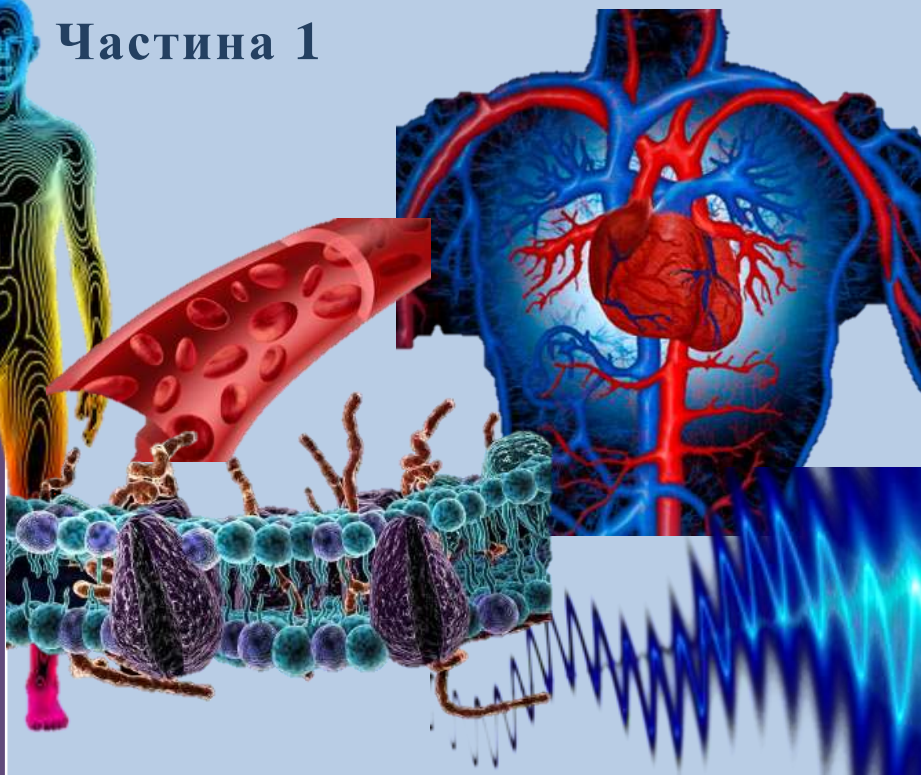


Г. С. Корнющенко,
У. С. Швець,
Л. Ф. Суходуб

Медицина та біологічна фізика: практикум

Навчальний посібник
У двох частинах
Частина 1



Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

**Г. С. Корнющенко,
У. С. Швець,
Л. Ф. Суходуб**

Медична та біологічна фізика: практикум
Навчальний посібник
У двох частинах
Частина 1

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2017

УДК 577.3(076.5)
К67

Рецензенти:

О. О. Броварець – доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник відділу молекулярної та квантової біофізики Інституту молекулярної біології і генетики НАН України (м. Київ);

О. Г. Пономарьов – доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник, завідувач відділу фізики пучків заряджених частинок Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми)

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 8 від 9 лютого 2017 року)*

Корнющенко Г. С.

К67 Медична та біологічна фізика: практикум : навчальний посібник : у 2 ч. / Г. С. Корнющенко, У. С. Швець, Л. Ф. Суходуб. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – Ч. 1. – 186 с.
ISBN 978-966-657-701-9
ISBN 978-966-657-702-6 (частина 1)

Матеріал, наведений у навчальному посібнику, відповідає програмі «Медична та біологічна фізика», що викладається для студентів першого курсу спеціальностей медичного спрямування. Кожен розділ практикуму містить стислі теоретичні відомості, приклади розв'язування задач та задачі для самостійної роботи за темами, що вивчаються в першому семестрі. Посібник також може бути корисним для студентів спеціальностей, де фізика є загальноосвітньою дисципліною.

Навчальний посібник розрахований на студентів вищих медичних навчальних закладів освіти, а також на читачів, які цікавляться сучасною медичною та біологічною фізикою.

УДК 577.3(076.5)

ISBN 978-966-657-701-9
ISBN 978-966-657-702-6 (частина 1)

© Корнющенко Г. С., Швець У. С.,
Суходуб Л. Ф., 2017
© Сумський державний університет, 2017

ЗМІСТ

С.

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ	4
БІОМЕХАНІКА. МЕХАНІКА РІДИНИ	24
ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ГЕМОДИНАМІКИ. ОСНОВНІ ГЕМОДИНАМІЧНІ ПОКАЗНИКИ.....	37
МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН	52
Тестові завдання до тематичного блоку 1	68
Теми рефератів та доповідей до тематичного блоку 1	74
МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ.....	76
ЗВУКОВІ ХВИЛІ. ОСНОВИ АКУСТИКИ	91
УЛЬТРАЗВУК ТА ІНФРАЗВУК	106
Тестові завдання до тематичного блоку 2	122
Теми рефератів та доповідей до тематичного блоку 2.....	127
ТЕРМОДИНАМІКА. МЕХАНІЗМИ ТЕПЛООБМІНУ	129
ЕНЕРГЕТИЧНИЙ БАЛАНС ОРГАНІЗМУ	142
БІОФІЗИКА МЕМБРАННИХ ПРОЦЕСІВ.....	155
Тестові завдання до тематичного блоку 3	170
Теми рефератів та доповідей до тематичного блоку 3.....	177
Додаток А.....	179
Список літератури.....	184

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ МЕДИКО-БІОЛОГІЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

📖 Теоретична частина

1 Множник та префікси

Множник	Назва	Позначення
10^{18}	екса	Е
10^{15}	пета	П
10^{12}	тера	Т
10^9	гіга	Г
10^6	мега	М
10^3	кіло	к
10^2	гекто	г
10^1	дека	да
10^{-1}	деци	д
10^{-2}	санті	с
10^{-3}	мілі	м
10^{-6}	мікро	мк
10^{-9}	нано	н
10^{-12}	піко	п
10^{-15}	фемто	ф
10^{-18}	атто	а

$$1 \text{ г} = 10^{-3} \text{ кг};$$

$$1 \text{ л} = 10^{-3} \text{ м}^3.$$

2 Правила дії зі степенями

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m};$$

$$4) \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$2) \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$5) a^0 = 1.$$

$$3) (a^n)^m = a^{n \cdot m};$$

$$6) a^1 = a.$$

3 Логарифмічна функція, її властивості

$$y = \log_a x.$$

Якщо $a > 0$ ($a \neq 1$), $b > 0$, $c > 0$, тоді:

1) $\log_a a = 1$;

7) $\log_a b^m = m \log_a b$,

2) $\log_a 1 = 0$;

якщо m – парне число ($m = 2s$),
тоді

3) $a^{\log_a b} = b$;

$\log_a b^{2s} = 2s \log_a |b|$, $b \neq 0$;

4) $\log_a b = \log_a c$, тоді $b = c$;

8) $\log_a^n b = \frac{1}{n} \log_a b$, $n \neq 0$,

5) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$,

якщо $bc > 0$, тоді

якщо n – парне число ($n = 2s$),
тоді

$\log_a bc = \log_a |b| + \log_a |c|$;

$\log_a^{2s} b = \frac{1}{2s} \log_{|a|} |b|$, $|a| \neq 1$;

6) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

9) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, $c \neq 1$;

якщо $\frac{b}{c} > 0$, тоді

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|$;

10) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $b \neq 1$;

11) $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$.

4 Основні види рівнянь та їх розв'язки

Рівняння	Розв'язок	Рівняння	Розв'язок	Рівняння	Розв'язок
$a + x = b$	$x = b - a$	$\frac{a}{x} = b$	$x = \frac{a}{b}$, $x \neq 0$	$\log_a x = b$, $a > 0, a \neq 1$	$x = a^b$, $x > 0$
$x - a = b$	$x = a + b$	$\frac{x}{a} = b$	$x = a \cdot b$	$\lg x = b$	$x = 10^b$
$a - x = b$	$x = a - b$	$x^n = b$	$x = \sqrt[n]{b}$	$\ln x = b$	$x = e^b$
$a \cdot x = b$	$x = \frac{b}{a}$	$a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1, b > 0$	$x = \log_a b$	$e^x = b$, $b > 0$	$x = \ln b$
Квадратне рівняння		Розв'язок			
$ax^2 + bx + c = 0$		$D = b^2 - 4ac$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$			

5 Похідна функції

Похідною функції $f(x)$ називається межа відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргументу Δx у точці x , якщо Δx прямує до нуля: $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

6 Правила диференціювання

- 1) $f(x) = C \cdot f_1(x) \rightarrow f'(x) = C \cdot f'_1(x)$,
- 2) $f(x) = f_1(x) + f_2(x) \rightarrow f'(x) = f'_1(x) + f'_2(x)$,
- 3) $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \rightarrow f'(x) = f'_1(x) \cdot f_2(x) + f'_2(x) \cdot f_1(x)$,
- 4) $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{f'_1(x) \cdot f_2(x) - f'_2(x) \cdot f_1(x)}{f_2^2(x)}$,
- 5) $f(x) = f(u); u = \varphi(x) \rightarrow f'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$.

7 Таблиця похідних

Функція	Похідна
1) $f(x) = const$,	$f'(x) = 0$.
2) $f(x) = x$,	$f'(x) = 1$.
3) $f(x) = x^2$,	$f'(x) = 2x$.
4) $f(x) = x^3$,	$f'(x) = 3x^2$.
5) $f(x) = x^n$,	$f'(x) = nx^{n-1}$.
6) $f(x) = a^x$,	$f'(x) = a^x \ln a$.
7) $f(x) = e^x$,	$f'(x) = e^x$.
8) $f(x) = \ln x$,	$f'(x) = \frac{1}{x}$.
9) $f(x) = \log_a x$,	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$.
10) $f(x) = \cos x$,	$f'(x) = -\sin x$.
11) $f(x) = \sin x$,	$f'(x) = \cos x$.

$$12) f(x) = \operatorname{tg}x, \quad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$13) f(x) = \operatorname{ctg}x, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$14) f(x) = \operatorname{arcsin}x, \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$15) f(x) = \operatorname{arccos}x, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$16) f(x) = \operatorname{arctg}x, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)}.$$

$$17) f(x) = \operatorname{arcctg}x, \quad f'(x) = -\frac{1}{(1-x^2)}.$$

8 Фізичний зміст похідної

Похідна функції має такий **фізичний зміст**: похідна функції в заданій точці – швидкість зміни функції в заданій точці.

9 Зростання та спадання функції

Умова зростання функції: якщо у всіх точках деякого інтервалу перша похідна $f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ на цьому інтервалі зростає.

Умова спадання функції: якщо у всіх точках деякого інтервалу перша похідна $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ на цьому інтервалі спадає.

10 Екстремум функції

Якщо функція $f(x)$ має екстремум при $x = x_0$, то її похідна в цій точці дорівнює нулю або нескінченності: $f'(x_0) = 0$.

Тоді:

Перша достатня умова екстремуму

Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ похідна функції $f'(x) < 0$, то при $x = x_0$ має місце **максимум**.

Якщо при $x < x_0$ похідна функції $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ похідна функції $f'(x) > 0$, то при $x = x_0$ має місце **мінімум**.

Друга достатня умова екстремуму

Якщо в точці $x = x_0$ перша похідна функції дорівнює нулю $f'(x_0) = 0$, то при $x = x_0$ має місце **максимум**, якщо $f''(x_0) < 0$, та **мінімум**, якщо $f''(x_0) > 0$.

11 Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$, що має дану функцію $f(x)$ своєю похідною чи $f(x)dx$ своїм диференціалом, називається **первісною** даної функції $f(x)$.

Сукупність усіх первісних функцій для диференціала $f(x)dx$ називається невизначеним інтегралом: $\int f(x)dx = F(x) + c$.

12 Таблиця інтегралів

- 1) $\int dx = x + c$,
- 2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$,
- 3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$,
- 4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$,
- 5) $\int e^x dx = e^x + c$,
- 6) $\int \sin x dx = -\cos x + c$,
- 7) $\int \cos x dx = \sin x + c$,
- 8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$,
- 9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$.

13 Основні властивості невизначеного інтеграла

- 1) $\int af(x)dx = a \int f(x)dx = aF(x) + c$,
- 2) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + c$,

$$3) \int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c,$$

$$4) \int (f_1(x) + f_2(x))dx = F_1(x) + F_2(x) + c,$$

$$5) (\int f(x)dx)' = f(x),$$

$$6) \int df(x)dx = f(x) + c.$$

14 Визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \text{формула Ньютона–Лейбніца.}$$

15 Основні властивості визначеного інтеграла

$$1) \int_a^a f(x)dx = 0,$$

$$2) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

$$3) \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

$$4) \int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx,$$

$$5) \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Практична частина

Приклади розв'язання задач

1.1 Визначити інтервали зростання та спадання функції: $f(x) = x^3 - 12x + 11$. Знайти мінімальне та максимальне значення функції.

Дано:

$$f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

Розв'язання:

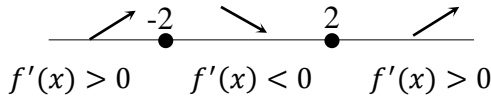
$$1) \text{ Область визначення функції } f(x): D \in (-\infty; +\infty),$$

$$2) f'(x) = 3x^2 - 12,$$

3) $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12 = 0, \quad 3x^2 = 12, \quad x^2 = 4, \quad x_{1,2} = \pm 2.$$

4)



$$x_{max} = -2, \quad x_{min} = 2.$$

5) $\max f(-2) = (-2)^3 + 12 \cdot 2 + 11 = 27$,

$$\min f(2) = (2)^3 - 12 \cdot 2 + 11 = -5.$$

Відповідь: $\max f(-2) = 27$; $\min f(2) = -5$.

1.2 Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням: $m_p = m_0 e^{-rt}$, m_p – нерозчинена маса в момент часу t ; m_0 – початкова маса пігулки; r – стала розчинення. Знайти швидкість розчинення в момент часу $t = 10$ с, якщо $r = 0,5 \text{ с}^{-1}$ та $m_0 = 10$ мг.

Дано:

$$m_p = m_0 e^{-rt},$$

$$t = 10 \text{ с},$$

$$r = 0,5 \text{ с}^{-1},$$

$$m_0 = 10 \text{ мг} =$$

$$= 10 \cdot 10^{-6} \text{ кг}.$$

Розв'язання:

$$\frac{dm_p}{dt} = (m_0 e^{-rt})'_t = -r m_0 e^{-rt},$$

$$\frac{dm_p}{dt} = -0,5 \cdot 10^{-5} e^{-0,5 \cdot 10} = -0,03 \cdot 10^{-6} \text{ (кг/с)}.$$

Знайти:

$$\frac{dm}{dt} \text{ — ?}$$

Відповідь: $\frac{dm}{dt} = -0,03 \text{ мкг/с}.$

1.3 Внаслідок значної втрати крові вміст заліза в крові пацієнта зменшився на $Y_0 = 210$ мг. Нестача заліза Y поповнюється з часом за законом $Y = Y_0 e^{-\frac{t}{7}}$, де t – час, виражений у добах. Знайти швидкість відновлення заліза в крові. Розрахувати значення швидкості в момент часу $t_1 = 0$ с та $t_2 = 7$ діб.

Дано:

$$Y = Y_0 e^{-\frac{t}{7}},$$

$$t_1 = 0 \text{ с},$$

$$t_2 = 7 \text{ діб},$$

$$Y_0 = 210 \text{ мг} = \\ = 210 \cdot 10^{-6} \text{ кг}.$$

Розв'язання:

$$\frac{dY}{dt} = \left(Y_0 e^{-\frac{t}{7}} \right)' = \frac{-Y_0}{7} e^{-\frac{t}{7}},$$

$$\frac{dY}{dt}(t = 0) = \frac{-210 \cdot 10^{-6}}{7} e^{-\frac{0}{7}} = -30 \cdot 10^{-6} \text{ (кг/добу)},$$

$$\frac{dY}{dt}(t = 7) = \frac{-210 \cdot 10^{-6}}{7} e^{-\frac{7}{7}} = -11 \cdot 10^{-6} \text{ (кг/добу)}.$$

Знайти:

$$\frac{dY}{dt} - ?$$

Відповідь: $\frac{dY}{dt}(t = 0) = -30$ мг/добу; $\frac{dY}{dt}(t = 7) = -11$ мг/добу.

1.4 Дослідити на екстремум функцію, що описує зміну маси лікарського препарату в крові пацієнта при внутрішньому язовому введенні: $m(t) = \frac{M_0 r}{r - k} (e^{-kt} - e^{-rt})$, M_0 – початкова маса препарату; k – постійна елімінації; r – деяка стала, що описує швидкість всмоктування. Припустити, що $M_0 = 10$ мг, $r = 3 \text{ с}^{-1}$ та $k = 6 \text{ с}^{-1}$.

Дано:

$$m(t) = \frac{M_0 r}{r - k} (e^{-kt} - e^{-rt}),$$

$$k = 6 \text{ с}^{-1},$$

Розв'язання:

1) Область визначення функції $m(t)$:

$$D \in (-\infty; +\infty),$$

$$r = 3 \text{ с}^{-1},$$

$$M_0 = 10 \text{ мг} =$$

$$= 10 \cdot 10^{-6} \text{ кг.}$$

Знайти:

$$\frac{dm}{dt} \text{ —?},$$

$\text{max}m$ —?,

$\text{min}m$ —?.

$$2) \frac{dm}{dt} = \left(\frac{M_0 r}{r-k} (e^{-kt} - e^{-rt}) \right)' =$$

$$= \frac{M_0 r}{r-k} (-ke^{-kt} + re^{-rt}),$$

$$3) \frac{dm}{dt} = 0,$$

$$\frac{M_0 r}{r-k} (-ke^{-kt} + re^{-rt}) = 0,$$

$$ke^{-kt} - re^{-rt} = 0,$$

$$ke^{-kt} = re^{-rt},$$

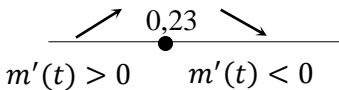
$$\ln(ke^{-kt}) = \ln(re^{-rt}),$$

$$\ln k - kt = \ln r - rt,$$

$$t = \frac{\ln \frac{k}{r}}{k-r},$$

$$t = \frac{\ln \frac{6}{3}}{6-3} = 0,23 \text{ (с)},$$

4)



$$t_{\text{max}} = 0,23 \text{ (с)}.$$

$$5) \text{max}m(0,23) = \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 3}{3-6} (e^{-6 \cdot 0,23} - e^{-3 \cdot 0,23}) = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ (кг)}.$$

Відповідь: $\text{max}m(0,23) = 2,5 \text{ мг}$.

1.5 Швидкість викидання крові з серця за час систоли описується деякою функцією $v = v(t)$. Період серцевого скорочення $T_0 = 1 \text{ с}$, час систоли $T = 0,4 \text{ с}$. Визначити хвилинний обсяг крові, що викидається, V_{XB} для двох випадків: а) швидкість викидання стала і становить $V_0 = 200 \text{ мл/с}$ (наприклад, під час роботи штучного клапана); б) швидкість викидання змінюється з часом за параболічним законом, що в деякому наближенні відповідає реальній ситуації: $V = 4V_0 \left(\frac{t}{T} - \frac{t^2}{T^2} \right)$.

Дано:

$$T_0 = 1 \text{ с,}$$

$$T = 0,4 \text{ с,}$$

$$V_0 = 200 \text{ мл/с} = \\ = 200 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с.}$$

Знайти:

$$V_{\text{XB}} - ?$$

Розв'язання:

а) Враховуючи, що $v = v_0 = \text{const}$, об'єм крові, що викидається за одну систолу, дорівнює V_0 .

За хвилину відбувається 60 систол ($T_0 = 1 \text{ с}$),

$$\text{Тоді } V_{\text{XB}} = 60 \cdot V_0 \cdot T,$$

$$V_{\text{XB}} = 60 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 0,4 = 4\,800 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}.$$

б) Викидання крові за одну систолу

$$V = \int_0^T v dt = \int_0^T 4V_0 \left(\frac{t}{T} - \frac{t^2}{T^2} \right) dt =$$

$$= 4V_0 \int_0^T \left(\frac{t}{T} - \frac{t^2}{T^2} \right) dt = 4V_0 \left(\frac{t^2}{2T} - \frac{t^3}{3T^2} \right) \Big|_0^T = 4V_0 \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{3} \right) = 4V_0 \frac{T}{6}.$$

Викидання крові за хвилину: $V_{\text{XB}} = 60 \cdot V = 60 \cdot 4V_0 \frac{T}{6}$,

$$V_{\text{XB}} = \frac{60 \cdot 4 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 0,4}{6} = 3\,200 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}.$$

Відповідь: а) $V_{\text{XB}} = 4\,800 \text{ мл}$; б) $V_{\text{XB}} = 3\,200 \text{ мл}$.

1.6 Відповідно до експоненціальної моделі швидкість зростання популяції $\frac{dP}{dt}$ пропорційна розміру цієї популяції P , тобто $\frac{dP}{dt} = kP$, де k – коефіцієнт пропорційності. Припустимо, що кількість популяції бактерій впродовж 12 годин зростає від 50 до 1 000. А. Використовуючи цю модель, знайти кількість бактерій через 18 годин. Б. Знайти час, за який кількість популяції бактерій збільшиться вдвічі.

Дано:

$$\Delta t_1 = 12 \text{ год} =$$

$$= 43\,200 \text{ с,}$$

$$P_0 = 50,$$

Розв'язання:

Модель швидкості зростання популяції $\frac{dP}{dt} = kP$.

Розділимо змінні, одержимо $\frac{dP}{P} = k dt$. (1)

Проінтегруємо (1): $\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_{t_0}^t k dt \Rightarrow$

$$P_1 = 1\,000, \quad \Rightarrow \ln|P| - \ln|P_0| = k(t - t_0) \Rightarrow \ln\left|\frac{P}{P_0}\right| = k\Delta t. \quad (2)$$

$$\Delta t_2 = 18 \text{ год} = A. \text{ Запишемо (2) для часу } \Delta t_2: \ln\left(\frac{P_2}{P_0}\right) = k\Delta t_2,$$

$$= 64\,800 \text{ с}, \quad \text{звідси } \frac{P_2}{P_0} = e^{k\Delta t_2}, \quad P_2 = P_0 e^{k\Delta t_2}. \quad (3)$$

$$P_3 = 2P_0. \quad \text{Запишемо (2) для часу } \Delta t_1: \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = k\Delta t_1,$$

$$\text{звідси } k = \frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{\Delta t_1}. \quad (4)$$

Знайти:

Підставимо (4) до (3), одержимо

$$P_2 = ?; \quad \Delta t_3 = ? \quad P_2 = P_0 e^{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}} = P_0 \left(e^{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}\right)^{\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}} = P_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}},$$

$$P_2 = 50 \left(\frac{1\,000}{50}\right)^{\frac{64\,800}{43\,200}} = 50 \cdot 20^{1,5} = 4\,472.$$

$$B. \text{ Запишемо (2) для часу } \Delta t_3: \ln\left(\frac{P_3}{P_0}\right) = k\Delta t_3, \text{ звідси } \Delta t_3 = \frac{\ln\left(\frac{P_3}{P_0}\right)}{k}. \quad (5)$$

$$\text{Підставимо (4) до (5), одержимо } \Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \ln\left(\frac{P_3}{P_0}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}. \quad (6)$$

Враховуючи умову $P_3 = 2P_0$, перепишемо вираз (6) у вигляді

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta t_1 \ln\left(\frac{P_3}{P_0}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)} = \frac{\Delta t_1 \ln\left(\frac{2P_0}{P_0}\right)}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)} = \frac{\Delta t_1 \ln 2}{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)},$$

$$\Delta t_3 = \frac{43\,200 \cdot \ln 2}{\ln\left(\frac{1\,000}{50}\right)} = \frac{43\,200 \cdot 0,69}{3} = 9\,936 \text{ (с)}.$$

Відповідь: а) $P_2 = 4\,472$; б) $\Delta t_3 = 9\,936 \text{ с}$.

