{Z}_{11}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{13}\dot{I}_{33} + \dots &= \dot{U}_1, \\ \underline{Z}_{21}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{23}\dot{I}_{33} + \dots &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{3.1}$$

Оскільки  $\underline{Z}_n \dot{I}_{22} = \dot{U}_2$ , то, переносячи величину  $\dot{U}_2$  у праву частину другого рівняння, зведемо систему рівнянь до вигляду

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{12}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{13}\dot{I}_{33} + \dots &= \dot{U}_1, \\ \underline{Z}_{21}\dot{I}_{11} + \underline{Z}_{22}\dot{I}_{22} + \underline{Z}_{23}\dot{I}_{33} + \dots &= \underbrace{-\underline{Z}_n \dot{I}_{22}}_{-\dot{U}_2}, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ураховуючи, що праві частини всіх рівнянь, крім перших двох, дорівнюють нулю, одержимо на підставі принципу накладення таке розв'язання

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = \dot{I}_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} (-\dot{U}_2) + \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \cdot 0 + \dots + 0, \\ \dot{I}_2 = \dot{I}_{22} &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} (-\dot{U}_2) + \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \cdot 0 + \dots + 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Коефіцієнти в (3.3) мають розмірність провідності, уведемо відповідні позначення:

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \underline{Y}_{11}, \quad -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \underline{Y}_{22}, \quad -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \underline{Y}_{12}, \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \underline{Y}_{21}.$$

Тоді рівняння чотириполюсника, записані в *Y-формі*, що зв'язують струми з напругами, мають вигляд

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \underline{Y}_{11}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = \underline{Y}_{21}\dot{U}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{U}_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Отримані співвідношення в матричній формі мають вигляд

$$\underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{Y}} \cdot \underline{\mathbf{U}}.$$

Для лінійного пасивного кола  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ , а отже,  $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$ . Із чотирьох *Y-параметрів* незалежних три, тому що  $\underline{Y}_{12} = -\underline{Y}_{21}$

Розв'язавши (3.4) щодо напруг  $\dot{U}_1$  і  $\dot{U}_2$ , одержимо рівняння чотириполюсника, записані в *Z-формі* струми, що зв'язують напруги, й

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \quad (3.5)$$

де

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{11} &= \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}, & \underline{Z}_{22} &= \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}, \\ \underline{Z}_{12} &= \frac{-\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}, & \underline{Z}_{21} &= \frac{-\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

при цьому  $\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_{21}$ .

Із чотирьох *Z-параметрів* незалежних три.

Рівняння (3.5) у матричній формі

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{Z}} \cdot \underline{\mathbf{I}}.$$

Найпоширенішою формою запису рівнянь чотириполюсника є така, при якій вхідні струм і напруга виражаються через вихідні напругу й струм. З рівнянь (3.3) можна записати

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \frac{\Delta_{22} \cdot \Delta}{\Delta \cdot \Delta_{12}} + \dot{I}_2 \frac{1}{\frac{\Delta_{12}}{\Delta}} = \dot{U}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} + \dot{I}_2 \frac{\Delta}{\Delta_{12}}. \quad (3.7)$$

Підставимо (3.7) у перше рівняння (3.3)

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \left( \dot{U}_2 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} + \dot{I}_2 \frac{\Delta}{\Delta_{12}} \right) - \dot{U}_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \\ &= \dot{U}_2 \left( \frac{\Delta_{11} \cdot \Delta_{22}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \right) + \dot{I}_2 \frac{\Delta_{11} \cdot \Delta}{\Delta \cdot \Delta_{12}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Уведемо позначення:

$$A_{11} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} - \text{величина безрозмірна};$$

$$A_{12} = \frac{\Delta}{\Delta_{12}} - \text{величина, вимірювана в омах};$$

$$A_{21} = \frac{\Delta_{11} \cdot \Delta_{22}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} - \text{величина, вимірювана у сименсах};$$

$$A_{22} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} - \text{величина безрозмірна}.$$

При цьому будуть виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

У матричній формі ці рівняння мають вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Рівняння (3.9) називають *рівнянням чотириполюсника в A-параметрах*. Враховуючи, що  $\Delta_{12} = \Delta_{21}$ , можна показати, що визначник матриці  $A$  дорівнює одиниці:

$$\begin{aligned} \det(A) &= A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{12}} \cdot \frac{\Delta_{11}}{\Delta_{12}} - \frac{\Delta}{\Delta_{12}} \cdot \left( \frac{\Delta_{11} \cdot \Delta_{22}}{\Delta \cdot \Delta_{12}} - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \right) = \\ &= \frac{\Delta_{22} \cdot \Delta_{11} - \Delta_{11} \cdot \Delta_{22} + \Delta_{12} \cdot \Delta_{21}}{\Delta_{12}^2} = 1. \end{aligned}$$

Отже,

$$\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1. \quad (3.10)$$

Із цього співвідношення випливає, що для визначення  $\dot{U}_1$  та  $\dot{I}_1$  достатньо знати тільки три коефіцієнти із чотирьох, тобто серед  $A$ -параметрів тільки три незалежні, аналогічно для  $Z$ -,  $Y$ -форм.

Таким чином, знаючи, що  $Y, Z, A$  – параметри залежать від параметрів елементів і конфігурації схеми чотиріполюсника, можна сформулювати зв'язок вхід–вихід, не застосовуючи розрахунки струмів й напруг у внутрішній частині чотиріполюсника, яка може являти собою досить складне електричне коло.

Існують інші співвідношення, що зв'язують у змішаній формі струми та напруги на вході і виході чотиріполюсника. Наведемо без вивення рівняння чотиріполюсника в  $H$  – і  $G$  – параметрах:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Усі параметри у загальному випадку – комплексні числа. Співвідношення, що зв'язують між собою параметри у різних формах запису, наведені у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Зв'язок параметрів чотириполюсника

Параметр	Z	Y	H	A
$\underline{Z}$	$\underline{Z}_{11}$ $\underline{Z}_{12}$ $\underline{Z}_{21}$ $\underline{Z}_{22}$	$\frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y}$ $-\frac{\underline{Y}_{12}}{\Delta_Y}$ $-\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y}$ $\frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y}$	$\frac{\Delta_H}{H_{22}}$ $\frac{H_{12}}{H_{22}}$ $-\frac{H_{21}}{H_{22}}$ $\frac{1}{H_{22}}$	$\frac{A_{11}}{A_{21}}$ $\frac{\Delta_A}{A_{21}}$ $\frac{1}{A_{21}}$ $\frac{A_{22}}{A_{21}}$
$\underline{Y}$	$\frac{\underline{Z}_{22}}{\Delta_Z}$ $-\frac{\underline{Z}_{12}}{\Delta_Z}$ $-\frac{\underline{Z}_{21}}{\Delta_Z}$ $\frac{\underline{Z}_{11}}{\Delta_Z}$	$\underline{Y}_{11}$ $\underline{Y}_{12}$ $\underline{Y}_{21}$ $\underline{Y}_{22}$	$\frac{1}{H_{11}}$ $-\frac{H_{12}}{H_{11}}$ $\frac{H_{21}}{H_{11}}$ $\frac{\Delta_H}{H_{11}}$	$\frac{A_{22}}{A_{12}}$ $-\frac{\Delta_A}{A_{12}}$ $-\frac{1}{A_{12}}$ $\frac{A_{11}}{A_{12}}$
H	$\frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{\underline{Z}_{21}}{\underline{Z}_{22}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{22}}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{11}}$ $-\frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{11}}$ $\frac{\Delta_Y}{\underline{Y}_{11}}$	$H_{11}$ $H_{12}$ $H_{21}$ $H_{22}$	$\frac{A_{12}}{A_{22}}$ $\frac{\Delta_A}{A_{22}}$ $-\frac{1}{A_{22}}$ $\frac{A_{21}}{A_{22}}$
A	$\frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{\Delta_Z}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{1}{\underline{Z}_{21}}$ $\frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}}$	$-\frac{\underline{Y}_{22}}{\Delta_Y}$ $-\frac{1}{\Delta_Y}$ $-\frac{\underline{Y}_{21}}{\Delta_Y}$ $-\frac{\underline{Y}_{11}}{\Delta_Y}$	$-\frac{\Delta_H}{H_{21}}$ $-\frac{H_{11}}{H_{21}}$ $-\frac{H_{22}}{H_{21}}$ $-\frac{1}{H_{21}}$	$A_{11}$ $A_{12}$ $A_{21}$ $A_{22}$
У таблиці позначені: $\Delta_Z, \Delta_Y, \Delta_H, \Delta_A$ – визначники відповідних матриць				

Розглянемо більш детально рівняння чотириполюсника в  $A$  – параметрах.

### 3.3 Режим зворотного живлення чотириполюсників

При виведенні рівнянь чотириполюсника у попередньому розділі ми припускали, що джерело енергії було підключено до виводів 1–1'. Поміняємо місцями полюсам чотириполюсника. Приєднаємо джерело до виводів 2–2', а до виводів 1–1' – опір навантаження  $\underline{Z}_H$  (рис. 3.3). Таке включення називають *зворотним*.

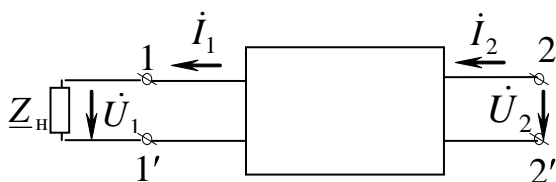


Рисунок 3.3

Запишемо рівняння чотириполюсника в  $A$  – параметрах з урахуванням того, що напрямки струмів у ньому щодо прийнятого на рис. 3.2 зміняться на протилежні:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2, \\ -\dot{I}_1 &= A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2. \end{aligned}$$

Розв'яжемо цю систему щодо  $\dot{U}_2$  та  $\dot{I}_2$ :

$$\dot{U}_2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_A}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_A},$$

де  $\Delta_A$  – визначник  $A$ -матриці,  $\Delta_A = 1$ .

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= \Delta_1 = A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{I}_1, \\ \dot{I}_2 &= \Delta_2 = A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}_1, \end{aligned} \tag{3.13}$$

де  $\Delta_1$  та  $\Delta_2$  – визначники, для яких у  $\Delta_A$  замінені відповідно перший і другий стовпці на  $\dot{U}_1$  та  $\dot{I}_1$ . Рівняння (3.13) називають рівняннями чотириполюсника при зворотному живленні, а (3.9) – відповідно при прямому живленні.

Зауважимо, що рівняння чотириполюсника при зворотному живленні відрізняються від рівнянь прямого живлення місцем розміщення коефіцієнтів  $A_{11}$  і  $A_{22}$ . Звідси умова симетричності чотириполюсників:  $A_{11} = A_{22}$ .

### 3.4 Визначення А-параметрів за допомогою режимів короткого замикання та холостого ходу

Режимам холостого ходу (ХХ) і короткого замикання (КЗ) при прямому і зворотному живленні чотириполюсника відповідають схеми рис. 3.4 (а, б – режими ХХ і КЗ при прямому живленні; в, г – при зворотному живленні).

#### Пряме живлення

Режим холостого ходу. Беручи до уваги, що  $\dot{I}_2 = 0$ ,  $\underline{Z}_2 = \infty$ , формула (3.9) набуває вигляду

$$\dot{U}_1 \Big|_{\dot{I}_2=0} = \dot{U}_{1x} = A_{11} \dot{U}_{2x},$$

$$\dot{I}_1 \Big|_{\dot{I}_2=0} = \dot{I}_{1x} = A_{21} \dot{U}_{2x}.$$

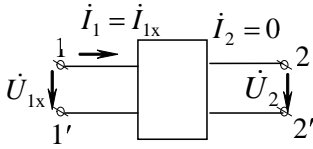
З боку виводів 1-1' у режимі холостого ходу вхідний опір чотириполюсника

$$\underline{Z}_{1bx} \Big|_{\underline{Z}_2=\infty} = \underline{Z}_{1x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{I}_{1x}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}. \quad (3.14)$$

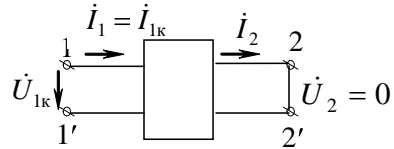
Режим короткого замикання. Враховуючи, що у цьому випадку  $\underline{Z}_2 = 0$ ,  $\dot{U}_2 = 0$  (рис. 3.4 б), співвідношення (3.9) буде мати вигляд

$$\dot{U}_{1 \dot{U}_2=0} = \dot{U}_{1к} = A_{12} \dot{I}_{2к},$$

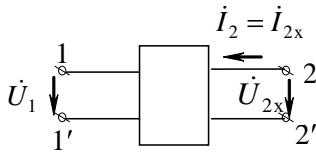
$$\dot{U}_{1 \dot{U}_2=0} = \dot{I}_{1к} = A_{22} \dot{I}_{2к}.$$



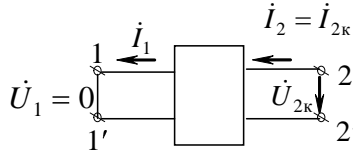
а



б



в



г

Рисунок 3.4

Вхідний опір чотириполюсника з боку виводів 1–1'

$$\dot{Z}_{1вх} \dot{Z}_{2=0} = \dot{Z}_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}. \quad (3.15)$$

#### Зворотне живлення

Враховуючи, що при зворотному живленні  $A_{11}$  і  $A_{22}$  міняються місцями, можна одержати ще два рівняння (рис. 3.4 в, г).

Вхідний опір з боку виводів 2-2' у режимі холостого ходу

$$\dot{Z}_{2x} = \frac{\dot{U}_{2x}}{\dot{I}_{2x}} = \frac{A_{22}}{A_{21}}. \quad (3.16)$$

Вхідний опір чотириполюсника з боку виводів 2-2' у режимі короткого замикання

$$\dot{Z}_{2к} = \frac{\dot{U}_{2к}}{\dot{I}_{2к}} = \frac{A_{12}}{A_{11}}. \quad (3.17)$$



Опори  $\underline{Z}_{1к}$ ,  $\underline{Z}_{1х}$ ,  $\underline{Z}_{2к}$ ,  $\underline{Z}_{2х}$  називають параметрами короткого замикання та холостого ходу. Виразимо  $A$ -параметри через ці опори. Із цією метою з (3.16) віднімемо (3.15):

$$\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к} = \frac{A_{22}}{A_{21}} - \frac{A_{12}}{A_{11}} = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}}{A_{21}A_{11}} = \frac{1}{A_{21}A_{11}}.$$

Після спрощення

$$\frac{\underline{Z}_{1х}}{\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к}} = \frac{A_{11}/A_{21}}{1/A_{21}A_{11}} = A_{11}^2,$$

одержимо

$$A_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1х}}{\underline{Z}_{2х} - \underline{Z}_{2к}}}. \quad (3.18)$$

Враховуючи (3.16), (3.14), (3.15), одержимо

$$A_{12} = A_{11}\underline{Z}_{2к}, \quad A_{21} = \frac{A_{11}}{\underline{Z}_{1х}}, \quad A_{22} = \frac{A_{11}}{\underline{Z}_{1х}}\underline{Z}_{2х}. \quad (3.19)$$

Рівняння  $\det(A) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$  – перевірочне.

### 3.5 Навантажувальний режим чотириполюсника

Нехай до виводів 2–2' чотириполюсника підключений опір навантаження  $\underline{Z}_2$ . При цьому  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{I}_1$  та  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$  зв'язані співвідношеннями (3.9). Від'єднаємо опір  $\underline{Z}_2$  (режим холостого ходу). Відрегулюємо вхідну напругу  $\dot{U}_{1х}$  так, щоб напруга на вихідних розімкнутих затискачах  $\dot{U}_{2х}$  дорівнювала напрузі  $\dot{U}_2$  у навантажувальному режимі:

$$\dot{U}_{1х} = A_{11}\dot{U}_2, \quad \dot{I}_{1х} = A_{21}\dot{U}_2.$$

Замкнемо виводи 2–2' ( $\dot{U}_2 = 0$ , режим короткого замикання). Відрегулюємо вхідну напругу  $\dot{U}_{1к}$  так, щоб струм на вихід-

них затискачах  $\dot{I}_{2к}$  дорівнював струму  $\dot{I}_2$  у навантажувальному режимі. Тоді

$$\dot{U}_{1к} = A_{12}\dot{I}_2, \quad \dot{I}_{1к} = A_{22}\dot{I}_2.$$

При додаванні одержимо

$$\dot{U}_{1х} + \dot{U}_{1к} = \dot{U}_1, \quad \dot{I}_{1х} + \dot{I}_{1к} = \dot{I}_1.$$

Отримані співвідношення показують, що робочий режим чотириполюсника (навантаження  $\underline{Z}_2$  підключено до виводів 2–2') можна відтворити шляхом накладення режимів холостого ходу та короткого замикання, тобто можна змоделювати навантажувальний режим, у деяких випадках потребуючий джерел великої потужності, накладенням крайніх навантажувальних режимів (холостого ходу та короткого замикання), коли такі джерела не потрібні (навантаження не споживає потужності!).

### 3.6 Еквівалентні схеми заміщення чотириполюсника

Будь-який чотириполюсник можна звести до опорів або провідностей, з'єднаним за T– або П–подібною схемою (рис. 3.5). Еквівалентною схемою заміщення реального чотириполюсника називається найпростіший триелементний чотириполюсник (T– або П–подібний), що має такі самі  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$  або A–параметри, як і заданий чотириполюсник.

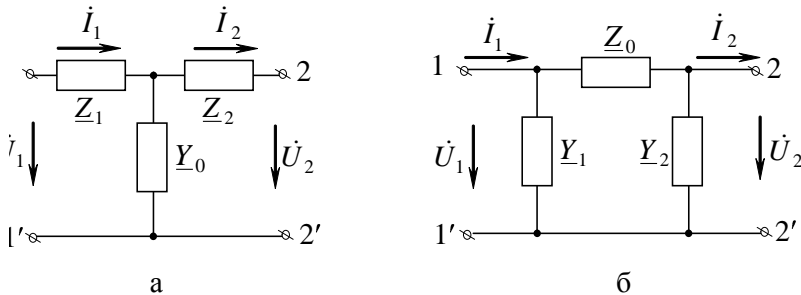


Рисунок 3.5

Три опори Т- або П-схем повинні бути розраховані з урахуванням того, що схема заміщення повинна мати такі самі А-параметри, які має замінений їй чотириполіусник.

Виразимо  $\dot{U}_1$  та  $\dot{I}_1$  Т- подібної схеми через  $\dot{U}_2$ ,  $\dot{I}_2$ , використовуючи рівняння, складені за законами Кірхгофа:

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \underline{Y}_2 \dot{U}_2 + \dot{U}_2 \underline{Y}_0.$$

Підставляючи  $\dot{I}_1$  у вираз для визначення  $\dot{U}_1$  та групуючи однорідні члени, одержимо

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \underline{Z}_1 \dot{I}_2 + \underline{Y}_2 \dot{U}_2 + \dot{U}_2 \underline{Y}_0 + \dot{U}_2 = (\underline{Z}_1 \underline{Y}_0 \dot{U}_2 + \\ &+ \underline{Y}_2 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= \underline{Y}_0 \dot{U}_2 + (\underline{Y}_2 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0) \dot{I}_2. \end{aligned}$$

З іншого боку для цієї схеми справедливий загальний запис рівнянь чотириполіусника у А-параметрах:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \dot{U}_2 + A_{12} \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \dot{U}_2 + A_{22} \dot{I}_2. \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при  $\dot{U}_2$  та  $\dot{I}_2$ , одержимо А-параметри як функції параметрів Т-подібної схеми заміщення:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 + \underline{Z}_1 \underline{Y}_0, & A_{12} &= \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \underline{Y}_0, \\ A_{21} &= \underline{Y}_0, & A_{22} &= 1 + \underline{Z}_2 \underline{Y}_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Провівши аналогічні дії, можна одержати подібні співвідношення для П- подібної схеми чотириполіусника:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 1 + \underline{Y}_2 \underline{Z}_0, & A_{12} &= \underline{Z}_0, \\ A_{21} &= \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_1 \underline{Y}_2 \underline{Z}_0, & A_{22} &= 1 + \underline{Y}_1 \underline{Z}_0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Два чотириполіусники еквівалентні, якщо у них однакові А-параметри. Це впливає з рівнянь (3.9). Отже, якщо відомі А-параметри якогось чотириполіусника, то його можна замінити на еквівалентну йому Т- або П-подібну схеми заміщення, якщо визначити параметри цих схем заміщення у виразах (3.20) і (3.21). При цьому для Т- подібної схеми заміщення

$$\underline{Y}_0 = A_{21}, \quad \underline{Z}_1 = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}}. \quad (3.22)$$

Параметри елементів П- подібної схеми заміщення

$$\underline{Z}_0 = A_{12}, \quad \underline{Y}_1 = \frac{A_{22} - 1}{A_{12}}, \quad \underline{Y}_2 = \frac{A_{11} - 1}{A_{12}}. \quad (3.23)$$

### 3.7 Симетричний чотириполюсник

Зустрічаються такі електричні схеми, у яких спостерігається симетрія параметрів щодо вхідних і вихідних виводів. У еквівалентних схемах заміщення це приводить до такого: для Т-схеми  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}$ ; для П-схеми  $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}$ .

Тоді для Т-схеми

$$A_{11} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_0, \quad A_{22} = 1 + \underline{Z}\underline{Y}_0,$$

для П-схеми

$$A_{11} = 1 + \underline{Y}\underline{Z}_0, \quad A_{22} = 1 + \underline{Y}\underline{Z}_0.$$

Отже, для симетричного чотириполюсника  $A_{11} = A_{22}$ . Таким чином, симетричний чотириполюсник характеризується двома незалежними параметрами.

### 3.8 Родинні чотириполюсники

Розрахунки коефіцієнтів за допомогою формул (3.16 – 3.17) дають два розв'язки, тому що при добуванні квадратного кореня  $A_{11}$  можуть набуватися як додатні, так і від'ємні значення. У результаті, крім матриці  $[A]$ , одержаної також за допомогою співвідношень (3.20), з'являється додатковий розв'язок у вигляді нової матриці, кожний елемент якої має протилежний знак.

Наявність двох розв'язків традиційно пояснюють тим, що коефіцієнти  $A_{ij}$  залежать не тільки від того, яка структура та чотириполюсника, але також і від додатних напрямків напруг і струмів на вході і виході. Остання обставина не може бути вра-

хована ні розрахунками, ні експериментальним визначенням опорів у режимах холостого ходу та короткого замикання. Виникнення двох розв'язків може також мати інше пояснення. Зміна полярності вихідного струму та напруги, схемно реалізоване у вигляді перехреснування вихідних затискачів, утворює новий чотириполіусник, що характеризується своєю схемою заміщення та матрицею  $[A]$ . Таким чином, виникає поняття *родинних* чотириполіусників, що одночасно задовольняють ті самі значення вхідних опорів  $Z_{1x}, Z_{2x}, Z_{1k}, Z_{2k}$ . І щодо цього обидва таких чотириполіусники рівноправні. У всіх коефіцієнтів матриці  $[A]_{(2)}$  родинного чотириполіусника знаки змінюються на протилежні щодо коефіцієнтів матриці  $[A]_{(1)}$ .

Схеми заміщення родинних чотириполіусників різні, а відповідність із погляду передавальних властивостей можна проілюструвати за допомогою рис. 3.6.

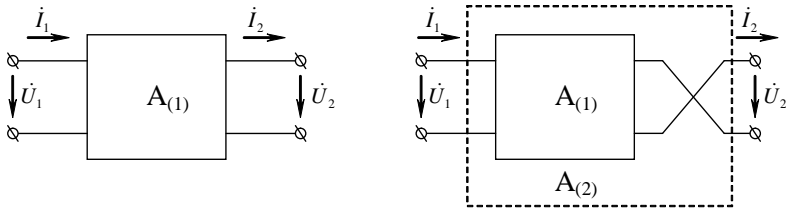


Рисунок 3.6

Необхідно зазначити, що схемна реалізація родинних чотириполіусників у ряді випадків неможлива, тому що у результаті розрахунків параметрів схем заміщення можуть бути отримані від'ємні значення активних опорів.

### 3.9 Характеристичні параметри чотириполюсника

Для несиметричних чотириполюсників можна підібрати таку пару опорів  $\underline{Z}_{1C}$  і  $\underline{Z}_{2C}$ , для яких дотримуються такі умови:

1. Вхідний опір з боку виводів 1–1'  $\underline{Z}_{1ВХ} = \underline{Z}_{1C}$ , якщо до виводів 2–2' підключений опір  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2C}$  (рис. 3.7 а).

2. Вхідний опір з боку виводів 2–2'  $\underline{Z}_{2ВХ} = \underline{Z}_{2C}$ , якщо до виводів 1–1' підключений опір  $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1C}$  (рис. 3.7 б).

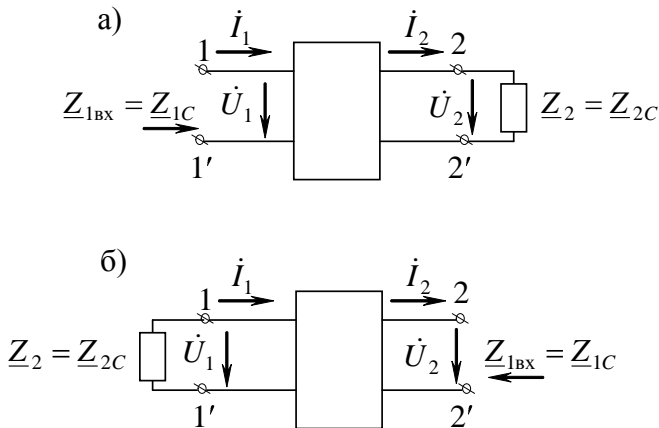


Рисунок 3.7

$\underline{Z}_{1C}$  і  $\underline{Z}_{2C}$  називають *характеристичними опорами* (характеристичними параметрами) чотириполюсника.

Виразимо  $\underline{Z}_{1C}$  та  $\underline{Z}_{2C}$  через  $A$ -параметри. Для цього скористаємося рівняннями (3.9) і (3.11):

$$\underline{Z}_{1ВХ} = \underline{Z}_{1C} = \left( \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2C}} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{2C} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{2C} + A_{22}}. \quad (3.24)$$

При виведенні цього співвідношення чисельник і знаменник дробу розділили на  $\dot{I}_2$  та урахували, що при  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2C}$   $\underline{Z}_{2C} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ .

