

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут

ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ ТА МАГНІТНИХ КІЛ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

для студентів напрямку 050201 «Системна інженерія»
спеціальності 6.091401 «Системи управління та автоматики»
заочної форми навчання
У п'яти частинах

Частина 3

Перехідні процеси у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами

Затверджено
на засіданні кафедри системотехніки та
інформаційних технологій як конспект
лекцій з дисципліни «Теорія електричних
та магнітних кіл».
Протокол № 1 від 31.08.2009 р.

Суми
Видавництво СумДУ
2010

ВСТУП

Конспект лекцій з дисципліни «ТЕМК» для студентів денної форми навчання складається з трьох частин. Частина 1 присвячена розгляду лінійних електричних кіл постійного та змінного струму. Частина 2 розглядає складні лінійні та нелінійні кола в усталених режимах. У частині 3 розглядаються перехідні режими у лінійних електричних колах.

Конспект лекцій призначений для надання допомоги студентам у їх самостійній та аудиторній роботі.

Необхідність третьої частини конспекту лекцій для студентів спеціальності «Системи автоматики та управління» полягає у тому, що фізичні основи перехідних процесів будуть використовуватися у таких дисциплінах, таких як «Теорія автоматичного управління», «Автоматизований електропривод». Цей конспект лекцій також буде корисний і для інших студентів, що вивчають перехідні процеси у різних дисциплінах. Конспект лекцій складається з восьми розділів. У кінці кожного розділу є питання для самоперевірки та задачі для самостійного розв'язання.

У першому розділі розглянуті причини виникнення перехідних процесів та основні математичні положення під час аналізу перехідних процесів, розглянуті загальні положення класичного методу аналізу перехідних процесів і його математичний апарат. У другому розділі поданий класичний метод аналізу перехідних процесів у найпростіших послідовних RL-, RC-, RLC-колах. У третьому та четвертому розділах поданий класичний метод аналізу перехідних процесів у розгалужених колах з одним та двома реактивними елементами відповідно. У п'ятому розділі розглянуто операторний метод аналізу перехідних процесів та подано його математичний апарат. Шостий розділ розглядає аналіз перехідних процесів за допомогою часових характеристик. Сьомий розділ розглядає аналіз перехідних процесів за допомогою комбінації операторного та класичного методів аналізу. Восьмий розділ стосується порівняння всіх методів аналізу перехідних процесів у лінійних електричних колах.

РОЗДІЛ 1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ КЛАСИЧНОГО МЕТОДУ

1.1 Визначення та причини виникнення перехідних процесів

Перехідні процеси будемо розглядати у лінійних електричних колах із зосередженими параметрами. Лінійне електричне коло - коло, що містить лінійні елементи, тобто такі елементи, струм і напруга на яких зв'язані лінійно. Коло із зосередженими параметрами - це коло, у якому ми не враховуємо зміну струму та напруги уздовж лінії, тобто величини елементів не залежать від довжини лінії або кола.

У електричних колах можуть відбуватися включення та відключення пасивних або активних гілок, коротке замикання окремих ділянок, різного роду перемикавання, раптові зміни параметрів. У результаті таких змін, що називають часто комутаційними або просто комутаціями, які будемо вважати такими, що проходять миттєво для спрощення розрахунків, у колі виникають перехідні процеси, що закінчуються через деякий час (теоретично нескінченно великий) після комутації.

Перехідним процесом називають процес, що виникає у електричному колі під час переходу кола від одного усталеного режиму до іншого. Зміна стану електричного кола при зміні його електричного режиму називається комутацією. Характер комутації на схемі показано за допомогою ключа зі стрілкою (рис. 1.1).

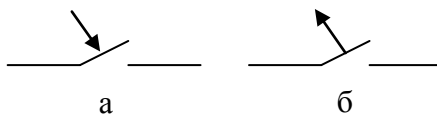


Рисунок 1.1 – Умовне зображення комутації

На рис. 1.1 а показане вмикання рубильника, а на рис. 1.1 б показане вимикання.

При розгляді перехідних процесів припускають, що опір ключа змінюється стрибком від нескінченно великого значення до нуля при включенні, і навпаки - при відключенні. Перехідний

процес у колі триває певний час, що називається часом перехідного процесу.

До початку перехідного процесу і після його закінчення в електричному колі спостерігається, що встановився (вимушений) режим, визначається дією джерела енергії при незмінній схемі кола та незмінних параметрах її елементів.

Очевидно, що джерела постійної напруги (струму) викликають постійний струм кола, джерела синусоїдальної напруги викликають синусоїдальний струм тієї ж частоти, що й частота джерела. Під час перехідного процесу струму в електричному колі напруги на його ділянках визначаються не тільки зовнішніми джерелами енергії, але й «внутрішніми» джерелами - накопичувачами енергії (такими джерелами є котушки індуктивності і конденсатори).

Вважають, що комутація кола відбувається миттєво, однак перехід від вихідного режиму роботи кола до наступного стало-го режиму відбувається не миттєво, а протягом деякого часу. Пояснюється це тим, що кожному стану кола відповідає певний запас енергії електричних і магнітних полів на ємності та індуктивності відповідно.

Під вимушеним режимом розуміємо режим постійного струму (напруги) або періодичного (гармонічного) струму (напруги).

Якщо припустити, що стрибком можуть змінитися струми в індуктивностях і напруги на ємностях, то енергія, що запасується в них, теж повинна змінитися стрибком. При цьому потужність буде прямувати до нескінченності (потужність є похідною від енергії), а це фізично неможливо, оскільки суперечить закону збереження енергії. Далі на прикладах доведемо це положення (розділ 1.3).

Початком відліку для перехідного процесу вважають момент здійснення комутації та позначають його $t = 0$. У момент часу, що передує комутації, струми та напруги позначають $i(0-)$, $u(0-)$, відразу після комутації – $i(0+)$, $u(0+)$, у момент комутації – $i(0)$, $u(0)$, як і у джерелах [1, 2, 12].

1.2 Струм у конденсаторі та напруга на ємності

При зміні в часі напруги на обкладинках конденсатора в ньому наявний струм зміщення

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Заряд конденсатора визначається за формулою

$$q(t) = Cu_C(t).$$

Після підстановки останнього рівняння в передостаннє одержимо вираз для струму на конденсаторі

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C(t))}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}. \quad (1.1)$$

Звідси одержуємо вираз для напруги на конденсаторі

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt. \quad (1.2)$$

Згідно з законом електромагнітної індукції під час проходження по котушці струму в ній індуктується ЕРС самоіндукції

$$e_L(t) = -\frac{d\psi(t)}{dt},$$

де $\psi(t)$ - це поточкозчеплення котушки.

Поточкозчеплення котушки індуктивності без сталевго осердя визначається $\psi(t) = Li(t)$.

Ураховуючи також, що $u_L(t) = -e(t)$, рівняння для котушки індуктивності має вигляд

$$u_L(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(Li_L(t))}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt}. \quad (1.3)$$

Звідси можна одержати вираз для струму

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt. \quad (1.4)$$

Після складання системи рівнянь, що описує електричне коло, здійснюється її розв'язання щодо вибраної змінної. У Як шукану змінну доцільно вибрати струм котушки індуктивності $i_L(t)$ або напругу конденсатора $u_C(t)$, щоб можна було надати

фізичного змісту похідним $\frac{di_L(t)}{dt}$ та $\frac{du_C(t)}{dt}$ (дивись далі). Надалі при викладенні матеріалу посібника змінну t в дужках у виразах (1.1) – (1.4) опустимо, але будемо розуміти, що струм та напруга залежать від часу.

1.3 Закони комутації

Закони комутації випливають із законів збереження енергії для магнітного та електричного полів.

Із закону збереження енергії випливає, що енергія магнітного чи електричного поля до комутації дорівнює енергії відповідно магнітного чи електричного полів після комутації і стрибком змінитися не може, оскільки, як було зазначено вище, потужність буде прямувати до нескінченності, що фізично неможливо.

Запишемо це математично

$$W_M(0-) = W_M(0+) = W_M(0), \quad W_E(0-) = W_E(0+) = W_E(0).$$

Вирази потужності для електричного та магнітного полів

$$W_M(t) = \frac{Li^2}{2}, \quad W_E(t) = \frac{Cu^2}{2}.$$

Дійсно, якщо у одержані вирази для законів збереження енергії підставити значення для виразів електричного та магнітного полів, то одержимо закони комутації

$$\frac{Li^2(0-)}{2} = \frac{Li^2(0+)}{2} = \frac{Li^2(0)}{2}, \quad \frac{Cu^2(0-)}{2} = \frac{Cu^2(0+)}{2} = \frac{Cu^2(0-)}{2}.$$

Скоротивши одержані вирази на сталі величини $\frac{L}{2}$ та $\frac{C}{2}$,

одержимо закони комутації.

Перший закон комутації. У будь-якій гілці з індуктивністю струм і магнітний потік у момент комутації стрибком змінитися не можуть.

Розглянемо на прикладі струму. Струм котушки індуктивності в початковий момент часу після комутації дорівнює стру-

му котушки безпосередньо перед комутацією і далі починає змінюватися зі значення струму до комутації:

$$i_L(0-) = i_L(0+) = i_L(0), \quad (1.5)$$

де $i_L(0-)$ – струм у котушці індуктивності до комутації; $i_L(0)$ – струм у котушці індуктивності у момент комутації; $i_L(0+)$ – струм у котушці індуктивності після комутації.

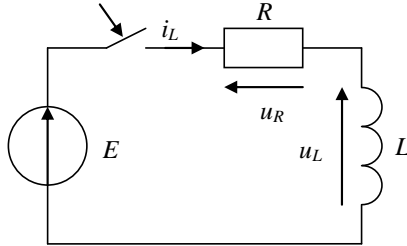


Рисунок 1.2

Покажемо це на прикладі RL-кола (рис. 1.2). Запишемо за другим законом Кірхгофа спадання напруги у цьому колі:

$$E = u_R + u_L.$$

Підставимо замість напруги u_L її значення за формулою (1.3) і одержимо

$$E = i_L R + L \frac{di_L}{dt}.$$

Якщо припустити, що струм установиться стрибком, то напруга на індуктивності u_L теж прямує до нескінченності, оскільки похідна від стрибка є нескінченність. Але енергія джерела живлення E не дорівнює нескінченності, тому таке припущення неправильно, тому що тоді не виконується другий закон Кірхгофа.

Розглянемо енергетичний підхід. Якщо струм i в RL-колі зміниться стрибком, то енергія в цьому колі теж зміниться стрибком:

$$W_M(t) = \frac{Li^2}{2},$$

а потужність в індуктивності буде прямувати до нескінченності, оскільки вона є похідною від енергії:

$$p(t) = \frac{dW_M(t)}{dt}.$$

Але це з фізичної точки зору неможливо.

Усе вищезазначене справедливо для струму індуктивності і стосується магнітного потоку, тому можемо записати

$$\psi_L(0) = \psi_L(0+) = \psi_L(0-), \quad (1.6)$$

де $\psi_L(0-)$ – магнітний потік у котушці індуктивності до комутації; $\psi_L(0)$ – магнітний потік у котушці індуктивності в момент комутації; $\psi_L(0+)$ – магнітний потік у котушці індуктивності після комутації.

Дійсно, потокозчеплення визначається через струм

$$\psi_L(t) = Li(t).$$

Виразимо із записаного виразу струм

$$i(t) = \frac{\psi(t)}{L}.$$

Підставимо одержане значення у перший закон комутації

$$\frac{\psi(0-)}{L} = \frac{\psi(0+)}{L} = \frac{\psi(0)}{L}.$$

Скоротивши одержаний вираз на L , одержимо вираз (1.6).

У випадку двох і більше кіл, зв'язаних взаємною індуктивністю, але за відсутності в кожній з них магнітних потоків розсіювання, формулювання першого закону комутації зміниться в тому розумінні, що в момент комутації загальний магнітний потік цих кіл не може змінитися, а струми в кожній з них окремо можуть змінитися стрибком.

Другий закон комутації. У будь-якій гілці напруга і заряд на ємності в момент комутації стрибком змінитися не можуть.

Розглянемо на прикладі напруги. Напруга на конденсаторі в момент часу після комутації дорівнює напрузі на конденсаторі

безпосередньо перед комутацією і далі починає змінюватися зі значення напруги до комутації

$$u_C(0-) = u_C(0) = u_C(0+), \quad (1.7)$$

де $u_C(0-)$ – напруга на ємності до комутації, $u_C(0)$ – напруга на ємності в момент комутації, $u_C(0+)$ – напруга на ємності після комутації.

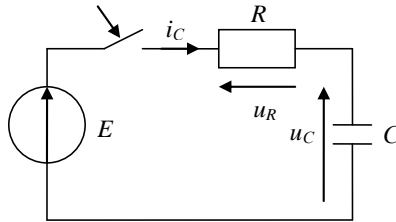


Рисунок 1.3

Можна аналогічно до попереднього випадку розглянути послідовне RC-коло (рис. 1.3), що ввімкнене під постійну напругу E . Запишемо для даного кола 2-й закон Кірхгофа:

$$E = u_R + u_C.$$

Запишемо напругу на резисторі R через струм у колі i_C :

$$E = u_C + i_C R.$$

Виразимо струм i_C через напругу u_C за формулою (1.1):

$$E = u_C + RC \frac{du_C}{dt}.$$

Якщо припустити, що напруга u_C встановиться стрибком, то її похідна $\frac{du_C}{dt}$ буде прямувати до нескінченності. Але енергія джерела E не дорівнює нескінченності. Отже, таке припущення суперечить другому закону Кірхгофа і напруга u_C не може змінитися стрибком.

Розглянемо енергетичний підхід. Якщо струм i у RC-колі зміниться стрибком, то енергія в цьому колі теж зміниться стрибком:

$$W_E(t) = \frac{Cu^2}{2},$$

а потужність на конденсаторі буде прямувати до нескінченності, оскільки вона є похідною від енергії

$$p(t) = \frac{dW_E(t)}{dt}.$$

Але це з фізичної точки зору неможливо, оскільки потужність не може дорівнювати нескінченності.

Усе вище зазначене так само справедливо для напруги на ємності стосується і електричного заряду.

Дійсно, заряд конденсатора визначається за формулою

$$q_C(t) = Cu_C(t).$$

Виразимо з отриманого виразу напругу

$$u_C(t) = \frac{q_C(t)}{C}.$$

Підставимо вираз для напруги у другий закон комутації

$$\frac{q_C(0-)}{C} = \frac{q_C(0+)}{C} = \frac{q_C(0)}{C}.$$

Тепер, скоротивши вираз на C , можемо записати

$$q_C(0-) = q_C(0) = q_C(0+), \quad (1.8)$$

де $q_C(0-)$ – електричний заряд на ємності до комутації; $q_C(0)$ – електричний заряд на ємності у момент комутації; $q_C(0+)$ – електричний заряд на ємності після комутації.

1.4 Наслідки із законів комутації

1 У момент комутації ємність за наявності початкового заряду еквівалентна джерелу напруги величиною $E = u_C(0)$, а без нього – замиканню кола у місці її включення.

2 У момент комутації індуктивність із нульовим струмом $i_L(0)$ еквівалентна джерелу струму величиною $i_L(0)$, а без нього – розриву кола.

1.5 Комутації при скачкоподібній зміні струму

Є ряд комутацій, що відносять до комутацій при скачкоподібній зміні струму. Прикладом такої комутації є схема, зображена на рис. 1.4. До комутації струм у котушці індуктивності L_2 дорівнює 0, а в котушці індуктивності L_1 - не дорівнює 0.

У момент комутації (відключення ключа) струм у котушці індуктивності L_1 змінюватися не повинен, а струм в L_2 у цей самий час дорівнює нулю. Тому на підставі 1-го закону Кірхгофа струм повинен замкнутися через дугу (при різкій зміні струму напруга на котушці індуктивності L_2 стане досить великою, у ключі відбудеться пробій, і буде горіти іскра). У реальній котушці струм також частково може замкнутися через міжгілкову ємність.

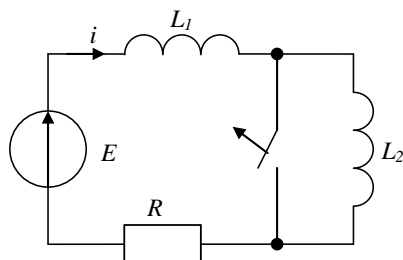


Рисунок 1.4

Після згасання дуги струми в котушках урівнюються (все це відбувається практично миттєво). У такій інтерпретації можна (умовно) вважати, що струми зрівнюються миттєво. Для подальшого розрахунку перехідного процесу необхідно знати струм після комутації $i(0+)$. Це значення можна одержати, якщо використати принцип безперервності сумарного потокозчеплення при комутації:

$$\psi(0-) = \psi(0+).$$

Насправді потокозчеплення визначається за формулою

$$\psi(t) = Li(t).$$

У принцип безперервності сумарного поточкозчеплення запишемо значення поточкозчеплення. Після комутації значення індуктивності збільшується до виразу $L_1 + L_2$.

Тоді запишемо

$$L_1 \cdot i(0-) = (L_1 + L_2)i(0+),$$

і остаточно одержимо

$$i(0+) = \frac{L_1}{L_2 + L_1} i(0-) = i_{L_1}(0+) = i_{L_2}(0+).$$

Стрибокподібна зміна струмів та відповідних їм потоків у L_1 та L_2 у момент комутації не призводить у даному випадку до наведення нескінченно великої сумарної ЕРС самоіндукції, оскільки сумарне поточкозчеплення не зазнає скачкоподібної зміни. При нових значеннях струмів у L_1 та L_2 магнітна енергія, що запасена у котушках, буде менше від енергії, що запасена у першій котушці до комутації. Частина енергії перетвориться у тепло іскри, а також випроміниться. Знайдений таким чином струм $i(0)$ у L_1 та L_2 може розглядатися як незалежна початкова умова для розрахунку перехідного процесу у всьому колі (рис. 1.4) після розриву дуги.

При комутаціях у колах з ємностями за відсутності опорів також можливі досить швидкі перерозподіли зарядів, що умовно розглядаються як миттєві. У цьому випадку застосовується принцип постійності сумарного заряду. Одержані при цьому значення зарядів та напруг на окремих ємностях використовуються при розрахунках наступного перехідного процесу як незалежні початкові умови.

У кінці розділу зазначимо, що струми в індуктивностях і напруги на ємностях у момент комутації є незалежними початковими умовами. Перехідний процес іде від цих умов до сталого режиму.

Може бути такий випадок, що початкові умови відповідають сталому режиму, - тоді перехідного процесу не буде.

1.6 Загальна методика знаходження шуканої змінної

1 Кожним з відомих методів аналізу лінійного кола складемо систему рівнянь, що описує нашу схему. Як метод складання рівнянь можуть бути такі методи: метод рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод накладення.

2 Напругу на котушці індуктивності L записуємо за допомогою виразу $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, струм для ємності записуємо на підставі співвідношення $i_C = C \frac{du_C}{dt}$ і струм на резисторі записуємо за допомогою закону Ома $u = iR$.

3 Далі, з використанням співвідношень для напруг та ємностей з попереднього пункту складаємо систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь для досліджуваної схеми.

4 За допомогою математичних перетворень отриману систему неоднорідних диференціальних рівнянь перетворюємо в диференціальне неоднорідне рівняння щодо шуканої змінної:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f. \quad (1.9)$$

Як шукані змінні доцільно вибрати струм у котушці індуктивності та напругу на ємності, щоб надалі можна було б використати закони комутації.

5 Далі перетворюємо неоднорідне диференціальне рівняння в однорідне диференціальне рівняння, для цього прирівнюємо праву частину рівняння (1.9) до нуля та одержуємо рівняння

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \quad (1.10)$$

6 На підставі рівняння (1.10) з урахуванням заміни

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda^2 x, \quad \dots, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = \lambda^n x \quad (1.11)$$

складаємо характеристичне рівняння

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (1.12)$$

та знаходимо його корені.

6 Знаходимо вимушену складову.

7 Записуємо повне розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння (1.9) у вигляді:

$$x = x_{\text{ВИМ}} + x_{\text{В}}. \quad (1.13)$$

де $x_{\text{В}}$ - вимушена складова.

Вигляд вимушеної складової для дійсних різних коренів

$$x_{\text{ВИМ}} = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t}.$$

Вигляд вимушеної складової для дійсних рівних коренів

$$x_{\text{ВИМ}} = \sum_{i=1}^m A_i t^{k-1} e^{\lambda_i t} + \sum_{i=m+1}^n A_i e^{\lambda_i t},$$

де $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \lambda$, $m < n$.

Вигляд вимушеної складової для пари комплексно-спряжених коренів

$$x_{\text{ВИМ}} = B_i e^{-\alpha_i t} \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

де $\lambda_i = -\alpha + \omega_i$, $\lambda_{i+1} = -\alpha - \omega_i$.

8 На підставі незалежних початкових умов і законів комутації визначаємо константи інтегрування A_i .

9 Записуємо загальний вираз для шуканої змінної залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння 1.12.

Початковими умовами назвемо значення змінних струмів в індуктивностях і напруг на ємностях при $t = 0$, тобто ті величини, які у момент комутації не змінюються стрибком. Іноді ці умови ще називаються незалежними початковими умовами. На відміну від них початкові значення всіх інших струмів і напруги називають залежними початковими умовами. Залежні початкові умови визначаються за незалежними початковими умовами за допомогою рівнянь, складених за 1-м та 2-м законами Кірхгофа. Відзначимо, що основна складність класичного методу дослідження перехідних процесів у складних колах саме і полягає у визначенні залежних початкових умов.

1.7 Характеристики перехідного процесу

Значення кореня λ визначається структурою кола і параметрами елементів, а стала інтегрування A залежить ще від збуджувальних сил і від моменту комутації.

За час

$$t = \tau = \frac{1}{|\lambda|}. \quad (1.14)$$

Вільна складова струму чи напруги зменшується у e разів (рис. 1.5).

Дійсно,

$$\frac{A_k e^{\lambda_k(t+\tau)}}{A_k e^{\lambda_k t}} = e^{\lambda_k \tau} = e^{\lambda_k \frac{1}{|\lambda_k|}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2.718} \cong 0.368.$$

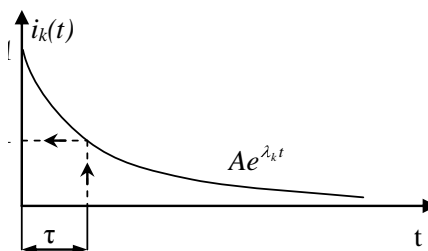


Рисунок 1.5

Чим більша стала часу кола, тим повільніше змінюються електричні змінні під час перехідного процесу. Хоча теоретично перехідний процес триває нескінченно довго, на практиці вважають, що вільною складовою можна нехтувати через час $t = (3-5)\tau$. За цей час початкове значення вільної складової зменшується відповідно у $(e^3 = 20) - (e^5 = 148)$ разів і досягає значень, співвимірних зі значеннями електричних змінних, спричинених у колі атмосферними явищами, хімічними процесами та іншими факторами, які не враховуються при аналізі кіл.

Для різних моментів часу струм у колі, що виражений у відсотках кінцевого значення, складає (таблиця 1.1).

Таблиця 1.1

t	0	1τ	2τ	3τ	4τ	5τ
i _{ВИМ} , %	100	36.79	13.53	4.98	1.83	0.67

Для інженерних розрахунків вважають що струм перехідного процесу дорівнює $t = 3\tau$.

Звідси час перехідного процесу можна розрахувати за такою формулою:

$$t_{pp} = 3\tau \approx \frac{3}{|\lambda|}, \quad (1.15)$$

де λ – дійсна частина для комплексних коренів і найменший з коренів за модулем для від’ємних дійсних коренів.

Коефіцієнт згасання кола – величина, зворотна сталій часу кола:

$$\alpha = \frac{1}{\tau}. \quad (1.16)$$

Декремент згасання – величина, що характеризує швидкість згасання розглянутих коливань і дорівнює відношенню напруг у момент часу t та $t + T$:

$$\Delta = \frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{u_1(t)}{u_1(t+T)} = \frac{e^{-\alpha t}}{e^{-\alpha(t+T)}} = e^{\alpha T}. \quad (1.17)$$

Декремент згасання є сталою величиною, що не залежить від часу, а залежить лише від параметрів кіл R , L , C .

Часто швидкість згасання коливань характеризують натуральним логарифмом від декременту згасань

$$\delta = \ln(\Delta) = \ln(e^{\alpha T}) = \alpha \cdot T, \quad (1.18)$$

де α - коефіцієнт згасання; T - період коливань.

Величину δ називають *логарифмічним декрементом згасання*.

Декремент загасання знаходить має сенс лише тоді, коли корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені.

1.8 Запитання для самоперевірки

- 1 Що таке вимушений режим?
- 2 Що таке комутація?
- 3 Дайте визначення перехідного процесу.

- 4 Які причини виникнення перехідних процесів?
- 5 Наведіть приклади комутації.
- 6 Запишіть вираз для струмів у конденсаторі та ємності.
- 7 Запишіть вираз для напруг на конденсаторі і на ємності.
- 8 Сформулюйте перший закон комутації.
- 9 Чому дорівнює еквівалентна ємність за наявності початкового заряду у момент комутації?
- 10 Доведіть 1-й закон комутації за допомогою закону Кірхгофа.
- 11 Доведіть 1-й закон комутації з енергетичної точки зору.
- 12 Сформулюйте другий закон комутації.
- 13 Чому дорівнює еквівалентна індуктивність із нульовим струмом у момент комутації?
- 14 Доведіть 1-й закон комутації за допомогою закону Кірхгофа.
- 15 Доведіть 1-й закон комутації з енергетичної точки зору.
- 16 Як сформулювати по-іншому перший та другий закони комутації?
- 17 Які є наслідки законів комутації?
- 18 Що таке комутація при скачкоподібній зміні струму?
- 19 Наведіть математичні приклади комутацій при скачкоподібній зміні струмів.
- 20 Наведіть фізичні приклади комутацій при скачкоподібній зміні струмів.
- 21 Розкрити суть класичного методу аналізу перехідних процесів.
- 22 Що таке вимушений режим?
- 23 Що таке сталий режим?
- 24 Написати 2-й закон Кірхгофа для коливального контуру.
- 25 Відносно яких змінних доцільно розв'язувати рівняння, записане за другим законом Кірхгофа? Чому?
- 26 До якого вигляду перетвориться складене рівняння для коливального контуру?
- 27 Як одержати характеристичне рівняння?
- 28 Які корені буде мати отримане характеристичне рівняння?

- 29 Запишіть загальний вигляд розв'язання для шуканої змінної.
- 30 Яка особливість вимушеного режиму?
- 31 Запишіть загальний вигляд рівняння та його розв'язання для шуканої змінної у випадку багатоконтурної розгалуженої схеми з реактивними елементами.
- 32 Яка загальна методика знаходження шуканої змінної?
- 33 Як знайти константу інтегрування у випадку, якщо схема описується диференціальним рівнянням 1-го порядку?
- 34 Як знайти константу інтегрування у випадку, якщо схема описується диференціальним рівнянням 2-го порядку?
- 35 Як знайти константу інтегрування у випадку, якщо схема описується диференціальним рівнянням 3-го порядку?
- 36 Що таке стала часу кола? Як вона визначається?
- 37 Що таке час перехідного процесу?
- 38 Що таке коефіцієнт згасання?
- 39 Що таке декремент згасання?
- 40 Що таке логарифмічний декремент згасання?

1.9 Завдання для самостійної роботи

1.1 Для схеми послідовного коливального контуру з номіналами елементів $R = 1 \text{ кОм}$, $L = 100 \text{ мГн}$ і $C = 10 \text{ мкФ}$ (діюча напруга стала) одержати характеристичне рівняння, знайти його корені і записати загальний вигляд розв'язання шуканої змінної, якщо як шукану змінну задано:

- 1) струм у котушці індуктивності i_L ;
- 2) напругу на ємності u_C .

1.2 Для схеми, зображеної на рисунку 2.1 з номіналами елементів $R = 20 \text{ кОм}$, $L = 50 \text{ мГн}$ і $C = 1 \text{ мкФ}$ (діюча напруга постійна), одержати характеристичне рівняння, знайти його корені і записати загальний вигляд розв'язання шуканої змінної, якщо як шукану змінну задано:

- 1) струм у котушці індуктивності i_L ;
- 2) напругу на ємності u_C .

1.3 Для схеми, зображеної на рисунку 2.1 з номіналами елементів $R = 10 \text{ кОм}$, $L = 5 \text{ мГн}$ і $C = 1 \text{ мФ}$ (діюча напруга стала), одержати характеристичне рівняння, знайти його корені і записати загальний вигляд розв'язання шуканої змінної, якщо як шукану змінну задано:

- 1) струм у котушці індуктивності i_L ;
- 2) напругу на ємності u_C .

1.4 Для схеми, зображеної на рис. 1.6 з номіналами елементів $R_1 = 12 \text{ кОм}$, $R_2 = 14$, $L = 10 \text{ мГн}$ і $C = 1 \text{ мкФ}$, знайти корені характеристичного рівняння та записати загальний вигляд для шуканої змінної:

- 1) струму у котушці індуктивності i_L ;
- 2) напруги на ємності u_C .

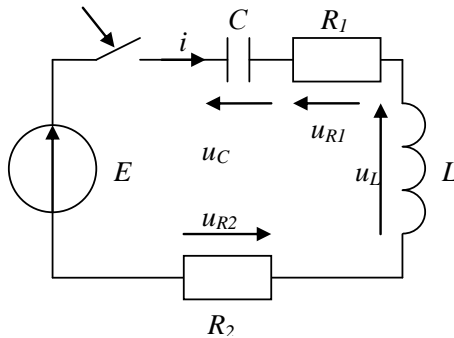


Рисунок 1.6

РОЗДІЛ 2 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У НАЙПРОСТІШИХ КОЛАХ

У цьому розділі розглянемо перехідні процеси у найпростіших колах. Такими колами є послідовні RL-, RC-, RLC-кола.

2.1 Перехідні процеси у послідовних RL - колах

Послідовну гілку із опором та індуктивністю називають найпростішим послідовним RL-колом.

Розглянемо найпростіше послідовне RL-коло (рис. 2.1). Запишемо для нього рівняння за другим законом Кірхгофа:

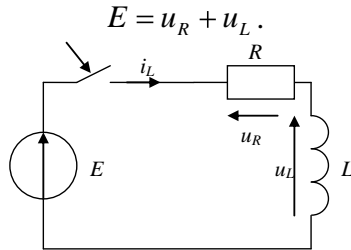


Рисунок 2.1

Диференціальне рівняння краще складати щодо струму, тому що тоді можна застосувати 1-й закон комутації для визначення початкових умов і знаходження констант інтегрування. Виразимо напругу на резисторі через його струм i_L , а напругу на котушці індуктивності - за допомогою виразу (1.2), тоді одержимо таке рівняння

$$E = i_L R + L \frac{di_L}{dt}. \quad (2.1)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння. Корені цього рівняння мають вигляд

$$i_L = i_{L.ВИМ} + i_{L.В},$$

де $i_{L.ВИМ}$ і $i_{L.В}$ – струми вимушеного режиму та вільного процесу відповідно (див. розділ 1).

Для знаходження $i_{L.B}$ запишемо однорідне диференціальне рівняння, для цього ліву частину неоднорідного диференціального рівняння (3.1) прирівняємо до нуля ($E = 0$)

$$L \frac{di_{L.B}}{dt} + Ri_{L.B} = 0.$$

Одержали однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Для того щоб знайти розв'язання отриманого диференціального рівняння, складаємо характеристичне рівняння, ввівши заміну відповідно до формул (1.11). Одержимо таке рівняння:

$$L\lambda + R \cdot 1 = 0.$$

Одержуємо такий корень характеристичного рівняння $i_{L.B}$:

$$\lambda = -\frac{R}{L}.$$

Запишемо вираз для вільної складової струму у котушці індуктивності $i_{L.B}$

$$i_{L.B}(t) = A_1 e^{\lambda t} = A_1 e^{-Rt/L} = A_1 e^{-t/\tau}, \quad (2.2)$$

де $\tau = L/R$, τ – стала часу послідовного RL-кола. Вона показує час, протягом якого вільна складова струму, загасаючи, зменшується в e разів порівняно зі своїм початковим значенням $i_{L.B}(0)$.

Для рівняння (2.2) у момент часу $t = \tau$ одержуємо

$$i_B(\tau) = i_B(0)e^{-1} = \frac{i_B(0)}{e} = \frac{A}{e}. \quad (2.3)$$

Практично можна вважати, що вільна складова струму у котушці індуктивності згасне за час $t \cong 3\tau$, як було показано вище (див. розділ 1.7). Розглянемо тепер, як розв'язується наведене диференціальне рівняння (2.1) для різних видів джерела сигналу E .

2.1.1 Включення RL-кола під постійну напругу

Нехай напруга джерела постійна та не залежить від часу, тобто E . Розв'язання рівнянь (2.1) шукаємо у вигляді суми вимушеної та вільної складових

$$i_L(t) = i_{L.ВИМ} + i_{L.В} = i_{L.ВИМ} + Ae^{-t/\tau}. \quad (2.4)$$

Знайдемо вимушену складову $i_{L.ВИМ}$ (процес установиться, коли $t \rightarrow \infty$). У момент комутації котушка індуктивності L з нульовими початковими умовами еквівалентна замиканню кола у місці її включення (на підставі наслідків із законів комутації, дивись розділ 1.4). Таким чином, вимушена складова струму для кола, що зображене на рис. 2.1, знаходиться так:

$$i_{L.ВИМ} = \frac{E}{R}.$$

Підставимо вимушену складову струму у котушці індуктивності $i_{L.ВИМ}$ в розв'язання (2.4) і одержимо

$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-t/\tau}. \quad (2.5)$$

Знайдемо константу A . Для цього у нульовий моменту часу ($t=0$) запишемо рівняння (2.5):

$$i(0) = \frac{E}{R} + Ae^0 = 0.$$

Оскільки до підключення джерела напруги E струму у колі не було, то за законом комутації

$$i(0-) = i(0+) = i(0) = 0.$$

Звідси знаходимо константу

$$A = -\frac{E}{R}.$$

Тепер запишемо повний вираз для струму у котушці індуктивності

$$i_L(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-t/\tau}. \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) можна записати по-іншому, якщо позначити E/R як $I_{L,0}$:

$$i_L(t) = I_{L,0}(1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.7)$$

Далі на основі рівнянь (2.6) та (2.7) будемо графік зміни у часі струму на котушці індуктивності.

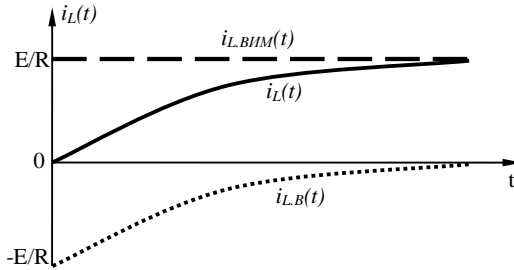


Рисунок 2.2

Графіки з рис. 2.2. побудовані для загального випадку. На цьому графіку пунктиром зображена стала складова струму в котушці індуктивності $i_{L,ВИМ}$ (пряма лінія), точками – вільна складова струму в котушці індуктивності $i_{L,B}$, суцільна крива – сумарний графік струму у котушці індуктивності: $i_L = i_{L,ВИМ} + i_{L,B}$.

У деяких підручниках, як графічна інтерпретація сталої часу кола τ наводиться такий рисунок, що зображений на рис. 2.3.

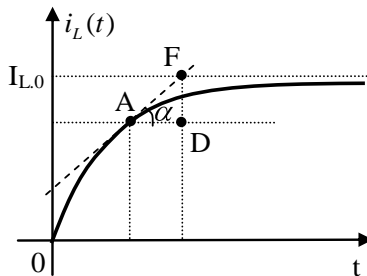


Рисунок 2.3 - Графічна інтерпретація сталої часу кола

Проводиться дотична до кривої залежності струму у часі $i(t)$. Через кут нахилу дотичної можна визначити сталу часу кола. Продиференціюємо вираз (2.7)

$$\frac{d}{dt}i_L(t) = \frac{d}{dt}I_{L,0}(1 - e^{-t/\tau}) = I_{L,0} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (2.8)$$

У нульовий момент часу ($t=0$) одержуємо вираз (2.8)

$$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{I_{L,0}}{\tau} = \operatorname{tg} \alpha.$$

З прямокутного трикутника AFD виразимо

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{FD}{AD}.$$

Звідки знаходимо сталу часу кола

$$\tau = AD.$$

Отже, стала часу кола чисельно дорівнює довжині піддотичної. Знайдемо напругу на резисторі схеми

$$u_R(t) = i_L(t)R = \frac{E}{R}R(1 - e^{-t/\tau}) = E(1 - e^{-t/\tau}).$$

Знайдемо напругу на котушці індуктивності схеми

$$u_L(t) = E - u_R = Ee^{-t/\tau}.$$

У нульовий момент часу ($t=0$) індуктивність еквівалентна розриву кола у місці її ввімкнення, а отже, струму у колі немає ($u_R = 0$, $u_L = E$, $i_L R = 0$) і вся напруга падає на джерелі E .

Якщо час спрямувати до нескінченності ($t = \infty$), то напруга на резисторі буде дорівнювати напрузі на джерелі ($u_R = E$), напруга на котушці індуктивності буде дорівнювати нулю ($u_L = 0$), тобто індуктивність еквівалентна закороченій ділянці кола у місці її ввімкнення.

Напругу u_L знаходимо на підставі 2-го закону Кірхгофа, як різницю між напругою джерела E та напругою на резисторі R . Такий самий вираз можна одержати за допомогою виразу (1.2):

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Нижче (рис. 2.4) наведений графік напруг на всіх елементах досліджуваного послідовного RL-кола.

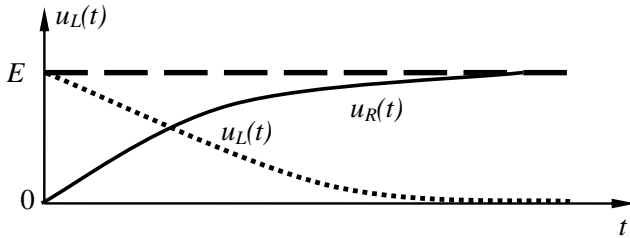


Рисунок 2.4

Напруга на опорі u_R повторює форму струму, і його крива зображена суцільною лінією, точками зображений графік напруги на індуктивності u_L , пунктиром позначений сумарний графік напруги джерела $E = u_R(t) + u_L(t)$.

До цих кривих теж можна провести дотичні та показати графічне знаходження сталої часу τ .

Криві, наведені на рис. 2.3 та рис. 2.4, показують, що струм у колі не встановлюється миттєво, а потрібно якийсь час (час перехідного процесу τ) до настання вимушеного режиму. Струм зростає тим повільніше, чим більша стала часу кола τ , тобто чим повільніше загасає вільний струм.

Частина енергії, що одержується від джерела, йде на збільшення магнітного поля котушки, а частина переходить у тепло в її опорі.

2.1.2 Включення RL-кола під гармонічну напругу

При включенні послідовного RL-кола під гармонічну напругу (рис. 2.5) $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_E)$, де φ_E – фаза джерела напруги, що строго прив'язана до моменту комутації.

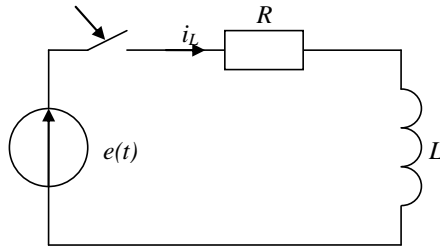


Рисунок 2.5

Для кола, що зображене на рис. 2.5, запишемо систему рівнянь на основі другого закону Кірхгофа

$$e(t) = i_L R + u_L .$$

Замість напруги u_L запишемо її значення за виразом (1.2):

$$e(t) = i_L R + L \frac{i_L}{dt} . \quad (2.9)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння. Запишемо розв'язання для перехідного струму вихідного кола у вигляді суми вимушеної та вільної складових:

$$i_L = i_{L.ВИМ} + i_{L.В} .$$

Для знаходження вільної складової необхідно розв'язати лінійне однорідне диференціальне рівняння, яке одержуємо з рівняння 2.13, привівши ліву частину до нуля

$$i_L R + L \frac{i_L}{dt} = 0 .$$

Одержали однорідне диференціальне рівняння, як і у випадку дії джерела сталої напруги, а отже, вільна складова струму у котушці індуктивності визначається за формулою

$$i_{L.В}(t) = A e^{-t/\tau} , \quad (2.10)$$

де $\tau = L/R$.