✎ **Задачі для самостійного виконання**

1.7 Визначити інтервали зростання та спадання функції $f(x) = x^3 - 12x + 11$. Знайти мінімальне та максимальне значення функції.

1.8 Визначити інтервали зростання та спадання функції $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$. Знайти мінімальне та максимальне значення функції.

1.9 Записати рівняння для швидкості v та прискорення a тіла, якщо залежність координати x від часу t описується рівнянням $x(t) = 3 \cdot t^3 + 2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 4$. Знайти миттєву швидкість та прискорення тіла в момент часу $t = 1$ с.

1.10 Психофізичний закон Вебера–Фехнера відображає залежність гучності звуку E від інтенсивності звуку I : $E = k \lg \frac{I}{I_0}$, де I_0 – поріг чутності; k – деякий коефіцієнт пропорційності, що залежить від частоти та інтенсивності. Дослідити функцію $E(I)$ на екстремум.

1.11 Центр ваги кисті людини під час ходьби здійснює коливання за законом $s = 20 \sin(1,5\pi t)$. Визначити максимальну швидкість центра ваги кисті. Зміщення задано у сантиметрах.

1.12 У момент часу t швидкість зміни концентрації препарату з ізотопним індикатором $\frac{dc}{dt} = e^{-t \ln 2}$. Знайти концентрацію у момент часу $t = 10$ хв.

1.13 Розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $m_p = m_0 e^{-rt}$, m_p – нерозчинена маса в момент часу t ; m_0 – початкова маса пігулки; r – стала розчинення. Знайти швидкість розчинення в момент часу $t = 1$ хв, якщо $r = 0,5 \text{ хв}^{-1}$ та $m_0 = 5$ мг.

1.14 Кількість популяції бактерій з часом t змінюється за законом $N = N_0 + \frac{N_0 t}{c + t^2}$, де N_0 – початкова кількість бактерій у популяції; c – деяка константа. Знайти швидкість зміни кількості бактерій у момент часу $t = 10$ с, якщо $N_0 = 10^5$, $c = 100$.

1.15 Закон руху тіла визначається за формулою $s = 2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Визначити величину швидкості тіла у момент часу $t = 1/6$ с.

1.16 Визначити кількість необхідної теплоти Q для нагрівання Fe_2O_3 масою $m = 1$ кг від $T_1 = 289$ К до $T_2 = 1811$ К. Формула температурної залежності мольної теплоємності Fe_2O_3 $C_p = 4,19(24,72 + 16,04 \cdot 10^{-3}T - 4,23 \cdot 10^{-5}T^2)$. Врахувати, що $C_p = \frac{dQ}{dT}$.

1.17 Під час роботи з пневматичним відбійним молотком руки робітників зазнають коливань, які можна описати формулою $x(t) = 0,5\cos(32\pi t + \frac{3\pi}{2})$, мм. Знайти амплітудні значення швидкості та прискорення руки під час роботи.

1.18 Кількість популяції бактерій із часом t змінюється за законом $N = N_0 + \frac{N_0 t}{c + t^2}$, де N_0 – початкова кількість бактерій у популяції; c – деяка константа. Знайти максимальну кількість популяції, якщо $N_0 = 10^3$, $c = 400$.

1.19 За якої концентрації кисню реакція окислення $2NO + O_2 = 2NO_2$ відбувається з найбільшою швидкістю? Швидкість реакції визначається за формулою $u = hx(100 - x)^2$, де x – концентрація кисню, %; h – стала реакції. Припустити, що $h = 10^{-3}$.

1.20 Заводська труба викидає у повітря за одиницю часу $P = 500$ мг шкідливої речовини, що в результаті дифузії поширюється у довкіллі. Концентрація цієї речовини на відстані r від труби визначається за формулою $C(r) = \frac{P}{4\pi Dr}$, де $D = 0,05$ – коефіцієнт дифузії. Знайти швидкість зменшення концентрації на відстані й обчислити значення цієї швидкості при $r = 10$ м.

1.21 Швидкість зміни маси лікарського препарату в крові пацієнта при внутрішньом'язовому введенні змінюється за законом $\frac{dm}{dt} = \frac{M_0 r}{r - k}(re^{-rt} - ke^{-kt})$, де M_0 – початкова маса препарату; k – постійна елімінації; r – деяка стала, що описує швидкість

всмоктування. Визначити масу препарату в крові через 5 хвилин після введення, якщо $M_0 = 5$ мг, $r = 3$ хв⁻¹ та $k = 6$ хв⁻¹.

1.22 Через тіло тварини проходить імпульс струму, який змінюється з часом за законом $I = 20e^{-t}$ мА. Тривалість імпульсу становить 0,1 с. Визначити заряд, що проходить через тіло тварини.

1.23 Знайти роботу, витрачену на розтягування пружини еспандера на 60 см, якщо за сили 15 Н еспандер розтягується на 2 см.

1.24 Швидкість розчинення лікарської речовини з пігулки описується рівнянням $\frac{dm_p}{dt} = -rm_0e^{-rt}$, m_p – нерозчинена маса в момент часу t ; m_0 – початкова маса пігулки; r – стала розчинення. Знайти нерозчинену масу пігулки через 20 с після її застосування, якщо $r = 0,5$ с⁻¹ та $m_0 = 100$ мг.

1.25 Відомо, що збільшення популяції грибів пеніциліну при необмежених поживних ресурсах описується експоненціальним законом $V(t) = ae^{kt}$ (a, k – const). Знайти приріст кількості популяції ΔN за проміжок часу від t_0 до t , якщо відомо, що $V(t) = \frac{dN}{dt}$.

1.26 Під час ламінарної течії рідини циліндричною трубою її швидкість залежить від відстані x до осі труби за законом $v(x) = \Delta P(R^2 - x^2)/4\eta L$, де ΔP – різниця тисків на ділянці труби довжиною L ; R – радіус труби; η – коефіцієнт в'язкості рідини. Знайти вираз для градієнта швидкості в поперечному перетині труби (тобто знайти похідну $\frac{dv}{dx}$).

1.27 Залежність атмосферного тиску від висоти над землею задається формулою $P = P_0e^{-Mgh/RT}$, де P_0 – тиск на поверхні землі; M – молярна маса повітря; R – універсальна газова стала; T – абсолютна температура; g – прискорення вільного падіння. Одержати вираз для визначення градієнта тиску (тобто знайти похідну $\frac{dP}{dh}$).

1.28 Вміст глюкози в крові пацієнта під час вливання краплями визначається рівнянням $c(t) = c_0 - re^{-0,5t}$ (час виражений у

хвилинах), $c_0 = 200$ мкг/мл – початкова концентрація глюкози; $r = 2$ хв⁻¹ – стала всмоктування. Записати рівняння для швидкості зміни вмісту глюкози та визначити величину швидкості в момент часу $t = 10$ хв.

1.29 Кількість популяції бактерій змінюється з часом за законом $N = 100 + \frac{at}{b + t^2}$, де a , b – це деякі сталі; t – час. Знайти швидкість зміни кількості популяції та величину швидкості в момент часу $t = 1$ година, припустити, що $a = 40$, $b = 36$.

1.30 Тиск у великих судинах після закриття аортального клапана зменшується за законом $P(t) = P_c \cdot e^{-\frac{t}{Xc}}$, де $P_c = 120$ мм рт. ст. – систолічний тиск; X – гідравлічний опір ділянки судини; C – еластичність судини; t – час. Знайти швидкість зменшення тиску в момент $t = 0,2$ с після закриття клапана, якщо $X = 10^6$ Па · с/м³ та еластичність $C = 10^{-3}$ м³/Па.

1.31 Закон розподілу Максвелла для молекул ідеального газу за швидкостями v має вигляд $f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$, де m_0 – маса молекул; T – абсолютна температура (m_0 , T – сталі величини). З умови $\frac{df(v)}{dv} = 0$ визначити найбільш імовірну швидкість молекул v_i .

1.32 Амплітуда загасальних коливань зменшується з часом за законом $A = A_0 e^{-\beta t}$. Знайти закон, що описує швидкість загасання, та розрахувати значення швидкості у момент часу $t = 2$ с, якщо початкова амплітуда $A_0 = 15$ см та коефіцієнт загасання $\beta = 50$.

1.33 При швидкому піднятті водолаза з води на поверхню радіус бульбашки повітря у кровоносній судині збільшився від $R_1 = 0,2$ мм до $R_2 = 0,4$ мм. Коефіцієнт поверхневого натягу крові $\sigma = 58$ мН/м. Поверхнева енергія $W = \sigma S$. А. Записати формулу залежності роботи від зміни радіуса. Б. Обчислити наближено роботу A сил поверхневого натягу.

1.34 Модель зміни кількості популяції з урахуванням внутрішньовидової конкуренції між особнями (модель

Ферхюльста) має вигляд $N(t) = \frac{N_0 \varepsilon}{(\varepsilon - \sigma N_0)e^{-\varepsilon t} + \sigma N_0}$, де $N(t)$ – кількість популяції у момент часу t ; N_0 – початкова кількість особень в популяції; ε – коефіцієнт зростання; σ – коефіцієнт загибелі. Знайти вираз для швидкості зміни кількості популяції.

1.35 Кількість ядер радіоактивного препарату ^{55}Co зменшується з часом за законом $N = N_0 e^{-\beta t}$, де N_0 – початкова кількість радіоактивних ядер; N – кількість ядер у момент часу t ; β – стала радіоактивного розпаду. Знайти активність препарату $A = \frac{dN}{dt}$ через рік, якщо $N_0 = 10^{22}$ та $\beta = 1,058 \cdot 10^{-5} \text{ c}^{-1}$.

1.36 Залежність між кількістю речовини x , одержаної після хімічної реакції, і часом t виражається рівнянням $x(t) = C(1 - e^{-kt})$, де k – стала реакції; C – початкова кількість речовини. Визначити швидкість реакції.

1.37 Теплоємність тіла $C = \frac{dQ}{dt}$. Залежність поглинання тілом теплоти Q від температури t у діапазоні температур від $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 100^\circ\text{C}$ задається рівнянням $Q = t^3/3 + t^2/2 - 2$. Якою буде теплоємність тіла за температури $t = 50^\circ\text{C}$?

1.38 Під час ламінарної течії крові судиною круглого перетину радіусом R швидкість течії в точці, розміщеної на відстані r від осі судини, описується формулою $v = \frac{\Delta P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$, де ΔP – різниця тисків крові на кінцях судини; η – коефіцієнт в'язкості крові; l – довжина судини. Знайти кількість крові Q ($Q = \int v ds = \int_0^R v 2\pi r dr$), що протікає за час 1 хв крізь поперечний перетин артерії довжиною $l = 30$ см, радіусом $R = 2$ мм. Коефіцієнт в'язкості крові $\eta = 5$ мПа · с, різниця тисків на кінцях артерії $\Delta P = 900$ Па.

1.39 Припустимо, що зміна кількості популяції рибок у деякому озері описується законом $\frac{dP}{dt} = 0,3 \left(1 - \frac{P}{200}\right) \left(\frac{P}{50} - 1\right) P$, де P – кількість рибок у момент часу t . А. За яких значень P кількість популяції перебуває у рівновазі? Б. Знайти значення P , що

відповідають зростанню кількості популяції. *В.* Знайти значення P , що відповідають зменшенню кількості популяції.

1.40 При внутрішньом'язовому введенні лікарського препарату зміна маси препарату $m(t)$ у крові пацієнта з часом t описується рівнянням $m(t) = \frac{M_0 r}{r - k} (e^{-kt} - e^{-rt})$, де M_0 – початкова маса препарату; k – постійна елімінації; r – деяка стала, що описує швидкість всмоктування. Пацієнту було введено $M_0 = 220$ мкг лікарського препарату. Розрахувати: *а)* масу m та концентрацію c препарату в крові через $t = 3$ год після введення; *б)* швидкість виведення препарату v через $t = 3$ год після введення; *в)* час t_{max} , що відповідає максимальному значенню концентрації препарату в крові c_{max} ; *г)* максимальну концентрацію препарату в крові пацієнта c_{max} ; *д)* максимальну швидкість виведення v_{max} . Постійна елімінації $k = 0,5$ год⁻¹, константа всмоктування $r = 2$ год⁻¹, об'єм крові $V = 4,5$ л.

1.41 Дріжджі в розчині цукру ростуть так, що їх маса збільшується зі швидкістю, що дорівнює половині маси в момент t , тобто $\frac{dm}{dt} = m/2$ (час вимірюється в годинах). Записати вираз, що показує, як змінюється маса дріжджів з часом $m(t)$. Знайти масу дріжджів у момент часу $t_1 = 5$ годин та $t_2 = 10$ годин, якщо початкова маса $m_0 = 10$ мг.

1.42 Відповідно до експоненціальної моделі швидкість зростання популяції $\frac{dP}{dt}$ пропорційна розміру цієї популяції P , тобто $\frac{dP}{dt} = kP$, де k – коефіцієнт пропорційності. Припустити, що кількість популяції бактерій впродовж 12 годин зростає від 50 до 1000. *А.* Використовуючи цю модель, знайти кількість бактерій через добу. *Б.* Знайти час, за який кількість популяції бактерій збільшиться втричі.

1.43 Використовуючи експоненціальну модель зростання кількості популяції $\frac{dP}{dt} = kP$ (задача 1.42) та дані перепису населення США за 1800 і 1900 роки, спрогнозувати кількість населення США станом на 2100 рік. Дані перепису: 1800 р. – 5,3 мільйона чоловік, 1900 р. – 76,3 мільйона чоловік.

1.44 Експоненціальна модель зростання кількості популяції правильна лише для невеликої кількості популяції, тому дані, одержані в задачі 1.43, є неточними. Для описання зміни кількості населення користуються логістичною моделлю, відповідно до якої швидкість зростання населення визначається за законом $\frac{dP}{dt} = kP(1 - N/P)$, де k та N – сталі; P – кількість населення в момент часу t . Використовуючи таблицю перепису населення США (табл. 1.1), знайти значення коефіцієнтів k та N та спрогнозувати розмір населення США на 2 100 рік.

Таблиця 1.1 – Перепис населення США

Рік	1 790	1 800	1 810	1 820	1 830	1 840	1 850
Кількість населення (млн. осіб)	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1	23,2

1.45 Популяція бактерій зростає так, що швидкість її збільшення в момент t (час вимірюється в годинах) дорівнює розміру популяції, розділеній на 100. А. Описати цей процес збільшення диференціальним рівнянням, якщо $x(0) = x_0$. Б. Записати загальний розв'язок рівняння.

1.46 Пацієнту поставили крапельницю, якою безперервно вводять до організму певний препарат зі швидкістю $v = \frac{dm}{dt}$. Швидкість виведення препарату з організму прямо пропорційна його масі в організмі: $-k_{ел}m$, де $k_{ел}$ – коефіцієнт виведення препарату з організму (стала елімінації). А. Записати закон зміни маси препарату в організмі. Б. Знайти загальний розв'язок рівняння, якщо $m(0) = m_0$.

1.47 Пацієнту поставили крапельницю та вводять внутрішньовенно препарат із постійною швидкістю $v = 2$ мг/хв. Знайти масу препарату в крові через час $t = 1$ година, якщо початкова маса препарату $m_0 = 100$ мг і стала елімінації для цього препарату $k_{ел} = 0,25$ год⁻¹. Використати модель із задачі 1.46.

1.48 Пацієнту ввели внутрішньовенно препарат масою $m_0 = 200$ мг. Розрахувати масу препарату m у крові через

$t = 2$ години після введення. Стала елімінації для цього препарату $k_{ел} = 0,17 \text{ год}^{-1}$. Використати модель із задачі 1.46.

1.49 Знайти час t_2 , упродовж якого маса лікувального препарату в організмі зменшиться втричі, якщо за $t_1 = 8$ годин вона зменшиться вдвічі. Вважати, що маса препарату, що розпадається, прямо пропорційна часу t . Скласти диференціальне рівняння для обчислення часу.

1.50 Швидкість скорочення м'яза описується рівнянням $\frac{dx}{dt} = B(x_0 - x)$, де x_0 – повне скорочення м'яза; x – скорочення м'яза в деякий момент часу; B – стала, яка залежить від навантаження. Записати закон скорочення м'яза $x(t)$, якщо в цей момент часу $t = 0$, скорочення $x = 0$.

1.51 Відповідно до однокамерної фармакокінетичної моделі швидкість зменшення вмісту лікарського препарату в крові $\frac{dc}{dt}$ пропорційна концентрації препарату c на цей момент часу t (час у годинах). Тобто $\frac{dc}{dt} = -k_{ел}c$, де $k_{ел}$ – стала елімінації. *А.* Записати рівняння для концентрації препарату $c(t)$ у крові пацієнта в момент часу t , якщо $c(0) = c_0$. *Б.* Припустивши, що початкова концентрація препарату $c_0 = 50 \text{ мкг/мл}$, а через $t = 10$ годин зменшилася до $c = 20 \text{ мкг/мл}$, знайти сталу елімінації цього препарату $k_{ел}$. *В.* Обчислити час, впродовж якого концентрація препарату в крові пацієнта зменшиться вдвічі (період напіввиведення препарату).

1.52 Розрахувати період напіввиведення $T_{1/2}$ лікарського препарату «Налбуфін», якщо стала елімінації для цього препарату дорівнює $k_{ел} = 0,17 \text{ год}^{-1}$. Взяти до уваги, що процес елімінації описується однокамерною фармакокінетичною моделлю (задача 1.51).

1.53 Визначити період напіввиведення $T_{1/2}$ лікарського препарату, якщо за $t = 3$ години концентрація препарату в крові пацієнта зменшилася з $c_0 = 100 \text{ мкг/л}$ до $c = 30 \text{ мкг/л}$. Процес елімінації описується однокамерною фармакокінетичною моделлю (задача 1.51).

1.54 Знайти початкову концентрацію c_0 препарату в крові, якщо через час $t = 10$ годин після внутрішньовенного введення його концентрація становила $c = 30$ мкг/л. Період напіввиведення лікарського препарату $T_{1/2} = 8$ год. Процес елімінації описується однокамерною фармакокінетичною моделлю (задача 1.51).

1.55 Через який час t концентрація препарату в крові зменшиться в 4 рази, якщо період напіввиведення лікарського препарату $T_{1/2} = 6$ годин, а процес виведення препарату з крові описується однокамерною фармакокінетичною моделлю (задача 1.51).

1.56 Через який час t після внутрішньовенного введення лікарського препарату його концентрація зменшиться на 40 %. Період напіввиведення цього лікарського препарату $T_{1/2} = 10$ годин. Процес елімінації описується однокамерною фармакокінетичною моделлю (задача 1.51).

1.57 Популяція зайців у початковий момент часу налічує $N_0 = 1\,000$ особнів. Коефіцієнт розмноження $\alpha = 4$ рік⁻¹ і смертей $\beta = 3,8$ рік⁻¹. А. Знайти закон зміни кількості популяції з часом. Б. Скільки буде зайців у популяції через 5 років? Вважати, що існують лише процеси розмноження і смерті, швидкості яких прямо пропорційні кількості зайців.

1.58 Популяція тварин у початковий момент часу налічує $N_0 = 10\,000$ особнів. Коефіцієнт розмноження $\alpha = 2$ рік⁻¹ і смертей $\beta = 2,1$ рік⁻¹. А. Знайти закон зміни кількості популяції з часом. Б. Скільки буде тварин у популяції через 10 років? Вважати, що існують лише процеси розмноження і смерті, швидкості яких прямо пропорційні кількості тварин.

1.59 Закон руху точки є $s = 5t^2 + 8t + 1$, де s вимірюється в метрах і час t – у секундах. Яка швидкість точки v_0 в початковий момент часу і v у момент часу $t = 0$ с?

БІОМЕХАНІКА. МЕХАНІКА РІДИНИ

📖 Теоретична частина

Таблиця 2.1 – Динамічний коефіцієнт в'язкості η деяких рідин при 20 °С

Речовина	Динамічний коефіцієнт в'язкості η , Па · с
Ацетон	0,00033
Вода	0,001
Гліцерин	1,5
Етиловий ефір	0,00023
Етиловий спирт	0,0012
Рицинова олія	0,9
Мозкова тканина	0,008
Плазма крові	0,0017
Цільна кров	0,004–0,005

1 Значення сталих величин:

$\eta = 4 \cdot 10^{-3}$ Па · с – в'язкість крові,

$\rho = 1,05 \cdot 10^3$ кг/м³ – густина крові,

$g = 9,8$ м/с² – прискорення вільного падіння.

2 Тиск P , Па:

$$P = F/S,$$

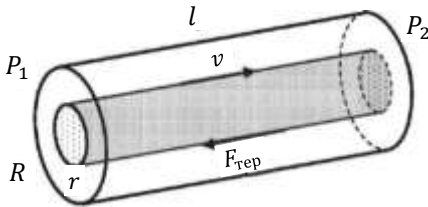
де F – це сила, Н, що діє з боку крові на судину площею поперечного перерізу S , м².

3 Об'ємна швидкість Q , м³/с:

$$Q = V/t,$$

де V – об'єм крові, м³; t – час, с.

4 **Закон Пуазейля**



$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{P_1 - P_2}{l},$$

де R – радіус судини, м; η – в'язкість крові, Па · с або пуазів;
 l – довжина ділянки судини, м; $P_1 - P_2$ – різниця тисків на кінцях судини, Па.

5 **Лінійна швидкість v , м/с:**

$$v = l/t,$$

де l – шлях, м, що проходять частинки крові за час t , с.

6 **Зв'язок між об'ємною та лінійною швидкостями**

$$Q = v \cdot S.$$

7 **Закон нерозривності течії**

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

8 **Закон Ньютона**

$$F = \eta \frac{dv}{dx} S,$$

де F – тангенціальна (дотична) сила, що викликає зсув шарів рідини, Н; η – динамічний коефіцієнт в'язкості, Па · с; $\frac{dv}{dx}$ – градієнт швидкості течії (або швидкість зсуву), с⁻¹; S – площа дотику шарів, по яких відбувається зсув, м².

9 **Закон Стокса**

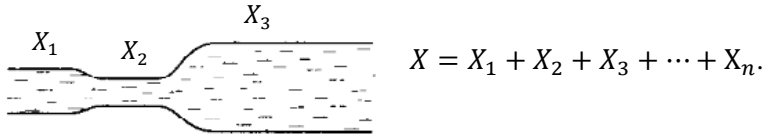
$$F = 6\pi Rv\eta,$$

де R – радіус тіла, м; v – швидкість рівномірного руху, м/с;
 η – в'язкість, Па · с.

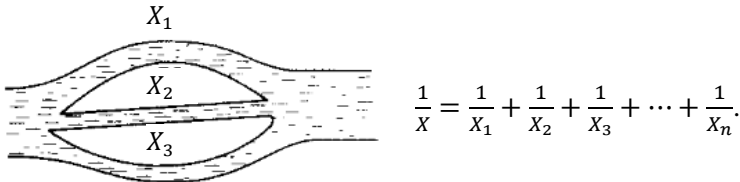
10 Гідравлічний опір судини X , Па · с/м³:

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}.$$

11 Гідравлічний опір судин, з'єднаних послідовно:



12 Гідравлічний опір судин, з'єднаних паралельно:



13 Швидкість рівномірного руху тіла в рідині:

$$v = \frac{2(\rho - \rho_p)R^2 g}{9\eta},$$

де ρ – густина тіла, кг/м³; ρ_p – густина рідини, кг/м³.