З рівнянь (3.11) випливає, що

$$\underline{Z}_{2\text{вх}} = \underline{Z}_{2\text{С}} = \left( \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right)_{Z_1=Z_{1\text{С}}} = \frac{A_{22}\dot{U}_1 + A_{12}\dot{I}_1}{A_{21}\dot{U}_1 + A_{11}\dot{I}_1} = \frac{A_{22}\underline{Z}_{1\text{С}} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{1\text{С}} + A_{11}}. \quad (3.25)$$

При виведенні співвідношення (3.25) чисельник і знаменник дроби розділили на  $\dot{I}_1$  та врахувавши, що за прийнятих умов  $\underline{Z}_{1\text{С}} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ .

Розв'язуючи спільно рівняння (3.24) і (3.25) щодо  $\underline{Z}_{1\text{С}}$  та  $\underline{Z}_{2\text{С}}$  (два рівняння із двома невідомими), одержимо

$$\underline{Z}_{1\text{С}} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}, \quad (3.26)$$

$$\underline{Z}_{2\text{С}} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}. \quad (3.27)$$

Враховуючи (3.14) – (3.17), одержимо

$$\underline{Z}_{1\text{С}} = \sqrt{\underline{Z}_{1\text{х}} \underline{Z}_{1\text{к}}}, \quad \underline{Z}_{2\text{С}} = \sqrt{\underline{Z}_{2\text{х}} \underline{Z}_{2\text{к}}}. \quad (3.28)$$

Третім характеристичним параметром чотириполюсника є *постійна передачі (або міра передачі)*, яка характеризує чотириполюсник як елемент, через який передається потужність, і в загальному випадку являє собою комплексне число

$$\Gamma = A + jB, \quad (3.29)$$

де  $A$  – стала ослаблення,  $B$  – стала фази.

Фізичний зміст величин  $A$  і  $B$  пояснимо нижче.

Стала передачі повинна задовольняти умови

$$\begin{aligned} ch\Gamma &= \sqrt{A_{11}A_{22}}, & \text{а} \\ sh\Gamma &= \sqrt{A_{12}A_{21}}. & \text{б} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Ці вирази не суперечать співвідношенню (3.10), оскільки

$$ch^2\Gamma - sh^2\Gamma = 1.$$

$\underline{Z}_{1C}, \underline{Z}_{2C}, \Gamma$  називають *вторинними* параметрами чотириполюсника. Ці величини незалежні одна від одної і є функціями параметрів чотириполюсника.

**3.10 Рівняння чотириполюсника у гіперболічних функціях**

Виразимо за допомогою характеристичних параметрів співвідношення між виразами та струмами на вході й виході чотириполюсника. Із цією метою розділимо та помножимо (3.26) на (3.27):

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}}, \tag{3.31}$$

$$\sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}. \tag{3.32}$$

Помножимо та розділимо (3.30 а) на (3.31):

$$ch\Gamma \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} = A_{11}, \tag{3.33}$$

$$ch\Gamma \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} = A_{22}. \tag{3.34}$$

Помножимо та розділимо (3.30 б) на (3.32):

$$sh\Gamma \sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}} = A_{12}, \tag{3.35}$$

$$\frac{sh\Gamma}{\sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}}} = A_{21}. \tag{3.36}$$

Таким чином, за допомогою рівнянь (3.33) – (3.36) можна виразити  $A$ -параметри через характеристичні параметри чотириполюсника. Для цього (3.33) – (3.36) підставимо у (3.9), тоді



$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} ch\Gamma \dot{U}_2 + sh\Gamma \sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}} \dot{I}_2 = \\ &= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \left( ch\Gamma \dot{U}_2 + sh\Gamma \underline{Z}_{2C} \dot{I}_2 \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{sh\Gamma}{\sqrt{\underline{Z}_{1C} \underline{Z}_{2C}}} \dot{U}_2 + ch\Gamma \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \dot{I}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} \left( \frac{sh\Gamma}{\underline{Z}_{2C}} \dot{U}_2 + ch\Gamma \dot{I}_2 \right). \quad (3.38)$$

Одержали рівняння чотириполюсника, у яких  $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$  зв'язані один з одним за допомогою трьох незалежних характеристичних параметрів. Оскільки в ці співвідношення входять гіперболічні функції, то вони називаються *рівняннями чотириполюсника у гіперболічних функціях*.

### 3.11 Режим узгодженого навантаження чотириполюсника

Підключимо до вихідних виводів чотириполюсника  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2C}$ , тоді  $\underline{Z}_{1\text{вх}} = \underline{Z}_{1C}$ . Це відповідає режиму погодженого навантаження. Погоджений режим – це режим передачі максимальної потужності. У цьому випадку  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_{2C}$ . Винесемо у (3.37)  $\dot{U}_2$ , а у (3.38)  $\dot{I}_2$  за дужки, тоді

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \left( ch\Gamma + \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2} \underline{Z}_{2C} sh\Gamma \right) = \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \left( ch\Gamma + sh\Gamma \right) = \\ &= \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} e^\Gamma, \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= \dot{I}_2 \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} \left( \frac{sh\Gamma}{Z_{2C}} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} + ch\Gamma \right) = \dot{I}_2 \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} \left( h\Gamma + ch\Gamma \right) = \\
 &= \dot{I}_2 \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} e^\Gamma.
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

Рівняння (3.39), (3.40) називають рівняннями чотириполюсника для узгодженого режиму. Знайдемо добуток вхідного струму та напруги

$$\dot{U}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{I}_2 e^{2\Gamma}.$$

Звідси

$$\Gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2}.$$

У випадку

$$\dot{U}_1 = U_1 e^{j\psi_{u1}}, \dot{U}_2 = U_2 e^{j\psi_{u2}}, \dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_{i1}}, \dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_{i2}}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 e^{j\psi_{u1}} I_1 e^{j\psi_{i1}}}{U_2 e^{j\psi_{u2}} I_2 e^{j\psi_{i2}}} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} + \\
 &+ j \frac{1}{2} \ln \left( e^{j\psi_{u1} + j\psi_{i1} - j\psi_{u2} - j\psi_{i2}} \right) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}}_A + j \underbrace{\frac{1}{2} \ln \left( e^{j\psi_u + j\Delta\psi_i} \right)}_B
 \end{aligned}
 \tag{3.42}$$

Наведені співвідношення дозволяють пояснити фізичний зміст А і В: А – *стала ослаблення (коефіцієнт згасання)*, враховує зміну повної потужності сигналу при проходженні через чотириполюсник; В – *стала фази (коефіцієнт фази)*, показує зміну фази напруги та струму при проходженні сигналу від первинних виводів до вторинних.

Значення А та В можна визначити з рівнянь

$$e^{\Gamma} = ch\Gamma + sh\Gamma = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}},$$

$$\Gamma = \ln \left( \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \right). \quad (3.43)$$

У симетричних чотириполюсниках  $A_{11} = A_{22}$ , тоді на підставі (3.25)

$$\underline{Z}_{1C} = \underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \underline{Z}_C. \quad (3.43)$$

Зв'язок між напругами та струмами на вході й виході чотириполюсника можна виразити за допомогою двох характеристичних опорів і коефіцієнта передачі. На підставі (3.37) і (3.38) для симетричних чотириполюсників

$$\dot{U}_1 = ch\Gamma \dot{U}_2 + \underline{Z}_C sh\Gamma \dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = \frac{sh\Gamma}{\underline{Z}_C} \dot{U}_2 + ch\Gamma \dot{I}_2. \quad (3.44)$$

Якщо симетричний чотириполюсник навантажити на  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$ , то згідно з (3.39), (3.40)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\Gamma}, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\Gamma}. \quad (3.45)$$

Для симетричного чотириполюсника характеристичний опір  $\underline{Z}_C$  називають *повторним*. Це пояснюється тим, що при  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$  вхідний опір з боку вхідних виводів теж дорівнюватиме  $\underline{Z}_C$ , отже, (3.45) можна подати у такий спосіб:

$$U_1 e^{j\psi_{u_1}} = U_2 e^{j\psi_{u_2}} e^{A+jB}, \quad I_1 e^{j\psi_{i_1}} = I_2 e^{j\psi_{i_2}} e^{A+jB},$$

звідси

$$\frac{U_1}{U_2} = e^A, \quad \frac{I_1}{I_2} = e^A, \quad \psi_{u_1} - \psi_{u_2} = \psi_{i_1} - \psi_{i_2} = B. \quad (3.46)$$

Із цих співвідношень ще більш чітко проглядається фізичний зміст сталої ослаблення та фази.

Одиниці виміру сталої ослаблення та фази.

Стала ослаблення

$$A = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$$

вимірюється в *неперах*. 1 непер відповідає зменшенню модуля напруги або струму в  $e$  раз при проходженні струму від вхідних виводів до вихідних у симетричному чотириполюснику, навантаженому на  $Z_C$ . Стала фази  $B$  вимірюється в *радіанах* або *градусах*. Застосовуються інші одиниці виміру ослаблення – *белли* та *децибелли*. Стала в беллах визначається за формулою

$$A = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2},$$

де  $S_1, S_2$  – повні потужності відповідно на вході та виході чотириполюсника.

Для симетричного погодженого чотириполюсника

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{U_1 U_1 / Z_C}{U_2 U_2 / Z_C} = \frac{I_1 Z_C I_1}{I_2 Z_C I_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}.$$

У цьому випадку стала ослаблення (у беллах)

$$A = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

У децибеллах ослаблення

$$A = 10 \lg \frac{S_1}{S_2} = 10 \lg \frac{U_1}{U_2} = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

### 3.12 Передавальні функції чотириполюсника

Струми та напруги можуть бути виражені через струми та напруги з боку входу і виходу за допомогою передавальних коефіцієнтів

$k_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$  і  $k_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$ . Передавальна функція – це відношення комплексних амплітуд або комплексних діючих значень електричної величини на виході і вході чотириполюсника при заданому режимі навантаження. Виразивши ці коефіцієнти

через  $A$ -параметри, одержимо коефіцієнт передачі (або передавальну функцію) за напругою

$$k_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\frac{\dot{U}_2}{Z_2}} = \frac{Z_2}{A_{11}Z_2 + A_{12}} \quad (3.47)$$

і коефіцієнт передачі за струмом

$$k_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_2}{A_{21}\dot{I}_2 Z_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{21}Z_2 + A_{22}}. \quad (3.48)$$

Якщо чотириполіусник навантажений на характеристичний опір, то відповідно до (3.39), (3.40)

$$k_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_2 \sqrt{Z_{1C}/Z_{2C}} e^\Gamma} = \sqrt{\frac{Z_{2C}}{Z_{1C}}} e^{-\Gamma},$$

$$k_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_2 \sqrt{Z_{2C}/Z_{1C}} e^\Gamma} = \sqrt{\frac{Z_{1C}}{Z_{2C}}} e^{-\Gamma}.$$

Якщо  $U_2, Z_2, U_1, I_1$  є функціями частоти, то

$$k_U(\omega) = \frac{Z_2(\omega)}{A_{11}(\omega) Z_2(\omega) + A_{12}(\omega)}$$

$$k_I(\omega) = \frac{1}{A_{21}(\omega) Z_2(\omega) + A_{22}(\omega)}$$

Модулі цих величин являють собою амплітудно-частотні характеристики (АЧХ), а їх аргументи – фазо-частотні характеристики (ФЧХ).

Використовуються і такі передавальні функції, як *передавальний опір*

$$k_W = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\frac{\dot{U}_2}{Z_2}} = \frac{Z_2}{A_{21}Z_2 + A_{22}}$$

і *передавальна провідність*

$$k_{UI} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{I}_2}{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_2}{A_{11}\dot{I}_2 Z_2 + A_{12}\dot{I}_2} = \frac{1}{A_{11}Z_2 + A_{12}}.$$

### 3.13 З'єднання чотириполіусників

Розглянемо три види з'єднання чотириполіусників – *каскадне* (схема з'єднання у вигляді кола, рис. 3.8), *паралельне* (рис. 3.10) і *послідовне* (рис. 3.11).

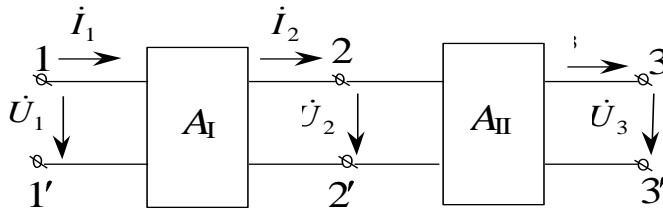


Рисунок 3.8

#### 3.13.1 Каскадне з'єднання

Нехай у схемі з'єднання задані  $A$ -параметри чотириполіусника ( $A_I$ ) і ( $A_{II}$ ). Виразимо напругу та струм на вході чотириполіусника заданими напругами та струмами на виході останнього чотириполіусника (у цьому випадку другого). Для першого та другого чотириполіусників справедливо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_I \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{II} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Підставивши значення матриці  $\begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}$  з (3.50) у (3.49), одержимо

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_I \mathbf{A}_{II} \begin{bmatrix} \dot{U}_3 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^{n=2} \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} \dot{U}_{n+1} \\ \dot{i}_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Якщо схема складається з  $n$  чотириполюсників, справедлива рівність

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{i}_1 \end{bmatrix} = \prod_{k=1}^n \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} \dot{U}_{n+1} \\ \dot{i}_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_e \begin{bmatrix} \dot{U}_{n+1} \\ \dot{i}_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

де  $A_e$  – еквівалентна матриця, що дорівнює добутку  $n$  матриць,

$$A_e = \prod_{k=1}^n \mathbf{A}_k.$$

Таким чином, матриця  $A$ -параметрів каскадно з'єднаних чотириполюсників дорівнює добутку матриць  $A$ -параметрів окремих чотириполюсників.

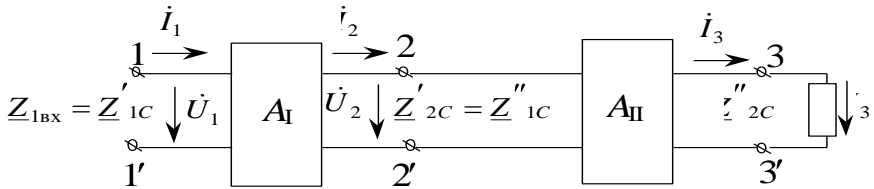


Рисунок 3.9

Нехай є два чотириполюсники зі сталими передачі  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  й із характеристичними опорами  $\underline{Z}'_{1C}, \underline{Z}'_{2C}, \underline{Z}''_{1C}, \underline{Z}''_{2C}$ . Причому,  $\underline{Z}'_{2C} = \underline{Z}''_{1C}$ . Якщо включити їх за ланцюговою схемою (рис. 3.9) і підключити на виході другого чотириполюсника  $\underline{Z}''_{2C}$ , то буде погоджене включення двох чотириполюсників. Відповідно до (3.39)

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 \sqrt{\frac{\underline{Z}'_{1C}}{\underline{Z}'_{2C}}} e^{\Gamma_1}, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_3 \sqrt{\frac{\underline{Z}''_{1C}}{\underline{Z}''_{2C}}} e^{\Gamma_2}.$$

Після підстановки одержимо

$$\dot{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}'_{1C} \underline{Z}''_{1C}}{\underline{Z}'_{2C} \underline{Z}''_{2C}}} \dot{U}_3 e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}'_{1C}}{\underline{Z}''_{2C}}} \dot{U}_3 e^{\Gamma_1 + \Gamma_2} = \sqrt{\frac{\underline{Z}'_{1C}}{\underline{Z}''_{2C}}} \dot{U}_3 e^{\sum_{k=1}^2 \Gamma_k}.$$

Якщо ланцюгова схема буде складатися з  $n$  погоджених чотиріполюсників, то

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n+1} \sqrt{\frac{\underline{Z}'_{1C}}{\underline{Z}^{(n)}_{2C}}} e^{\sum_{k=1}^n \Gamma_k}, \quad (3.52)$$

де  $\dot{U}_{n+1}$  – напруга на виході останнього чотиріполюсника.

У схемі, що складається з  $n$  погоджених симетричних чотиріполюсників,

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{n+1} e^{\sum_{k=1}^n \Gamma_k}.$$

### 3.13.2 Паралельне з'єднання

При паралельному з'єднанні чотиріполюсників (рис. 3.10) напруги на вході та виході чотиріполюсників дорівнюють:  $\dot{U}'_1 = \dot{U}''_1$ ,  $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_2$ , тобто є загальними для всіх чотиріполюсників. Тому як систему, що описує це з'єднання, слід обирати систему рівнянь у  $Y$ -параметрах. Для схеми (рис. 3.10) справедливо

$$\begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix}.$$

Додамо ці вирази з урахуванням того, що  $\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1$ ,  $\dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2$ ,  $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 = \dot{U}''_1$ ,  $\dot{U}_2 = \dot{U}'_2 = \dot{U}''_2$ :



$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{i}'_1 + \dot{i}''_1 \\ \dot{i}'_2 + \dot{i}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_I + \mathbf{Y}_{II} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{k=1}^{n=2} \mathbf{Y}_k \right) \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}.$$

Якщо паралельно включено  $n$  чотириполюсників, то

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{k=1}^n \mathbf{Y}_k \right) \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_E \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Отже, при паралельному з'єднанні чотириполюсників матрицею  $Y$ -параметрів є сума матриць  $Y$ -параметрів окремих чотириполюсників.

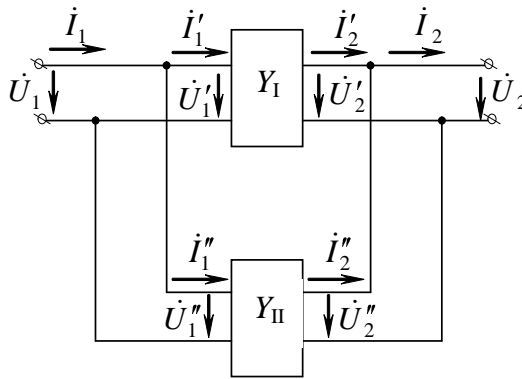


Рисунок 3.10

### 3.11.3 Послідовне з'єднання

При послідовному включенні чотириполюсників (рис. 3.11)  $\dot{i}_1 = \dot{i}'_1 = \dot{i}''_1, \dot{i}_2 = \dot{i}'_2 = \dot{i}''_2$ , тобто є загальними для всіх чотириполюсників. Для математичного опису з'єднання зручно користатися рівняннями чотириполюсника у  $Z$ -параметрах:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_I \begin{bmatrix} \dot{i}'_1 \\ \dot{i}'_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{II} \begin{bmatrix} \dot{i}''_1 \\ \dot{i}''_2 \end{bmatrix}.$$

Додамо ці вирази з урахуванням того, що  $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1$ ,  
 $\dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1 \\ \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_I + \mathbf{K}_{II} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{k=1}^{n=2} \mathbf{K}_k \right) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Якщо в схемі  $n$  чотириполосників включені за послідовною схемою, то

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \left( \sum_{k=1}^{n=2} \mathbf{K}_k \right) \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_E \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні чотириполосників матриця  $Z$ -параметрів еквівалентного чотириполосника дорівнює сумі матриць  $Z$ -параметрів окремих чотириполосників.

Вирази (3.52), (3.53), (3.54) дають можливість перейти від складних схем з'єднання чотириполосників до схем, що складаються із одного чотириполосника з відповідними параметрами еквівалентних матриць.

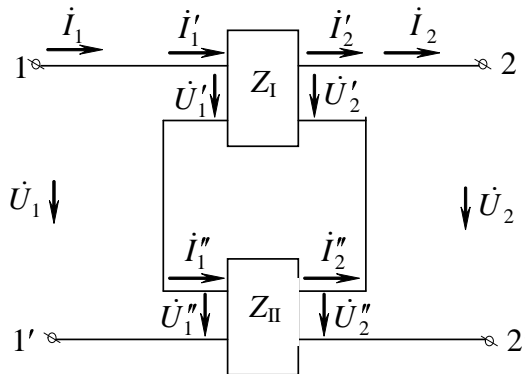


Рисунок 3.10

## 4 ЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

### 4.1 Визначення довгої лінії

*Електричними колами з розподіленими параметрами* будемо називати такі кола, у яких струм і напруга безперервно змінюються при переході від однієї точки (перетину) кола до іншої, сусідньої точки.

Коли говорять про кола з розподіленими параметрами, то, як правило цей термін подумки зв'язують із потужними лініями передачі електричної енергії на більші відстані, з телефонними й телеграфними повітряними та кабельними лініями, з рейковими лініями автоблокування на залізничному транспорті, з антенами у радіотехніці та іншими спорідненими лініями та установками. Тому часто їх визначають терміном "лінії з розподіленими параметрами".

У той же час пристрої з розподіленими параметрами зустрічаються і тоді, коли «ліній» у буквальному значенні цього слова, зовсім немає. Так, звичайна індуктивна котушка являє собою, строго кажучи, лінію з розподіленими параметрами. Дійсно, між кожними двома сусідніми витками котушки, як і між кожними двома тілами, є ємність. Крім того, кожний виток має ємність на корпус приладу або на землю.

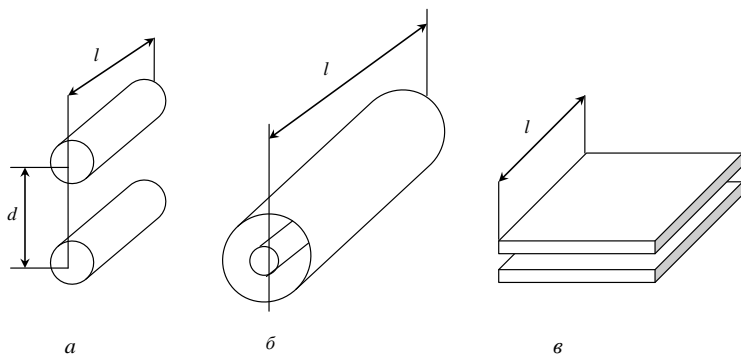


Рисунок 4.1

До довгих ліній можна віднести двопровідну (рис. 4.1 а), коаксіальну (рис. 4.1 б), смужкову (рис. 4.1 в) та інші лінії, що складаються з двох провідників  $a$  та  $b$ , поперечні розміри яких дуже малі у порівнянні з довжиною  $l$ , а довжина електромагнітної хвилі  $\lambda$  коливань у ній при частоті  $f$  менша або співвимірна з геометричною довжиною лінії  $l$ .

Якщо по котушці буде проходити змінний струм, то через міжгілкові ємності та ємності на землю йтиме струм. При тій самій напрузі між сусідніми витками струм через ємності буде тим більшим, чим вища частота змінного струму. При низькій частоті (десятки, сотні, тисячі герців) струм через ємності буде не співвимірно малий у порівнянні зі струмами через витки котушки і наявність ємностей можна не враховувати в розрахунках, що і робилося дотепер.

Якщо ж частота струму буде досить велика, наприклад, сягатиме мільйонів і навіть мільярдів герців, то струми через ємності можуть у багато разів перевищувати струми через витки котушки. У цьому разі вся котушка в цілому буде виявляти проходженню змінного струму ємнісний, а не індуктивний опір – кількість перейшла в нову якість. При проміжних частотах порядку сотень кілогерців індуктивна котушка, якщо не вжити спеціальних заходів, являє собою типову лінію з розподіленими параметрами. Якщо індуктивна котушка намотана на сталеве осердя, яке здатне насичуватися, і частота струму досить велика, то весь пристрій у цілому є складною сукупністю із електричних та магнітних нелінійних кіл з розподіленими параметрами.

## 4.2 Диференціальні рівняння для однорідної лінії

Нехай  $R_0$  – поздовжній активний опір одиниці довжини лінії,  $L_0$  – індуктивність одиниці довжини лінії,  $C_0$  – ємність одиниці довжини лінії та  $G_0$  – поперечна провідність одиниці довжини лінії. Підкреслимо, що поперечна провідність  $G_0$  не є оберненою величиною щодо поздовжнього опору  $R_0$ .

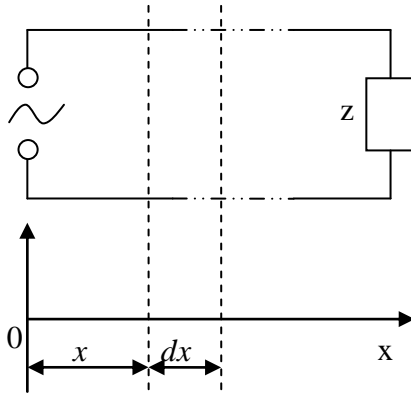


Рисунок 4.2

Розіб'ємо лінію на ділянки довжиною  $dx$  (рис. 4.2);  $x$  – це відстань, що відраховується від початку лінії. На довжині  $dx$ , де активний опір дорівнює  $R_0 dx$ , індуктивність  $L_0 dx$ , провідність витоку  $G_0 dx$  та ємність  $C_0 dx$  (рис. 4.3). Позначимо струм на початку розглянутої ділянки лінії через  $i$ , а напругу між проводами лінії на початку ділянки  $u$ . І струм, і напруга є у загальному випадку функціями відстані уздовж лінії  $x$  та часу  $t$ . Тому надалі у рівняннях будуть брати участь власні похідні від  $u$  і від  $i$  за часом  $t$  і за відстанню  $x$ .

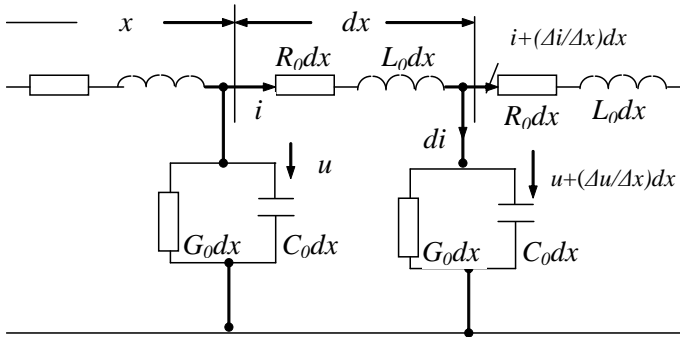


Рисунок 4.3

Якщо для деякого моменту часу  $t$  струм на початку розглянутої ділянки дорівнює  $i$ , то внаслідок наявності витоку струму через поперечний елемент струм наприкінці ділянки для того самого моменту часу дорівнюватиме  $i + (\Delta i / \Delta x) dx$ , де  $\Delta i / \Delta x$  - є швидкість зміни струму у напрямку  $x$ . Ця швидкість, помножена на відстань  $dx$ , дає збільшення струму на шляху  $dx$ . Аналогічно, якщо напруга на початку ділянки  $u$ , то наприкінці ділянки для того самого моменту часу напруга дорівнює  $u + (\Delta u / \Delta x) dx$ .