Вимушену складову струму $i_{L.ВИМ}$ знаходимо за допомогою закону Ома у комплексній формі. Спочатку перейдемо від тригонометричної форми запису вхідної напруги до показникового за допомогою такої формули:

$$e_m(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_E) \Leftrightarrow \dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_E} = E e^{j\varphi_E}.$$

Запишемо комплексний вхідний опір кола:

$$Z(j\omega) = \underline{Z} = R + j\omega L. \quad (2.11)$$

Запишемо значення комплексного вхідного струму

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \frac{E e^{j\varphi_E}}{R + j\omega L}.$$

У знаменнику одержаного виразу одержали комплексне число у алгебраїчній формі запису, а у чисельнику – у показниковій. Щоб поділити один вираз на інший, необхідно форму запису чисельника та знаменника звести до показникової форми запису комплексного числа:

$$\dot{I} = \frac{E e^{j\varphi_E}}{\sqrt{R^2 + x_L^2} e^{j\varphi_Z}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + x_L^2}} e^{j(\varphi_E - \varphi_Z)} = I e^{j\varphi_I}, \quad (2.12)$$

$$\text{де } I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + x_L^2}}, \quad \varphi_Z = \arctg \frac{x_L}{R}.$$

З урахуванням наведених вище співвідношень та за допомогою переходу від показникової форми запису до гармонічної для струму одержимо такий вираз (перехідний струм)

$$i = I \sin(\omega t + \varphi_i) + A e^{-t/\tau}.$$

Тепер необхідно знайти константу інтегрування A . Для цього запишемо отриманий перехідний струм у нульовий момент часу:

$$i(0) = I \sin \varphi_i + A^{-0/\tau}.$$

На підставі першого закону комутації одержимо

$$i(0) = i(0) - 0 = 0.$$

Підставимо одержане значення у вираз для перехідного струму:

$$0 = I \sin \varphi_i + A e^{-0/\tau}.$$

З одержаного виразу виразимо сталу інтегрування $A = -I \sin \varphi_i$

Запишемо повне розв'язання з огляду на значення константи інтегрування:

$$i(t) = I \sin(\omega t + \varphi_E - \varphi_Z) - I \sin(\varphi_E - \varphi_Z) e^{-t/\tau}. \quad (2.13)$$

Напруга на індуктивності визначається співвідношенням

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

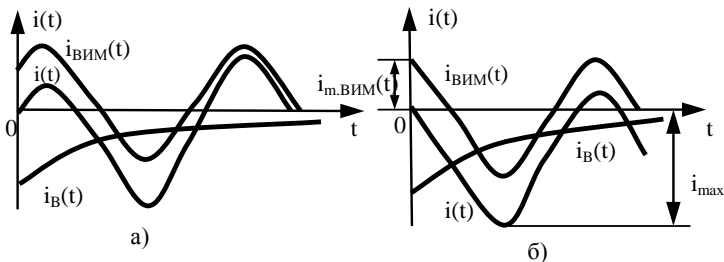


Рисунок 2.6

Крива струму у котушці індуктивності $i_L(t)$, зображена на рис. 2.6 а, показує, що під час загасання вільної складової струму $i_{L,B}(t)$ перехідний струм прямує до значення вимушеного струму. Однак через проміжок часу від $T/4$ до $3T/4$ після включення, що залежить від кута φ_E , струм може досягати значень, що перевищують амплітуду вимушеного струму.

Найбільш можливого значення струм досягає, якщо в момент включення кола вимушений струм дорівнює амплітуді ($\varphi_E - \varphi_Z = \pi/2$ або $\varphi_E - \varphi_Z = -\pi/2$), а стала часу кола досить велика, тобто вільний струм згасає дуже повільно. За цих умов $\varphi_E = \pi$ і прикладена напруга в момент комутації повинна проходити через нульове значення. Крива струму при $\varphi_E - \varphi_Z = \pi/2$ і досить великих значеннях τ наведена на рис. 3.6 б. Приблизно через половину періоду після включення кола струм досягає майже подвоєної амплітуди вимушеного струму $|i_{\text{max}}| = |2I|$.

Отже, при включенні кола R, L до джерела гармонічної напруги перехідний струм ні за яких умов не може перевищувати подвоєної амплітуди вимушеного струму.

Початкове значення вільного струму рівне за величиною та протилежне за знаком початковому значенню вимушеного струму. Тому якщо в момент включення вимушений струм проходить через нуль, то початкове значення вільного струму так само дорівнює нулю. Вільний струм взагалі не виникає, а у колі відразу встановлюється вимушений режим. Це буде при $\varphi_I = 0$ та $\varphi_I = \pi$.

Проаналізувавши одержані вирази для випадків ввімкнення послідовного RL-кола під постійну та гармонічну напругу, слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

2.2 Перехідні процеси у найпростіших RC-колах

Коло, що складається з послідовно включених конденсатора та резистора, називають RC-колом.

Запишемо 2-й закон Кірхгофа для даного кола (рис. 2.7):

$$e = u_R + u_C. \quad (2.14)$$

Розглядати перехідні процеси будемо щодо напруги на ємності u_C . Одержимо диференціальне рівняння для цієї схеми та розв'яжемо його щодо різних видів впливу.

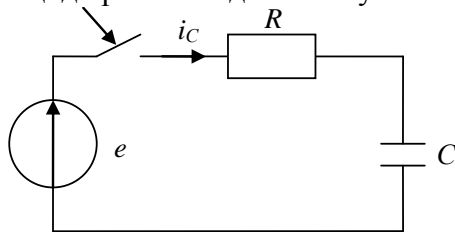


Рисунок 2.7

Якщо ми знайдемо напругу на конденсаторі u_C , то струм у колі і напругу на опорі можна визначити таким чином.

Напруга в колі через напругу на конденсаторі

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Напругу на резисторі знаходимо за допомогою закону Ома

$$u_R = iR.$$

Підставимо значення u_R у вираз (3.14) для схеми після замикання ключа

$$e = u_R + u_C = Ri + u_C.$$

Якщо виразити струм у колі через напругу u_C та підставити у вищевідержане рівняння, то одержимо

$$e = RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (2.15)$$

Розв'язання цього рівняння будемо шукати у вигляді суми вимушеної і вільної складових $u_C = u_{C.ВИМ} + u_{C.В}$, де $u_{C.ВИМ}$ – вимушена, або стала складова, обумовлена видом джерела e ; $u_{C.В}$ – вільна складова, що може бути знайдена за допомогою розв'язання лінійного однорідного рівняння.

Знаходимо вільну складову $u_{C.В}$ за допомогою характеристичного рівняння, що впливає із рівняння (2.15), ввівши таку заміну та перетворивши його на однорідне диференціальне рівняння, прирівнявши ліву частину до нуля:

$$\frac{du_C}{dt} = \lambda u_C.$$

Тоді одержуємо таке характеристичне рівняння:

$$RC\lambda u_C + u_C = 0.$$

Винесемо u_C за дужки:

$$u_C[RC\lambda + 1] = 0.$$

Корені цього рівняння будуть такі:

$$\lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Тепер запишемо вільну складову напруги:

$$u_{C.В}(t) = Ae^{\lambda t} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-t/\tau}. \quad (2.16)$$

Тут ми позначили $\tau = R \cdot C$, де τ називають сталою часу RC-кола. Отже, швидкість заряджання ємності визначається сталою часу кола: чим більші значення ємності та активного опору, тим повільніше зростає напруга на ємності і зменшується струм.

2.2.1 Включення RC-кола під постійну напругу

Будемо розглядати загальний випадок, коли ємність заряджена, тобто $u_C(0) = U_0$. Як і раніше, розв'язання шукаємо у вигляді

$$u_C = u_{C.ВИМ} + u_{C.В}$$

Вимушену складову, що відповідає постійному режиму, можна знайти, знаючи, що при постійному струмі ємність еквівалентна розриву. Отже,

$$u_{C.ВИМ} = E.$$

Вільну складову знаходимо за вищевикладеною методикою (див. розділ 2.2):

$$u_{C.В}(t) = Ae^{-t/\tau}.$$

Загальна формула для напруги на ємності має вигляд

$$u_C(t) = E + Ae^{-t/\tau}. \quad (2.17)$$

Використовуючи початкову умову

$$u_C(0) = U_0$$

та другий закон комутації:

$$u_C(0) = u_C(\infty),$$

маємо

$$U_0 = E + A.$$

Звідси знайдемо константу інтегрування

$$A = U_0 - E.$$

Остаточно одержуємо вираз для шуканої напруги на конденсаторі:

$$u_C = E + (U_0 - E)e^{-t/\tau}. \quad (2.18)$$

Запишемо вираз для напруги на резисторі виходячи із другого закону Кірхгофа

$$u_R = E - u_C = E - U_0 e^{-t/\tau}.$$

Тоді струм у колі набуває вигляду

$$i = \frac{u_R}{R} = \frac{E - U_0}{R} e^{-t/\tau}.$$

Струм у колі можна знайти за допомогою виразу

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Розглянемо конкретні різні випадки.

Відсутність початкового заряду

Припустимо, що до початку перехідного процесу ємність була розряджена (тобто $U_0 = 0$). Тоді розв'язок рівняння буде мати вигляд (2.19)

$$u_C(t) = E + A e^{-t/\tau}.$$

Використовуючи початкову умову $u_C(0) = 0$ та другий закон комутації

$$u_C(0^+) = u_C(0^-),$$

маємо

$$0 = E + A.$$

Звідси знайдемо константу інтегрування

$$A = -E.$$

Остаточно одержуємо вираз для шуканої напруги на конденсаторі:

$$u_C = E - E e^{-t/\tau} = E (1 - e^{-t/\tau}). \quad (2.19)$$

Запишемо напругу на резисторі та струм у колі

$$u_R(t) = E e^{-t/\tau}, \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}.$$

Видно, що у момент комутації (тобто $t = 0$) струм дорівнює $i(0^+) = E/R$. Це підтверджує той факт, що в момент комутації незаряджена ємність є закороченою ділянкою кола.

Побудуємо орієнтовні графіки (рис. 2.8).

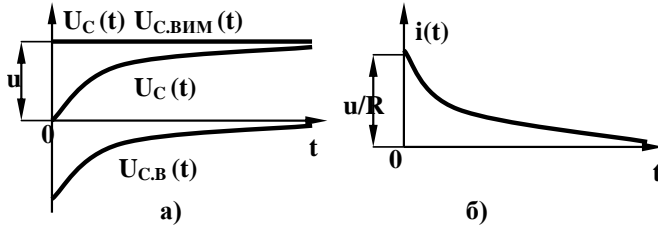


Рисунок 2.8

Графіки напруг та струмів наведені на рис. 2.8. Напряга на опорі за формою збігається зі струмом, і тому його графік не показуємо.

На рис. 2.8 а показана загальна напруга $u_C(t)$, вільна $u_{C,В}(t)$ та вимушена $u_{C,ВИМ}(t)$ складові напруги. На рис. 2.8 б зображена зміна струму в колі $i(t)$. Ці криві показують, що напруга на ємності та струм у колі не встановлюються миттєво.

Напруга зростає і струм спадає тим повільніше, чим більша стала часу кола τ , тобто чим повільніше згасає вільна напруга $u_{C,В}(t)$.

Якщо ємність до моменту комутації була заряджена, то можливі різноманітні варіанти.

Графіки зміни напруги та струмів наведемо для схеми з попереднього прикладу (рис. 2.9). Розглянемо всі три випадки більш детальноше.

1) $U_0 > 0, U_0 < E$.

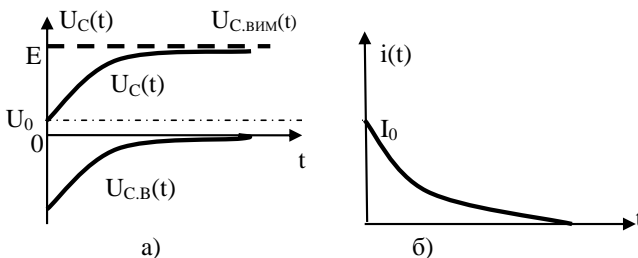


Рисунок 2.9

Із графіків на рис. 2.9 видно, що ємність від U_0 підзарядиться до E .

2) $U_0 > 0, U_0 > E$.

У цьому випадку ємність розряджається з U_0 до E , тому струм від'ємний (рис. 2.10).

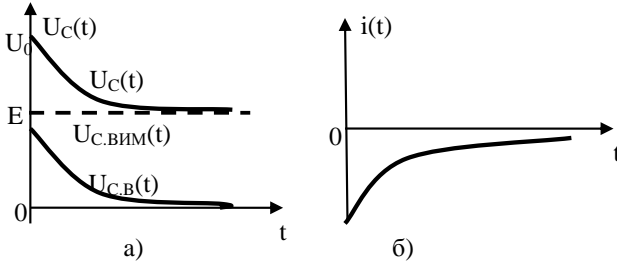


Рисунок 2.10

3) $U_0 < 0$.

У цьому випадку ємність перезарядиться з $-U_0$ до E (рис. 2.11).

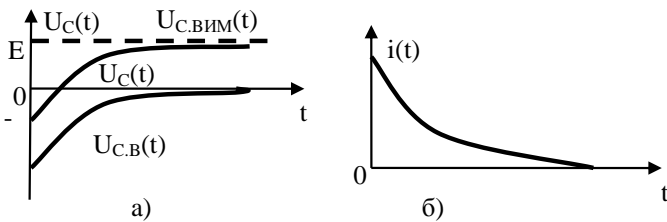


Рисунок 2.11

2.2.2 Включення RC-кола під гармонічну напругу

Включимо найпростіше послідовне RC-коло (рис. 2.12) під гармонічну напругу, що створюється джерелом $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$.

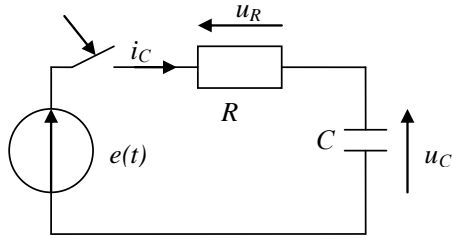


Рисунок 2.12

Запишемо рівняння на основі другого закону Кірхгофа для нашої схеми:

$$e(t) = u_R + u_C .$$

Складемо рівняння відносно напруги на конденсаторі u_C . Виразимо напругу на резисторі за допомогою закону Ома:

$$u_R = i_C R .$$

Струм кола виразимо через напругу на конденсаторі за допомогою виразу

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} .$$

Підставимо одержані вирази у вираз, складений на основі другого закону Кірхгофа для кола, що зображене на рис. 2.14:

$$e(t) = RC \frac{du_C}{dt} + u_C . \quad (2.20)$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння. Розв'язання цього рівняння буде у вигляді суми вимушеної та вільної складових:

$$u_C = u_{C,ВИМ} + u_{C,В} .$$

Вільну складову $u_{C,В}$ знаходимо за допомогою однорідного диференціального рівняння, яке одержуємо з рівняння (2.20), прирівнявши ліву частину рівняння до нуля

$$0 = RC \frac{du_C}{dt} + u_C$$

Щоб знайти корень цього рівняння, перетворимо його на характеристичне рівняння, ввівши заміну

$$\frac{du_C}{dt} = \lambda u_C.$$

З урахуванням заміни запишемо попереднє рівняння

$$RC\lambda u_C + u_C = 0.$$

Винесемо u_C за дужки

$$u_C[RC\lambda u_C + 1] = 0$$

У дужках одержали характеристичне рівняння, яке має корінь

$$\lambda = -\frac{1}{RC}.$$

Вільна складова напруги на ємності визначається виразом

$$u_{C.B} = Ae^{\lambda \cdot t},$$

де $\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$; τ - стала часу RC-кола.

Відповідно до викладеної вище теорії, перехідна напруга на ємності буде такою

$$u(t) = u_{C.BИМ} + u_{C.B}(t).$$

Вимушений режим $u_{C.BИМ}$ знайдемо за допомогою закону Ома у комплексній формі. Запишемо повний опір кола у показниковій формі

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\varphi_Z}, \quad (2.21)$$

де $\varphi_Z = -\arctg \frac{X_C}{R}$ - фаза опору \underline{Z} та $X_C = \frac{1}{\omega C}$ - реактивний опір конденсатора.

Запишемо діючу напругу $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$ у показниковій формі

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\varphi_e} = E e^{j\varphi_e}, \quad \text{де } E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}.$$

Комплексна напруга \dot{U} може бути знайдена множенням комплексного струму на опір ємності за законом Ома

$$\begin{aligned}
\dot{U} &= \dot{I}Z_C = \dot{I} \frac{1}{\omega C} = \frac{\dot{E}}{Z} \cdot \frac{-j}{\omega C} = \\
&= \frac{E e^{j\varphi_e} e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\varphi_z} \omega C} = \frac{E e^{j\varphi_e}}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\varphi_z}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{E e^{j\varphi_e}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + \left(\omega C \frac{1}{\omega C}\right)^2} e^{j\varphi_z}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{E e^{j\varphi_e}}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1} e^{j\varphi_z}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{E e^{j\varphi_e}}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1} e^{j\varphi_z}} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{E}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} e^{\varphi_e - \varphi_z - j\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Цій комплексній амплітуді відповідає вимушена складова напруги на конденсаторі:

$$u_{C.ВИМ}(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(\omega t + \varphi_e - \varphi_z - \frac{\pi}{2}). \quad (2.22)$$

Виходячи з наведених формул (3.22), запишемо рівняння загальної перехідної напруги на ємності

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ}(t) + u_{C.B}(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cdot \sin(\omega t + \varphi_e - \varphi_i - \frac{\pi}{2}) + A e^{-t/\tau}. \quad (2.23)$$

Припустимо, що ємність до підключення зовнішнього джерела не мала заряду. На підставі закону комутації $u_C(0) = u_C(0-) = 0$. Запишемо вираз 2.31 у нульовий момент часу ($t=0$):

$$\frac{E}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \sin(0 \cdot t + \varphi_e - \varphi_i - \frac{\pi}{2}) + A e^{-0/\tau} = 0,$$

$$\frac{E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cos(\varphi_e - \varphi_Z - \frac{\pi}{2}) + A = 0.$$

Знайдемо з отриманого виразу сталу інтегрування А:

$$A = \frac{-E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \sin(\varphi_e - \varphi_Z - \frac{\pi}{2}).$$

Одержуємо повну напругу на ємності

$$u_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \left[\sin(\omega t + \varphi_e - \varphi_e - \frac{\pi}{2}) - \sin(\varphi_e - \varphi_i - \frac{\pi}{2}) e^{-t/\tau} \right]. \quad (2.24)$$

Графік для напруги $u_C(t)$ (вираз 2.24) буде мати вигляд, аналогічний струму в RL-колі при його підключенні до гармонічної напруги.

У загальному випадку вигляд графіка (рис. 2.13) визначається співвідношеннями між τ (сталю часу кола) і періодом гармонійного сигналу T , а також співвідношенням між фазами джерела напруги φ_e та фазою вхідного опору φ_Z .

Якщо фаза джерела напруги дорівнює фазі вхідного опору ($\varphi_e = \varphi_Z$), то вільна складова дорівнює нулю ($u_{C.B} = 0$), оскільки $\sin(\varphi_e - \varphi_Z) = \sin 0 = 0$ і відразу настає постійний режим.

Якщо ж різниця фаз $\varphi_e - \varphi_Z = \pm\pi$, то модуль константи інтегрування $|A|$ досягає свого максимального значення та перехідний процес найбільш яскраво виражений.

Графіки напруги на ємності при $\varphi_e - \varphi_Z = \pm\pi$ для різних співвідношень сталої часу кола τ (рис. 2.13 а - невеликі значення τ , а рис. 2.13 б – великі значення τ) і періоду коливачь джерела напруги $e(t)$ наведені на рис. 2.13. Графіки побудовані орієнтовно.

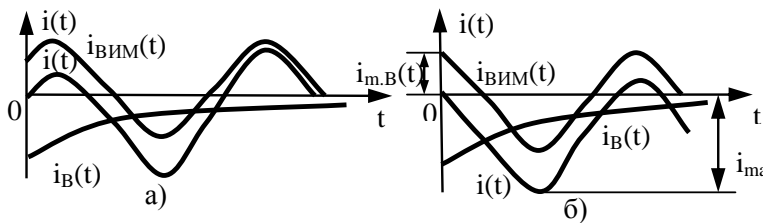


Рисунок 2.13

Приблизно через половину періоду після ввімкнення кола напруга на ємності досягає майже подвійної амплітуди вимушеного режиму

$$u_{C.\max} \approx 2u_{C.\text{ВИМ}}.$$

Таким чином, у цьому випадку перехідна напруга на ємності ні за яких умов не може перевищувати подвійної амплітуди вимушеного режиму.

Проаналізувавши одержані вирази для випадків увімкнення послідовного RC-кола під постійну та гармонічну напругу, слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

2.8 Перехідні процеси у нерозгалуженому RLC-колі

Розглянемо найпростіше нерозгалужене послідовне RLC-коло (рис. 2.14).

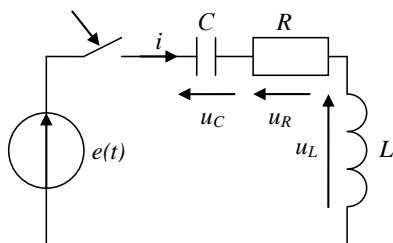


Рисунок 2.14

Запишемо для схеми спадання напруг на підставі другого закону Кірхгофа

$$E = u_R + u_L + u_C. \quad (2.25)$$

Складемо рівняння для напруги на конденсаторі u_C , тобто зведемо рівняння до вигляду, де u_C буде єдиною змінною.

Запишемо струм у колі через напругу на конденсаторі:

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Запишемо напругу на опорі R :

$$u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}.$$

Запишемо напругу на індуктивності L :

$$u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}.$$

Підставимо одержані вирази у (1.5) та запишемо загальну напругу кола:

$$E = LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C. \quad (2.26)$$

Для одержаного диференціального рівняння введемо таку заміну

$$\frac{du_C^2(t)}{dt^2} = \lambda^2 u_C, \quad \frac{du_C(t)}{dt} = \lambda u_C.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0. \quad (2.27)$$

Для спрощення введемо таку заміну: $a = LC$, $b = RC$ і $d = 1$ та одержимо квадратне рівняння

$$a\lambda^2 + b\lambda + d = 0. \quad (2.28)$$

Отримане рівняння (2.28) є звичайним квадратним рівнянням, корені якого визначаються за такою формулою:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ad}}{2a}. \quad (2.29)$$

Характер вільної складової залежить від параметрів RLC-кола, тобто від вигляду коренів (2.27).

Розглянемо можливі види коренів.

1. Корені від'ємні, не рівні та дійсні $\lambda_1 \neq \lambda_2 < 0$.
2. Корені рівні, від'ємні та дійсні $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.
3. Корені комплексно-спряжені $\lambda_{1,2} = -\alpha \mp j\omega_B$.

2.8.1 Аперіодичний розряд конденсатора

Аперіодичним зарядом конденсатора, зарядженого до напруги U_0 , через резистор і котушку індуктивності, називається розряд, при якому напруга на конденсаторі монотонно спадає від значення U_0 до нуля, тобто не відбувається перезарядження конденсатора. Аперіодичний або вільний розряд конденсатора має місце, коли корені характеристичного рівняння різні, від'ємні та дійсні.

Будемо вважати, що ємність була заряджена до відомого значення $u_C(0) = U_0$. Вхідна напруга була відсутня ($e = 0$). Вимушеного режиму не буде. Отже, одержимо

$$u_C(t) = 0 + u_{C.B}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.30)$$

Знайдемо константи інтегрування A_1 і A_2 . Для цього запишемо вираз (2.30) для нульового моменту часу ($t = 0$) і застосуємо закон комутації

$$u_C(0) = u_C(0-) = U_0 = A_1 e^0 + A_2 e^0 = A_1 + A_2, \text{ де } e^0 = 1. \quad (2.31)$$

Друге рівняння для знаходження констант інтегрування одержуємо диференціюванням співвідношення (2.30):

$$\frac{du_{C.B}(t)}{dt} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.32)$$

Для знаходження $\frac{du_{C.B}(t)}{dt}$ надамо йому фізичного змісту:

$$\frac{du_{C.B}(t)}{dt} = \frac{C}{C} \cdot \frac{du_{C.B}(t)}{dt} = C \cdot \frac{du_{C.B}(t)}{dt} \cdot \frac{1}{C} = \frac{i(t)}{C}. \quad (2.33)$$

Запишемо вираз (2.33) у нульовий момент часу з урахуванням першого закону комутації ($i(0) = i(0-) = 0$, оскільки до комутації коло розірване і струм у ньому не проходить)

$$\left. \frac{du_{C,B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i(0)}{C} = \frac{0}{C} = 0.$$

Таким чином, одержуємо систему рівнянь для знаходження констант

$$\begin{cases} U_0 = A_1 + A_2, \\ 0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \end{cases} \quad (2.34)$$

Шукані константи A_1 та A_2 знаходимо із системи (2.34), розв'язуючи її методом Крамера:

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{U_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-U_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Підставивши одержані вирази для константи у співвідношення (2.30), одержимо напругу на ємності

$$u_C(t) = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}). \quad (2.35)$$

Для струму у колі маємо

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (2.36)$$

Напруга на котушці індуктивності визначається

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (2.37)$$

Напруга на резисторі визначається

$$u_R(t) = i(t)R = RC \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \lambda_1 \lambda_2 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (2.38)$$

Дослідимо ці вирази для різних видів коренів.

Побудуємо графіки напруг і струму таких величин (2.35) - (2.38). Криві зміни напруг на ємності, опорі та на індуктивності (рис. 2.15 а) показують, що напруга на ємності монотонно зменшується з початкового значення U_0 , а струм (рис. 2.15 б), зростаючи від нуля, досягає максимуму, а потім так само зменшується.

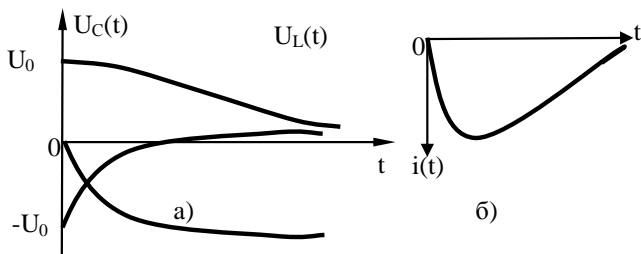


Рисунок 2.15

Напруга на резисторі за формою повторює струм, тому його будувати не будемо.

2.8.2 Коливальний розряд конденсатора

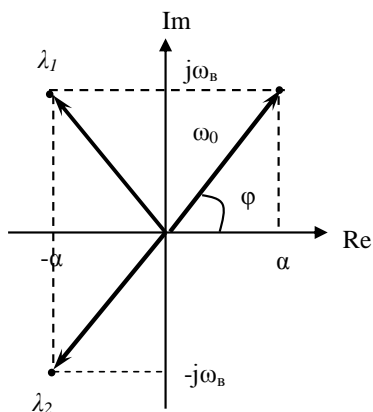


Рисунок 2.16

Коливальний розряд конденсатора буде мати місце, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені $\lambda_1 = -\alpha - j\omega_B$ та $\lambda_2 = -\alpha + j\omega_B$. Для подальших викладень у ряді випадків зручніше працювати з показниковою формою запису коренів. Це дозволяє відразу одержати одну гармонічну функцію при додаванні двох експонент із комплексними показниками.

Зобразимо корені характеристичного рівняння на комплексній площині (рис. 2.16). З рисунка 2.16 видно, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_B}{\alpha} \quad \text{та} \quad \omega_0 = \sqrt{\alpha^2 + \omega_B^2}.$$

Виразимо з одержаного рівняння ω_B

$$\omega_B = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Запишемо корені у показниковій формі з урахуванням рис. 2.16 та вище записаних формул

$$\lambda_1 = \omega_0 e^{j(\varphi + \pi)} \quad \text{і} \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = \omega_0 e^{-j(\varphi + \pi)}. \quad (2.39)$$

Показникова форма запису комплексних чисел необхідна для представлення коренів векторами.

Перепишемо рівняння (2.27) у вигляді

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0. \quad (2.40)$$

Введемо позначення

$$2\alpha = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Перепишемо корені рівняння (1.54)

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}.$$

Тоді за теоремою Вієта запишемо

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{LC} = \omega_0^2.$$

Далі перепишемо вирази (1.49) – (3.51) з урахуванням вище зазначеного:

$$u_C(t) = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \right),$$

$$u_L(t) = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \right), \quad i(t) = \frac{U_0}{L(\lambda_2 - \lambda_1)} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right).$$

У показники експонент цих виразів замість λ_1 та λ_2 запишемо їх вирази у алгебраїчному вигляді, а у інші місця у показниковій формі. З урахуванням показової форми запису коренів і того, що

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} - (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) = 2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = 2j\omega_B,$$

одержуємо вираз для напруги на ємності

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{U_0}{2j\omega_B} \left(\omega_0 e^{-j(\varphi+\pi)} e^{\alpha-j\omega_B t} - \omega_0 e^{j(\varphi+\pi)} e^{\alpha+j\omega_B t} \right) \\ &= \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \frac{e^{-j(\omega_B t + \varphi + \pi)} - e^{j(\omega_B t + \varphi + \pi)}}{2j}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Оскільки із тригонометрії добре відомо, що

$$\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} = \sin(x), \text{ то остаточно одержимо:}$$

$$u_C(t) = \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) \quad (2.42)$$

Перевіримо виконання закону комутації $u_C \stackrel{\sim}{=} U_0$ для отриманого співвідношення. Запишемо вираз для напруги на ємності при $t=0$:

$$u_C \stackrel{\sim}{=} \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 \sin \varphi.$$

З рис. 2.16 випливає, що $\sin \varphi = \frac{\omega_B}{\omega_0}$.

Якщо контур високодобротний, то $\omega_0 \approx \omega_B$ і $\varphi \approx 90^\circ$.

Аналогічним чином одержують вираз для струму $i(t)$ у контурі

$$i(t) = -\frac{U_0}{L\omega_B} e^{-\alpha t} \sin \omega_B t \quad (2.43)$$

та напруги на індуктивності $u_L(t)$:

$$u_L(t) = \frac{\omega_0}{\omega_B} U_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t - \varphi) \quad (2.44)$$

Якщо період синусоїди досить малий порівняно із часом згасання експоненти $e^{-\alpha t}$, то цю експоненту разом з коефіцієнтом, що стоїть перед нею, можна вважати обвідною швидко осцилюючої гармонійної функції. На рис. 2.17 наведено графічне подання отриманих виразів. Пунктиром позначена обвідна. Траси графіків, що нас цікавлять, побудовані у вигляді точок. $F(t)$ – огибаюча.

Криві зміни струму та напруги на індуктивності і на ємності являють собою загасаючі синусоїдальні функції з кутовою частотою власних коливань контуру ω і коефіцієнтом загасання α , причому частота та коефіцієнт загасання визначаються тільки параметрами RLC-кола. Зазначимо, що струм випереджає за фазою напругу на ємності та відстає від напруги індуктивності.

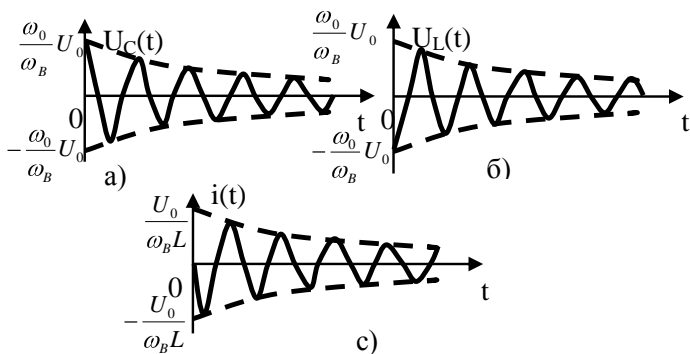


Рисунок 2.17

2.8.3 Граничний аперіодичний розряд конденсатора

Граничний аперіодичний розряд конденсатора має місце, якщо корені характеристичного рівняння дійсні та дорівнюють $\lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha$.

Для однакових коренів розв'язання однорідного диференціального рівняння (1.44) має вигляд

$$u_{C.B}(t) = u_C(t) = (A_3 + A_4 t) e^{-\alpha t}. \quad (2.45)$$

У цьому випадку ми константи шукати не будемо, а зробимо граничний перехід для виразу

$$u_C(t) = \frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t})$$

за правилом Лопітала за умови, що λ_2 наближається до λ_1 , диференціюванням чисельника та знаменника за змінною λ_1 :

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[\frac{U_0}{\lambda_2 - \lambda_1} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \right] = \\ &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[\frac{U_0}{(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{d}{d\lambda_1}} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) \frac{d}{d\lambda_1} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \left[\frac{U_0}{-1} (t\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \right] = U_0 (-t\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_1 t}) = \\
 &= U_0 (e^{\lambda_1 t} - t\lambda_1 e^{\lambda_1 t}) = U_0 (1 - t\lambda_1) e^{\lambda_1 t} = U_0 (1 + t\alpha) e^{-\alpha t}
 \end{aligned}$$

У результаті граничного переходу та з урахуванням того, що $\lambda_1 = -\alpha$ і $\alpha = \omega_0$, одержимо:

1) напругу на ємності

$$u_C(t) = U_0 (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}; \quad (2.46)$$

2) напругу на індуктивності

$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = U_0 e^{-\alpha t} (\alpha t - 1); \quad (2.47)$$

3) струм у колі

$$i(t) = -U_0 C t e^{-\alpha t}. \quad (2.48)$$

Графіки цих функцій мають вигляд, аналогічний до вищевказаного. Ніяких коливань не спостерігається, тому що втрати досить значні і заряд на ємності не встигає поміняти полярність. Можна здійснити самостійно граничний перехід для $u(t)$. Струм і напругу на L знаходять диференціюванням.

Проаналізувавши одержані вирази для випадків ввімкнення послідовного RLC-кола під постійну та гармонічну напругу слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

2.8.4 Ввімкнення RLC-кола під постійну напругу

Розглянемо ввімкнення коливального контуру під постійну напругу при нульових початкових умовах:

$$i(0-) = 0, \quad u_C(0-) = 0.$$

Диференціальне рівняння для кола для знаходження вільної складової струму буде мати вигляд

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (2.49)$$

З рівняння видно, що вимушена складова буде дорівнювати нулю:

$$i_{BIM} = 0.$$

Розглянемо випадок, якщо корені дійсні та різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Вигляд вільної складової буде визначатися виразом

$$i_B = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.50)$$

У одержаному рівнянні нам необхідно визначити сталі інтегрування A_1 та A_2 . Для цього продиференціюємо одержаний вираз для вільної складової струму за змінною t :

$$\frac{di_B}{dt} = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (2.51)$$

У загальному випадку для неоднорідного диференціального рівняння струм визначається вільною та вимушеною складовими $i(t) = i_{BIM} + i_B(t)$.

Але оскільки вимушена складова струму дорівнює нулю, то вільна складова струму дорівнює загальній складовій струму.

Використовуючи початкові значення та перший закон комутації, одержимо $i(0) = i(0-) = 0$.

Для визначення складової $\frac{di_B}{dt}$ надамо їй фізичного змісту

$$\frac{di_B}{dt} = \frac{L}{L} \frac{di_B}{dt} = L \frac{di_B}{dt} \frac{1}{L} = \frac{u_L}{L}. \quad (2.52)$$

Запишемо рівняння (1.65) у нульовий момент часу

$$u_L(0) + Ri(0) + u_C(0) + u_C(0) = E.$$

З урахуванням вищезазначених початкових умов маємо

$$u_L(0) = E.$$

Перепишемо умову (1.68) у нульовий момент часу

$$\left. \frac{di_B}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{E}{L}. \quad (2.53)$$

На підставі рівнянь (2.50), (2.51) та (2.53) запишемо систему рівнянь для визначення констант

$$\begin{cases} u_{C.B}(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \frac{du_{C.B}(t)}{dt} = B_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (2.54)$$

Перепишемо систему (2.54) у нульовий момент часу

$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2, \\ \frac{E}{L} = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2. \end{cases}$$

З одержаної системи знаходимо константи

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Запишемо вираз для струму у колі

$$i = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{E}{L(\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (2.55)$$

Запишемо вираз для напруги на ємності

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = E + \frac{E}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}). \quad (2.56)$$

Запишемо вираз для напруги на котушці індуктивності:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}). \quad (2.57)$$

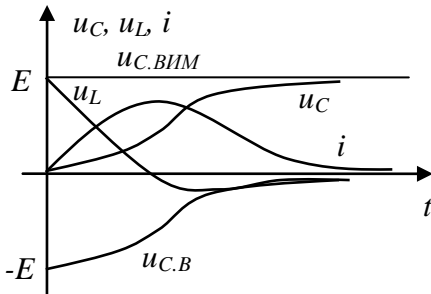


Рисунок 2.18

Графіки залежності отриманих величин від часу зображені на рис. 2.18.

Для випадку, якщо корені дійсні та рівні $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, за аналогією до попереднього випадку запишемо систему для визначення констант:

$$\begin{cases} i_B = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}, \\ \frac{di_B}{dt} = A_1 \lambda e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} + t A_2 \lambda e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (2.58)$$

Запишемо одержану систему у нульовий момент часу:

$$\begin{cases} 0 = A_1, \\ \frac{E}{L} = A_1 \lambda + A_2. \end{cases}$$

З одержаної системи знаходимо константи $A_1 = 0$, $A_2 = \frac{E}{L}$.

Запишемо вираз для струму у колі

$$i = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = 0 \cdot e^{\lambda t} + \frac{E}{L} t e^{\lambda t} = \frac{E}{L} t e^{\lambda t}. \quad (2.59)$$

Запишемо вираз для напруги на ємності:

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = E + E e^{\lambda t} (\lambda t - 1). \quad (2.60)$$

Запишемо вираз для напруги на котушці індуктивності:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = E(e^{\lambda t} + t \lambda e^{\lambda t}) = E e^{\lambda t} (1 + t \lambda). \quad (2.61)$$

Графіки залежності отриманих величин від часу зображені на рис. 2.19.

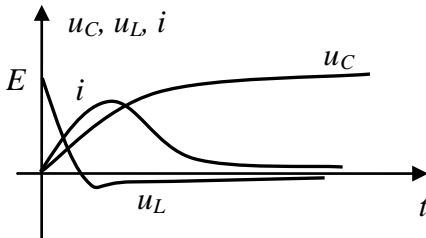


Рисунок 2.19

Для випадку, якщо корені комплексно-спряжені $\lambda_1 = -\alpha + j\omega$, $\lambda_2 = -\alpha - j\omega$, запишемо систему для визначення констант:

$$\begin{cases} i_B = A e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \\ \frac{di_B}{dt} = -A \alpha \lambda e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi) + A e^{-\alpha t} \omega \cos(\omega t + \varphi). \end{cases} \quad (2.62)$$

Запишемо одержану систему у нульовий момент часу:

$$\begin{cases} 0 = A \sin(\varphi), \\ \frac{E}{L} = -A \alpha \lambda \sin(\varphi) + A \omega \cos(\varphi). \end{cases}$$

З одержаної системи знаходимо константи $\varphi = 0$, $A = \frac{E}{\omega L}$.

Таким чином, запишемо вираз для струму у колі:

$$i_B = Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) = \frac{E}{\omega L} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t). \quad (2.63)$$

Запишемо вираз для напруги на ємності

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt + u_C(0) = E - E \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \psi). \quad (2.64)$$

Запишемо вираз для напруги на котушці індуктивності

$$u_L(t) = \frac{E\omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} (\sin(\omega_B t - \psi)). \quad (2.65)$$

Графіки залежності отриманих величин (2.63), (1.64) та (2.65) від часу зображені на рис. 2.20.

Як видно з рис. 2.20, струм та напруга на котушці індуктивності коливаються відносно нульового значення з різними початковими фазами. Напруга на ємності коливається навколо свого вимушеного значення E та не може перевищити $2E$. Вона досягає свого найбільшого значення приблизно через половину періоду після ввімкнення кола.

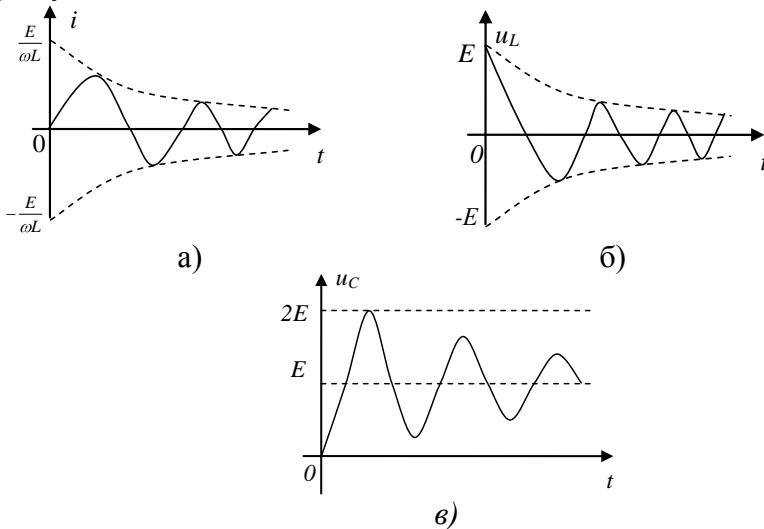


Рисунок 2.20

2.8.5 Ввімкнення RLC-кола під гармонічну напругу

Розглянемо ввімкнення коливального контуру під постійну напругу (рис. 1.16). Вхідна напруга буде мати вигляд

$$e \overset{\curvearrowright}{=} E_m \cos(\omega t + \varphi_e) \quad (2.66)$$

Запишемо характеристичне рівняння для кола:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad \text{або} \quad \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Далі все робимо, як і раніше, тобто розв'язок шукаємо у вигляді вимушеної та вільної складових $i = i_{ВИМ} + i_B$.

Вимушена складова визначається виразом

$$i_{ВИМ} \overset{\curvearrowright}{=} I_m \sin(\omega t + \varphi_i). \quad (2.67)$$

Оскільки характеристичне рівняння другого ступеня, то струм визначається таким виразом

$$i \overset{\curvearrowright}{=} I \cos(\omega t + \varphi_i) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.68)$$

де λ_1 і λ_2 – корінь характеристичного рівняння.