14 Гематокрит:

$$c = \frac{V_\Phi}{V} \cdot 100 \%,$$

де c – гематокрит, в.о; V_Φ – об'єм формених елементів, м³; V – об'єм крові, м³.

15 Зв'язок в'язкості крові та плазми

$$\eta = \eta_0 e^{2c},$$


де c – гематокрит, в.о; η, η_0 – в'язкість крові та плазми, Па · с, відповідно.

16 Взаємозв'язок між одиницями

$$1 \text{ л/хв} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{60} \text{ м}^3/\text{с}, \quad 1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па},$$

$$1 \text{ пуаз} = 10 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad 1 \text{ мм рт. ст.} = 13,5951 \text{ мм вод. ст.}^{1)}$$

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

2.1 Спостерігаючи під мікроскопом рух еритроцитів у капілярі, можна виміряти лінійну швидкість течії крові ($v_k = 0,5 \text{ мм/с}$). Середня швидкість течії крові в аорті становить $v_a = 40 \text{ см/с}$. На підставі цих даних визначити, у скільки разів сума поперечних перерізів усіх функціональних капілярів більша за поперечний переріз аорти.

Дано:

$$v_k = 0,5 \text{ мм/с} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м/с},$$

$$v_a = 40 \text{ см/с} = 40 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}.$$

Знайти:

$$\frac{S_k}{S_a} - ?$$

Відповідь: $\frac{S_k}{S_a} = 800$.

Розв'язання:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \text{ звідси}$$

$$v_k S_k = v_a S_a, \text{ тоді } \frac{v_k S_k}{S_a} = \frac{v_a S_a}{S_a},$$

$$\frac{S_k}{S_a} = \frac{v_a}{v_k}, \quad \frac{S_k}{S_a} = \frac{40 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 800,$$

$$\left[\frac{S_k}{S_a} \right] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} = 1.$$

2.2 Розрахувати величину зниження тиску на сантиметр довжини аорти ($l = 1 \text{ см}$), якщо об'ємна швидкість кровотоку дорівнює $Q = 25 \text{ л/хв}$. Відомо, що радіус аорти $R = 1 \text{ см}$. Виразити відповідь у паскалях та мм рт. ст.

¹⁾ Міліметри водяного стовпчика.

Дано:

$$l = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м},$$

$$R = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м},$$

$$Q = 25 \text{ л/хв} =$$

$$= 25 \frac{10^{-3}}{60} \text{ м}^3/\text{с},$$

$$\eta = 0,004 \text{ Па} \cdot \text{с}.$$

Знайти:

$$\Delta P - ?$$

Розв'язання:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \cdot \frac{P_1 - P_2}{l}, \text{ звідси}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{8 \eta Q l}{\pi R^4},$$

$$\Delta P = \frac{8 \cdot 0,004 \cdot 25}{3,14 \cdot (10^{-2})^4} \cdot \frac{10^{-3}}{60} = 425 \text{ (Па)}.$$

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па, тоді}$$

$$\Delta P = \frac{425}{133} = 3,2 \text{ мм рт. ст.},$$

$$[\Delta P] = \frac{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{м}^4} = \text{Па}.$$

Відповідь: $\Delta P = 425 \text{ Па}$, або $\Delta P = 3,2 \text{ мм рт. ст.}$

2.3 У скільки разів зміниться швидкість осідання еритроцитів у людей, хворих на сфероцитоз, порівняно з нормою, якщо середній радіус еритроцита збільшується у 1,5 раза при цьому захворюванні.

Дано:

$$\frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{сф}}} = \frac{1}{4}.$$

Розв'язання:

$$v = \frac{2(\rho - \rho_{\text{р}})R^2 g}{9\eta}, \text{ тоді}$$

$$v_{\text{н}} = \frac{2(\rho - \rho_{\text{р}})R_{\text{н}}^2 g}{9\eta}, \quad v_{\text{сф}} = \frac{2(\rho - \rho_{\text{р}})R_{\text{сф}}^2 g}{9\eta},$$

Знайти:

$$\frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{сф}}} = \frac{2(\rho - \rho_{\text{р}})R_{\text{н}}^2 g \cdot 9\eta}{9\eta \cdot 2(\rho - \rho_{\text{р}})R_{\text{сф}}^2 g} = \left(\frac{R_{\text{н}}}{R_{\text{сф}}}\right)^2,$$

$$\frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{сф}}} - ?$$

$$\frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{сф}}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad v_{\text{сф}} = 16v_{\text{н}},$$

$$\left[\frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{сф}}}\right] = \left(\frac{\text{м}}{\text{м}}\right)^2 = 1.$$

Відповідь: $v_{\text{сф}} = 16v_{\text{н}}$.

2.4 Знайти гідравлічний опір кровносної судини довжиною 0,12 м та радіусом 0,1 мм.

Дано:

$$l = 0,12 \text{ м,}$$

$$R = 0,1 \text{ мм} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$\eta = 0,004 \text{ Па} \cdot \text{с.}$$

Знайти:

X —?

Розв'язання:

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4},$$

$$X = \frac{8 \cdot 0,004 \cdot 0,12}{3,14 \cdot (10^{-4})^4} =$$

$$= 12,23 \cdot 10^{12} \text{ (Па} \cdot \text{с/м}^3\text{)}.$$

$$[X] = \frac{\text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{м}}{\text{м}^4} = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}.$$

Відповідь: $X = 12,23 \cdot 10^{12} \text{ (Па} \cdot \text{с/м}^3\text{)}.$

2.5 Знайти гідравлічний опір системи судин, наведених на рисунку (рис. 2.1).

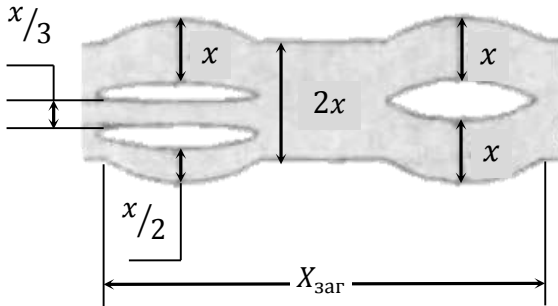


Рисунок 2.1 (до задачі 2.5)

Розв'язання:

$$1 \quad X_{\text{заг}} = X_1 + X_2 + X_3. \quad (1)$$

$$2 \quad \frac{1}{X_1} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x} = \frac{6}{x}, \quad \text{звідси } X_1 = \frac{x}{6}. \quad (2)$$

$$3 \quad X_2 = 2x. \quad (3)$$

$$4 \quad \frac{1}{X_3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}, \text{ звідси } X_3 = \frac{x}{2}. \quad (4)$$

5 Підставимо (2), (3), (4) до (1). Одержимо

$$X_{\text{зар}} = \frac{x}{6} + 2x + \frac{x}{2} = \frac{x + 12x + 3x}{6} = \frac{16x}{6} = \frac{8x}{3}.$$

Відповідь: $X_{\text{зар}} = \frac{8x}{3}.$

✍ Задачі для самостійного виконання

2.6 Знайти об'ємну швидкість кровотоку в аорті, якщо радіус аорти дорівнює 1,75 см, а лінійна швидкість крові в ній становить 0,5 м/с.

2.7 Середня лінійна швидкість кровотоку у сонній артерії діаметром $D = 3$ см дорівнює $v = 5$ мм/с. Яка об'ємна швидкість Q кровотоку в цій судині?

2.8 Визначити, у скільки разів площа поперечного перерізу судинно-капілярного проміжку більша, ніж площа поперечного перерізу аорти (S_k / S_a), якщо об'ємна швидкість течії в аорті $Q_a = 5,6$ л/хв, її діаметр $D = 3$ см. Середня лінійна швидкість течії крові у капілярі $v_k = 0,5$ мм/с.

2.9 Швидкість течії крові в деякому перерізі судини $v_1 = 5$ см/с. Знайти швидкість течії v_2 у тій частині судини, яка має вдвічі менший діаметр.

2.10 Швидкість течії крові в деякому перерізі судини $v_1 = 5$ см/с. Знайти швидкість течії v_2 у тій частині судини, яка має вдвічі меншу площу поперечного перерізу.

2.11 Якими повинні бути значення тисків для пропускання води з об'ємними витратами $Q = 10$ см³/хв через: а) тонку трансфузійну голку довжиною $l_1 = 3$ см і діаметром $D_1 = 1$ мм; б) голку для підшкірних ін'єкцій довжиною $l_1 = 2$ см і діаметром $D_1 = 0,2$ мм (в'язкість води $\eta = 1\,787$ мкПа·с).

2.12 Відомо, що сума поперечних перерізів усіх функціональних капілярів більша у 800 разів, ніж поперечний переріз аорти. Порівняти лінійну швидкість течії крові в капілярі та середню швидкість течії крові в аорті.

2.13 Об'ємна швидкість кровотоку становить $Q = 25$ л/хв. Розрахувати радіус аорти, якщо величина зниження тиску на сантиметр довжини аорти ($l = 1$ см) дорівнює $\Delta P = 3,2$ мм рт. ст.

2.14 Розрахувати зниження тиску вздовж артерії, що має довжину $l = 30$ см і радіус $R = 0,5$ см. Припустимо, що об'ємна швидкість кровотоку дорівнює $Q = 8$ л/хв. Виразити відповідь у паскалях та мм рт. ст.

2.15 У скільки разів зменшиться об'ємна швидкість кровотоку, якщо радіус артеріоли зменшиться від 0,1 до 0,08 мм. Припустимо, що зниження тиску залишається постійним.

2.16 Знайти відношення діаметрів двох кровеносних судин, якщо відомо, що у другій судині об'ємна швидкість кровотоку на 80 % менша, ніж у першій. Припустимо, що величина зниження тиску однакова для обох судин.

2.17 Якою повинна бути різниця тисків на кінцях капіляра радіусом $R = 1$ мм і довжиною $l = 10$ см, щоб за час $t = 5$ с через нього міг пройти об'єм крові $V = 1$ см³.

2.18 Визначити швидкість осідання еритроцитів у плазмі крові, припускаючи, що еритроцити мають кулеподібну форму з діаметром 8 мкм. Густину плазми взяти такою, що дорівнює $1\,027$ кг/м³, а густину речовини еритроцитів – $1\,080$ кг/м³. В'язкість плазми дорівнює $2,2$ мПа · с.

2.19 Відомо, що при сфероцитозі швидкість осідання еритроцитів у хворих людей у 16 разів більша за норму. Порівняти радіуси еритроцитів здорової та хворої людини.

2.20 Знайти густину еритроцитів, якщо швидкість їх осідання у крові 10 мм/год. Гідродинамічний діаметр конгломератів еритроцитів 10 мкм, в'язкість і густина плазми – $1,7$ мПа · с і $1\,025$ кг/м³ відповідно.

2.21 Визначити середню лінійну швидкість кровотоку в судині радіусом 1,5 см, якщо під час систоли через неї протікає 60 мл крові. Вважати, що систола триває 0,25 с.

2.22 Розрахувати відношення сумарного гідравлічного опору артеріол та капілярів ($X_{\text{арт}} / X_{\text{кап}}$), якщо середня довжина артеріоли становить $l_{\text{арт}} = 1$ см, а її радіус $R_{\text{арт}} = 15$ мкм, загальна кількість цих судин в організмі $N_{\text{арт}} = 10^8$, для капілярів ці значення становлять відповідно $l_{\text{кап}} = 1$ мм, $R_{\text{кап}} = 3$ мкм, $N_{\text{кап}} = 10^{10}$. Порівняти відповідь з відношенням однієї артеріоли до одного капіляра. Відповідно до моделі розгалуження судинного русла (рис. 2.2), з'єднання капілярів та артеріол вважати паралельним.

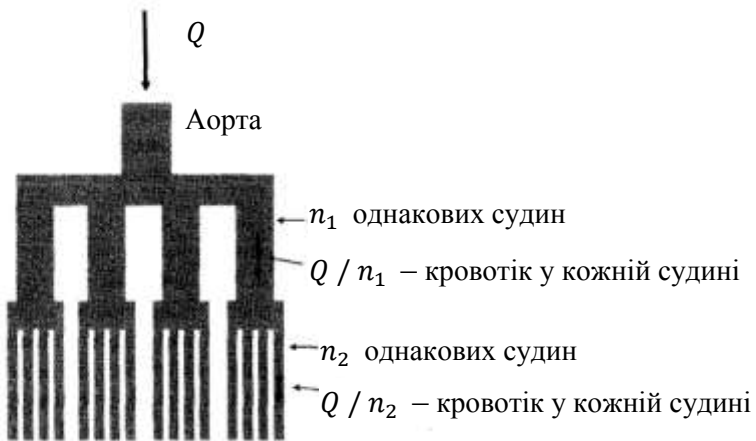


Рисунок 2.2 – Модель розгалуженого судинного русла

2.23 Знайдіть радіус кровоносної судини, якщо її гідравлічний опір $X = 12,23 \cdot 10^{12}$ (Па \cdot с/м³), довжина становить 0,12 м.

2.24 Знайти в'язкість крові за нормального гематокриту ($c = 45$ %), якщо в'язкість плазми крові $\eta_0 = 2$ мПа \cdot с.

2.25 Знайти гематокрит, якщо формені елементи становлять чверть ваги крові. Густина елементів взяти такою, що дорівнює 1 090 кг/м³, крові – 1 050 кг/м³.

2.26 Знайти гематокрит, якщо в'язкість крові у 3 рази більша, ніж плазми.

2.27 У стані спокою через аорту діаметром $D_a = 2,0$ см викидається $V_a = 80$ мл крові за секунду. Середня швидкість течії крові капілярами великого кола дорівнює $v_k = 0,3$ мм/с у тканині, що перебуває у стані спокою. Знайти площу поперечного перерізу відкритого капілярного ложа.

2.28 Швидкість осідання еритроцитів у людини за нормою становить 8 мм/год. Під час запального процесу еритроцити злипаються у грудочки, середній діаметр яких на 30 % більше за діаметр еритроцитів, а в'язкість плазми зменшується на 15 %. Знайти, якою стане швидкість осідання еритроцитів?

2.29 Швидкість осідання еритроцитів у плазмі крові з додаванням антикоагулятора становить 0,7 мм/год. Визначити діаметр еритроцита, вважаючи їх сферичними тілами і застосовуючи для розрахунку закон Стокса. Густина плазми дорівнює $1\,030$ кг/м³, еритроцитів – $1\,090$ кг/м³.

2.30 Знайти швидкість осідання крапель оксигумату натрію діаметром 30 мкм у повітрі. Коефіцієнт внутрішнього тертя повітря дорівнює 18 мкПа · с, густина повітря – $1,29$ кг/м³, оксигумату – $1\,200$ кг/м³.

2.31 Як зміниться швидкість руху крові, якщо діаметр судини збільшиться на 10 %? Об'ємну витрату крові розглядати як незмінну.

2.32 Знайти гідравлічний опір судини довжиною 80 мм та діаметром 3 мм. В'язкість крові дорівнює 5 мПа · с.

2.33 Як зміниться гідравлічний опір судинної системи, якщо в'язкість крові після приймання аспірину зменшиться на 3 %?

2.34 Знайти об'ємну витрату крові у судині діаметром 5 мм, якщо різниця тисків на ділянці судини довжиною 10 см дорівнює 15 мм рт. ст., а в'язкість крові становить 4 мПа · с.

2.35 Яка різниця тисків устанеться на ділянці артерії з внутрішнім діаметром 3 мм і довжиною 10 см, якщо об'ємна течія

крові артерією дорівнює $2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$, а її в'язкість становить $5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

2.36 Знайти діаметр судини, якщо об'ємна витрата крові дорівнює $15 \text{ см}^3/\text{с}$, градієнт тиску – 15 мм рт. ст./см , в'язкість становить $5 \text{ мПа} \cdot \text{с}$.

2.37 Використовуючи закон Пуазейля і модель розгалуженого судинного русла (рис. 2.2), вважаючи, що в'язкість крові дорівнює $4 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, а кровотік дорівнює 80 мл/с , обчислити зниження тиску на таких ділянках розгалуження артеріальних судин: а) аорті (внутрішній радіус $R = 1,25 \text{ см}$, довжина $l = 40 \text{ см}$); б) великих артеріях ($n = 100$, $R = 0,2 \text{ см}$, довжина $l = 20 \text{ см}$); в) артеріолах ($n = 5 \cdot 10^5$, $R = 30 \text{ мкм}$, довжина $l = 0,6 \text{ см}$); г) капілярах ($n = 10^{10}$, $R = 3,5 \text{ мкм}$, довжина $l = 2 \text{ мм}$).

2.38 Відомо, що форма очного яблука підтримується завдяки внутрішньоочному тиску рідини, що у нормі становить від 12 до 14 мм рт. ст. Порушення циркуляції очної рідини викликає підвищення тиску та розвиток глаукоми. У цьому разі значення тиску може досягати 85 мм рт. ст. , що призводить до пошкодження зорового нерва. Знайти, яка сила виникає в оці при такому тиску, якщо площа очного дна дорівнює 6 см^2 .

2.39 Водяниста волога в оці людини діє з силою $0,3 \text{ Н}$ на рогівку площею $1,1 \text{ см}^2$. А. Знайти тиск на рогівку в Па та мм рт. ст. Б. Чи перебуває це значення в діапазоні норми для внутрішньоочного тиску?

2.40 Лівий шлуночок виштовхує кров із серця під тиском 120 мм рт. ст. З якою силою кров викидається в аорту, якщо ефективна площа дії сили 15 см^2 ?

2.41 Тиск рідини навколо мозку новонародженої дитини при патології може зростати до 85 мм рт. ст. порівняно з нормою, що становить від 5 до 12 мм рт. ст. У цьому разі надлишкова сила, що виникає, приводить до росту черепа до аномально великих розмірів. А. Розрахувати силу, що діє на череп немовля з боку кожної півкулі мозку, площею 70 см^2 . Б. Знайти результуючу силу, що діє на череп.

2.42 Один із способів закачати повітря до легень бездиханної людини полягає у нагнітанні кисню з повітряного балона, приєднаного до постраждалого. З якою силою необхідно стискати балон у руках, щоб створити тиск $4 \text{ см H}_2\text{O}$? Припустимо, що ефективна площа стискання 50 см^2 .

2.43 Дев'ятимісячний плід, як правило, має масу $3,5 \text{ кг}$. *А.* Знайти, який тиск створює вага тіла плоду на сечовий міхур матері, площею 90 см^2 . *Б.* Перевести це значення у мм рт. ст. і визначити, чи достатньо цього тиску, щоб стимулювати рефлекс сечовипускання?

2.44 Припустимо, що об'ємна швидкість течії крові в коронарній артерії зменшилася вдвічі завдяки утворенню холестеринових бляшок на її стінках. Знайти, на скільки зменшився радіус просвіту судини?

2.45 Аорта є головною артерією, через яку кров залишає серце і поширюється кровоносною системою. *А.* Знайти середню швидкість крові в аорті, якщо через аорту проходить 5 літрів крові за хвилину, а радіус аорти дорівнює 10 мм . *Б.* Доходячи до капілярів, швидкість крові зменшується до $0,33 \text{ мм/с}$. Припустивши, що середній діаметр капілярів 8 мкм , знайти, яка кількість капілярів міститься у кровоносній системі.

2.46 Внутрішньовенна система (капельниця) постачає до організму фізіологічний розчин з об'ємною швидкістю $120 \text{ см}^3/\text{с}$ через голку радіусом $0,15 \text{ мм}$ і довжиною $2,5 \text{ см}$. Який тиск рідини повинен бути на виході з голки, щоб забезпечити таку швидкість руху розчину? Припустимо, що в'язкість фізіологічного розчину така сама, як і води. Тиск венозної крові пацієнта становить 8 мм рт. ст. Температура розчину дорівнює $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

2.47 Серце дорослої людини у стані спокою нагнітає кров у судинну систему з об'ємною швидкістю 5 л/хв , а у стані фізичного навантаження – 25 л/хв . *А.* Виразити це значення у $\text{см}^3/\text{с}$. *Б.* Якою буде швидкість у $\text{м}^3/\text{с}$?

2.48 Головна артерія з площею поперечного перерізу 1 см^2 розгалужується на 18 менших артерій, кожна з яких має площу

перерізу $0,4 \text{ см}^2$. Знайти, на скільки зменшиться швидкість течії крові при переході з аорти в артерії.

2.49 Під час проходження крові через капілярне русло органа, капіляри об'єднуються, формуючи венули. *А.* Знайти сумарну площу поперечного перерізу капілярів, що входять до венул, якщо швидкість крові збільшується у 4 рази, а сумарна площа перерізу венул дорівнює 10 см^2 . *Б.* Знайти кількість капілярів, що входять до венул цього органа, якщо діаметр окремого капіляра дорівнює 10 мкм .

2.50 Кровоносна система людини містить приблизно 10^9 капілярів. Кожен окремий капіляр має діаметр приблизно 8 мкм . Припускаючи, що кров викидається в аорту з об'ємною швидкістю 10 л/хв , знайти середню лінійну швидкість крові у капілярах. Діаметр аорти взяти таким, що дорівнює 20 мм .

2.51 Об'ємна швидкість крові в окремому капілярі радіусом $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ становить $3,8 \cdot 10^{-9} \text{ см}^3/\text{с}$. *А.* Знайти значення лінійної швидкості у капілярі. *Б.* Знайти, яка кількість капілярів повинна бути у кровоносній системі, щоб підтримувати об'ємну швидкість крові у системі на рівні $90 \text{ см}^3/\text{с}$.

2.52 Сила внутрішнього тертя об стінки кровоносної судини $F = 2,7 \text{ мН}$. Визначити діаметр просвіту судини, якщо в'язкість крові $\eta = 5 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, довжина судини $l = 5,2 \text{ см}$, градієнт швидкості крові в судині $\frac{dv}{dx} = 140 \text{ с}^{-1}$.

2.53 У спортсмена після тривалого фізичного навантаження гематокрит становив 50% . Із чим пов'язана така зміна показника крові?

2.54 Досліди показують, що під час центрифугування крові еритроцити розміщуються на дні пробірки, плазма знаходиться у верхній її частині, а лейкоцити і тромбоцити утворюють шари між еритроцитами і плазмою. Об'єм плазми становив $55 - 60 \%$ від усього об'єму крові, а об'єм формених елементів – $40 - 55 \%$. Який висновок можна зробити з досліджу?

ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ГЕМОДИНАМІКИ. ОСНОВНІ ГЕМОДИНАМІЧНІ ПОКАЗНИКИ

📖 Теоретична частина

1 Значення сталих величин:

$\eta = 4 \cdot 10^{-3}$ Па · с – в'язкість крові,

$\rho = 1,05 \cdot 10^3$ кг/м³ – густина крові,

$g = 9,8$ м/с² – прискорення вільного падіння.

2 Об'ємна швидкість Q , м³/с:

$$Q = V/t,$$

де V – об'єм крові, м³; t – час, с.

3 Лінійна швидкість v , м/с:

$$v = l/t,$$

де l – шлях, м, що проходять частинки крові за час t , с.

4 Зв'язок між об'ємною та лінійною швидкостями

$$Q = v \cdot S.$$

5 Закон нерозривності течії

$$v_1 S_1 = v_2 S_2.$$

6 Рівняння Бернуллі.