Складемо рівняння за другим законом Кірхгофа для замкнутого контуру, утвореного ділянкою лінії довжиною  $dx$ , обійшовши його за годинниковою стрілкою:

$$-u + i R_0 dx + L_0 dx (\Delta i / \Delta t) + u + (\Delta u / \Delta x) dx = 0.$$

Після спрощення та розділення рівняння на  $dx$  одержимо

$$-\Delta u / \Delta x = L_0 \Delta i / \Delta t + R_0 i. \quad (4.1)$$

За першим законом Кірхгофа

$$i = di + i + (\Delta i / \Delta x) dx. \quad (4.2)$$

Струм  $di$  (рис. 4.2) дорівнює сумі струмів, що проходять через провідність  $G_0 dx$  і через ємність  $C_0 dx$ :

$$di = [u + (\Delta u / \Delta x) dx] G_0 dx + C_0 dx \Delta [u + (\Delta u / \Delta x) dx] / \Delta t.$$

Не будемо враховувати змінні, що складаються із другого порядку малості, тоді

$$di = u G_0 dx + C_0 dx (\Delta u / \Delta t). \quad (4.3)$$

Підставимо (4.3) у (4.2), спростимо та поділимо рівняння на  $dx$ :

$$-\Delta i / \Delta x = G_0 u + C_0 (\Delta u / \Delta t). \quad (4.4)$$

Рівняння (4.1) і (4.4) є основними диференціальними рівняннями для лінії з розподіленими параметрами.

Запишемо ці рівняння у вигляді системи, замінивши  $\Delta$  знаком диференціалу у власних похідних  $\frac{\partial}{\partial t}$ :

$$\begin{cases} R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}. \end{cases} \quad (4.5)$$

Ці рівняння визначають струм  $i(x, l)$  та напругу  $u(x, l)$  в лінії і називаються телеграфними рівняннями.

### 4.3 Розв'язання телеграфних рівнянь

Нехай напруга та струм у лінії змінюються за синусоїдальним законом у часі. Скористаємося символічним методом.

Зображенням струму  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$  є комплекс  $\dot{I} e^{j\omega t}$ , де

$$\dot{I} = \frac{I_m e^{j\varphi_i}}{\sqrt{2}}.$$

Зображенням напруги  $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  є комплекс  $\dot{U} e^{j\omega t}$ , де

$$\dot{U} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{\sqrt{2}}.$$

Комплекси  $\dot{U}$  та  $\dot{I}$  є функціями відстані  $x$ , але не є функціями часу. Множник  $e^{j\omega t}$  є функцією часу  $t$ , але не залежить від відстані  $x$ .

Подання зображення струму та зображення напруги у вигляді добутку двох множників, з яких один є функцією тільки  $x$ , а інший – функцією тільки  $t$ , дає можливість перейти від рівнянь

у власних похідних [рівнянь (4.1) та (4.4)] до рівнянь у простих похідних.

Дійсно,

$$\begin{aligned} \Delta u / \Delta x &= e^{j\omega t} d\dot{U} / dx ; L_0 (\Delta i / \Delta t) = L_0 \dot{I} \Delta e^{j\omega t} / \Delta t = \\ &= j\omega L_0 \dot{I} e^{j\omega t} ; \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\Delta i / \Delta x = e^{j\omega t} d\dot{I} / dx ; C_0 (\Delta u / \Delta t) = j\omega C_0 \dot{U} e^{j\omega t} .$$

Підставимо (4.6) в (4.1) і в (4.4) і скоротимо в отриманих рівняннях множник  $e^{j\omega t}$ .

Одержимо

$$\begin{cases} -\frac{d\dot{U}}{dx} = \underline{Z}_0 \dot{I}, \\ -\frac{d\dot{I}}{dx} = \underline{Y}_0 \dot{U}, \end{cases} \quad (4.7)$$

де  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega l_0$ ,  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega c_0$ .

Розв'яжемо систему рівнянь (4.7) щодо  $\dot{U}$ . Із цією метою продиференціюємо перше рівняння системи (4.7) за  $x$ :

$$-\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \frac{d\dot{I}}{dx}. \quad (4.8)$$

У рівняння (4.8) замість  $\frac{d\dot{I}}{dx}$  підставимо праву частину другого рівняння системи (4.7) і одержимо

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dx^2} = \underline{Z}_0 \underline{Y}_0 \dot{U}. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) являє собою лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Розв'язок його

$$\dot{U} = \dot{A}_1 e^{\gamma x} + \dot{A}_2 e^{-\gamma x}. \quad (4.10)$$

Комплексні числа  $\dot{A}_1$  та  $\dot{A}_2$  є сталі інтегрування, які у подальшому визначимо через напругу та струм на початку лінії або через напругу та струм наприкінці лінії.



Коефіцієнт

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}. \quad (4.11)$$

прийнято називати **сталю поширення**.

$\underline{\gamma}$  - комплексне число, і тому його можна подати у такому вигляді:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta, \quad (4.12)$$

де  $\alpha$  називається **коефіцієнтом загасання**,  $\beta$  - **коефіцієнтом фази**.

$\alpha$  характеризує собою загасання падаючої хвилі на одиницю довжини лінії (на 1 км), а  $\beta$  характеризує зміну фази падаючої хвилі на одиницю довжини лінії.

Струм  $\dot{I}$  знайдемо з другого рівняння системи (4.7):

$$\dot{I} = -\frac{1}{\underline{Z}_0} \frac{d\dot{U}}{dx} = \frac{\dot{A}_2 e^{-\underline{\gamma}x} - \dot{A}_1 e^{\underline{\gamma}x}}{\underline{Z}_0 \underline{\gamma}}. \quad (4.13)$$

Величину, що

$$\frac{\underline{Z}_0}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{Z}_0}{\sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}},$$

має розмірність опору, позначають  $\underline{Z}_C$  і називають **хвильовим опором**:

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = z_c e^{j\varphi_c}, \quad (4.14)$$

де  $z_c$  - модуль, а  $\varphi_c$  - аргумент хвильового опору  $\underline{Z}_C$ .

Отже,

$$\dot{I} = \frac{\dot{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{-\underline{\gamma}x} - \frac{\dot{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{\underline{\gamma}x}. \quad (4.15)$$

Позначимо відстань від поточної точки на лінії до кінця лінії через  $y$  та довжину всієї лінії через  $l$ :

$$y = l - x. \quad (4.16)$$

Нехай будуть відомі напруга та струм наприкінці лінії  $\dot{U}_2$  та  $\dot{I}_2$ . Підставимо у (4.10) та (4.13)  $x=l$ ,  $\dot{U} = \dot{U}_2, \dot{I} = \dot{I}_2$ , і складемо рівняння для визначення сталих інтегрування  $\dot{A}_1$  та  $\dot{A}_2$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} + \dot{A}_1 e^{\gamma l}, \\ \dot{I}_2 \underline{Z}_C = \dot{A}_2 e^{-\gamma l} - \dot{A}_1 e^{\gamma l}. \end{cases}$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_C}{2} e^{-\gamma l} = \dot{A}_1 e^{j\gamma_0}, \\ \dot{A}_2 &= \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_C}{2} e^{\gamma l} = \dot{A}_2 e^{j\gamma_n}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Якщо підставити рівняння (4.15) у (4.10) та (4.13), замінити  $l-x$  на  $y$  та перейти до гіперболічних функцій, то одержимо

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \underline{ch} \gamma y + \dot{I}_2 \underline{Z}_C \underline{sh} \gamma y, \\ \dot{I} = \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \underline{sh} \gamma y + \dot{I} \underline{ch} \gamma y. \end{cases} \quad (4.18)$$

Система рівнянь (4.18) дає можливість, знаючи  $\dot{U}_2$  та  $\dot{I}_2$ , знайти комплекси напруги і струму у точці, що знаходиться на відстані  $y$  від кінця лінії. Таку систему рівнянь називають системою рівнянь довгої лінії у гіперболічних функціях.

#### 4.4 Падаючі та відбиті хвилі у лінії

Підставимо у формулу (4.10)  $A_1 e^{j\psi_0}$  замість  $\dot{A}_1$  та  $A_2 e^{j\psi_n}$  замість  $\dot{A}_2$ , і замінимо  $\gamma$  на  $\alpha + j\beta$ .

Одержимо,

$$\dot{U} = A_1 e^{\alpha x} e^{j(\psi_0 + \beta x)} + A_2 e^{-\alpha x} e^{j(\psi_n - \beta x)}. \quad (4.19)$$

Аналогічну операцію виконаємо за формулою (4.13), причому замінимо  $\underline{Z}_C$  на  $z_c e^{j\varphi_c}$ ,

$$\dot{I} = -\frac{A_1}{z_c} e^{\alpha x} e^{j(\psi_0 + \beta x - \varphi_c)} + \frac{A_2}{z_c} e^{-\alpha x} e^{j(\psi_n - \beta x - \varphi_c)}. \quad (4.20)$$

Для переходу від комплексів напруги та струму до функцій часу помножимо праві частини формул (4.19) та (4.20) на  $\sqrt{2}e^{j\omega t}$  і від добутків візьмемо уявну частину:

$$u = \sqrt{2}A_1 e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x) + \sqrt{2}A_2 e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x);$$

$$i = -\sqrt{2} \frac{A_1}{z_c} e^{\alpha x} \sin(\omega t + \psi_0 + \beta x - \varphi_c) +$$

$$+ \sqrt{2} \frac{A_2}{z_c} e^{-\alpha x} \sin(\omega t + \psi_n - \beta x - \varphi_c). \quad (4.21)$$

*Домовимося падаючою електромагнітною хвилею* називати процес переміщення електромагнітного стану (електромагнітної хвилі) за напрямком від джерела енергії до приймача, тобто у нашому випадку у напрямку збільшення координати  $x$ .

Електромагнітний стан визначається сукупністю електричного та магнітного полів.

**Падаюча хвиля** (перші доданки виразів у 4.21), поширюючись від джерела енергії до приймача, несе енергію, складену у її електричному та магнітних полях.

**Відбитою електромагнітною хвилею** (другі доданки виразів у 4.21) будемо називати процес переміщення електромагнітного стану (електромагнітної хвилі) за напрямком від приймача енергії до джерела енергії, тобто в нашому випадку в бік зменшення координати  $x$ .

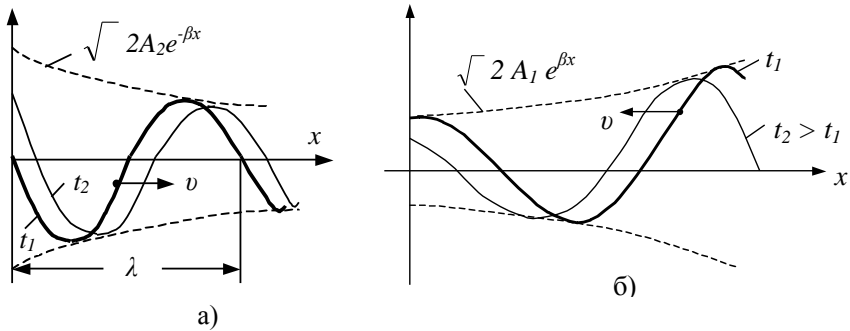


Рисунок 4.4

На рис. 4.4 *a* зображені графіки розподілу падаючої хвилі напруги уздовж лінії ( $u$  функції  $x$ ) для двох суміжних моментів часу: при  $t_1$  – товста крива та при  $t_2 > t_1$  – тонка крива. Падаюча хвиля поширюється праворуч. При побудові прийнято, що  $\psi_n = 0$ . Оскільки хвиля рухається у бік навантаження, тому хвилю ще називають прямою. Зі збільшенням координати  $x$  амплітуда збільшується.

На рис. 4.4 *б* зображені графіки розподілу відбитої хвилі напруги для двох суміжних моментів часу:  $t_1$  і  $t_2 > t_1$ . Відбита хвиля поширюється ліворуч. Оскільки хвиля рухається у бік генератора, то хвилю ще називають зворотною. Зі збільшенням координати  $x$  амплітуда зменшується.

Напруга та струм у будь-якій точці лінії є результатом інтерференції 2-х хвиль – падаючої та відбитої.

Відношення амплітуд відбитої та падаючої хвиль характеризує коефіцієнт відбиття:

$$P(x) = \frac{\dot{U}_{ei}\partial}{\dot{U}_{na}\partial} = \frac{-\dot{I}_{vi}\partial}{\dot{I}_{na}\partial} = |P(x)| \cdot e^{j\varphi} = \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H Z_B}{\dot{U}_H + \dot{I}_H Z_B} \cdot e^{-2ax}$$

Для лінії без втрат  $\alpha = 0$ ,  $P$  і не залежить від  $x$ :

$$P = \frac{\dot{U}_H - \dot{I}_H R_0}{\dot{U}_H + \dot{I}_H R_0} = \frac{Z_H - R_0}{Z_H + R_0}.$$

Коефіцієнт відбиття набуває значення -  $0 \leq P \leq 1$ .

За значенням коефіцієнта відбиття у лінії виділяють три режими:

- 1- режим біжучої хвилі, коли  $P = 0$ ;
- 2- режим стоячих хвиль, коли  $P = 1$ ;
- 3- режим змішаних хвиль, коли  $0 < P < 1$ .

Відношення амплітуди мінімальної хвилі до максимальної визначає **коефіцієнт біжучої хвилі**.

Коефіцієнт біжучої хвилі  $K_{БХ}$  визначається таким чином:

$$K_{БХ} = \frac{U \min}{U \max} = \frac{U_{\text{ПАД}} - U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}} + U_{\text{ВІД}}} = \frac{1 - P}{1 + P}.$$

Коефіцієнт біжучої хвилі набуде значення -  $0 \leq K_{БХ} \leq 1$  і характеризує режими хвиль у лінії.

**Вхідний опір лінії** – це відношення комплексних значень напруги до струму на вході лінії.

$$Z_{ВХ} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\dot{U}_{1.ПР} + \dot{U}_{1.ЗВ}}{\dot{I}_{1.ПР} + \dot{I}_{1.ЗВ}}.$$

Існує поняття вхідного опору будь-якої ділянки лінії, що розміщена між навантаженням та деяким перетином лінії (рис. 4.5):

$$Z_{ВХ}(x) = \frac{\dot{U}(x)}{\dot{I}(x)} = \frac{\dot{U}_{ПР}(x) + \dot{U}_{ЗВ}(x)}{\dot{I}_{ПР}(x) + \dot{I}_{ЗВ}(x)}.$$

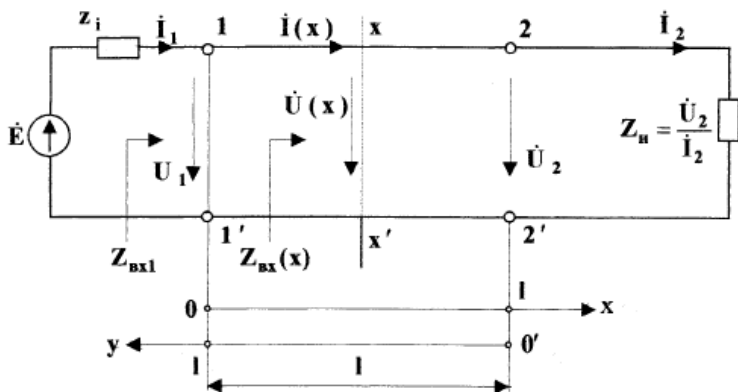


Рисунок 4.5

#### 4.5 Фазова швидкість і довжина хвилі

Фазовою швидкістю  $v_\phi$  називають швидкість, з якої потрібно переміщатися уздовж лінії, щоб спостерігати ту саму фазу коливання. Можна сказати й інакше:

**Фазова швидкість** – це швидкість переміщення за лінією незмінного фазового стану.

Якщо фаза падаючої хвилі напруги незмінна, то відповідно до формули (4.21)

$$\omega t + \psi_n - \beta x = \text{const.}$$

Візьмемо похідну за часом від обох частин останньої рівняння:

$$\frac{d}{dt}(\omega t + \psi_n - \beta x) = 0, \quad \text{або} \quad \omega - \beta \frac{dx}{dt} = 0.$$

Тоді фазова швидкість

$$v_\phi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (4.22)$$

Під *довжиною хвилі*  $\lambda$  розуміють відстань, на яку пошириться хвиля за один період  $T=1/f$ .

Одержуємо

$$\lambda = v_{\phi} T = \frac{v_{\phi}}{f} = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (4.23)$$

#### 4.6 Лінія без спотворень

*Лінія без спотворень* являє собою лінію, у якій хвилі всіх частот поширюються з однаковою фазовою швидкістю і всі загасають рівномірно.

Під час руху електромагнітної хвилі за лінією без спотворень хвиля напруги і хвиля струму зменшуються за амплітудою, але форми хвиль напруги наприкінці лінії та початку лінії будуть подібні; точно так само будуть подібні форми хвиль струму на початку та кінці лінії.

Лінії без спотворень знаходять застосування під час телефонної розмови. У таких лініях не спотворюється тембр голосу (інакше кажучи, не спотворюється спектральний склад голосу).

Для того щоб лінія була без спотворень, необхідно, щоб коефіцієнт загасання  $\alpha$  та фазова швидкість  $v_{\phi}$  не залежали від частоти. Вони не залежатимуть від частоти, якщо між параметрами лінії має місце таке співвідношення:

$$\frac{R_0}{L_0} = \frac{G_0}{C_0}. \quad (4.23)$$

У лінії без спотворень хвильовий опір визначається виразом

$$\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad (4.24)$$

та є дійсним числом і також не залежить від частоти.

## 4.7 Узгоджене навантаження

Лінія з розподіленими параметрами, як правило, служить як проміжна ланка між джерелом енергії та навантаженням.

Позначимо опір навантаження через  $\underline{Z}_2 = \dot{U}_2 / \dot{I}_2$ . Якщо  $\underline{Z}_2$  не дорівнює хвильовому опору лінії  $\underline{Z}_C$ , то падаюча хвиля частково пройде у навантаження, частково відіб'ється від неї (виникає відбита хвиля). Часто беруть  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_C$ . Таке навантаження називається узгодженим. У такому випадку відбита хвиля відсутня.

У цьому можна переконатися за допомогою формули (1.17). Дійсно, відбита хвиля буде відсутня, оскільки  $\dot{A}_1$  дорівнюватиме нулю:

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 \underline{Z}_C) e^{-\gamma l} = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{U}_2) e^{-\gamma l} = 0.$$

Для того щоб одержати при узгодженому навантаженні формули для визначення напруги та струму в будь-якій точці, вилученої від кінця лінії на відстань  $y$ , у формули (4.21) і (4.22)

замість  $\underline{Z}_C$  підставимо  $\underline{Z}_2$ , замінимо  $\dot{I}_2 \underline{Z}_2$  на  $\dot{U}_2$  та  $\frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_2}$  на  $\dot{I}_2$ .

Одержимо

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \dot{U}_2 (ch \underline{\gamma} y + sh \underline{\gamma} y) = \dot{U}_2 e^{\underline{\gamma} y}, \\ \dot{I} &= \dot{I}_2 (ch \underline{\gamma} y + sh \underline{\gamma} y) = \dot{I}_2 e^{\underline{\gamma} y}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Якщо лінія не узгоджена, то необхідно штучним шляхом досягти рівностей опору навантаження та хвильового опору лінії.

Короткозамкнені відрізки лінії широко використовуються як реактивні шлейфи.

**Реактивні шлейфи** – це пристрої, що вмикаються паралельно до будь-якої ділянки кола для компенсації уявної складової його вхідної провідності.



Змінюючи довжину короткозамкненого відрізка у межах від 0 до  $\frac{\lambda}{2}$ , можна завжди досягти, щоб уявна складова вхідної провідності шлейфа дорівнювала за абсолютним значенням та протилежна за знаком уявній складовій вхідної провідності паралельно ввімкненій ділянці кола. При цьому сумарний вхідний опір ділянки кола разом із шлейфом має чисто резистивний характер.

У зв'язку з тим, що комплексний вхідний опір відрізка довгої лінії у загальному випадку не дорівнює опоріві навантаження, відрізки лінії можуть трансформувати опори.

**Відрізок лінії довжиною  $\frac{\lambda}{4}$  (чвертьхвильовий трансформатор) може перетворювати великий опір у малий та навпаки.**

У граничних випадках вхідний опір чвертьхвильового трансформатора дорівнює нулю при нескінченно великому опорі навантаження і дорівнює нескінченності при короткому замиканні на виході. З одержаного виразу видно, що якщо опір навантаження має чисто резистивний характер, то і вхідний опір чвертьхвильового трансформатора матиме чисто резистивний характер.

Відрізок лінії  $\frac{\lambda}{8}$  перетворює довільний резистивний опір у опір, модуль якого дорівнює активному хвильовому опорі  $R_c$ . Аналогічні властивості має відрізок лінії без втрат довжиною  $\frac{3\lambda}{8}$ .

Трансформуючі властивості відрізків довгих ліній широко використовуються на практиці для побудови пристроїв узгодження реальних ліній передачі із навантаженням, що називаються трансформуючими лініями. До трансформуючих пристроїв належить шлейф Татарінова.

**Шлейф Татарінова** конструктивно становить відрізок довгої лінії того самого типу, що й узгоджувана лінія (рис. 4.6).

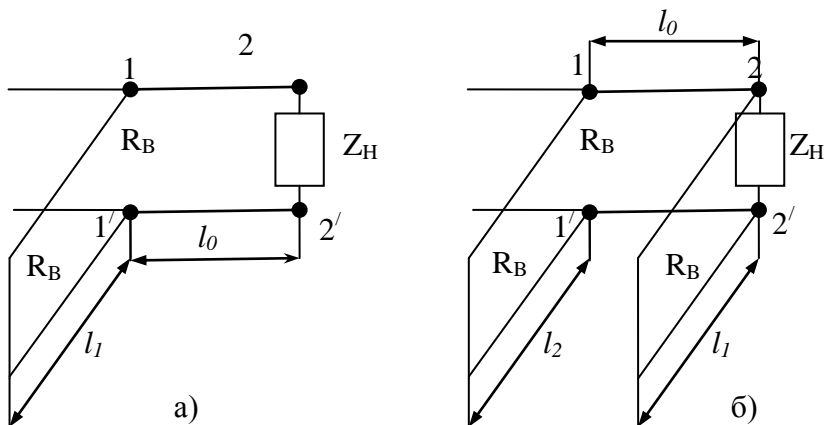


Рисунок 4.6

У першому випадку відстань від місця ввімкнення шлейфа до точки ввімкнення навантаження  $l_0$  (рис. 4.6 а) вибирають таким чином, щоб дійсна складова вхідної провідності лінії у точках 1-1' дорівнювала  $\frac{1}{R_C}$

$$Y_{11} = R_C + jb,$$

а довжину шлейфа  $l_1$  вибрати таким чином, щоб вхідна провідність шлейфа дорівнювала  $-jb$ . Очевидно, що за цих умов еквівалентний опір навантаження основної лінії у точках 1-1' дорівнює хвильовому опору лінії  $R_C$ .

У другому випадку (рис. 4.6 б) відстань між шлейфом  $l_0$  обирають  $\frac{\lambda}{8}$  або  $\frac{3\lambda}{8}$ , довжина першого шлейфа  $l_1$  підбирається таким чином, що у точках 1-1' виконувалася умова

$$Y_{11} = R_C + jb.$$

А довжину другого шлейфу  $l_2$  обирають таким чином, щоб компенсувати уявну складову  $Y_{11}$ .

## 4.8 Лінія без втрат

Строго кажучи, ліній без втрат не існує. Однак можна створити лінію з дуже малими втратами (з дуже малими  $R_0$  і  $G_0$ ) і поширити на неї теорію ліній без втрат.

З попереднього [див. формулу (1.12)] відомо, що, якщо

$$R_0 = G_0 = 0, \text{ то}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{L_0C_0}, \quad (4.26)$$

тобто коефіцієнт загасання  $\alpha = 0$ , а коефіцієнт фази

$$\beta = \omega\sqrt{L_0C_0}.$$

При цьому хвильовий опір  $\underline{Z}_C$  є чисто активним [див. формулу (4.24)] і дорівнює

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Для визначення напруги  $\underline{U}$  та струму  $\underline{I}$  у будь-якій точці лінії звернемося до системи рівнянь лінії у гіперболічних функціях

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma}y + \underline{I}_2 \underline{Z}_C \operatorname{sh}\underline{\gamma}y, \\ \underline{I} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_C} \operatorname{sh}\underline{\gamma}y + \underline{I}_2 \operatorname{ch}\underline{\gamma}y. \end{cases}$$

Врахуємо, що

$$\underline{\gamma}y = (\alpha + j\beta)y = (0 + j\beta)y = j\beta y.$$

Гіперболічний косинус від уявного аргументу  $jx$  дорівнює коловому косинусу від аргументу  $x$ :

$$\operatorname{ch}jx = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \frac{1}{2}(\cos x + j \sin x - \cos x + j \sin x) = j \sin x.$$

Отже,

$$\operatorname{sh}\underline{\gamma}y = \operatorname{sh}j\beta y = j \sin \beta y.$$

Тому для лінії без втрат системи рівнянь лінії у гіперболічних функціях перепишемо у такий спосіб:

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y + j \dot{I}_2 Z_c \sin \beta y, \\ \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{Z_c} \sin \beta y + \dot{I}_2 \cos \beta y. \end{cases} \quad (4.27)$$

#### 4.9 Режими неробочого ходу та короткого замикання

У режимі неробочого ходу, тобто коли струм у навантаженні відсутній, на основі системи рівнянь, одержаної у попередньому підрозділі запишемо з урахуванням того, що  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $y = x'$ :

$$\begin{cases} U = U_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x', \\ I = j \frac{U_2}{Z_c} \sin \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{cases} \quad (4.28)$$

На практиці основний інтерес становить розподіл діючих значень напруги та струму вздовж лінії. Для лінії без втрат розподіл діючих значень струмів та напруг у режимі неробочого ходу має вигляд, зображений на рис. 4.7.