Для знаходження констант A_1 і A_2 необхідні дві початкові умови, які одержуються з законів комутації

$$i \overset{\curvearrowright}{=} i \overset{\curvearrowleft}{=} 0, \quad u(0) = e(0),$$

оскільки струму до підключення $e(t)$ в індуктивності не було, та система рівнянь

$$\begin{cases} 0 = I_m \sin \varphi_i + A_1 + A_2, \\ \frac{di}{dt} = -\omega I \cos(\omega t + \varphi_i) + \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (2.69)$$

Значення похідної при $t=0$:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{u_L}{L} \right|_{t=0} = \frac{e \overset{\curvearrowright}{=}}{L} = \frac{E \sin \varphi_e}{L}. \quad (2.70)$$

Підставимо одержані результати у вираз (2.69), ввівши для спрощення подальших викладень позначення:

$$B = -I \cos \varphi_i; \quad D = \frac{E \sin \varphi_e}{L} + \omega I_m \sin \varphi_i$$

$$\begin{cases} B = A_1 + A_2, \\ D = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему рівнянь

$$A_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{B\lambda_2 - D}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-B\lambda_2 + D}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Одержимо вираз для вільної складової струму:

$$i_B = \frac{B}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \right) + \frac{-D}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right). \quad (2.71)$$

Можна розглядати випадки, коли корені дійсні, кратні або комплексні. Для випадку, коли корені комплексні, одержуємо вираз для вільного струму

$$i_B = B \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) + D \cdot e^{-\alpha t} \frac{\sin \omega_B t}{\omega_B},$$

де D можна переписати у такому вигляді:

$$D = \frac{E}{L} \cos \varphi_e + \omega \frac{E}{|z|} \sin \varphi_i = \frac{E}{L} \left(\cos \varphi_e + \frac{\omega L}{|z|} \sin \varphi_i \right).$$

З урахуванням усього викладеного, одержуємо остаточний вираз для струму у контурі:

$$i(t) = I \cos(\omega_B t + \varphi_i) - I \cos \varphi_i \cdot \frac{\omega_0}{\omega_B} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_B t + \varphi) + \frac{E}{\omega_B L} \left(\cos \varphi_e + \frac{\omega L}{|z|} \sin \varphi_i \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_B t. \quad (2.72)$$

У деяких підручниках цей вираз спрощують, вважаючи, що при досить великій добротності $\frac{\omega_0}{\omega_B} \approx 1$ та $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.

Як впливає з вищеодержаних результатів, форма перехідного струму залежить від співвідношення ω , ω_B та ω_0 . Розглянемо деякі випадки.

1. Частота джерела збігається з резонансною частотою контуру $\omega = \omega_0 \approx \omega_B$.

Для цього випадку співвідношення для струму можна представити у такому вигляді:

$$i(t) = I \cos(\omega_B t + \varphi_i) + K_1 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_B t + \varphi) + K_2 \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega_B t =$$

$$= \underbrace{I \cos(\omega_B t + \varphi_i)}_a + \underbrace{K_3 \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_B t + \theta)}_b$$

Для нульового моменту часу $I \cos \varphi_i = -K_3 \cos \theta$, оскільки $i(0)=0$. Доданки **a** (вимушений режим) і **b** (вільний процес) останнього виразу можна зобразити векторами, кутові швидкості обертання яких однакові, але у вектора **b** довжина зменшується за законом $e^{-\alpha t}$. Проілюструємо це для різних моментів часу, де I_Σ - сума векторів (рис. 2.21).

Оскільки вектор **b** зменшується за законом $e^{-\alpha t}$, то результуючий вектор струму збільшується за законом $1 - e^{-\alpha t}$. Це по суті, і є закон зміни частотою з обвідною коливаний з частотою $\omega = \omega_B \approx \omega_0$. Можна показати, що форма обвідною не залежить від початкової фази.

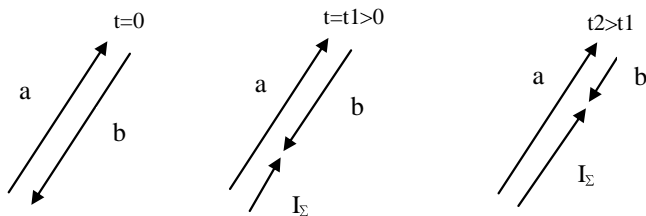


Рисунок 2.21

Останній вираз можна спростити, якщо врахувати, що $\omega = \omega_B \approx \omega_0$, $Z = R$ та $\varphi_i = \varphi_e$ (резонанс):

$$i(t) = I \cos(\omega_B t + \varphi_e) + I \cos \varphi_e \frac{\omega_0}{\omega_B} e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t + \varphi) +$$

$$+ \frac{E}{\omega \cdot L} \left(\cos \varphi_e + \frac{\omega \cdot L}{R} \sin \varphi_e \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_B t.$$

Розглянемо випадок, коли $\varphi_e = -\frac{\pi}{2}$, тоді одержимо такий вираз для струму

$$i(t) = I \cos\left(\omega_B t - \frac{\pi}{2}\right) - 0 + \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_B t.$$

Значення амплітуди струму на резонансній частоті

$$I = \frac{E}{R}.$$

Тоді одержуємо вираз для струму у найбільш спрощеному вигляді:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\alpha t}\right) \sin \omega_B t = I_m \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_k}}\right) \cdot \sin \omega_B t. \quad (2.72)$$

На рис. 2.22 зобразимо графік зміни струму у часі. Вигляд обвідної струму зображений на рис. 2.23.

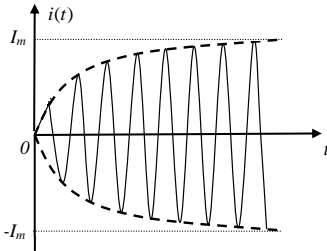


Рисунок 2.22

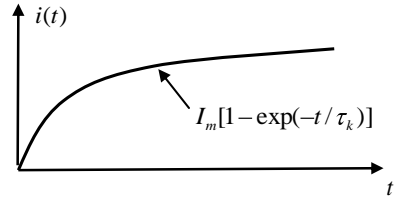


Рисунок 2.23

2 Частота джерела не збігається з резонансною частотою контуру: $\omega \neq \omega_0$, $\omega_0 \approx \omega_B$, але відмінність цих частот невелика (різниця $|\omega - \omega_0| = \Omega$ - невелика величина).

Тоді $i_B = I \cos(\omega t + \varphi_i)$, а $i_{ВИМ} = K_3 e^{-\alpha t} \cos(\omega_B t + \theta)$. Зобразимо ці складові векторами. Припустимо, що площина обертається за годинниковою стрілкою з частотою ω , причому $\omega < \omega_B$. Вектор $i' = i_B$ рухатися не буде, а вектор $i'' = i_{ВИМ}$ буде обертатися навколо нього з кутовою частотою Ω проти годинникової стрілки (вектор із частотою ω_B випереджає ω), і його довжина буде зменшуватися за законом $e^{-\alpha t}$. Для різних моментів часу із збільшенням часу t вектори вимушеної та вільної складових та сумарний вектор зображені на рис. 2.24.

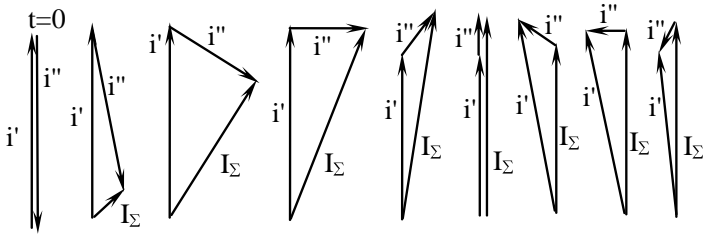


Рисунок 2.24

Для даного випадку форма струму у колі може мати вигляд, зображений на рис. 2.25.

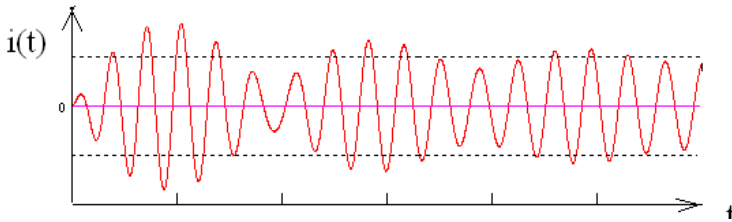


Рисунок 2.25

Розглянемо такий випадок. Вважаємо, що $\varphi_e = \pi/2$, тому $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ ($\varphi = \arctg \frac{\omega_B}{\alpha}$), $|\omega - \omega_B| = \Omega$ (невелика відмінність, тобто можна вважати, що $\omega / \omega_B \approx 1$). Початкова фаза вимушеного режиму буде така $\varphi_i = \varphi_e - \varphi_Z = \pi/2 - \varphi_Z$.

Оскільки припустили, що частоти відрізняються ненабагато, то, отже, повинні вийти биття коливань.

З урахуванням наведених співвідношень одержуємо таке:

$$i = -I \sin(\omega t - \varphi_Z) + I e^{-\alpha t} \sin(\omega_B t - \varphi_Z).$$

Якщо $\alpha = 0$, одержимо

$$i = 2 \cdot I_m \cdot \sin \frac{\omega_B - \omega}{2} t \cdot \cos \left(\frac{\omega + \omega_B}{2} t - \varphi_Z \right). \quad (2.73)$$

Якщо частоти ω та ω_b відрізняються незначно, то останнє співвідношення описує процес биття коливань (рис. 2.26).

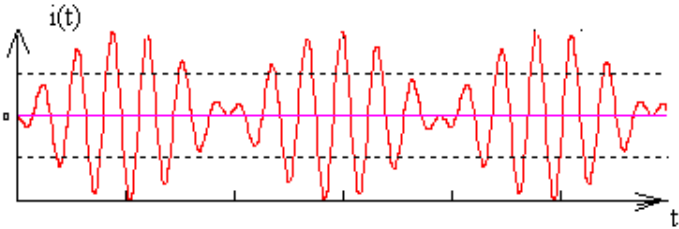


Рисунок 2.27

Проаналізувавши одержані вирази для випадків увімкнення послідовного RLC-кола під постійну та гармонічну напругу слід зазначити, що вигляд вільної складової від характеру вхідної напруги (постійна чи гармонічна) не залежить, а лише залежить від параметрів елементів кола.

2.9 Затання для самоперевірки

- 1 Записати перше рівняння Кірхгофа для найпростішого RL-кола.
- 2 Що таке RL-коло?
- 3 Виведіть характеристичне рівняння для RL-кола.
- 4 Що таке стала часу кола?
- 5 За який час загасає вільна складова?
- 6 Які загальні розв'язання рівняння у випадку RL-кола?
- 7 Записати сталу часу RL-кола.
- 8 Розкрити сутність геометричної інтерпретації сталої часу кола.
- 9 Яка особливість струму та напруги на резисторі?
- 10 Які особливості відключення RL-кола?
- 11 Які особливості включення RL-кола?
- 12 Як знаходити вимушену складову RL-кола при включенні кола під гармонічну напругу?

- 13 У якому випадку перехідний процес найбільш яскраво виражений? Чому?
- 14 Яке значення при включенні RL-кола під гармонічну напругу не зможе перевищити струм? Чому?
- 15 У якому випадку перехідного процесу немає? Чому?
- 16 Запишіть рівняння для аналізу перехідних процесів у найпростіших RC-колах класичним методом.
- 17 Що таке RC-коло?
- 18 Як одержати характеристичне рівняння RC-кола?
- 19 Записати сталу часу RC-кола.
- 20 Як визначається вимушена складова шуканої величини RC-кола при включенні її під гармонічну напругу?
- 21 Як визначається вільна складова шуканої величини RC-кола при включенні її під гармонійну напругу?
- 22 Записати вираз для знаходження струму та напруги на резисторі в RC-колі.
- 23 Що відбудеться із вимушеною та вільною складовими за відсутності початкового заряду конденсатора?
- 24 Пояснити, від чого залежить характер перехідного процесу.
- 25 Яка особливість RC-кола за наявності початкового заряду?
- 26 Опишіть процес вільного розряду конденсатора.
- 27 Записати друге рівняння Кірхгофа для коливального контуру. Які особливості розв'язання даного рівняння? Як розв'язати таке рівняння?
- 28 Які повинні бути корені характеристичного рівняння? Чому?
- 29 Запишіть загальний вираз для вільної складової у випадку дійсних коренів.
- 30 Запишіть загальний вираз для вільної складової у випадку рівних коренів.
- 31 Запишіть загальний вираз для вільної складової у випадку комплексно-спряжених коренів.
- 32 Як знаходять константи інтегрування?

- 33 Що таке аперіодичний розряд конденсатора і у яких випадках він має місце?
- 34 Що таке коливальний розряд конденсатора і у яких випадках він має місце?
- 35 У яких випадках відбувається граничний аперіодичний розряд конденсатора?

2.10 Завдання для самостійної роботи

2.1 Для RL-кола із сталою вхідною напругою одержати характеристичне рівняння та знайти його корені, якщо $R = 25$ Ом, $L = 50$, мГ.

2.2 Для RL-кола з постійною вхідною напругою знайти сталу часу кола τ , якщо:

- 1) $R = 100$ Ом, $L = 1$ мГ;
- 2) $R = 1$ кОм, $L = 1$ мГ;
- 3) $R = 10$ кОм, $L = 1$ мГ;
- 4) $R = 10$ Ом, $L = 1$ мГ.

2.3 Для RL-кола з постійною вхідною напругою знайти сталу часу кола τ , якщо:

- 1) $R = 100$ Ом, $L = 1$ Г;
- 2) $R = 100$ Ом, $L = 1$ мГ;
- 3) $R = 100$ Ом, $L = 1$ мкГ;
- 4) $R = 100$ Ом, $L = 1$ нГ.

2.4 Для RL-кола знайти вираз струму у колі, якщо на вхід діє постійна напруга $E = 10$ В, а параметри схеми такі: $R = 300$ Ом, $L = 50$ мГ, і побудувати його графік.

2.5 Для RL-кола з номіналами елементів $R = 850$ Ом і $L = 1.5$ мкГ графічним методом знайти сталу часу кола, якщо на вхід діє постійна напруга 10В.

2.6 Знайти вимушену складову струму в RL-колі з номіналами $R = 1.8$ кОм, $L = 70$ мГ, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 220\cos(300t + 45^\circ)$.

2.7 Записати вираз для струму в RL-колі з номіналами $R = 5 \text{ кОм}$, $L = 120 \text{ мГ}$ і побудувати його графік, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 110\cos(450t + 90^\circ)$.

2.8 Для RC-кола з постійною вхідною напругою одержати характеристичне рівняння та знайти його корені, якщо $R = 100 \text{ Ом}$, $C = 1 \text{ мФ}$.

2.9 Для RC-кола з постійною вхідною напругою знайти сталу часу кола τ , якщо:

- 1) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГ}$;
- 2) $R = 1 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГ}$;
- 3) $R = 10 \text{ кОм}$, $L = 1 \text{ мГ}$;
- 4) $R = 10 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГ}$.

2.10 Для RL-кола з постійною вхідною напругою знайти сталу часу кола τ , якщо:

- 1) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ Г}$;
- 2) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мГ}$;
- 3) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ мкГ}$;
- 4) $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 1 \text{ нГ}$.

2.11 Для RL-кола знайти вираз струму у колі, якщо на вхід діє постійна напруга $E = 10 \text{ В}$ та $R = 300 \text{ Ом}$, $L = 50 \text{ мГ}$, і побудувати його графіки.

2.12 Для RL-кола з номіналами елементів $R = 850 \text{ Ом}$ і $L = 1.5 \text{ мкГ}$ графічним методом знайти сталу часу кола, якщо на вхід діє постійна напруга 10 В .

2.13 Знайти вимушену складову струму у RL-колі з номіналами $R = 1.8 \text{ кОм}$, $L = 70 \text{ мГ}$, якщо на вхід діє гармонічна напруга $u(t) = 220\cos(300t + 45^\circ)$.

2.14 Записати вираз для струму у RL-колі з номіналами $R = 5 \text{ кОм}$, $L = 120 \text{ мГ}$ та побудувати його графік, якщо на вхід діє гармонічна напруга

$$u(t) = 110\cos(450t + 90^\circ).$$

РОЗДІЛ 3 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ З ОДНИМ РЕАКТИВНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

3.1 Загальні теоретичні положення

Теорія даного питання була розглянута в третьому розділі на прикладі найпростіших послідовних RL- та RC-кіл. У випадку розгалужених кіл з одним реактивним елементом використовуються результати розділі 3. Тому розгляд даного питання буде стислими.

Напруга на індуктивності та струм у конденсаторі визначаються за допомогою виразів (1.1) та (1.3).

Розглянемо теоретичні викладки, якщо диференціальне рівняння отримане щодо струму у котушці індуктивності i_L . Розв'язання щодо напруги на ємності u_C має такий самий характер, як і для струму у котушці індуктивності, тому його приводити не будемо. У процесі розв'язання системи одержуємо диференціальне рівняння 1-го порядку такого вигляду:

$$\frac{di}{dt}a + b = f(t). \quad (3.1)$$

Розв'язання однорідного диференціального рівняння 1-го порядку буде мати вигляд

$$i_L = i_{L,ВИМ} + i_{L,В}, \quad (3.2)$$

де $i_{L,ВИМ}$ – вимушена складова струму, що визначається видом джерела, $i_{L,В}$ – вільна складова.

Вимушену складову $i_{L,ВИМ}$ знаходимо для вихідної схеми після комутації на постійному струмі з урахуванням еквівалентності індуктивності замкненої ділянки кола, а ємності – розірваної ділянки кола на постійному струмі.

Для знаходження вільної складової струму неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку (3.1) перетворюють у

однорідне диференціальне рівняння, прирівнявши праву частину до нуля. Після чого для розв'язання одержаного рівняння вводять заміну для знаходження вільної складової:

$$\frac{di}{dt} = \lambda i. \quad (3.3)$$

І одержуємо характеристичне рівняння (праву частину прирівнюємо до нуля) вигляду

$$\lambda a + b = 0. \quad (3.4)$$

Знаходимо розв'язання характеристичного рівняння

$$\lambda = -\frac{b}{a}. \quad (3.5)$$

Запишемо загальний вираз для вільної складової

$$i_{L.B}(t) = Ae^{\lambda t}, \quad (3.6)$$

де A - константа інтегрування.

Константу інтегрування знаходять, записуючи в нульовий момент часу вираз (4.8)

$$i_{L.B}(0) = A. \quad (3.7)$$

Запишемо складові струми в котушці індуктивності в нульовий момент часу

$$i_L(0) = i_{L.BИМ}(0) + i_{L.B}(0). \quad (3.8)$$

Звідси виражаємо вільну складову

$$i_{L.B}(0) = i_L(0) - i_{L.BИМ}(0), \quad (3.9)$$

де $i_L(0) = i_L(0-)$ знаходимо із законів комутації.

Складову $i_L(0-)$ знаходимо з вихідної схеми до комутації на постійному струмі з урахуванням еквівалентності ємності і індуктивності на постійному струмі.

3.2 Приклади розв'язування задач

Приклад 3.1 Розрахувати всі струми та напруги у схемі, зображеній на рис. 3.1, у якій відбувається замикання ключа, якщо на вхід діє постійна напруга U .

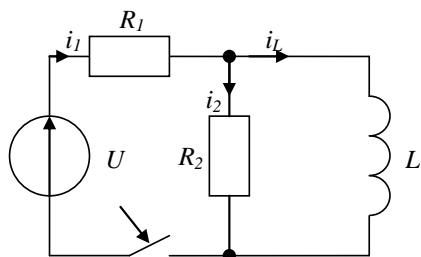


Рисунок 3.1

Розв'язання

Запишемо систему рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} U = i_1 R_1 + i_2 R_2, \\ 0 = u_L - i_2 R_2, \\ i_1 = i_2 + i_L. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь щодо струму i_L .

Запишемо напругу на котушці індуктивності через струм за формулою (3.2):

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

Для простоти математичних викладень змінну t опустимо, але будемо мати на увазі, що ці змінні залежать від t .

З 3-го рівняння системи виражаємо i_1 та підставляємо у 1-ше рівняння системи

$$U = R_1(i_2 + i_L) + R_2 i_2.$$

З 2-го рівняння системи виразимо i_2

$$i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

Підставимо i_2 в перетворене 1-ше рівняння системи та одержимо

$$U = R_1 i_L + L \frac{R_1 + R_2}{R_2} \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

Перетворимо дане рівняння:

$$\frac{di_L}{dt} \left[L \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right] + R_1 i_L = U.$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Розв'язання такого рівняння записується у вигляді

$$i_L = i_{L.BИM} + i_{L.B}.$$

Знайдемо вимушену складову

$$i_{L.BИИ} = \frac{U}{(R_1 + R_2)}.$$

Вільна складова знаходиться з розв'язання диференціального однорідного рівняння

$$R_1 i_{L.CB} + L \frac{R_1 + R_2}{R_2} \frac{di_{L.CB}}{dt} = 0.$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння

$$R_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} L \lambda = 0.$$

З отриманого характеристичного рівняння знаходимо корінь λ :

$$\lambda = -\frac{R_1 R_2}{L(R_2 + R_1)}.$$

Запишемо вираз для вільної складової

$$i_{L.B}(t) = A e^{\lambda t}.$$

Запишемо загальний вираз для вільної складової у довільний момент часу

$$i_L(t) = i_{L.BИИ}(t) + i_{L.B}(t).$$

Запишемо загальний вираз для вільної складової у нульовий момент часу

$$i_L(0) = i_{L.BИИ}(0) + i_{L.B}(0).$$

Виразимо звідси вільну складову

$$i_{L.B}(0) = i_L(0) - i_{L.BИИ}(0).$$

Підставимо у одержаний вираз значення вільної складової та вимушеної у нульовий момент часу:

$$A = i_L(0) - \frac{U}{R_1 + R_2}$$

На підставі першого закону комутації запишемо

$$i_L(0) = i_L(0-) = 0,$$

тому що коло розірване

З урахуванням вищевикладеного знайдемо константу A

$$A = 0 - \frac{U}{R_1 + R_2} = -\frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Тепер запишемо загальний вигляд для виразу струму

$$i_L(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} e^{\lambda t}.$$

Запишемо напругу на котушці індуктивності

$$\begin{aligned} U_L(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} \left[\frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} e^{\lambda t} \right] = \\ &= -L\lambda \frac{U}{R_1 + R_2} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Підставимо в отриманий вираз замість λ його значення:

$$U_L(t) = L \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} e^{\lambda t} = U \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} e^{\lambda t}.$$

Запишемо вираз для струмів:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_L}{R_2} = U \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} e^{\lambda t}, \\ i_1 &= i_2 + i_L = U \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} e^{\lambda t} + \frac{U}{R_1 + R_2} - \frac{U}{R_1 + R_2} e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Щоб побудувати графіки зміни величин струмів та напруг на елементах кола, задамося числовими значеннями параметрів схеми:

$$R_1 = 100 \text{ Ом}, R_2 = 300, L = 10 \text{ мГн}, U = 10 \text{ В}.$$

Графіки будемо будувати за допомогою програми Mathcad (рис. 3.2 – рис. 3.5).

Як видно з рис. 3.2, струм у котушці індуктивності збільшується до значення 0.025, що відповідає значенню вимушеного струму:

$$i_{L, \text{випн}} = \frac{U}{(R_1 + R_2)} = \frac{10}{100 + 300} = 0.025 \text{ A.}$$

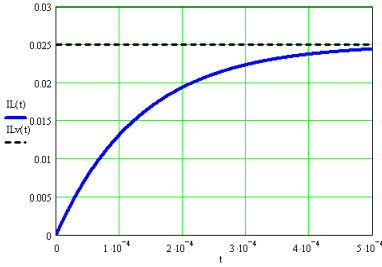


Рисунок 3.2

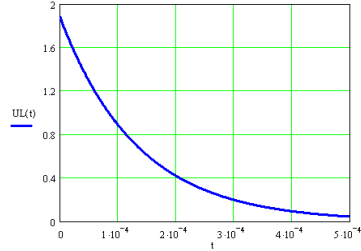


Рисунок 3.3

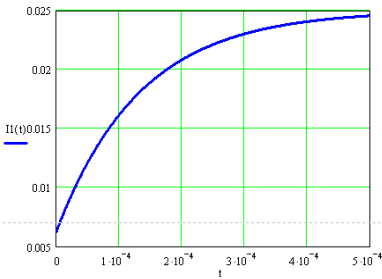


Рисунок 3.4

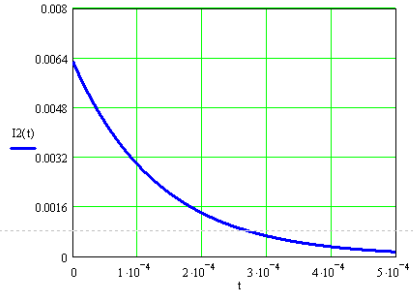


Рисунок 3.5

Приклад 3.2 Одержати всі струми та напруги у колі, що зображене на рис. 3.6, у якому відбувається замикання ключа.

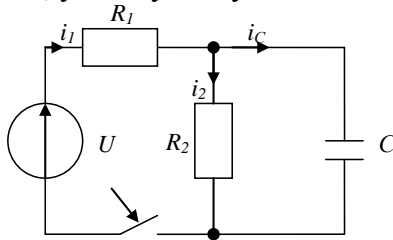


Рисунок 3.6

Розв'язання

Складаємо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа для вихідної схеми (рис. 3.6):

$$\begin{cases} U = i_1 R_1 + i_2 R_2, \\ 0 = u_C - i_2 R_2, \\ i_1 = i_2 + i_C. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему щодо напруги на ємності u_C .

Запишемо струм на ємності через напругу за формулою (4.1)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

З 2-го рівняння системи виражаємо i_2 :

$$i_2 = \frac{u_C}{R_2}.$$

З 1-го рівняння системи виражаємо i_1 та підставляємо в нього вираз для i_2

$$i_1 = \frac{1}{R_1} [U - i_2 R_2] = \frac{1}{R_1} [U - \frac{u_C}{R_2} R_2] = \frac{1}{R_1} [U - u_C].$$

Підставимо отримані i_2 , i_C і i_1 в 3-тє рівняння:

$$\frac{1}{R_1} [U - u_C] = \frac{u_C}{R_2} + C \frac{du_C}{dt}.$$

Перетворимо отримане рівняння

$$C \frac{du_C}{dt} + u_C \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right] = \frac{U}{R_1}.$$

Одержали неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Розв'язання даного рівняння записується у вигляді

$$u_C = u_{C.ВИМ} + u_{C.В}.$$

Знайдемо вимушену складову напруги $u_{C.ВИМ}$:

$$u_{C.ВИМ} = i_{1.ВИМ} R_2 = \frac{U R_2}{R_1 + R_2},$$

де $i_{1.ВИМ}$ - це вимушене значення струму, що проходить через перший опір.

Значення вимушеного струму $i_{1.ВИМ}$ визначається

$$i_{1.ВИМ} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Вільну складову напруги $u_{C.B}$ знаходимо з розв'язання лінійного однорідного рівняння, для цього в неоднорідному лінійному рівнянні прирівнюємо до нуля праву частину.

Розв'яжемо отримане однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Для цього запишемо характеристичне рівняння з урахуванням такого:

$$\frac{du_C}{dt} = \lambda u_C.$$

Одержуємо характеристичне рівняння

$$C\lambda + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) = 0.$$

Звідки знаходимо корінь характеристичного рівняння

$$\lambda = -\frac{1}{C} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right] = -\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}.$$

Запишемо загальний вираз вільної складової для нашого кола:

$$u_{C.B} = Ae^{\lambda t}.$$

Запишемо загальний вираз для напруги на конденсаторі

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + Ae^{\lambda t}.$$

Для знаходження константи А запишемо останнє рівняння в нульовий момент часу

$$u_C(0) = u_{C.ВИМ} + A.$$

Складову $u_C(0)$ знаходимо із другого закону комутації

$$u_C(0) = u_C(0-) = U,$$

тому що коло розірване до комутації.

Тепер запишемо вираз для константи інтегрування А

$$A = U - u_{C.ВНМ} = U - \frac{UR_2}{R_1 + R_2} = U \left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) = \\ = U \left(\frac{R_1 + R_2 - R_2}{R_1 + R_2}\right) = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Тепер запишемо остаточний вираз для напруги

$$u_C(t) = \frac{UR_2}{R_1 + R_2} + U \frac{R_1}{R_1 + R_2} e^{\lambda t} = \frac{U}{R_1 + R_2} (R_2 + R_1 e^{\lambda t}).$$

Знайдемо струм на ємності

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d}{dt} \left[\frac{U}{R_1 + R_2} (R_2 + R_1 e^{\lambda t}) \right] = \\ = -C \frac{U}{R_1 + R_2} R_1 \lambda e^{\lambda t}.$$

З урахуванням виразу для λ одержуємо

$$i_C(t) = -C \frac{U}{R_1 + R_2} R_1 \left(-\frac{R_1 + R_2}{CR_1 R_2}\right) e^{\lambda t} = \frac{U}{R_2} e^{\lambda t}.$$

Запишемо струм на резисторі R_2 :

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_C}{R_2} = \frac{U}{R_2(R_1 + R_2)} (R_2 + R_1 e^{\lambda t}).$$

Запишемо струм на резисторі R_1 :

$$i_1 = i_2 + i_C = \frac{U}{R_2(R_1 + R_2)} (R_2 + R_1 e^{\lambda t}) + \frac{U}{R_2} e^{-\lambda t}.$$

Щоб побудувати графіки зміни величин струмів та напруг на елементах кола, задамося числовими значеннями параметрів схеми:

$$R_1 = 100 \text{ Ом}, R_2 = 300, C = 10 \text{ мкФ}, U = 10 \text{ В}.$$

Графіки будемо будувати за допомогою програми Mathcad (рис. 3.7 – рис. 3.10).

Як видно з рис. 3.7, напруга на конденсаторі зменшується до значення 7.5, що відповідає значенню вимушеної напруги

$$u_{C.ВНМ} = \frac{UR_2}{(R_1 + R_2)} = \frac{10 \cdot 300}{100 + 300} = 7.5 \text{ А}.$$

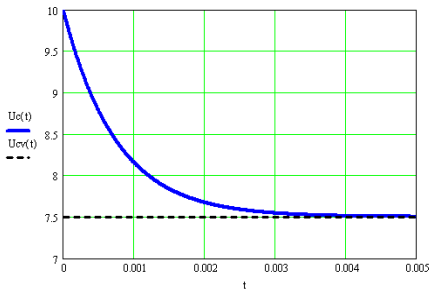


Рисунок 3.7

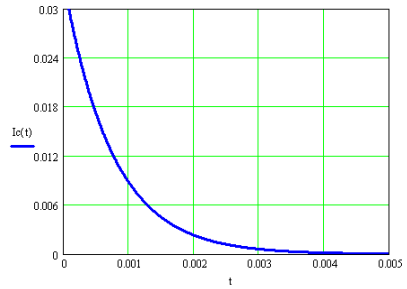


Рисунок 3.8

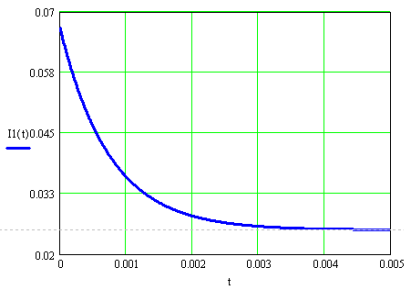


Рисунок 3.9

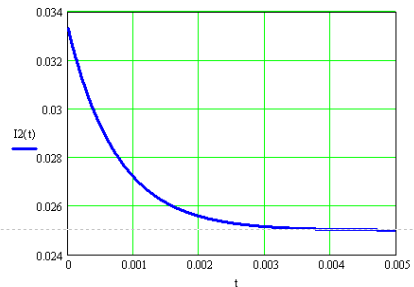


Рисунок 3.10

3.3 Запитання для самоперевірки

- 1 Які особливості аналізу перехідних процесів у розгалужених лінійних схемах із одним реактивним елементом?
- 2 Який вигляд диференціального рівняння для розгалужених схем з одним реактивним елементом?
- 3 Як знайти вимушену складову для розгалужених схем з одним реактивним елементом?
- 4 Як знайти вільну складову для розгалужених схем з одним реактивним елементом?
- 5 Які особливості знаходження константи інтегрування?

3.4 Завдання для самостійної роботи

3.1 Розрахувати перехідний процес та одержати вираз для всіх струмів і напруг для схем, що зображені на рис. 3.11 та рис. 3.12, якщо на вхід діє постійна напруга U :

а) вихідні дані: $Z_1 = X_C$, $Z_2 = R_1$, $Z_3 = R_2$, $Z_4 = R_3$;

б) вихідні дані: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = X_C$, $Z_3 = R_2$, $Z_4 = R_3$;

в) вихідні дані: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = X_C$, $Z_4 = R_3$;

в) вихідні дані: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = R_3$, $Z_4 = X_C$.

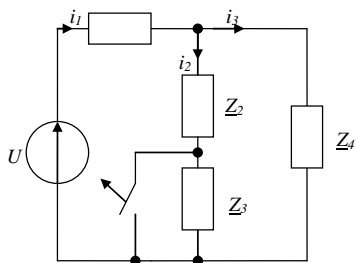


Рисунок 3.11

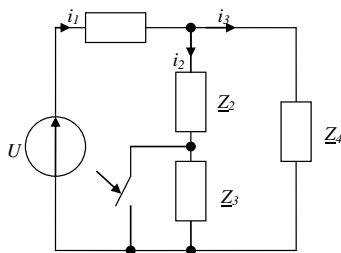


Рисунок 3.12

3.2. Розрахувати перехідний процес та одержати вираз для всіх струмів і напруг для схем, що зображені на рис. 3.11 та рис. 3.12, якщо на вхід діє постійна напруга U :

а) вихідні дані: $Z_1 = X_L$, $Z_2 = R_1$, $Z_3 = R_2$, $Z_4 = R_3$;

б) вихідні дані: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = X_L$, $Z_3 = R_2$, $Z_4 = R_3$;

в) вихідні дані: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = X_L$, $Z_4 = R_3$;

в) вихідні дані: $Z_1 = R_1$, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = R_3$, $Z_4 = X_L$.

3.3. Розв'язати задачу 3.1, якщо на вхід діє гармонічне джерело напруги та побудувати графіки шуканих величин, якщо:

а) $U = u(t) = 180\sin(300t + 45^\circ)$ В, $Z_1 = R_1 = 30$ Ом, $Z_2 = R_2 = 4$ Ом, $Z_3 = R_3 = 6$ Ом, $Z_4 = X_C$, $C = 0.9$ мФ;

б) $U = u(t) = 110\cos(180t + 45^\circ)$ В, $Z_1 = R_1 = 50$ Ом, $Z_2 = R_2 = 7$ Ом, $Z_3 = R_3 = 3$ Ом, $Z_4 = X_C$, $C = 0.1$ мкФ.

3.4 Розв'язати задачу 3.2, якщо на вхід діє гармонійне джерело напруги, та побудувати графіки шуканих величин:

а) $U = u(t) = 180\sin(300t + 45^\circ)$ В, $Z_1 = R_1 = 30$ Ом, $Z_2 = R_2 = 4$ Ом, $Z_3 = R_3 = 6$ Ом, $Z_4 = X_L$, $L = 0.9$ мГ;

б) $U = 110\cos(180t + 45^\circ)$ В, $Z_1 = R_1 = 50$ Ом, $Z_2 = R_2 = 7$ Ом, $Z_3 = R_3 = 3$ Ом, $Z_4 = X_L$, $L = 0.5$ мГ.

3.5 Розв'язати задачу 3.1 та побудувати графіки шуканих величин, якщо на вхід діє постійна напруга $U = 10$ В, $Z_1 = R_1 = 80$ Ом, $Z_4 = R_2 = 15$ Ом, $Z_2 = X_{C1}$, $C_1 = 6$ мкФ, $Z_3 = X_{C2}$, $C_2 = 3$ мкФ.

3.6 Розв'язати задачу 3.2 та побудувати графіки шуканих величин, якщо на вхід діє постійна напруга $U = 10$ В, $Z_1 = R_1 = 80$ Ом, $Z_4 = R_2 = 15$ Ом, $Z_2 = X_{L1}$, $L_1 = 60$ мГ, $Z_3 = X_{L2}$, $L_2 = 30$ мГ.

3.7 Для схеми, що зображена на рис. 3.13 з номіналами елементів $E_1 = 80$ В, $E_2 = 160$ В, $L = 50$ мГн, $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 60$, розрахувати струми i_1 , i_2 , i_3 і побудувати їх графіки, якщо:

- а) ключ замикається;
- б) ключ розмикається.

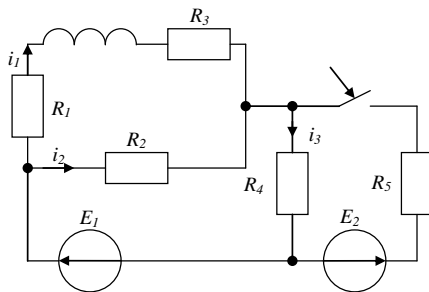


Рисунок 3.13

3.8 Для схеми, зображеної на рис. 3.14, що має значеннями номіналів елементів: $R_1 = 37 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $C = 3 \text{ мкФ}$, розрахувати напругу на конденсаторі, знайти час перехідного процесу та сталу часу кола при замкненому та розімкненому ключі. Побудувати графік зміни напруги на конденсаторі у часі, якщо:

- а) $U(t) = 12 \text{ В}$;
- б) $U(t) = 12 \sin(318t + 30^\circ) \text{ В}$;
- в) $U(t) = 15 \cos(220t + 45^\circ) \text{ В}$.

3.9 Для схеми, показаної на рис. 3.15, що має значення елементів: $R_1 = 150 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ кОм}$, $R_3 = 100 \text{ Ом}$, $L = 100 \text{ мГ}$, розрахувати напругу на конденсаторі та знайти час перехідного процесу, сталу часу кола при замиканні та розмиканні ключа. Побудувати графік зміни напруги на конденсаторі у часі, якщо:

- а) $U(t) = 8 \text{ В}$;
- б) $U(t) = 25 \sin(180t + 30^\circ) \text{ В}$;
- в) $U(t) = 30 \cos(290t + 45^\circ) \text{ В}$.

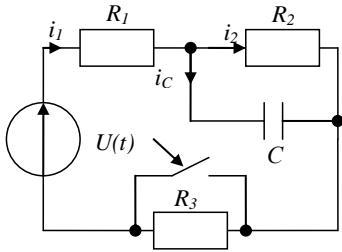


Рисунок 3.14

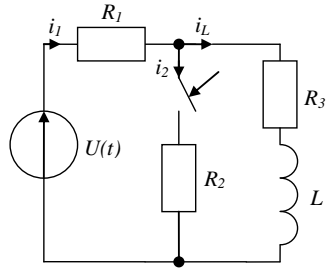


Рисунок 3.15

3.10 Для схеми, зображеної на рис. 3.16, що має значення елементів: $R_1 = 580 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$, $C = 0.5 \text{ мкФ}$, для випадку замкненого та розімкненого ключа знайти напругу і струм на ємності, а також час перехідного процесу, якщо на вхід діє:

- 1) постійна напруга $E(t) = 20 \text{ В}$;

2) гармонічна напруга $E(t) = 50\sin(150t + 45^\circ)$.

3.11 Для схеми, зображеної на рис. 3.17, у випадку замкненого та розімкненого ключа знайти час перехідного процесу, розрахувати всі струми і напруги у колі при такі номіналах елементів $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $C = 10 \text{ мкФ}$, якщо:

1) $E(t) = 22\text{В}$;

2) $E(t) = 50\cos(350t + 90^\circ)\text{В}$.

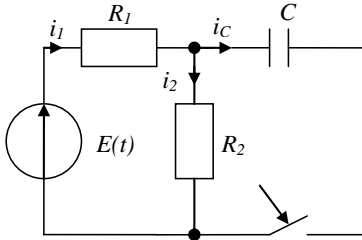


Рисунок 3.16

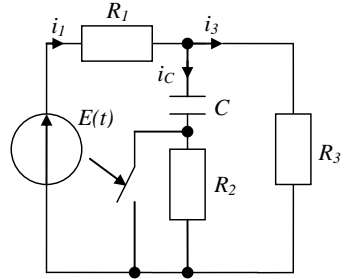


Рисунок 3.17

3.12 Розрахувати всі струми і напруги, а також побудувати їх графіки, знайти час перехідного процесу для схеми, зображеної на рис. 3.18 під час замикання та розмикання ключа, якщо $R_1 = 250 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ кОм}$, $C = 0.1 \text{ мкФ}$, якщо:

1) $e(t) = 8\text{В}$;

2) $e(t) = 20\sin(150t + 50^\circ)\text{В}$.

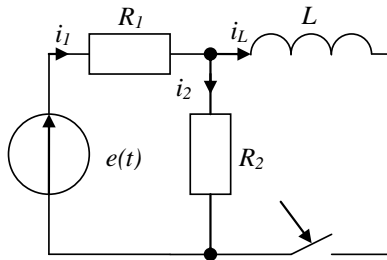


Рисунок 3.18

РОЗДІЛ 4 КЛАСИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ У РОЗГАЛУЖЕНИХ КОЛАХ ІЗ ДВОМА РЕАКТИВНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Класичний метод розрахунку рекомендується застосовувати для схем, що мають не більше двох реактивних елементів. Інші пояснення розглядаються на прикладах схем другого порядку.