Закон збереження енергії (рис. 3.1):

$$E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}} + E_{\text{в}} = \text{const},$$

де $E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$ – кінетична енергія рідини ($m = \rho V$), Дж;

$E_{\text{п}} = mgh$ – потенційна енергія рідини, Дж;

$E_B = PV$ – внутрішня енергія рідини, Дж;

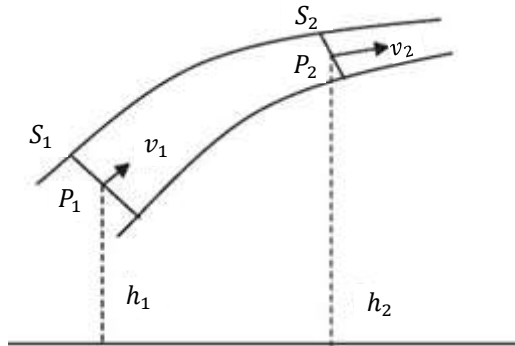


Рисунок 3.1 – Параметри перерізу судини

$$\omega = \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + P = const,$$

або

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + P_2,$$

де P – статичний тиск, Па; $\frac{\rho v^2}{2}$ – гідродинамічний тиск (кінетична енергія одиниці об'єму), Па; ρgh – гідростатичний тиск (потенційна енергія одиничного об'єму в полі сил тяжіння), Па.

7 Закон Лапласа

$$\Delta P = \frac{h\sigma}{R} = \frac{T}{R},$$

де $\Delta P = P_{\text{вн}} - P_{\text{зов}}$ – надлишковий тиск, Па ($P_{\text{вн}}$, $P_{\text{зов}}$ – тиск, що діє на стінку кровоносної судини зсередини та зовні відповідно, $P_{\text{вн}} > P_{\text{зов}}$); R – радіус судини, м; h – товщина стінки судини ($h \ll R$), м; σ – напруження в стінці, Па; T – натяг, Н/м.

8 Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta},$$

де ρ – густина рідини, кг/м^3 ; D – діаметр судини, м ; v – середня швидкість течії рідини, м/с ; η – в'язкість рідини, $\text{Па} \cdot \text{с}$.

Якщо $Re > Re_{\text{кр}}$, тоді течія рідини турбулентна. У протилежному разі течія є ламінарною.

Для гладких циліндричних трубок $Re_{\text{кр}} = 2\,300$.

9 Робота серця A під час однократного скорочення, Дж:

$$A_c = A_{\text{л}} + A_{\text{п}} = 1,2V_y(P + \frac{\rho v^2}{2}),$$

де P – середній тиск крові, з яким кров викидається в аорту, Па; V_y – ударний об'єм, м^3 ; ρ – густина крові, кг/м^3 ; v – швидкість течії крові, м/с .

10 Потужність серця W під час однократного скорочення, Вт:

$$W = \frac{A_c}{t},$$

де W – потужність серця, Вт; A_c – робота однократного скорочення серця, Дж; t – час систоли, с.

11 Взаємозв'язок між одиницями

$$1 \text{ л/хв} = \frac{10^{-3}}{60} \text{ м}^3/\text{с}.$$

① **Систолічний тиск P_c** – це верхня межа артеріального тиску. Показує рівень тиску, якщо серцевий м'яз стискається і виштовхує кров в артерії.

На максимумі вигнання крові $P_c = 120 - 130 \text{ мм рт. ст.}$

Діастолічний тиск P_d – це нижня межа артеріального тиску.

Показує значення тиску в момент розслаблення серцевого м'яза.

В аорті становить 80 мм рт. ст.


Пульсовий тиск $P_{\text{п}}$ – це різниця між систолічним і діастолічним тисками.

В аорті $P_{\text{п}} = 40 \text{ мм рт. ст.}$

Середній артеріальний тиск $P_{\text{ср}}$ – тиск за весь час серцевого циклу,

$$P_{\text{ср}} = \frac{(2P_d + P_c)}{3}, \text{ або } P_{\text{ср}} = \frac{(P_c - P_d)}{3} + P_d.$$

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

3.1 Атеросклероз привів до зменшення радіуса ділянки артерії в три рази ($R_1/R_2 = 3$). Розрахувати зниження тиску в ушкодженій ділянці артерії, якщо швидкість крові в нормі дорівнює $v_1 = 50$ см/с.

Дано:

$$R_1/R_2 = 3,$$

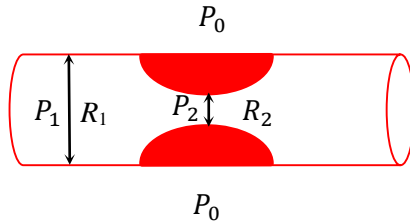
$$v_1 = 50 \text{ см/с} = 50 \cdot 10^{-2} \text{ м/с},$$

$$\rho_{\text{кр}} = 1\,050 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти:

$$\Delta P = P_1 - P_2 - ?$$

Розв'язання:



$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh + P_2, \text{ звідси}$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + P_2,$$

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2), \quad (1)$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \text{ звідси } v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2},$$

$$\text{де } S_1 = \pi R_1^2, S_2 = \pi R_2^2, \text{ тоді } v_2 = \frac{v_1 \pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{v_1 R_1^2}{R_2^2} = v_1 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$\Delta P = \frac{\rho}{2} \left(v_1^2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 - v_1^2 \right) = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^4 - 1 \right),$$

$$\Delta P = \frac{1\,050}{2} (50 \cdot 10^{-2})^2 (3^4 - 1) = 10\,500 \text{ (Па)},$$

$$[\Delta P] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right)^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Відповідь: $\Delta P = 10\,500$ Па.

3.2 Розрахувати артеріальний тиск крові на рівні голови для людини в положенні стоячи. Припустити, що голова знаходиться на 50 см вище від серця. Взяти середній артеріальний тиск на рівні серця за 100 мм рт. ст.

Дано:

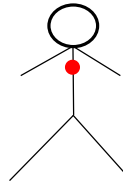
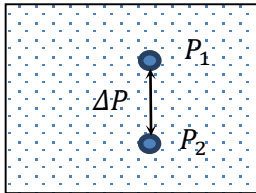
$$\begin{aligned} \Delta h &= 50 \text{ см} = \\ &= 50 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \\ P_{\text{сер}} &= 10^2 \text{ мм рт. ст.} = \\ &= 13\,300 \text{ Па}, \\ \rho &= 1\,050 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Знайти:

$$P_{\text{гол}} - ?$$

Розв'язання:

Для людини в позиції стоячи тиск крові в артеріях розподілений нерівномірно в різних частинах тіла. Потрібно взяти до уваги вагу тіла для розрахунків тиску в різних частинах тіла. Для рідини, що має постійну густину ρ , різниця тисків між двома точками, що знаходяться на вертикальній відстані h одна від одної, визначається за формулою $P_2 - P_1 = \rho g \Delta h$.



Таким чином, $P_{\text{сер}} - P_{\text{гол}} = \rho g \Delta h$, звідси $P_{\text{гол}} = P_{\text{сер}} - \rho g \Delta h$,

$$P_{\text{гол}} = 13\,300 - 1\,050 \cdot 9,8 \cdot 0,5 = 8\,155 \text{ (Па)},$$

$$[P_{\text{гол}}] = \text{Па} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па},$$

$$1 \text{ мм рт. ст.} = 133 \text{ Па}; \text{ тоді } P_{\text{гол}} = 61,32 \text{ мм рт. ст.}$$

Відповідь: $P_{\text{гол}} = 61,32 \text{ мм рт. ст.}$

3.3 Знайти роботу серця при одноразовому скороченні. Ударний об'єм крові $V_y = 60 \text{ мл}$, швидкість крові в аорті $v = 0,5 \text{ м/с}$, час

систоли $t_c = 0,3$ с. Середній тиск, при якому кров викидається в аорту лівим шлуночком, дорівнює 100 мм рт. ст. Знайти роботу серця за добу, взявши до уваги, що пульс здорової людини становить 70 скорочень за хвилину.

Дано:

$$v = 0,5 \text{ м/с,}$$

$$V_y = 60 \text{ мл} =$$

$$= 60 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$t_c = 0,3 \text{ с,}$$

$$\rho_{\text{кр}} = 1050 \text{ кг/м}^3,$$

$$P = 100 \text{ мм рт. ст.} =$$

$$= 13300 \text{ Па.}$$

Знайти:

$$A_c - ?$$

$$A_d - ?$$

Розв'язання:

$$A_c = 1,2V_y(P + \frac{\rho v^2}{2}),$$

$$A_c = 1,2 \cdot 6 \cdot 10^{-5} (13300 + \frac{1050 \cdot 0,5^2}{2}) =$$

$$= 0,967 \text{ Дж,}$$

$A_d = A_c \cdot N$, де N – кількість скорочень серця за добу; тоді

$$N = 70 \cdot 60 \cdot 24 = 100800,$$

$$A_d = 0,967 \cdot 100800 = 97473,6 \text{ (Дж),}$$

$$[A_c] = \text{м}^3 \left(\text{Па} + \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} \right) = \text{м}^3 \left(\text{Па} + \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3 \cdot \text{с}^2} \right) =$$

$$= \text{м}^3 \left(\frac{\text{Н}}{\text{м}^2} + \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right) = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж.}$$

Відповідь: $A_c = 0,967$ Дж, $A_d = 97473,6$ Дж.

3.4 Визначити максимальну масу крові, яка може пройти через аорту за час 1 с, щоб течія зберігалася ламінарною. Діаметр аорти $D = 2$ см, густина крові $\rho = 1060$ кг/м³, а в'язкість $\eta = 5$ мПа · с.

Дано:

$$D = 2 \text{ см} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

Розв'язання:

$$m = \rho V, \tag{1}$$

$$Q = \frac{V}{t}, \text{ звідси } V = Qt, \tag{2}$$

$$\rho = 1\,050 \text{ кг/м}^3, \quad \text{Підставимо (2) до (1), одержимо}$$

$$\eta = 5 \text{ мПа} \cdot \text{с} = \quad m = \rho Q t, \quad (3)$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad Q = S v, \text{ де } S = \frac{\pi D^2}{4},$$

$$t = 1 \text{ с}, \quad \text{тоді } Q = \frac{\pi D^2}{4} v, \quad (4)$$

$$Re = 2\,300. \quad Re = \frac{\rho v D}{\eta}, \text{ звідси } v = \frac{Re \cdot \eta}{\rho D}. \quad (5)$$

_____ Підставимо (5) до (4), одержимо

$$\text{Знайти:} \quad Q = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{Re \cdot \eta}{\rho D}. \quad (6)$$

m —? Підставимо (6) до (3), одержимо

$$m = \rho \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{Re \cdot \eta}{\rho D} t = \frac{\pi \cdot D \cdot Re \cdot \eta \cdot t}{4},$$

$$m = \frac{3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 2\,300 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{4} = 0,18 \text{ кг.}$$

$$[m] = \text{м} \cdot \text{Па} \cdot \text{с} \cdot \text{с} = \frac{\text{м} \cdot \text{Н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{м}} = \text{кг.}$$

Відповідь: $m = 0,18 \text{ кг.}$

3.5 Знайти кінетичну енергію $V = 1 \text{ м}^3$ крові в аорті для людини під час інтенсивних фізичних навантажень. Припустити, що об'ємна швидкість кровотоку в цьому разі $Q = 25 \text{ л/хв}$. Взяти радіус аорти $R = 1 \text{ см}$.

Дано:

$$V = 1 \text{ м}^3,$$

$$Q = 25 \text{ л/хв} =$$

$$= 25 \cdot \frac{10^{-3}}{60} \text{ м}^3/\text{с},$$

$$R = 1 \text{ см} =$$

Розв'язання:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad (1)$$

$$Q = S v, \text{ де } S = \pi R^2, \text{ тоді } Q = \pi R^2 v, \text{ звідси}$$

$$v = \frac{Q}{\pi R^2}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$= 10^{-2} \text{ м},$$

$$\rho = 1\,050 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти:

E_K – ?

$$E_K = \frac{m \left(\frac{Q}{\pi R^2} \right)^2}{2}, \quad (3)$$

$$m = \rho V. \quad (4)$$

Підставимо (4) до (3), одержимо

$$E_K = \frac{\rho V \left(\frac{Q}{\pi R^2} \right)^2}{2},$$

$$E_K = \frac{1\,050 \cdot 1 \cdot \left(25 \cdot \frac{10^{-3}}{60 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} \right)^2}{2} = 924,43 \text{ (Дж)},$$

$$[E_K] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3} \left(\frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \right)^2 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $E_K = 924,43 \text{ Дж}$.

✍ Задачі для самостійного виконання

3.6 Аневризма викликала збільшення діаметра артерії з $D_1 = 2,5 \text{ см}$ до $D_2 = 5 \text{ см}$ (рис. 3.2). Використовуючи рівняння Бернуллі, знайти збільшення тиску в ушкодженій ділянці, якщо швидкість кровотоку в її здоровій частині дорівнює $v_1 = 30 \text{ см/с}$.

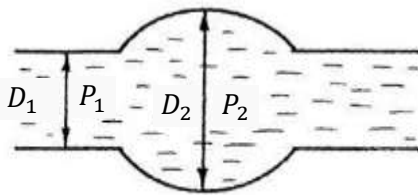


Рисунок 3.2 – Розвиток аневризми

3.7 В артерії діаметром $D_1 = 2,2 \text{ см}$ є аневризма діаметром $D_2 = 3 \text{ см}$. Середня швидкість течії крові в нормі дорівнює $v_1 = 0,3 \text{ м/с}$, а тиск крові $P = 120 \text{ мм рт. ст.}$ Знайти додатковий тиск в аневризмі. Чи є він небезпечним для людини? Для розрахунків вважати, що артерія розміщена горизонтально, а густина крові дорівнює $\rho_{кр} = 1,05 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

3.8 Під час відкладання атероматозних мас на внутрішній поверхні артерії утворюється атероматозне потовщення (атероматозна бляшка) (рис. 3.3). Середня швидкість течії крові сонною артерією при діаметрі $D_1 = 1$ см дорівнює $0,15$ м/с. Тиск крові в незакупореній ділянці $P_1 = 120$ мм рт. ст. При якому мінімальному діаметрі D_2 закупореної ділянки артерії ще можливий кровообіг¹⁾? Що буде, якщо діаметр стане меншим?

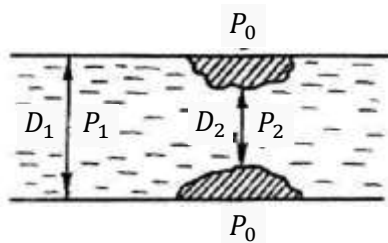


Рисунок 3.3 – Утворення атеросклеротичної бляшки

3.9 Атеросклеротична бляшка призвела до такого звуження ділянки артерії, що площа поперечного перерізу судини на ділянці звуження становить усього 20 % від нормальної площі поперечного перерізу. Чому дорівнює тиск на ділянці стенозу, якщо безпосередньо перед бляшкою тиск дорівнює 100 мм рт. ст., а швидкість кровотоку дорівнює $0,12$ м/с?

3.10 Розрахувати середній артеріальний тиск крові в ногах людини в положенні стоячи – 130 см нижче від серця. Взяти середній артеріальний тиск на рівні серця 100 мм рт. ст.

3.11 Який максимальний об'єм крові за секунду може протікати артерією з внутрішнім діаметром 4 мм, щоб течія була ламінарною? В'язкість крові $\eta = 5$ мПа · с, густина – 1050 кг/м³.

3.12 Знайти додатковий тиск крові на рівні стопи людини, зріст якої 170 см.

¹⁾ Течія крові в артерії буде існувати до того часу, поки статичний тиск P_2 на ділянці атеросклеротичної бляшки буде перевищувати тиск P_0 на судину ззовні, який за нормальних умов дорівнює атмосферному. Отже, нормальний кровотік можливий лише за умови $P_2 - P_0 \geq 0$.

3.13 Аорта ушкоджена веретеноподібною аневризмою. На ділянці аневризми внутрішній радіус судини збільшується відносно нормального значення $R_1 = 1,25$ см до $R_2 = 1,3R_1$. Швидкість кровотоку в неушкодженій ділянці аорти дорівнює $v_1 = 0,4$ м/с, а трансмуральний тиск $P_1 = 100$ мм рт. ст. Густина крові дорівнює $1\,060$ кг/м³. Вважати також, що аорта розміщена горизонтально. *А.* Знайти швидкість кровотоку v_2 на ділянці аневризми. *Б.* Знайти тиск P_2 у ділянці аневризми. *В.* Використовуючи закон Лапласа, знайти натяг стінки аорти на нормальній ділянці та на ділянці, що ушкоджена аневризмою. Порівняти ці значення. *Г.* Пояснити, чому збільшення натягу стінки аорти у ділянці аневризми і зниження на цій ділянці міцності судинної стінки (внаслідок того, що вона стає тонкішою) може призвести до виникнення нестабільної ситуації.

3.14 Знайти кінетичну енергію $V = 1$ м³ крові в аорті для людини в стані спокою. Припустити, що об'ємна швидкість кровотоку $Q = 5$ л/хв, а радіус аорти становить $R = 1$ см.

3.15 Швидкість течії крові у променевій артерії $v = 0,6$ м/с, діаметр артерії $D = 4$ мм. Чи буде течія ламінарною?

3.16 Знайти кінетичну енергію об'єму крові, що проходить за $t = 1$ хв зі швидкістю $v = 0,4$ м/с через артерію діаметром $D = 3$ мм.

3.17 Знайти потужність серця при одноразовому скороченні. Ударний об'єм крові $V_y = 60$ мл, швидкість крові в аорті $v = 0,5$ м/с, час систоли $t_c = 0,3$ с. Середній тиск, за якого кров викидається в аорту лівим шлуночком, дорівнює 100 мм рт. ст.

3.18 Лікарський розчин вводять у м'яз тварини за допомогою шприца з внутрішнім діаметром $D_1 = 10$ мм і діаметром голки $D_2 = 0,5$ мм. Визначити швидкість витікання розчину з голки, якщо швидкість переміщення поршня шприца дорівнює $v_1 = 2,3$ см/с.

3.19 Хвилинний об'єм крові у стані спокою дорівнює $Q_1 = 5$ л/хв, а під час інтенсивної фізичної роботи може збільшуватися до $Q_2 = 15$ л/хв. Визначити тип течії крові в аорті для цих випадків.

Діаметр аорти $D = 2$ см, в'язкість крові $\eta = 5$ мПа · с, густина крові $\rho = 1\,050$ кг/м³, критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 2\,000$.

3.20 Визначити діаметр аорти, для якої максимальна маса крові, що може пройти через аорту за 1 с при ламінарній течії, дорівнює $m = 0,18$ кг. Густина крові $\rho = 1\,060$ кг/м³, а в'язкість $\eta = 5$ мПа · с.

3.21 При деяких захворюваннях критичне число Рейнольдса у судинах становить $Re_{кр} = 1\,160$. Знайти швидкість течії крові, за якої можливий перехід ламінарної течії у турбулентну, у судині діаметром $D = 2$ мм. У цьому разі густина крові дорівнює $\rho = 1\,060$ кг/м³, а в'язкість $\eta = 5$ мПа · с.

3.22 Знайти гідродинамічний тиск крові у судині, якщо швидкість течії крові дорівнює 0,1 м/с, густина – 1 050 кг/м³.

3.23 А. Коли хворому ставлять крапельницю, рідина потрапляє у вену під дією сили тяжіння. На якій висоті необхідно встановити флакон з інфузованою рідиною для того, щоб ця рідина просто потрапила до вени? Вважати, що густина рідини, яка вводиться, дорівнює 1 г/см³, а тиск у вені становить 18 мм рт. ст. Вважати також, що голка, що використовується для внутрішньовенного введення рідини, має дуже великий внутрішній діаметр (рис. 3.4). Б. Якщо голка, введена у вену, має дуже малий діаметр, то як потрібно розмістити флакон з ліками, що вводяться: підняти його вище, чи, навпаки, опустити нижче, чи залишити на тому самому рівні, що і за умовою задачі А.? Чому? В. Чому таке введення препарату проводять внутрішньовенно, а не внутрішньоартеріально?

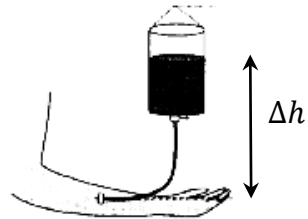


Рисунок 3.4 –
Внутрішньовенне введення
рідини під дією сили тяжіння

3.24 Для $V = 1$ м³ крові в аорті у людини під час інтенсивних фізичних навантажень кінетична енергія дорівнює $E_k = 925$ Дж.

Знайти об'ємну швидкість кровотоку в цьому випадку. Взяти радіус аорти $R = 1$ см.

3.25 Відомо, що систолічний об'єм становить 60 мл, швидкість крові в аорті – 0,5 м/с, у порожнистій вені – 0,1 м/с? Яку роботу виконує серце за 1 скорочення, якщо систолічний тиск дорівнює 100 мм рт. ст., а діастолічний – 70 мм рт. ст.

3.26 А. У нормі систолічний тиск крові становить 120 мм рт. ст., а діастолічний – 80 мм рт. ст. Використовуючи формулу залежності тиску від ваги рідини $P = \rho gh$, виразити дані значення у Н/м² (Па).
Б. Чому, на вашу думку, тиск крові у немовлят має менші значення, ніж у дорослої людини?

3.27 Голова людини розміщена на 0,4 м вище від серця. Тиск на рівні серця дорівнює 120 мм рт. ст. Який тиск крові у мозку людини? Який тиск крові у ногах людини на рівні 1,5 м нижче від серця? До чого це може привести? Густина крові $\rho = 1\,050$ кг/м³.

3.28 Внаслідок втрати пружних властивостей судин при атеросклерозі число Рейнольдса суттєво змінюється. Визначити число Рейнольдса Re у судині діаметром $D = 3$ мм, в якій швидкість течії крові дорівнює $v = 1,8$ м/с. Густина крові дорівнює $\rho = 1\,060$ кг/м³, а в'язкість крові $\eta = 5$ мПа · с.

3.29 Тиск рідини у спинному мозку визначається за допомогою методики, зображеної на рис. 3.5. Якщо тиск рідини становить 10 мм рт. ст., то: а) якими будуть показання водяного манометра у см Н₂О?; б) якими стануть показання манометра у шийному відділі спинного мозку на рівні 60 см вище від попереднього вимірювання, якщо людина змінить положення лежачи на положення сидяче? Густина рідини дорівнює 1,05 г/мл.

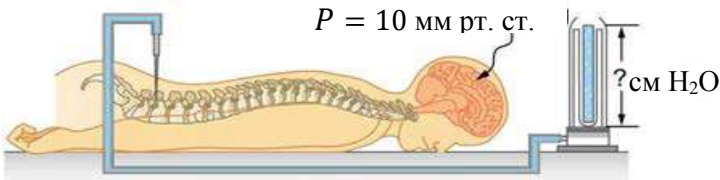


Рисунок 3.5 – Використання водяного манометра для вимірювання тиску рідини спинного мозку

3.30 Тиск у стравоході становить -2 мм рт. ст., а тиск у шлунку дорівнює $+20$ мм рт. ст. Знайти, на яку висоту може підійнятися шлункова рідина у стравоході, припускаючи, що густина цієї рідини становить $1,1$ г/мл (такий рух рідини виникає лише у випадку, якщо порушене функціонування м'яза, що закриває нижній прохід стравоходу)?

3.31 Середнє значення швидкості крові в аорті радіусом 1 см дорівнює 30 см/с. Визначити, який характер течії крові (ламінарний або турбулентний)? Відомо, що критичне число Рейнольдса $Re_{кр} = 2\,300$, густина крові $\rho = 1\,050$ кг/м³, а в'язкість $\eta = 4$ мПа · с.

3.32 Діаметр поршня шприца дорівнює 2 см, хід поршня – 8 см, внутрішній діаметр голки – 1 мм, її довжина – 10 см. З якою силою треба натискувати на поршень, щоб час ін'єкції становив 10 с? В'язкість рідини дорівнює 2 мПа · с.