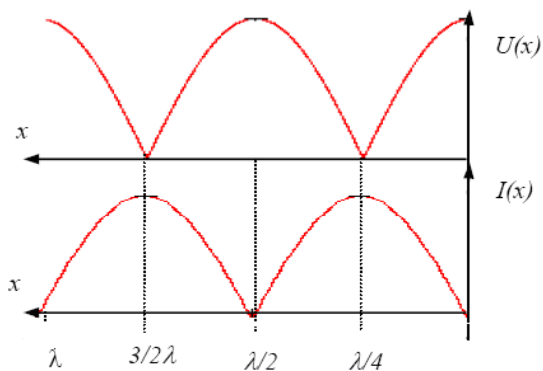


Рисунок 4.7

У випадку лінії з втратами розподіл діючих значень напруги та струму матиме вигляд, що зображений на рис. 4.8.

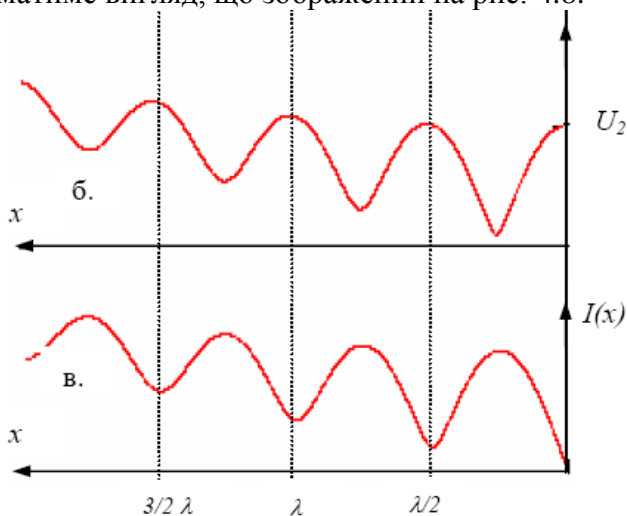


Рисунок 4.8

З рис. 4.8 бачимо, що максимуми та мінімуми як струмів, так і напруг чергуються через чверть довжини хвилі, причому максимум амплітуди напруги зсунутий щодо максимуму амплітуди струму приблизно на чверть хвилі.

У випадку неробочого ходу  $I_2 = 0$ , тоді

$$\underline{Z}_{HX} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_2 \cos \beta y}{j \frac{\dot{U}_2}{\underline{Z}_C} \sin \beta y} = \frac{-j \underline{Z}_C}{\operatorname{tg} \beta y} = \frac{-j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}{\operatorname{tg} \beta y}. \quad (4.29)$$

Досліджуємо характер зміни  $\underline{Z}_{HX}$  при зміні відстані у від кінця лінії до поточної точки на ній (рис. 4.9).

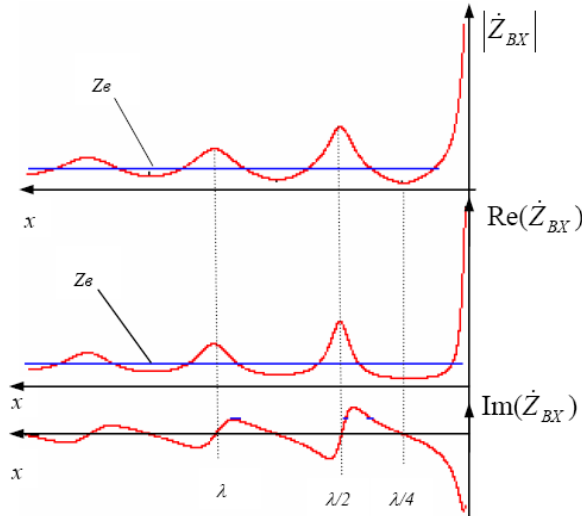


Рисунок 4.9

В інтервалі значень  $\beta y$  від 0 до  $\pi/2$   $\operatorname{tg} \beta y$  змінюється від 0 до  $\infty$ , тому  $\underline{Z}_{HX}$  має відповідно до рівняння (4.27) ємнісний характер (множник  $-j$ ) і за модулем змінюється від  $\infty$  до 0. В інтервалі значень  $\beta y$  від  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$   $\operatorname{tg} \beta y$  опір від'ємний і змінюється від  $-\infty$  до 0, тому  $\underline{Z}_{xx}$  змінюється за модулем від 0 до  $\infty$  і має індуктивний характер (множник  $+j$ ) і т.д. Таким чином, змінюючи довжину відрізка лінії без втрат, можна імітувати будь-якої величини ємнісний та індуктивний опори. Практично ця власти-

вість використовується при високій частоті у різних радіотехнічних установках.

У режимі короткого замикання, тобто коли напруга на навантаженні дорівнює нулю, на основі одержаної системи рівнянь запишемо

$$\begin{cases} U = jI_2 Z_C \sin \frac{2\pi}{\lambda} x', \\ I = I_2 \cos \frac{2\pi}{\lambda} x'. \end{cases} \quad (4.30)$$

Для лінії без втрат розподіл діючих значень струмів та напруг у режимі короткого замикання має вигляд, зображений на рис. 4.10.

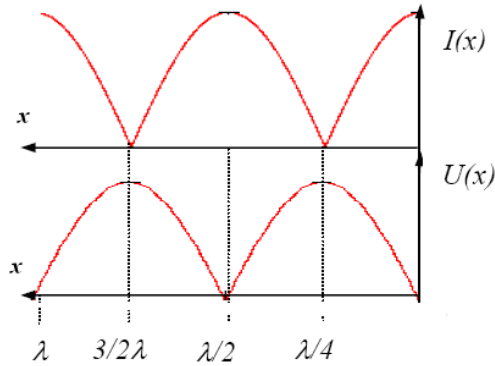


Рисунок 4.10

Для лінії з втратами у режимі короткого замикання розподіл діючих значень напруг та струмів зображений на рис. 4.11.

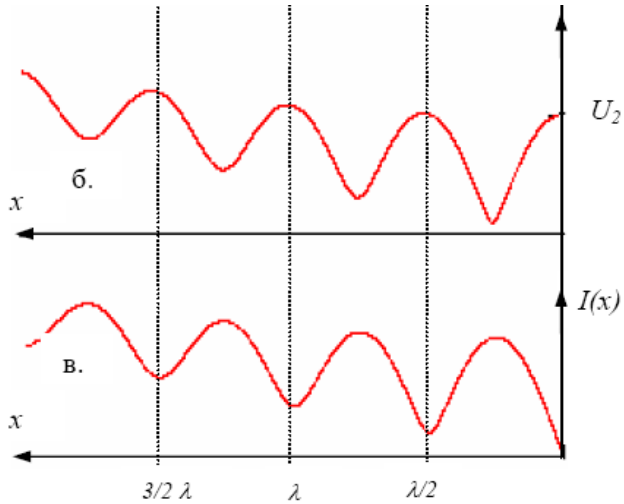


Рисунок 4.11

При короткому замиканні на кінці лінії  $U_2 = 0$  і з формул (4.26) випливає, що вхідний опір

$$\underline{Z}_{K3} = \underline{Z}_c \operatorname{tg} \beta y = j \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \operatorname{tg} \beta y, \quad (4.31)$$

де  $\beta = \omega \sqrt{L_0 C_0}$ .

Будемо, змінюючи довжину відрізка лінії  $y$ , досліджувати характер зміни вхідного опору (рис. 4.11).



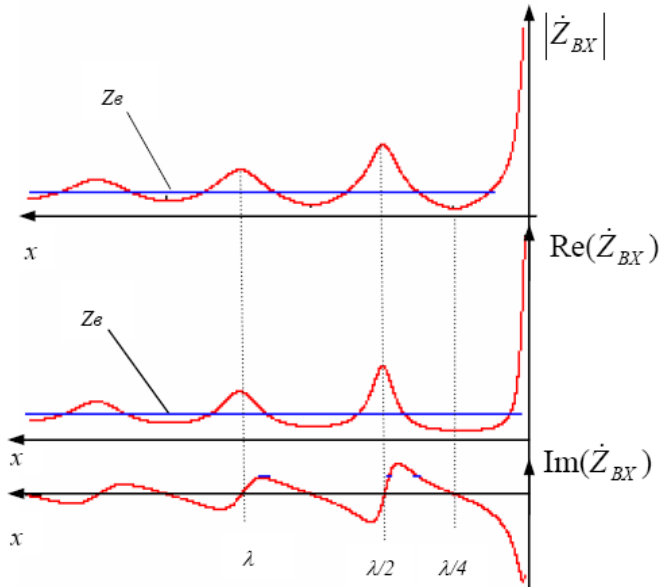


Рисунок 4.11

В інтервалі значень  $\beta x$  від 0 до  $\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \alpha y$   $\pi/2 \operatorname{tg} \beta y$  додатні і змінюються від 0 до  $\infty$ ; отже, у цьому інтервалі вхідний опір має індуктивний характер і за модулем змінюється від 0 до  $\infty$ .

## 4.10 Режими хвиль у лінії

Залежно від характеру поширення (розподілу) напруги та струму у лінії розрізняють три режими хвиль: режими *біжучих, стоячих, змішаних*.

**Режимом біжучих хвиль** називається такий режим, при якому відбита хвиля відсутня ( $U_{\text{ВІД}} = 0, I_{\text{ВІД}} = 0$ ).

Це буває у тому разі, якщо вся енергія падаючої хвилі виділяється у навантаженні, тобто відбиття немає

$$P = \frac{U_{\text{ВІД}}}{U_{\text{ПАД}}} = \frac{Z_{\text{Н}} - R_0}{Z_{\text{Н}} + R_0} = 0.$$

Звідси легко побачимо, що при  $Z_{\text{Н}} = R_0, P = 0, K_{\text{бв}} = 1$ .

У такому разі говорять, що лінія узгоджена з навантаженням. Режим біжучих хвиль використовується у випадку, якщо лінія працює у режимі каналу зв'язку, тобто для передачі повідомлень:

$$\dot{U}(x) = \dot{U}_{\text{пад}} = U_{\text{пад}} e^{j\beta x} e^{j\alpha x}.$$

У лініях без втрат у неробочому ході, при короткому замиканні, а також при чисто реактивних навантаженнях утворюються так звані стоячі електромагнітні хвилі.

**Стояча електромагнітна хвиля** являє собою електромагнітну хвилю, отриману у результаті накладення, що рухаються, падаючої та відбитої електромагнітних хвиль однакової інтенсивності.

Точки лінії, де періодична функція координати проходить через нуль, називаються вузлами, а точки лінії, у яких періодична функція координати набуває максимальних значень, – пучностями.

При виникненні стоячих хвиль електромагнітна енергія від початку лінії до кінця лінії не передається. Однак на кожному

відрізку лінії, що дорівнює чверті довжини хвилі, запасена деяка електромагнітна енергія.

Ця енергія періодично переходить із одного виду в інший вид (з енергії електричного поля в енергію магнітного поля).

У ті моменти часу, коли струм уздовж усієї лінії дорівнює нулю, а напруга досягає максимального значення, уся енергія перейшла в енергію електричного поля.

У ті моменти часу, коли напруга уздовж усієї лінії дорівнює нулю, а струм досягає максимального значення, уся енергія перейшла в енергію магнітного поля.

З формул (4.26) випливає, що при неробочому ході

$$\dot{U} = \dot{U}_2 \cos \beta y; \quad \dot{I} = j \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta y. \quad (4.32)$$

Для переходу до функцій часу помножимо праві частини двох останніх формул на  $\sqrt{2}e^{j\omega t}$  і від отриманих добутків візьмемо уявні частини:

$$u = \sqrt{2}U_2 \cos \beta y \sin \omega t; \\ i = \frac{\sqrt{2}U_2}{\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}} \sin \beta y \sin(\omega t + 90). \quad (4.33)$$

Кут  $90^\circ$  в аргументі синуса в останній формулі відповідає множнику  $j$  у формулі комплексу струму.

У точках  $\alpha y = k\pi$ , де  $k=0,1,2\dots$ , будуть вузли струму та пучності напруги:

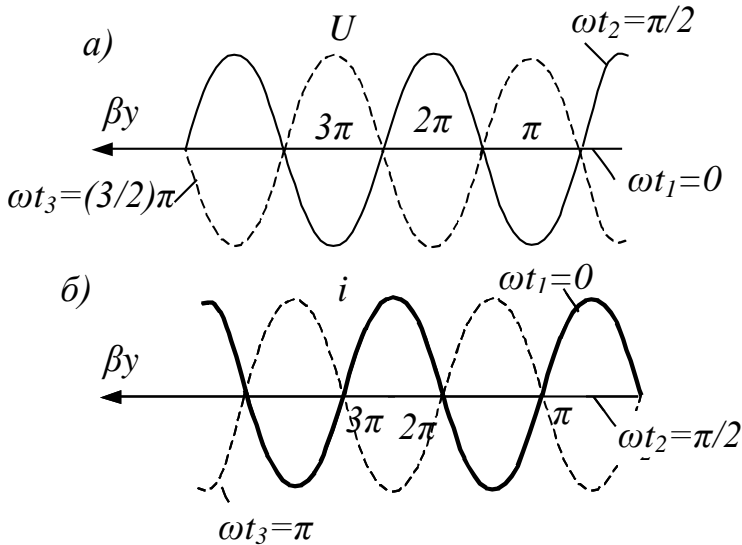


Рисунок 4.12

Графік стоячих хвиль напруги та струму для трьох суміжних моментів часу  $\omega t = 0$ ,  $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$  і  $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$  показаний на рис. 4.12. На верхньому графіку – напруга, на нижньому – струм. Товстими лініями вказана хвиля при  $\omega t_1 = 0$ , тонкими лініями – при  $\omega t_2 = \frac{\pi}{2}$ , пунктирними – при  $\omega t_3 = \frac{3}{2}\pi$  для напруги й при  $\omega t = \pi$  для струму.

З тих самих формул випливає, що при короткому замиканні на кінці лінії ( $U_2 = 0$ )

$$\dot{U} = j\dot{I}_2 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sin \beta y; \quad \dot{I} = \dot{I}_2 \cos \beta y. \quad (4.34)$$

Для переходу до миттєвих значень помножимо праві частини двох останніх формул на  $\sqrt{2}e^{j\omega t}$  і від добутоків візьмемо уявні частини:

$$u = \sqrt{2}I_2 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \sin \beta y \sin(\omega t + 90^\circ); \quad (4.35)$$

$$i = \sqrt{2}I_2 \cos \beta y \sin \omega t.$$

Отже, картина стоячої хвилі напруги при короткому замиканні на кінці лінії якісно повторює картину стоячої хвилі струму при неробочому ході лінії.

Аналогічно картина стоячої хвилі струму в короткозамкненій лінії якісно повторює картину стоячої хвилі напруги при неробочому ході лінії.

При зміні місцями джерела та навантаження у схемі лінії з розподіленими параметрами струми в джерелі та навантаженні не змінюються. Таку саму властивість має симетричний чотириполюсник. Тому однорідна лінія з розподіленими параметрами може бути замінена симетричним чотириполюсником і, навпаки, симетричний чотириполюсник можна замінити ділянкою однорідної лінії з розподіленими параметрами.

**Режим змішаних хвиль** – це такий режим, коли частина енергії виділяється у навантаженні, а частина відбивається.

Коефіцієнт відбиття  $P$  набуває значення від 0 до .1

Дослідивши характер напруги вздовж лінії, можна стверджувати, що у лінії процеси повторюються через  $\lambda/2$ .

**Приклад 4.1** Для деякої лінії довжиною 5 км на частоті 1000 Гц були проведені досліди з визначення її вхідного опору при неробочому ході та короткому замиканні на кінці лінії. Виявилось, що  $Z_{HX} = 535e^{-j^{64^\circ}}$  Ом та  $Z_k = 467,5e^{-j^{10^\circ}}$ . Потрібно знайти хвильовий опір  $Z_C$  і коефіцієнт поширення  $\gamma$  цієї лінії на частоті 1000 Гц.

*Розв'язання*

З формули (4.29) випливає, що при неробочому ході, коли

$$Z_2 = \infty, \quad Z_{HX} = \frac{Z_C}{th \gamma l}.$$

При короткому замиканні, коли

$$\underline{Z}_2 = 0, \underline{Z}_\kappa = \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma} l$$

Звідси

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\underline{Z}_{HX} \underline{Z}_{K3}} = \sqrt{535 e^{-j64^\circ} 467,5 e^{-j10^\circ}} = 500 e^{-j37^\circ} \text{ Ом};$$

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{K3}}{\underline{Z}_{HX}}} = \sqrt{\frac{467,5 e^{-j10^\circ}}{535 e^{-j64^\circ}}} = 0,935 e^{j27^\circ}.$$

Оскільки

$$\operatorname{th} \underline{\gamma} l = \operatorname{sh} \underline{\gamma} l / \operatorname{ch} \underline{\gamma} l = (e^{\underline{\gamma} l} - e^{-\underline{\gamma} l}) / (e^{\underline{\gamma} l} + e^{-\underline{\gamma} l}),$$

то

$$e^{2\underline{\gamma} l} = (1 + \operatorname{th} \underline{\gamma} l) / (1 - \operatorname{th} \underline{\gamma} l).$$

Отже,

$$e^{2\alpha l} e^{j2\beta l} = \frac{1 + 0,935 e^{j27^\circ}}{1 - 0,935 e^{j27^\circ}} = 4,11 e^{j81^\circ 10'} = e^{1,414} e^{j1,414};$$

$$2\alpha l = 1,414; \quad \alpha = \frac{1,414}{2l} = 0,1414; \quad 2\beta l = 1,414;$$

$$\beta = 0,1414; \quad \underline{\gamma} = \alpha + j\beta = 0,2 e^{j45^\circ} \text{ 1/км.}$$

**Приклад 4.2** Визначити  $R_0$ ,  $L_0$ ,  $G_0$ , та  $C_0$  для лінії попереднього прикладу (приклад 1.1), вважаючи відомими

$$\underline{Z}_C = 500 e^{-j45^\circ} \text{ Ом} \quad \text{та} \quad \underline{\gamma} = 0,2 e^{j45^\circ} \text{ 1/км.}$$

*Розв'язання*

Відповідно до формул (4.14) і (4.17) добуток

$$\underline{\gamma} \underline{Z}_C = R_0 + j\omega L_0.$$

Отже,

$$R_0 + j\omega L_0 0,2 e^{j45^\circ} \cdot 500 e^{j37^\circ} = 100 e^{j8^\circ} = 99 + j13,9.$$

Або

$$R_0 = 99 \text{ Ом/км} \quad \text{і} \quad L_0 = \frac{13,9}{2\pi \cdot 1000} = 0,00222 \text{ Гн/км};$$

Аналогічно

$$\frac{\underline{Y}}{\underline{Z}_C} = G_0 + j\omega C_0.$$

Тоді

$$G_0 + j\omega C_0 = \frac{0,2e^{j45^\circ}}{500e^{-j37^\circ}} = 0,0557 \cdot 10^{-3} + j0,396 \cdot 10^{-3}.$$

#### 4.11 Перехідні процеси у довгих лініях

Для електроенергетики, телефонного зв'язку, телеграфії, що обчислювальної техніки та радіотехніки суттєве значення мають перехідні процеси в електричних колах, що містять лінії з розподіленими параметрами

Унаслідок того, що інтегрування двох спільних диференціальних рівнянь у частинних похідних (4.5) у загальному вигляді являє собою досить складне у математичному відношенні завдання, у курсі ТЕМК перехідні процеси вивчаються у дещо спрощеній постановці, а саме: вивчаються перехідні процеси в однорідних лініях без втрат, тобто при  $R_0 = 0$  і  $G_0 = 0$ .

Така постановка питання практично цілком виправдана, оскільки реальні лінії з розподіленими параметрами, як правило, мають відносно малі втрати.

Вивчення перехідних процесів при  $R_0 = 0$  та  $G_0 = 0$  дає можливість якісно досліджувати основні риси процесів. У кількісному відношенні неврахування  $R_0$  та  $G_0$  для початкових стадій перехідного процесу істотного впливу, як правило, не виявляє, однак для наступних стадій врахування  $R_0$  та  $G_0$  є бажаним. В енергетичних, телефонних і телеграфних пристроях, що містять лінії з розподіленими параметрами, перехідні процеси виникають при підключенні ліній до джерела ЕРС, при відключенні від джерела ЕРС, при підключенні та відключенні навантаження, а також при атмосферних (грозових) розрядах.

Розглянемо електромагнітні процеси під час руху прямокутної хвилі по лінії. Нехай джерело постійної напруги  $u$ , що має внутрішній опір, дорівнює нулю, підключається до незарядженої однорідної лінії з розподіленими параметрами, у якої  $R_0 = G_0 = 0$  (рис. 4.12).

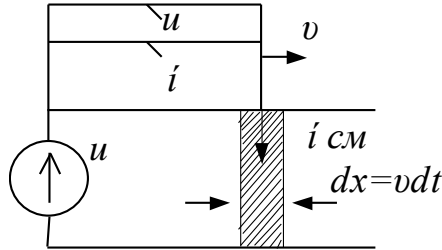


Рисунок 4.12

По лінії буде переміщатися падаюча електромагнітна хвиля. Початкову ділянку хвилі, перша, що просувається по лінії, прийнято називати фронтом хвилі. У цьому випадку хвиля має прямокутний фронт.

Рухаючись по лінії, хвиля створює між проводами лінії електричне та магнітне поля. Збільшення магнітного потоку на фронті хвилі за час  $dt$  дорівнює добутку струму  $i$  на індуктивність ділянки лінії довжиною  $dx$  (тобто на  $L_0 dx$ ):  $d\psi = i l_0 dx$ .

Збільшення магнітного потоку на фронті хвилі викликає ЕРС:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -i L_0 \frac{dx}{dt} = -i L_0 v = -i \frac{L_0}{\sqrt{L_0 C_0}} = -i \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = -i Z_C = -u_n = -u.$$

Таким чином, на фронті хвилі виникає ЕРС самоіндукції, чисельно, що дорівнює напрузі генератора.

На фронті хвилі відбувається зарядка проводів лінії: один провід, наприклад верхній, приєднаний до плюса джерела ЕРС, знабуває додатного заряду, інший (нижній) – від'ємного заряду (такої самої величини).



На фронті хвилі виникає струм зсуву  $i_3 = \frac{dq}{dt}$ . Тут  $dq$  є збільшенням заряду на одному із проводів лінії за час  $dt$ :  
 $dq = C_0 u v dt$  та  $i_3 = \frac{dq}{dt} = C_0 u v = \frac{u_n}{Z_C}$ .

Отже, струм зсуву, що проходить по діелектрикові на фронті хвилі, в точності дорівнює струму падаючої хвилі, що проходить по проводах лінії.

Електромагнітна хвиля, просуваючись по лінії, кожній одиниці останньої дає енергію електричного поля  $\frac{C_0 u_n^2}{2}$  та енергію магнітного поля  $\frac{L_0 i_n^2}{2}$ .

Можна показати, що ці кількості енергій дорівнюють одна одній.

Дійсно,

$$u_n = i_n Z_C = i_n \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}.$$

Отже,

$$\frac{C_0 u_n^2}{2} = \frac{C_0 i_n^2 L_0}{2 C_0} = \frac{L_0 i_n^2}{2}.$$

Коли падаюча хвиля досягає кінця, до якого у загальному випадку приєднане деяке навантаження або інша лінія (з іншим хвильовим опором), то частина падаючої хвилі пройде у навантаження (або відповідно у другу лінію), а частина відіб'ється – виникне відбита хвиля.

Для з'ясування питання про те, яка буде форма хвилі, що проходить у навантаження, яка буде форма відбитої хвилі і як вони деформуватимуться у часі, застосовують розрахункову схему, яку прийнято називати схемою заміщення для дослі-

дження хвильових процесів у лінії з розподіленими параметрами (рис. 14.13).



Рисунок 4.13

Для обґрунтування методики складання схеми заміщення звернемося до рис. 4.13. На ньому зображена лінія з розподіленими параметрами, на кінці якої включене деяке навантаження. Починаючи з того моменту падаюча хвиля дійде до кінця лінії, і по *навантаженню* піде струм  $I_n$  і на ній буде напруга  $U_n$ .

Напругу та струм у будь-якій точці лінії можна подати у вигляді суми падаючої та відбитої хвиль. Це положення справедливе щодо напруги та струму наприкінці лінії.

Отже,

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВД}} = \dot{U}_n \quad (4.36)$$

$$\dot{I}_{\text{ПАД}} + \dot{I}_{\text{ВД}} = \dot{I}_n. \quad (4.37)$$

Замінімо  $\dot{I}_{\text{ПАД}}$  на  $\frac{U_{\text{ПАД}}}{Z_c}$ , а  $\dot{I}_{\text{ВД}}$  на  $\frac{-U_{\text{ВД}}}{Z_c}$ .

Одержимо

$$\dot{U}_{\text{ПАД}} + \dot{U}_{\text{ВД}} = \dot{U}_n, \quad \dot{U}_{\text{ПАД}} - \dot{U}_{\text{ВД}} = \dot{I}_n Z_c,$$

або

$$2\dot{U}_{\text{ПАД}} = \dot{U}_n + \dot{I}_n Z_c. \quad (4.38)$$

Таким чином, напруга на кінці лінії  $\dot{U}_H$  і струм у навантаженні  $\dot{I}_H$  незалежно від характеру навантаження пов'язані з напругою падаючої хвилі  $\dot{U}_{\text{ПАД}}$  рівнянням (4.14).

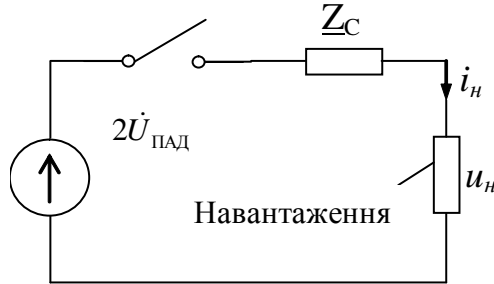


Рисунок 4.14

Останнє задовольняє схема із зосередженими параметрами, зображена на рис. 4.14. У ній до джерела ЕРС напругою  $2\dot{U}_{\text{ПАД}}$  підключаються послідовно з'єднані  $\underline{Z}_C$  і навантаження.