При розрахунку перехідних процесів у розгалужених колах із двома реактивними елементами класичним методом спочатку необхідно скласти систему рівнянь, що буде описувати вхідну схему. Система рівнянь складається щодо шуканої змінної та розв'язується за допомогою характеристичного рівняння. Після знаходження коренів характеристичного рівняння записуємо вираз для шуканої величини через вимушену та вільну складові, і після цього знаходимо ці складові.

4.1 Методи складання характеристичного рівняння

При складанні характеристичного рівняння, використовуються закони комутації та відомі методи розрахунку лінійних електричних кіл. У цьому розділі розглянемо деякі з них.

4.1.1 Метод складання характеристичного рівняння на підставі законів Кірхгофа

При використанні даного методу складаємо систему рівнянь для кола, отриманого після комутації на підставі законів Кірхгофа. На підставі 1-го закону Кірхгофа записується сума струмів, що входять у вузол, а на підставі 2-го закону Кірхгофа записується сума спадання напруг в обраному контурі. Вибираємо змінну, щодо якої розв'язуємо систему рівнянь. Як таку змінну рекомендується вибирати струм у котушці індуктивності i_L або напруга на конденсаторі u_C , тому що для цих змінних можна використати закони комутації та надавати фізичного змі-

сту похідним цих функцій $\frac{di_L(t)}{dt}$ та $\frac{du_C(t)}{dt}$ при визначенні сталих інтегрування.

У результаті розв'язання системи рівнянь одержимо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку:

$$a \frac{d^2 i_L}{dt^2} + b \frac{di_L}{dt} + d i_L = f_1(t), \quad (4.1)$$

$$a \frac{d^2 u_C}{dt^2} + b \frac{du_C}{dt} + d u_C = f_2(t), \quad (4.2)$$

де a , b , d – сталі коефіцієнти, що залежать від вигляду схеми і її параметрів, а $f_1(t)$, $f_2(t)$ – зовнішній вплив на коло.

Далі для знаходження вільної складової записуємо однорідне диференціальне рівняння. Для цього праву частину нашого неоднорідного диференціального рівняння прирівнюємо до нуля:

$$a \frac{d^2 i_L}{dt^2} + b \frac{di_L}{dt} + d i_L = 0, \quad (4.3)$$

$$a \frac{d^2 u_C}{dt^2} + b \frac{du_C}{dt} + d u_C = 0. \quad (4.4)$$

За отриманим однорідним диференціальним рівнянням складається характеристичне рівняння, для якого визначаються корені (λ):

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} = \lambda^2 i_L(t), \quad \frac{d i_L(t)}{dt} = \lambda i_L(t), \quad (4.5)$$

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = \lambda^2 u_C(t), \quad \frac{d u_C(t)}{dt} = \lambda u_C(t). \quad (4.6)$$

Після такої заміни з рівнянь (4.3) та (4.4) одержуємо квадратне рівняння вигляду

$$a\lambda^2 + b\lambda + d = 0. \quad (4.7)$$

Корені рівняння визначаються за формулою

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ad}}{2a}. \quad (4.8)$$

Приклад 4.1. Для схеми, наведеної на рис. 4.1, одержати характеристичне рівняння класичним методом за допомогою законів Кірхгофа. У схемі діє постійна напруга E .

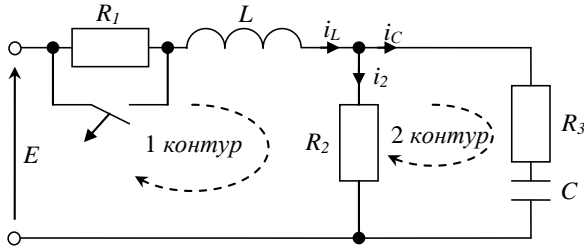


Рисунок 4.1

Розв'язання

Вибираємо в колі, зображеному на рис. 4.1, додатні напрямки проходження струмів у гілках. Далі вибираємо напрямки обходу контурів.

Запишемо систему рівнянь, що описує дану схему на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа, після комутації:

$$\begin{cases} E = i_L R_1 + L \frac{di_L}{dt} + i_2 R_2, \\ 0 = i_C R_3 + \frac{1}{C} \int i_C dt - i_2 R_2, \\ i_L = i_C + i_2. \end{cases}$$

З 1-го рівняння системи виражаємо i_2 :

$$i_2 = \frac{1}{R_2} (E - i_L R_1 - L \frac{di_L}{dt}).$$

З 3-го рівняння системи виражаємо i_C :

$$i_C = i_L - i_2.$$

Підставимо i_2 і i_C в 2-ге рівняння системи:

$$0 = (i_L - \frac{1}{R_2}(E - i_L R_1 - L \frac{di_L}{dt}))R_3 + \\ + \frac{1}{C} \int (i_L - \frac{1}{R_2}(E - i_L R_1 - L \frac{di_L}{dt}))dt - (\frac{1}{R_2}(E - i_L R_1 - L \frac{di_L}{dt}))R_2.$$

Після спрощення одержуємо таке рівняння:

$$\frac{di_L}{dt} [\frac{LR_3}{R_2} + L] + i_L [R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} + \frac{L}{CR_2} + R_1] + \frac{1}{C} \int i_L dt [1 + \frac{R_1}{R_2}] = \\ = \frac{R_3}{R_2} E + E.$$

Помножимо отримане рівняння на CR_2 та продиференціюємо його за t :

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} [LC(R_3 + R_2)] + \frac{di_L}{dt} [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L] + \\ + i_L (R_2 + R_1) = 0.$$

Одержали диференціальне рівняння другого порядку.

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 [LC(R_3 + R_2)] + \lambda [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L] + (R_2 + R_1) = 0.$$

Для спрощення введемо таку заміну:

$$a = LC(R_3 + R_2), \quad b = C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L, \quad d = R_2 + R_1.$$

Після заміни одержуємо

$$\lambda^2 a + \lambda b + d = 0.$$

Корені одержаного характеристичного рівняння знаходять таким способом:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ad}}{2a}.$$

4.1.2 Складання характеристичного рівняння методом контурних струмів

При використанні методу контурних струмів для складання системи рівнянь, що описує вихідну схему, вибираємо позитивні напрямки контурних струмів і складаємо систему рівнянь.

У кожному обраному контурі записуємо суму напруг через контурний струм. Далі розв'язуємо систему рівнянь відносно одного з контурних струмів. Після того як одержимо вираз для одного з контурних струмів, можна зробити заміну на шуканий струм. У підсумку одержуємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Приклад 4.2. Для схеми, зображеної на рис. 4.2, скласти характеристичне рівняння методом контурних струмів. У схемі діє постійна напруга E .

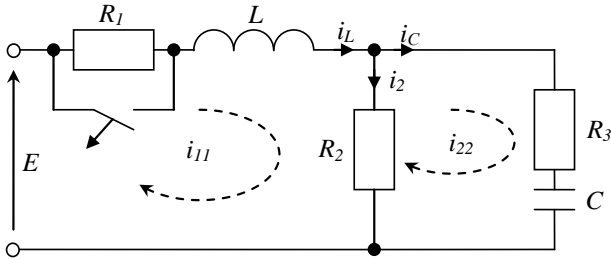


Рисунок 4.2

Розв'язання

Складемо систему рівнянь, що описує дану схему, за допомогою методу контурних струмів, після комутації. Оскільки в схемі є два контури, то позначимо контурні струми в першому та другому контурах відповідно i_{11} і i_{22} :

$$\begin{cases} i_{11}R_1 + L \frac{di_{11}}{dt} + (i_{11} - i_{22})R_2 = E, \\ i_{22}R_3 + \frac{1}{C} \int i_{22} dt - (i_{11} - i_{22})R_2 = 0. \end{cases}$$

Виразимо з 1-го рівняння системи i_{22} :

$$i_{22} = \frac{1}{R_2} [i_{11}(R_1 + R_2) + L \frac{di_{11}}{dt} - E].$$

Підставимо i_{22} в 2-ге рівняння системи:

$$i_{22}(R_3 + R_2) + \frac{1}{C} \int i_{22} dt - i_{11} R_2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{R_2} [i_{11}(R_1 + R_2) + L \frac{di_{11}}{dt} - E] \right) (R_3 + R_2) +$$

$$+ \frac{1}{C} \int \left(\frac{1}{R_2} [i_{11}(R_1 + R_2) + L \frac{di_{11}}{dt} - E] \right) dt - i_{11} R_2 = 0.$$

Після спрощення одержуємо таке рівняння

$$LC(R_3 + R_2) \frac{di_{11}}{dt} + i_{11} [C(R_3 + R_2)(R_1 + R_2) + L - R_2^2 C] +$$

$$+ (R_1 + R_2) \int i_{11} dt = E \frac{R_3 + R_2}{R_2},$$

$$LC(R_3 + R_2) \frac{di_{11}}{dt} + i_{11} [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_3 R_1) + L] +$$

$$+ (R_1 + R_2) \int i_{11} dt = E \frac{R_3 + R_2}{R_2}.$$

Щоб позбутися знака інтеграла, продиференціюємо дане рівняння за змінною t та одержимо таке рівняння:

$$LC(R_3 + R_2) \frac{d^2 i_{11}}{dt^2} + \frac{di_{11}}{dt} [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_3 R_1) + L] +$$

$$+ i_{11} (R_1 + R_2) = 0.$$

Оскільки $i_{11} = i_L$, то після заміни одержуємо таке рівняння

$$LC(R_3 + R_2) \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{di_L}{dt} [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_3 R_1) + L] +$$

$$+ i_L (R_1 + R_2) = 0.$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням другого порядку.

Запишемо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 [LC(R_3 + R_2)] + \lambda [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L] + (R_2 + R_1) = 0,$$

Введемо таку заміну:

$$a = LC(R_3 + R_2), \quad b = C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L, \quad d = R_2 + R_1.$$

Одержимо спрощене характеристичне рівняння

$$\lambda^2 a + \lambda b + d = 0.$$

Отже, як видно, одержане характеристичне рівняння є таким самим, як і у прикладі 5.1, оскільки ми розглядаємо одну і ту ж схему.

4.1.3 Складання характеристичного рівняння методом вузлових напруг

При складанні характеристичного рівняння методом вузлових напруг опори перераховуємо в провідності та складаємо систему рівнянь для даної схеми методом вузлових потенціалів після комутації. У кожному обраному контурі записується сума струмів через потенціали (напруги). Далі система рівнянь розв'язується відносно одного з потенціалів (напруги). Після того як одержимо вираз для одного з потенціалів (напруг), можна зробити заміну на шукану напругу. У підсумку одержуємо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

Приклад 4.3 Для схеми, наведеної на рис. 4.1 скласти характеристичне рівняння методом вузлових напруг. У схемі діє постійна напруга $E = 10$ В.

Розв'язання

Зобразимо схему рис. 4.1 після комутації (рис. 4.3).

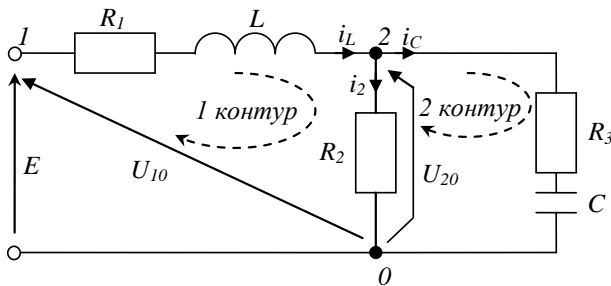


Рисунок 4.3

Знайдемо струми та напруги за допомогою методу вузлових потенціалів. Для цього нумеруємо вузли схеми 1, 2, 0 (рис. 5.3). Вихідна схема має два контури, тому вибираємо позитивний напрямок цих струмів: $I_I = i_L$, $I_{II} = i_L - i_C - i_2$, де I_I – алгебраїчна сума струмів, що входить у вузол 1, I_{II} – алгебраїчна сума струмів, що входить у вузол 2. Запишемо систему рівнянь у матричному вигляді

$$[I] = [\underline{Y}] \cdot [U]. \quad (4.9)$$

Розпишемо докладніше отримане матричне рівняння для вихідної схеми:

$$\begin{bmatrix} I_I \\ I_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 + \underline{Y}_L & -(g_1 + \underline{Y}_L) \\ -(g_1 + \underline{Y}_L) & g_1 + \underline{Y}_L + g_2 + g_3 + \underline{Y}_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

де $g_1 = \frac{1}{R_1}$, $g_2 = \frac{1}{R_2}$, $g_3 = \frac{1}{R_3}$ – провідності активних опорів,

$\underline{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}$ – провідність індуктивності, $\underline{Y}_C = j\omega C$ – провідність

ємності, U_{10} та U_{20} – вузлові напруги.

Тепер з отриманої системи нам необхідно знайти струми I_I і I_{II} з урахуванням того, що $U_{10} = E$, а $U_{20} = (I_I - I_{II})R_2$. У такий спосіб маємо систему рівнянь із двома невідомими.

4.2 Визначення вимушеної складової

У випадку дії в колі джерела постійної напруги вимушена складова може визначатися двома способами.

Перший спосіб полягає в тому, що необхідно прирівняти до нуля всі похідні диференціального рівняння і з отриманого рівняння знайти вимушену складову струму в котушці індуктивності або напруги на ємності.

Другий спосіб полягає в тому, що необхідно для післякомутаційної схеми записати значення шуканої величини $i_{L.ВИМ}$

($i_{C.BИM}$) за допомогою закону Ома на постійному струмі з урахуванням того, що ємність на постійному струмі еквівалентна розриву кола в місці її включення, а індуктивність L еквівалентна замиканню кола в місці включення.

Дано визначення вимушеної складової струму або напруги шуканої величини.

Вимушена складова – це складова на постійному струмі після комутації в колі (замиканні або розмиканні ключа).

Приклад 4.4 Для схеми із прикладу 4.1 (рис. 4.1), знайти вимушену складову струму у котушці індуктивності, якщо на вхід діє постійна напруга E .

Розв’язання

Розглянемо схему, зображену на рис. 5.1. Спочатку необхідно скласти систему рівнянь одним зі способів, зазначених вище (прикладі 5.1 - 5.3). Потім систему рівнянь перетворюємо в диференціальне рівняння другого порядку. Скористаємося результатом прикладу 5.1 і запишемо отримане диференціальне рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} [LC(R_3 + R_2)] + \frac{di_L}{dt} [C(R_3 R_2 + R_1 R_2 + R_1 R_3) + L] + i_L (R_2 + R_1) = 0.$$

Тепер, щоб визначити вимушену складову, необхідно всі похідні прирівняти до нуля, а в правій частині записати напругу джерела живлення E . Тоді одержуємо таке

$$i_L (R_2 + R_1) = E.$$

Звідси виражаємо струм у котушці індуктивності i_L , що і буде дорівнювати вимушеній складовій струму в котушці індуктивності:

$$i_L = i_{L.BИM} = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Приклад 4.5 Знайти вимушену складову струму у котушці індуктивності $i_{L.ВИМ}$ та напругу на ємності $u_{C.ВИМ}$ для схеми із прикладу 4.1. (схема з рис. 4.1), якщо на вхід діє постійна напруга E .

Розв'язання

Оскільки вимушена складова струму або напруги - це складова на постійному струмі, то зобразимо схему для кращого розуміння процесу розрахунку вимушених складових (рис. 5.3) на постійному струмі після комутації (рис. 4.4) з урахуванням того, що індуктивність на постійному струмі еквівалентна закоротці, а ємність – розриву у місці її включення.

Запишемо вимушену складову струму у котушці індуктивності, тобто складову значення постійного струму у котушці індуктивності після комутації:

$$i_{L.ВИМ} = \frac{E}{R_1 + R_2}.$$

Запишемо вимушену складову напруги на ємності з урахуванням того, що в другій гілці коло розірване через конденсатор і струму в ній немає $u_{C.ВИМ} = u_{2.ВИМ}$,

$$u_{C.ВИМ} = i_{L.ВИМ} R_2.$$

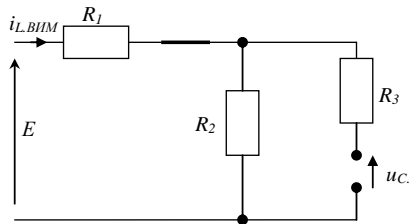


Рисунок 4.4

Приклад 4.6 Для схеми, зображеної на рис. 4.5, знайти вимушену складову струму кола $i_{L.ВИМ}$ та напруги на конденсаторі $u_{C.ВИМ}$, якщо на вхід діє постійна напруга U .

Розв'язання

Знайдемо вимушену складову струму в котушці індуктивності. $i_{L,ВИМ} = 0$, оскільки після комутації (розмикання ключа) коло розірване в місці знаходження ключа, а також схема розірвана (рис. 4.6) на постійному струмі через конденсатор (конденсатор постійної складової струму не пропускає).

Знайдемо вимушену складову напруги на ємності $u_{C,ВИМ} = U$, оскільки струму в колі немає, а напруга на конденсаторі за другим законом комутації стрибком змінитися не може і тому дорівнює напрузі джерела живлення.

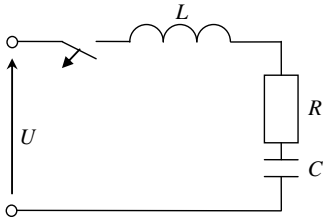


Рисунок 4.5

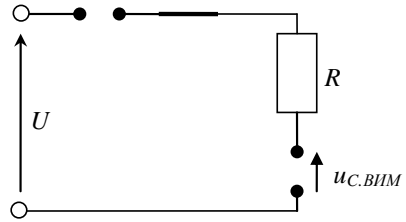


Рисунок 4.6

Приклад 4.7 Для схеми, зображеної на рис. 4.7, розрахувати вимушені складові струму $i_{L,ВИМ}$ і напруги $u_{C,ВИМ}$, якщо на вхід діє постійна напруга E .

Розв'язання

Оскільки вимушена складова - це складова на постійному струмі після комутації, то зобразимо схему на постійному струмі після комутації (рис. 4.8).

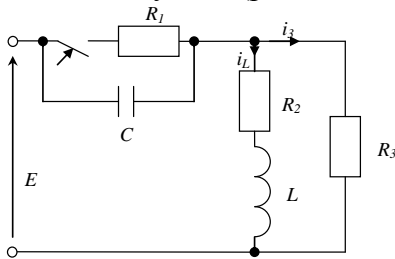


Рисунок 4.7

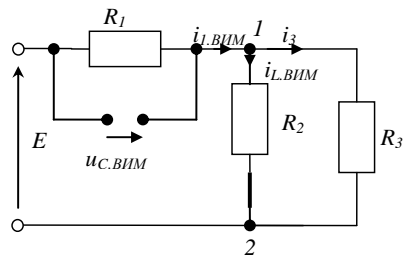


Рисунок 4.8

Знайдемо вимушену складову струму в котушці індуктивності $i_{L.ВИМ}$:

$$i_{L.ВИМ} = \frac{u_{12.ВИМ}}{R_2} .$$

Знайдемо напругу $u_{12.ВИМ} = i_{1.ВИМ} R_{23}$, де $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

Знайдемо вимушену складову струму $i_{1.ВИМ}$:

$$i_{1.ВИМ} = \frac{E}{R_1 + R_{23}} .$$

Знайдемо вимушену складову напруги на конденсаторі:

$$u_{C.ВИМ} = u_{1.ВИМ} = i_{1.ВИМ} R_1 .$$

Приклад 4.8 Для схеми, наведеної на рис. 4.9, розрахувати вимушені складові струму в котушці індуктивності $i_{L.ВИМ}$ та напруги на ємності $u_{C.ВИМ}$, якщо на вхід кола діє постійна напруга U .

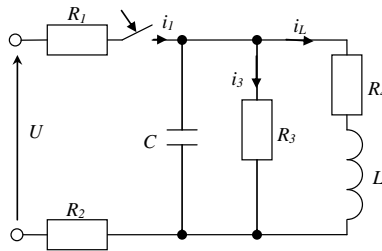


Рисунок 4.9

Розв'язання

Зобразимо схему на постійному струмі після комутації (рис. 4.10).

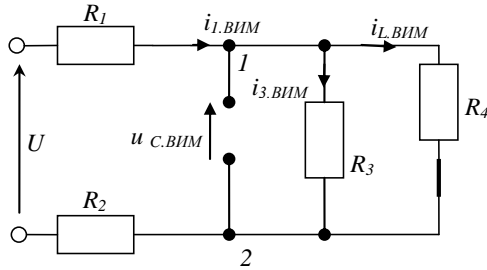


Рисунок 4.10

Знайдемо вимушену складову струму в котушці індуктивності $i_{L.BIM}$:

$$i_{L.BIM} = \frac{u_{12.BIM}}{R_4} .$$

Знайдемо вимушену складову напруги $u_{12.BIM}$:

$$u_{12.BIM} = i_{1.BIM} R_{34} , \text{ де } R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} .$$

Знайдемо вимушену складову струму

$$i_{1.BIM} = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_{34}} .$$

Знайдемо змушену складову напруги на ємності

$$u_{C.BIM} = u_{12.BIM} .$$

4.3 Знаходження вільної складової

За виглядом коренів λ (4.8) характеристичного рівняння (4.7) визначається аналітичний вираз для вільної складової струму на котушці індуктивності $i_{L.B}$ або напруги на ємності $u_{C.B}$.

Приклад 4.9 Знайти вирази для вільних складових струму у котушці індуктивності до комутації $i_{L.B}$ та напруги на ємності $u_{C.B}$, якщо на вхід діє постійна напруга E , для схеми, зображеної на рис. 4.11.

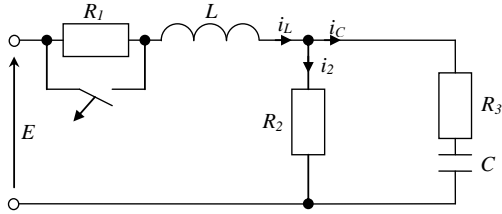


Рисунок 4.11

Розв'язання

Запишемо вираз для струму у котушці індуктивності у довільний момент часу

$$i_L(t) = i_{L.BИM} + i_{L.B}(t).$$

Запишемо одержаний вираз у нульовий момент часу $t = 0$:

$$i_L(0) = i_{L.BИM} + i_{L.B}(0).$$

Виразимо звідси вільну складову струму у котушці індуктивності

$$i_{L.B}(0) = i_L(0) - i_{L.BИM} = i_L(0-) - i_{L.BИM},$$

$i_L(0) = i_L(0-)$ на підставі законів комутації.

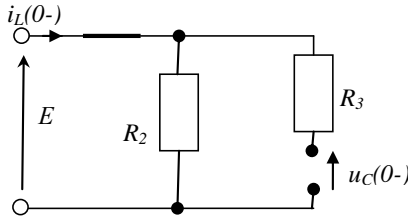


Рисунок 4.12

Знайдемо вираз для струму в котушці індуктивності до комутації на постійному струмі. Для цього зобразимо схему на постійному струмі до комутації (рис. 4.12). У другій гілці одержаної схеми коло розірване через конденсатор на постійному струмі

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_2}.$$

Постійна складова напруги на ємності до комутації

$$u_C(0-) = i_L(0-)R_2.$$

Цей вираз справедливий, оскільки через гілку, у якій стоїть конденсатор, постійний струм не проходить, тому що ємність на постійному струмі еквівалентна розриву кола в місці її знаходження.

Аналогічно

$$u_{C.B}(0) = u_C(0) - u_{C.BИМ} = u_C(0-) - u_{C.BИМ}.$$

Значення вимушених складових визначено в прикладі 4.5 для цієї схеми.

Приклад 4.10 Знайти значення вільних складових струму в котушці індуктивності $i_L(0-)$ та напруги на ємності $u_C(0-)$ на постійному струмі до комутації для схеми із прикладу 4.6 (рис. 4.5).

Розв'язання

Значення вільної складової струму на котушці індуктивності на постійному струмі

$$i_{L.B}(0) = i_L(0) - i_{L.BИМ} = i_L(0-) - i_{L.BИМ}.$$

Значення $i_{L.BИМ}$ було знайдено у прикладі 5.6. Знайдемо значення вимушеної складової струму у котушці індуктивності до комутації

$i_L(0-) = 0$, оскільки коло розірване за постійним струмом через ємність.

Знайдемо значення вимушеної складової напруги на ємності до комутації

$$u_C(0-) = U, \text{ тому що коло розірване.}$$

За виглядом коренів характеристичного рівняння так само відрізняються і способи знаходження часу перехідного процесу. Нагадаємо, що під часом перехідного процесу розуміється час, за який перехідний процес закінчується.

У результаті розв'язання характеристичного рівняння (4.7) знаходять корені, які визначають вигляд виразу для вільної складової шуканої змінної. Розглянемо три випадки окремо.

1 Корені дійсні, від'ємні та нерівні.

У такому випадку вільна складова струму буде мати вигляд

$$i_{L.B}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Сталі інтегрування A_1 та A_2 визначаються аналогічно до того, як вони були визначені у розділі для послідовного коливального контуру.

Таким чином, одержали систему рівнянь

$$\begin{cases} i_{L.B}(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \\ \frac{di_{L.B}(t)}{dt} = A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Запишемо одержану систему в нульовий момент часу

$$\begin{cases} i_{L.B}(0) = A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2. \end{cases} \quad (4.12)$$

Необхідно знайти значення струму у котушці індуктивності $i_{L.B}(0)$ та його похідної $\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0}$ для нульового моменту часу

безпосередньо на підставі рівнянь, складених за законами Кірхгофа з урахуванням законів комутації. Але також значення похідної можна визначити, надаючи їй фізичного змісту, звідки одержуємо:

$$\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = h. \quad (4.13)$$

або

$$\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = g. \quad (4.14)$$

Тепер наше завдання зводиться до знаходження $u_L(0)$ або $i_C(0)$ у момент комутації на постійному струмі. Для цього запишемо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа у момент комутації та звідти з урахуванням законів комутації знаходимо величину $u_L(0)$ або $i_C(0)$.

У результаті одержуємо таку систему для струму у котушці індуктивності:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = i_{L.B}(0), \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = h. \end{cases} \quad (4.15)$$

та систему, якщо змінною є напруга на ємності:

$$\begin{cases} B_1 + B_2 = u_{C.B}(0), \\ B_1\lambda_1 + B_2\lambda_2 = g. \end{cases} \quad (4.16)$$

Після розв'язання систем (5.16) та (5.17) знаходимо значення констант:

$$A_1 = \frac{i_{L.B}(0)\lambda_2 - h}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{i_{L.B}(0)\lambda_1 - h}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad (4.17)$$

та

$$B_1 = \frac{u_{C.B}(0)\lambda_2 - g}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad B_2 = \frac{u_{C.B}(0)\lambda_1 - g}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (4.18)$$

Все це буде аналогічно для напруги на конденсаторі u_C , тому ці викладення опустимо.

2 Граничний випадок аперіодичного розряду конденсатора

Граничний випадок аперіодичного розряду конденсатора має місце, якщо корені характеристичного рівняння (4.7) дійсні та рівні ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Розглянемо все відносно струму у котушці індуктивності. У цьому випадку вільна складова має вигляд

$$i_{L.B}(t) = A_1 e^{\lambda \cdot t} + t A_2 \cdot e^{\lambda \cdot t}.$$

У цьому виразі необхідно знайти константи інтегрування A_1 та A_2 . Таким чином, для двох констант інтегрування необхідно мати два рівняння. Для того щоб одержати друге рівняння, продиференціюємо перше за змінною t :

$$\frac{di_{L.B}(t)}{dt} = A_1 \lambda e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} + t A_2 \lambda e^{\lambda t}.$$

Таким чином, одержимо систему для розрахунку констант

$$\begin{cases} i_{L.B}(t) = A_1 e^{\lambda t} + t A_2 e^{\lambda t}, \\ \frac{di_{L.B}(t)}{dt} = A_1 \lambda e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} + t A_2 \lambda e^{\lambda t}. \end{cases} \quad (4.19)$$

Запишемо систему (5.20) у нульовий момент часу ($t = 0$)

$$\begin{cases} i_{L.B}(0) = A_1, \\ \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = A_1 \lambda + A_2. \end{cases} \quad (4.20)$$

Усе інше записується аналогічно до попереднього випадку. Тоді константи будуть мати вигляд:

$$A_1 = i_{L.B}(0), \quad A_2 = h - i_{L.B} \lambda. \quad (4.21)$$

3 Періодичний (коливальний) розряд конденсатора

Періодичний (коливальний) розряд конденсатора буде, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені.

Розглянемо два випадки.

1. Корені рівняння (4.7) мають вигляд

$$\begin{aligned} i_{L.B}(t) &= e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \sin(\omega_0 t)], \\ u_{C.B}(t) &= e^{-\alpha t} [B_1 \cos(\omega_0 t) + B_2 \sin(\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Перетворення виконаємо для виразу $i_{L.B}(t)$, оскільки перетворення для $U_{C.B}(t)$ будуть такими самими.

Для визначення констант інтегрування A_1 та A_2 необхідно мати два рівняння. Для того щоб одержати друге рівняння, продиференціюємо вираз для струму $i_{L.B}(t)$ за змінною t

$$\frac{di_{L.B}(t)}{dt} = \delta e^{\alpha t} (A_1 C + A_2 S) + e^{\delta t} \cdot (-A_1 \omega_0 S + A_2 \omega_0 C),$$

де $C = \cos(\omega_0 t)$ та $S = \sin(\omega_0 t)$.

Таким чином, одержали систему рівнянь

$$\begin{cases} i_{L.B}(t) = e^{-\alpha t} [A_1 C + A_2 S], \\ \frac{di_{L.B}(t)}{dt} = \delta e^{\alpha t} (A_1 C + A_2 S) + e^{\delta t} \cdot (-A_1 \omega_0 S + A_2 \omega_0 C), \end{cases} \quad (4.22)$$

Запишемо систему у нульовий момент часу $t = 0$

$$\begin{cases} i_{L.B}(0) = A_1, \\ \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = \alpha A_1 + A_2 \omega_0. \end{cases} \quad (4.23)$$

Звідси знаходимо шукані константи

$$A_1 = i_{L.B}(0), \quad A_2 = \frac{h - \alpha i_{L.B}(0)}{\omega_0}. \quad (4.24)$$

2. Корені рівняння (4.7) мають такий вигляд:

$$i_{L.B}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$u_{C.B}(t) = B e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \gamma).$$

Перетворення виконаємо для виразу $i_{L.B}(t)$, оскільки перетворення для $u_{C.B}(t)$ будуть такими самим.

Для визначення констант інтегрування A_1 та A_2 необхідно мати два рівняння. Для того щоб одержати друге рівняння, про диференціюємо вираз для струму $i_{L.B}(t)$ за змінною t :

$$\frac{di_{L.B}(t)}{dt} = -A \alpha e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A e^{-\alpha t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким чином, одержимо систему для розрахунку констант

$$\begin{cases} i_{L.B}(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ \frac{di_{L.B}(t)}{dt} = -A \alpha \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + A e^{-\alpha t} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{cases} \quad (4.25)$$

Запишемо систему у нульовий момент часу $t = 0$

$$\begin{cases} i_{L.B}(0) = A \sin(\varphi), \\ \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = -A\alpha \sin(\varphi) + A\omega_0 \cos(\varphi). \end{cases} \quad (4.26)$$

У одержаній системі рівнянь невідомими є константа A та кут φ , які необхідно знайти.

Приклад 4.11 Для схеми, зображеної на рис. 4.13, розрахувати всі струми і напруги у колі з постійною вхідною напругою U .

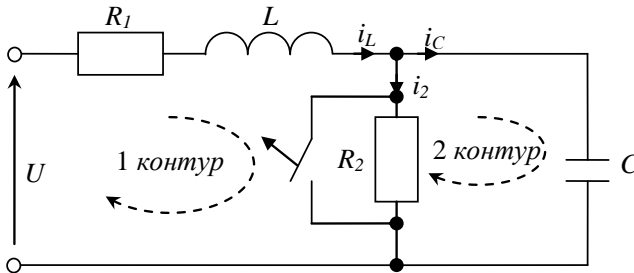


Рисунок 4.13

Розв'язання

Складаємо рівняння на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа для схеми після комутації. Запишемо систему рівнянь щодо напруги на ємності з урахуванням того, що $i_C = C \frac{du_C}{dt}$,

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} :$$

$$\begin{cases} U = i_L R_1 + L \frac{di_L}{dt} + i_2 R_2, \\ 0 = u_C - i_2 R_2, \\ i_L = i_2 + C \frac{du_C}{dt}. \end{cases}$$

Одержали систему інтегрально-диференціальних рівнянь, що розв'язується щодо шуканої змінної. Нехай у нашому випад-

ку шуканою змінною буде величина напруги на конденсаторі u_C .

Опишемо процес розв'язання даної системи. З 2-го рівняння системи виражаємо u_C . Підставимо отримане u_C у третє рівняння системи. Тепер з отриманого 3-го рівняння виражаємо i_L та підставляємо в 1-ше рівняння. У результаті одержуємо диференціальне рівняння 2-го порядку

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} [LCR_2] + \frac{du_C}{dt} [CR_1 R_2 + L] + [R_1 + R_2] u_C = f_2.$$

Таким чином, одержали неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку. Далі для знаходження коренів рівняння запишемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 [LCR_2] + \lambda [CR_1 R_2 + L] + [R_1 + R_2] = 0,$$

$$\lambda^2 a_2 + \lambda b_2 + d_2 = 0,$$

де $a_2 = LCR_2$, $b_2 = CR_1 R_2 + L$, $d_2 = R_1 + R_2$.

Розв'язком одержаного характеристичного рівняння є

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + u_{C.B}(t).$$

Знаходимо вимушені складові, тобто складову на постійному струмі після комутації.

Вимушена складова струму у котушці індуктивності визначається

$$i_{L.ВИМ} = \frac{U}{R_1 + R_2}.$$

Вимушена складова напруги на котушці індуктивності визначається

$$u_{C.ВИМ} = i_{L.ВИМ} R_2.$$

Знайдемо вільну складову:

$$u_{C.B}(t) = u_C(t) - u_{C.ВИМ},$$

$$u_{C.B}(0) = u_C(0) - u_{C.ВИМ}.$$

За другим законом комутації

$$u_C(0) = u_C(0-).$$

Знайдемо значення струму у котушці індуктивності $i_L(0-)$ до комутації на постійному струмі

$$i_L(0-) = \frac{U}{R_1}.$$

Знайдемо значення $u_C(0-)$ до комутації на постійному струмі

$$u_C(0-) = U - i_L(0-)R_1.$$

Запишемо вираз для вільної складової, у випадку якщо корені не рівні і дійсні

$$u_{C.B}(t) = B_1 e^{\lambda_1 t} + B_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Тепер для знаходження константи B_1 та B_2 . запишемо систему у нульовий момент часу

$$\begin{cases} u_{C.B}(0) = B_1 + B_2, \\ \left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0} = B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2. \end{cases}$$

Тут нам необхідно знайти $\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0}$, звідки маємо $\frac{i_C(0)}{C}$.

Отже, тепер необхідно знайти струм у котушці індуктивності $i_C(0)$. Для цього записуємо систему рівнянь на підставі законів Кірхгофа на постійному струмі у момент комутації:

$$\begin{cases} i_L(0)R_1 + u_L(0) + i_2(0)R_2 = U, \\ u_C(0) - i_2(0)R_2 = 0, \\ i_L(0) = i_2(0) + i_C(0). \end{cases}$$

З отриманої системи знаходимо $i_C(0)$

$$i_C(0) = i_L(0) - i_2(0) = i_L(0) - \frac{u_C(0)}{R_2}.$$

Значення $i_L(0)$ та $u_C(0)$ визначають із законів комутації:

$$i_L(0) = i_L(0-), \quad u_C(0) = u_C(0-), \quad u_C(0) = i_L(0-)R_2.$$

Далі розв'язуємо нашу систему, з якої знаходимо коефіцієнти B_1 та B_2 . Потім записуємо загальний вираз для шуканої величини $u_C(t)$:

$$u_C(t) = u_{C.ВИМ} + B_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + B_2 e^{\lambda_2 \cdot t}.$$

Далі знаходимо інші шукані величини:

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}, \quad u_2(t) = u_C(t), \quad i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2},$$

$$i_L(t) = i_2(t) + i_C(t),$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}, \quad u_1(t) = i_L(t) R_1.$$

Після чого будемо графіки функцій шуканих величин.

4.4 Особливості розрахунку перехідних процесів при дії джерела гармонічної напруги

4.4.1 Визначення вільної складової

Рівняння, що визначають будь-яку змінну кола, у загальному випадку містять дві складові: вимушену та вільну.

Вільна складова визначається розв'язанням однорідного диференціального рівняння, отже, її вигляд не залежить від виду джерела, що діє у колі. Це впливає з того, що однорідне диференціальне рівняння одержуємо з неоднорідного, прирівнюючи праву його частину до нуля. У правій частині і стоїть вхідна напруга. Тому вигляд виразу для вільної складової при дії в колі джерел постійної та змінної напруги однаковий і має вигляд відповідно до формул (4.9) - (4.12) залежно від вигляду коренів характеристичного рівняння.

4.4.2 Визначення вимушеної складової

Вимушена складова будь-якої змінної кола залежить від джерела, що діє в колі. Розрахунок її при дії джерела синусоїдальної форми рекомендується здійснювати в комплексній формі.

Якщо на вхід кола діє гармонічна напруга виду

$$e(t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \varphi_E),$$

то запишемо $e(t)$ у комплексній формі:

$$\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \exp(j\varphi_E).$$

Тепер струм у колі будемо шукати за допомогою закону Ома у комплексній формі

$$I = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = \frac{E e^{j\varphi_E}}{\underline{Z}} = \frac{E e^{j\varphi_E}}{\sqrt{Z} e^{j\varphi_Z}} = \frac{E}{\sqrt{Z}} \exp(\varphi_E - \varphi_Z) = I \exp(\varphi_I) = I,$$

$$\text{де } \sqrt{Z} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{Z}) + \operatorname{Im}^2(\underline{Z})}, \quad \varphi_Z = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{X}{R}\right).$$

Звідси запишемо значення вимушеної складової струму, виходячи з одержаних результатів:

$$i_{ВИМ}(t) = I \sin(\omega t + \varphi_I). \quad (4.28)$$

4.4.3 Визначення початкових умов

Для визначення початкових умов розраховуються значення струму котушки індуктивності та напруги на конденсаторі у комплексній формі до комутації:

$$\dot{I}_L = I_L e^{j\varphi_I}, \quad \dot{U}_C = U_C e^{j\varphi_U}.$$

Потім знайдені значення змінних записуються у синусоїдальній формі

$$i_L(t) = I_L \sin(\omega t + \varphi_I), \quad u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \varphi_U).$$

У отримані вирази підставляється $t=0$:

$$i_L(0-) = I_L \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_I) = I_L \sin(\varphi_I),$$

$$u_C(0-) = U_C \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_U) = U_C \sin(\varphi_U).$$

4.4.4 Визначення констант інтегрування

Запишемо повний вираз шуканого струму, наприклад, на котушці індуктивності для розгалуженого кола із двома реактивними елементами, у якому відбувається перехідний процес:

$$i_L(t) = i_{L.BИМ}(t) + i_{L.B}(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_I) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4.29)$$

Для визначення констант інтегрування необхідно одержати ще одне рівняння, оскільки в нас дві невідомі. Для цього продиференціюємо вираз (4.29) за змінною t та одержимо

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -I_m \omega \cos(\omega t + \varphi_I) + A_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (4.30)$$

Запишемо отриману систему рівнянь для знаходження констант A_1 і A_2 у момент часу $t = 0$

$$\begin{cases} i_L(0) = I_m \sin(\varphi_I) + A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = -I_m \omega \cos(\varphi_I) + A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2. \end{cases} \quad (4.31)$$

Тепер для розв'язання отриманої системи рівнянь необхідно знати значення виразу для $i_L(0)$ та $\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0}$.

Ці значення знаходять із початкових умов. Для цього запишемо систему рівнянь для нашого кола на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа або за допомогою методу контурних струмів для постійного струму.

Виразу $\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0}$ надаємо фізичного змісту та одержуємо

$$\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L}.$$

Приклад 4.12 Знайти струм у котушці індуктивності i_L , якщо на вхід кола діє гармонічна напруга вигляду $u(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$ для схеми, зображеної на рис. 4.14.

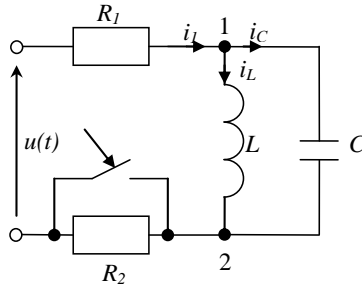


Рисунок 4.14

Розв'язання

1 Знайдемо складову струму у котушці індуктивності та напругу на ємності до комутації.