3.33 Визначити час протікання крові через капіляр віскозиметра (прилад для вимірювання в'язкості крові), якщо вода протікає через нього за $t_1 = 10$ с. Обсяги води та крові однакові. Густина води та крові дорівнює $\rho_1 = 1$ г/см³, $\rho_2 = 1,06$ г/см³ відповідно. В'язкість крові у 5 разів більша за в'язкість води ($\eta_2 / \eta_1 = 5$).

3.34 Внутрішні діаметри двох голок рівної довжини, приєднаних до однакових шприців, відносяться як $1 : 2$. В якому відношенні будуть перебувати обсяги рідин, що проходять за одиницю часу через голки, якщо на поршні шприців діють з однаковою силою?

3.35 Кров тече по горизонтальній ділянці артерії, що має звуження. Використовуючи рівняння Бернуллі, поясніть, в якій ділянці артерії (звуженій чи широкій) тиск крові на стінки судини буде більшим? Динамічним або статичним тиском обумовлено фонтанування крові при надрізуванні артерії?

3.36 Визначити об'ємну Q та лінійну v швидкості руху рідини, якщо діаметр судини $D = 3$ см, в'язкість рідини дорівнює $\eta = 1\,005$ мкПа · с, густина рідини становить $\rho = 1\,000$ кг/м³. Число Рейнольдса дорівнює $Re = 3\,000$.

3.37 У горизонтальному положенні тіла серце та мозок перебувають на одному рівні. При зміні положення тіла на сидяче різниця висот буде дорівнювати 36 см, але серце повинно прокачувати кров до мозку з тією самою швидкістю, що і в горизонтальному положенні. *А.* Розрахувати, на скільки збільшиться гравітаційна потенціальна енергія 100 мл крові при піднятті на 36 см? *Б.* На скільки зменшиться артеріальний тиск на рівні голови під час зміни положення тіла? *В.* Яким чином зниження тиску пов'язане зі збільшенням потенціальної енергії?

3.38 Визначити потужність серця, якщо систолічний тиск дорівнює 100 мм рт. ст., діастолічний – 70 мм рт. ст., систолічний об'єм – 60 мл, час скорочення шлунків – 0,25 с. Тиск на вході в передсердя взяти 0 Па, кінетичною енергією крові знехтувати.

3.39 *А.* Середня швидкість крові в аорті радіусом 2 см дорівнює 25 см/с. З'ясувати, чи є течія крові в цьому разі ламінарною? Густина крові $\rho = 1,05 \cdot 10^3$ кг/м³. *Б.* Під час інтенсивних фізичних навантажень швидкість кровотоку іноді збільшується вдвічі. Визначити характер течії крові в цьому випадку.

3.40 Припустимо, що ви вимірюєте артеріальний тиск за допомогою медичного тонометра, розміщуючи манжету на ліву ногу на 0,5 м нижче від рівня серця. Розрахувати, який тиск покаже тонометр (мм рт. ст.), якщо тиск, виміряний на лівій руці на рівні серця, становив 120 мм рт. ст. на 80 мм рт. ст.

3.41 Визначити максимальну об'ємну швидкість руху рідини голкою шприца з внутрішнім діаметром $D = 3$ мм, за якої течія має ламінарний характер. Взяти густину лікарського препарату $\rho = 1\,000$ кг/м³, а в'язкість $\eta = 0,001$ Па · с.

3.42 Для людини в положенні стоячи різниця між вертикальним розміщенням серця і мозку становить 55 см. *А.* Припустивши, що артеріальний тиск крові на рівні серця дорівнює 100 мм рт. ст., знайти артеріальний тиск у головній артерії мозку (мм рт. ст та Па). *Б.* Повторити розрахунки, припустивши, що людина перебуває на Місяці ($g = g_{\text{Землі}}/6$) та на Юпітері ($g = 2,34g_{\text{Землі}}$). *В.* Чому, якщо людина стоїть на голові, обличчя стає червоним, а ноги стають блідими?

3.43 Розрахувати максимальне значення сили, з якою кров діє на аневризму в артерії, якщо її початкова площа дорівнює 20 см^2 . Тиск крові в ділянці з аневризмою становить 150 мм рт. ст. Відомо, що сили, які виникають при аневризмі, викликають подальше збільшення площі ушкодженої ділянки і, як наслідок, підвищення тиску в ній, що може призвести до її розриву.

3.44 Під час ін'єкції виникає необхідність швидкого введення лікарської речовини. В якому разі процедура пройде швидше: при підвищенні тиску в 2 рази або при збільшенні діаметра голки в 2 рази (довжини голок однакові)?

3.45 Розрахувати число Рейнольдса для рідин шлунково-кишкового тракту. Взяти до уваги, що в'язкість рідини у шлунку становить $1 \text{ Н} \cdot \text{м/с}$ та $10 \text{ Н} \cdot \text{м/с}$ поза шлунком відповідно. Визначити характер руху рідини.

3.46 Людина рухається угору з прискоренням $4g$, визначити артеріальний тиск на рівні головного мозку ($0,4 \text{ м}$ вище від серця) та у судинах на рівні ступні ($1,5 \text{ м}$ нижче від серця). Припустити, що тиск на рівні серця становить 120 мм рт. ст.

3.47 Розрахувати максимальний хвилинний об'єм крові Q_{max} , за якого течія крові по аорті зберігає ламінарний характер. Діаметри аорти $D = 2 \text{ см}$, в'язкість крові $\eta = 5 \text{ мПа} \cdot \text{с}$, густина крові $\rho = 1050 \text{ кг/м}^3$, критичне значення числа Рейнольдса $Re_{кр} = 2000$.

3.48 З горизонтально розміщеного медичного шприца, діаметром $1,5 \text{ см}$, видавлюється фізіологічний розчин силою 10 Н . Знайти швидкість витікання рідини з голки шприца. Густина фізіологічного розчину $\rho = 1,03 \text{ г/см}^3$.

3.49 Знайти, який об'єм крові прокачує серце впродовж 75-річної тривалості життя, припускаючи, що середнє значення об'ємної швидкості кровотоку становить 5 літрів за хвилину? Знайти роботу та потужність серця за цей період життя.

МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БІОЛОГІЧНИХ ТКАНИН

📖 Теоретична частина

Таблиця 4.1 – Параметри пружності біологічних тканин під час розтягування

Орган	Межа міцності на розтягування, МПа	Критична деформація, %	Модуль Юнга, МПа
Ахіллове сухожилля	54	9,0	250
Волога губчата кістка (хребець)	1,2	0,6	200
Волосся (голова)	197	40	12 000
Гаїліновий хрящ (у синовіальному суглобі)	2,9	18	24
Дентин (стискання вологого зразка)	162	4,2	6 000
Еластичний хрящ (зовнішнє вухо)	3,1	26	4,5
Скелетний м'яз (прямий м'яз черева)	0,11	61	0,02
Клапани серця	2,5	15	1
Компактна стегнова кістка	109	1,4	10 600
Компактна стегнова кістка (стискання)	162	1,8	10 600
Коронарні артерії	1,1	64	0,1
Міжхребцевий диск	2,8	57	2,0
Міжхребцевий диск (стискання)	11	32	6
Нерви	13	18	10
Нігті	18	14	160
Порожниста вена (поздовжньо)	1,5	100	0,04

Продовження табл. 4.1

Орган	Межа міцності на розтягування, МПа	Критична деформація, %	Модуль Юнга, МПа
Пуповина	1,5	59	0,7
Серцевий м'яз	0,11	64	0,08
Стравохід	0,6	73	0,03
Говстий кишківник (поздовжньо)	0,69	117	0,02
Гонкий кишківник (поздовжньо)	0,56	43	0,2
Хребці	3,5	0,8	410
Шкіра обличчя	3,8	58	0,3
Шлунок (поздовжньо)	0,56	93	0,015

1 Відносна деформація ε :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l},$$

де l – початкова довжина зразка, м; l_1 – його кінцева довжина, м; $\Delta l = l_1 - l$ – абсолютна деформація, м.

2 Механічне напруження σ , Н/м², або Па:

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

де F – прикладена до зразка сила, Н; S – площа поперечного перерізу зразка, м².

3 Напруження в пружному середовищі (закон Гука) $\sigma_{\text{п}}$, Па:

$$\sigma_{\text{п}} = \varepsilon E,$$

де ε – відносна деформація; E – модуль пружності, або модуль Юнга, Па.

4 Напруження у в'язкому середовищі $\sigma_{\text{в}}$, Па:

$$\sigma_{\text{в}} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt},$$

де η – в'язкість середовища, Па · с; t – час процесу, с; $\frac{d\varepsilon}{dt}$ – похідна від деформації за часом, або швидкість деформування, $\frac{1}{\text{с}}$.

5 Модуль пружності під час деформації згинання E , Па:

$$E = \frac{FL^3}{4ba^3\lambda},$$

де L – довжина тіла, м; a – товщина тіла, м; b – ширина тіла, м; λ – переміщення, що зазнає середина тіла під час деформації, м; F – величина зовнішньої сили, Н.

6 Поздовжнє напруження, що виникає у стінках кровоносних судин або витягнутих (циліндричних) клітинах σ_n , Па:

$$\sigma_n = \frac{P \cdot R}{2h},$$

де P – внутрішній гідростатичний тиск у судині, Па; R – внутрішній радіус, м; h – товщина стінок судини, м.

7 Тангенціальне напруження, що виникає у стінках кровоносних судин або витягнутих (циліндричних) клітинах σ_T , Па (рівняння Ламе):

$$\sigma_T = \frac{P \cdot R}{h},$$

де P – внутрішній гідростатичний тиск у судині, Па; R – внутрішній радіус, м; h – товщина стінок судини, м.

8 Тангенціальне напруження, яке діє на стінки сферичних клітин σ_T , Па:

$$\sigma_T = \frac{P \cdot R}{R + h},$$

де P – внутрішній гідростатичний тиск у судині, Па; R – внутрішній радіус, м; h – товщина стінок судини, м.

9 Швидкість поширення пульсової хвилі v , формула Моенса–Кортевега, м/с:

$$v = \sqrt{\frac{E \cdot h}{\rho \cdot D}},$$

де E – модуль пружності стінки судини, Па; h – товщина стінки судини, м; ρ – густина крові, кг/м³; D – діаметр судини, м.

10 Швидкість пульсової хвилі вздовж артерії v , м/с:

$$v = \sqrt{\frac{E}{3\rho} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right]},$$

де E – модуль пружності стінки судини, Па; d – внутрішній діаметр судини, м; D – зовнішній діаметр судини, м; ρ – густина крові, кг/м³.

11 Напруження у в'язко-пружному середовищі σ , Па:

$$\sigma = \varepsilon E + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

12 Залежність деформації від часу для в'язко-пружного середовища (модель Кельвіна–Фойгта)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-t/\tau}),$$

де $\tau = \eta / E$ – час релаксації деформації, с.

13 Закон Гука

$$F = -k\Delta l,$$

де k – коефіцієнт жорсткості, Н/м; Δl – абсолютна деформація, м; F – сила пружності, Н.

14 Коефіцієнт жорсткості k , Н/м:

$$k = \frac{E \cdot S}{l},$$

де E – модуль Юнга, Па; S – площа поперечного перерізу, м²; l – довжина тіла до деформації, м.

15 Потенційна енергія пружно-деформованого тіла E , Дж:

$$E = \frac{k(\Delta l)^2}{2},$$

де k – коефіцієнт жорсткості, Н/м; Δl – абсолютна деформація, м.

16 Рівняння Хілла

$$(F + a)(v + b) = (F_0 + a)b = a(v_{max} + b),$$

де F – м'язова сила чи зовнішня прикладена сила навантаження, Н; v – швидкість скорочення м'яза, м/с; F_0 – максимальна сила ізометричного скорочення, Н; v_{max} – максимальна швидкість скорочення м'яза, м/с; a – константа, Н; b – константа, м/с.

17 Швидкість скорочення м'яза v , м/с:

$$v = \frac{(F_0 - F)b}{F + a}.$$

18 Потужність скорочення м'яза $N_{заг}$, Вт:


$$N_{заг} = (F + a)v = (F_0 - F)b.$$

19 ККД скорочення м'яза η :

$$\eta = \frac{A}{A + Q} = \frac{P \cdot v}{N_{заг}},$$

де A – робота, Дж; Q – теплопродукція, Дж; $N_{заг}$ – загальна потужність, що розвиває м'яз, Вт; $N_{кор} = P \cdot v$ – корисна потужність, Вт.

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

4.1 Визначити трансмуральний тиск стінки капіляра з внутрішнім радіусом 3 мкм, якщо відношення радіуса капіляра до товщини стінки дорівнює 5, а тангенціальне напруження в капілярі становить 17 кПа.

Дано:

$$R = 3 \text{ мкм} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$\frac{R}{h} = 5,$$

$$\sigma = 17 \text{ кПа} = 17 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Розв'язання:

$$\sigma = \frac{P \cdot R}{h}, \text{ звідси } P = \frac{\sigma h}{R}, \quad (1)$$

$$R = 5h. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$P = \frac{\sigma h}{5h} = \frac{\sigma}{5},$$

Знайти:

$$P = \frac{17 \cdot 10^3}{5} = 3,4 \cdot 10^3 \text{ Па,}$$

P —?

$$[P] = \text{Па.}$$

Відповідь: $P = 3,4 \cdot 10^3 \text{ Па.}$

4.2 Визначити абсолютне подовження сухожилля довжиною 4 мм і площею перерізу 10^{-6} м^2 під дією сили 320 Н. Модуль пружності сухожилля взяти за 10^9 Па . Вважати сухожилля абсолютно пружним тілом.

Дано:

$$l = 4 \text{ мм} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$S = 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$F = 320 \text{ Н,}$$

$$E = 10^9 \text{ Па.}$$

Розв'язання:

$$\sigma = \varepsilon E, \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (2)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (3)$$

Підставимо (2), (3) до (1), одержимо

$$\frac{F}{S} = \frac{\Delta l}{l} E, \text{ звідси } \Delta l = \frac{lF}{SE},$$

$$\Delta l = \frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 320}{10^{-6} \cdot 10^9} = 1,28 \text{ мм,}$$

Знайти:

Δl —?

$$[\Delta l] = \frac{\text{м} \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Па}} = \frac{\text{м} \cdot \text{Па}}{\text{Па}} = \text{м.}$$

Відповідь: $\Delta l = 1,28 \text{ мм.}$

4.3 М'яз скорочується зі швидкістю 6 мм/с, розвиває загальну потужність 2,7 мВт. Навантаження в ізометричному режимі скорочення для цього м'яза становить $F_0 = 0,8 \text{ Н}$, константа – $b = 23 \text{ мм/с}$. Обчислити роботу, що виконує м'яз за час 0,5 с.

Дано:

$$v = 6 \text{ мм/с} =$$

$$= 6 \cdot 10^{-3} \text{ м/с,}$$

$$N_{\text{заг}} = 2,7 \text{ мВт} =$$

Розв'язання:

$$N_{\text{заг}} = (F_0 - F)b, \quad (1)$$

$$A = Fx, \text{ де } x = vt, \text{ тоді } F = \frac{A}{vt}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$\begin{aligned}
 &= 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ Вт}, & N_{\text{зар}} &= \left(F_0 - \frac{A}{vt} \right) b, \text{ звідси} \\
 F_0 &= 0,8 \text{ Н}, & A &= \left(F_0 - \frac{N_{\text{зар}}}{b} \right) vt, \\
 b &= 23 \text{ мм/с} = & A &= \left(0,8 - \frac{2,7 \cdot 10^{-3}}{23 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot 6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 = 2,05 \text{ мДж}, \\
 &= 23 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}, & [A] &= \left(\text{Н} - \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{м}} \right) \cdot \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}} = \left(\text{Н} - \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} \right) \cdot \text{м} = \\
 t &= 0,5 \text{ с}. & &= \left(\text{Н} - \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} \right) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.
 \end{aligned}$$

Знайти:

A —?

Відповідь: $A = 2,05 \text{ мДж}$.

4.4 Знайти межу міцності кістки діаметром 30 мм та товщиною 3 мм, якщо для її руйнування необхідна сила 400 кН.

Дано:

$$D = 30 \text{ мм} = 30 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

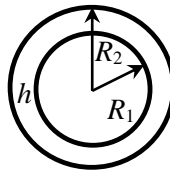
$$h = 3 \text{ мм} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$F = 400 \text{ кН} = 4 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Розв'язання:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (1)$$

$$R_1 = \frac{D - 2h}{2}, \quad R_2 = \frac{D}{2}, \quad (2)$$



Знайти:

σ —?

$$S_{\text{к}} = S_2 - S_1, \text{ де } S = \pi R^2, \text{ тоді}$$

$$S_{\text{к}} = \pi(R_2^2 - R_1^2). \quad (3)$$

Підставимо (2) до (3), одержимо

$$S_{\text{к}} = \pi \left(\left(\frac{D}{2} \right)^2 - \left(\frac{D - 2h}{2} \right)^2 \right) = \pi h(D - h). \quad (4)$$

Підставимо (4) до (1), одержимо $\sigma = \frac{F}{\pi h(D - h)}$,

$$\sigma = \frac{4 \cdot 10^5}{3,14 \cdot 3 \cdot 10^{-3} (30 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-3})} = 1,573 \text{ МПа.}$$

$$\sigma = \frac{H}{m(m-m)} = \frac{H}{m^2} = \text{Па.}$$

Відповідь: $\sigma = 1,573 \text{ МПа.}$

4.5 Використовуючи модель в'язко-пружного середовища, розрахувати відносну деформацію скелетного м'яза за три хвилини, якщо модуль пружності м'яза $E = 1,2 \text{ МПа}$, площа поперечного перерізу $S = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, а навантаження на м'яз $F = 6,3 \text{ Н}$. В'язкість речовини м'яза взяти $\eta = 0,125 \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Дано:

Розв'язання:

$$E = 1,2 \text{ МПа} = \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} (1 - e^{-t/\tau}), \text{ де } \tau = \eta/E, \quad (1)$$

$$= 1,2 \cdot 10^6 \text{ Па}, \quad \sigma = \frac{F}{S}. \quad (2)$$

$S = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$, Підставимо (2) до (1), одержимо

$$\eta = 0,125 \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad \varepsilon(t) = \frac{F}{SE} \left(1 - e^{-\frac{Et}{\eta}}\right),$$

$$F = 6,3 \text{ Н}, \quad \varepsilon = \frac{6,3}{0,8 \cdot 10^{-6} \cdot 1,2 \cdot 10^6} \left(1 - e^{-\frac{-1,2 \cdot 10^6 \cdot 180}{0,125}}\right) = 6,56,$$

$$t = 3 \text{ хв} = 180 \text{ с.} \quad [\varepsilon] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{Па}} \left(1 - e^{-\frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{Па} \cdot \text{с}}}\right) = \frac{\text{Па}}{\text{Па}} = 1.$$

Знайти:

ε —?

Відповідь: $\varepsilon = 6,56$.

✍ Задачі для самостійного виконання

4.6 Модуль пружності протоплазмових ниток, одержаних витягуванням протоплазми у деяких типах клітин за допомогою

мікроглобок, становить 9 кПа за кімнатної температури. Визначити напруження, що виникає в нитках під час розтягування, що не перевищує 20 % їх початкової довжини. Вважати нитку абсолютно пружним тілом.

4.7 Визначити абсолютну деформацію Δl сухожилля довжиною $l = 5$ см і діаметром $D = 4$ мм під дією сили $F = 31,4$ Н. Модуль пружності сухожилля дорівнює $E = 2 \cdot 10^9$ Па.

4.8 Визначити модуль пружності кравецького м'яза жаби, якщо при зростанні прикладеного до м'яза напруження від 10 кПа до 40 кПа його довжина збільшилася від 0,032 м до 0,034 м.

4.9 Як зміниться модуль пружності стегнової кістки людини, якщо при напруженні 5 Па відносна деформація становить 0,025, а при збільшенні напруження до 11 Па вона дорівнює 0,055.

4.10 М'яз завдовжки 10 см і діаметром 1 см під дією навантаження 49 Н подовжився на 7 мм. За цими даними визначити модуль пружності м'язової тканини.

4.11 У скільки разів відносно подовження еластину більше, ніж колагену, за однакових напружень, якщо модуль пружності колагену дорівнює 100 МПа, а еластину становить 1 МПа?

4.12 Яка сила F необхідна для руйнування при стисканні стегнової кістки діаметром $D = 30$ мм і товщиною стінок $h = 3$ мм, якщо межа міцності кістки становить $\sigma = 1,4 \cdot 10^8$ Па?

4.13 Навантаження на стегнову кістку, що становить 1 800 Н, під час стискання викликає відносну деформацію $3 \cdot 10^{-4}$. Обчислити площу поперечного перерізу кістки, якщо її модуль пружності дорівнює $23 \cdot 10^9$ Па.

4.14 Межа міцності кісткової тканини становить 100 МПа, модуль Юнга дорівнює 10 ГПа. Розрахувати, при якому відносному подовженні відбудеться руйнування кісткової тканини?

4.15 Знайти потенціальну енергію, що припадає на одиницю об'єму кістки, якщо кістка стиснена так, що напруження в ній становить $3 \cdot 10^9$ Па. Модуль пружності кісткової тканини взяти $22,5 \cdot 10^9$ Па.

- 4.16** Знайти механічне напруження стегнової кістки штангіста вагою 80 кг при піднятті штанги, що у півтора рази більше його ваги. Взяти діаметр стегнової кістки 30 мм, товщина дорівнює 3 мм. Межа міцності стегнової кістки становить 10^8 Н/м^2 . Яку критичну вагу може витримати кістка?
- 4.17** Швидкість поширення пульсової хвилі становить 10 м/с. Визначити модуль пружності артерії, якщо товщина її стінок 0,7 мм, внутрішній діаметр 8 мм, а густина крові 1050 кг/м^3 .
- 4.18** Дослідження виявили, що внаслідок відкладання холестерину в аорті людини товщина її стінок збільшилася в 1,5 рази, внутрішній діаметр зменшився на 25 %, а швидкість поширення пульсової хвилі збільшилася в 1,9 рази. Як зміниться при цьому модуль пружності стінки відносно норми?
- 4.19** Швидкість пульсової хвилі в артерії становить $v = 8 \text{ м/с}$. Чому дорівнює модуль пружності E цих судин, якщо відомо, що відношення радіуса просвіту до товщини стінки судини дорівнює $R/h = 6$, а густина крові дорівнює $\rho = 1,15 \text{ г/см}^3$?
- 4.20** У скільки разів зміниться модуль пружності стінки аорти під час атеросклерозу E_a/E_n , якщо відомо, що швидкість пульсової хвилі збільшилася втричі, $v_a = 3v_n$?
- 4.21** В ізотонічному режимі м'яз піднімає вантаж масою 100 г на висоту 20 см. Розрахуйте теплопродукцію м'яза, якщо ККД = 40 %.
- 4.22** При скороченні м'яза було виділено $Q = 5,5 \text{ кДж}$ тепла за час $t = 0,3 \text{ с}$. Знайти корисну потужність $N_{\text{кор}}$, розвинену м'язом, якщо його ККД $\eta = 45 \%$.
- 4.23** Максимальна загальна потужність, розвинена м'язом, становить $N_{\text{заг}} = 10 \text{ Вт}$, а навантаження в ізометричному режимі скорочення – $F_0 = 300 \text{ Н}$. Знайти корисну потужність м'яза $N_{\text{кор}}$ при навантаженні $F = 180 \text{ Н}$.
- 4.24** Внутрішній діаметр артерії дорівнює 3 мм, зовнішній – 3,5 мм, модуль Юнга для стінок судини становить 10 МН/м^2 , густина крові дорівнює 1060 кг/м^3 . Знайти швидкість пульсової хвилі вздовж артерії.