Розрахунки перехідного процесу у схемі рис. 4.14 – у схемі із зосередженими параметрами – проводиться кожним з методів, розглянутих раніше. Розрахунки перехідного процесу в схемі 4.6 дає можливість знайти  $i_H = f(t)$  і  $u_H = f(t)$ . Після того як ці залежності знайдені, може бути визначений характер зміни у часі напруги та струму відбитої хвилі:  $u_0 = f(t)$  і  $i_0 = f(t)$ .

Дійсно, з рівнянь (4.36) і (4.37) випливає, що

$$\left. \begin{aligned} u_0(t) &= u_n(t) - u_n(t), \\ i_0(t) &= -\frac{u_0(t)}{Z_C}, \\ Z_C &= \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Розглянемо приклад, що ілюструє застосування схеми заміщення.

**Приклад 4.3.** Підключення розімкнутої на кінці лінії до джерела постійної напруги (рис. 4.15).

*Розв'язання*

У лінії без втрат, так само як і в коливальному контурі без втрат, виникають незагасаючі коливання. Період коливань складається із чотирьох частин або стадій однакової тривалості  $l/v$ , де  $l$  – довжина лінії,  $v$  – швидкість поширення хвилі. Для розгляду цих стадій необхідно використовувати дві різні схеми заміщення. Перша схема (рис. 4.16) відповідає розімкнутому кінцю лінії ( $Z_n = \infty$ ), коли до нього підійде падаюча від початку лінії хвиля. Друга схема (рис. 4.17) відповідає підходу відбитої хвилі до початку лінії, де включений генератор постійної напруги, внутрішньо опір якого вважаємо таким, що дорівнює нулю ( $Z_n = 0$ ). Перша стадія. Від генератора до кінця лінії поширюються хвиля напруги  $u_{n1} = u$  і хвиля струму  $i_{n1} = \frac{u_{n1}}{Z_{C1}} = i$ .

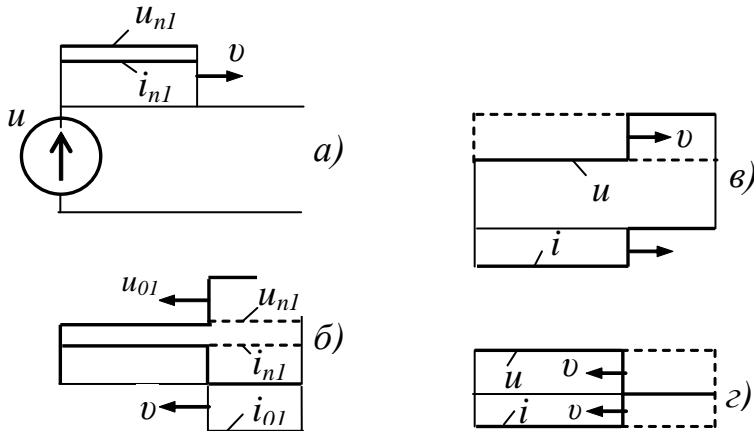


Рисунок 4.15

Перша стадія ілюструється на рис. 4.15 а.

Друга стадія полягає у тому, що від кінця лінії до початку її рухається відбита хвиля  $u_{01}$  та  $i_{01}$ . Для визначення  $u_{01}$  і служить схема на рис. 4.16. У ній до напрямку  $2u_{n1} = 2u$  підключаються хвильовий опір лінії  $Z_C$  і опір навантаження  $Z_H = \infty$  (лінія на кінці розімкнута).

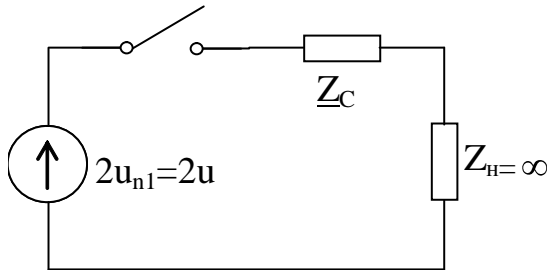


Рисунок 4.16

Зі схеми рис 4.16. випливає, що напруга на навантаженні дорівнює подвоєному значенню напруги падаючої хвилі. Дійсно, при  $Z_H \rightarrow \infty$

$$u_{z_H} = 2u_{n1} \frac{Z_H}{Z_H + Z_C} = 2u_{n1} = 2u.$$

Відповідно до формули (4.31) відбита хвиля напруги

$$u_{01} = u_H - u_{n1} = 2u_{n1} - u_{n1} = u_{n1} = u.$$

Відбита хвиля струму  $i_{01} = -\frac{u_{01}}{Z_C} = -i_{n1} = -i.$

Таким чином, протягом другої стадії процесу від кінця лінії до початку просувається відбита хвиля  $u_{01} = u$ ,  $i_{01} = -i$ . Результуючий стан на лінії визначається накладенням першої падаючої хвилі ( $u_{n1}$ ,  $i_{n1}$ ) і першої відбитої хвилі ( $u_{01}$ ,  $i_{01}$ ).

На рис. 4.15 б дана епюра розподілу напруги та струму по лінії (внутрішній опір генератора дорівнює нулю) і викличе поширення по лінії в напрямку від генератора до кінця лінії другої падаючої хвилі ( $u_{n2}$ ,  $i_{n2}$ ) відбитою хвилею, що є, по суті, *стосовно* хвилі  $u_{01}$ ,  $i_{01}$ .

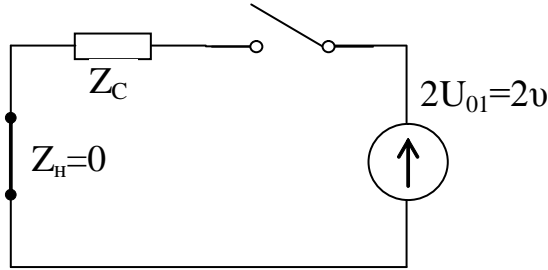


Рисунок 4.17

Для визначення характеру відбиття хвиль від початку лінії використовуємо схему рис. 1.17. Оскільки, у ній  $Z_H = 0$ , то і напруга на навантаженні  $Z_H$  дорівнює нулю. Але напруга на навантаженні відповідно до (4.36) дорівнює сумі падаючої хвилі (у цьому випадку  $u_{01} = u$ ) і напруги відбитої від початку лінії хвилі, що поширюється від генератора до кінця лінії й тому названою вище другою падаючою хвилею.

Отже,  $0 = u + u_{n2}$ .

Звідси

$$u_{n2} = -u, \quad i_{n2} = \frac{u_{n2}}{Z_C} = -i.$$

Результуючий стан на лінії в третю стадію процесу зображується рис. 1.15 в. Він отриманий у результаті накладення трьох хвиль: першої падаючої хвилі  $u_{n1}$ ,  $i_{n1}$ , першої відбитої від кінця хвилі  $u_{01}$ ,  $i_{01}$  і другої падаючої хвилі  $u_{n2}$ ,  $i_{n2}$ .

Четверта стадія процесу полягає в тому, що на три попередні хвилі накладається четверта хвиля, що є відбиттям від розімкнутого кінця лінії другої падаючої хвилі.

Відбиття другої падаючої хвилі від кінця лінії відбудеться згідно зі схемою заміщення рис 4.16, з тією тільки відмінністю, що замість  $2u_{n1} = 2u$  у схемі буде напруга  $2u_{n2} = -2u$ .

Друга відбита хвиля матиме  $u_{02} = -u$ ,  $i_{02} = i$ . Результуючий стан на лінії в четвертій стадії (рис. 1.15 г) є результатом накладення чотирьох хвиль:

$$un_1 + u_{01} + un_2 + u_{02} = u + u - u - u = 0;$$

$$in_1 + i_{01} + in_2 + i_{02} = i - i - i + i = 0.$$

Таким чином, до кінця четвертої стадії напруга уздовж усієї лінії та струм уздовж усієї лінії дорівнюють нулю – лінія одержує такий самий стан, який на ній був до початку першої стадії. Потім процес повторюється нескінченно, тому що  $R_0$  та  $G_0$  вище дорівнюють нулю. У дійсності завдяки наявності опору  $R_0$  і витоку  $G_0$  коливальний процес поступово загасає й уздовж лінії встановлюється режим, відповідний до усталеного процесу у лінії при постійній напрузі.

## 5 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ ТА МАГНІТНІ КОЛА

### 5.1 Загальні відомості про нелінійні кола

Електричне коло називається **нелінійним**, якщо воно містить хоча б один нелінійний елемент.

Нелінійні кола широко використовуються в електротехніці, автоматичці, радіоелектроніці та інших галузях. Аналіз процесів у нелінійних електричних колах значно складніший, ніж у лінійних.

Нелінійні елементи поділяються на нелінійні резистори, нелінійні котушки, нелінійні конденсатори.

Нелінійні кола мають ряд властивостей, що дозволяє створити пристрої автоматичного керування, пристрої для автоматичного перетворення електромагнітної енергії, швидкодійні обчислювальні машини, пристрої для здійснення електричних вимірів та передачі інформації тощо.

Нелінійні кола містять нелінійні елементи, характеристики яких залежать нелінійно від струму та напруги і можуть бути як симетричними, так і несиметричними. Отже, нелінійні елементи надають електричним колам властивості, що недосяжні у лінійних.

Пристрої, до складу яких входять нелінійні елементи, виконують такі основні функції:

- підсилення вихідного електричного сигналу;
- випрямлення – процес перетворення змінної напруги на пульсуючу;
- стабілізація напруги - підтримування середнього значення вихідної напруги при змінах вхідної напруги, опору навантаження або температури у певних межах;



- генерування коливань;
- множення та ділення частоти;
- гетеродинування – зміщення спектра вхідного сигналу вздовж осі частот без зміни виду його спектральної функції;
- модуляція – процес, коли один із параметрів модульованого колювання змінюється за законом керуального сигналу низької частоти;
- детектування – процес перетворення модульованого сигналу на низькочастотне колювання, форма якого відтворює керувальний сигнал;
- тригерний ефект – ефект стрибкоподібної зміни вихідної величини при незначній зміні вхідної величини;
- формування різних імпульсів.

У техніці широке застосування знайшли пристрої, що використовують нелінійні елементи. До таких пристроїв належать: підсилювачі електричних сигналів, обмежувачі напруги, випрямлячі, генератори коливань, інвертори, модулятори, демодулятори, запам'ятовуючі пристрої, перетворювачі частоти, ферорезонансні стабілізатори, магнітні підсилювачі та багато інших.

Процеси у нелінійних електричних колах описуються нелінійними алгебраїчними або диференціальними рівняннями, що складені на основі першого та другого законів Кірхгофа. Зазначимо, що метод накладання до таких кіл у загальному випадку не застосовується.

## 5.2 Нелінійні елементи

До найпростіших нелінійних елементів належать: нелінійна ємність, нелінійна індуктивність та нелінійний опір.

При постійних струмах розглядаються електричні кола тільки з **нелінійними та лінійними резисторами**, оскільки ємність у такому колі являє собою розрив кола у місці її вмикання, а індуктивність – коротке замикання ділянки кола.

Як нелінійні резистивні елементи є більшість пристроїв, що застосовуються в електроніці: діоди, стабілітрони, диністри, тиристри, транзистори та інші.

Характеристики нелінійних елементів одержують експериментально та задаються графіками (таблицями) чи наближеними аналітичними виразами.

Електричні властивості нелінійних резистивних елементів характеризуються вольт-амперними характеристиками (ВАХ). За ступенем симетрії щодо осі координат ВАХ поділяються на симетричні (рис. 5.1 а) та несиметричні (рис. 5.1 б).

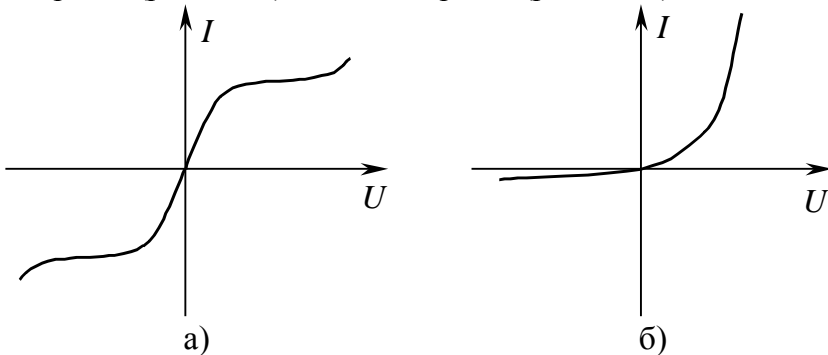


Рисунок 5.1 – Характеристики нелінійних елементів

Значення струму в нелінійному елементі із симетричною характеристикою щодо початку координат не залежить від полярності прикладеної напруги, а опір такого елемента, не зале-

жить від напрямку струму через елемент. У несиметричних нелінійних елементів гілки ВАХ мають різну форму для протилежних напрямків струму і напруги. Це означає, що напруги, однакові за абсолютним значенням, але спрямовані протилежно, спричиняють проходження через елементи різних за значенням струмів.

**Нелінійною індуктивністю** характеризується котушка, яка намотана на замкненому феромагнітному осерді.

Вебер-амперна характеристика нелінійної котушки (рис. 5.2) у масштабі повністю повторює характеристики намагнічування феромагнітного матеріалу осердя, параметри якої залежать від попередньої фази процесу та напрямку магнітного поля. Вебер-амперна характеристика нелінійної індуктивності не має точного аналітичного виразу. Рівняння для характеристики можна отримати, лише скориставшись апроксимацією на окремих відрізках.

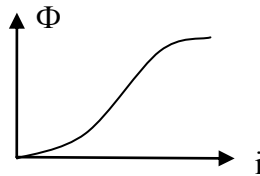


Рисунок 5.2

Нелінійні індуктивні елементи в задачах аналізу характеризуються статичними та динамічними параметрами:

$$L_{ст} = \frac{\Phi}{i}, \quad L_{д} = \frac{d\Phi}{di}.$$

**Нелінійна ємність** – це ємність ідеалізованого конденсатора, значення якої залежить від прикладеної напруги чи напруженості електричного поля (рис. 5.3, кулон-вольтна характеристика).

Нелінійною ємністю характеризуються конденсатори, простір між обкладками яких заповнений діелектриками з неліній-

ними властивостями (сегнетоелектриками) та зворотно увімкнені р-п-переходи.

Нелінійні ємнісні елементи в задачах аналізу характеризуються статистичними та динамічними параметрами  $C_{CT} = \frac{q}{u}$ ,

$$C_D = \frac{dq}{du}.$$

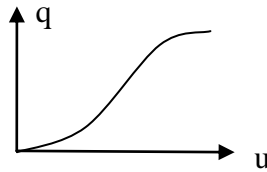


Рисунок 5.3

Властивості діелектрика можна характеризувати залежністю між електричним зміщенням і напруженістю електричного поля  $D = f(E)$  (рис. 5.4).

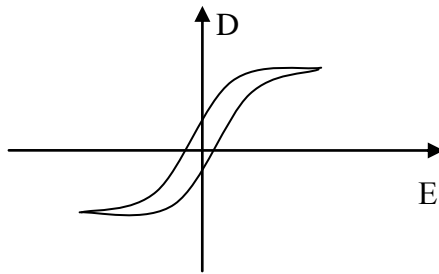


Рисунок 5.4

Реальні нелінійні конденсатори, що мають між обкладками сегнетоелектрики, називають варикондами. Ємність такого конденсатора залежить від прикладеної напруги.

### 5.3 Статистичний та диференціальний опори

Для опису ВАХ нелінійних опорів використовують два параметри: статичний та диференціальний опори.

**Статичний опір** нелінійного елемента – це відношення постійної напруги на нелінійному елементі до струму в ньому

$$R_{cm} = U/I. \quad (5.1)$$

**Диференціальним опором** називається величина  $R_\partial = dU/dI$ , що характеризує нелінійний елемент при малих відхиленнях від точки нелінійної характеристики, що розглядається.

Диференційний опір визначає крутість характеристики у кожній точці, яку обчислюють частіше через малі прирости:

$$R_\partial = \frac{\Delta U}{\Delta I}. \quad (5.2)$$

У загальному випадку статичний та диференціальний опори не дорівнюють один одному, а збігаються лише для лінійних опорів.

### 5.4 Заміна нелінійного елемента лінійним опором та ЕРС

Припустимо, що область роботи нелінійного елемента не виходить за межі ділянки вольт-амперної характеристики, який наближено може бути замінений прямою лінією (рис. 5.5 а, крива 1). Якщо продовжити цю пряму, вона буде перетинати вісь абсцис у точці  $E_1$ . Тоді нелінійний елемент з кусочно-лінійною характеристикою може бути замінений джерелом постійної ЕРС  $E_1$  та лінійним опором  $R_{\partial 1}$ , що дорівнює диференціальному опору нелінійного елемента на прямолінійній ділянці (рис. 5.5 б). Напрямок ЕРС джерела збігається з додатним напрямком струму.

На рис. 5.5 в показаний інший випадок заміни нелінійного елемента лінійним опором  $R_{\partial 2}$  та сталою ЕРС  $E_2$ , коли ЕРС джерела спрямована протилежно додатному напрямку струму.

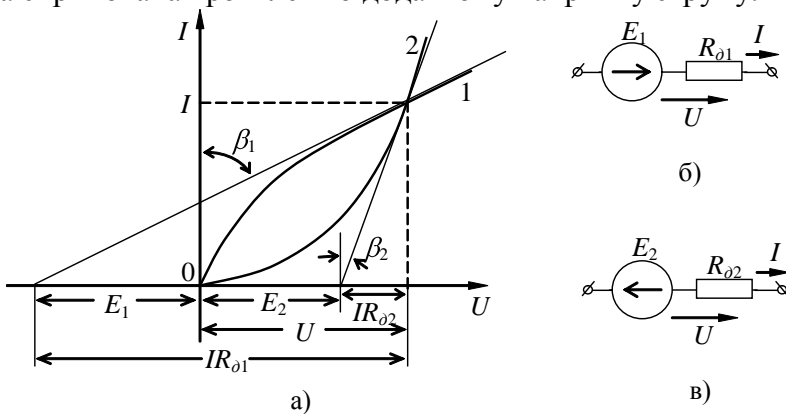


Рисунок 5.5

## 5.5 Розрахунок режиму нелінійних резистивних кіл

Розрахунок нелінійних кіл при постійних струмах здійснюють частіше за все графічними методами.

### 5.5.1 Послідовне з'єднання

На рис. 5.6 а показано послідовне з'єднання двох нелінійних елементів, характеристики яких подані на рис. 5.6 б. Ці два нелінійні опори можна замінити одним з характеристикою  $I(U)$ , що зображена на рис. 5.6 б пунктирною лінією. Для цього потрібно задатися довільним значенням струму, додати відповідні їм абсциси характеристик заданих нелінійних елементів. Аналогічно може бути побудована підсумкова характеристика ділянки кола з декількома послідовно з'єднаними нелінійними елементами.

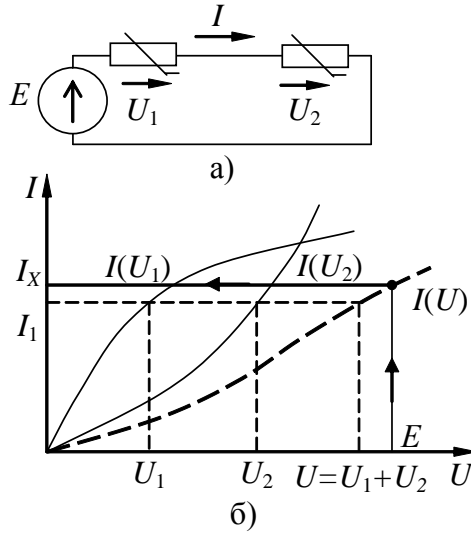


Рисунок 5.6

Одержана характеристика  $I(U)$  дозволяє безпосередньо знаходити для будь-якого значення ЕРС  $E$ , струм та напругу на нелінійному елементі.

При фіксованому значенні  $E$  струм та напруга можуть бути знайдені без побудови підсумкової характеристики. Рівняння напруг для кола  $U_1(I) + U_2(I) = E$  або  $U_1(I) = E - U_2(I)$ .

При деякому струмі  $I$  ліва частина останнього рівняння дорівнюватиме правій частині. Це і буде розв'язком нелінійного рівняння.

## 5.5.2 Паралельне з'єднання

На рис. 5.7 показано паралельне з'єднання двох нелінійних елементів, характеристики яких подані на рис. 5.8. Ці два нелінійні елементи можуть бути замінені одним з характеристикою  $I(U)$ , що зображена пунктирною лінією. Для цього, задаючись довільними значеннями напруги, додають відповідні ординати характеристик, що задані для нелінійного елемента.

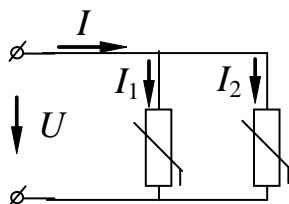


Рисунок 5.7

Аналогічно може бути побудована результуюча характеристика кола при паралельному з'єднанні декількох нелінійних елементів.

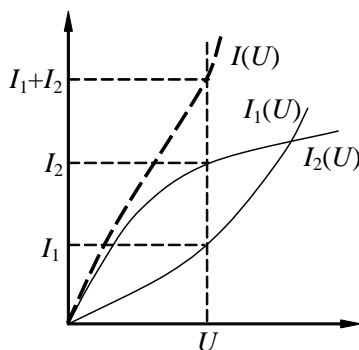


Рисунок 5.8



### 5.5.3 Змішане з'єднання

Випадак змішаного з'єднання трьох нелінійних елементів зображений рис. 5.9 а. Після заміни двох паралельно з'єднаних нелінійних елементів одним еквівалентним схема зі змішаним з'єднанням зводиться до схеми послідовного сполучення двох нелінійних елементів, що розглядалася раніше. Графічна побудова для визначення струмів та напруг наведена на рис. 5.9 б. Спочатку характеристики  $I_1(U_1)$  и  $I_2(U_2)$  замінюють однією  $I_3(U_3)$ , додаючи струми для декількох значень напруги, а потім, за одержаною характеристикою та заданою  $U_3(I_3)$ , будують сумарну вольт-амперну характеристику (ВАХ) кола  $I_3(U)$ , додаючи напруги для декількох значень струмів. Для будь-якого значення  $U$  за сумарною ВАХ  $I_3(U)$  можна визначити струм  $I_3$  та напруги на паралельній ділянці кола  $U_1$ , та напругу на нелінійному елементі  $U_3$ . Знаючи напругу  $U$ , можна визначити струми  $I_1$  та  $I_2$  за ВАХ  $I_1(U_1)$  та  $I_2(U_2)$ .

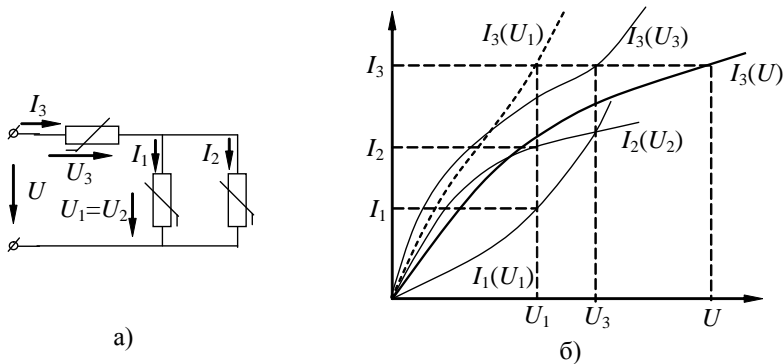


Рисунок 5.9

## 5.6 Магнітні кола

### 5.6.1 Основні поняття магнітного кола

**Магнітним колом** називають з'єднання пристроїв, що містять феромагнітні осердя з обвитками із ізольованих провідників і повітряні проміжки.

Магнітні кола наявні в електричних машинах, електромагнітних апаратах, елементах автоматики та релейного захисту, вимірювальних системах. Магнітний потік, який замикається вздовж магнітного кола, утворюється струмами обвиток. У загальному випадку такі кола нелінійні.

Подібно до електричного поля магнітне поле є носієм енергії і діє на інші магніти чи рухомі заряди. Однойменні полюси магнітів відштовхуються, а різнойменні – притягуються. Відомо, що електричний струм породжує магнітне поле, а змінне магнітне поле, у свою чергу, породжує електричний струм у контурі.

**Сила Лоренца** – сила дії магнітного поля на заряд, що рухається, пропорційна величині заряду  $q$ , швидкості його руху  $\vec{v}$ , магнітній індукції  $B$  та залежить від напрямку руху заряду.

Ця сила визначається за формулою

$$F = q \cdot [\vec{v} \cdot \vec{B}].$$

Сила Лоренца максимальна, якщо напрям руху частинки перпендикулярний до вектора магнітної індукції.

**Магнітна індукція ( $B$ )** – це фізична величина, яка чисельно дорівнює силі, з якою магнітне поле діє на одиничний електричний заряд, що рухається з одиничною швидкістю в деякому середовищі перпендикулярно до силових ліній.

Одиниця вимірювання магнітної індукції в системі СІ має назву тесла (коротко позначається – Тл).

Для зручності розрахунків магнітних полів застосовують векторну диференціальну характеристику магнітного поля – вектор напруженості магнітного поля  $\vec{H}$ .

**Напруженість магнітного поля** характеризує силову дію магнітного поля на заряд, що рухається, без урахування магнітних властивостей середовища.

Величиною, яка використовується для інтегральної оцінки магнітного поля, є магнітний потік.

**Магнітний потік** – це потік вектора магнітної індукції крізь певну поверхню.

Вимірюється магнітний потік у веберах (скорочено – Вб). Магнітне поле зображують за допомогою магнітних силових ліній.

У загальному випадку поверхня, що пронизується магнітним потоком, може бути як завгодно складною. Якщо окремі ділянки поверхні пронизуються різними магнітними потоками, то користуються поняттям потокозчеплення.

**Потокозчеплення** визначається алгебраїчною сумою всіх магнітних потоків, які пронизують поверхню.

Окрім цього, існує поняття магнітного потоку взаємоіндукції та потокозчеплення взаємоіндукції.

Якщо магнітний потік, що зчеплюється з контуром, утворюється електричним струмом іншого контура, то такий потік називається **магнітним потоком взаємоіндукції**, а відповідне потокозчеплення – **потокозчепленням взаємоіндукції**.