Для цього застосуємо метод комплексних амплітуд. Спочатку знаходимо повний комплексний опір кола до комутації:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{3AG}(0-) &= R_1 + R_2 + \frac{(jx_L) \cdot (-jx_C)}{jx_L - jx_C} = R_1 + R_2 + \frac{x_L x_C}{j(x_L - x_C)} = \\ &= R_1 + R_2 - j \frac{x_L x_C}{(x_L - x_C)} = R_{3AG} + jX_{3AG}. \end{aligned}$$

Запишемо вираз для входної напруги в алгебраїчній формі запису комплексного числа:

$$U = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \varphi),$$

що відповідає

$$\dot{U} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \exp(j\varphi) = \text{Re}(\dot{U}) + j \text{Im}(\dot{U}) = U_a + jU_p.$$

Знайдемо струм на резисторі R_1 до комутації:

$$\dot{I}_1(0-) = \frac{U_m}{\underline{Z}_{3AG}} = \frac{U_a + jU_p}{R_{3AG} + jX_{3AG}} = I_a + jI_p.$$

Знайдемо опір у точках 1-2:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{(jx_L) \cdot (-jx_C)}{jx_L - jx_C} = \frac{x_L \cdot x_C}{jx_L - jx_C} = \frac{-j \cdot x_L \cdot x_C}{x_L - x_C} = jX_{12}.$$

Знайдемо напругу на цій ділянці до комутації:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{12}(0-) &= \underline{Z}_{12} \dot{I}_1(0-) = (jX_{12}) \cdot (I_a + jI_p) = \\ &= U_{a,12} + jU_{p,12}.\end{aligned}$$

Тоді напруга на котушці індуктивності до комутації буде дорівнювати напрузі до комутації

$$\dot{U}_L(0-) = \dot{U}_{12}(0-) = U_{a,12} + jU_{p,12} = U_{a,L} + jU_{p,L}.$$

Знайдемо значення струму до комутації

$$\dot{I}_L(0-) = \frac{\dot{U}_L(0-)}{jX_L} = I_{a,L} + jI_{p,L},$$

що у часовій області відповідає

$$i_L(t) = I_L \sin(\omega t + \varphi_{I_L}).$$

Знайдемо значення струму у котушці індуктивності у нульовий момент часу $t = 0$ до комутації:

$$i_L(0-) = I_L \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_{I_L}) = I_L \sin(\varphi_{I_L}).$$

Звідси випливає, що значення струму у котушці індуктивності до комутації буде

$$i_L(0-) = I_L \sin(\varphi_{I_L}).$$

За другим законом комутації запишемо

$$i_L(0-) = i_L(0) = I_L \sin(\varphi_{I_L}).$$

Тоді значення напруги на ємності до комутації буде

$$\dot{U}_C = \dot{U}_L = \dot{U}_{12} = U_{a,C} + jU_{p,C},$$

що у часовій області відповідає

$$u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \varphi_{U_C}).$$

Знайдемо значення напруги на конденсаторі до комутації

$$u_C(0-) = U_C \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_{U_C}) = U_{C,m} \sin(\varphi_{U_C}).$$

За другим законом комутації запишемо

$$u_C(0-) = u_C(0) = U_{C,m} \sin(\varphi_{U_C}).$$

Таким чином, ми знайшли значення $i_L(0-)$ та $u_C(0-)$ до комутації, що відповідають початковим умовам.

2 Запишемо систему диференціальних рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа, що описує нашу схему після комутації

$$\begin{cases} i_1 = i_L + i_C, \\ i_1 R_1 + L \frac{di_L}{dt} = u(t), \\ i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_C dt = u(t). \end{cases}$$

З 2-го рівняння системи виразимо i_1 :

$$i_1 = \frac{u(t) - L \frac{di_L}{dt}}{R_1}.$$

Виразимо i_C з 1-го рівняння системи:

$$i_C = i_1 - i_L.$$

Підставимо отриманий вираз для i_1 в отриманий вираз для i_C

$$i_C = \frac{u(t)}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} - i_L.$$

Вирази для i_1 та i_C підставимо в 3-тє рівняння системи

$$\left(\frac{u(t) - L \frac{di_L}{dt}}{R_1}\right) R_1 + \frac{1}{C} \int \left(\frac{u(t)}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} - i_L\right) dt = u(t).$$

Після спрощення одержуємо

$$\frac{1}{C} \int \left(\frac{u(t)}{R_1} - \frac{L}{R_1} \frac{di_L}{dt} - i_L\right) dt = L \cdot \frac{di_L}{dt}.$$

Щоб позбутися знака інтеграла продиференціюємо отримане рівняння за t :

$$\frac{1}{C} \left(\frac{u(t)}{R_1} \frac{di_L}{dt} - i_L\right) = L \frac{d^2 i_L}{dt^2}.$$

Одержуємо неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку

$$L \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R_1 C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C} i_L = \frac{1}{C} \frac{u(t)}{R_1}.$$

Помножимо рівняння на $R_1 C$

$$LR_1 C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + L \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L = u(t).$$

Отримане неоднорідне рівняння другого порядку має розв'язання вигляду

$$i_L(t) = i_{L.BИM}(t) + i_{L.B}(t).$$

3 Знайдемо вимушену складову.

Запишемо вхідний опір кола після комутації

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{3AG}(0+) &= R_1 + \frac{(jx_L) \cdot (-jx_C)}{jx_L - jx_C} = R_1 + \frac{x_L x_C}{j(x_L - x_C)} = \\ &= R_1 - j \frac{x_L x_C}{(x_L - x_C)} = R_{3AG} + jX_{3AG}. \end{aligned}$$

Знайдемо струм на резисторі R_1

$$\dot{I}_1(0+) = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_{3AG}(0+)} = \frac{U_a + jU_p}{R_{3AG} + jX_{3AG}} = I_{a.1} + jI_{p.1}.$$

Знайдемо опір у крапках 1-2 після комутації

$$\underline{Z}_{12} = \frac{(jx_L) \cdot (-jx_C)}{jx_L - jx_C} = jX_{12}.$$

Знайдемо напругу на цій ділянці після комутації

$$\begin{aligned} \dot{U}_{12}(0+) &= \underline{Z}_{12} \dot{I}_1(0+) = (jX_{12}) \cdot (I_{a.1} + jI_{p.1}) = \\ &= U_{a.1} + jU_{p.1}. \end{aligned}$$

Тоді напруга на котушці після комутації буде дорівнювати

$$\dot{U}_L(0+) = \dot{U}_{12}(0+) = U_{a.1} + jU_{p.1} = U_{a.L} + jU_{p.L}.$$

Знайдемо значення струму після комутації

$$\dot{i}_{L.BИM} = \frac{\dot{U}_L(0+)}{jX_L} = I_{a.L.BИM} + jI_{p.L.BИM},$$

що у часовій області відповідає

$$i_{L.BИM}(t) = I_{L.BИM} \sin(\omega t + \varphi_{I_{L.BИM}}).$$

Таким чином, одержуємо вираз для струму у котушці індуктивності

$$i_L(t) = i_{L.BИM}(t) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = I_{L.BИM} \sin(\omega t + \varphi_{I_{L.BИM}}) + A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}.$$

4 Знайдемо константи A_1 та A_2 .

Запишемо систему рівнянь для знаходження констант інтегрування (5.33) у момент часу $t = 0$ при допущенні, що корені характеристичного рівняння різні і дійсні.

У результаті одержуємо систему

$$\begin{cases} i_L(0) = i_L(0+) \sin(\varphi_{I_L(0)}) + A_1 + A_2, \\ \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = i_L(0+) \omega \cos(\varphi_{I_L(0)}) + A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2. \end{cases}$$

За першим законом комутації

$$i_L(0) = i_L(0-).$$

Для спрощення математичних викладок введемо такі заміни:

$$h_1 = i_L(0) - i_L(0+) \sin(\varphi_{I_L(0)}),$$

$$h_2 = \left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} - i_L(0+) \omega \cos(\varphi_{I_L(0)}).$$

Значення $\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0}$ визначаємо, надавши йому фізичного

змісту:

$$\left. \frac{di_{L.B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L}.$$

Знайдемо значення $i_L(0)$ та $u_L(0)$, виходячи з початкових умов і законів комутації та системи рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа.

Значення було визначено раніше $i_L(0) = i_L(0-)$.

Значення $u_L(0)$ знаходимо з системи рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_L(0) + i_C(0), \\ i_1(0)R_1 + u_L(0) = u(0), \\ i_1(0)R_1 + u_C(0) = u(0). \end{cases}$$

З системи одержуємо

$$u_L(0) = u(0) - i_1(0)R_1,$$

де значення $i_1(0)$ визначається

$$i_1(0) = i_L(0) = i_L(0-),$$

що було визначено раніше.

Значення $u(0)$ визначаємо з виразу для вхідної напруги у нульовий момент часу

$$u(0) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\varphi).$$

Таким чином, одержимо систему для розрахунку констант

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = h_1, \\ A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 = h_2. \end{cases}$$

Після розв'язання систем знаходимо значення констант

$$A_1 = \frac{h_1\lambda_2 - h_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2 = \frac{h_1\lambda_1 - h_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

5 Записуємо повний вираз для шуканого струму у котушці індуктивності

$$i_L(t) = i_{L.BIM}(t) + A_1 e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 e^{\lambda_2 \cdot t}.$$

4.5 Приклади розв'язування задач

Приклад 4.13 Для кола, зображеного на рис. 4.16, знайти вирази для всіх струмів та напруг і побудувати графіки зміни їх у часі. Номінали елементів схеми такі $U = 50$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $L = 100$ мГн, $C = 100$ мкФ;

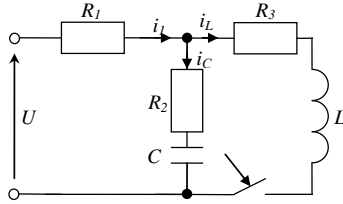


Рисунок 4.16

Зобразимо схему, наведену на рис. 4.16 після комутації (рис. 4.17).

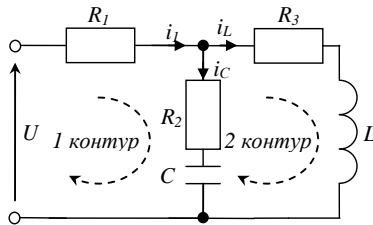


Рисунок 4.17

Складемо систему рівнянь на основі законів Кірхгофа:

$$\begin{cases} i_1 = i_C + i_L, \\ i_1 R_1 + \frac{1}{C} \int i_C dt + i_C R_2 = U, \\ i_L R_3 + L \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{C} \int i_C dt = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему рівнянь відносно напруги на ємності.

Виразимо з 2-го рівняння системи струм i_1 :

$$i_1 = \frac{1}{R_1} [U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C dt].$$

Підставимо одержаний результат у перше рівняння системи:

$$\frac{1}{R_1} [U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C dt] = i_C + i_L.$$

Виразимо з одержаного рівняння струм i_L :

$$i_L = \frac{1}{R_1} [U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C dt] - i_C.$$

Підставимо одержаний вираз у третє рівняння системи

$$[\frac{1}{R_1} [U - i_C R_2 - \frac{1}{C} \int i_C dt] - i_C] [R_3 + L \frac{d}{dt}] - \frac{1}{C} \int i_C dt = 0.$$

З вищевикладеного матеріалу відомо, що

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt, \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}.$$

Підставимо записані співвідношення у перетворені рівняння

$$[\frac{1}{R_1} [U - C \frac{du_C}{dt} R_2 - u_C] - C \frac{du_C}{dt}] [R_3 + L \frac{d}{dt}] - u_C = 0.$$

Після спрощення даного рівняння одержимо таке диференціальне рівняння 2-го порядку

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} CL(R_1 + R_2) + \frac{du_C}{dt} [C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L] + u_C [R_1 + R_3] = 0.$$

Диференціальне рівняння одержане відносно напруги на ємності u_C . Для розв'язання одержаного диференціального рівняння складемо характеристичне рівняння. Для цього введемо таку заміну

$$\frac{du_C^2}{dt} = \lambda^2 u_C, \quad \frac{du_C}{dt} = \lambda u_C.$$

Таким чином, одержуємо наступне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 CL(R_1 + R_2) + \lambda[C(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) + L] + [R_1 + R_3] = 0.$$

Підставимо замість номіналів елементів їх числові значення і тоді одержимо

$$\lambda^2 [2 \cdot 10^{-4}] + \lambda [0.15] + [30] = 0.$$

Корені одержаного характеристичного рівняння будуть такими:

$$\lambda_1 = -375 + 96.825 j \quad \text{та} \quad \lambda_2 = -375 - 96.825 j.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексні, то час перехідного процесу розраховуємо за формулою

$$t_{pp} = \frac{3}{|\alpha|} = \frac{3}{|-375|} = 2.667 \cdot 10^{-3} \text{ сек},$$

де $|\alpha|$ – дійсна частина комплексних коренів характеристичного рівняння.

Знайдемо вимушену складову струму у котушці індуктивності.

Зобразимо схему на постійному струмі після комутації (після замикання ключа) на постійному струмі з урахуванням того, що ємність на постійному струмі еквівалентна розриву у місці її включення, а індуктивність еквівалентна закороченій ділянці кола у місці її ввімкнення.

Запишемо вимушену складову струму у котушці індуктивності

$$i_{L.ВІМ} = \frac{U}{R_1 + R_3} = \frac{50}{10 + 20} = \frac{50}{30} = 1.667 \text{ А}.$$

Запишемо вимушену складову напруги на ємності

$$u_{C.ВІМ} = i_{L.ВІМ} R_3 = 1.667 \cdot 30 = 33.33 \text{ В}.$$

Знайдемо вільну складову струму у котушці індуктивності.

Оскільки корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, то вигляд вільної складової струму у котушці індуктивності буде таким:

$$u_{C.B}(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)],$$

де A_1 і A_2 – сталі інтегрування.

Тепер необхідно знайти сталі інтегрування.

Для їх визначення запишемо систему

$$\begin{cases} u_{C.B}(0) = A_1, \\ \left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0} = A_1 \alpha + A_2 \omega. \end{cases}$$

Для розв'язання системи необхідно знайти $u_{C.CB}(0)$ та $\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0}$.

Спочатку знайдемо вільну складову напруги на котушці індуктивності $u_{C.B}(0)$. Знайдемо напругу $u_{C.B}(0)$:

$$u_{C.B}(0) = u_C(0) - u_{C.B1M}.$$

На основі закону комутації можна записати

$$u_C(0) = u_C(0-),$$

де $u_C(0-)$ – це стале значення напруги на ємності до комутації (до замикання ключа).

Значення напруги на ємності $u_C(0-) = U$ та струму у котушці індуктивності $i_L(0-) = 0$, оскільки схема на постійному струмі розірвана через ключ і через конденсатор.

Таким чином, виходячи з вище записаного, значення

$$u_C(0-) = 50.$$

Тому

$$u_{C.B}(0) = u_C(0) - u_{C.B1M} = 50 - 33.33 = 16.667 \text{ В.}$$

Знайдемо значення $\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0}$. Надамо цьому виразу фізич-

ного змісту

$$\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C}.$$

Тепер необхідно знайти струм $i_C(0)$. Щоб знайти струм у конденсаторі $i_C(0)$, необхідно розв'язати систему на сталому струмі після комутації, складену на основі законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 4.17.

Знайдемо струм $i_C(0)$ з системи

$$i_C(0) = \frac{U - u_C(0) - R_1 i_L(0)}{R_1 + R_2} = \frac{50 - 50 - 10 \cdot 0}{10 + 10} = 0.$$

Тепер запишемо значення $\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0}$:

$$\left. \frac{du_{C.B}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{0}{100 \cdot 10^{-6}} = 0.$$

Таким чином, одержуємо таку систему для розрахунку констант:

$$\begin{cases} 16.667 = A_1, \\ 0 = A_1 \cdot (-375) + A_2 \cdot 96.825. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему відносно констант інтегрування та одержимо такі корені:

$$A_1 = 16.667, \quad A_2 = 64.55.$$

Запишемо вираз для вільної складової струму у котушці індуктивності

$$u_{C.B}(t) = e^{-375t} [16.667 \cos(96.825t) + 64.55 \sin(96.825t)].$$

Запишемо повний вираз для струму у котушці індуктивності

$$i_C(t) = 33.33 + e^{-375t} [16.667 \cos(96.825t) + 64.55 \sin(96.825t)].$$

Тепер знайдемо напругу на котушці індуктивності

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{d}{dt} [33.33 + e^{-375t} [16.667 \cos(96.825t) + 64.55 \sin(96.825t)]] = -2.582 e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Знайдемо струм, що проходить через перший резистор

$$i_1(t) = \frac{U - u_C(t) - i_C(t)R_2}{R_1} = 1.667 - 1.667e^{-375t} \cos(96.825t) - 3.873e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Знайдемо струм, що проходить через котушку індуктивності

$$i_L(t) = i_1(t) - i_C(t) = 1.667 - 1.667e^{-375t} \cos(96.825t) - 1.291e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Знайдемо спадання напруги на індуктивності:

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 500e^{-375t} \cos(96.825t) + 645.53e^{-375t} \sin(96.825t).$$

Побудуємо графіки функцій шуканих величин. Графіки будемо будувати на інтервалі часу від нуля до часу перехідного процесу за допомогою програми MathCAD (рис. 4.18 – рис. 4.22).

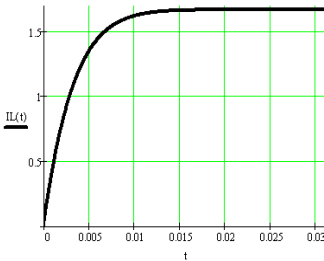


Рисунок 4.18

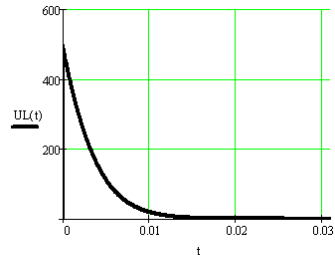


Рисунок 4.19

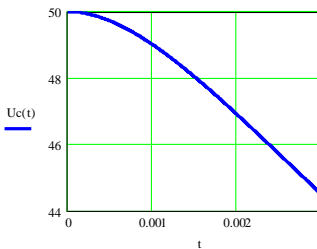


Рисунок 4.20

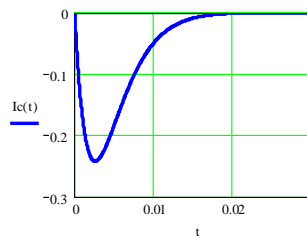


Рисунок 4.21

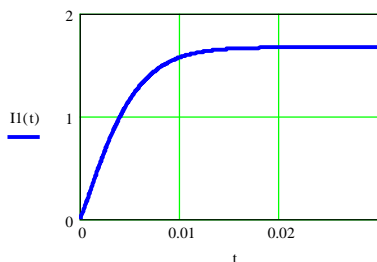


Рисунок 4.22

4.6 Запитання для самоперевірки

- 1 У чому суть класичного методу аналізу перехідних процесів?
- 2 У яких випадках застосовується класичний метод аналізу перехідних процесів?
- 3 Навести методи складання характеристичного рівняння.
- 4 У чому суть методу складання характеристичного рівняння на підставі законів Кірхгофа?
- 5 У чому суть методу складання характеристичного рівняння на підставі методу контурних струмів?
- 6 У чому суть методу складання характеристичного рівняння на підставі вхідного опору?
- 7 Що можна одержати у процесі розв'язання системи рівнянь, складеної класичним методом?
- 8 Як розв'язується диференціальне неоднорідне рівняння 2-го порядку?
- 9 Що таке вимушена складова при впливі у вигляді постійної напруги? Як вона знаходиться?
- 10 Що таке вільна складова при впливі у вигляді постійної напруги?
- 11 Щодо яких змінних краще розв'язувати диференціальне рівняння? Чому?
- 12 Який вигляд вільної складової, якщо корені різні і дійсні?

- 13 Який вигляд вільної складової, якщо корені рівні і дійсні?
- 14 Який вигляд вільної складової, якщо корені комплексно-спряжені?
- 15 Що таке аперіодичний розряд конденсатора з фізичної точки зору?
- 16 Які особливості при складанні системи рівнянь для знаходження констант інтегрування?
- 17 Як знаходити вільну складову шуканої величини на постійному струмі?
- 18 Як знаходити складові di_L / dt , du_C / dt ?
- 19 Які особливості знаходження констант інтегрування, якщо корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені?
- 20 Як визначати вільну складову, якщо вхідна напруга є гармонійною?
- 21 Як визначаються початкові умови при впливі у вигляді гармонійної напруги?

4.7 Завдання для самостійної роботи

4.1 Скласти характеристичне рівняння за допомогою законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 4.23, якщо на вхід діє постійна напруга E .

4.2 Скласти характеристичне рівняння за допомогою законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 4.24, якщо на вхід діє постійна напруга E .

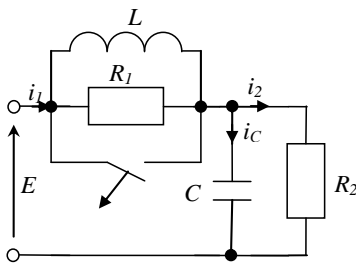


Рисунок 4.23

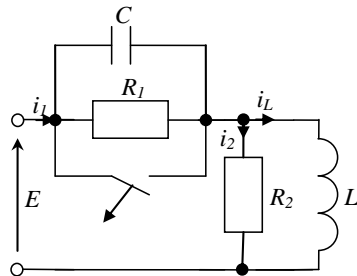


Рисунок 4.24

4.3 Скласти характеристичне рівняння за допомогою законів Кірхгофа для схеми, зображеної на рис. 4.25, якщо на вхід діє постійна напруга E .

4.4 Знайти вимушену складову струму у котушці індуктивності та напруги на ємності для схем, зображених на рис. 4.23, 4.24, 4.25.

4.5 Знайти час перехідного процесу, якщо корені характеристичного рівняння такі:

- 1) $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_2 = -2\mu$;
- 2) $\lambda_1 = -\alpha + j\beta$, $\lambda_2 = -\alpha - j\beta$;
- 3) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

4.6 Знайти час перехідного процесу для схеми, зображеної на рис. 4.26, якщо

- 1) $R_1 = 850 \text{ Ом}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 1 \text{ кОм}$, $L = 10 \text{ мГ}$, $C = 0.1 \text{ пФ}$;
- 2) $R_1 = 0 \text{ Ом}$, $R_3 = 0$, а інші елементи такі самі, як і у першому випадку.

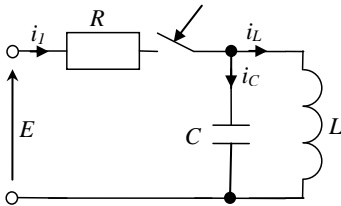


Рисунок 4.25

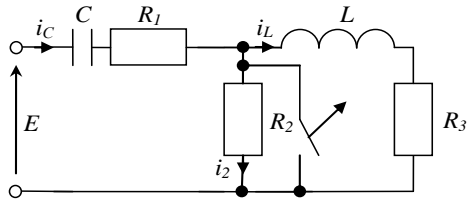


Рисунок 4.26

4.7 Знайти час перехідного процесу для схеми, зображеної на рис. 4.27 при впливі постійної напруги $E = 9 \text{ В}$, якщо:

- 1) $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $C = 1.8 \text{ мкФ}$, $L = 78 \text{ мГ}$;
- 2) $R_1 = 800 \text{ Ом}$, $C = 0.1 \text{ мкФ}$, $L = 8 \text{ мГ}$.

4.8 Класичним методом розрахувати струм і напругу у котушці індуктивності та побудувати їх графіки при постійній напрузі, що впливає $U = 20 \text{ В}$ для схеми, наведеної на рис. 4.28, якщо:

- 1) $R_1 = 80 \text{ Ом}$, $C = 1.1 \text{ мкФ}$, $L = 150 \text{ мГ}$;

2) $R_1 = 1 \text{ кОм}$, $C = 9 \text{ пФ}$, $L = 12 \text{ мкГ}$.

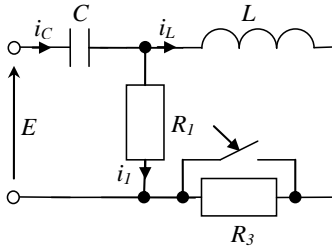


Рисунок 4.27

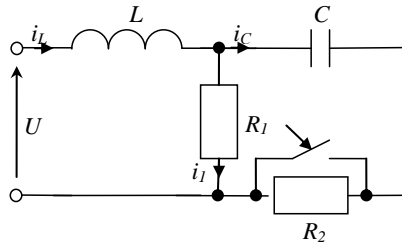


Рисунок 4.28

4.9 Класичним методом розрахувати всі струми та напруги у схемі та побудувати їх графіки при постійній напрузі, що діє на вході $E = 10 \text{ В}$, схема наведена на рис. 4.29, якщо:

- 1) $R_1 = 2 \text{ кОм}$, $R_2 = 400 \text{ Ом}$, $C = 12 \text{ мФ}$, $L = 4 \text{ мГ}$;
- 2) $R_1 = 300 \text{ Ом}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$, $C = 0.1 \text{ мкФ}$, $L = 180 \text{ мГ}$.

4.10 Розрахувати класичним методом струм у конденсаторі із задачі 4.9, якщо на вхід діє гармонічна напруга вигляду:

- 1) $e(t) = 100\sin(300t + 30^\circ)$;
- 2) $e(t) = 100\cos(300t + 60^\circ)$.

4.11 Розрахувати початкові умови для схеми, зображеної на рис. 4.30, якщо на вхід діє синусоїдальна напруга із частотою $F = 300 \text{ Гц}$, максимальною амплітудою 25 В та фазою 35° , якщо номінали схеми такі:

- 1) $R_1 = 450 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $R_3 = 90 \text{ Ом}$, $C = 0.5 \text{ мкФ}$, $L = 80 \text{ мГ}$;
- 2) $R_1 = 2.5 \text{ кОм}$, $R_2 = 100 \text{ Ом}$, $R_3 = 9 \text{ кОм}$, $C = 2.5 \text{ пФ}$, $L = 30 \text{ мГ}$.

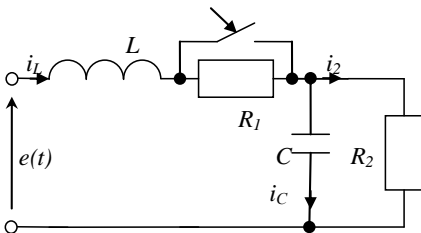


Рисунок 4.29

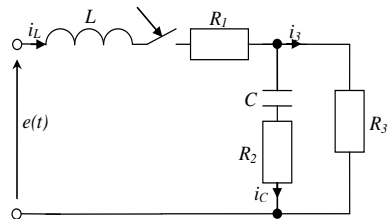


Рисунок 4.30

4.12 Для схеми із задачі 5.11 при тих же самих номіналах розрахувати всі струми та напруги класичним методом у колі та побудувати їх графіки, якщо на вхід діє гармонічна напруга:

1) $e(t) = 150\sin(20t + 20^\circ)$ В;

2) $e(t) = 150\cos(20t + 20^\circ)$ В.

4.13 Розв'язати задачу 4.8, якщо на вхід діє гармонічна напруга із задачі 4.10.

4.14 Для схеми, зображеної на рис. 4.31, розрахувати всі струми та напруги у випадку замикання і розмикання ключа класичним методом. Знайти коефіцієнт згасання, час перехідного процесу, декремент згасання та логарифмічний декремент згасання. Параметри схеми і сигнал, що впливає, такі:

1) $e(t) = E = 12$ В, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 1$ кОм, $R_3 = 900$ Ом, $C = 2.8$ мкФ, $L = 100$ мГ;

2) $e(t) = 20\sin(90t + 34^\circ)$ В, $R_1 = 550$ Ом, $R_2 = 850$ Ом, $R_3 = 700$ Ом, $C = 0.8$ мкФ, $L = 110$ мГ;

3) $e(t) = 25\sin(80t + 15^\circ)$ В, $R_1 = 270$ Ом, $R_2 = 2.2$ кОм, $R_3 = 4$ кОм, $C = 4.8$ пФ, $L = 13$ мГ;

4) $e(t) = 19\cos(85t + 55^\circ)$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 3.6$ кОм, $R_3 = 2$ кОм, $C = 0.7$ пФ, $L = 17$ мГ.

4.15 Для схеми, показаної на рис. 4.32, розрахувати класичним методом усі струми і напруги, знайти час перехідного процесу, декремент згасання, логарифмічний декремент згасання у випадку розмикання ключа, якщо схема має такі номінали:

1) $e(t) = E = 16$ В, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $L = 70$ мГ;

2) $e(t) = 13\sin(75t + 8^\circ)$ В, $R_1 = 510$ Ом, $R_2 = 850$ Ом, $L = 60$ мГ;

3) $e(t) = 26\sin(25t + 100^\circ)$ В, $R_1 = 900$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $L = 9$ мГ;

4) $e(t) = 33\cos(76t + 94^\circ)$ В, $R_1 = 600$ Ом, $R_2 = 125$ Ом, $L = 0.75$ мГ.

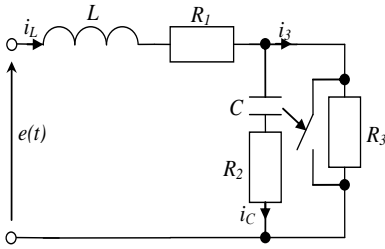


Рисунок 4.31

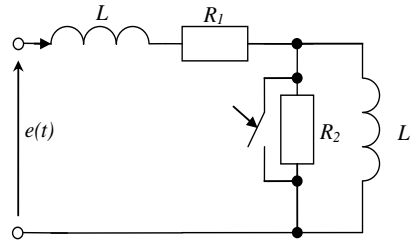


Рисунок 4.32

4.16 Для схеми, що зображена на рис. 4.33 розрахувати класичним методом всі струми та напруги, знайти час перехідного процесу, декремент згасання, логарифмічний декремент згасання у випадку розмикання ключа, якщо схема має такі номінали:

- 1) $e(t) = E = 18\text{ В}$, $R_1 = 60\text{ Ом}$, $R_2 = 1\text{ кОм}$, $C = 0.7\text{ мкФ}$;
- 2) $e(t) = 14\sin(78t + 18^\circ)\text{ В}$, $R_1 = 600\text{ Ом}$, $R_2 = 2\text{ кОм}$,
 $C = 7.7\text{ мкФ}$.

4.17 В електричному колі, що зображене на рис. 4.34 відбувається перехідний процес та ключ замикається. Необхідно знайти струми у всіх гілках, якщо коло має такі параметри елементів $U = 10\text{ В}$, $R_1 = 0.2\text{ Ом}$, $R_2 = 0.8\text{ Ом}$, $C = 1\text{ Ф}$, $L = 0.25\text{ Гн}$

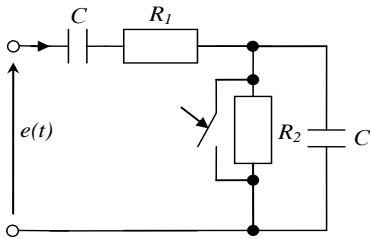


Рисунок 4.33

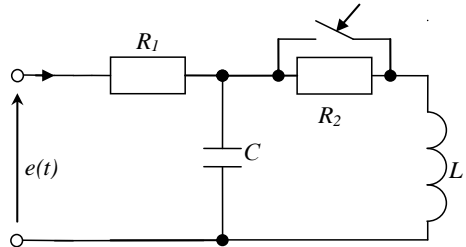


Рисунок 4.34

РОЗДІЛ 5 ОПЕРАТОРНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ

5.1 Загальні положення операторного методу

5.1.1 Основні положення

Суть операторного методу розрахунку перехідних процесів полягає у тому, що використовується перетворення Лапласа, що дозволяє перенести розв'язання з області функції дійсної змінної t у область комплексної змінної p :

$$p = s + j\omega. \quad (5.1)$$

При цьому операції диференціювання та інтегрування функції замінюються відповідними операціями множення та ділення функції комплексної змінної на змінну p , що істотно спрощує розрахунок, оскільки зводить систему диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних. У операторному методі відпадає необхідність визначення сталих інтегрування. Тому його частіше застосовують на практиці.

Розрізняють пряме і зворотне перетворення Лапласа.

Пряме перетворення Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-p \cdot t} dt, \quad (5.2)$$

де $f(t)$ – функція дійсної змінної t та визначається при $t > 0$ (при $t < 0$, $f(t) = 0$).

Інтеграл (5.2) ще позначають таким чином

$$F(p) = L\{f(t)\} \text{ або } F(p) \div f(t). \quad (5.3)$$

Зворотне перетворення Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{p \cdot t} dp. \quad (6.4)$$

Функцію $F(p)$ називають зображенням за Лапласом, а функцію $f(t)$ – оригіналом. Отже, оригінал і зображення являють собою пари функцій $f(t)$ і $F(p)$ дійсної та комплексної змінних, зв'язаних між собою парою перетворень Лапласа.

Інтеграл (5.4) ще позначають таким чином

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} \text{ чи } f(t) \div F(p). \quad (6.5)$$

При такому перетворенні операція диференціювання над функцією дійсної змінної $f(t)$ замінюється операцією множення на оператор p функції комплексної змінної $F(p)$. У свою чергу, операція інтегрування замінюється операцією ділення на оператор p . Ці властивості будуть доведені далі (підрозділ 5.1.2).

5.1.2 Основні властивості перетворень Лапласа

Математичним операціям над оригіналами відповідають відповідні операції над зображенням та навпаки. Ці операції називають властивостями перетворення Лапласа. Знання цих властивостей полегшує знаходження зображень.

1 Властивість лінійності

$$\sum_{k=1}^n a_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^n a_k F_k(p), \quad (5.6)$$

де a_k – постійні коефіцієнти.

Ця властивість доводиться, якщо застосувати до лівої частини наведеного співвідношення пряме перетворення Лапласа

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) e^{-pt} dt.$$

При такому перетворенні одержимо інтеграл суми, який дорівнює сумі інтегралів

$$\int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n a_k f_k(t) e^{-pt} dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^{\infty} a_k f_k(t) e^{-pt} dt \right),$$

а постійну величину можна винести за знак інтеграла

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} a_k f_k(t) e^{-pt} dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt \right).$$

Вираз у дужках відповідає прямому перетворенню Лапласа

$$F_k(p) = \int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt.$$

Таким чином, одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\int_0^{\infty} f_k(t) e^{-pt} dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k(p),$$

що і слід було довести.

2 Диференціювання оригіналу.

При ненульових початкових умовах, коли $f(0) \neq 0$, диференціюванню оригіналу відповідає таке співвідношення

$$f'(t) \div pF(p) - f(0). \quad (5.7)$$

У випадку нульових початкових умов

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \div p^n F(p). \quad (5.8)$$

Ця властивість доводиться на підставі інтегрування частинами.

Застосуємо до функції

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

пряме перетворення Лапласа

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} df(t) e^{-pt}.$$

Інтегрування здійснимо частинами. Введемо такі позначення

$$e^{-pt} = u, \quad df(t) = dv.$$

Після чого одержуємо

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Відповідно одержуємо

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} df(t) = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d(e^{-pt}).$$

Визначимо перший доданок виразу

$$e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} = e^{-p\infty} f(\infty) - e^{-p \cdot 0} f(0) = 0 - f(0) = -f(0).$$

Другий доданок виразу визначається

$$- \int_0^{\infty} f(t) d(e^{-pt}) \Leftrightarrow p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = pF(p).$$

Таким чином, маємо

$$\int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = pF(p) - f(0)$$

або

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow pF(p) - f(0).$$

У диференціальних рівняннях електричного кола похідну за часом найчастіше бачимо у виразі для напруги на котушці індуктивності

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

Позначаючи операторне зображення струму $i(t)$ у вигляді $I(p)$, одержуємо згідно з вищевикладеним матеріалом операторне зображення для напруги на котушці індуктивності

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0).$$

3 Інтегрування оригіналу.

Інтегруванню оригіналу відповідає ділення на змінну p :

$$\int_0^t f(t) dt \div \frac{F(p)}{p}. \quad (5.9)$$

У випадку багаторазового інтегрування

$$\int_0^t \dots \int_0^t f(t) d^n t \div \frac{F(p)}{p^n}. \quad (5.10)$$

Ці співвідношення справедливі для нульових початкових умов, тобто $f(0) = 0$. При ненульових початкових умовах $f(0) \neq 0$ додається доданок $\frac{f(0)}{p}$.

Знайдемо зображення інтеграла функції

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt.$$

Візьмемо інтеграл Лапласа від функції $\psi(t)$

$$\psi(p) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{-pt} dt = -\psi(t) \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \psi'(t) e^{-pt} dt.$$

Перша складова виразу дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} \psi(t) \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} &= \psi(\infty) \frac{1}{p} e^{-p \cdot \infty} - \psi(0) \frac{1}{p} e^{-p \cdot 0} = \\ &= 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

Оскільки $e^{-\infty} = 0$, $\psi(0) = 0$.

Розглянемо другу складову

$$\frac{1}{p} \int_0^{\infty} \psi'(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = \frac{F(p)}{p}.$$

Таким чином, одержали зображення інтеграла

$$\int_0^t f(t) dt \Rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

Інтеграл найчастіше буває у виразі для напруги на конденсаторі

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_c(0).$$

Зображення першої складової згідно з вищевикладеним матеріалом буде

$$\frac{1}{C} \int_0^t i dt \Leftrightarrow \frac{I(p)}{pC}.$$

Друга складова є сталою величиною, тому її зображення буде

$$u_c(0) \Leftrightarrow \frac{u_c(0)}{p}.$$

Тому виходячи з вищевикладеного, запишемо вираз напруги на конденсаторі у операторній формі

$$U_c(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}.$$

4 Зміна масштабу (теорема подібності)

$$f(at) \div \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad (5.11)$$

де a – постійний дійсний коефіцієнт.

Ця властивість легко доводиться шляхом заміни змінної у прямому перетворенні Лапласа.

5 Зсув в області дійсної змінної (теорема запізнювання)

$$f(t + t_0) \div \exp(pt_0)F(p). \quad (5.12)$$

Із цього співвідношення видно, що зсув оригіналу по осі часу на величину t_0 відповідає множенню зображення на $\exp(p \cdot t_0)$. Це доводиться заміною змінної.

6 Зсув в області комплексної змінної (теорема зсуву).

$$F(p \mp \lambda) \div \exp(\pm \lambda t) f(t) = e^{\pm \lambda t} f(t). \quad (5.13)$$

Ця теорема доводиться безпосередньо із прямого перетворення Лапласа, якщо в ньому замість $f(t)$ підставити $e^{\pm \lambda t} \cdot f(t)$. Причому λ може бути як дійсною, так і комплексною.

7 Теорема згортання.

Згортанню двох функцій відповідає добуток зображень

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} f_1(t - \tau) \cdot f_2(\tau) d\tau \div \quad (5.14)$$

$$\div F_1(p) \cdot F_2(p).$$

Теорема згортання доводиться заміною порядку інтегрування в подвійному інтегралі та застосуванням теореми про часовий зсув оригіналу.

8 Диференціювання зображення

$$\frac{d^n F(p)}{dp^n} \div (-t)^n f(t). \quad (5.15)$$

9 Інтегрування зображення

$$\int_0^\infty F(p) dp \div \frac{f(t)}{t}. \quad (5.16)$$

10 Згортання зображення

$$F_1(p) * F_2(p) \div \frac{1}{2\pi} f_1(t) \cdot f_2(t). \quad (5.17)$$

5.1.3 Закони Ома та Кірхгофа в операторній формі

Користуючись основними властивостями перетворення Лапласа, можна одержати основні закони теорії кіл у операторній формі.

Розглянемо на прикладі коливального контуру (рис. 5.1).

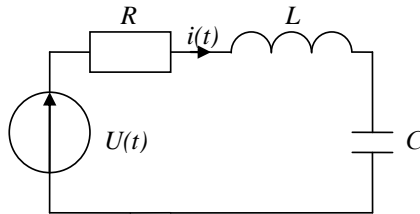


Рисунок 5.1 – Схема RLC-кола

Запишемо напругу у контурі

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt.$$

Застосувавши пряме перетворення Лапласа і беручи до уваги властивість лінійності, диференціювання і інтегрування оригіналу, одержимо

$$U(p) = RI(p) + pLI(p) - Li(0) + \frac{u_c(0)}{p} + \frac{I(p)}{pC}.$$

Звідси одержуємо закон Ома у операторній формі для даного кола

$$I(p) = \frac{U(p) + Li(0) - u_c(0)/p}{R + pL + 1/(pC)} = \frac{U_0(p)}{Z(p)}, \quad (5.18)$$

де $U_0(p)$ – операторна напруга; $Z(p)$ – операторний опір кола.

Операторні зображення величини струму $I(p)$, напруги $U_0(p)$ та опору $Z(p)$ у теорії позначаються великими літерами.

Величини $Li(0)$ та $\frac{u_c(0)}{p}$ представляють початкові умови. Вони характеризують енергію електричних і магнітних полів, що запасається в L і C до моменту комутації. Ці величини схемотехнічно можуть бути представлені як джерела напруги. Величина, зворотна $Z(p)$, називається операторною провідністю кола

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}. \quad (5.19)$$

Аналогічним чином можна одержати закони Кірхгофа у операторній формі.

Перший закон Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m I_k(p) = 0. \quad (5.20)$$

Другий закон Кірхгофа

$$\sum_{k=1}^m U_k(p) = 0. \quad (5.21)$$

Таким чином, закон Ома та закони Кірхгофа у операторній формі аналогічні до цих самих законів для постійного струму та гармонічного струму у комплексній формі з тією лише різницею, що у кожній з n гілок за наявності ненульових початкових

умов діють додаткові джерела напруги $Li(0)$ та $\frac{u_C(0)}{p}$ (напрямок $Li(0)$ збігається з напрямком струму, а напрямок $\frac{u_C(0)}{p}$ протилежний), які можна перетворити у джерело струму.