4.25 В експериментах на м'язах жаби було визначено, що навантаження в ізометричному режимі дорівнювало $F_0 = 0,64$ Н, максимальна швидкість скорочення – $v_{max} = 50$ мм/с, а при навантаженні $F = 0,3$ Н швидкість скорочення становила $v = 10$ мм/с. Знайти значення констант a, b для цього м'яза.

4.26 Внаслідок атеросклерозу модуль Юнга для стінок артерій і швидкість пульсової хвилі збільшилися на 20 %. Знайти патологічне співвідношення внутрішнього і зовнішнього діаметрів артерії, якщо у нормі воно дорівнює 0,9.

4.27 Тепло, що виділяється м'язом у фазі ізотонічного скорочення, розподіляють на дві складові: теплоу активації (внаслідок ізотермічних процесів, що приводять м'яз до активного стану) і теплоу скорочення (утворюється лише при скороченні м'яза). Визначити теплоу активації м'яза перерізом $S = 1,2$ см², швидкість скорочення якого при навантаженні 100 Н дорівнює 3 см/с, якщо при його скороченні на 1 см² виділяється енергія 0,005 Дж на 1 мм² поперечного перерізу. ККД м'яза $\eta = 40$ %, а час скорочення $t = 0,4$ с.

4.28 У мембранних умовах вивчають енергетику скелетного м'яза жаби. В ізотонічному режимі піднімається вантаж на висоту 10 см, і при цьому виділяється теплота 48 мДж. Знайти масу вантажу, якщо ККД м'яза дорівнює 40 %.

4.29 Знайти ККД м'яза жаби, якщо в ізотонічному режимі роботи м'яза піднімається вантаж масою 40 г на висоту 10 см, і при цьому виділяється теплота 48 мДж.

4.30 За допомогою даних таблиці 4.1 знайти напруження (МПа), необхідне для розтягування компактної речовини стегнової кістки, нігтів, нервів, шкіри та коронарних артерій до відносної деформації 0,01. При розв'язуванні вважати ці біологічні матеріали еластичними (за Гуком), а деформації – малими.

4.31 Оцінити, наскільки скоротиться довжина стегнової кістки, якщо людина встане на одну ногу? Без навантаження її довжина дорівнює 0,5 м. Під час вставання на одну ногу вага тіла 700 Н (для людини масою 70 кг) розподіляється площею поперечного

перерізу 370 мм^2 . Чому дорівнює відносна деформації стегнової кістки?

4.32 За допомогою даних таблиці 4.1 визначити відносну деформацію компактної речовини стегнової кістки, нігтів, нервів, шкіри обличчя і коронарних артерій, якщо ці біологічні матеріали одержують напруження $0,5 \text{ МПа}$. Під час розв'язування ці біологічні матеріали еластичні (за Гуком), а деформації – малі.

4.33 Для визначення механічних властивостей кісткової тканини була взята пластинка із черепної кістки з такими розмірами: довжина $L = 5 \text{ см}$, ширина $b = 1 \text{ см}$, товщина $h = 0,5 \text{ см}$. Під дією сили $F = 200 \text{ Н}$ пластинка подовжилася на $\Delta l = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ см}$. Визначити за цими даними модуль Юнга кісткової тканини при деформації розтягування.

4.34 Площа поперечного перерізу стегнової кістки людини становить 3 см^2 , визначити, яку максимальну силу стискання може витримати кістка без руйнування? Межа міцності стегнової кістки при стисканні дорівнює 124 МПа .

4.35 Відомо, що ми можемо бачити близькі та далекі об'єкти завдяки властивостям акомодатії ока. Вони базуються на тому, що форма кришталика ока змінюється під час зміни сили натягу зв'язок, які підтримують око. *А.* За допомогою одновимірної моделі оцінити напруження у кришталику, якщо його модуль Юнга дорівнює 1 кПа (це характерно для 20-річного віку), а відносна деформація становить 3% . *Б.* Вважаючи, що сумарна сила, що діє на кришталик, дорівнює $0,002 \text{ Н}$, визначити ефективну площу контакту (мм^2). *В.* Визначити відносну деформацію кришталика для людини у віці 60 років, якщо напруження у кришталику таке саме, як і в пункті *А*, але модуль Юнга збільшився до 3 кПа .

4.36 Сухожилля довжиною 16 см подовжується на $3,3 \text{ мм}$ під дією сили $12,4 \text{ Н}$. Розрахувати модуль пружності цього сухожилля. Сухожилля можна вважати круглим у перерізі з діаметром $8,6 \text{ мм}$.

4.37 Визначити частку енергії деформації, запасену у хрящі й у кістці проксимальної половини великогомілкової кістки (рис. 4.1), якщо вона рівномірно стискається над поверхнею суглоба.

Малогомілкову кістку не розглядати. Припустити, що великогомілкова кістка складається з трьох частин: 1) порожнистого циліндричного діафізарного сегмента (кортикального шару кістки); 2) суцільного метафізарного сегмента губчастої кістки; 3) твердого дископодібного хрящового шару. Розміри кістки такі (рис. 4.1): $a = 10$ мм, $b = 30$ мм, $c = 50$ мм, $e = 4$ мм, $f = 70$ мм, $g = 130$ мм. Усі матеріали є еластичними. Значення модуля Юнга: 20 000 МПа для кортикального шару, 200 МПа для губчастої кістки і два значення (20 і 200 МПа) для хряща. Обчислити сумарну енергію деформації для кожного сегмента моделі, частку цієї енергії від загальної енергії деформації в кістці. Провести оцінювання для обох величин модуля Юнга хряща.



Рисунок 4.1 – Модель проксимальної половини великогомілкової кістки людини

4.38 За допомогою характеристик малогомілкової кістки (рис. 4.2) визначити такі величини: *a*) максимальне напруження кістки з поперечним перерізом 4 см^2 , яке воно може витримати перед переломом; *б*) подовження кістки під дією максимального напруження, якщо початкова довжина становить $0,35$ м; *в*) напруження цієї кістки, якщо на неї діє сила 10^4 Н. Наскільки ця кістка розтягнеться?

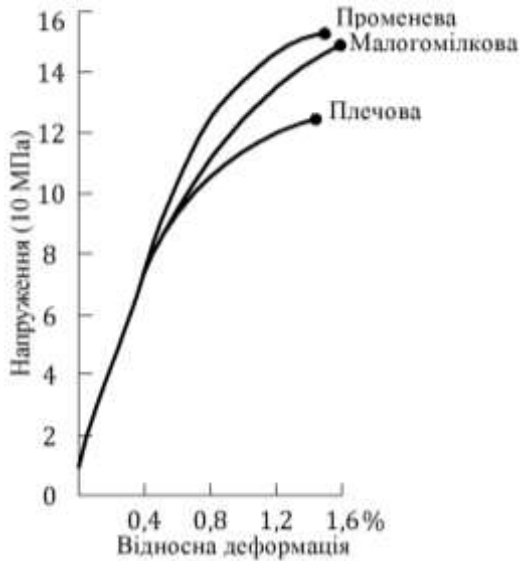


Рисунок 4.2 – НД-криві під час розтягування вологих (невисушених) кісток осіб у віці від 20 до 39 років. Точки на кривих праворуч є точками перелому

4.39 Із великогомілкової кістки собаки вирізали стрижень прямокутного перерізу з ребрами $a = 2$ мм, $b = 5$ мм. Для визначення механічних властивостей він був закріплений на підпори, що знаходилися на відстані $L = 5$ см один від одного. До центра стрижня була прикладена сила $F = 28$ Н. При цьому стріла прогину дорівнювала $\lambda = 1,5$ мм. Визначити модуль Юнга для цієї кістки при деформації згинання.

4.40 Визначити межу міцності стегнової кістки штангіста масою 80 кг при піднятті штанги масою 160 кг, якщо діаметр стегнової кістки 30 мм. Допустиме значення напруження $15 \cdot 10^7$ Н/м².

4.41 Легкоатлет масою 50 кг спотикається і падає на витягнену руку. Знайти мінімальне значення швидкості руху бігуна, що призведе до перелому кістки передпліччя. Припустити, що вся кінетична енергія переходить у деформацію стискування кістки.

Взяти довжину руки за 1 м, а ефективну площу перерізу кістки передпліччя – 4 см². Модуль пружності при стисканні становить $14 \cdot 10^9$ Н/м².

4.42 Нехай людина масою 70 кг падає з висоти h на обидві ноги. Знайдіть значення висоти, падіння з якої призведе до перелому обох ніг. Припустимо, що вся енергія падіння переходить у деформацію стискання. Взяти довжину кістки ноги за 90 м, а ефективну площу перерізу кістки – за 6 см². Модуль пружності при стисканні становить 14 ГН/м², а межа міцності – 10^8 Н/м².

4.43 Падіння з якої висоти h твердого предмета масою 1 кг може викликати перелом черепа? Припустити, що вся енергія падіння переходить у деформацію стискання, а площа контакту з черепом становить 1 м², тривалість удару становить 10^{-3} с. Модуль пружності при стисканні дорівнює 14 ГН/м², а межа міцності – 10^8 Н/м².

4.44 Під час тестування автомобіля на ударостійкість (краш-тест) машина була прискорена до швидкості v впродовж 10^{-2} с та імітувалося зіткнення ззаду (рис. 4.3). Знайти мінімальне значення швидкості руху автомобіля, при якому існує небезпека перелому шийі пасажира, пристебнутого ременями безпеки. Припустити, що ефективна площа шийних хребців становить 1 см², а маса голови – 5 кг. Модуль пружності дорівнює 14 ГН/м², межа міцності – 10^8 Н/м².



Рисунок 4.3 – Тестування автомобіля на ударостійкість

4.45 До Ахіллового сухожилля довжиною 10 см і діаметром 5 мм прикладена сила 100 Н. Визначити абсолютне та відносне подовження сухожилля, а також виконану роботу, якщо модуль Юнга становить 300 МПа.

4.46 Модуль Юнга м'яза дорівнює 9,32 МПа. Для вивчення механічних властивостей до м'яза довжиною 6 см і діаметром 8 мм підвішений важіль масою 700 г. Знайти абсолютне та відносне подовження м'яза, потенціальну енергію, якої набув м'яз внаслідок деформації розтягування.

4.47 Діаметр великогомілкової кістки дорівнює 3,2 см, товщина стінки – 2 мм. Перелом кістки відбувся при навантаженні 18 кН. Знайти за цими даними руйнівне напруження та відносну поздовжню деформацію на момент перелому кістки, якщо її модуль пружності становить 2,3 ГПа.

4.48 За даними таблиці 4.2 визначити модулі Юнга для зв'язок суглобів людини, вважаючи, що деформації відбуваються у межах пружності.

Таблиця 4.2 – Відносна деформація і межа міцності зв'язок суглобів людини

Зв'язка	Відносна поздовжня деформація ϵ		Межа міцності $\sigma_{\text{міц}} \cdot 10^6, \text{ Н/м}^2$		Модуль Юнга $E, \text{ Н/м}^2$	
	чоловік	жінка	чоловік	жінка	чоловік	жінка
Наколіннок	1,13	1,6	4,02 – 23,8	3,53 – 13,73	?	?
Бічна великогомілкова	1,13 – 1,15	1,13 – 1,38	5,98 – 41,19	10,78 – 26,48	?	?
Бічна малоогомілкова	1,13 – 1,55	1,10 – 1,60	5,88 – 30,4	3,92 – 20,6	?	?
Клиноподібна	1,05 – 1,66	1,13 – 1,20	0,196 – 0,59	0,196 – 0,49	?	?
Бічна ліктьова	1,06 – 1,45	1,01 – 1,03	0,49 – 4,81	0,196 – 4,9	?	?
Бічна променева	1,20 – 1,70	1,14 – 1,40	1,18 – 4,71	0,59 – 3,92	?	?

4.49 Із віком швидкість пульсової хвилі зростає. Обстеження 200 пацієнтів віком 11 – 15 років показали, що середня швидкість пульсової хвилі в аорті для дітей $v_1 = 4,62 \text{ м/с}$ (середній діаметр аорти $D_1 = 1,25 \text{ см}$; товщина стінки $h_1 = 1,7 \text{ мм}$); для пацієнтів

віком 51 – 60 років – $v_2 = 7,46$ м/с ($D_2 = 2,25$ см, $h_2 = 2$ мм). Як змінився модуль Юнга з віком? Вважати, що зміна інших параметрів неістотна.

4.50 Чому дорівнює модуль пружності стінки аорти, якщо відношення радіуса просвіту судини до товщини її стінки дорівнює 5? Відомо, що при підвищенні тиску крові всередині аорти від 13,3 до 16 кПа її площа поперечного перерізу збільшується від 6,16 до 6,2 см².

 Тестові завдання до тематичного блоку 1

I Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1 В'язкість крові вимірюється у:

- а) Па; б) Па · с; в) Па/с; г) с/Па.

2 Механічне напруження вимірюється у:

- а) Дж; б) Па; в) Н; г) Па · с.

3 Тиск крові вимірюється у:

- а) Дж; б) кг; в) Н; г) Па.

4 Площа перерізу судин вимірюється у:

- а) м; б) м²; в) м³; г) м⁻¹.

5 Абсолютна деформація вимірюється у:

- а) Па; б) м²; в) безрозмірна; г) м.

6 Потужність скорочення м'язів вимірюється у:

- а) Па; б) Н; в) Вт; г) Дж.

II Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1 Тангенціальне напруження, що виникає у стінках кровоносних судин, визначається за формулою:

- а) $\sigma = \frac{PR}{h}$; б) $\sigma = \frac{Ph}{R}$; в) $\sigma = \frac{hR}{P}$; г) $\sigma = \frac{P}{Rh}$.

2 ККД скорочення м'язу визначається за формулою:

а) $\eta = \frac{A+Q}{A}$; б) $\eta = \frac{A}{A+Q}$; в) $\eta = \frac{Q}{Q+A}$; г) $\eta = \frac{A+Q}{Q}$.

3 Число Рейнольдса визначається за формулою:

а) $Re = \frac{\rho v D}{\eta}$; б) $Re = \frac{\rho v R}{\eta}$; в) $Re = \frac{\rho v}{\eta D}$; г) $Re = \frac{\rho D}{\eta v}$.

4 Гідравлічний опір судини визначається за формулою:

а) $X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$; б) $X = \frac{8\eta l}{\pi R}$; в) $X = \frac{\eta l}{8\pi R^4}$; г) $X = \frac{8\pi l}{\eta R^4}$.

5 Робота серця під час однократного скорочення визначається за формулою:

а) $A_c = 1,2V_y(P - \frac{\rho v^2}{2})$; б) $A_c = V_y(P + \frac{\rho v^2}{2})$;

в) $A_c = 1,2V_y(P + \frac{\rho v^2}{2})$; г) $A_c = 0,2V_y(P + \frac{\rho v^2}{2})$.

6 Швидкість поширення пульсової хвилі визначається за формулою:

а) $v = \frac{E \cdot D}{\rho \cdot h}$; б) $v = \sqrt{\frac{E \cdot D}{\rho \cdot h}}$; в) $v = \frac{E \cdot h}{\rho \cdot D}$; г) $v = \sqrt{\frac{E \cdot h}{\rho \cdot D}}$.

III Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1) $v_1 S_1 = v_2 S_2$ – це:

- а) рівняння Ламе;
- б) формула Пуазейля;
- в) рівняння Бернуллі;
- г) рівняння нерозривності течії;

2) $\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = const$ – це:

- а) рівняння нерозривності течії;
- б) закон Стокса;
- в) модель Кельвіна–Фойгта;
- г) рівняння Бернуллі;

3) $\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E}(1 - e^{-t/\tau})$ – це:

- а) модель Кельвіна–Фойгта;
- б) число Рейнольдса;
- в) рівняння Бернуллі;
- г) закон Гука для пружного елемента;

4) $(F + a)(v + b) = (F_0 + a)b = a(v_{max} + b)$ – це:

- а) закон Гука;
- б) рівняння Хілла;
- в) рівняння Бернуллі;
- г) рівняння нерозривності течії;

5) $F = 6\pi\eta Rv$ – це:

- а) рівняння Ламе;
- б) рівняння Хілла;
- в) закон Стокса;
- г) рівняння Бернуллі;

б) $\sigma = \frac{PR}{h}$ – це:

- а) рівняння Ламе;
- б) рівняння Ньютона;
- в) рівняння Хілла;
- г) рівняння Бернуллі.

IV Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1 У законі Гука для пружного елемента $\sigma_{II} = \varepsilon E$, ε – це:

- а) механічне напруження;
- б) абсолютна деформація;
- в) модуль пружності;
- г) відносна деформація.

2 У Законі Пуазейля $Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{P_1 - P_2}{l}$, l – це:

- а) радіус судини;
- б) площа взаємодіючих шарів рідини;
- в) швидкість рідини;

г) довжина ділянки судини.

3 У законі Стокса $F = 6\pi\eta Rv$, v – це:

- а) радіус тіла;
- б) швидкість рідини;
- в) градієнт швидкості;
- г) об'єм тіла.

4 У формулі потужності скорочення м'яза $N_{\text{зар}} = (F + a)v = (F_0 - F)b$, F_0 – це:

- а) максимальна сила ізотонічного скорочення м'яза;
- б) мінімальна сила ізометричного скорочення;
- в) максимальна сила ізометричного скорочення;
- г) мінімальна сила ізотонічного скорочення м'яза.

5 У формулі гематокриту $\eta = \eta_0 e^{2c}$, η_0 – це:

- а) в'язкість плазми;
- б) в'язкість води;
- в) в'язкість при $t = 0$ °C;
- г) в'язкість крові.

6 У формулі числа Рейнольдса $Re = \frac{\rho v D}{\eta}$, D – це:

- а) механічне напруження;
- б) абсолютна деформація;
- в) відносна деформація;
- г) діаметр судини.

V Виберіть правильну відповідь (2 бали):

1 В'язкість крові:

- а) не залежить від діаметра судини;
- б) у дрібних судинах більша, ніж у великих;
- в) у дрібних судинах менша, ніж у великих;
- г) є однаковою у всіх частинах судинного русла.

2 Зі збільшенням гематокриту в'язкість крові:

- а) збільшується;
- б) не залежить від гематокриту;

- г) зменшується;
- д) не змінюється.

3 В якому відділі судинного русла лінійна швидкість течії крові є мінімальною:

- а) в аорті;
- б) в артеріях;
- в) в артеріолах;
- г) у капілярах;
- д) у венах?

4 Збільшення тенденції еритроцитів до агрегації викликає:

- а) збільшення ШОЕ;
- б) зниження ШОЕ;
- в) не впливає на ШОЕ;
- г) може викликати як збільшення, так і зменшення ШОЕ.

5 Відповідно до рівняння Ламе зв'язок між напруженням кровоносної судини та тиском всередині є:

- а) лінійним;
- б) обернено пропорційним;
- в) зв'язку немає;
- г) квадратичним.

6 В якому відділі судинного русла лінійна швидкість течії крові є максимальною:

- а) в аорті;
- б) в артеріях;
- в) в артеріолах;
- г) у капілярах;
- д) у венах?

VI Переведіть величину до системи СІ, поясніть відповідь (2 бали):

1) 0,5 мкм – це:

- а) $5 \cdot 10^{-6}$ м; б) $5 \cdot 10^{-4}$ м; в) $5 \cdot 10^{-7}$ м; г) $5 \cdot 10^5$ м;

2) 20 мл – це:

- а) $2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$; б) $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$; в) $2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$; г) $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$;

3) 20 МПа – це:

- а) $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$; б) $2 \cdot 10^7 \text{ Па}$; в) $2 \cdot 10^{-2} \text{ Па}$; г) 2 Па ;

4) 60 см/хв – це:

- а) $6 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}$; б) $6 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$; в) $1 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}$; г) $1 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}$;

5) 0,5 мПа · с – це:

- а) $5 \cdot 10^{-4} \text{ Па} \cdot \text{с}$; б) $5 \cdot 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$;
в) $5 \cdot 10^{-7} \text{ Па} \cdot \text{с}$; г) $5 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$;

6) 6 л/хв – це:

- а) $6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$; б) $1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{с}$; в) $6 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{с}$; г) $1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$;

7) 7 см³ – це:

- а) $7 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$; б) $7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$; в) $7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; г) $7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$;

8) 87 мг – це:

- а) $87 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$; б) $87 \cdot 10^{-4} \text{ кг}$; в) $87 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$; г) $87 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$;

9) 90 кН – це:

- а) $9 \cdot 10^3 \text{ Н}$; б) $9 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$; в) $9 \cdot 10^4 \text{ Н}$; г) $9 \cdot 10^2 \text{ Н}$;

10) 6 г/см³ – це:

- а) $6 \cdot 10^{-9} \text{ кг/м}^3$; б) $6 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$; в) $6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; г) 6 кг/м^3 ;

11) 0,004 МПа – це:

- а) $4 \cdot 10^3 \text{ Па}$; б) $4 \cdot 10^6 \text{ Па}$; в) $4 \cdot 10^9 \text{ Па}$; г) $4 \cdot 10^{-6} \text{ Па}$;

12) 30 л/хв – це:

- а) $2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$; б) $3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$; в) $3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{с}$; г) $5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{с}$.

☐ **Теми рефератів та доповідей до тематичного блоку 1**

- 1 Історія розвитку медичної біофізики.
- 2 Зв'язок фізики з медициною. Медична та біологічна фізика.
- 3 Особливості математичної біофізики.
- 4 Гемодинаміка, основні гемодинамічні показники.
- 5 Тиск крові, методи визначення тиску крові.
- 6 Об'ємна та лінійна швидкості кровотоку. Методи визначення.
- 7 Капіляри та осмотичний тиск.
- 8 В'язкість крові. Методи визначення в'язкості крові.
- 9 Фізичні методи регулювання в'язкості крові та тиску крові.
- 10 Вплив в'язкості на деякі медичні процедури (наркоз, введення рідин через шприц та крапельницю).
- 11 Гемодинамічна модель кровообігу.
- 12 Робота та потужність серця.
- 13 Ламінарна і турбулентна течія рідин. Число Рейнольдса.
- 14 Рівняння Бернуллі. Використання рівняння Бернуллі в медицині.
- 15 Наслідки часткового перекривання просвіту артерії.
- 16 Інсульти та стенози.
- 17 Моделювання серця (статична модель шлуночків, динамічна модель шлуночків).
- 18 Моделювання порушень роботи серця. Фізичні основи штучного серця.
- 19 Рух людини в рідині та в атмосфері.
- 20 Механічні властивості матеріалів та методи їх дослідження.
- 21 Механічні властивості м'язової тканини.
- 22 Механічні властивості кісткової тканини.
- 23 Механічні властивості шкіри та судинної системи.
- 24 Матеріали, що використовуються в медицині.
- 25 Акумулявання енергії деформації у сухожиллях та довгих кістках.

- 26 Моделі, що застосовуються для описання механічних властивостей біологічних тканин.
- 27 Переломи кісток. Види раптового перелому кісток.
- 28 Поширені спортивні травми. Вибір матеріалів для захисту.
- 29 Механічна модель активного м'яза.
- 30 Вплив вправ на стан м'язів.
- 31 Активація й тетанус м'язів: мікроскопічний рівень.
- 32 Модель ковзних філаментів: наноскопічний рівень.

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

📖 Теоретична частина

1 Частота коливань ϑ , Гц:

$$\vartheta = \frac{n}{t},$$

де n – кількість однакових подій за одиницю часу t , с.

2 Зв'язок частоти та періоду коливань

$$\vartheta = \frac{1}{T},$$

де ϑ – частота коливань, Гц; T – період коливань, с.

3 Період коливань пружинного маятника T , с:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

де k – коефіцієнт пружності, або жорсткості, Н/м; m – маса тіла, що коливається, кг.