### 5.6.2 Основні закони магнітних кіл постійного струму

За аналогією з електричними колами для аналізу магнітних кіл застосовують схеми заміщення, а для складання рівнянь стану – закони Ома та Кірхгофа для магнітних кіл.

Одним із основних законів, що використовуються при розрахунку магнітних кіл, є закон повного струму

$$\oint H dl = \sum I. \quad (5.3)$$

Він формулюється таким чином:

*Інтеграл за замкнутим контуром вектора напруженості магнітного поля  $H$  дорівнює алгебраїчній сумі струмів  $\sum I$ , що охоплюють цей контур; знак струму визначається за правилом правого гвинта.*

Якщо довжина  $l$  змінюється в метрах, струм  $I$  – в амперах, то напруженість  $H$  має розмірність ампер на метр. У випадку, коли контур інтегрування охоплює  $w$  витків котушки, через яку проходить струм  $I$ , закон повного струму (5.3) набере вигляду

$$\oint H dl = Iw = F, \quad (5.4)$$

де  $F$  – **магніторушійна сила** (МРС), що вимірюється в амперах чи ампер-витках.

Під магніторушійною силою (МРС) розуміють повний струм, який створює магнітне поле в магнітопроводі. На схемі заміщення джерело МРС умовно позначають аналогічно джерелу ЕРС кружечком зі стрілкою всередині й літерою  $F$  праворуч. Пасивні елементи – це магнітні опори  $R_M$ , які моделюють ділянки магнітопроводу без обвиток. Значення магнітного опору визначається довжиною і площею перерізу ділянки магнітопроводу, матеріалом осердя. Магнітопроводи можуть мати розгалужену структуру, тоді на схемі заміщення місця розгалуження позначають як вузли.

Для практичних розрахунків інтеграл замінюють сумою добутоків  $H_k l_k$ , де індекс  $k$  вказує ділянку, вздовж якої  $H$  та  $\mu$  беруть незмінними. В результаті формула (5.4) записується у вигляді **закону магнітного кола**:

$$\sum_{k=1}^{k=n} H_k l_k = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{B_k}{\mu_{ak}} l_k = F, \quad (5.5)$$

де  $n$  - число ділянок.

Добуток  $H_k l_k$  за відсутності обвитки зі струмом на  $k$ -й ділянці носить назву **різниці скалярних магнітних потенціалів** двох точок або спадання магнітної напруги вздовж ділянки шляху і позначається  $U_{mn}$ , де  $m$  та  $n$  – початок та кінець ділянки.

Оскільки лінії магнітної індукції неперервні та замкнені, то потік вектора магнітної індукції крізь замкнену поверхню дорівнює нулю:

$$\Phi = \oint \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (5.6)$$

З рівняння (5.6) випливає таке важливе положення: у **нерозгалуженому магнітному колі потік на всіх ділянках однаковий**, а у розгалуженому колі потік на ділянці, що підходить до місця розгалуження, дорівнює сумі магнітних потоків на ділянках, що виходять від місця розгалуження. У **розгалуженому магнітному колі потік  $\Phi$  підпорядковується першому закону Кірхгофа**.

Якщо прийняти, що вектор індукції  $B$  однаковий у всіх точках поперечного перерізу  $S$  нерозгалуженого магнітного кола та направлений перпендикулярно до цього перерізу, то його потік  $\Phi = \int B dS$  можна записати як

$$\Phi = B_k S_k,$$

де індекс  $k$  вказує ділянку, вздовж якої  $B$  та  $S$  можуть бути взяті незмінними.

В результаті підстановки в рівняння (5.6)  $B_k = \Phi / S_k$  одержуємо залежність між магнітним потоком та МРС, яку називають законом Ома для магнітного кола:

$$\Phi = \frac{F}{\sum \frac{l_k}{\mu_{ak} S_k}} = \frac{F}{\sum R_{mk}} = \frac{F}{R_M}, \quad (5.7)$$

де  $R_M$  – магнітний опір кола, що має розмірність 1/Гн.

За аналогією з електричним колом запишемо закон Ома для ділянки магнітного кола:

$$\Phi = \frac{U_M}{R_M}, \quad (5.8)$$

де  $U_M$  – магнітна напруга ділянки кола.

Магнітна напруга ділянки магнітного кола  $l$  визначається за формулою

$$U_M = \int_a^b \vec{H} \cdot \vec{dl}. \quad (5.9)$$

Якщо магнітне поле та вектори  $\vec{H}$  та  $\vec{l}$  збігаються за напрямом, то  $U_M = H \cdot l$ . Одиниця вимірювання МРС та магнітної напруги однакові й тотожні з одиницею вимірювання струму, тобто ампером.

Закон Ома для магнітного кола у більшості випадків не може бути застосований для розрахунку внаслідок того, що зв'язок між  $B$  та  $H$  нелінійний. Приблизна графічна залежність  $B=f(H)$  для феромагнітних матеріалів показана на рис. 5.10; така двозначна залежність називається **петлею гістерезиса**. Індукція  $B_r$  при  $H=0$  називається **залишковою**. Ширина петлі дорівнює подвоєному значенню коерцитивної сили  $H_c$ .

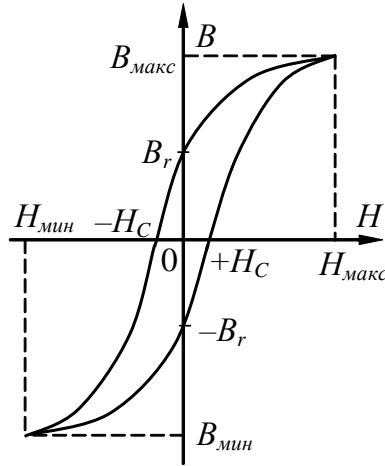


Рисунок 5.10

Розглянемо нерозгалужене магнітне коло, що зображено на рис. 5.11, через яке проходить постійний струм  $I$ .

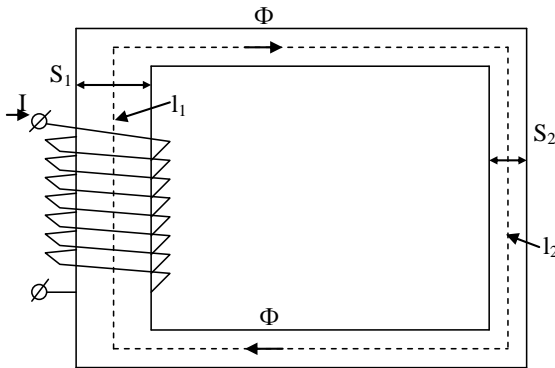
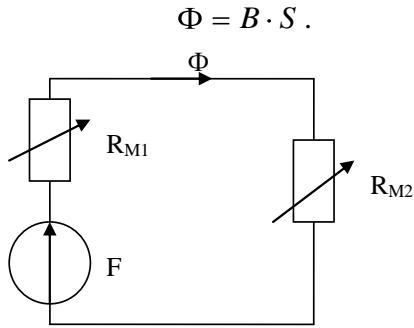


Рисунок 5.11

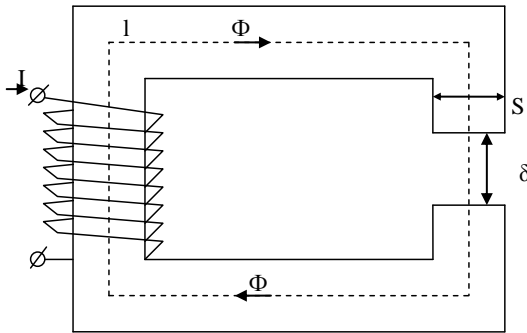
Схема заміщення нерозгалуженого магнітного кола є замкненим нерозгалуженим контуром (рис. 5.12). Джерело МРС  $F$  моделює обвитку з постійним струмом  $I$ . Ділянки  $l_1$  та  $l_2$  магнітопроводу мають різні площі перерізів –  $S_1$  та  $S_2$  відповідно. Тому схема заміщення містить два магнітні опори  $R_{M1}$  та  $R_{M2}$ .

Магнітний потік  $\Phi$  на кожній нерозгалуженій ділянці пасивної ділянки магнітопроводу залишається незмінним і визначається як



*Рисунок 5.12*

Магнітні кола з постійними магнітами завжди розімкнені, тобто мають корисний (робочий) повітряний проміжок (рис. 5.13).



*Рисунок 5.13*

Схема заміщення магнітного кола з постійним магнітом наведена на рис. 5.14.



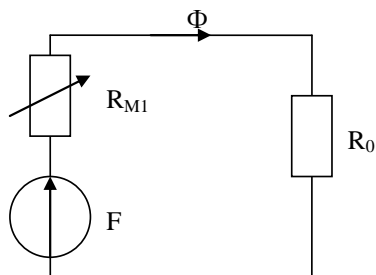


Рисунок 5.14

### 5.6.3 Розгалужене магнітне коло постійного струму

У розгалуженому магнітному колі можуть існувати декілька магнітних потоків, які додаються чи віднімаються на деяких ділянках.

На рис. 5.16 показане розгалужене магнітне коло та еквівалентне йому електричне коло. У розгалуженому колі діють перший та другий закони Кірхгофа.

#### **Перший закон Кірхгофа**

*Алгебраїчна сума магнітних потоків у вузлі дорівнює нулю.*

Математична форма запису першого закону Кірхгофа

$$\sum \Phi_k = 0. \quad (5.10)$$

При цьому магнітні потоки, що направлені до вузла, мають один знак (наприклад, додатний), а магнітні потоки, що спрямовані від вузла, – протилежний знак (рис. 5.15).

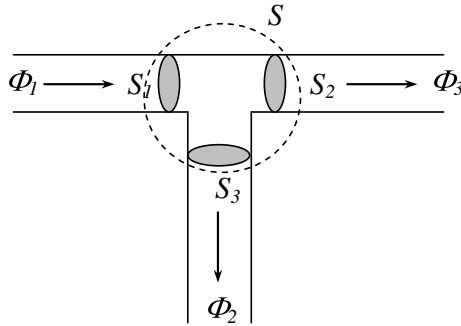


Рисунок 5.15

### *Другий закон Кірхгофа*

*Алгебраїчна сума намагнічувальних сил в будь-якому контурі дорівнює алгебраїчній сумі добутків потоків на відповідні магнітні опори даного контура.*

При цьому необхідно задатися додатним напрямом обходу контура.

Розгалужені магнітні кола є нелінійними і їх розрахунок здійснюють за допомогою магнітних характеристик.

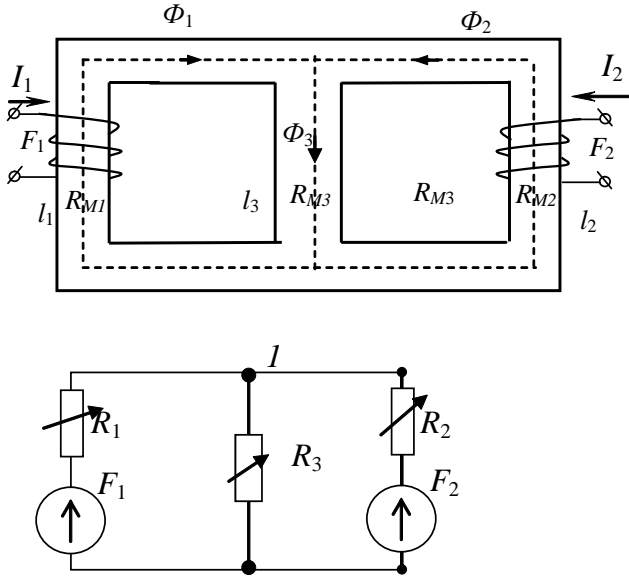


Рисунок 5.16

Наприклад, для вузла 1 розгалуженого магнітного кола (рис. 5.16) перший закон Кірхгофа запишеться так

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_3 = 0.$$

Рівняння за другим законом Кірхгофа:

$$R_{M1} \cdot \Phi_1 + R_{M3} \cdot \Phi_3 = F_1,$$

$$R_{M3} \cdot \Phi_3 + R_{M2} \cdot \Phi_2 = F_2.$$

Розрахунки магнітних кіл подібні до розрахунків електричних кіл із нелінійними елементами.

## 5.7 Магнітні кола змінного струму з феромагнітними елементами

Нелінійна залежність напруги від струму  $u(i)$  в пристроях із феромагнітними елементами призводить до появи явищ, яких неможливо досягти в лінійних колах. У деяких випадках ці явища небажані (наприклад, поява несинусоїдальних струмів, вищих гармонічних складових), в інших випадках на їх основі розробляють спеціальні пристрої.

### 5.7.1 Деякі особливості кіл змінного струму із феромагнітними елементами

У технічній літературі нелінійні електромагнітні кола називають колами зі сталлю.

1. При розрахунках кіл зі сталлю в більшості випадків **неможливо брати індуктивність  $L$  та взаємну індуктивність  $M$  постійними** і тому доводиться користуватися безпосередньо залежностями між ЕРС та магнітним потоком чи потокозчепленням. Для косинусоїдального магнітного потоку  $\Phi = \Phi_m \cos \omega t$  такий зв'язок має вигляд (за відсутності розсіювання)

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt} = \omega w \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t,$$

звідки діюче значення ЕРС

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega \cdot w \Phi_m = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f \cdot w \Phi_m \approx 4,44 f \cdot w \Phi_m, \quad (5.11)$$

де  $w$  – кількість витків обмотки,  $\omega = 2\pi f$  – частота.

Потрібно звернути увагу на те, що ЕРС  $E$  відстає за фазою від потоку  $\Phi$  на кут  $\pi/2$ .

2. У багатьох випадках у колах із феромагнітними осердям падіння напруги на активному опорі суттєво менше від величини ЕРС і в цих випадках говорять, що прикладена напруга урівнюється в основному за рахунок ЕРС, тобто

$$U \approx E = 4,44f \cdot w \Phi_m.$$

З цього рівняння також впливає і інша особливість – **магнітний потік у феромагнітному осерді при змінних струмах в основному визначається прикладеною напругою**, тобто

$$\Phi_m \approx \frac{U}{4,44f \cdot w}. \quad (5.12)$$

Зазначимо, що при постійних струмах магнітний потік визначається в основному струмом – точніше, магнітною індукцією, яка пов'язана нелінійною залежністю з напруженістю магнітного поля, яка визначається струмом, тобто

$$\Phi = BS, \quad B = f(H), \quad Hl + H_\delta \delta = Iw.$$

3. У колах зі сталлю виникають несинусоїдальні напруги та струми. У ряді випадків такі напруги та струми зручно замінити еквівалентними синусоїдами. Амплітуда еквівалентної синусоїди дорівнює діючому значенню відповідної несинусоїдальної величини, що помножена на  $\sqrt{2}$ , а зсув фаз між еквівалентними синусоїдами напруги та струму визначається за формулою

$$\varphi = \arccos \frac{P}{UI}, \quad (5.13)$$

де  $U$  – діюче значення напруги  $u$ ,  $I$  – діюче значення струму  $i$ ,  $P$  – активна потужність несинусоїдального струму.

Якщо одна з величин ( $u$  чи  $i$ ) синусоїдальна, то еквівалентна синусоїда, одержана для другої величини, орієнтується за фазою щодо першої. У випадку, якщо несинусоїдальні як  $u$ , так і  $i$ , за початкову фазу еквівалентної синусоїди напруги може бути обрана початкова фаза основної гармоніки напруги  $u$ .

Подання несинусоїдальних величин у вигляді еквівалентних синусоїд дозволяє проводити аналіз їх за допомогою векторних діаграм.

4. При зміні магнітного поля у феромагнітному матеріалі частина енергії магнітного поля перетворюється на тепло. Потужність, що відповідає цій частині енергії, називається втратами у сталі та позначається  $P_{cm}$ ; у розрахунках, як правило, користуються питомими втратами у сталі  $p_{cm}$ , що вимірюються у ватах на кілограм.

Втрати у сталі складаються із втрат від гістерезису (втрати від перемагнічування) та динамічних втрат. Питомі втрати від гістерезису, позначають  $p_H$ , викликаються незворотними процесами у сталі при зміні орієнтації ділянок довільного намагнічування та пропорційні частоті. Для обчислення питомих втрат від гістерезису застосовується наближена формула:

$$p_H = \sigma_H B_m^2 f, \quad (5.14)$$

де  $\sigma_H$  – коефіцієнт, що залежить від сорту матеріалу,  $f$  – частота,  $B_m$  – амплітуда магнітної індукції.

Динамічні втрати викликаються вихровими струмами, що індукуються у масі магнітного матеріалу, а також магнітною в'язкістю, яка особливо помітно проявляється на крутих ділянках петлі гістерезису при малих змінах поля. У великій кількості практичних випадків динамічні втрати можна порівнювати зі втратами від вихрових струмів.

Питомі втрати від вихрових струмів

$$p_B = \frac{P_B}{alb\gamma} = \frac{\pi^2}{6\rho\gamma} b^2 f^2 B_m^2 = \sigma_B f^2 B_m^2, \quad (5.15)$$

де  $\gamma$  – густина сталі;  $\sigma_B$  – коефіцієнт, що залежить від сорту сталі;  $b$  – товщина листа.

З виразу (5.15) бачимо, що  $p_B$  пропорційне квадрату частоти та квадрату товщини листа. Відповідно, одним зі способів зменшення  $p_B$  є зменшення товщини листа. Однак листи не можна виготовляти дуже тонкими. Зменшенню товщини листів заважає та обставина, що при цьому збільшуються питомі втрати від гістерезису  $p_H$ . Для різних частот існують різні оптимальні товщини листів. Наприклад, при частоті 400 Гц застосовуються листи товщиною 0,1–0,35 мм, а при частоті 50 Гц листи товщиною 0,35–0,5 мм.

5. При частотах порядку тисяч герців та вище виявляється поверхневий ефект, у результаті якого магнітна індукція не однаково розподілена у перерізі магнітопроводу (вона більша на периферії та менша у центрі перерізу).

Через поверхневий ефект і збільшення втрат сталі використання осердь, що зібрані зі сталених листів, при високих частотах недоцільне. На високих частотах застосовуються осердя із феритів, що мають великий питомий електричний опір.

Феритами називають магнітні матеріали напівпровідникового типу. Феритові осердя виготовляються із порошків пресуванням з подальшим відпалюванням. Інші напівпровідникові матеріали чутливі до змін температури, зберігають свої магнітні властивості приблизно до  $+70$ — $+120^{\circ}\text{C}$ .

### 5.7.2 Котушка із феромагнітним осердям

Схема, що показана на рис. 5.17, дозволяє визначити основні характеристики матеріалу осердя.

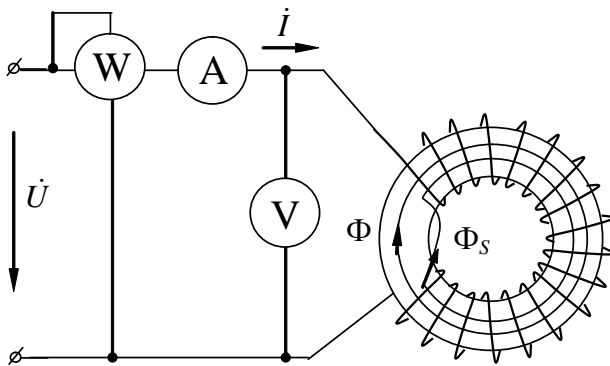


Рисунок 5.17

Під час дослідження, як правило, відомі число витків обмотки  $w$ , активний опір  $R$ , переріз магнітопроводу  $S_{cm}$ , довжина середньої лінії напруженості  $l_{cp}$  та частота  $f$ . За показами електровимірювальних приладів визначаються струм  $I$ , напруга  $U$  на

затискачах обмотки та вживана потужність  $P$  (при визначенні  $P$  із показів ватметра необхідно відняти потужність втрат в амперметрі та вольтметрі).

Діюче значення напруженості  $H$  магнітного поля визначається за формулою

$$H = I \cdot w / l_{cp}.$$

При синусоїдальній напрузі амплітуда магнітного потоку, що замикається по осердю котушки:

$$\Phi_m = \frac{E\sqrt{2}}{\omega w} \approx \frac{E}{4,44 f \cdot w},$$

де  $E$  – діюче значення ЕРС, що наводиться в обмотці вищевказаним магнітним потоком.

Крім магнітного потоку  $\Phi$ , що замикається по осердю котушки, є ще магнітний потік розсіювання  $\Phi_S$ , що замикається через повітря і вказаний на рис. 5.18 умовно (потік розсіювання може бути зчеплений лише з частиною витків обмотки). Оскільки магнітний опір повітря значно більший за магнітний опір осердя, потік  $\Phi_S$  можна вважати збіжним за фазою зі струмом та прямо пропорційним йому. Це дає можливість враховувати ЕРС, що наводиться потоком розсіювання, за допомогою опору розсіювання  $x_S$ .

Оскільки додатні напрями для струму та наведений потоком  $\Phi$  ЕРС збігаються, то сума прикладеної напруги та наведеної ЕРС дорівнює падінню напруги в активному опорі та опорі розсіювання:

$$U + \dot{E} = (R + jX_S)I, \quad \text{звідки} \quad U = -\dot{E} + (R + jX_S)I.$$

У більшості випадків  $E$  мало відрізняється від  $U$ . Амплітуда магнітної індукції тоді  $B_m = \Phi_m / S_{cm}$ .

Різниця між потужністю, що поглинається котушкою, та потужністю, що витрачається на нагрівання обмотки, дорівнює втратам потужності у сталі осердя:

$$P - RI^2 = P_{cm}.$$

Питомі втрати у сталі



$$P_{cm} = \frac{P_{cm}}{\gamma_{cm} I_{cp} S_{cm}}, \quad (5.16)$$

де  $\gamma_{cm}$  – питома вага матеріалу осердя.

Для котушки з феромагнітним осердям характерними є два режими роботи:

- 1) напруга на затискачах обмотки синусоїдальна, а струми в обмотці несинусоїдальні;
- 2) струм в обмотці синусоїдальний, а напруга на затискачах несинусоїдальна.

У першому випадку при  $R \approx 0$  можна взяти магнітний потік синусоїдальним та побудувати криву струму  $i(t)$ . Порядок побудови кривої  $i(t)$  вказаний на рис. 5.18. На кривій магнітного потоку  $\Phi(t)$  довільно обирається точка 1, завдяки горизонтальній лінії 1-2, що перетинає криву  $\Phi(i)$ , та вертикальній лінії 2-3 визначається значення струму  $i$ , що дорівнює абсцисі 0-3, який відповідає значенню (ординаті) потоку в точці 1. Це значення струму відкладається у вигляді ординати 0-4 та переноситься до координатної системи  $i(t)$  шляхом проведення горизонтальної лінії 4-5 до перетину з вертикальною прямою 1-5. При виборі вихідних точок на нижній частині кривої  $abc$  значення струму  $i$  визначається також за допомогою нижньої гілки  $abc$  петлі  $\Phi(i)$ .

Зображена на рис. 5.18 крива  $i(t)$  симетрична щодо осі абсцис, що означає відсутність парних гармонік. Еквівалентна синусоїда струму  $i_E$  зсунута за фазою відносно магнітного потоку  $\Phi$  на кут  $\delta$ .

При синусоїдальній прикладеній напрузі, ЕРС, що наводиться в обвитті несинусоїдальна внаслідок появи вищих гармонійних складових у струмі. Однак спотворення ЕРС зазвичай невелике і, подаючи її у вигляді еквівалентної синусоїди, можна взяти  $-\dot{E} = \dot{U}_\phi$ , де  $U_\phi$  – складова прикладеної напруги  $\dot{U}$ , що витрачається на подолання ЕРС  $\dot{E}$ .

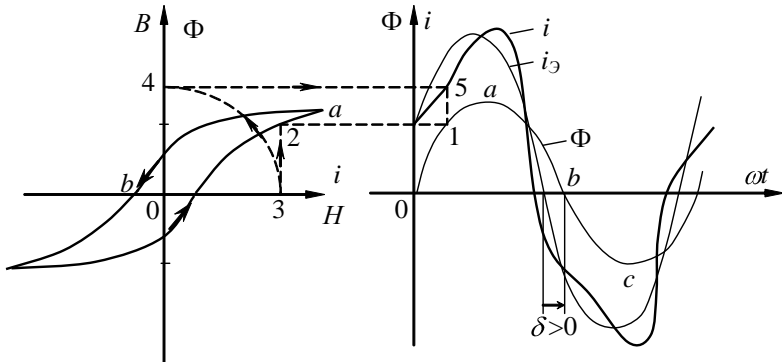


Рисунок 5.18

Відношення  $\frac{\dot{I}}{\dot{U}_\Phi} = Y_0 = y_0 e^{-j(\pi/2 - \delta)}$  – комплексна провід-

ність гілок намагнічування та втрат у сталі;  $y_0$  – повна провідність гілок намагнічування та втрат у сталі (нагадаємо, що кут між  $\dot{E}$  та  $\dot{\Phi}_m$  дорівнює  $\pi/2$ )

$Y_0 = y_0 \cos(\pi/2 - \delta) - jy_0 \sin(\pi/2 - \delta) = y_0 \sin \delta - jy_0 \cos \delta = g_0 - jb_0$ , де  $g_0$  – провідність гілки втрат у сталі,  $b_0$  – провідність гілки намагнічування.

Струм в обмотці подається у вигляді двох складових: намагнічувального струму  $\dot{I}_\Phi = b_0 \dot{U}_\Phi$  та струму втрат у сталі  $\dot{I}_\Pi = g_0 \dot{U}_\Phi$ . Якщо взяти, що  $\dot{\Phi}_m$  збігається з дійсною віссю комплексної площини, то струм

$$\dot{I} = I_\Phi + jI_\Pi = I e^{j\delta}.$$

Відповідно до викладеного нижче зображено схему заміщення (рис. 5.19) котушки с феромагнітним осердям.

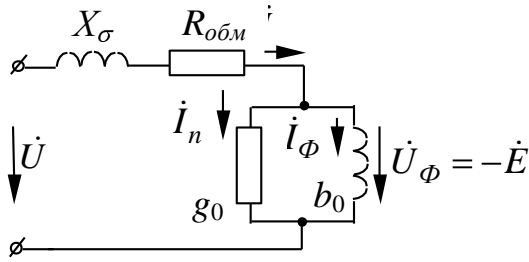


Рисунок 5.19

## 5.8 Явище ферорезонансу

У нелінійних магнітних колах зі змінним потоком, що містить котушку індуктивності та ємність, може виникати явище резонансу, як і у колах змінного струму.