З виразу для операторної напруги кола, що зображене на рис. 5.1, запишемо вирази для операторної напруги та струму:

$$U_L(p) = pLI(p) - Li(0),$$

$$u_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Виходячи з одержаних виразів, можна зобразити операторні схеми заміщення котушки індуктивності (рис. 6.2) та конденсатора (рис. 6.3)

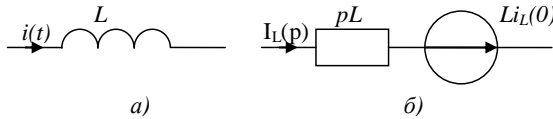


Рисунок 5.2 – Котушка індуктивності у часовій (а) та операторній (б) областях

На рис. 5.2, а наведена котушка індуктивності у часовій області, а на рис. 5.2, б наведено зображення котушки індуктивності у операторній області. Як видно з рис. 5.2 б, у операторній області котушка індуктивності еквівалентна індуктивному опору зі значенням pL та джерелу напруги зі значенням $Li(0)$.

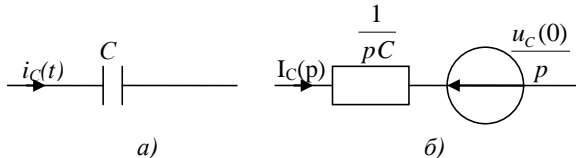


Рисунок 5.3 – Ємність у часовій (а) та операторній (б) областях

На рис. 5.3 а наведений конденсатор у часовій області, а на рис. 5.2 б наведено зображення конденсатора у операторній

області. Як видно з рис. 5.3 б, у операторній області конденсатор еквівалентний ємнісному опору зі значенням $\frac{1}{pC}$ та джерелу напруги зі значенням $\frac{u_c(0)}{p}$.

Оскільки у операторному вигляді виконуються основні закони, то можна користуватися класичними перетвореннями.

Проілюструємо перетворення джерела струму в джерело напруги для реактивних елементів у операторному вигляді.

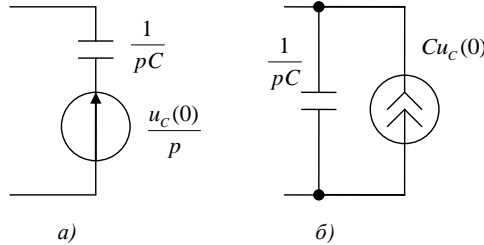


Рисунок 5.4 – Перетворення джерел у операторній формі

На рис. 5.4 проілюстроване перетворення джерела напруги $E = \frac{u_c(0)}{p}$ у джерело струму зі значенням

$$J = \frac{E}{Z_C} = \frac{\frac{u_c(0)}{p}}{\frac{1}{pC}} = Cu_c(0).$$

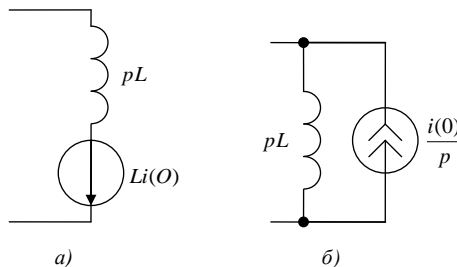


Рисунок 5.5 – Перетворення джерел у операторній формі

На рис. 5.5 проілюстроване перетворення джерела напруги $E = Li(0)$ у джерело струму зі значенням

$$J = \frac{E}{Z_L(p)} = \frac{Li(0)}{pL} = \frac{i(0)}{p}.$$

Варто пам'ятати, що джерело напруги має нульовий опір, а джерело струму має нескінченний опір.

5.1.4 Основні етапи розв'язання

При розв'язанні задач операторним методом розв'язання розбивається на п'ять етапів.

- 1 Розраховуються незалежні початкові умови.
- 2 Складається операторна схема заміщення для кола, отриманого після комутації.
- 3 Складається система рівнянь на підставі операторних законів Кірхгофа або за допомогою операторного методу контурних струмів, вузлових напруг.
- 4 Із системи визначаються операторні зображення струмів і напруг.
- 5 Знаходяться оригінали за отриманими зображеннями за допомогою теореми розкладання.

5.2 Операторні схеми заміщення

Перед складанням схеми заміщення кола у операторній формі необхідно знайти значення струму $i_L(0-)$ в котушці індуктивності та напруги $u_C(0-)$ на конденсаторі до комутації. Оскільки коло до комутації перебуває у сталому режимі роботи, то визначення значень $i_L(0-)$ і $u_C(0-)$ можна зробити, застосувавши будь-який метод розрахунку. Якщо значення $i_L(0-)$ і $u_C(0-)$ відмінні від нуля, то при складанні схеми заміщення необхідно послідовно з реактивними елементами включити додаткові джерела енергії. Напрямок дії цих джерел і величина їх

ЕРС вибираються відповідно до рис. 5.2 та рис. 5.3. Значення ЕРС та інших елементів кола у операторній формі вибираються за таблицею 5.1. Операторна схема заміщення зображується для комутаційного моменту часу.

5.3 Приклади зображення функцій

Знайдемо значення сталої величини, наприклад 1:

$$\int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p} e^{-p \cdot \infty} + \frac{1}{p} e^{-p \cdot 0} = \frac{1}{p}.$$

Таблиця 5.1 - Зображення та оригінал деяких функцій

Оригінал	Зображення	Оригінал	Зображення
1	$\frac{1}{p}$	$(1 - \alpha t)e^{\pm \alpha t}$	$\frac{p}{(p \mp \alpha)^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{p(p + \alpha)}$
$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{p \mp \alpha}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$\frac{1}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{\pm j(\omega_0 t + \psi)}$	$\frac{e^{j \cdot \psi}}{p \mp j\omega_0}$	$\sin(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cdot \sin \psi + \omega_0 \cdot \cos \psi}{p^2 + \omega_0^2}$
$t \cdot e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$	$e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
$\frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\beta t} - e^{\alpha t})$	$\frac{1}{(p + \alpha)(p + \beta)}$	$e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega_0^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\cos(\omega_0 t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega_0 \sin \psi}{p^2 + \omega_0^2}$

Нехай $f(t) = e^{\alpha t}$, тоді

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{\alpha t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{1}{p-\alpha} e^{-(p-\alpha)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Таким чином, одержуємо

$$e^{\alpha t} \Rightarrow \frac{1}{p-\alpha}.$$

Якщо $\alpha \cdot t = j(\omega t + \psi)$, то

$$e^{\alpha t} = e^{j\psi} e^{j\omega t} \Rightarrow \frac{e^{j\psi}}{p-j\omega}.$$

Відповідно

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \Rightarrow \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

На основі цих результатів складають таблицю відповідностей деяких функцій та їх зображень (таблиця 5.1).

Більш детальніші таблиці відповідності оригіналів та їх зображень наведені у спеціальних довідниках.

5.4 Складання операторних рівнянь та їх розв'язання

Складання операторних рівнянь містить у собі математичний опис отриманої схеми відомими методами розрахунку лінійних електричних кіл у операторній формі застосування законів Кірхгофа, методів контурних струмів, вузлових напруг (потенціалів), накладення, еквівалентного генератора. Крім цього, можна робити еквівалентні перетворення ділянок кола з пасивними та активними елементами.

У результаті розв'язання операторних рівнянь одержуємо вираз у вигляді правильного дробу, чисельник і знаменник якого становлять поліноми в загальному випадку другого та третього ступенів. Причому поліноми, що стоять у знаменниках, для будь-якого змінного кола, повинні бути однаковими або відрізнятися на множник p .

5.5 Визначення оригіналів

Після одержання операторного розв'язання необхідно знайти оригінал, що відповідає цьому розв'язанню. Є два шляхи визначення оригіналів. У першому випадку можна скористатися таблицею 5.1 відповідності оригіналів і зображень або більше повною, наведеною в будь-якому довіднику з вищої математики. У другому випадку перехід до оригіналу можна здійснити за допомогою теореми розкладання, що застосовна тільки при дотриманні певних умов. Найчастіше операторне розв'язання $F(p)$ має вигляд дроби. Під $F(p)$ розуміють $I(p)$ або $U(p)$:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}. \quad (5.22)$$

Застосування теореми розкладання можливе, якщо виконуються такі умови:

- дріб повинен бути правильним, тобто $m > n$;
- коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ і $b_m, b_{m-1}, \dots, b_1, b_0$ повинні бути дійсними та додатними;
- у знаменнику не повинно бути рівних коренів;
- чисельник і знаменник не повинні мати рівних коренів, тобто дріб повинен бути нескоротним.

Після складання операторного розв'язання визначаються корені знаменника $F_2(p)=0$ і перевіряється виконання вищеперелічених умов. Залежно від вигляду коренів можливі такі форми теореми розкладання.

Якщо корені виразу знаменника $F_2(p) = 0$ різні, дійсні

$$p_1 \neq p_2.$$

У цьому випадку оригінал виразу знаходимо у вигляді суми лишків

$$i(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Re}_{p_k} s[F(p_k)] = \sum_{k=1}^m \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k \cdot t}, \quad (5.23)$$

де m – число коренів знаменника; p_k – k -й корінь знаменника; $F_2'(p)$ – похідна від полінома знаменника.

Теорему розкладання також можна подати у вигляді

$$I(p) = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{p - p_k},$$

де

$$A_k = \left. \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \right|_{p=p_k}.$$

Вираз $\frac{A_k}{p - p_k}$ у часовій області відповідає $A_k e^{p_k t}$.

Якщо у рівнянні виразу знаменника $F_2(p) = 0$ є m різних коренів p_1, p_2, \dots, p_n і з них корінь p_1 кратністю m_1 , корінь p_2 кратністю m_2 , то оригінал струмів буде обчислюватися за формулою

$$i(t) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Re} s[F(p_k)] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \times \frac{F_1(p)e^{p t}}{(p - p_k)^{m_k}} \right]_{p=p_k}. \quad (5.24)$$

Тут вираз, що стоїть у знаменнику квадратної дужки, необхідно спочатку скоротити на $(p - p_k)^{m_k}$ та лише після цього диференціювати.

Наприклад, необхідно знайти оригінал за зображенням

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{p + 2}{(p - 1)^2 p^3}.$$

Задана функція має полюс другого порядку $p_1 = 1$ та полюс третього порядку $p_2 = 0$. Застосуємо формулу (5.24) по черзі для випадків $m = 2$ та $m = 3$

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= \frac{d}{dp} \left[\frac{p+2}{p^3} e^{pt} \right] \Big|_{p=1} = \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{p+2}{p^3} \right) e^{pt} + \frac{d}{dp} (e^{pt}) \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{2}{p^3} \right) e^{pt} + t e^{pt} \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= \left[\frac{d}{dp} (p^{-2} + 2p^{-3}) e^{pt} + t e^{pt} \frac{p+2}{p^3} \right] \Big|_{p=1} = \\
&= [(-2p^{-1} - 6p^{-2}) e^{pt} + t e^{pt} \frac{p+2}{p^3}] \Big|_{p=1} = (3t - 8) e^{pt}, \\
i_2(t) &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = \left[\frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) e^{pt} + \right. \\
&+ \left. \frac{d^2}{dp^2} (e^{pt}) \frac{p+2}{(p-1)^2} \right] \Big|_{p=0} = \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) e^{pt} + \frac{t^2}{2} \frac{p+2}{(p-1)^2} e^{pt} + \right. \\
&+ \left. t \frac{d}{dp} \left(\frac{p+2}{(p-1)^2} \right) e^{pt} \right] \Big|_{p=0} = t^2 + 5t + 8
\end{aligned}$$

Отже, запишемо загальний вираз для шуканого струму

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = (3t - 8)e^{pt} + t^2 + 5t + 8.$$

Якщо серед m коренів рівняння $F_2(p) = 0$ є пара комплексних коренів $p_k = -\alpha_k - j\omega_k$, $p_{k+1} = -\alpha_k + j\omega_k$ то теорема розкладання може бути подана у такому вигляді:

$$i(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right]. \quad (6.25)$$

Доведемо це співвідношення. Запишемо вираз для шуканого операторного струму, одержаний раніше для пари комплексно-спряжених коренів у вигляді суми двох складових

$$I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\dot{A}_k}{p - p_k} + \frac{\dot{A}_{k+1}}{p - p_{k+1}}.$$

У часовій області цей вираз відповідає наступному

$$i(t) = \dot{A}_k e^{p_k t} + \dot{A}_{k+1} e^{p_{k+1} t}$$

Подамо пару комплексно-спряжених коренів у показниковій формі

$$\dot{A}_k = \frac{F_1 \angle \varphi}{F_2' \angle \varphi} p = p_k = a + jb,$$

$$\dot{A}_{k+1} = \frac{F_1 \angle \varphi}{F_2' \angle \varphi} p = p_{k+1} = a - jb = A_k^*,$$

$$\dot{A}_k = A_i e^{j\varphi_k}, \quad \dot{A}_{k+1} = A_i e^{-j\varphi_{k+1}},$$

де $A_i = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi_k = \arctg \frac{a}{b} = \varphi$,

$$\varphi_{k+1} = \arctg \frac{a}{-b} = -\arctg \frac{a}{b} = -\varphi.$$

У вираз для струму у часовій області у показники експоненти підставимо вирази коренів у алгебраїчній формі запису, а замість коефіцієнтів \dot{A}_k та \dot{A}_{k+1} їх показникові вирази

$$\begin{aligned} i(t) &= \dot{A}_k e^{p_k t} + \dot{A}_{k+1} e^{p_{k+1} t} = A_i e^{j\varphi} e^{(-\alpha_k - j\omega_k)t} + \\ &+ A_i e^{-j\varphi} e^{(-\alpha_k - j\omega_k)t} = A_i e^{-\alpha_k t} [e^{-j(\omega_k t - \varphi)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi)}] = \\ &= 2A_i e^{-\alpha_k t} \left[\frac{e^{-j(\omega_k t - \varphi)} + e^{-j(\omega_k t + \varphi)}}{2} \right] = 2A_i e^{-\alpha_k t} \cos(\omega_k t + \varphi). \end{aligned}$$

У операторній області це відповідає виразу

$$i(t) = 2 \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k \cdot t} \right].$$

5.6 Приклади розв'язування задач

Приклад 5.1 Знайти значення струму в котушці індуктивності $i_L(t)$ операторним методом для схеми, зображеної на рис. 5.4.

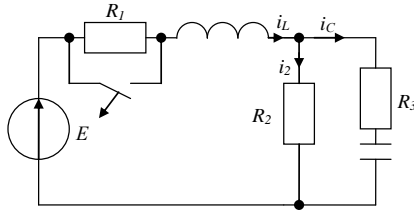


Рисунок 5.4

Розв'язання

Знайдемо початкові умови, тобто значення струму в котушці індуктивності та напруги на ємності до комутації на постійному струмі.

До комутації ключ був замкнутий, тому струм проходив по шляху найменшого опору, тобто минаючи опір R_1 . Запишемо значення струму в котушці індуктивності до комутації

$$i_L(0-) = \frac{E}{R_2}.$$

Оскільки гілка, у якій стоїть ємність на постійному струмі буде розірвана, то через неї постійна складова струму протікати не буде, тому напруга на ємності буде дорівнюватиме спаданню напруги на резисторі R_2 : $u_C(0-) = i_L(0-)R_2$.

З урахуванням законів комутації одержуємо

$$i_L(0) = i_L(0-), \quad u_C(0) = u_C(0-).$$

Зобразимо операторну схему заміщення з урахуванням нульових початкових умов після комутації (рис. 5.5).

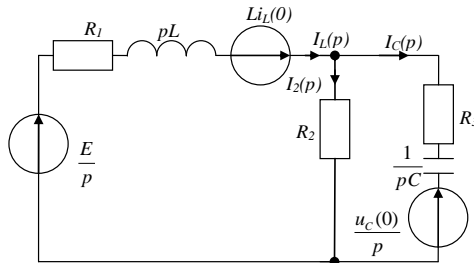


Рисунок 5.5

Тепер складаємо операторну систему рівнянь на підставі 1-го та 2-го законів Кірхгофа, що описує вихідну схему. Спочатку задамося позитивним напрямком струмів у контурах (рис. 5.6).

Запишемо операторну систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_L(p)(R_1 + pL) + I_2(p)R_2 = \frac{E}{p} + Li_L(0), \\ I_C(p)(R_3 + \frac{1}{pC}) - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}, \\ I_L(p) = I_2(p) + I_C(p). \end{cases}$$

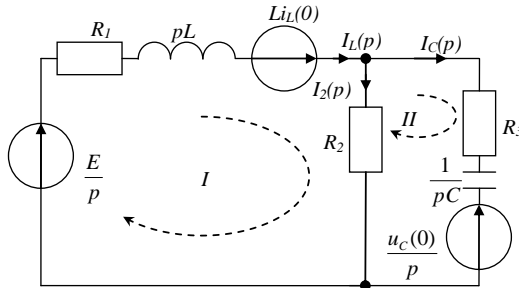


Рисунок 5.6

Далі розв'язуємо отриману систему. Розв'язувати її можна або методом Крамера, або безпосередньо. Наведемо приклади розв'язання для двох методів.

Спочатку знайдемо значення для струму в котушці індуктивності безпосередньо.

Виразимо з 3-го рівняння $I_C(p)$

$$I_C(p) = I_L(p) - I_2(p).$$

Підставимо $I_C(p)$ у друге рівняння системи:

$$(I_L(p) - I_2(p))(R_3 + \frac{1}{pC}) - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}.$$

Виразимо з отриманого рівняння $I_2(p)$:

$$I_2(p) = \frac{I_L(p)(R_3 + \frac{1}{pC}) + \frac{u_c(0)}{p}}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}}.$$

Підставимо $I_2(p)$ в 1-ше рівняння системи:

$$I_L(p)(R_1 + pL) + \left(\frac{I_L(p)(R_3 + \frac{1}{pC}) + \frac{u_c(0)}{p}}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}} \right) R_2 = \frac{E}{p} + Li_L(0).$$

Перетворимо отриманий вираз:

$$I_L(p) \left[(R_1 + pL) + \frac{(R_3 + \frac{1}{pC}) \cdot R_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}} \right] = \frac{E}{p} + Li_L(0) -$$

$$- \frac{u_c(0)}{p} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}}.$$

Зведемо обидві частини рівняння до загального знаменника:

$$I_L(p) \left[\frac{(R_1 + pL)(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) + (R_3 + \frac{1}{pC})R_2}{R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}} \right] =$$

$$= \frac{E(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) + Li_L(0)p(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) - u_c(0)R_2}{p(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC})}.$$

Скоротимо обидві частини рівняння на вираз $R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}$

та виразимо з нього $I_L(p)$:

$$\begin{aligned}
I_L(p) &= [(R_1 + pL)(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) + (R_3 + \frac{1}{pC})R_2] = \\
&= \frac{E(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) + Li_L(0)p(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) - u_c(0)R_2}{p}, \\
I_L(p) &= \frac{E(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) + Li_L(0)p(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) - u_c(0)R_2}{p((R_1 + pL)(R_2 + R_3 + \frac{1}{pC}) + (R_3 + \frac{1}{pC})R_2)}.
\end{aligned}$$

Спростимо чисельник і знаменник отриманого виразу:

$$I_L(p) = \frac{p^2[CLi_L(0)(R_2 + R_3)] + p[EC(R_2 + R_3) + Li_L(0) - u_c(0)R_2C] + [E]}{p(p^2[LC(R_2 + R_3)] + p[C(R_1R_2 + R_1R_3 + R_3R_2) + L] + [R_1 + R_2])}.$$

Одержали вираз для $I_L(p)$ як відношення двох дробів:

$$I_L(p) = \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{p(p^2 a_2 + p b_2 + d_2)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Оскільки ступінь полінома знаменника більше ступеня полінома чисельника, то ми можемо використати в цьому випадку теорему розкладання. Знайдемо полюси у виразі для струму в котушці індуктивності. Для цього прирівняємо до нуля знаменник і знайдемо корені отриманого квадратного рівняння. Нехай ці корені будуть $p_1 = 0$, p_2 , p_3 :

$$I_L(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p - p_2} + \frac{A_3}{p - p_3}.$$

Припустимо, що корені дійсні і різні, тоді розрахунок лишків у полюсах можна здійснити в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{Re} s[I_L(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \right|_{p=p_1} = \left. \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{3a_2 p^2 + 2b_2 p + d_2} \right|_{p=p_1}, \\
A_2 &= \operatorname{Re} s[I_L(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \right|_{p=p_2} = \left. \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{3a_2 p^2 + 2 \cdot b_2 p + d_2} \right|_{p=p_2},
\end{aligned}$$

$$A_3 = \operatorname{Res}_{p=p_3} [I_L(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \right|_{p=p_3} = \left. \frac{p^2 a_1 + p b_1 + d_1}{3a_2 p^2 + 2b_2 p + d_2} \right|_{p=p_3}.$$

Після одержання числових значень коефіцієнтів на підставі перетворення Лапласа від зображення переходимо до оригіналу:

$$i_L(t) = A_1 + A_2 e^{p_2 \cdot t} + A_3 e^{p_3 \cdot t}.$$

Приклад 5.2 Для попереднього прикладу (приклад 5.1) розв'язати систему методом Крамера.

Розв'язання

Скористаємося результатами попереднього прикладу та запишемо операторну систему

$$\begin{cases} I_L(p)(R_1 + pL) + I_2(p)R_2 = \frac{E}{p} + Li_L(0), \\ I_C(p)\left(R_3 + \frac{1}{pC}\right) - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}, \\ I_L(p) = I_2(p) + I_C(p). \end{cases}$$

Перепишемо систему в іншому вигляді:

$$\begin{cases} I_L(p)[R_1 + pL] + I_2(p)[R_2] + I_C(p) \cdot [0] = \frac{E}{p} + Li_L(0), \\ I_L(p) \cdot [0] + I_2(p)[-R_2] + I_C(p)\left[R_3 + \frac{1}{pC}\right] = -\frac{u_C(0)}{p}, \\ I_L(p) \cdot [1] + I_2(p) \cdot [-1] + I_C(p) \cdot [-1] = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему в матричній формі

$$\begin{bmatrix} I_L(p) \\ I_2(p) \\ I_C(p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 + pL & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{p} + Li_L(0) \\ -\frac{u_C(0)}{p} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Запишемо визначник даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + pL & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Запишемо інші визначники для одержання виразів для шуканих величин за методом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{E}{p} + Li_L(0) & R_2 & 0 \\ -\frac{u_C(0)}{p} & -R_2 & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_1 + pL & \frac{E}{p} + Li_L(0) & 0 \\ 0 & -\frac{u_C(0)}{p} & R_3 + \frac{1}{pC} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} R_1 + pL & R_2 & \frac{E}{p} + Li_L(0) \\ 0 & -R_2 & -\frac{u_C(0)}{p} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Запишемо значення шуканих величин:

$$I_L(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad I_C(p) = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Всі інші дії та обчислення здійснюються аналогічно до прикладу 5.1.

Приклад 5.3 Розглянемо попередню схему із прикладу 5.1 (рис. 5.6) при впливі гармонічного коливання та особливості йогорозрахунку операторним методом. Дія змінюється за законом $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Розв'язання

Для розрахунку скористаємося операторною схемою заміщення з попереднього прикладу. Тільки джерело сигналу буде не постійним, а гармонічним.

Наведемо гармонічну дію у операторній формі за таблицею перетворень Лапласа:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow U(p) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

Спочатку запишемо вираз для дії із тригонометричної форми запису у алгебраїчну, яку і будемо підставляти у систему рівнянь, що буде отримана нижче

$$e(t) = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \dot{E} = E_a + jE_p.$$

Знайдемо закон зміни струму в котушці індуктивності та напруги на ємності до комутації. Для цього знаходимо значення всіх струмів у гілках схеми за допомогою операторного методу (законів Кірхгофа, контурних струмів та ін.)

$$\begin{cases} i_L(R_1 + j\omega L) + i_2 R_2 = \dot{E}, \\ i_C(R_3 + \frac{1}{j\omega C}) - i_2 R_2 = 0, \\ i_L = i_2 + i_C. \end{cases}$$

Виразимо з 3-го рівняння системи i_C :

$$i_C = i_L - i_2.$$

Підставимо i_C у друге рівняння систем:

$$(i_L - i_2)(R_3 + \frac{1}{j\omega C}) - i_2 R_2 = 0.$$

Виразимо з даного рівняння i_2 :

$$i_2 = \frac{1}{R_3 + R_2} i_L (R_3 + \frac{1}{j\omega C}) = 0.$$

Підставимо i_2 в 1-ше рівняння системи:

$$i_L (R_1 + j\omega L) + (\frac{1}{R_3 + R_2} i_L (R_3 + \frac{1}{j\omega C})) R_2 = \dot{E}$$

Виразимо i_L з отриманого рівняння:

$$i_L = \frac{\dot{E}}{(R_1 + j\omega L) + (\frac{1}{R_3 + R_2} (R_3 + \frac{1}{j \cdot \omega C})) R_2}.$$

Після підстановки числових значень і спрощення одержуємо такий вигляд струму в котушці індуктивності:

$$i_L = i_{L.a} + j i_{L.p}.$$

Тепер здійснюємо переведення алгебраїчної форми запису комплексного числа в показову форму запису, а потім у тригонометричну і тоді одержимо

$$i_L = I_L e^{j\psi} \Rightarrow I_L \sin(\omega t + \psi),$$

де I_L – діюче значення струму котушки індуктивності; ψ – фаза струму котушки індуктивності.

Тепер знайдемо струм на ємності з отриманої системи. Для цього додаємо 1-ше та 2-ге рівняння системи:

$$i_L (R_1 + j\omega L) + i_2 R_2 + i_C (R_3 + \frac{1}{j\omega C}) - i_2 R_2 = \dot{E}.$$

Після спрощення одержимо таке рівняння:

$$i_L (R_1 + j\omega L) + i_C \cdot (R_3 + \frac{1}{j\omega C}) = \dot{E}.$$

Виражаємо з одержаного рівняння струм i_C :

$$i_C = \frac{\dot{E} - i_L (R_1 + j\omega L)}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Після перетворень одержуємо комплексне число

$$i_C = a_C + j b_C.$$

Тепер одержимо напругу на ємності

$$U_C = i_C X_C = \frac{i_C}{j\omega C} = U_C e^{j\phi},$$

що у часовій області відповідає

$$u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \phi),$$

де U_C – діюче значення напруги на ємності; ϕ – фаза напруги на ємності.

Тепер одержуємо значення для струму у котушці індуктивності та напруги на ємності у момент часу $t = 0$:

$$i_L(0) = I_L \sin(\omega \cdot 0 + \psi) = I_{L,0},$$

$$U_C(0) = U_C \sin(\omega t + \phi) = U_{C,0}.$$

Тепер складаємо систему рівнянь на підставі операторних законів Кірхгофа для нашої схеми:

$$\begin{cases} I_L(p)(R_1 + pL) + I_2(p)R_2 = U(p) + Li_L(0), \\ I_C(p)(R_3 + \frac{1}{pC}) - I_2(p)R_2 = -\frac{u_C(0)}{p}, \\ I_L(p) = I_2(p) + I_C(p). \end{cases}$$

Далі розв'язуємо систему рівнянь одним із способів, зазначених у попередніх двох прикладах, з урахуванням того, що

$$U(p) = \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

Приклад 5.4 На вхід лінійного кола діє гармонічна напруга у вигляді функції $e(t) = 90 \sin(94.2t + 30^\circ)$. Знайти зображення гармонічної дії.

Розв'язання

Щоб знайти зображення, скористаємося таблицею перетворення Лапласа та запишемо формулу для оригіналу, якщо на вхід діє гармонічне коливання вигляду

$$\sin(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}.$$

Застосуємо цю формулу для нашого завдання:

$$E(p) = 90 \frac{p \sin 30^\circ + 94.2 \cos 30^\circ}{p^2 + 94.2^2} = 90 \cdot \frac{0.5p + 94.2 \cdot 0.87}{p^2 + 8873.64} =$$

$$= 90 \cdot \frac{0.5p + 55.854}{p^2 + 8873.64}.$$

Приклад 5.5 Для кола, що зображене на рис. 5.7, операторним методом знайти вираз миттєвих значень струму у нерозгалуженій частині кола при замиканні ключа, якщо $U = 200$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 400$ Ом, $C = 5$ мкФ.

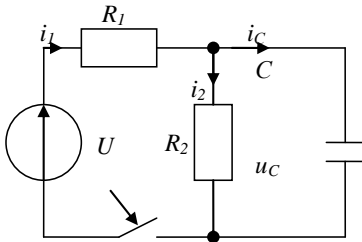


Рисунок 5.7

Розв'язання

Запишемо вираз для зображення постійної напруги у операторній формі

$$U(p) = \frac{200}{p}.$$

Знайдемо операторний опір кола після комутації:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_1 R_2 pC + R_1 + R_2}{R_2 pC + 1} = \frac{0.2p + 500}{2 \cdot 10^{-3} p + 1}.$$

Тепер запишемо вираз для струму у нерозгалуженій ділянці кола за допомогою операторного закону Ома:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{200}{p}}{\frac{0.2p + 500}{2 \cdot 10^{-3} p + 1}} = \frac{0.4p + 200}{p(0.2p + 500)}.$$

Визначимо оригінал струму двома способами.

У першому способі необхідно вираз для $I_1(p)$ подати у вигляді суми двох функцій, які після перетворень набудуть вигляду формул, наведених у таблиці 5.1:

$$\begin{aligned}
 I_1(p) &= \frac{0.4p + 200}{p(0.2p + 500)} = \frac{0.4p}{p(0.2p + 500)} + \frac{200}{p(0.2p + 500)} = \\
 &= \frac{0.4}{0.2p + 500} + \frac{200}{p(0.2p + 500)} = \frac{0.4}{0.2(p + \frac{500}{0.2})} + \frac{200}{0.2(p(p + \frac{500}{0.2}))} = \\
 &= \frac{2}{(p + 2500)} + \frac{1000}{p(p + 2500)} = \frac{2}{(p + 2500)} + \frac{2500}{p(p + 2500)} \cdot \frac{1000}{2500} = \\
 &= \frac{2}{(p + 2500)} + \frac{2500}{p(p + 2500)} \cdot \frac{2}{5}.
 \end{aligned}$$

Отже, остаточно одержали вираз для струму

$$I_1(p) = \frac{2}{(p + 2500)} + 0.4 \frac{2500}{p(p + 2500)}.$$

За таблицею перетворення Лапласа знаходимо

$$i(t) = 2e^{-2500t} + 0.4(1 - e^{-2500t}) = 0.4 + 1.6e^{-2500t} \text{ А.}$$

Тепер знайдемо цей струм за допомогою теореми розкладання

Запишемо вираз для струму

$$I_1(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0.4p + 200}{p(0.2p + 500)}.$$

Знайдемо корені знаменника $F_2(p) = p(0.2p + 500)$. Для цього знаменник прирівнюємо до нуля

$$p(0.2p + 500) = 0.$$

Корені знаменника будуть такі $p_1 = 0$, $p_2 = -2500$.

Визначаємо похідну знаменника

$$F_2'(p) = 0.2 \cdot 2p + 500.$$

За допомогою теореми розкладання струм можна подати у вигляді

$$i(t) = A_1 + A_2.$$

Константи A_1 та A_2 знайдемо за допомогою теореми розкладання

$$A_1 = \operatorname{Re}_{p_1} s I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \Big|_{p=p_1} = \frac{0.4p + 200}{0.4p + 500} \Big|_{p=0} e^{0t} = \frac{200}{500} \cdot 1 = 0.4,$$

$$A_2 = \operatorname{Re}_{p_2} s I(p) = \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \Big|_{p=p_2} = \frac{0.4p + 200}{0.4p + 500} \Big|_{p=-2500} e^{-2500t} =$$

$$= \frac{-800}{0.2} e^{-2500t} = 4000 e^{-2500t}.$$

Таким чином, одержимо вираз для струму

$$i(t) = 2e^{-2500t} + 0.4(1 - e^{-2500t}) = 0.4 + 1.6e^{-2500t} \text{ А.}$$

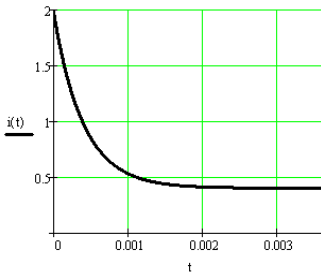


Рисунок 5.8

Знайдемо час переходного процесу

$$t_{pp} = 3\tau = \frac{3}{p} = \frac{3}{|-2500|} = 1.2 \text{ мс.}$$

За допомогою MathCAD побудуємо графік струму (рис. 5.8).

Приклад 5.6 Розрахувати вираз для миттєвого значення струму в індуктивності, якщо на вхід кола (рис. 5.9) діє гармонічна напруга $e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi)$. Номінали елементів кола такі: $E_m = 120 \cdot \sqrt{2}$ В, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 15$ Ом, $L = 450$ мГн, $C = 50$ мкФ, $\varphi = 30^\circ$, $f = 15$ Гц.

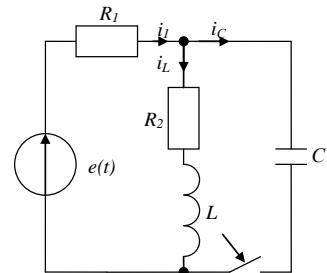


Рисунок 5.9

Розв'язання

Розрахуємо кутову частоту ω

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3.14 \cdot 15 = 92.4.$$

Запишемо напругу джерела

$$e(t) = E \sin(\omega t + \varphi) = 120 \sin(94.2t + 30^\circ).$$

Подамо напругу джерела у алгебраїчній формі:

$$120 \cdot \sin(94.2t + 30^\circ) \Leftrightarrow 120 \cdot \exp(-j30^\circ) = 120 \cdot (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) = 120 \cdot (0.866 + j0.5) = 103.92 + j60.$$

Отже, одержали вираз для напруги у комплексній формі

$$\dot{E} = 103.92 + j60.$$

Розрахуємо початкові умови. Для цього необхідно знайти значення струму у котушці індуктивності та напругу на ємності до комутації. До комутації ключ був розімкнутий. Зобразимо схему до комутації (рис. 5.10).

Оскільки схема до комутації була розірвана, то струм, що проходить у гілці з конденсатором, дорівнює нулю. Тому струм у котушці індуктивності розраховуємо за другим законом Кірхгофа.

Виберемо додатні напрямки проходження струмів у контурі (рис. 5.10) та складемо для нього рівняння на основі 2-го закону Кірхгофа:

$$\dot{I}_L R_1 + \dot{I}_L R_2 + \dot{I}_L X_L = \dot{E}.$$

Обчислимо реактивний опір котушки індуктивності \underline{Z}_L :

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j92.4 \cdot 450 \cdot 10^{-3} = 41.58 j.$$

Виразимо із одержаного рівняння струм \dot{I}_L

$$\begin{aligned} \dot{I}_L &= \frac{\dot{E}}{R_1 + R_2 + \underline{Z}_L} = \frac{103.92 + j60}{30 + 15 + j41.58} = \frac{103.92 + j60}{45 + j41.58} = \\ &= 1.91 - j0.432. \end{aligned}$$

Знайдемо напругу на котушці індуктивності

$$\begin{aligned} \dot{U}_C &= \dot{I}_L (R_2 + \underline{Z}_L) = (1.91 - j0.432) \cdot (15 + j41.58) = \\ &= 46.613 + j72.938. \end{aligned}$$

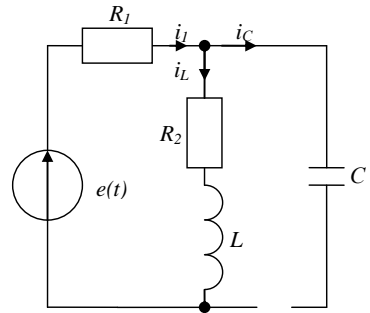


Рисунок 5.10

Запишемо закони зміни струму у котушці індуктивності та напруги на ємності. Для цього нам необхідно алгебраїчні форми запису струмів перевести у показникові.

Запишемо струм у котушці індуктивності та напругу на ємності у показниковій формі:

$$\begin{aligned} \dot{I}_L &= 1.91 - j0.432 = \sqrt{1.91^2 + (-0.432)^2} \exp[j \arctg(-0.432/1.91)] = \\ &= 1.959e^{-j12.737^\circ}, \\ \dot{U}_C &= 46.613 + j72.938 = \\ &= \sqrt{(46.613)^2 + 72.938^2} \exp[j \cdot \arctg(\frac{72.938}{46.613})] = 86.56e^{j57.418^\circ}. \end{aligned}$$

Запишемо струм у котушці індуктивності та напругу на ємності у вигляді гармонічних функцій часу:

$$i_L(t) = 1.959 \sin(94.2t - 12.7^\circ), \quad u_C(t) = 86.56 \sin(94.2t + 57.418^\circ).$$

У нульовий момент часу одержуємо такі значення ($t = 0$):

$$i_L(0) = 1.959 \sin(94.2 \cdot 0 - 12.7^\circ) = 1.959 \sin(-12.7^\circ) = -0.43 \text{ А},$$

$$u_C(0) = 86.56 \sin(94.2 \cdot 0 + 57.418^\circ) = 86.56 \sin(57.418^\circ) = 72.94 \text{ В}.$$

Зобразимо операторну схему заміщення (рис. 5.11).

Подамо гармонічний вплив $e(t)$ у операторній формі $U(p)$. Для цього знайдемо зображення функції

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Скористаємося формулою із таблиці перетворення Лапласа:

$$\begin{aligned} e(t) &= E_m \sin(\omega t + \varphi) \div \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{p \sin 30 + 94.2 \cos 30}{p^2 + 94.2^2} = \frac{p \cdot 0.5 + 94.2 \cdot 0.87}{p^2 + 8873.64} = \frac{0.5p + 55.857}{p^2 + 8873.64}. \end{aligned}$$

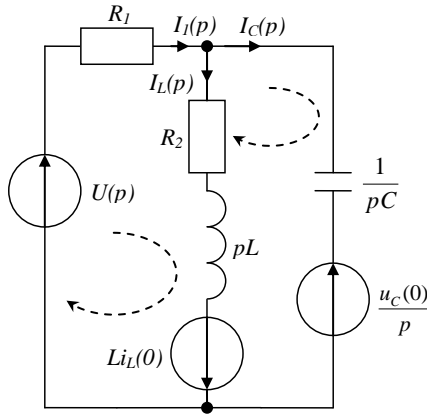


Рисунок 5.11 - Операторна схема заміщення

Подано гармонічний вплив $e(t)$ у операторній формі $U(p)$. Для цього знайдемо зображення функції

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Скористаємося формулою із таблиці перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} e(t) &= E_m \sin(\omega t + \varphi) \div \frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{p \sin 30 + 94.2 \cos 30}{p^2 + 94.2^2} = \frac{p \cdot 0.5 + 94.2 \cdot 0.87}{p^2 + 8873.64} = \frac{0.5p + 55.857}{p^2 + 8873.64}. \end{aligned}$$

Таким чином, одержали зображення джерела гармонічного впливу

$$U(p) = \frac{0.5p + 55.857}{p^2 + 8873.64}.$$

Для операторної схеми заміщення (рис. 5.12) складемо систему рівнянь на основі операторних законів Кірхгофа

$$\begin{cases} I_1(p) - I_L(p) - I_C(p) = 0, \\ I_1(p)R_1 + I_L(p)[R_2 + pL] = U(p) + Li_L(0), \\ -I_L(R_2 + pL) + I_C \frac{1}{pC} = -Li_L(0) - \frac{u_C(0)}{p}. \end{cases}$$

Дана система рівнянь розв'язується за допомогою методу Крамера.

Запишемо визначники системи для знаходження операторного струму у котушці індуктивності

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 + pL & 0 \\ 0 & -R_2 - pL & \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = \frac{9}{2} \cdot \frac{3p^2 + 2100p + 200000}{p} = \frac{13.5p^2 + 9450p + 900000}{p},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & Li_L(0) + \frac{U}{p} & 0 \\ 0 & -\frac{u_C(0)}{p} - Li_L(0) & \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{3p^2 + 2100p + 200000}{p^2} = \frac{36p^2 + 25200p + 2400000}{p^2}.$$

Запишемо вираз для операторного струму

$$I_L(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Після математичних перетворень одержимо такий вираз для операторного струму у котушці індуктивності:

$$I_L(p) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{5.805p^3 + 1681.8p^2 + 41511.48p + 13806547.752}{(p^2 + 8873.64)(3p^2 + 2100p + 200000)}.$$

Оскільки степінь знаменника більше, ніж степінь чисельника, то для знаходження оригіналу скористаємося теоремою розкладання та подамо вираз для струму у котушці індуктивності $I_L(p)$ у вигляді суми простих дробів:

$$I_L(p) = \frac{0.107}{p + 586.296} - \frac{0.428}{p + 113.709} + 1.295 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{94.2}{p^2 + (94.2)^2} + 1.966 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{p}{p^2 + (94.2)^2}.$$

Тепер перейдемо від зображення струму у котушці індуктивності до оригіналу. Для цього скористаємося таблицею перетворення Лапласа та одержимо такий вираз для струму у котушці індуктивності

$$i_L(t) = 0.107e^{-586.296t} - 0.428e^{-113.709t} + \\ + 1.295 \cdot 10^{-2} \sin(94.2t) - 1.966 \cdot 10^{-3} \cos(94.2t).$$

Побудуємо графік перехідного процесу струму у котушці індуктивності при гармонічному впливі за допомогою програми Mathcad (рис. 5.12).