4 Період коливань математичного маятника T , с:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

де l – довжина математичного маятника, м; g – стала вільного падіння, м/с².

5 Період коливань фізичного маятника T , с:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgh}},$$

де J – момент інерції фізичного маятника відносно осі, кг · м²; m – маса тіла, що коливається, кг; g – стала вільного падіння, м/с²; h – відстань між центром ваги та віссю підвісу, м.

6 Циклічна частота коливання ω_0 , рад/с:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

де k – коефіцієнт пружності, або жорсткості, Н/м; m – маса тіла, що коливається, кг.

7 Зв'язок періоду коливань та циклічної частоти

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

де T – період коливань, с; ω_0 – циклічна частота коливання, рад/с.

8 Диференціальне рівняння незагасальних коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

де x – зміщення від положення рівноваги точки, що коливається, м; ω_0 – циклічна (колова) частота коливання, рад/с; t – час, с.

9 Рівняння (закон) гармонічних вільних коливань

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де x – координата точки, що коливається, м, на момент часу t , с; A – амплітуда коливань, м; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза коливань, рад; φ_0 – початкова фаза коливань, рад; ω_0 – циклічна частота коливання, рад/с.

10 Швидкість тіла, що здійснює гармонічні коливання v , м/с:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $v_m = A\omega_0$ – амплітуда швидкості, м/с.

11 Прискорення тіла, що здійснює гармонічні коливання a , м/с²:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $a_m = A\omega_0^2$ – амплітуда прискорення, м/с².

12 **Кінетична енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання E_k , Дж:**

$$E_k = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

13 **Потенційна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання E_p , Дж:**

$$E_p = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

14 **Повна енергія тіла, що здійснює гармонічні коливання E , Дж:**

$$E = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

15 **Диференціальне рівняння загасальних коливань**

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

де x – зміщення від положення рівноваги точки, що коливається, м; ω_0 – циклічна частота власних коливань системи за відсутності тертя, рад/с; t – час, с; $2\beta = r/m$, де β – коефіцієнт загасання, с^{-1} ; r – коефіцієнт опору, що залежить від властивостей середовища, форми та розмірів тіла.

16 **Розв'язок рівняння загасальних коливань:**

а) якщо $\omega_0^2 - \beta^2 > 0$, тоді

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де x – координата точки, що коливається, м, на момент часу t , с; A_0 – амплітуда коливань на момент часу $t = 0$, м; φ_0 – початкова фаза коливань, рад; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклічна частота загасальних коливань, рад/с; t – час, с. Отже,

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

де A – амплітуда загасальних коливань на момент часу t , м; A_0 – амплітуда коливань на момент часу $t = 0$, м; t – час, с; β – коефіцієнт загасання, с^{-1} ;

б) якщо $\omega_0^2 < \beta^2$, тоді в цьому разі до моменту повернення тіла у положення рівноваги запас його механічної енергії практично повністю витрачається на подолання сил тертя. Тіло зупиняється, і коливання не виникають.

17 Логарифмічний декремент загасання λ :

$$\lambda = \beta T,$$

де β – коефіцієнт загасання, с^{-1} ; T – період коливань, с.

18 Диференціальне рівняння вимушених коливань

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_b t),$$

де x – зміщення від положення рівноваги точки, що коливається, м; ω_0 – циклічна частота власних коливань системи за відсутності тертя, рад/с; t – час, с; β – коефіцієнт загасання, с^{-1} ; ω_b – циклічна частота сили, що вимушує коливання, рад/с; $f_0 = F_0 / m$, де F_0 – амплітуда сили, що вимушує коливання, Н.

19 Розв'язок рівняння (закон) вимушених коливань

$$x(t) = A \cos(\omega_b t + \varphi_b),$$

де φ_b – різниця фаз між силою F_b і зміщенням x ; A – амплітуда встановлених вимушених коливань, м:

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_b^2)^2 + 4\beta^2 \omega_b^2}}.$$

20 Резонансна циклічна частота $\omega_{\text{рез}}$, рад/с:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

21 Максимум амплітуди вимушених коливань $A_{\text{рез}}$, м:

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

22 Рівняння механічної хвилі

$$S = A \cos\left[\omega \left(t - \frac{x}{v}\right)\right],$$

де ω – циклічна частота коливання, рад/с; t – час, с; A – амплітуда коливань, м; x – відстань до джерела коливання, м; v – швидкість поширення хвилі, м/с; $\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$ – фаза коливання, рад.

23 Довжина хвилі λ , м:

$$\lambda = Tv = \frac{v}{\vartheta},$$

де T – період коливань, с; v – швидкість поширення хвилі, м/с; ϑ – частота, Гц.

24 Різниця фаз коливань $\Delta\varphi$, рад:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda},$$


де Δx – різниця ходу, тобто відстань між двома точками середовища, м; λ – довжина хвилі, м.

25 Співвідношення між одиницями

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ, \quad \text{або } 1 \text{ рад} = \frac{\pi}{180^\circ}.$$

	0°	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin \theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\text{tg } \theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

5.1 Диференціальне рівняння гармонічних коливань має вигляд $0,2 \frac{d^2x}{dt^2} + 0,8x = 0$. Знайти період та частоту цих коливань.

Дано:	$0,2 \frac{d^2x}{dt^2} + 0,8x = 0.$	Розв'язання:	$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$
-------	-------------------------------------	--------------	---

Знайти:	$0,2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 0,8x = 0$ або $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = 0$, звідси
T—?	$\omega_0^2 = 4$, тоді $\omega_0 = 2$ рад/с,
ϑ —?	$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$,
	$T = \frac{2 \cdot 3,14}{2} = 3,14$ с,
	$\vartheta = \frac{1}{T}$,
	$\vartheta = \frac{1}{3,14} = 0,32$ Гц.

Відповідь: $T = 3,14$ с; $\vartheta = 0,32$ Гц.

5.2 Тіло масою $m = 5$ кг здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A = 4$ см. Знайти період коливань, якщо максимальна кінетична енергія тіла, що коливається, $E_{k_max} = 0,98$ Дж.

Дано:	Розв'язання:
$m = 5$ кг,	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, (1)
$A = 4$ см =	$E_k = \frac{kA^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$, звідси при
$= 4 \cdot 10^{-2}$ м,	$\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$ маємо
$E_{k_max} = 0,98$ Дж.	$E_{k_max} = \frac{kA^2}{2}$, тоді $k = \frac{2E_{k_max}}{A^2}$. (2)
	Підставимо (2) до (1), одержимо
Знайти:	$T = 2\pi \sqrt{\frac{mA^2}{2E_{k_max}}}$,
T—?	$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{\frac{5 \cdot (4 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 0,98}} = 0,4$ с,
	$[T] = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Дж}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}}} = \sqrt{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^2}{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}} = \text{с}$.

Відповідь: $T = 0,4$ с.

5.3 Визначити різницю фаз у пульсовій хвилі між двома точками артерії, що знаходяться на відстані $\Delta x = 20$ см одна від одної.

Швидкість поширення пульсової хвилі взяти $v = 10$ м/с, а коливання серця гармонічними з частотою $\vartheta = 1,2$ Гц.

Дано:

$$\Delta x = 20 \text{ см} = 20 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\vartheta = 1,2 \text{ Гц},$$

$$v = 10 \text{ м/с}.$$

Знайти:

$\Delta\varphi$ —?

Розв'язання:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda}, \quad (1)$$

$$\lambda = \frac{v}{\vartheta}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta x\vartheta}{v},$$

$$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 20 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2}{10} = 0,15 \text{ рад}.$$

$$[\Delta\varphi] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{м}} = 1.$$

Відповідь: $\Delta\varphi = 0,15$ рад.

5.4 Тіло масою $m = 200$ г здійснює гармонічні коливання. Коефіцієнт жорсткості пружини $k = 9,8$ Н/м. Знайти довжину математичного маятника, що має такий самий період коливань, як даний пружинний маятник.

Дано:

$$m = 200 \text{ г} = 0,2 \text{ кг},$$

$$k = 9,8 \text{ Н/м},$$

$$T_1 = T_2.$$

Знайти:

l —?

Розв'язання:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2)$$

Враховуючи, що $T_1 = T_2$, одержимо

$$2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ звідси } l = \frac{gm}{k}.$$

$$l = \frac{9,8 \cdot 0,2}{9,8} = 0,2 \text{ м}.$$

$$[l] = \frac{\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{Н}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н}} = \text{м}.$$

Відповідь: $l = 0,2$ м.

5.5 Джерело звукової хвилі коливається за законом $S_0 = 5\sin(3\ 140t)$. Визначити зміщення від положення рівноваги S , швидкість v та прискорення a точки, що знаходиться на відстані $x = 340$ м від джерела через час $t = 1$ с після початку коливання. Швидкість поширення хвилі $v_0 = 340$ м/с.

Дано:

$$S_0 = 5\sin(3\ 140t),$$

$$x = 340 \text{ м},$$

$$t = 1 \text{ с},$$

$$v_0 = 340 \text{ м/с}.$$

Знайти:

$$S - ?$$

$$v - ?$$

$$a - ?$$

Розв'язання:

$$S = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right],$$

$$S = 5\sin\left(3\ 140\left(t - \frac{340}{340}\right)\right) =$$

$$= 5\sin(3\ 140(t - 1)),$$

$$v = \frac{dS}{dt} = 5 \cdot 3\ 140 \cdot \cos(3\ 140(t - 1)),$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -5 \cdot 3\ 140^2 \cdot \sin(3\ 140(t - 1)).$$

Тоді при $t = 1$ с маємо

$$S = 5\sin(3\ 140(1 - 1)) = 0 \text{ (м)},$$

$$v = 5 \cdot 3\ 140 \cdot \cos(3\ 140(1 - 1)) = 15\ 700 \text{ м/с}.$$

$$a = -5 \cdot 3\ 140^2 \cdot \sin(3\ 140(1 - 1)) = 0 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Відповідь: $S = 0$ м; $v = 15\ 700$ м/с; $a = 0$ м/с².

✍ Задачі для самостійного виконання

5.6 Диференціальне рівняння гармонічних коливань має вигляд $0,3 \frac{d^2x}{dt^2} + 2,7x = 0$. Знайти період та частоту цих коливань.

5.7 Диференціальне рівняння загасальних коливань має вигляд $0,4 \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + 1,6x = 0$. Знайти коефіцієнт загасання, період та циклічну частоту цих коливань.

5.8 Диференціальне рівняння вимушених коливань має вигляд $0,5 \frac{d^2x}{dt^2} + 0,6 \frac{dx}{dt} + 2x = 1,5 \sin 10t$. Знайти частоту цих вимушених

коливань. Чому дорівнює частота власних коливань системи? За якої частоти зовнішньої сили буде спостерігатися резонанс?

5.9 Серце людини періодично скорочується. У ембріона воно виконує 1 скорочення кожен секунду, у новонароджених – 140 скорочень за хвилину, у дорослої людини – 70 скорочень за хвилину. Визначити: а) частоту скорочень у різні періоди життя людини; б) обчислити, скільки скорочень виконує серце за 50 років життя.

5.10 Пружинний маятник змістився від положення рівноваги на 4 см. Знайти частоту коливань пружинного маятника.

5.11 Записати рівняння гармонічного коливання, якщо амплітуда прискорення $a_m = 50 \text{ см/с}^2$, частота коливань $\vartheta = 0,5 \text{ Гц}$, зміщення точки від положення рівноваги на початковий момент часу $x_0 = 25 \text{ мм}$. Знайти амплітуду швидкості.

5.12 Записати рівняння гармонічного коливання, якщо амплітуда швидкості $v_m = 0,63 \text{ м/с}$, період коливань $T = 1 \text{ с}$, а зміщення точки від положення рівноваги на початковий момент часу дорівнює нулю. Знайти амплітуду прискорення a_m та частоту коливань ϑ .

5.13 Тіло масою $m = 4 \text{ кг}$ здійснює гармонічні коливання з амплітудою $A = 5 \text{ см}$. Знайти частоту коливань, якщо максимальна кінетична енергія тіла, що коливається, $E_{k,max} = 2 \text{ Дж}$.

5.14 Тіло масою $m = 500 \text{ г}$ здійснює гармонічні коливання. Знайти коефіцієнт жорсткості пружини, якщо довжина математичного маятника, що має такий самий період коливань, як даний пружинний маятник, становить $l = 0,5 \text{ м}$.

5.15 Розглядаючи ногу людини як фізичний маятник, визначити період коливань T . Нogu вважати довгим стрижнем довжиною $L = 0,8 \text{ м}$, центр ваги знаходиться на відстані $x = 0,5 \text{ м}$ від ступні. Маса ноги $m = 12 \text{ кг}$ (момент інерції розрахувати за формулою $J = mL^2 / 3$).

5.16 Оцінити швидкість v , з якою рухається людина з довжиною кроку $l = 0,64 \text{ м}$. Довжина ноги $L = 0,8 \text{ м}$; центр ваги знаходиться

на відстані $x = 0,5$ м від ступні. Для моменту інерції ноги відносно тазостегневого суглоба використати формулу $J = 0,2mL^2$.

5.17 Рівняння коливань матеріальної точки масою 16 г має вигляд $x = 2 \sin\left(\frac{\pi t}{8} + \pi/4\right)$ [x у см]. Визначити кінетичну, потенціальну та повну енергію точки через 2 с після початку коливань.

5.18 Повна енергія тіла масою $m = 1$ кг, що здійснює гармонічні коливання, дорівнює $E = 1$ Дж. Максимальна сила, що діє на тіло, $F_{max} = 0,1$ Н. Записати диференціальне рівняння гармонічних коливань та його розв'язок, якщо початкова фаза $\varphi_0 = 45^\circ$.

5.19 Джерело звукової хвилі коливається за законом $S_0 = 2 \sin(2000\pi t)$. Записати рівняння коливань для точки, що знаходиться на відстані $x = 204$ м від джерела. Швидкість поширення звуку $v_0 = 340$ м/с.

5.20 Дві точки знаходяться на прямій, уздовж якої поширюється звукова хвиля. Довжина хвилі $\lambda = 1$ м, а відстань між точками $\Delta x = 1,75$ м. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ коливань у цих точках.

5.21 Різниця фаз $\Delta\varphi = 0,048\pi$ у пульсовій хвилі між двома точками артерії, що знаходяться на відстані $\Delta x = 20$ см одна від одної. Знайти швидкість поширення пульсової хвилі, якщо коливання серця вважати гармонічними з частотою $\vartheta = 1,2$ Гц.

5.22 При середній частоті 5 Гц максимально припустима для робочого місця працівника підприємства швидкість вібрації становить 6 мм/с. Записати рівняння коливань, що зазнає працівник внаслідок дії вібрації під час виконання завдання, визначити амплітуду коливань, що виникає під час роботи.

5.23 Під час роботи з пневматичним відбійним молотком для обслуговувальних його працівників вважається припустимою максимальна швидкість 50 мм/с при частоті 16 Гц. Записати рівняння коливань, впливу яких зазнають руки працівників. Обчислити період цих коливань, їх амплітуду, циклічну частоту.

5.24 Під час роботи з електропилкою руки працівника зазнають вібрації з частотою 520 Гц. Визначити період, амплітуду і

максимальне прискорення, що виникає при таких коливаннях, якщо максимально припустиме значення швидкості 10 м/с.

5.25 Палець людини може відчувати коливання з амплітудою 0,2 мкм. Записати рівняння таких коливань, якщо їх частота 20 Гц. Визначити амплітудне значення швидкості, прискорення цих коливань.

5.26 Для розпилювання кісток використовують хвилеводи, що мають у робочій частині насічку. Частота ультразвукових коливань хвилеводу – «пилки» знаходиться в межах від 20 до 50 кГц. Під час роботи зубці насічки рухаються назад – вперед із розмахом 60 мкм, щоразу вибираючи мікрочастинки кістки. Запишіть рівняння коливань хвилеводу.

5.27 Звукове відчуття зберігається у людини приблизно 0,1 с. На якій відстані від перешкоди повинна перебувати людина, щоб почути окремо основний і відбитий від перешкоди звук? Швидкість звуку дорівнює 340 м/с.

5.28 За час $\Delta t = 10$ с амплітуда коливань зменшилася у e раз. Знайти коефіцієнт загасання цих коливань.

5.29 Логарифмічний декремент загасання камертона, що коливається з частотою 100 Гц, дорівнює 0,002. Через який проміжок часу амплітуда коливань камертона зменшиться у 100 раз?

5.30 Визначити частоту власних коливань системи, якщо при зменшенні коефіцієнта загасання коливань у два рази резонансна частота зміниться від $3,88 \text{ с}^{-1}$ до $3,97 \text{ с}^{-1}$.

5.31 Через час $\Delta t = 10$ с амплітуда коливань маятника зменшилася у три рази. Через який час вона зменшиться у десять разів?

5.32 Розрахувати частоту коливань голосових зв'язок, вважаючи, що це вільний пружиноподібний об'єкт, що коливається, довжиною 1 см, шириною 0,3 см та товщиною 0,3 см. Модуль Юнга дорівнює 100 кПа; густина становить 1 г/см^3 .

5.33 Усереднений коефіцієнт загасання тіла дорослої людини дорівнює 0,3. Частота власних коливань тіла у положенні лежачи становить 3,5 Гц, а у положенні стоячи – приблизно 8 Гц. У скільки разів зміниться резонансна частота тіла людини у різних положеннях під час впливу інфразвуку?

5.34 Визначити резонансну частоту руки людини, розглядаючи її як фізичний маятник зі зведеною довжиною $L = 17,2$ см.

5.35 Розглядаючи ногу як фізичний маятник, визначити, на якій відстані від ступні h знаходиться центр ваги ноги. Період коливань ноги $T = 1,6$ с; довжина $l = 0,75$ м; маса $m = 10$ кг. Вважаючи ногу тонким стрижнем зі шарніром у кінці, визначити момент інерції J відносно осі, що проходить через кінець ноги.

5.36 Різниця ходу двох звукових хвиль, що надходять у ліве та праве вухо, становить $\Delta x = 1$ см. Знайти різницю фаз $\Delta\varphi$ між двома звуковими відчуттями для звукової хвилі з частотою $\vartheta = 1\,000$ Гц, якщо швидкість звуку $v = 331$ м/с.

5.37 Знайти різницю ходу Δx двох звукових хвиль, що надходять у ліве та праве вухо, якщо різниця фаз $\Delta\varphi = 20$ рад між двома звуковими відчуттями. Швидкість звуку дорівнює $v = 331$ м/с, частота звукової хвилі становить $\vartheta = 1\,000$ Гц.

5.38 Інфразвукові вібрації частотою 6 – 7 Гц є найбільш небезпечними для людини при їх дії на серце, тому що на цих частотах виникають резонансні явища, що можуть призвести до крововиливу. Знайти довжини хвиль і періоди, що відповідають цим частотам. Швидкість поширення інфразвуку в м'язовій тканині дорівнює 1 550 м/с.

5.39 За частотою вібрацію класифікують на низькочастотну $\vartheta_1 = 2 - 4$ Гц; вібрацію середніх частот $\vartheta_2 = 8 - 16$ Гц та високо-частотну $\vartheta_3 = 31,5 - 63$ Гц. Яким періодам і довжинам хвиль відповідають поширення цих вібрацій: а) у жировій тканині; б) у кістковій тканині; в) у м'язовій тканині; г) у мозку. Швидкості поширення звуку в них відповідно дорівнюють $v_1 = 1\,460$ м/с, $v_2 = 4\,000$ м/с, $v_3 = 1\,550$ м/с, $v_4 = 1\,520$ м/с.

5.40 Частотний діапазон жіночих голосів становить $\nu_1 = 170 - 1\,300$ Гц, а для чоловіків $\nu_2 = 80 - 500$ Гц. *А.* Розрахувати відповідні діапазони довжин хвиль та діапазони періодів коливань голосових зв'язок. Швидкість поширення звуку в повітрі $\nu = 340$ м/с. *Б.* Чому дитячі та жіночі голоси, як правило, вище від чоловічих?

5.41 На рисунку 5.1 наведена балістокардіограма (БКГ) серцевої діяльності людини. Балістокардіографія – це метод вивчення скорочувальної здатності м'яза серця шляхом реєстрації поштовхів у тілі людини, що виникають у зв'язку з серцевою діяльністю. *А.* За даними вимірювань визначити частоту (в ударах за хвилину) та період (у секундах) серцевої діяльності даного пацієнта, порівняти одержані дані з нормою. Час вимірювання становив 4 с. *Б.* Визначити, чи відповідає ця БКГ нормі? Взяти до уваги, що амплітуди хвиль БКГ у здорових людей мають між собою певні співвідношення: хвиля *H* не повинна бути більшою, ніж $\frac{1}{4}$ хвилі *I*. Хвиля *I* менше за хвилю *J*, але більша, ніж хвиля *H*. Хвиля *K* у 2 рази менша за хвилю *J*. Хвиля *L* відповідає $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ хвилі *J*.

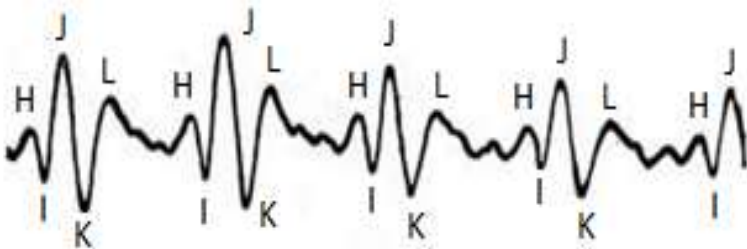


Рисунок 5.1 – Балістокардіограма серцевої діяльності людини

5.42 Під час помірних фізичних навантажень пульс людини становить 100 ударів за хвилину, а під час інтенсивних фізичних вправ може сягати 150 ударів за хвилину. Знайти частоту скорочень серця ν та період T (у секундах) людини для обох випадків.

5.43 Багатьом процесам, що відбуваються в біологічних системах, властива періодичність. Для людини вона спостерігається у функціональній діяльності серця, легень, шлунка. Так, частота

коливань серця становить $\vartheta_1 = 6 - 7$ Гц; легень $\vartheta_2 = 5 - 8$ Гц; черевної порожнини $\vartheta_3 = 3 - 4$ Гц. Знайти відповідні періоди коливань.

5.44 На рисунку 5.2 наведена апексокардіограма (АКГ) серцевої діяльності людини. Апексокардіографія – це метод графічної реєстрації низькочастотних коливань грудної клітки у ділянці верхівкового поштовху, викликаних роботою серця. АКГ дозволяє зрозуміти тривалість окремих фаз серцевого циклу: інтервал ВЕ – фаза ізометричного скорочення; ЕС – фаза швидкого вигнання крові; CD – фаза повільного вигнання крові; OF – фаза швидкого наповнення шлуночка; FA – фаза повільного наповнення шлуночка. За даними АКГ оцінити тривалість фаз серцевого циклу пацієнта. Порівняти одержані дані з нормою. Час реєстрації між точками 00 становить 0,8 с.

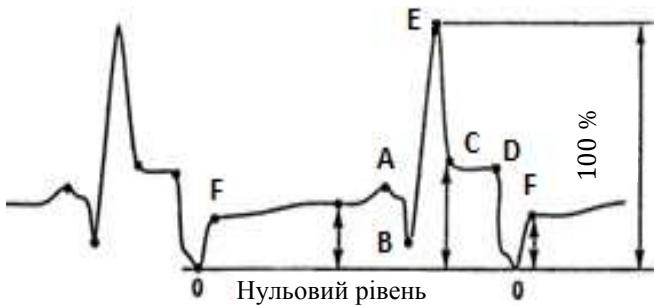


Рисунок 5.2 – Апексокардіограми серцевої діяльності людини

5.45 За день серце здорової людини здатне перекачати 120 літрів крові. Серце немовляти б'ється з частотою 120 разів за хвилину, юнака чи дівчини – з частотою 90 разів за хвилину, а дорослої людини – 80 ударів за хвилину. За цими даними визначити: а) частоту скорочень; б) обчислити, скільки скорочень виконує серце за середню тривалість життя 75 років; в) об'єм крові, який прокачує серце за життя.