Резонанс у колі, що містить котушку з насиченим феромагнітним осердям, з'єднану послідовно чи паралельно з ємністю, називається **ферорезонансом**.

На відміну від лінійних електричних кіл, у яких зміна величини прикладеної напруги (чи струму при живленні від джерела струму) не викликає явища резонансу, в нелінійному колі з феромагнітним елементом можливі зміни знака кута зсуву фаз між основними гармоніками напруги (чи струму) джерела живлення. Аналіз явища ферорезонансу у колах спрощується, якщо скористатися еквівалентними синусоїдальними напругою та струмом у котушці.

Позначимо діючі значення цих величин через  $U_K$  та  $I_K$ . Розрізняють ферорезонанс напруг та струмів.

### 5.8.1 Ферорезонанс напруг

**Ферорезонанс напруг** виникає при послідовному з'єднанні котушки з феромагнітним осердям та ємністю (рис. 5.20 а).

Оскільки зв'язок між значеннями  $B_m$  та  $H_m$  в осерді визначається динамічною кривою намагнічування  $B_m=f(H_m)$ , то зв'язок між  $U_K$  та  $I_K$  визначається вольт-амперною характеристикою, що подібна до кривої намагнічування. Це означає, що зі збільшенням струму  $I_K$  в обмотці повний опір котушки  $z_K=U_K/I_K$  зменшується.

Опір  $R_K$  становить невелику частку повного опору  $z_K$ . Тому наближено можна вважати, що котушка має тільки індуктивний опір  $x_K \approx z_K$ .

При поступовому збільшенні струму  $I$  від нуля (рис. 5.20 б) напруга  $U_K$  буде змінюватися за кривою, а  $U_C = \frac{1}{\omega C}$  за прямою, оскільки  $\omega$  та  $C$  величини сталі. Якщо живити коло від джерела напруги, то прикладена напруга визначиться як  $U = |\dot{U}| = |\dot{U}_K + \dot{U}_C| \approx |U_K - U_C|$ ; тут вважають, що  $\dot{U}_K$  випереджає струм  $\dot{I}$  на кут, близький до  $90^\circ$ .

Крива  $|U_K - U_C|$  наближено збігається з  $U$  на ділянці  $Oa'b$ . Подальший хід кривої  $|U_K - U_C|$  показаний пунктиром; розходження з кривою  $U$  зумовлене впливом активної складової напруги  $U_K$  (активна складова  $U_C$  практично дорівнює нулю).

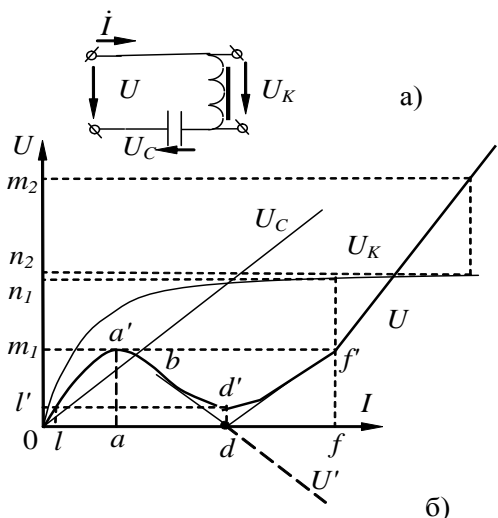


Рисунок 5.20

При значеннях струму, менших від  $Od$ , прикладена напруга  $\dot{U}$  випереджає струм  $\dot{I}$ , а при струмах, більших за  $Od$ , відстає. Струму  $Od$  відповідає мінімальна напруга  $dd'$ , що дорівнює активній складовій напруги. При цьому еквівалентні синусоїди напруги та струми за фазою, а  $U_K$  дещо перевищує  $U_C$  (за рахунок активної складової). Точка  $d$  відповідає резонансу напруги.

Ділянка  $a'd'$  кривої напруги  $U$  є спадною. Це означає, що при збільшенні струму падіння напруги в колі зменшується і, відповідно, при незмінній ЕРС джерела енергії струм у колі збільшується. Спадна ділянка  $a'd'$  відповідає нестійкому режиму роботи кола.

При постійному збільшенні прикладеної до кола напруги (починаючи з нуля) струм спочатку поступово збільшується до деякого значення  $Oa$ , а потім відбувається стрибок до нового значення  $Of$ , після чого знову плавно збільшується.

Якщо зменшити напругу на затискачах кола (починаючи зі значення, що більше  $ff'$ ), то зміна зрівнювального падіння напруги відбувається спочатку поступово на ділянці  $f'd'$ , а потім на ділянці  $l'O$ .

У цьому випадку ділянка  $d'a'l'$  є неробочою. Струм поступово зменшується до значення  $Od$ , а потім відбувається стрибок до значення  $Ol$ .

Іншими словами, ділянка характеристики  $U(I)$ , рис. 2.20 б, між точками  $a'$  та  $d'$  не вдається експериментально зняти при живленні кола від джерела напруги. Якщо живити коло від джерела струму, то можуть бути експериментально зняті всі точки характеристики, оскільки кожному заданому значенню струму відповідатиме тільки одне значення напруги.

Схема, що зображена на рис. 2.20 б, може бути використана як стабілізатор напруги, на вході якого напруга дорівнює  $U$ , а на виході  $U_K$ . При зміні  $U$  від  $Om_1$  до  $Om_2$   $U_K$  змінюється в дуже малих межах від  $On_1$  до  $On_2$ .

## 5.8.2 Ферорезонанс струмів

**Ферорезонанс струмів** виникає при паралельному з'єднанні котушки з феромагнітним осердям та ємністю (рис. 5.21 а).

Характер зміни струмів у функції напруги  $I(U)$ ,  $I_K(U)$  та  $I_C(U)$  в колі аналогічний характеру зміни напруги у функції струма  $U(I)$ ,  $U_K(I)$  та  $U_C(I)$  в колі, що зображене на рис. 5.21 а. На рис. 5.21 б зображені криві струмів при сталому збільшенні напруги  $U$  від нуля. Якщо коло, що зображене на рис. 5.21 а живити від джерела струму та поступово змінювати струм, то на затискачах кола спостерігатимуться стрибкоподібні зміни напруги: від  $Oa$  до  $Of$  при збільшенні струму та від  $Od$  до  $Ol$  при зменшенні струму. Точка  $d$  відповідає резонансу струмів.

При живленні кола від джерела напруги загальний струм у колі визначається вольт-амперною характеристикою  $Oa'd'f'$  (і далі), що зображена на рис. 5.21 б. Кожному заданому значенню напруги відповідатиме тільки одне значення струму, і тому спадна ділянка характеристики може бути знята експериментально.

При досягненні резонансу амплітуда третьої гармоніки загального струму кола може в декілька разів перевищити амплітуду першої гармоніки.

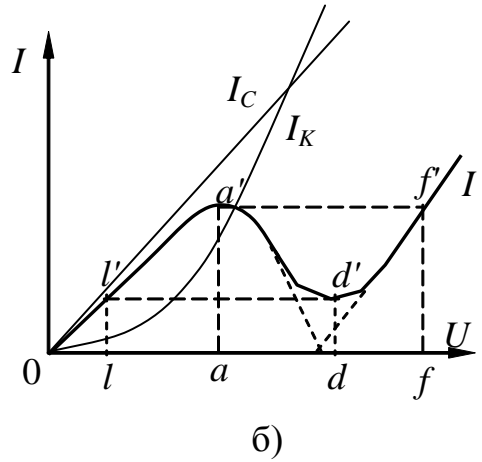
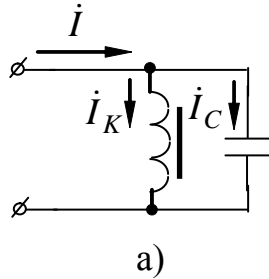


Рисунок 5.21 – Ферорезонанс струмів

## 5.9 Трансформатор із феромагнітним осердям

Наявність феромагнітного осердя дає можливість значно збільшити магнітний потік і завдяки цьому збільшити потужність, передану з одного кола в інше. Однак при цьому трансформатор стає нелінійним елементом кола і в осерді з'являються втрати.

У більшості випадків прагнуть сконструювати трансформатор таким чином, щоб нелінійність за можливості мало впливала на його роботу. Під час аналізу роботи трансформатора часто нехтують його нелінійністю і подають напруги, струми і магнітний потік у вигляді еквівалентних синусоїд.

Залежно від призначення трансформатори поділяються на: а) силові; б) вимірювальні; в) спеціального призначення (розділові, пік-трансформатори тощо). Процеси, що визначають роботу трансформаторів різних типів, по суті, ті самі й можуть бути вивчені на прикладі роботи двохобвиткового силового трансформатора, схема включення якого показана на рис. 5.22. На схемі прийнятий зустрічний напрямок струмів (точками відзначені однойменні зажими обмоток).

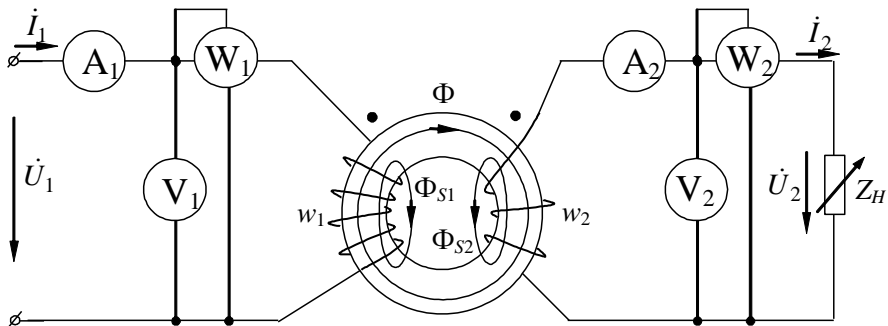


Рисунок 5.22 - Двохобвитковий трансформатор



Для вивчення роботи такого трансформатора користуються схемою заміщення, що зображена на рис. 5.23. Основна відмінність цієї схеми від аналогічної схеми, розглянутої в першій частині курсу, полягає в наявності галузей втрат у сталі  $g_0$ , включеної паралельно галузі намагнічування  $b_0$ , як це було показано для котушки зі сталевим сердечником.

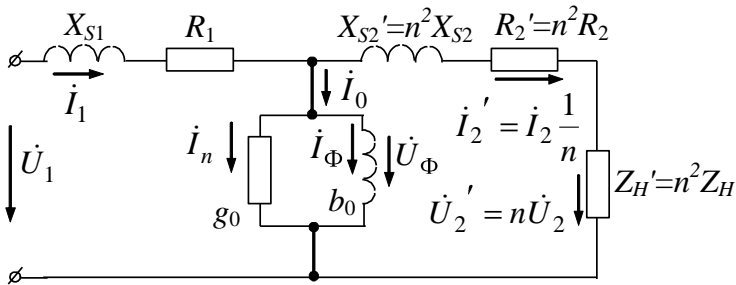


Рисунок 5.23 - Схема заміщення трансформатора

Цій схемі заміщення відповідає векторна діаграма, що зображена на рис. 5.24 а при опорі навантаження  $Z_H = zh \angle \varphi_H$ , де  $\varphi_H > 0$ .

Струм, що намагнічує,  $I_\Phi$  створює магнітний потік  $\Phi$ , що замикається за осердям. Цей потік наводить ЕРС  $\dot{E}_1 = \dot{E}_2$ , яка відстає на  $90^\circ$  від вектора  $\dot{\Phi}_m$ .

Напруга у гілці намагнічування, додатний напрямок якої збігається з додатними напрямками струму  $\dot{I}_\Phi$  та ЕРС  $\dot{E}_1$ , що дорівнює  $\dot{U}_\Phi = -\dot{E}_1$ . Напруга  $\dot{U}_1$  дорівнює геометричній сумі падінь напруг у активних та індуктивних опорах обмоток і напруги  $\dot{U}_2'$  на навантаженні. У свою чергу, первинний струм дорівнює  $\dot{I}_1 = \dot{I}_2' + \dot{I}_0$ , звідки МРС  $\dot{I}_0 w_1 = \dot{I}_1 w_1 - \dot{I}_2 w_2$  (складову  $\dot{I}_2 w_2$  іноді називають розмагнічувальною). Тут штрихами позначені величини, наведені до первинної обвитки.

Векторна діаграма, що зображена на рис. 5.24 а, відповідає зустрічному напрямку струмів  $\dot{I}_1$  та  $\dot{I}_2$ . Якщо струми спрямовані узгоджено, то векторна діаграма трансформатора може бути отримана поворотом на  $180^\circ$  векторів, у які входить струм  $\dot{I}_2'$ , в тому числі й вектора  $\dot{U}_2'$ , що дорівнює спаду напруги від струму  $\dot{I}_2'$  у опорі  $Z_H'$ . Векторна діаграма, показана на рис. 5.24 б, для узгодженого напрямку струмів, наведена не для наведених величин. При цьому МРС  $\dot{I}_0 w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2$ .

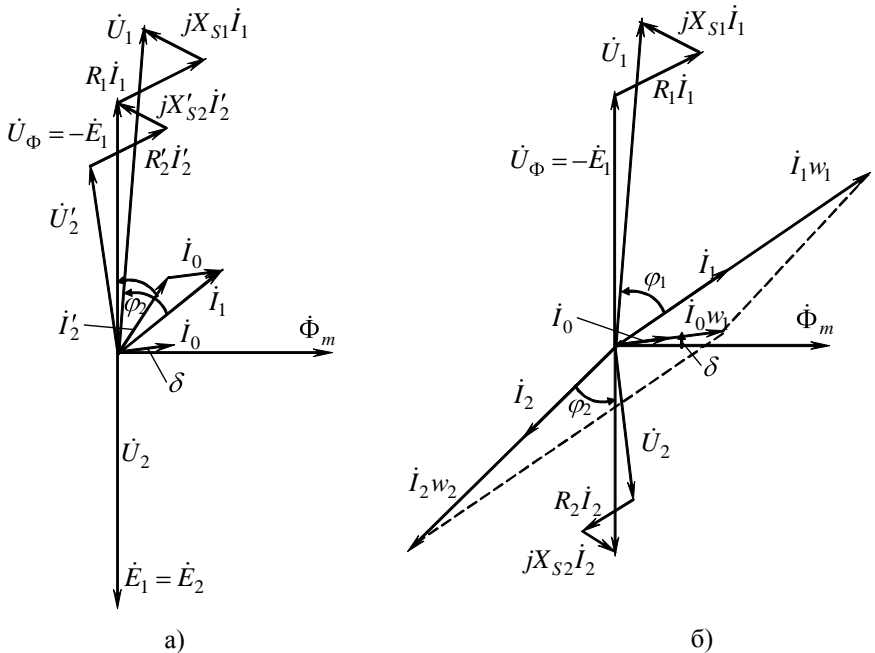


Рисунок 5.24 - Векторні діаграми трансформатора для зустрічного (а) та незустрічного (б) напрямків струмів

Режим при  $Z_H=0$  називають режимом короткого замикання. Для силових трансформаторів цей режим при нормальній напрузі може існувати лише досить короткочасно як аварійний: виділення великої кількості тепла в опорах обмоток  $R_1$  і  $R_2$  може викликати руйнування трансформатора.

На практиці роблять так званий режим короткого замикання трансформатора. При цьому режимі напругу  $U_1=U_{1k}$  підбирають таким чином, щоб струм  $I_2=I_{2k}$  дорівнював номінальному (нормальному) вторинному струму. Як правило, при цьому  $U_{1k}$  у кілька разів менша від номінальної напруги  $U_1$ . Відповідно зменшуються  $E_1$ ,  $E_2$  та  $\Phi_m$ . Струм  $I_0$  при цьому зменшується у значно більше число разів унаслідок роботи осеря у ненасиченому режимі.

За результатами режиму короткого замикання визначають опори  $R_1$ ,  $X_S$ ,  $R_2'$ ,  $X_{S2}'$ , для чого вважають, що  $g_0 \approx 0$ ,  $b_0 \approx 0$ ,  $R_1 \approx R_2'$  і  $X_{S1} \approx X_{S2}'$ . Одержувана при цьому точність цілком прийнятна для більшості практичних випадків.

Режим при  $Z_H=\infty$  називають режимом неробочого ходу або просто неробочим ходом трансформатора. При цьому  $\dot{I}_2 = 0$  і  $\dot{I}_1 = \dot{I}_0$ . Тому струм  $I_0$  називають струмом неробочого ходу. У дійсності струм  $I_0$  при неробочому ході дещо більший від струму  $I_0$  при нормальному значенні  $Z_H$ , тому що внаслідок зменшення спадання напруги в первинній обмотці збільшується  $E_1$ , що у, свою чергу, викликає збільшення  $\Phi_m$ , а отже, і  $I_0$ . Виміри  $U_1$ ,  $I_1$  і  $P_1$ , зроблені при неробочому ході, який у цьому випадку називають режимом неробочого ходу, дозволяють легко визначити  $g_0$  і  $b_0$ , якщо відомі (з режиму короткого замикання)  $R_1$  і  $X_{S1}$ .

## 5.10 Магнітний підсилювач

Найпростіший магнітний підсилювач (МП) називається також *дроселем насичення*, що показаний на рис. 5.25. Керуюча обмотка із числом витків  $w_y$  підключена через регульований опір  $R$  до джерела постійної напруги; робоча котушка із числом витків  $w_p$  і послідовно з'єднана з нею навантаження  $Z_H$  підключені до допоміжного джерела живлення із синусоїдальною напругою  $u$ .

Коло обмотки  $w_y$  для стислості будемо називати вхідним колом, а коло обмотки  $w_p$  та навантаження  $Z_H$  – вихідними.

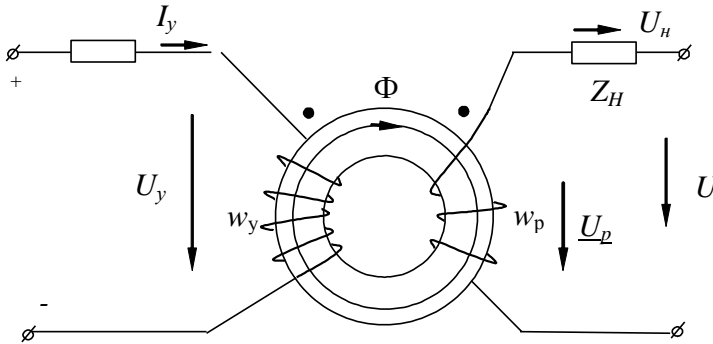


Рисунок 5.25 – Схема найпростішого магнітного підсилювача

Магнітний потік, створюваний струмом  $I_y$  у обвитці  $w_y$ , називають *потокотом підмагнічування*. Параметри вихідного кола підібрані таким чином, що за відсутності струму у вхідному колі, тобто за відсутності підмагнічування, осердя не насичене; вихідне коло становить, по суті, послідовне з'єднання навантаження та котушки зі сталевим осердям. Індуктивність цієї котушки (тобто обвитки  $w_p$ ), пропорційна магнітній проникності, велика. За наявності струму у вхідному колі, тобто при підмагнічуванні осердя, магнітна проникність зменшується і індуктивність обвитки  $w_p$  знижується, у результаті цього зменшується

напруга  $U_K$ , збільшуються струм у вихідному колі  $I_B$  та напруга у навантаженні  $U_H$ .

Спрощена схема, що зображена на рис. 5.25, наведена тут тільки для з'ясування принципу роботи підсилювача. Практичному її застосуванню перешкоджають такі недоліки:

- змінний магнітний потік, створений струмом у обвитці  $w_p$ , наводить змінну ЕРС у обвитці  $w_y$ , внаслідок чого у колі керування виникає змінний струм, що викликає додаткові втрати потужності та погіршення роботи підсилювача;
- через те, що змінна складова магнітного потоку в осерді несинусоїдальна, причому друга гармоніка, що міститься у ній, відносно велика (рис. 5.25), у кривих напруги  $u_n$  та струму  $i_n$  з'являються небажані другі гармоніки.

Зазначені недоліки усуваються в підсилювачах із двома однаковими осердями (рис. 5.26), робочі обвитки яких із числами витків  $w_p/2$  намотані в протилежних напрямках при однаковому напрямку намотування керуючих обвиток із числами витків  $w_y/2$ . При такій схемі з'єднання перші гармоніки ЕРС, індуковані у керуючих обвитках, взаємно компенсуються, другі ж гармоніки – додаються. Поява парних гармонік у струмі керуючої обвитки не викликає істотної втрати потужності (через значну індуктивність вхідного кола). Створювана струмом парних гармонік у обвитці  $w_y$ , внаслідок закону Ленца зменшує амплітуди парних гармонік змінної складової магнітного потоку.

Що стосується парних гармонік ЕРС, що наводяться у робочих обвитках, то вони взаємно компенсуються .

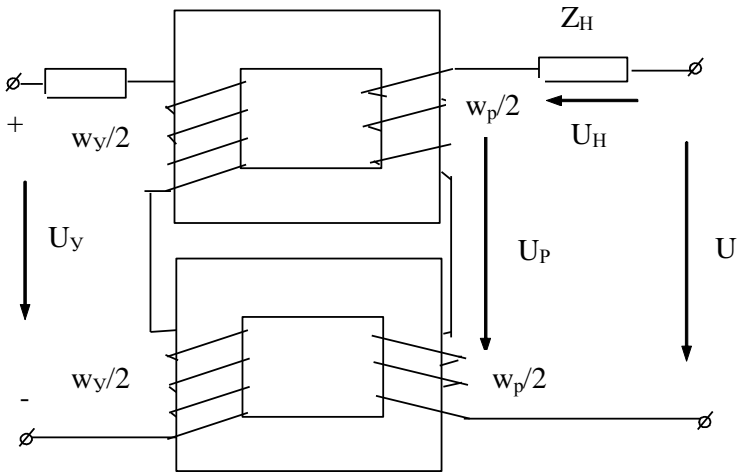


Рисунок 5.26 – Схема магнітного підсилювача

Важливими характеристиками магнітного підсилювача є коефіцієнти підсилення за напругою, струмом та потужністю.

**Коефіцієнт підсилення за напругою**  $K_U$  – відношення збільшення вихідної напруги до збільшення напруги на вході:

$$K_U = \frac{\Delta U_H}{\Delta U_y}.$$

**Коефіцієнт підсилення за струмом**  $K_I$  – відношення збільшення вихідного струму до збільшення вхідного струму:

$$K_I = \frac{\Delta I_H}{\Delta I_y}.$$

**Коефіцієнт підсилення за потужністю**  $K_P$  – відношення збільшення вихідної потужності до відповідного збільшення потужності на вході:

$$K_P = \frac{\Delta P_H}{\Delta P_y}.$$

## 5.11 Феромагнітні стабілізатори напруги

Феромагнітні стабілізатори напруги використовуються для живлення багатьох пристроїв автоматики та вимірювальних приладів і характеризуються коефіцієнтом стабілізації

$$k_c = \frac{\Delta U_1 / U_1}{\Delta U_2 / U_2},$$

де  $U_1$  – напруга на вході стабілізатора,  $U_2$  – напруга на виході стабілізатора,  $\Delta U_1$  та  $\Delta U_2$  – зміна напруги на вході та виході.

Чим більший коефіцієнт стабілізації  $k_c$ , тим вищі стабілізуювальні властивості кола. Стабілізація можлива лише у нелінійних колах, оскільки у лінійних колах між напругами на вході та виході завжди існує пряма пропорційність ( $k_c = 1$ ).

Фізичний зміст **явища стабілізації** полягає у такій зміні параметрів послідовно ввімкнених елементів нелінійного кола зі зміною напруги живлення, за якої відносна зміна напруги на одній із ділянок кола виявляється значно нижчою, ніж на вихідних клеммах.

Стабілізатори, основною частиною яких є нелінійні котушки зі сталлю та конденсатор, називаються ферорезонансними. Найпростіший стабілізатор може бути подудований усього лише з двох елементів (рис. 5.27).

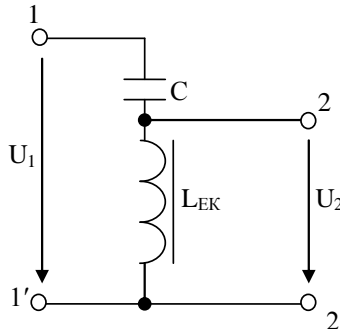


Рисунок 5.27

Побудуємо характеристики кола у координатах  $U_2(U_1)$  на основі графіків ферорезонансу напруг (рис. 5.28).

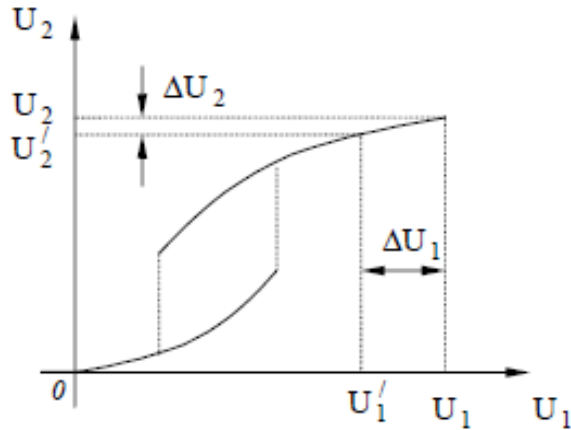


Рисунок 5.28

Котушка у схемі працює при досить глибокому насиченні. При збільшенні напруги  $U_1$  струм зростає, що приводить до зменшення еквівалентної індуктивності. Тому напруга на котушці змінюється у меншому степені. Ввімкнення навантаження погіршує стабілізацію, оскільки робить ділянку 2 – 2' у меншому ступені нелінійною.

Замість конденсатора  $C$  у коло можна ввімкнути й лінійний резистор чи котушку з лінійною характеристикою, але ефект стабілізації буде меншим, оскільки зміна струму у котушці зі стальним магнітопроводом, а відповідно і в її еквівалентній індуктивності, при зміні напруги живлення у цих випадках менша.

Існують і складніші схеми, що забезпечуюють більш високі стабілізувальні властивості та меншу залежність від навантаження (рис. 5.29).