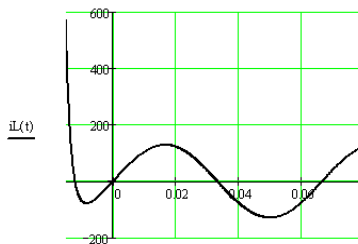


Рисунок 5.12

Приклад 5.7 Визначити напругу на конденсаторі та струми при замиканні ключа (рис. 5.13) і побудувати їх криві, якщо схема має такі номінали елементів $E=24$ В, $R=20$ Ом, $R_1=50$ Ом, $R_2=100$ Ом, $C=3$ мкФ.

Розв'язання

Розрахуємо початкові умови для напруги на конденсаторі u_C

На основі другого закону комутації запишемо

$$u_C(0-) = u_C(0+) = E = 24 \text{ В.}$$

Отже, маємо, що

$$u_C(0-) = E = 24 \text{ В.}$$

Зобразимо операторну схему заміщення (рис. 5.14)

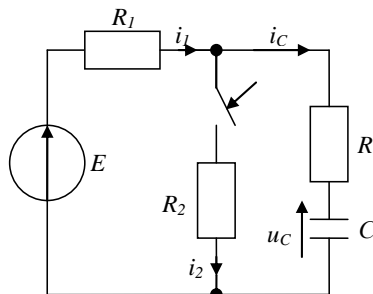


Рисунок 5.13

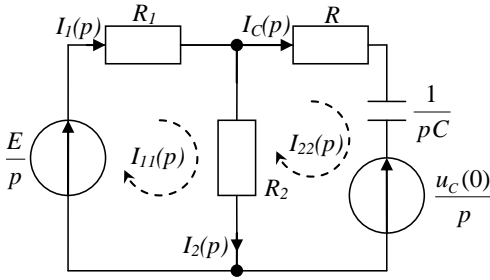


Рисунок 5.14

Для схеми, що зображена на рис. 6.14 виберемо додатні напрямки проходження контурних струмів у контурах та складемо систему рівнянь за методом контурних струмів:

$$\begin{cases} I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 = \frac{E}{p}, \\ -I_{11}(p)R_2 + I_{22}(p)(R + R_2 + \frac{1}{pC}) = -\frac{u_c(0)}{p}. \end{cases}$$

Розв'яжемо рівняння відносно контурного струму $I_{22}(p)$.

Запишемо визначники системи для розв'язання її методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R + R_2 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = (R_1 + R_2)(R + R_2 + \frac{1}{pC}) - R_2^2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{E}{p} & -R_2 \\ -\frac{u_c(0)}{p} & R + R_2 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix} = (\frac{E}{p})(R + R_2 + \frac{1}{pC}) - R_2 \frac{u_c(0)}{p}.$$

$$I_{22}(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-ER_1C}{(RR_1 + RR_2 + R_1R_2)Cp + R_1 + R_2}.$$

Після підстановки числових значень одержимо такий вираз

$$I_{22}(p) = \frac{-3.6 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 10^{-3} p + 150} = -0.15 \frac{1}{p + 6250}.$$

Контурний струм $I_{22}(p)$ збігається за напрямком та значенням зі струмом, який проходить через конденсатор, тому маємо

$$I_C(p) = I_{22}(p).$$

На основі таблиці перетворення Лапласа визначаємо оригінал струму у конденсаторі

$$i_C(t) = -0.15e^{-6250t} \text{ А.}$$

Знайдемо напругу на конденсаторі

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = \frac{1}{C} \int (-0.15e^{-6250t}) dt = 8 \cdot 10^{-3} e^{-6250t}.$$

Запишемо вираз для напруги на другому опорі

$$u_2(t) = u_C(t) + i_C(t) \cdot R = -3e^{-6250t}.$$

Тоді за законом Ома запишемо вираз для струму на другому опорі

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = -3 \cdot 10^{-2} e^{-6250t}.$$

За першим законом Кірхгофа визначимо струм, що проходить через перший опір:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_C(t) = -1.8e^{-6250t}.$$

Графіки зміни струму в колі та напруги на конденсаторі побудуємо за допомогою програми Mathcad (рис. 5.15 – рис. 5.18).

Як ми зазначили в теорії, перехідний процес закінчиться за час

$$t_{pp} = 3\tau = \frac{3}{|\lambda|} = \frac{3}{|-6250|} = 4.8 \cdot 10^{-4}.$$

Таким чином, графіки будемо будувати на інтервалі часу від 0 до $5 \cdot 10^{-4}$ с.

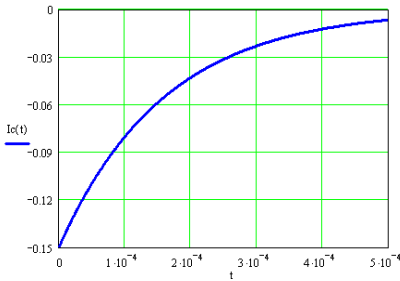


Рисунок 5.15

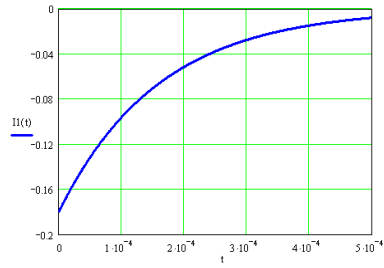


Рисунок 5.16

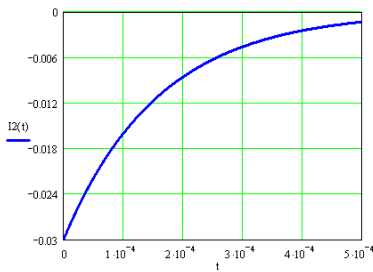


Рисунок 5.17

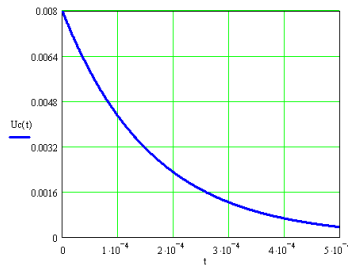


Рисунок 5.18

Приклад 5.8 Коло, що зображене на рис. 5.19, вмикається на постійну напругу $U = 125$ В. Знайти вираз для напруги на конденсаторі для трьох випадків:

- 1) $R = 250$ Ом, $L = 667$ мГн, $C = 2$ мкФ;
- 2) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 1$ мкФ;
- 3) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 5$ мкФ;

Розв'язання

Знайдемо операторний вхідний опір кола після комутації:

$$Z(p) = R + \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} =$$

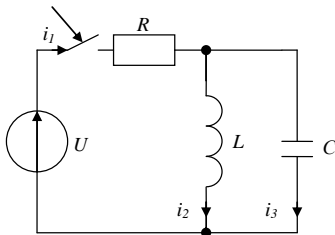


Рисунок 5.19

$$= \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1}.$$

Запишемо вираз для зображення вхідної напруги

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Знайдемо операторний струм у нерозгалуженій ділянці кола за допомогою операторного закону Ома

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{\frac{U}{p}}{\frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1}} = \frac{U(LCp^2 + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)}.$$

Знайдемо зображення напруги на конденсаторі

$$\begin{aligned} U_c(p) &= I_1(p) \frac{pL \frac{1}{pC}}{pL + \frac{1}{pC}} = \frac{U(LCp^2 + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)} \frac{pL}{p^2CL + 1} = \\ &= \frac{U}{RC(p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC})} = \frac{\frac{U}{RC}}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \end{aligned}$$

де

$$F_1(p) = \frac{U}{RC}, \quad F_2(p) = p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}.$$

1 Розв'яжемо задачу для першого випадку.

Підставимо числові значення у вираз для напруги на конденсаторі:

$$U_c(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\frac{U}{RC}}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} =$$

$$= \frac{\frac{125}{250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}}{p^2 + \frac{1}{250 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} p + \frac{1}{667 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 0.75 \cdot 10^6}.$$

Знайдемо корені знаменника

$$F_2(p) = p^2 + 2000p + 0.75 \cdot 10^6.$$

Для цього прирівняємо його до нуля:

$$p^2 + 2000p + 0.75 \cdot 10^6 = 0.$$

Після розв'язання одержуємо такі корені:

$$p_1 = -500, \quad p_2 = -1500.$$

Знайдемо похідну знаменника

$$F_2'(p) = 2p + 2000.$$

Тепер скористаємося теоремою розкладання.

Напругу на конденсаторі можна подати у вигляді суми простих дробів

$$u_C(t) = A_1 + A_2.$$

Коефіцієнти A_1 , A_2 обчислимо за допомогою теореми розкладання:

$$A_1 = \operatorname{Re}_s[U(p)] = \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} e^{p_1 t} \Big|_{p=p_1} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_1 t} \Big|_{p=-500} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot (-500) + 2000} e^{-500t} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{1000} e^{-500t} = 250e^{-500t},$$

$$A_2 = \operatorname{Re}_s[U(p)] = \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} e^{p_2 t} \Big|_{p=p_2} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_2 t} \Big|_{p=-1500} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot (-1500) + 2000} e^{-1500t} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{-1000} e^{-1500t} = -250e^{-1500t}.$$

Таким чином, остаточно одержимо вираз напруги на конденсаторі

$$u_c(t) = A_1 + A_2 = 250e^{-500t} - 250e^{-1500t}.$$

Знайдемо час перехідного процесу

$$t_{pp} = \frac{3}{|p|} = \frac{3}{|-500|} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Побудуємо графік перехідного процесу напруги на конденсаторі за допомогою програми MathCAD (рис. 6.20).

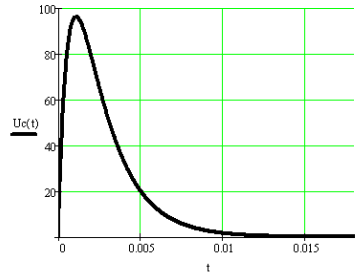


Рисунок 5.20

2 Розв'яжемо задачу для другого випадку

Підставимо числові значення у вираз для напруги на конденсаторі:

$$U_c(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\frac{U}{RC}}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} =$$

$$= \frac{125}{p^2 + \frac{1}{100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}p + \frac{1}{40 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}} = \frac{1.25 \cdot 10^6}{(p + 5000)^2}.$$

Знайдемо корені знаменника

$$F_2(p) = (p + 5000)^2.$$

Для цього прирівняємо його до нуля $(p + 5000)^2 = 0$.

Після розв'язання одержуємо такі корені:

$$p_1 = p_2 = -5000.$$

Оскільки корені кратні (порядок кратності 2), оригінал знаходимо за формулою для кратних коренів.

Спочатку знайдемо

$$m_k = m_1 = 2, (m_k - 1)! = (2 - 1)! = 1,$$

$$\frac{F_2(p)}{(p-p_1)^{m_k}} = \frac{(p+5000)^2}{(p+5000)^2} = 1.$$

Тепер скористаємося теоремою розкладання для кратних коренів:

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \operatorname{Re} s[U(p)] = \left[\frac{d}{dp} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} e^{p_1 t} \right] \Big|_{p=p_1} = \\ &= \left[\frac{d}{dp} \frac{F_1(p)}{1} e^{p_1 t} \right] \Big|_{p=p_1} = \left[\frac{d}{dp} 1.25 \cdot 10^6 e^{p_1 t} \right] \Big|_{p=p_1} = \\ &= 1.25 \cdot 10^6 t e^{p_1 t} \Big|_{p=-5000} = 1.25 \cdot 10^6 t e^{-5000t}. \end{aligned}$$

Знайдемо час перехідного процесу

$$t_{pp} = \frac{3}{|p|} = \frac{3}{|-5000|} = 6 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

Побудуємо графік перехідного процесу за допомогою програми MathCAD (рис. 5.21).

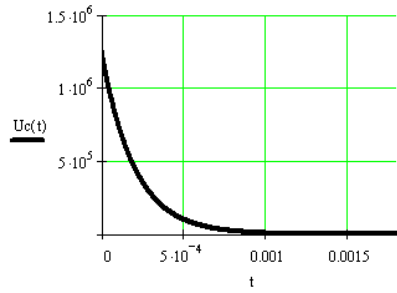


Рисунок 5.21

3 Розв'яжемо задачу для третього випадку

Підставимо числові значення у вираз для напруги на конденсаторі:

$$\begin{aligned} U_c(p) &= \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{\frac{U}{RC}}{p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC}} = \\ &= \frac{125}{100 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = \\ &= \frac{0.25 \cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6}. \end{aligned}$$

Знайдемо корені знаменника

$$F_2(p) = p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6.$$

Для цього прирівняємо його до нуля

$$p^2 + 2000p + 5 \cdot 10^6 = 0.$$

Після розв'язання одержуємо такі корені:

$$p_1 = -1000 + j2000, \quad p_2 = -1000 - j2000.$$

Знайдемо похідну знаменника

$$F_2'(p) = 2p + 2000.$$

Тепер скористаємося теоремою розкладання для комплексних коренів

$$u_C(t) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} \right] = 2 \operatorname{Re}[A_k] = 2 \operatorname{Re}(A_1).$$

Коефіцієнти A_1 , A_2 обчислимо за допомогою теореми розкладання:

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname{Res}[U(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} e^{p t} \right|_{p=p_1} = \left. \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p t} \right|_{p=p_1} = \\ &= \frac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot (-1000 + j2000) + 2000} e^{p_1 t} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{4000j} e^{(-1000 + j2000)t}, \\ A_2 &= \operatorname{Res}[U(p)] = \left. \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} e^{p_2 t} \right|_{p=p_2} = \left. \frac{0.25 \cdot 10^6}{2p + 2000} e^{p_2 t} \right|_{p=p_2} = \\ &= \frac{0.25 \cdot 10^6}{2 \cdot (-1000 - j2000) + 2000} e^{p_2 t} = \frac{0.25 \cdot 10^6}{-j4000} e^{(-1000 - j2000)t}. \end{aligned}$$

Таким чином, остаточно одержимо вираз напруги на конденсаторі:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= 2 \operatorname{Re}(A_1) = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{0.25 \cdot 10^6}{4000j} e^{(-1000 + j2000)t} \right] = \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{0.25 \cdot 10^6}{4000} e^{=1000t} \frac{e^{j2000t}}{e^{j90}} \right] = 2 \operatorname{Re} [62.5 e^{=1000t} e^{j(2000t - 90^\circ)}] = \\ &= 125 e^{=1000t} \operatorname{Re} [\cos(2000t - 90^\circ) + j \sin(2000t - 90^\circ)] = \\ &= 125 e^{=1000t} \sin(2000t) = 125 e^{=1000t} \sin(2000t). \end{aligned}$$

Знайдемо час перехідного процесу

$$t_{pp} = \frac{3}{|\operatorname{Re}(p)|} = \frac{3}{|-1000|} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

Побудуємо графік перехідного процесу напруги на конденсаторі за допомогою програми MathCAD (рис. 5.22).

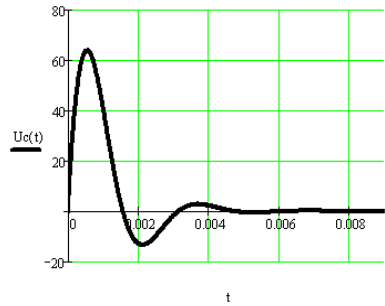


Рисунок 5.22

Таким чином, бачимо, що в межах однієї схеми можуть відбуватися різні процеси залежно від співвідношення елементів схеми.

5.6 Запитання для самоперевірки

- 1 Що лежить в основі операторного методу аналізу перехідних процесів?
- 2 У чому перевага операторного методу над класичним при аналізі перехідних процесів?
- 3 Чим замінюються операції диференціювання та інтегрування при операторному методі розрахунку схем?
- 4 Що таке пряме та зворотне перетворення Лапласа?
- 5 Які особливості конденсатора і котушки індуктивності при зображенні їх на операторних схемах?
- 6 Перелічить основні властивості перетворень Лапласа.
- 7 Дайте визначення та доведіть властивості лінійності.
- 8 Які особливості диференціювання та інтегрування оригіналу?
- 9 Сформулюйте теорему подібності.
- 10 Сформулюйте теорему запізнювання.
- 11 Сформулюйте теорему зсуву.
- 12 Який фізичний зміст згортання двох функцій?
- 13 Сформулюйте теорему згортання.

- 14 Які особливості диференціювання і інтегрування зображення?
- 15 Сформулювати теорему про згортання зображення.
- 16 Наведіть приклад законів Ома та Кірхгофа в операторній формі на послідовному коливальному контурі.
- 17 Які особливості перетворення джерела струму в джерело напруги в операторних схемах заміщення.
- 18 Перелічіть основні етапи розв'язання завдання операторним методом.
- 19 Які особливості операторних схем заміщення?
- 20 Як скласти та розв'язати операторні рівняння?
- 21 Як визначити оригінал, якщо є зображення?
- 22 Які умови застосування теореми розкладання?
- 23 Як знаходити оригінал, якщо корені знаменника дійсні, різні?
- 24 Як знаходити оригінал, якщо корені знаменника дійсні, рівні?
- 25 Як знаходити оригінал, якщо корені знаменника комплексно-спряжені?
- 26 Які особливості розрахунку схеми операторним методом при гармонічному впливі?

5.7 Завдання для самостійної роботи

5.1 Для схем, наведених на рис. 5.23, знайти всі струми та напруги у операторній формі, якщо на вхід діє постійна напруга.

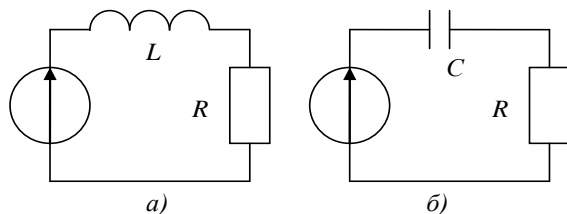


Рисунок 5.23

5.2 Знайти оригінал струму, якщо операторний струм схеми заданий у вигляді відношення двох поліномів:

$$1) I_L(p) = \frac{70 + 0.162p + 0988 \cdot 10^{-4} p^2}{p(0.65 \cdot 10^{-4} p^2 + 0.1065p + 36)};$$

$$2) I_L(p) = \frac{5.45 \cdot (3p^2 + 1150p + 11 \cdot 10^4)}{p(3p^2 + 1150p + 15 \cdot 10^4)};$$

$$3) I_L(p) = \frac{0.9p^2 + 495p + 45 \cdot 10^3}{p(0.2p^2 + 120p + 15 \cdot 10^3)}.$$

5.3. Знайти всі струми та напруги в схемі, наведеній на рис. 5.24, якщо на вхід діє постійна напруга $U = 10$ В та відомі параметри елементів схеми: $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 1$ кОм, $L = 10$ мГ, $C = 0.5$ мкФ.

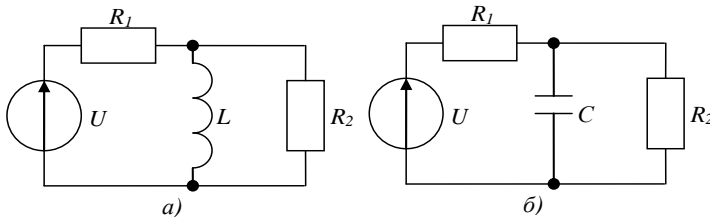


Рисунок 5.24

5.4 Знайти зображення гармонічного впливу, якщо на вхід лінійного кола діє гармонічна напруга у вигляді функції:

$$1) e(t) = 100 \sin(220t + 50^\circ);$$

$$2) e(t) = 200 \cos(320t + 40^\circ);$$

$$3) e(t) = 80 \cos(100t + 60^\circ).$$

5.5 Для задачі 5.1 знайти операторні струми та напруги у колі, якщо на вхід діє гармонічна напруга вигляду:

$$1) e(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi^\circ);$$

$$2) e(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi^\circ).$$

5.6 Для задачі 5.3 знайти операторні струми та напруги, якщо на вхід діє гармонічна напруга вигляду:

$$1) e(t) = 115 \sin(85t + 45^\circ);$$

2) $e(t) = 103 \cos(95t + 30^\circ)$.

5.7 Знайти вираз для струму та напруги на котушці індуктивності, для схеми, наведеної на рис. 5.25, операторним методом.

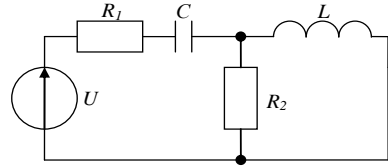


Рисунок 5.25

5.8 У схемі відбувається перехідний процес. Знайти вирази для струму та напруги на котушці індуктивності і на ємності, для схеми, наведеної на рис. 5.26, операторним методом при постійній вхідній напрузі, що дорівнює $U = 10\text{В}$, якщо схема має такі номінали:

- 1) $R_1 = 100\text{Ом}$, $R_2 = 1\text{кОм}$, $R_3 = 500\text{Ом}$, $L = 2\text{мГ}$, $C = 3\text{мкФ}$;
- 2) $R_1 = 10\text{Ом}$, $R_2 = 100\text{Ом}$, $R_3 = 500\text{Ом}$, $L = 20\text{мГ}$, $C = 30\text{нФ}$.

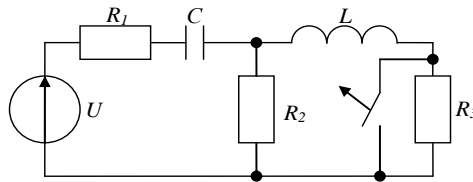


Рисунок 5.26

5.9 У схемі відбувається перехідний процес. Розрахувати всі струми та напруги при постійній вхідній напрузі $U = 10\text{В}$ для розмикання та замикання ключа у схемі, показаній на рис. 5.27 з номіналами елементів:

- 1) $R_1 = 100\text{Ом}$, $R_2 = 1\text{кОм}$, $L = 1\text{мГ}$, $C = 1\text{мкФ}$;
- 2) $R_1 = 600\text{Ом}$, $R_2 = 3\text{кОм}$, $L = 2\text{мкГ}$, $C = 5\text{нФ}$;
- 3) $R_1 = 1.5\text{кОм}$, $R_2 = 300\text{Ом}$, $L = 70\text{мГ}$, $C = 0.1\text{мкФ}$;
- 4) $R_1 = 100\text{Ом}$, $R_2 = 700\text{Ом}$, $L = 70\text{нГ}$, $C = 1\text{пф}$.

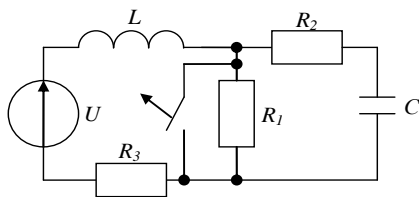


Рисунок 5.27

5.10 Знайти всі струми у колі операторним методом і побудувати їх графіки зміни у часі (рис. 5.28) після комутації, якщо відомі номінали елементів схеми: $R_1 = 30 \text{ Ом}$, $R_2 = 5 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $L = 90 \text{ мГ}$, $C = 0.9 \text{ мФ}$, $u(t) = 180 \sin(300t + 45^\circ) \text{ В}$.

5.11 Для задачі 5.10 розрахувати всі струми у колі операторним методом і побудувати їх графіки зміни у часі, якщо ключ замикається.

5.12 Розрахувати всі струми у схемі (рис. 5.29) операторним методом, якщо відомо:

1) $u(t) = 10 \text{ В}$, $R_1 = 770 \text{ Ом}$, $R_2 = 1 \text{ кОм}$, $R_3 = 1 \text{ кОм}$, $L = 65 \text{ мГ}$, $C = 1.8 \text{ мкФ}$;

2) $u(t) = 10 \text{ В}$, $R_1 = 280 \text{ Ом}$, $R_2 = 1.5 \text{ кОм}$, $R_3 = 900 \text{ Ом}$, $L = 45 \text{ мГ}$, $C = 7 \text{ мкФ}$;

3) $u(t) = 10 \sin(90t + 45^\circ) \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$, $R_3 = 700 \text{ Ом}$, $L = 95 \text{ мГ}$, $C = 0.2 \text{ мкФ}$;

4) $u(t) = 12 \cos(90t + 45^\circ) \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ кОм}$, $R_3 = 700 \text{ Ом}$, $L = 95 \text{ мГ}$, $C = 0.2 \text{ мкФ}$.

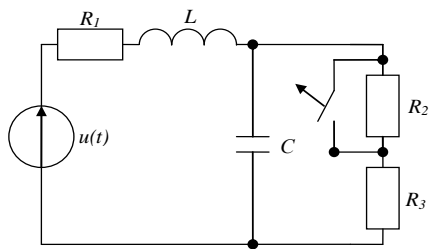


Рисунок 5.28

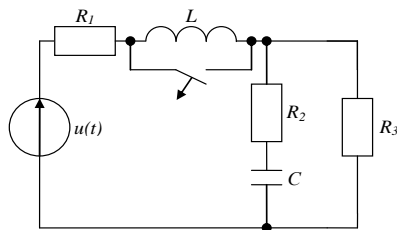


Рисунок 5.29

РОЗДІЛ 6 РОЗРАХУНОК ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСОВ ЧАСОВИМ МЕТОДОМ

Перш ніж перейти до безпосереднього розгляду даного питання, розглянемо математичний апарат функцій, на яких ґрунтується даний метод.

6.1 Функція Хевісайда

Функція Хевісайда (рис. 6.1), або, по-іншому, функція одичної сходинки $1(t)$ визначається в такий спосіб:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

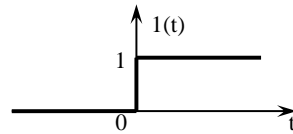


Рисунок 6.1

При дослідженні перехідних процесів будемо вважати, що $1(0) = 0$.

Властивості функції Хевісайда

1 Множення на константу та зсув в часі (рис. 6.2):

$$A1(t-t_0) = \begin{cases} A, & t \geq t_0, \\ 0 & t < t_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

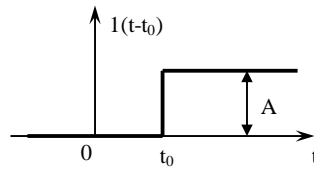


Рисунок 6.2

2 Інтегрування (рис. 6.3):

$$\int_{-\infty}^{t_1} A \cdot 1(t-t_0) dt = \begin{cases} 0, & t_1 < t_0, \\ A \cdot (t_1 - t_0), & t_1 > t_0. \end{cases} \quad (6.3)$$

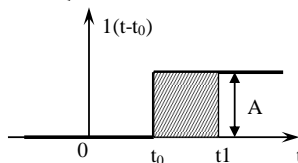


Рисунок 6.3

3 Диференціювання (рис. 6.4):

$$\frac{d}{dt} \cdot 1(t-t_0) = \delta(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0, \\ \infty, & t = t_0. \end{cases} \quad (6.4)$$

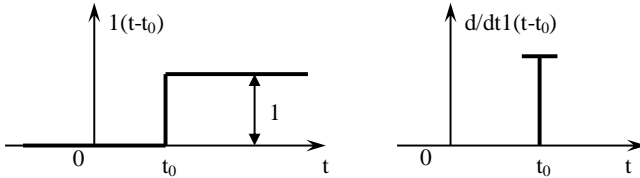


Рисунок 6.4

4 Зображення за Лапласом (рис. 6.5):

$$1(t) \rightarrow \frac{1}{p}, \quad A \cdot 1(t-t_0) \rightarrow \frac{A}{p} \cdot e^{-p \cdot t}. \quad (6.5)$$

Застосування функції Хевісайда

1 Функцію одиничної сходинки $1(t)$ називають функцією включення, таким чином, вона заміняє ключ (рис. 6.5).

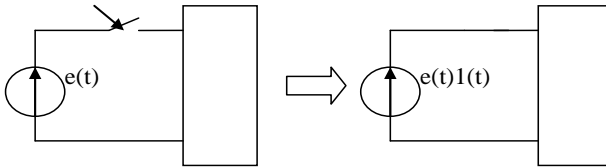


Рисунок 6.5

2 Одиничний прямокутний імпульс можна представити суперпозицією (накладенням) зсунутих у часі функцій Хевісайда (рис. 6.6).

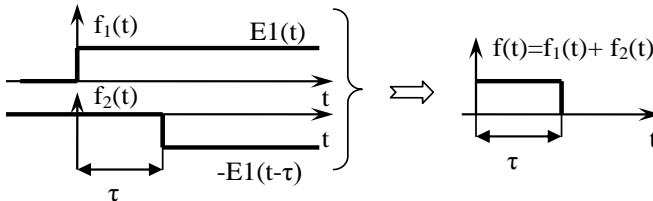


Рисунок 6.6

6.2 Функція Дірака

Функція Дірака - це імпульс нескінченно малої тривалості з нескінченно великою амплітудою. Площа, обмежена цим імпульсом, дорівнює одиниці. Тому цей імпульс ще називають одиничним імпульсом.

Візьмемо прямокутний імпульс $f(t)$ з амплітудою $1/\tau$, тоді $S = 1$ (рис. 6.7).

Для того щоб площа під ним залишалася незмінною при зменшенні тривалості імпульсу τ , необхідно пропорційно збільшувати його амплітуду.

Функцію $f(t)$ можна представити сумою функцій Хевісайда (рис. 6.8) $f(t) = \frac{1}{\tau}(1(t + \frac{\tau}{2}) - 1(t - \frac{\tau}{2}))$.

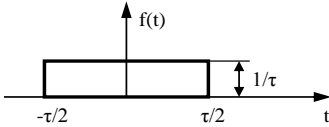


Рисунок 6.76

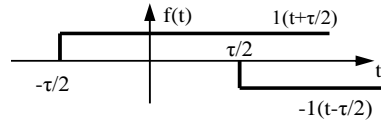


Рисунок 6.8

Функцію Дірака можна одержати граничним переходом

$$\delta(t) = \lim[f(t)], \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Властивості функції Дірака

1 Зсув у часі та множення на константу

$$A \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} A \cdot \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases} \quad (6.6)$$

2 Множення на функцію

$$f(t) \cdot \delta(t - t_0) = \begin{cases} f(t_0) \cdot \infty, & t = t_0, \\ 0, & t \neq t_0. \end{cases} \quad (6.7)$$

3 Інтегрування

$$\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} A \cdot \delta(t-t_0) dt = A \cdot 1 = A, \quad (6.8)$$

де δ – околиця точки t_0

$$\int_{-\infty}^t A \cdot \delta(t-t_0) dt = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ A, & t \geq t_0. \end{cases} \quad (6.9)$$

4 Фільтруюча властивість

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-t_0) dt = f(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = f(t_0). \quad (6.10)$$

5 Згоргання

$$\delta(t) * f(t) = f(t); \quad \Rightarrow \quad \int f(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau = f(t). \quad (6.11)$$

6 Зв'язок із функцією Хевісайда

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}. \quad (6.12)$$

7 Зображення за Лапласом

$$\delta(p) = 1. \quad (6.13)$$

8. Розмірність $\delta(t)$ [1/c].

6.3 Передавальна функція

У загальному випадку передавальна функція визначається як відношення реакції кола до параметрів дії або відношення вихідного сигналу до вхідного.

Передавальна функція може бути як за напругою, так і за струмом, і за потужністю.

При знаходженні передавальної функції можна користуватися для розрахунку простими рівняннями Кірхгофа для знаходження вихідного сигналу (струму або напруги).

Для певного виду схем (рис. 6.9) передавальну функцію за напругою можна записати відразу.

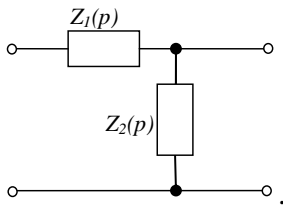


Рисунок 6.9

Для схем, зображених на рис. 6.9, передавальна функція за напругою у операторній формі записується

$$K_U(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)}.$$

Вихідна напруга визначається

$$U_{ВИХ}(p) = I_{ВХ}(p) \cdot Z_2(p).$$

Вхідний струм визначається

$$I_{ВХ}(p) = \frac{U_{ВХ}}{Z_1(p) + Z_2(p)}.$$

Підставимо одержані результати у вираз для передавальної функції за напругою:

$$\begin{aligned} K_U(p) &= \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{I_{ВХ}(p) \cdot Z_2(p)}{U_{ВХ}(p)} = \\ &= \frac{U_{ВХ}}{Z_1(p) + Z_2(p)} \cdot \frac{Z_2(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}. \end{aligned}$$

У результаті одержали вираз для передавальної функції за напругою

$$K_U(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}, \quad (6.14)$$

де $Z_1(p)$ та $Z_2(p)$ – операторні опори кола, які можуть бути як дійсними, так і комплексними.

Характер $Z_1(p)$ та $Z_2(p)$ залежить від параметрів елементів схеми. Формула (7.14) так само справедлива і для схем, які перетворюються до вигляду схем, зображених на рис. 6.9.

Розглянемо найпростіше RL-коло, що зображене на рис. 6.10 а. Будемо вважати, що опір приймача на виході кола

настільки великий, що струм i_2 дуже малий відносно струму i_1 , тобто будемо вважати, що $i_2 = 0$.

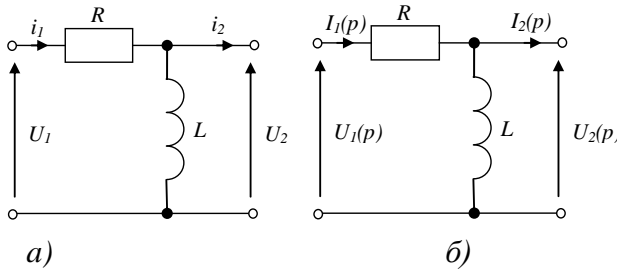


Рисунок 6.10

На рис. 6.10 б показана операторна схема заміщення схеми, що зображена на рис. 6.10 а.

При нульових початкових умовах для нашого кола у операторній формі маємо, де $Z_2(p) = pL$, а $Z_1(p) = R$.

Передавальна функція кола за напругою, що зображене на рис. 6.10 б, визначається як відношення зображень вихідної та вхідної напруги:

$$K_U(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{Z_1(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)} = \frac{pL}{R + pL}.$$

6.4 Імпульсна характеристика

Імпульсною характеристикою називається реакція кола (напруга або струм) на виході при прикладанні до входу кола дельта-функції $\delta(t)$ (струму або напруги, рис. 6.11).

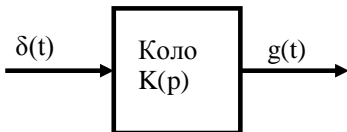


Рисунок 6.11

Розмірність $g(t)$ дорівнює розмірності реакції, діленої на розмірність впливу i на секунду.

Якщо не враховувати розмірність, то імпульсною характеристикою можна вважати реакцію кола на функцію Дірака.

Імпульсна характеристика характеризує вільний процес. Інакше кажучи, якщо моментально збудили коло нескінченно вузьким імпульсом з нескінченною амплітудою та відразу вплив забрати, то коло повернеться у вихідний стан (якщо воно стійке). Цей процес і буде за формою збігатися з імпульсною характеристикою $g(t)$. Щоб побачити даний процес на осцилографі, необхідно на вхід лінійного кола подати періодичну послідовність імпульсів тривалістю τ , з періодом T , щоб $\tau \ll t_{pp}$ і $T \gg t_{pp}$, де t_{pp} – час згасання вільної складової перехідного процесу, або час перехідного процесу.

Оскільки зображення за Лапасом $\delta(p) = 1$, то реакція у операторному вигляді $\delta(p)$ буде чисельно дорівнює передавальній функції $K(p)$

$$G(p) = \delta(p)K(p) = K(p). \quad (6.15)$$

Оригінал імпульсної характеристики $g(t)$ знаходимо за допомогою зворотного перетворення Лапласа:

$$g(t) = L^{-1}\{K(p)\}. \quad (6.16)$$

Таким чином, імпульсну характеристику знаходимо зворотним перетворенням Лапласа від передавальної функції.

6.5 Перехідна характеристика

Перехідною характеристикою називається реакція кола (струм або напруга) на виході, якщо на вхід прикладений одиничний східчастий вплив (струму або напруги).

Перехідна характеристика чисельно дорівнює реакції кола на вплив у вигляді функції Хевісайда, а її розмірність – це відношення розмірності реакції до розмірності дії (рис. 6.12).

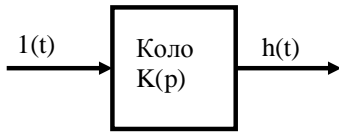


Рисунок 6.12

Розмірність $h(t)$ зазначаємо для того, щоб при знаходженні реакції кола на вплив довільної форми одержували необхідну розмірність.

При під'єднанні кола до джерела одиничної напруги перехідна характеристика струму називається перехідною провідністю, а при під'єднанні кола до джерела одиничного струму перехідна характеристика напруги називається перехідним опором.

Якщо на вхід кола подати одиничний східчастий імпульс (струму або напруги), то відбувається перехід від одного сталого режиму до іншого.

Перехідну характеристику можна визначити операторним методом з урахуванням зображення функції Хевісайда $1(t) \rightarrow \frac{1}{p}$

$$H(p) = K(p) \frac{1}{p} = \frac{K(p)}{p}. \quad (6.17)$$

Для знаходження оригіналу $h(t)$ необхідно виконати зворотне перетворення Лапласа

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\}. \quad (6.18)$$

Таким чином, перехідна характеристика може бути знайдена як зворотне перетворення Лапласа від передавальної функції, поділеної на комплексну змінну p .

Перехідну характеристику можна також одержати класичним методом. Для цього необхідно розрахувати перехідний процес щодо шуканої реакції при включенні кола на постійний вплив.

Для одержання стійкого зображення перехідної характеристики на осцилографі необхідно подати на вхід кола періодичну послідовність прямокутних імпульсів з періодом, що на багато

перевищує час тривалості перехідного процесу. Це необхідно для того, щоб перехідний процес реакції кола на зникнення імпульсу закінчився до надходження наступного імпульсу. Тривалість імпульсу так само повинна перевищувати час, необхідний для закінчення перехідного процесу. Тоді реакція на передній фронт імпульсу за формою збігається з перехідною характеристикою.

6.6 Знаходження реакції кола на вплив операторним методом

Зв'язок імпульсної та перехідної характеристик:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t), \quad h(t) = \int_0^t g(t) dt. \quad (6.19)$$

Постановка завдання полягає в тому, що є коло, на вхід якого подали вхідний сигнал довільної форми, і необхідно знайти реакцію кола на цей сигнал операторним методом (рис. 7.13).

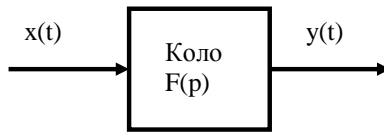


Рисунок 6.13

- 1 Знаходимо передавальну характеристику $K(p)$.
- 2 Знаходження зображення дії $x(t) \rightarrow X(p)$.
- 3 Знаходження реакції:

$$Y(p) = X(p)K(p). \quad (6.20)$$

- 4 Знаходження оригіналу за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$y(t) = L^{-1}\{Y(p)\}. \quad (6.21)$$

6.7 Знаходження реакції кола на дію часовим методом

Часовий метод знаходження реакції кола на вхідний сигнал ще називають інтегралом Дюамеля або інтегралом суперпозиції, що ґрунтується на згортанні двох функцій.

Покажемо фізичний зміст згортання двох функцій:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) \cdot f_2(\tau) d\tau. \quad (6.22)$$

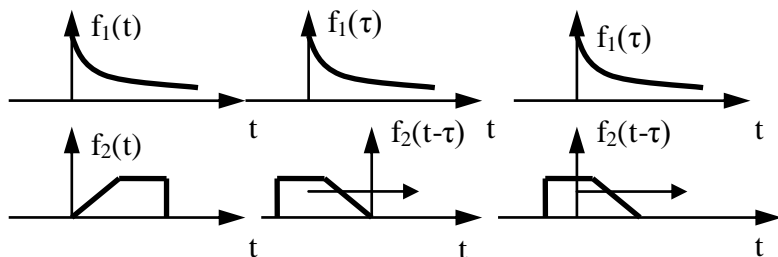


Рисунок 6.14

Фізично згортання двох функцій означає, що ми беремо одну із двох функцій (можна будь-яку) і обертаємо (відображаємо) її відносно осі ординат (вона виявиться у від'ємній області) і потім пересуваємо цю функцію праворуч (рис. 6.14). Як тільки функція $f_2(t-\tau)$ почне перетинати нуль, вона почне перекриватися з функцією $f_1(\tau)$. Оскільки інтеграл від функції – це площа під графіком цієї функції, то згортання двох функцій – це площа області перетину цих функцій.

Знайдемо відгук кола на довільний вплив за допомогою імпульсної та перехідної характеристик з урахуванням того, що

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t),$$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)g(\tau)d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h'(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h'(\tau)d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

Диференціювати можна і вхідну функцію, тому що в операторному вигляді функція реакції має вигляд

$$Y(p) = pX(p) \frac{K(p)}{p} \rightarrow x'(t) \cdot h(t).$$

Тому інтеграл згортання можна записати по-іншому:

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x'(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\tau)h(\tau)d\tau. \tag{6.24}$$

Припустимо, у нас є лінійне коло (рис. 6.15), що має передатну функцію $K(p)$, імпульсну $g(t)$ та перехідну $h(t)$ характеристики.