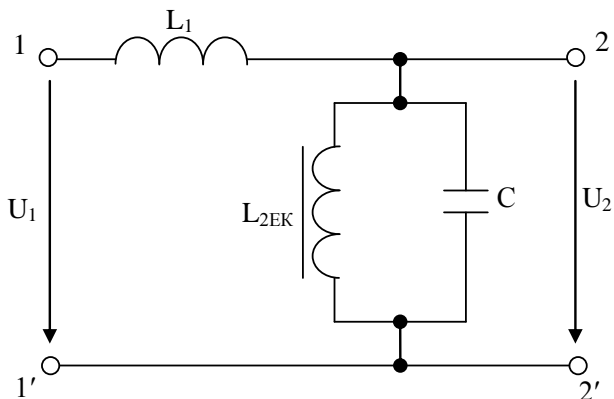


Рисунок 5.29

На рис. 5.29  $L_1$  - лінійна індуктивність із ненасиченим сталевим осердям,  $L_{2EK}$  - нелінійна індуктивність.

На характеристиках схеми (рис. 5.30) до ферорезонансної характеристики  $U_2(I_1)$  додано  $U_{L1}$ , що дає  $U_1(I_1)$ . При зміні  $U_1$  на  $\Delta U_1$  напруга змінюється в значно меншій мірі  $\Delta U_2$  (рис. 5.40).

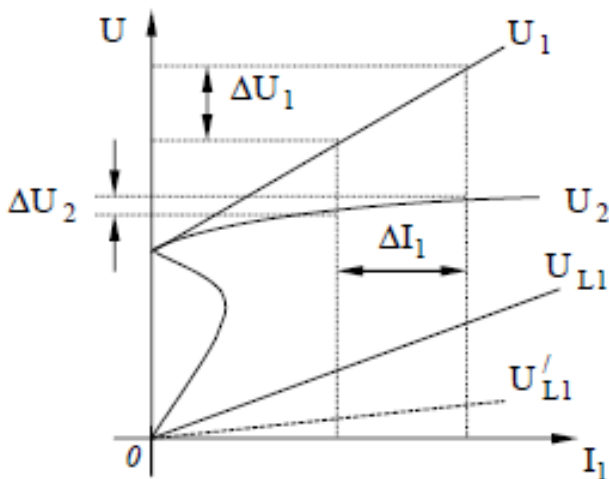


Рисунок 5.30

Якість стабілізації може бути покращена, якщо на виході ввімкнути  $L'_1$ , що індуктивно пов'язана з  $L_1$  (рис. 5.31). При цьому з напруги на контурі  $L_{2.Е} - C_2$  віднімається напруга  $U'_{L_1}$ , що є частиною напруги  $U_{L_1}$  на  $L_1$ .

Необхідно зазначити, що за рахунок нелінійності кола криві струму та напруги виявляються несинусоїдальними та містять вищі гармоніки.

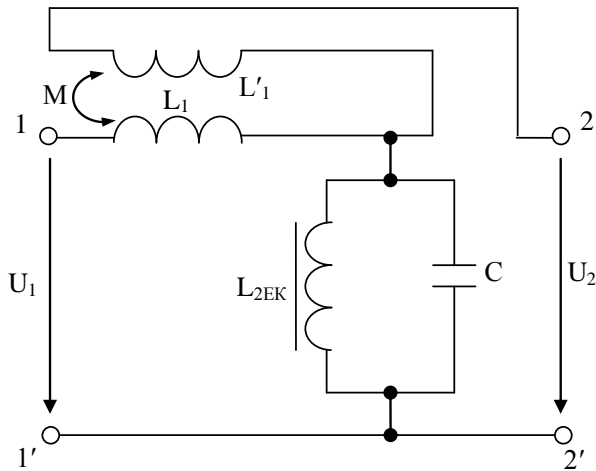


Рисунок 5.31

## 5.12 Приклади розв'язування задач

**Приклад 5.1.** Визначити струм та напругу на нелінійних резистивних елементах (рис. 5.32), якщо напруга на вході  $U = 30$  В. Вольт-амперна характеристика нелінійних елементів показана на рис. 5.32.

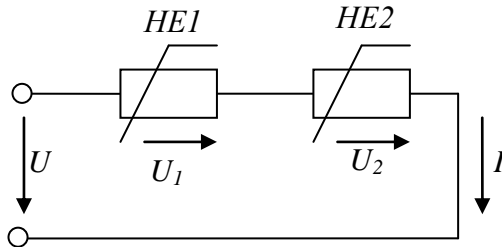


Рисунок 5.32

### Розв'язання

Характеристику  $I = f(U_2)$  (рис. 5.33) зміщуємо на величину входної напруги  $U$  (рис. 5.34). Відлік додатних значень  $U_2$  здійснюється ліворуч від цієї точки, тому крива  $I = f(U_2)_{отр}$  є дзеркальним відображенням кривої  $I = f(U_2)$  щодо вертикальної осі, що проведена через точку  $U = 30$  В. Точка перетину характеристик визначає режим роботи кола (метод перетину характеристик):  $I = 50$  мА,  $U_1 = 22$  В,  $U_2 = U - U_1 = 30 - 22 = 8$  В.

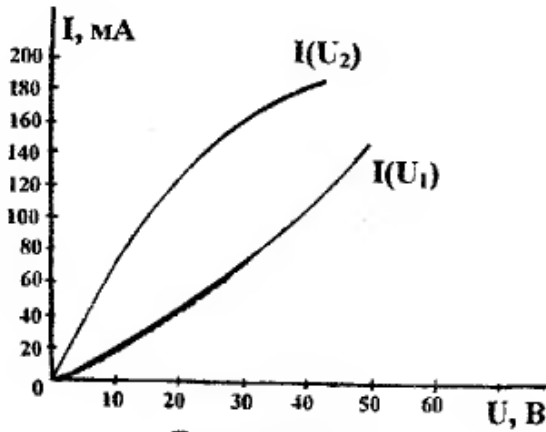


Рисунок 5.33

Визначимо струм у нерозгалуженій частині кола:

$$I = I_1 + I_2 = 300 + 100 = 400 \text{ мА.}$$

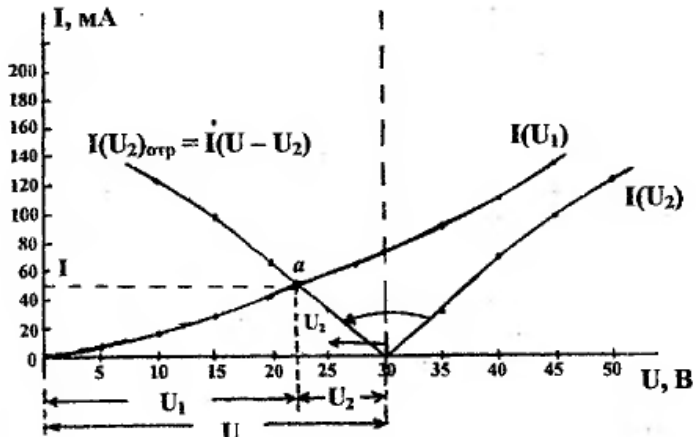


Рисунок 5.34

**Приклад 5.2.** Три однакових нелінійних резистивних елементи з'єднані, як вказано на рис. 5.56. Визначити струм  $I$ , якщо  $I_1 = 300$  мА. ВАХ одного нелінійного елемента зображена на рис. 5.35. Побудувати ВАХ всього кола.

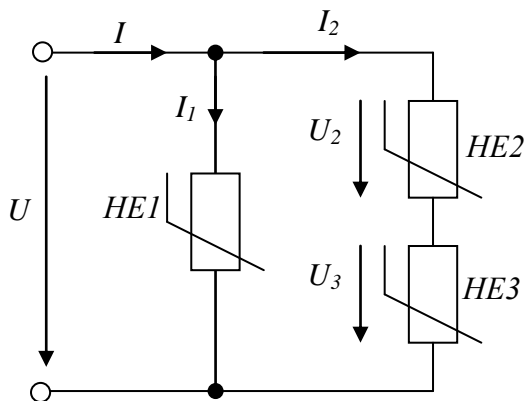


Рисунок 5.35

*Розв'язання*

При струмі  $I_1 = 300$  мА напруга  $U = 20$  В (рис. 5.36). Оскільки HE2 та HE3 однакові, то  $U_2 = U_3 = U/2 = 20/2 = 10$  В. Для цієї напруги струм  $I_2 = 100$  мА (рис. 5.36).

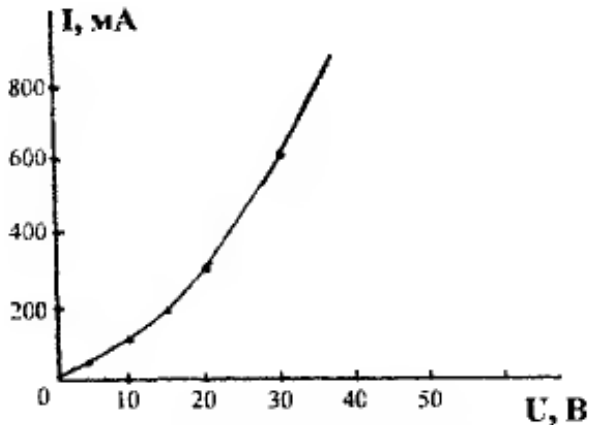


Рисунок 5.36

Спочатку побудуємо ВАХ послідовної ділянки кола, виходячи з того, що через HE2 та HE3 проходить однаковий струм та  $U_2 + U_3 = U$ . Задаємося довільним значенням струму  $I_2$  і за

ВАХ  $I_2(U_2)$  та  $I_2(U_3)$  визначаємо напругу  $U_2$  та  $U_3$  ( $U_2 = U_3$ ). Для заданого струму  $I_2$  знаходимо вхідну напругу  $U = U_2 + U_3 = 2U_2$ . Аналогічно будуються інші точки ВАХ  $I_2(U)$  послідовної ділянки кола (рис. 5.37).

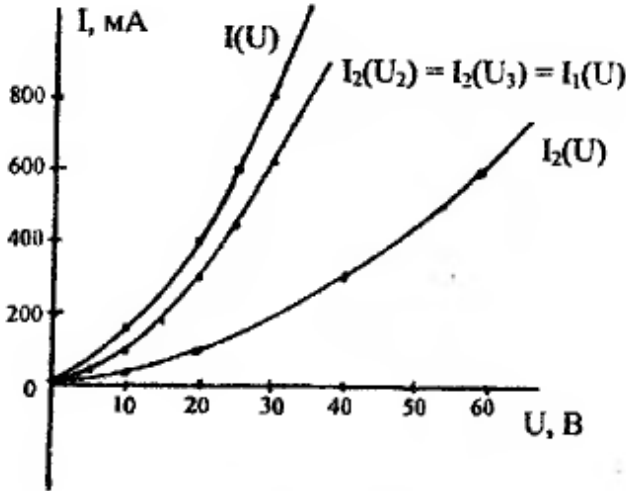


Рисунок 5.37

Одержали схему паралельного з'єднання НЕ1 з ВАХ  $I_1(U)$  та нелінійного резистивного елемента НЕ2, що має ВАХ  $I_2(U)$ . При побудові результуючої ВАХ виходять з того, що напруга НЕ1 та НЕ2 однакові а струм у нерозгалуженій частині кола  $I = I_1 + I_2$ . Задаємося довільним значенням  $U$ , визначаємо струми  $I_1$ ,  $I_2$  та  $I$ . Аналогічно будуються інші точки результуючої ВАХ  $I(U)$  схеми (рис. 5.35).

**Приклад 5.3.** Магнітне коло (рис. 5.38) виконане з електротехнічної сталі 1411 і має такі розміри:  $l_1 = 14$  см,  $S_1 = 6$  см<sup>2</sup>,  $l_2 = l'_2 + l''_2 = 31$  см,  $S_2 = 4$  см<sup>2</sup>,  $\delta = 0.01$  см. Число витків обвитки  $w = 100$ . Який струм повинен проходити в обвитці, щоб магнітна індукція у повітряному зазорі була  $B_\delta = 1$  Тл? Визначити маг-

нітну проникність сталі, опори ділянок магнітного кола та індуктивність котушки. При розрахунках не враховувати магнітний потік розсіювання, магнітне поле у зазорі вважати однорідним.

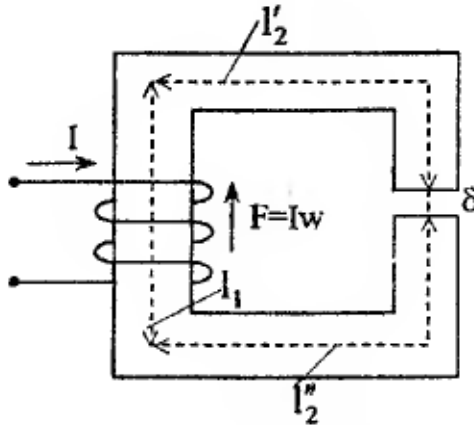


Рисунок 5.38

### Розв'язання

Для розрахунків розіб'ємо магнітне коло на ділянки, у межах яких напруженість магнітного поля залишається незмінною. У задачі задані довжина середньої силової лінії та площа поперечного перерізу кожної ділянки.

Оскільки магнітний потік у нерозгалуженому колі один і той самий та  $S_2 = S_\delta$ , то  $B_2 = B_\delta = 1$  Тл. Визначимо магнітну індукцію на ділянці  $l_1$ :

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{B_\delta S_\delta}{S_1} = \frac{1 \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 0.66 \text{ Тл.}$$

Напруженість магнітного поля на ділянках  $l_1, l_2$  визначимо за кривою намагнічування сталі 1411 за відомими значеннями  $B_1$  та  $B_2$ :  $H_1 = 90$  А/м,  $H_2 = 220$  А/м.

Напруженість магнітного поля у повітряному зазорі

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 8 \cdot 10^5 \text{ А/м.}$$

Запишемо другий закон Кірхгофа для контура магнітного кола

$$I \cdot w = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = 90 \cdot 0.14 + 220 \cdot 0.31 + 8 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 168.8.$$

Визначимо струм у обвитці котушки:

$$I = \frac{F}{w} = \frac{160.8}{100} = 1.608 \text{ А.}$$

Відносна магнітна проникність для феромагнітних ділянок 1 та 2 кола:

$$\mu_1 = \frac{B_1}{\mu_0 H_1} = \frac{0.66}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 90} = 5860,$$

$$\mu_2 = \frac{B_2}{\mu_0 H_2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 220} = 3636.$$

Магнітні опори ділянок кола:

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} = \frac{H_1 l_1}{\Phi} = \frac{90 \cdot 0.14 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4}} = 32 \cdot 10^3 \text{ Гн,}$$

$$R_{M2} = \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} = \frac{H_2 l_2}{\Phi} = \frac{220 \cdot 0.314 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-4}} = 170 \cdot 10^3 \text{ Гн,}$$

$$R_{M3} = \frac{\delta}{\mu_0 S_1} = \frac{H_\delta \delta}{\Phi} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 200 \cdot 10^3 \text{ Гн.}$$

Еквівалентна електрична схема кола зображена на рис. 5.38.

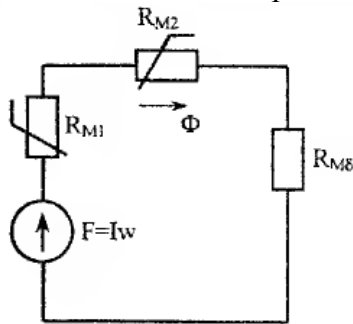


Рисунок 5.38



**Приклад 5.4.** Магнітне коло (рис. 5.39) виконане з електротехнічної сталі 1561 і має такі розміри:  $l_1 = 40$  см,  $l_2 = 12$  см,  $l_3 = 30$  см,  $S_1 = S_3 = 4$  см<sup>2</sup>,  $S_2 = 2$  см<sup>2</sup>,  $\delta = 0.13$  см. Потік у третьому стрижні  $\Phi_3 = 2 \cdot 10^{-4}$  Вб. Визначити МРС, необхідну для цього.

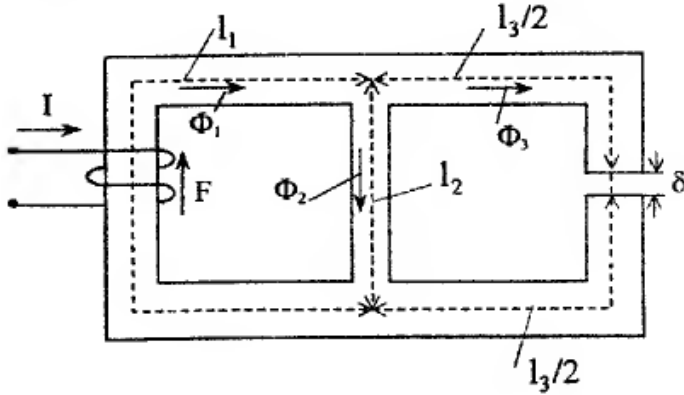


Рисунок 5.39

*Розв'язання*

Задамося напрямками потоків у гілках, як вказано на рис. 5.39. Визначимо магнітну індукцію у третьому стрижні та у повітряному зазорі:

$$B_3 = B_\delta = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0.5 \text{ Тл.}$$

За кривою намагнічування для  $B_3 = 0.5$  Тл напруженість магнітного поля становить  $H_3 = 60$  А/м.

Визначимо магнітну напругу у третьому стрижні:

$$U_{M3} = H_3 l_3 = 60 \cdot 0.3 = 18 \text{ А.}$$

Магнітна напруга у повітряному зазорі

$$U_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_0} \delta = \frac{0.5 \cdot 0.0013}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 517 \text{ А.}$$

Рівняння другого закону Кірхгофа для правого контура  $H_2 l_2 - H_3 l_3 - H_\delta \delta = 0$ , звідки напруженість магнітного поля у другому стрижні

$$H_2 = \frac{H_3 l_3 + H_\delta \delta}{l_2} = \frac{U_{M3} + U_{M\delta}}{l_2} = \frac{18 + 517}{0.3} = 1783 \text{ А.}$$

Для знайденого значення  $H_2$  за кривою намагнічування для сталі 1561 магнітна індукція становить  $B_2 = 1.45 \text{ Тл}$ .

Визначимо потік у другому стрижні:

$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 1.45 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 2.9 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Визначимо магнітний потік у першому стрижні

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 2.9 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} = 4.9 \cdot 10^{-4} \text{ Вб.}$$

Магнітна індукція у першому стрижні

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{4.9 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 1.25 \text{ Тл.}$$

Напруженість магнітного поля  $H_3 = 400 \text{ А}$ .

Запишемо рівняння другого закону Кірхгофа для лівого контура:

$$F = I \cdot w = H_1 l_1 + H_2 l_2 = 400 \cdot 0.4 + 1783 \cdot 0.12 = 374 \text{ А.}$$

**Приклад 5.5.** Котушка зі стальним осердям підключена до синусоїдальної напруги, діюче значення якої становить  $U = 380 \text{ В}$ , частота  $f = 50 \text{ Гц}$ . Число обвитків котушки  $w = 600$ . Не враховуючи потік розсіювання та активні втрати в обвитці та у стальному осерді, записати рівняння струму у котушці, якщо зв'язок між струмом у котушці та магнітним потоком задані рівнянням  $i = 70\Phi + 150 \cdot 10^6 \cdot \Phi^3$ , де струм виражений у амперах, а потік у веберах.

#### Розв'язання

Оскільки прикладена напруга синусоїдальна, а потоком розсіювання та активним опором обвитки можна знехтувати, то із закону електромагнітної індукції  $u = -e = w \frac{d\Phi}{dt}$  випливає, що

потік у осерді також синусоїдальний  $\Phi = \Phi_m \sin(\omega t)$  (початкова фаза може бути прийнятою нульовою). Амплітуда магнітного потоку знаходиться з рівняння  $U = 4.44 f \cdot w \cdot \Phi_m$ , звідки

$$\Phi_m = \frac{U}{4.44 \cdot f \cdot w} = \frac{380}{4.44 \cdot 50 \cdot 600} = 2.85 \cdot 10^{-3} \text{ Вб.}$$

Запишемо значення потоку в осерді:

$$\Phi = 2.85 \cdot 10^{-3} \sin(\omega t).$$

Струм у обвитці котушки відповідно до заданого в умові рівняння

$$\begin{aligned} i &= 70 \cdot 2.85 \cdot 10^{-3} \sin(\omega t) + 150 \cdot 10^6 \cdot [2.85 \cdot 10^{-3} \sin(\omega t)]^3 = \\ &= 199.510^{-3} \sin(\omega t) + 34723 \cdot 10^{-3} \sin^3(\omega t). \end{aligned}$$

$$\text{Відомо, що } \sin^3(\omega t) = \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t).$$

Відповідно,

$$\begin{aligned} i &= 199.510^{-3} \sin(\omega t) + 34723 \cdot 10^{-3} \left( \frac{3}{4} \sin(\omega t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega t) \right) = \\ &= 2.8 \sin(\omega t) - 0.78 \sin(3\omega t). \end{aligned}$$

Діюче значення струму еквівалентної синусоїди

$$I = \sqrt{\left( \frac{I_{m.1}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{I_{m.3}}{\sqrt{2}} \right)^2} = \sqrt{\left( \frac{2.8}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{0.87}{\sqrt{2}} \right)^2} = 2.07 \text{ А.}$$

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Попов В.П. Основы теории цепей: учебник для вузов спец. «Радиотехника». – М: Высш. шк., 1985. – 490с.
2. Основы теории цепей: учебник для вузов / Г.В. Зевеке, П. А. Ионкин, А. В.Нетушил, С. В. Стахов. – 4-е изд., перераб. – М.: Энергия, 1975.– 752с.
3. Шебес М.Р., Каблукова М.В. Задачник по теории линейных эл. цепей: учеб. пособ. для электротехнич., радиотехнич. спец. вузов. – 4 изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 544с.
4. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» на тему «Розрахунок лінійних електричних кіл в усталених режимах» для студентів спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики» заочної форми навчання / Укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 87с.
5. Теоретичні основи електротехніки: підручник: у 3 т. / за заг. ред. І. М. Чиженка, В. С. Бойко. - К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2004. - Т. 1. Усталений режим лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. – 272с.
6. Електротехніка: навчальний посібник / за заг. ред. В. І. Коруда. – 3-тє вид., перероб. і доп. – Львів: Магнолія плюс, 2004. – 447с.
7. Збірник задач з теоретичних основ електротехніки. Частина 1 / за ред. А. Ю. Воробкевича, О. І. Шегедина. – Львів: Новий світ-2000, 2004. – 224с.
8. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл. Частина 1. - Усталені режими у лінійних електричних колах: навчальний посібник – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 398с.

9. Електротехніка та електроніка. Теоретичні відомості, розрахунки та дослідження за підтримкою комп'ютерних технологій: навчальний посібник / за заг. ред. А. А. Щерби та В. М. Рябенського. – К.: Корнійчук, 2007. – 488с.
10. Сборник задач и практикум по основам теории электрических цепей. – 2-е изд. / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева. – СПб.:Питер, 2007. – 300с.
11. Методичні вказівки до практичних робіт на тему «Розрахунок електричних кіл постійного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / укладач А.В. Булашенко. - Суми:Вид-во СумДУ, 2010. – 81с.
12. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Усталені режими у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» / укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во: СумДУ, 2008. – 70с.
13. Основы теории цепей: примеры и задачи / О. В. Беляев, М. В. Быстров, В. Л. Коданев, Е. А. Смирнов, В. В. Штейнбрехер. – М.: Радиотехника, 2007. – 240с.
14. Баскаков В. П., Журавлева О. Б., Крук Б. И. Основы анализа цепей: учебное пособие для вузов. – М.: Горячая линия – Телеком, 2007. – 591с.
15. Методичні вказівки для самостійної роботи з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» за темою «Усталені режими у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами» для студентів спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики» заочної форми навчання / укладач А. В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2008.–25с.
16. Основы теории кіл: підручник для студентів вищих навчальних закладів. Ч.1 / Ю. О. Коваль, Л. В. Гринченко, І. О. Милютченко, О. І. Рибін / за заг. редакцією В. М. Шокала та В. І. Правди. – Х.: Компанія СМІТ, 2008 – 432с.

17. Теорія електричних та магнітних кіл: конспект лекцій на тему «Лінійні електричні кола постійного та змінного струму» / Укладач А.В. Булашенко. - Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 180с.
18. Методичні вказівки до самостійного вивчення теми «Лінійні електричні кола трифазного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / укладач А.В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 64с.
19. Методичні вказівки до практичних робіт на тему «Розрахунок електричних кіл несинусоїдного періодичного струму» з дисципліни «Теорія електричних та магнітних кіл» / укладачі: А.В. Булашенко, І. В. Забегалов. – Суми.: Вид-во СумДУ, 2010. – 38с.
20. Булашенко А. В. Теорія електричних та магнітних кіл. Частина 2. – Перехідні та усталені режими у лінійних та нелінійних колах: навчальний посібник – Суми: Вид-во СумДУ, 2010. – 348с.

Навчальне видання

Теорія електричних та магнітних кіл  
Конспект лекцій на тему  
«Складні лінійні та нелінійні електричні кола змінного струму»  
для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»  
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»  
заочної форми навчання

Відповідальний за випуск Г. М. Худолей  
Редактор Н. А. Гавриленко  
Комп'ютерне верстання А. В. Булашенка

Підп. до друку 30.06.2010, поз.  
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 10,23. Обл.-вид. арк. 7,19. Тираж 50 пр. Зам №  
Собівартість видання      грн    к.

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.



Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Шосткинський інститут

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ**

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

У п'яти частинах  
Частина 2

**СКЛАДНІ ЛІНІЙНІ ТА НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА  
ЗМІННОГО СТРУМУ**

Суми  
Видавництво СумДУ  
2010



Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
Шосткинський інститут

До друку та в світ  
дозволю на підставі  
«Єдиних правил», п.2.6.14  
Заступник першого проректора –  
начальник організаційно-методичного  
управління

В.Б. Юскаєв

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

Конспект лекцій

для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»  
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»  
заочної форм навчання  
У п'яти частинах  
Частина 2

Складні лінійні та нелінійні електричні кола змінного струму

Усі цитати, цифровий  
та практичний матеріал,  
бібліографічні  
відомості перевірені,  
написання одиниць  
відповідає стандартам

Укладач

А.В. Булашенко

Відповідальний за випуск

Г.М. Худолей

Директор Шосткинського інституту

В.Л. Акуленко

Суми  
Видавництво СумДУ  
2010