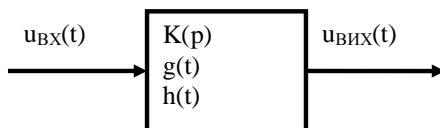


Рисунок 6.15

Запишемо вихідний сигнал за допомогою інтеграла Дюамеля:

$$\begin{aligned}
 u_{ВИХ}(t) &= \begin{cases} \int_0^t u_{ВХ}(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t u_{ВХ}(t-\tau)g(\tau)d\tau, \\ \int_0^t u'_{ВХ}(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^t u'_{ВХ}(t-\tau)h(\tau)d\tau. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

Але при обчисленні відгуку кола на дію, закон зміни якого починається не з нуля, а з якогось початкового рівня U_0 (рис. 6.16), виникають деякі проблеми при інтегруванні. Справа

у тому, що похідна від вхідного сигналу буде мати перегиби з ваговим коефіцієнтом U_0 :

$$u'_{BX}(t) = U_0 \delta(t) + u'_{BX} = U_{BX}(0) \delta(t) + u'_{BX}.$$

Будемо шукати реакцію на U_{BX} , використовуючи інтеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} u_{BHX}(t) &= \int_0^t [u_{BX}(0) \delta(t) + u'_{BX}(\tau)] h(t-\tau) d\tau = \\ &= u_{BX}(0) \int_0^t \delta(\tau) h(t-\tau) d\tau + \int_0^t u'_{BX}(\tau) h(t-\tau) d\tau = U_0 h(t) + \\ &+ \int_0^t u'_{BX}(\tau) h(t-\tau) d\tau = U_0 h(t) + \int_0^t u'_{BX}(t-\tau) h(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Аналогічно можемо записати і для імпульсної характеристики:

$$u_{BHX}(t) = \int_0^t u_{BX}(t-\tau) g(\tau) d\tau.$$

У цьому може виникнути потреба, оскільки імпульсна характеристика так само може містити функцію $\delta(t)$, оскільки

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

У цьому випадку $g(t) = h(0) \delta(t) + h'(t)$ й містить у собі δ -функцію. Імпульсна характеристика містить δ -функцію, якщо перехідна характеристика починається не з нуля (рис. 6.17) або степінь полінома чисельника й знаменника схемної функції однакові при розрахунку однієї й тієї самої перехідної характеристики.

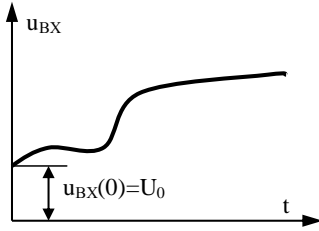


Рисунок 6.16

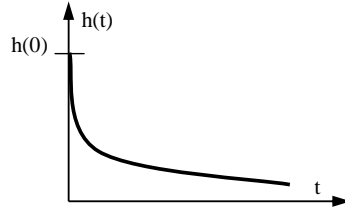


Рисунок 6.17

Запишемо для цього випадку інтеграл Дюамеля

$$\begin{aligned} u_{ВИХ}(t) &= \int_0^t u_{BX}(t-\tau)[h(0)\delta(\tau) + h'(\tau)]d\tau = \\ &= h(0) \int_0^t u_{BX}(t-\tau)\delta(\tau)d\tau + \int_0^t u_{BX}(t-\tau)h'(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Остаточно одержимо:

$$\begin{aligned} u_{ВИХ}(t) &= h(0)u_{BX}(t) + \int_0^t u_{BX}(t-\tau)h'(\tau)d\tau = \\ &= h(0)u_{BX}(t) + \int_0^t u_{BX}(\tau)h'(t-\tau)d\tau, \\ u_{ВИХ}(t) &= h(0)u_{BX}(t) + \int_0^t u_{BX}(t-\tau)g(\tau)d\tau = \\ &= h(0)u_{BX}(t) + \int_0^t u_{BX}(\tau)g(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

При розрахунку реакції форму інтеграла Дюамеля вибирають, виходячи з того, що легше розрахувати, похідну вхідного сигналу або перехідної характеристики.

У деякій літературі перехідну характеристику $h(t)$, що чисельно дорівнює струму, називають перехідною провідністю та позначають як $g(t)$, а перехідну функцію, що чисельно дорівнює напрузі, називають перехідною функцією напруги. Але вар-

то пам'ятати, що обидві ці функції є часовими характеристиками і так само називаються перехідними характеристиками та позначаються $h(t)$. Так само не слід плутати перехідну провідність із імпульсною характеристикою. При використанні в розрахунку однієї із цих характеристик необхідно чітко зазначити, яку з них ви використаєте.

Розглянемо вхідний вплив у вигляді складної функції (рис. 6.18).

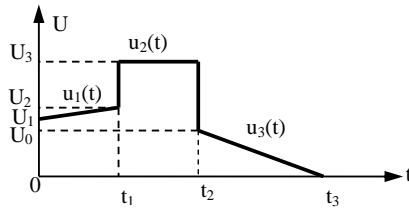


Рисунок 6.18

Скористаємося для розрахунку інтегралом Дюамеля.

Заданий графік зміни зовнішньої напруги розіб'ємо на ділянки та запишемо вираз для струму кожної ділянки:

$$1) 0 \leq t < t_1; \quad i(t) = U_0 h(t) + \int_0^t u_1'(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (6.27)$$

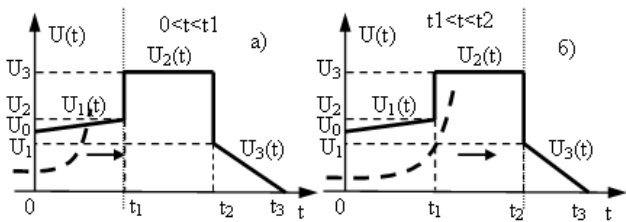


Рисунок 6.19 а, б

На першому інтервалі графік перехідної характеристики (6.18) буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ у довільній точці t і переміщається праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 6.19 а):

$$2) t_2 \leq t < t_1; \quad i(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) h(t-\tau) d\tau + (U_2 - U_1) h(t-t_1) + \int_t^{t_1} u'_2(\tau) h(t-\tau) d\tau; \quad (6.28)$$

На другому інтервалі (6.18) графік перехідної характеристики буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ у довільній точці t і переміщуватися праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 6.19 б), а так само перетинати графік вхідного сигналу (6.18) на першому проміжку в точці t_1 :

$$3) t_2 \leq t < t_3; \quad i(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) h(t-\tau) d\tau + (U_2 - U_1) h(t-t_1) + \int_t^{t_1} u'_2(\tau) h(t-\tau) d\tau + (U_3 - U_2) h(t-t_2) + \int_{t_2}^t u'_3(\tau) h(t-\tau) d\tau; \quad (6.29)$$

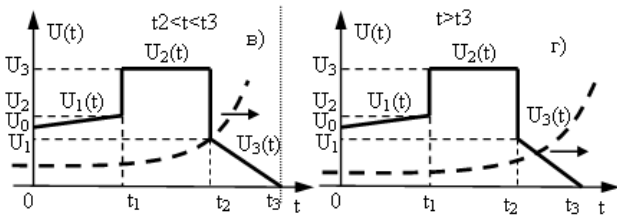


Рисунок 6.19 в, з

На третьому інтервалі графік перехідної характеристики буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ (рис. 6.18) у довільній точці t і переміщатися праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 6.19 в), а так само перетинати графік вхідного сигналу на першому проміжку в точці t_1 , а на другому проміжку – в точці t_2 :

$$\begin{aligned}
4)t_3 \leq t < \infty; \quad i(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) h(t-\tau) d\tau + \\
+ (U_2 - U_1) h(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau) h(t-\tau) d\tau + \\
+ (U_3 - U_2) h(t-t_2) + \int_{t_2}^{t_3} u'_3(\tau) h(t-\tau) d\tau.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

На четвертому інтервалі графік перехідної характеристики буде перетинати графік вхідного сигналу $u(t)$ (рис. 7.18) у довільній точці t і переміститися праворуч (графік показаний штриховою лінією на рис. 7.19 г), а так само перетинати графік вхідного сигналу на першому проміжку у точці t_1 , а на другому проміжку – у точці t_2 і на третьому проміжку – у точці t_3 .

У даних розрахункових виразів прийняті такі позначення: $u'_1(t)$, $u'_2(t)$ і $u'_3(t)$ – похідні від напруги розглянутих ділянок за часом, у яких замість t підставляється τ .

6.8 Приклади розв'язування задач

Приклад 6.1 Знайти реакцію довільного кола на вхідний сигнал у загальному вигляді. Вхідний сигнал заданий у вигляді рівнобедреного трикутника (рис. 6.20).

Розв'язання

Даний сигнал $u_{BX}(t)$ можна подати у вигляді суми сигналів $u_1(t)$, $u_2(t)$ і $u_3(t)$ (рис. 6.20 б). Тут досить знайти реакцію за допомогою інтеграла Дюамеля тільки на одну функцію $u_1(t) = U_0 \cdot t$. Припустимо, що ця реакція дорівнює $u_{1,BHX}(t)$, тоді реакція на весь вхідний сигнал буде знайдена в такий спосіб із застосуванням принципу суперпозиції

$u_{BHX}(t) = u_{1,BHX}(t)l(t) - 2u_{1,BHX}(t-t_1)l(t-t_1) + u_{1,BHX}(t-t_2)l(t-t_2)$. Для побудови графіків за допомогою програми MathCAD важливо

множити на функцію Хевісайда. У цій програмі функція $1(t)$ позначається через $\Phi(t)$.

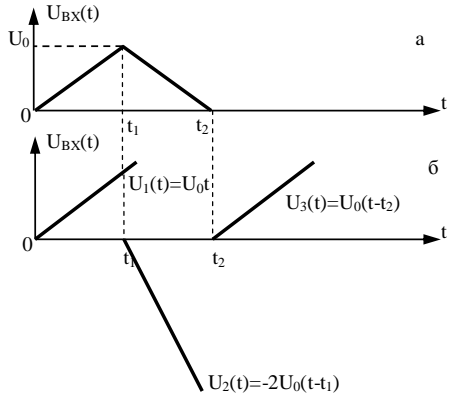


Рисунок 6.20

Приклад 6.2 Знайти реакцію кола на трикутний імпульс $s(t)$ (рис. 6.21) з імпульсною характеристикою $g(t)$.

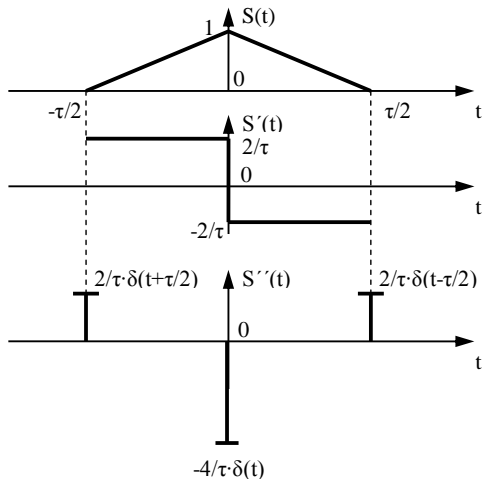


Рисунок 6.21

Розв'язання

Двічі продиференціюємо сигнал $s(t)$. Графіки продиференційованих сигналів $s'(t)$ і $s''(t)$ розміщені під графіком $s(t)$. Незавжди помітити, що друга похідна сигналу являє собою суму трьох δ -імпульсів, коефіцієнти при яких дорівнюють стрибком першої похідної $s'(t)$. Тоді одержуємо

$$s''(t) = \frac{2}{\tau} \delta(t + \frac{\tau}{2}) + \frac{2}{\tau} \delta(t - \frac{\tau}{2}) - \frac{4}{\tau} \delta(t).$$

З огляду на що $s''(t) \leftrightarrow p^2 S(p)$ за операторним численням, праву частину одержуємо тоді у вигляді

$$p^2 S(p) = \frac{2}{\tau} e^{p \cdot \tau / 2} + \frac{2}{\tau} e^{-p \cdot \tau / 2} - \frac{4}{\tau}.$$

Звідси знайдемо зображення сигналу

$$S(p) = \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{p \cdot \tau / 2} + \frac{2}{\tau} e^{-p \cdot \tau / 2} - \frac{4}{\tau} \right).$$

Знайдемо реакцію кола на цей сигнал. Реакція кола в операторній формі $U(p)$ дорівнює зображенню добутка імпульсної характеристики на операторну дію:

$$U(p) = G(p)S(p) = G(p) \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{p \cdot \tau / 2} + \frac{2}{\tau} e^{-p \cdot \tau / 2} - \frac{4}{\tau} \right).$$

Запишемо оригінал реакції кола, що визначається зворотним перетворенням Лапласа від операторної реакції:

$$\begin{aligned} u(t) &= L^{-1}[U(p)] = L^{-1}[G(p)S(p)] = \\ &= L^{-1}\left[G(p) \frac{1}{p^2} \left(\frac{2}{\tau} e^{p \cdot \tau / 2} + \frac{2}{\tau} e^{-p \cdot \tau / 2} - \frac{4}{\tau} \right)\right]. \end{aligned}$$

Приклад 6.3 Знайти імпульсну, перехідну характеристику та вплив для сигналу (рис. 6.22) в схемі, зображеній на рис. 6.20.

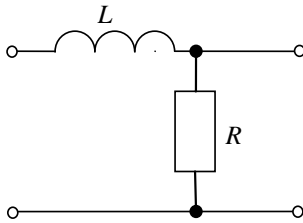


Рисунок 6.22

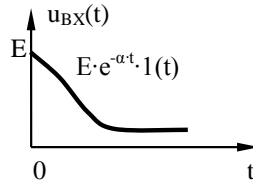


Рисунок 6.23

Розв'язання

Для розв'язання скористаємося операторним методом.

1 Знайдемо передавальну функцію.

Для нашої схеми знайдемо передавальну функцію кола за напругою

$$K_U(p) = \frac{R}{pL + R} = \frac{1}{pL/R + 1} = \frac{1}{p\tau + 1} = \frac{1/\tau}{p + 1/\tau}.$$

2 Знайдемо імпульсну характеристику

$$g(t) = L^{-1}[K_U(p)] = L^{-1}\left[\frac{1/\tau}{p + 1/\tau}\right] = \frac{1}{\tau} L^{-1}\left[\frac{1}{p + 1/\tau}\right] = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

За таблицю перетворень Лапласа або за допомогою теореми розкладання знаходимо, що $\frac{1}{p + 1/\tau} \rightarrow e^{-t/\tau}$.

3. Знайдемо перехідну характеристику

$$h(t) = \int_0^t g(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-t/\tau} dt = 1 - e^{-t/\tau}.$$

4. Побудуємо графіки знайдених характеристик (рис. 6.24 та рис. 6.25).

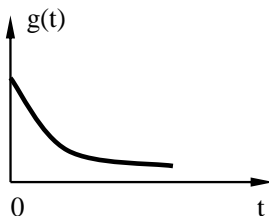


Рисунок 6.24

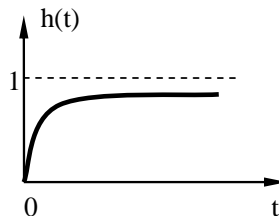


Рисунок 6.25

Тепер знайдемо реакцію кола, якщо на її вхід поданий сигнал $U_{BX}(t)$.

5. Знайдемо зображення вхідного сигналу

$$Ee^{-\alpha t}1(t) \leftrightarrow \frac{E}{p+\alpha} = U_{BX}(p).$$

6. Знайдемо вихідний сигнал за допомогою зворотного перетворення Лапласа

$$\begin{aligned} u_{ВИХ}(t) &= L^{-1} \{ U_{BX}(p) K_U(p) \} = L^{-1} \left\{ \frac{E}{p+\alpha} \cdot \frac{1/\tau}{p+1/\tau} \right\} = \\ &= \frac{E}{\tau} \left\{ \frac{1}{(p+\alpha)(p+1/\tau)} \right\}. \end{aligned}$$

За теоремою розкладання розкладаємо вираз в дужках на множники:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+\alpha)(p+1/\tau)} &= \frac{S_1(t)}{S_2(t)} = \frac{A_1}{p+\alpha} + \frac{A_2}{p+1/\tau}, \\ S_2'(t) &= 1/\tau + p + \alpha + p = 1/\tau + \alpha + 2p. \end{aligned}$$

Знайдемо лишки в нулях:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{S_1(t)}{S_2'(t)} \Big|_{p=-\alpha} = \frac{1}{2p+\alpha+1/\tau} \Big|_{p=-\alpha} = \frac{1}{1/\tau-\alpha}, \\ A_2 &= \frac{S_1(t)}{S_2'(t)} \Big|_{p=-1/\tau} = \frac{1}{2p+\alpha+1/\tau} \Big|_{p=-1/\tau} = \frac{1}{\alpha-1/\tau}. \end{aligned}$$

З урахуванням вищезазначених результатів маємо

$$U_{ВИХ}(p) = \frac{E}{\tau} \left(\frac{A_1}{p+\alpha} + \frac{A_2}{p+1/\tau} \right).$$

Перейдемо від зображення до оригіналу

$$\begin{aligned} u_{ВИХ}(t) &= \frac{E}{\tau} (A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}) = \frac{E}{\tau} \left(\frac{1}{1/\tau-\alpha} e^{-\alpha t} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\alpha-1/\tau} e^{-t/\tau} \right) = \frac{E}{\tau} \frac{1}{1/\tau-\alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-t/\tau}) 1(t). \end{aligned}$$

Нехай $\alpha\tau < 1$, тоді побудуємо графік реакції, тобто вихідної напруги (рис. 6.26).

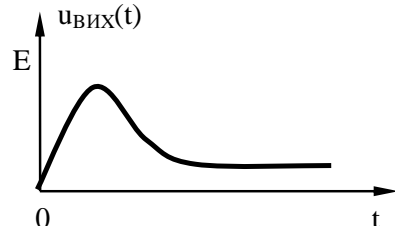


Рисунок 6.26

Приклад 6.4 Для схеми із прикладу 6.3 (рис. 6.20) знайти відгук часовим методом, тобто через згортання або інтеграл Дюамеля.

Розв'язання

Скористаємося результатами попереднього прикладу і запишемо імпульсну характеристику та позначимо сталу часу кола через τ_K , щоб не було плутанини при розрахунку інтеграла Дюамеля

$$g(t) = \frac{1}{\tau_K} e^{-t/\tau_K}.$$

Запишемо відгук кола через інтеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} u_{ВИХ}(t) &= \frac{1}{2} u_{ВХ}(t) * g(t) = \int_0^t u_{ВХ}(\tau) g(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t E \exp(-\alpha\tau) \frac{1}{\tau_K} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_K}\right) d\tau = \\ &= \frac{E}{\tau_K} \int_0^t \exp(-\alpha\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_K}\right) d\tau. \end{aligned}$$

Після розрахунку інтеграла одержуємо

$$u_{ВИХ}(t) = \frac{E}{\tau_K} \frac{1}{1/\tau_K - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-t/\tau_K}).$$

Приклад 6.5 Графічно заданий сигнал складної форми (рис. 6.27), що діє на вході з імпульсною характеристикою

$g(t) = ae^{-bt}$. Знайти аналітичний вираз сигналу, якщо $t_1 = \tau$, $t_2 = 2.5\tau$, $t_3 = 5\tau$ і $t_4 = 7.5\tau$.

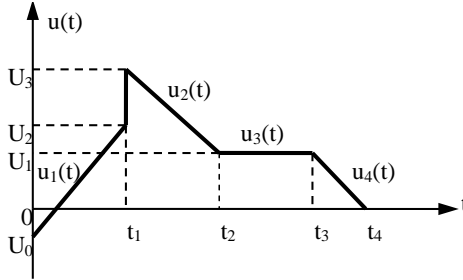


Рисунок 6.27

Розв'язання

Знаходимо сталу часу кола $\tau = 1/b$.

Знаходимо значення часу для побудови графіка:

$$t_1 = \tau, \quad t_2 = 2.5\tau, \quad t_3 = 5\tau \quad \text{і} \quad t_4 = 7.5\tau.$$

Для побудови рівняння прямої напруги скористаємося таким співвідношенням з аналітичної геометрії:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Рівняння для першої прямої

$$\frac{u_1(t) - U_0}{u_2 - U_0} = \frac{t - 0}{t_1 - 0} \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = U_0 + (U_2 - U_0) \frac{t}{t_1}.$$

Рівняння для другої прямої $t = t_1$.

Рівняння для третьої прямої

$$\frac{u_2(t) - U_3}{U_3 - U_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \quad \Rightarrow \quad u_2(t) = U_3 + (U_1 - U_3) \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Рівняння для четвертої прямої $u_3(t) = U_1$.

Рівняння для п'ятої прямої

$$\frac{u_4(t) - U_1}{U_1 - 0} = \frac{t - t_3}{t_4 - t_3} \quad \Rightarrow \quad u_4(t) = U_1 + U_1 \frac{t - t_3}{t_4 - t_3}.$$

Таким чином, аналітичний вираз сигналу буде мати вигляд

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 \leq t < t_1, \\ u_2(t), & t_1 \leq t < t_2, \\ u_3(t), & t_2 \leq t < t_3, \\ u_4(t), & t_3 \leq t < t_4. \end{cases}$$

Приклад 6.6 Розрахувати передавальну функцію за напругою та перехідну характеристику для схеми, зображеної на рис. 6.28.

Розв'язання

Після перетворення R_1 та C_1 у послідовне з'єднання, а R_2 та C_2 у паралельне з'єднання одержуємо схему (рис. 6.29).

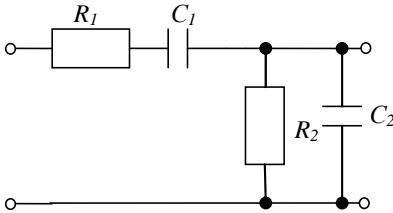


Рисунок 6.28

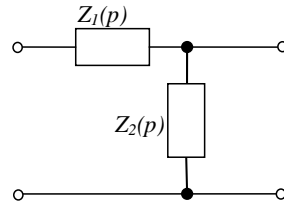


Рисунок 6.29

Передавальна функція за напругою у операторній формі такої схеми визначається за такою формулою:

$$K(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p) + Z_2(p)}, \text{ де } Z_2(p) = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}.$$

Далі після спрощення виразу для передавальної функції одержуємо

$$\begin{aligned} K(p) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}\right) + pR_1C_1 + \frac{1}{pR_2C_2}} = \\ &= \frac{p \cdot R_2 \cdot c_2 \cdot c_1}{p \cdot (R_2C_2C_1 + R_1C_2C_1 + C_2R_2C_2) + p^2R_1C_1 + C_1}. \end{aligned}$$

Після введення заміни одержуємо

$$K(p) = \frac{pb_1}{p^2a_2 + pb_2 + d_2},$$

де $b_1 = R_2C_2C_1$, $b_2 = R_2C_2C_1 + R_1C_2C_1 + C_2R_2C_2$, $a_2 = R_1C_1$, $d_2 = C_1$.

Перехідна характеристика визначається через зворотнє перетворення Лапласа

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\}.$$

Розкладемо вираз у дужках на прості дробби:

$$\frac{K(p)}{p} = \frac{b_1}{p^2a_2 + pb_2 + d_2} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2},$$

p_1 і p_2 – корені полінома знаменника, або полюса схемної функції.

Для знаходження констант A_1 і A_2 будемо використовувати теорему розкладання. У цьому випадку вона застосовна, оскільки степінь полінома чисельника менше від степеня полінома знаменника:

$$\begin{aligned} \frac{K(p)}{p} &= \frac{b_1}{p^2a_2 + pb_2 + d_2} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \\ A_1 &= \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \Big|_{p=p_1} = \frac{b_1}{2a_2p + b_2} \Big|_{p=p_1}, \\ A_2 &= \frac{F_1(p)}{F_2'(p)} \Big|_{p=p_2} = \frac{b_1}{2a_2p + b_2} \Big|_{p=p_2}. \end{aligned}$$

Тепер одержуємо перехідну характеристику

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K(p)}{p} \right\} = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}.$$

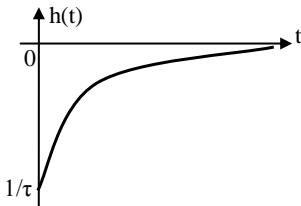


Рисунок 6.30

Побудуємо орієнтовний графік залежності перехідної характеристики у часі (рис. 6.30).

Приклад 6.7 Знайти імпульсну характеристику, якщо вихідним є струм у першій котушці індуктивності i_{C1} для схеми, зображеної на рис. 6.31.

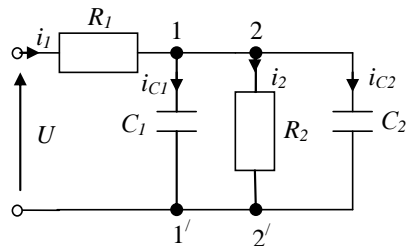


Рисунок 6.31

Розв'язання

Запишемо операторний опір кола в точках 11'', 22':

$$Z_{11'} = \frac{R_2 \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}, \quad Z_{22'} = \frac{\frac{1}{pC_1} Z_{11'}}{\frac{1}{pC_1} + Z_{11'}}$$

Запишемо повний опір кола

$$Z(p) = R_1 + Z_{22'} = R_1 + \frac{\frac{1}{pC_1} Z_{11'}}{\frac{1}{pC_1} + Z_{11'}} = R_1 + \frac{\frac{1}{pC_1} \frac{R_2 \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}}{\frac{1}{pC_1} + \frac{R_2 \frac{1}{pC_2}}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}}$$

Для імпульсної характеристики: на вхід кола діє напруга у вигляді дельта-функції $\delta(t)$, зображення якого за Лапасом буде 1. Тому $U(p) = 1$.

Тепер нам необхідно знайти зображення струму $I_{C1}(p)$. Для цього знайдемо зображення струму $I_1(p)$:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{1}{Z(p)}$$

Знайдемо зображення напруги на ємності

$$U_{C_1}(p) = U(p) - I_1(p)R_1.$$

Тепер знайдемо зображення струму ємності

$$I_{C_1}(p) = \frac{U_C(p)}{Z(p)}.$$

Знайдемо імпульсну характеристику, що визначається відношенням вихідної величини $I_{C_1}(p)$ до вхідного $U(p)$:

$$g(p) = \frac{I_{C_1}(p)}{U(p)}.$$

Приклад 6.8 На вхід кола, наведеного на рис. 6.32, діє напруга, яка змінюється за законом, зображеним на рис. 6.32. Знайти вираз для шуканої величини i_2 , якщо вона є вихідною. Побудувати графіки зміни заданої напруги, шуканої величини, перехідної та імпульсної характеристик. Абсолютні значення напруги $U_0 = 10\text{В}$, $U_1 = 5\text{В}$, $U_2 = 20$ та номінали елементів кола $R_1 = 10\text{Ом}$, $R_2 = 20\text{Ом}$, $L = 100\text{мГн}$. У задачі вважати, що $t_1 = \tau$, $t_2 = 1.5 \cdot \tau$, $t_3 = 2 \cdot \tau$, $t_4 = 2.5 \cdot \tau$, де τ – стала часу кола.

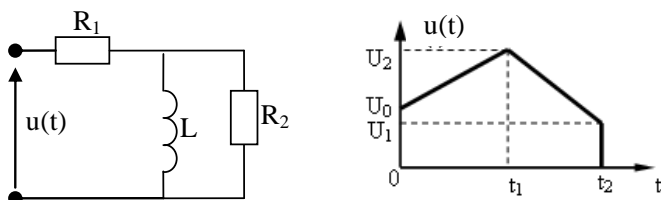


Рисунок 6.32

Розв'язання

Знаходимо загальний опір кола (рис. 6.32) у операторній формі:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot pL}{pL + R_2} = 10 \cdot \frac{200 + 3p}{200 + p}.$$

Розраховуємо зображення операторного струму на опорі R_1 , якщо на вході діє операторна напруга $U(p) = 1/p$:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = 0.1 \cdot \frac{200 + p}{p \cdot (200 + 3p)}.$$

Запишемо значення напруги на другому опорі:

$$U_2(p) = U(p) - I_1(p) \cdot R_1 = \frac{2}{200 + 3p}.$$

Запишемо значення струму на другому опорі:

$$I_2(p) = \frac{U_2(p)}{R_2} = \frac{1}{10 \cdot (200 + 3p)}.$$

Знайдемо перехідну функцію у операторній формі:

$$H(p) = \frac{I_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{I_2(p)}{U(p)} = 0.1 \cdot \frac{p}{(3p + 200)}.$$

Знайдемо оригінал перехідної характеристики:

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\left\{0.1 \cdot \frac{p}{(3p + 200)}\right\} = \\ &= -2.222 \cdot \exp(-66.667 \cdot t). \end{aligned}$$

Знайдемо оригінал імпульсної характеристики:

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t) = 148.134 \cdot e^{-66.667t} + 148.134 \cdot e^{-66.667t}.$$

Знайдемо сталу часу кола:

$$\tau = \frac{1}{|p|} = \frac{1}{|-66.667|} = 0.015 \text{ с.}$$

Побудуємо графіки зміни цих величин у часі (рис. 6.33 та рис. 6.34).

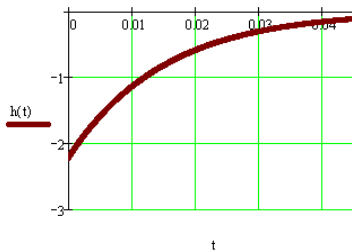


Рисунок 6.33

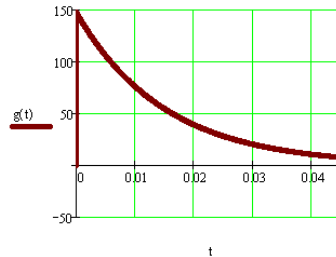


Рисунок 6.34

Розрахуємо рівняння вхідного сигналу, що зображений на рис. 6.32.

Знайдемо значення часу для побудови графіків:

$$t_1 = \tau = 0.015 \text{ с}; \quad t_2 = 1.5 \cdot \tau = 0.022 \text{ с}.$$

Знайдемо рівняння напруг на різних інтервалах:

$$1) \quad 0 < t < t_1: \quad \frac{u_1(t) - U_0}{U_2 - U_0} = \frac{t - 0}{t_1 - 0},$$

після перетворень одержимо рівняння прямої:

$$u_1(t) = 666.67 \cdot t + 10;$$

$$2) \quad t_1 < t < t_2: \quad \frac{u_2(t) - U_2}{U_1 - U_2} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1},$$

після перетворень одержимо рівняння прямої:

$$u_2(t) = -2000 \cdot t + 50.$$

Для того, щоб розрахувати інтеграл Дюамеля, необхідно знайти похідні:

$$u_1'(t) = \frac{du_1(t)}{dt} = \frac{d(666.67 \cdot t + 10)}{dt} = 666.67;$$

$$u_2'(t) = \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{d(-2000 \cdot t + 50)}{dt} = -2000.$$

При розрахунку реакції кола на вхідну дію скористаємося інтегралом Дюамеля:

$$1) \quad 0 < t < t_1, \quad i_1(t) = U_0 h(t) + \int_0^t u_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau = -22.22.,$$

$$2) \quad t_1 < t < t_2,$$

$$i_2(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^t u_2'(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau =$$

$$= -88.88 \cdot e^{-66/667 \cdot t + 1} + 66.659.$$

$$3) \quad t > t_2,$$

$$i_3(t) = U_0 h(t) + \int_0^{t_1} u'_1(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + \int_{t_1}^{t_2} u'_2(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau + (0 - U_1) \cdot h(t - t_2) = -88.88 \cdot e^{-66.667t+1} + 77.769 \cdot e^{-66.667t+1.5}.$$

Доданок $U_0 h(t)$ зумовлений стрибком напруги від 0 до U_0 у момент часу $t = 0$, а доданок $(0 - U_1) \cdot h(t - t_2)$ зумовлений стрибком напруги від 0 до $-U_1$ у момент часу t_2 .

Таким чином, одержуємо:

$$i_{BX}(t) = \begin{cases} i_1(t), & 0 < t < t_1, \\ i_2(t), & t_1 < t < t_2, \\ i_3(t), & t_2 > t. \end{cases} \quad u_{BX}(t) = \begin{cases} u_1(t), & 0 < t \leq t_1, \\ u_2(t), & t_1 < t < t_2. \end{cases}$$

Побудуємо в одному масштабі графіки зміни вхідної та вихідної величин (рис. 6.35 та рис. 6.36).

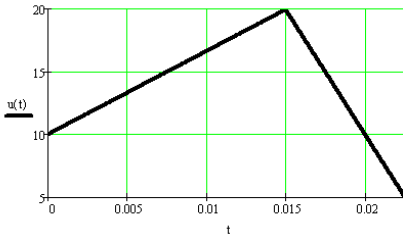


Рисунок 6.35

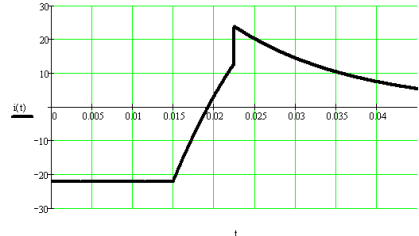


Рисунок 6.36

6.9 Запитання для самоперевірки

- 1 Дати визначення функції Хевісайда.
- 2 Назвати властивості функції Хевісайда та розкрити їхню суть.
- 3 Навести приклади застосування функції Хевісайда.
- 4 Дати визначення функції Дірака.
- 5 Перелічити властивості функції Дірака та розкрити їхню суть.
- 6 Що таке імпульсна характеристика?

- 7 Як знайти імпульсну характеристику?
- 8 Яка розмірність імпульсної характеристики?
- 9 Що таке перехідна характеристика?
- 10 Яка розмірність перехідної характеристики?
- 11 Як знайти перехідну характеристику?
- 12 Як знайти реакцію кола на вплив операторним методом?
- 13 Як знайти реакцію кола на вплив часовим методом?
- 14 Який фізичний зміст згортання двох функцій?
- 15 Яка графічна інтерпретація згортання двох функцій?
- 16 Що таке інтеграл Дюамеля?
- 17 Навести всі форми запису інтеграла Дюамеля.
- 18 Що таке передатна функція?
- 19 Навести приклад передатної функції для найпростішого кола.
- 20 Розкрити суть методу розкладання сигналу на прості для відшукування реакції кола на вплив.
- 21 Розкрити суть знаходження зображення сигналу на вході за допомогою його диференціювання на прикладі простого сигналу.

6.10 Завдання для самостійної роботи

6.1. Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 6.37, та побудувати орієнтовні графіки знайдених величин.

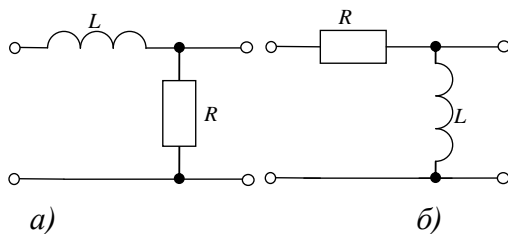


Рисунок 6.37

6.2 Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 6.38, і побудувати орієнтовні графіки цих величин.

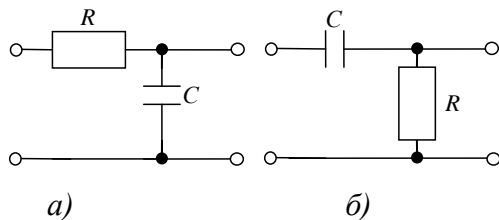


Рисунок 6.38

6.3 Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 6.39, та побудувати орієнтовні графіки знайдених величин.

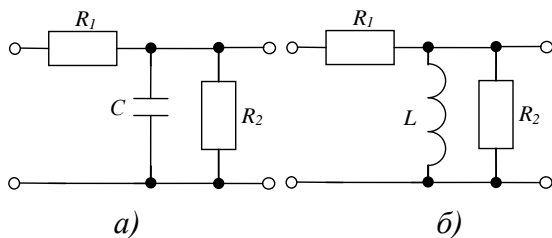


Рисунок 6.39

6.4 Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 6.40, та побудувати орієнтовні графіки.

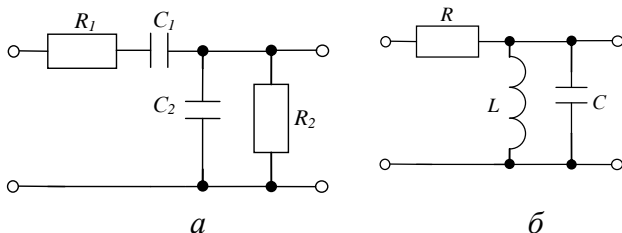


Рисунок 7.40

6.5 Знайти імпульсну та перехідну характеристики кола, зображеного на рис. 6.41.

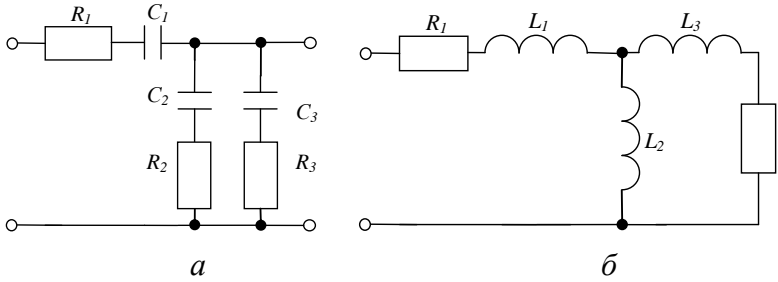


Рисунок 6.41

6.6 Знайти імпульсну та перехідну характеристику кола, зображеного на рис. 6.42.

6.7 Знайти імпульсну характеристику кола, зображеного на рис. 6.43, якщо як узгоджувальна ланка ($K=1$) використовується ідеальний повторювач. Як коло 1 взяти коло із завдання 6.1 а, а за коло 2 взяти схему із завдання 6.2 б.

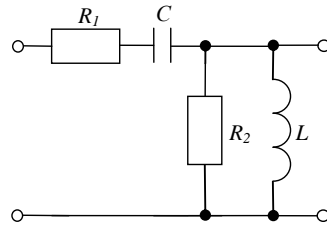


Рисунок. 6.42

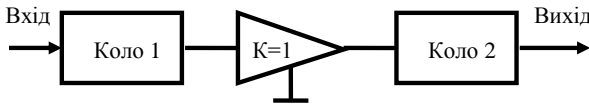


Рисунок. 6.43

6.8 Для прикладів 6.1 та 6.2 знайти сигнал на виході, якщо на вхід діє сигнал:

- 1) $u(t) = Ee^{-\alpha t}$; 2) $u(t) = \beta te^{-\alpha t}$; 3) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos[\omega t + \theta]$;
- 4) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \sin[\omega t + \theta]$.

6.9 Для прикладів 6.3 та 6.4 знайти сигнал на виході, якщо на вхід діє сигнал: 1) $u(t) = Ee^{-\alpha t}$; 2) $u(t) = \beta te^{-\alpha t}$; 3) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos[\omega t + \theta]$; 4) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \sin[\omega t + \theta]$.

6.10 Для прикладів 6.5 та 6.6 знайти сигнал на виході, якщо на вхід діє сигнал:

- 1) $u(t) = Ee^{-\alpha t}$; 2) $u(t) = \beta te^{-\alpha t}$; 3) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \cos[\omega t + \theta]$;
 4) $u(t) = Ae^{-\alpha t} \sin[\omega t + \theta]$.

6.11. Знайти зображення сигналів, показаних на рис. 6.44.

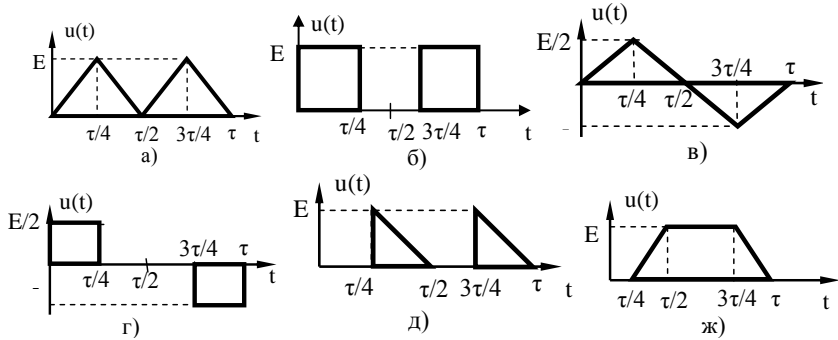


Рисунок 6.44

6.12. Знайти реакцію кола, зображеного на рис. 6.45, якщо на вхід діє сигнал, показаний на рис. 6.46.

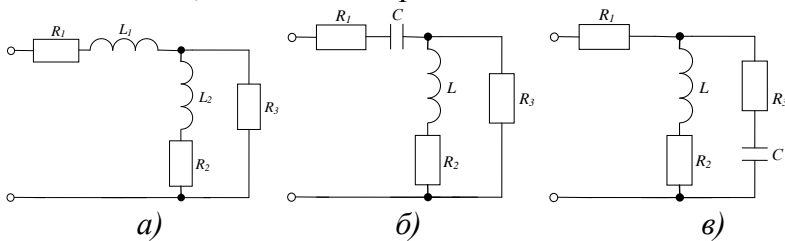


Рисунок 6.45

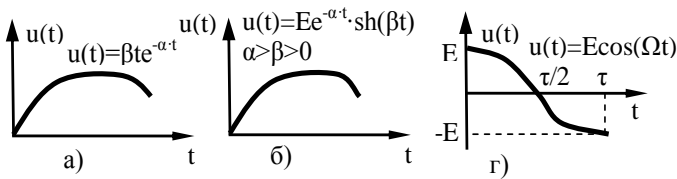


Рисунок 6.46