5.46 Шкідлива дія вібрації на організм людини значною мірою визначається частотою коливань. Так, коливання з частотою $\vartheta_1 = 3 - 5$ Гц викликають реакції вестибулярного апарату, судинні

розлади. При частотах $\vartheta_2 = 3 - 15$ Гц спостерігаються розлади, пов'язані з резонансними коливаннями окремих органів (печінки, шлунка, голови) та тіла в цілому. Коливання з частотами $\vartheta_3 = 11 - 45$ Гц викликають погіршення зору, нудоту, блювоту. При частотах, що перевищують $\vartheta_4 = 45$ Гц, спостерігаються пошкодження судин головного мозку, порушення циркуляції крові.
A. Знайти відповідні періоди коливань. **Б.** знайти довжини хвиль, що відповідають поширенню цих вібрацій у м'язовій тканині $v_1 = 1\,550$ м/с та кістковій тканині $v_2 = 4\,000$ м/с.

5.47 У таблиці 5.1 наведений частотний спектр тонів серця. Заповнити останні два стовпчики.

Таблиця 5.1 – Частотний спектр тонів серця

Механізм генерації тонів серця	Частота, Гц		Період, с	
	min	max	min	max
Скорочення і розслаблення міокарда шлуночків	12,5	20	?	?
Вібрація крові при швидкому діастолічному наповненні шлуночків	31,5	63	?	?
Відкриття та закриття півмісяцевих клапанів	80	100	?	?
Відкриття та закриття стулкових клапанів	125	160	?	?
Вібрація сухожильних ниток під час їх натягу	200	400	?	?

З ВУКОВІ ХВИЛІ. ОСНОВИ АКУСТИКИ

📖 Теоретична частина

1 Потік енергії звукової хвилі Φ , Вт:

$$\Phi = \frac{dE}{dt} = \omega_p S v,$$

де ω_p – об’ємна густина енергії, Дж/м³; S – площа, м²; v – швидкість поширення звукової хвилі, м/с.

2 Об’ємна густина енергії звукового поля ω_p , Дж/м³:

$$\omega_p = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2},$$

де A – амплітуда коливань частинок середовища, м; ρ – густина середовища, кг/м³; ω_0 – циклічна частота коливання, рад/с.

3 Інтенсивність звукової хвилі I , Вт/м²:

$$I = \frac{\Phi}{S} = \omega_p v = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2} v,$$

де ω_0 – циклічна частота коливання, рад/с; ρ – густина середовища, кг/м³; A – амплітуда коливань частинок середовища, м; v – швидкість поширення звукової хвилі, м/с;

$$I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2 \text{ – поріг чутності;}$$
$$I_{max} = 10 \text{ Вт/м}^2 \text{ – поріг больового відчуття.}$$

4 Звуковий тиск P , Па:

$$P = \frac{F}{S},$$

де F – сила, Н; S – площа, м².

5 Зв'язок інтенсивності звуку та звукового тиску

$$I = \frac{P^2}{2\rho v},$$

де I – інтенсивність звукової хвилі, Вт/м², P – звуковий тиск, Па; ρ – густина середовища, кг/м³; A – амплітуда частинок середовища, м; v – швидкість поширення звукової хвилі, м/с.

6 Рівень інтенсивності звуку L , дБ:

$$L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

де I – інтенсивність звукової хвилі, Вт/м²; $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² – поріг чутності.

$$L = 20 \lg \left(\frac{P}{P_0} \right),$$

де P – звуковий тиск, Па; P_0 – тиск, що відповідає порогу чутності, Па.

7 Рівень гучності E , фон:

$$E = 10k \lg \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

де I – інтенсивність звукової хвилі, Вт/м²; $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² – поріг чутності, k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від частоти та інтенсивності звуку. Для частоти $\vartheta = 1$ кГц $k = 1$.

8 Результуюча інтенсивність звуку, який сприймає людина від звуків, що надходять з одного напрямку від декількох джерел:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n,$$

де n – кількість джерел звуку; I_n – інтенсивність окремого джерела, Вт/м².

9 Загальний рівень інтенсивності звуку, який сприймає людина від звуків, що надходять з одного напрямку від декількох джерел:

$$L = \lg (10^{L_1} + 10^{L_2} + \dots + 10^{L_n}),$$

де L_n – рівень звуку, що створюється окремим джерелом у белах (1 бел = 10 дБ).

У таблиці 6.1 наводиться приклад визначення гучності E на різних частотах ν за рівня інтенсивності $L = 60$ дБ.

Таблиця 6.1

Частота ν , Гц	50	100	200	500	1 000	2 000	5 000	10 000
Гучність E , фон	10	30	50	57	60	62	59	49

Приклад визначення рівня інтенсивності L на різних частотах ν за рівня гучності $E = 60$ фон (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Частота ν , Гц	50	100	200	500	1 000	2 000	5 000	10 000
Рівень інтенсивності L , дБ	78	72	66	61	60	61	62	72

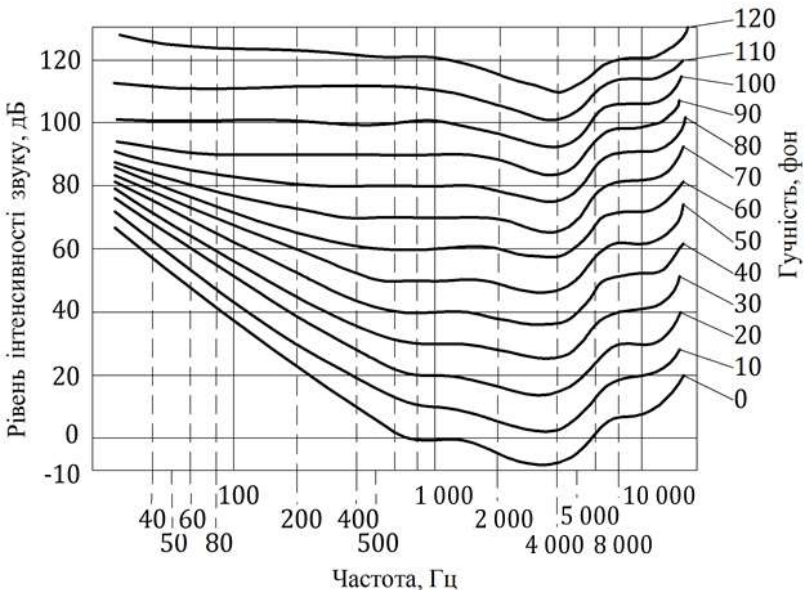



Рисунок 6.1 – Криві рівних гучностей

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

6.1 Визначити силу, що діє на барабанну перетинку людини під дією звукової хвилі інтенсивністю: а) $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² – поріг чутності; б) $I_{max} = 10$ Вт/м² – поріг болювого відчуття. Площу барабанної перетинки взяти $S = 66$ мм².

Дано:

$$I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2,$$

$$I_{max} = 10 \text{ Вт/м}^2,$$

$$S = 66 \text{ мм}^2 =$$

$$= 66 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2,$$

$$v_{зв} = 331 \text{ м/с},$$

$$\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти:

$$F_1 - ?$$

$$F_2 - ?$$

Розв'язання:

$$F = PS, \text{ тоді } F_1 = P_1 S, \quad F_2 = P_2 S, \quad (1)$$

$$I = \frac{P^2}{2\rho v}, \text{ звідси } P = \sqrt{2I\rho v_{зв}}, \text{ тоді}$$

$$P_1 = \sqrt{2I_0\rho v_{зв}}, \quad P_2 = \sqrt{2I_{max}\rho v_{зв}}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$F_1 = S\sqrt{2I_0\rho v_{зв}}, \quad F_2 = S\sqrt{2I_{max}\rho v_{зв}},$$

$$F_1 = 66 \cdot 10^{-6} \sqrt{2 \cdot 10^{-12} \cdot 1,29 \cdot 331} =$$

$$= 1,914 \cdot 10^{-9} \text{ (Н)},$$

$$F_2 = 66 \cdot 10^{-6} \sqrt{10 \cdot 1,29 \cdot 331} =$$

$$= 6 \cdot 10^{-3} \text{ (Н)},$$

$$[F] = \text{м}^2 \sqrt{\frac{\text{Вт} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}} = \text{м}^2 \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}} =$$

$$= \text{м}^2 \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}} = \text{м}^2 \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3}} = \text{Н}.$$

Відповідь: $F_1 = 1,914$ нН; $F_2 = 6$ мН.

6.2 Розрив барабанної перетинки відбувається, якщо рівень інтенсивності звукової хвилі дорівнює $L = 150$ дБ. Знайти відповідну інтенсивність звукової хвилі та звуковий тиск, якщо швидкість звуку в повітрі становить $v = 340$ м/с, а густина повітря $\rho = 1,29$ кг/м³.

<i>Дано:</i>	<i>Розв'язання:</i>
$L = 150$ дБ,	$L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right)$, тоді
$v = 340$ м/с,	$\frac{I}{I_0} = 10^{\frac{L}{10}}$, звідси $I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}}$, де $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м ² ,
$\rho = 1,29$ кг/м ³ .	$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{150}{10}} = 10^3$ Вт/м ² ,
_____	$[I] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \cdot 10^{\frac{\text{дБ}}{10}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$,
<i>Знайти:</i>	$I = \frac{P^2}{2\rho v}$, звідси $P = \sqrt{2I\rho v_{\text{ЗВ}}}$, тоді
I —?	$P = \sqrt{2 \cdot 10^3 \cdot 1,29 \cdot 340} = 936,59$ Па.
P —?	$[P] = \sqrt{\frac{\text{Вт} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}} =$ $= \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{м} \cdot \text{Н}}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^3}} = \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{Дж}}{\text{м}^4}} =$ $= \sqrt{\text{Па}^2} = \text{Па}.$

Відповідь: $I = 10^3$ Вт/м²; $P = 936,59$ Па.

6.3 Амплітуда звукової хвилі збільшилася в три рази:
а) у скільки разів зросла інтенсивність звукової хвилі? *б)* на скільки децибелів збільшився рівень інтенсивності звукової хвилі?

<i>Дано:</i>	<i>Розв'язання:</i>
$A_2 = 3A_1$.	$I = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2} v$, тоді
_____	$I_1 = \frac{\rho A_1^2 \omega_0^2}{2} v$, $I_2 = \frac{\rho A_2^2 \omega_0^2}{2} v$, звідси
<i>Знайти:</i>	$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2\rho A_2^2 \omega_0^2 v}{2v\rho A_1^2 \omega_0^2} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \left(\frac{3A_1}{A_1} \right)^2 = 9$,
$\frac{I_2}{I_1}$ —?	$L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right)$, тоді

$$L_2 - L_1 = ?$$

$$L_1 = 10 \lg \left(\frac{I_1}{I_0} \right), L_2 = 10 \lg \left(\frac{I_2}{I_0} \right), \text{ звідси}$$

$$L_2 - L_1 = 10 \lg \left(\frac{I_2}{I_0} \right) - 10 \lg \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \lg \left(\frac{I_2}{I_1} \right),$$

$$L_2 - L_1 = 10 \lg(9) = 9,5 \text{ дБ.}$$

Відповідь: $\frac{I_2}{I_1} = 9$; $L_2 - L_1 = 9,5$ дБ.

6.4 На глибині $h = 20$ м у воді в людини можуть розриватися барабанні перетинки. Якому рівню інтенсивності звуку це відповідає? Швидкість звуку у воді $v = 1540$ м/с, густина води $\rho = 1000$ кг/м³.

Дано:

$$h = 20 \text{ м,}$$

$$v = 1540 \text{ м/с,}$$

$$\rho = 1000 \text{ кг/м}^3.$$

Розв'язання:

$$L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right), \text{ де } I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2, \quad (1)$$

$$I = \frac{P^2}{2\rho v}, \quad (2)$$

$$P = \rho gh. \quad (3)$$

Підставимо (3), (2) до (1), одержимо

Знайти:

$$L = 10 \lg \left(\frac{(\rho gh)^2}{2\rho v I_0} \right) = 10 \lg \left(\frac{\rho(gh)^2}{2v I_0} \right),$$

$L = ?$

$$L = 10 \lg \left(\frac{1000 \cdot (9,8 \cdot 20)^2}{2 \cdot 1540 \cdot 10^{-12}} \right) = 160,96 \text{ дБ,}$$

$$[L] = \lg \left(\frac{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \cdot \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \right)^2}{\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}} \right) = \lg \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3 \cdot \text{Вт}} \right) = \lg \left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с} \cdot \text{Вт}} \right) = \lg \left(\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{Дж}} \right) = 1.$$

Відповідь: $L = 160,96$ дБ.

6.5 Рівень гучності для звуків з частотами 90 Гц, 200 Гц і 5 кГц однаковий. А Використовуючи криві рівних гучностей (рис. 6.1), знайти рівні інтенсивності для цих звуків, якщо $E = 40$ фонів. Б. Знайти результуючу інтенсивність звуку при їх одночасному звучанні. В. Знайти загальний рівень інтенсивності, що сприймає людина під час одночасного звучання трьох звуків.

Дано:

$$\vartheta_1 = 90 \text{ Гц},$$

$$\vartheta_2 = 200 \text{ Гц},$$

$$\vartheta_3 = 5 \text{кГц} = 5000 \text{Гц},$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E = 40 \text{ фонів}.$$

Знайти:

$$I_1 - ? \quad I_2 - ? \quad I_3 - ?$$

$$L_{\text{зар}} - ? \quad L_{\text{зар}} - ?$$

Розв'язання:

А. Використовуючи криві рівних гучностей, знайдемо рівень інтенсивності для звука кожної частоти:

$$E = 40 \text{ фонів}; \vartheta_1 = 90 \text{ Гц}; L_1 = 63 \text{ дБ};$$

$$E = 40 \text{ фонів}; \vartheta_2 = 200 \text{ Гц}; L_2 = 52 \text{ дБ};$$

$$E = 40 \text{ фонів}; \vartheta_3 = 5000 \text{Гц}; L_3 = 40 \text{ дБ};$$

Знайдемо відповідні інтенсивності звуку

$$L = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right), \text{ звідси } \frac{L}{10} = \lg \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

$$I = I_0 10^{\frac{L}{10}}, \text{ тоді } I_1 = I_0 10^{\frac{L_1}{10}}, I_2 = I_0 10^{\frac{L_2}{10}},$$

$$I_3 = I_0 10^{\frac{L_3}{10}}.$$

$$I_1 = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{63}{10}} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ (Вт/м}^2\text{)},$$

$$I_2 = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{52}{10}} = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ (Вт/м}^2\text{)},$$

$$I_3 = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10^{-8} \text{ (Вт/м}^2\text{)}, \quad [I_{i(i=1,2,3)}] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \cdot 10^{\text{дБ}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Б. Результуюча інтенсивність звуку, яку сприймає людина,

$$I_{\text{зар}} = I_1 + I_2 + I_3, \text{ тоді}$$

$$I_{\text{зар}} = 10^{-6}(2 + 0,16 + 0,01) = 2,17 \cdot 10^{-6} \text{ (Вт/м}^2\text{)}.$$

В. Результуючий рівень інтенсивності звуку

$$L_{\text{зар}} = 10 \lg \left(\frac{I_{\text{зар}}}{I_0} \right), \text{ тоді}$$

$$L_{\text{зар}} = 10 \lg \left(\frac{2,17 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} \right) = 63,4 \text{ дБ}, \quad [L_{\text{зар}}] = 10 \lg \left(\frac{\text{Вт} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{Вт}} \right) = 1$$

або можемо знайти результуючий рівень інтенсивності за формулою

$L_{\text{заг}} = \lg(10^{L_1} + 10^{L_2} + 10^{L_3})$, де $L_{n(n=1,2,3)}$ – рівень звуку, що створюється окремим джерелом у беллах (1 бел = 10 дБ), тоді

$$L_{\text{заг}} = \lg(10^{6,3} + 10^{5,2} + 10^4) = 63,4 \text{ дБ.}$$

$$\text{Відповідь: } I_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2; I_2 = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2;$$

$$I_3 = 10^{-8} \text{ Вт/м}^2; I_{\text{заг}} = 2,17 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2; L_{\text{заг}} = 63,4 \text{ дБ.}$$

✍ Задачі для самостійного виконання

6.6 Відомо, що людське вухо сприймає механічні коливання частотою від 20 Гц до 20 кГц як звук. Яким довжинам хвиль відповідає цей діапазон частот у повітрі та у воді? Швидкості звука у повітрі та воді дорівнюють $v_1 = 340$ м/с та $v_2 = 1400$ м/с, відповідно.

6.7 Знайти площу барабанної перетинки S . Відомо, що сила, яка діє на барабанну перетинку людини під дією звукової хвилі інтенсивністю $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² становить $F_1 = 1,914$ нН.

6.8 Два звуки однакової частоти $\vartheta = 1$ кГц відрізняються за гучністю на $\Delta E = 40$ фонів. У скільки разів відрізняються їх інтенсивності? Знайти відношення амплітуд звукового тиску.

6.9 Розрив барабанної перетинки відбувається, якщо інтенсивність звукової хвилі дорівнює $I = 10^3$ Вт/м². Знайти рівень інтенсивності звукової хвилі та звуковий тиск, якщо швидкість звуку в повітрі $v = 340$ м/с, а густина повітря $\rho = 1,29$ кг/м³.

6.10 Визначити амплітуду коливань барабанної перетинки під дією звукової хвилі інтенсивністю: а) $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² – поріг чутності; б) $I_{\text{max}} = 10$ Вт/м² – поріг больового відчуття. Частота звукової хвилі дорівнює $\vartheta = 1000$ Гц.

6.11 У лабораторному приміщенні, розміщеному в цеху, рівень інтенсивності шуму досягав $L = 80$ дБ. Для зменшення шуму було вирішено оббити стіни лабораторії звукопоглинальним матеріалом, що зменшує інтенсивність звуку в 1500 разів. Який рівень інтенсивності шуму стане після цього в лабораторії?

6.12 Визначити силу, що діє: *a)* на барабанну перетинку людини; *б)* на овальне вікно під дією звукової хвилі інтенсивністю $I = 10^{-8}$ Вт/м². Площа барабанної перетинки 64 мм², а овального вікна – 3 мм². Схематичне розміщення барабанної перетинки і овального вікна зображене на рисунку 6.2.

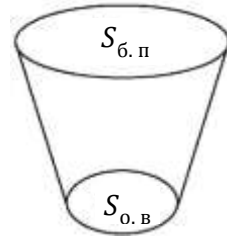


Рисунок 6.2 – Положення овального вікна відносно барабанної перетинки

6.13 Звук, якому на вулиці відповідає рівень інтенсивності $L_1 = 50$ дБ, чутний у кімнаті так, як звук із рівнем інтенсивності $L_2 = 30$ дБ. Знайти відношення інтенсивностей звуку на вулиці та в кімнаті.

6.14 Під час роботи прилад створює звук, рівень інтенсивності якого $L = 60$ дБ. Знайти рівень інтенсивності звуку під час роботи двох таких приладів, розміщених поруч.

6.15 Амплітуда звукової хвилі збільшилася вдвічі: *a)* у скільки разів зросла інтенсивність звукової хвилі? *б)* на скільки децибелів збільшився рівень гучності?

6.16 Ризик втратити слух у працівників при 10-річній тривалості дії шуму становить: *a)* 10 % за рівня інтенсивності $L_1 = 90$ дБ; *б)* 29 % – за рівня інтенсивності $L_2 = 100$ дБ; *в)* 55 % – за рівня інтенсивності $L_3 = 110$ дБ. Яким інтенсивностям шуму це відповідає?

6.17 Звукова трубка є важливою частиною слухового апарату, призначеного для підсилення звуку у пацієнтів із втратою слуху. Принцип роботи апарату полягає у збиранні звуку з великої площі та його концентрації на меншій площі барабанної перетинки. Знайти, якого акустичного посилення звуку в дБ можна досягти за допомогою трубки, якщо площа перерізу трубки дорівнює 2 см², а площа барабанної перетинки становить 0,5 см².

6.18 Крику людини відповідає гучність 70 фонів. Якою буде гучність, якщо крикне: *a)* 5 осіб? *б)* 10 осіб? *в)* 100 000 осіб на стадіоні? Частота звуків однакова, $\vartheta = 1$ кГц.

6.19 На якій глибині у воді в людини можуть розриватися барабанні перетинки, якщо рівень інтенсивності звуку становить $L = 160,96$ дБ? Швидкість звуку у воді $v = 1\,540$ м/с, густина води $\rho = 1\,000$ кг/м³.

6.20 У половини людей шум частотою $\vartheta = 2 - 5$ Гц і рівнем інтенсивності 100 дБ у 2 рази сповільнює зорову реакцію. Якій довжині хвилі це відповідає?

6.21 Чому дорівнюють довжини хвиль у м'язах і жировій тканині, якщо частота коливань 1 МГц? Швидкість хвилі у м'язах дорівнює 1 550 м/с, а у жировій тканині – 1 460 м/с.

6.22 Відповідно до санітарних норм у приміщенні з рівнем інтенсивності шумів 100 дБ людина не повинна перебувати більше ніж 30 хвилин. Яка енергія надходить за цей час на барабанну перетинку вуха?

6.23 Яка частина інтенсивності звуку проходить з повітря через барабанну перетинку до середнього вуха? Густина повітря дорівнює 1,295 кг/м³, швидкість звуку в повітрі – 331 м/с. Густина барабанної перетинки дорівнює 1 060 кг/м³, швидкість звуку в ній – 1 540 м/с. Поглинанням звуку у перепонці знехтувати.

6.24 Люди з гарним слухом здатні відчувати настільки низькі звуки, що на частоті 3 000 Гц можуть досягати рівня $L = -8$ дБ. Знайти відповідне значення інтенсивності звукової хвилі у Вт/м².

6.25 А. Знайти рівень звуку L_2 у дБ, що має інтенсивність вдвічі більшу $I_2 = 2I_1$ за звук $L_1 = 90$ дБ? Б. Яким буде рівень звуку L_3 , якщо $I_3 = 1 / 5I_1$?

6.26 Одна кімнатна муха створює шум із рівнем інтенсивності 40 дБ на відстані 3 м від спостерігача. Знайти рівень шуму, що створюють 1 000 кімнатних мух на тій самій відстані.

6.27 Відомо, що під час передавання звукового тиску система кісточок середнього вуха (молоточок, ковадло, стремінце) забезпечує вигравання у силі у 1,3 раза. Площа барабанної перетинки, розміщеної у контакті з молоточком, дорівнює 0,55 см². Площа контакту стремінця з овальним вікном дорівнює 0,032 см².

Знайти, у скільки разів збільшиться тиск звукової хвилі під час її проходження через систему кісточок середнього вуха?

6.28 *А.* Знайти інтенсивність звукової хвилі I_2 , що має рівень звуку на $\Delta L_1 = 7$ дБ нижчий, ніж звукова хвиля інтенсивністю $I_1 = 4 \cdot 10^{-9}$ Вт/м². *Б.* Якою буде інтенсивність звукової хвилі I_3 у разі, якщо рівень звуку на $\Delta L_2 = 3$ дБ вищий, ніж звукова хвиля інтенсивністю I_1 ?

6.29 Вплив шуму інтенсивністю $L = 90$ дБ упродовж 8-годинного робочого дня може викликати погіршення слуху робітника. *А.* Знайти інтенсивність I відповідної звукової хвилі. *Б.* Яка енергія E передається барабанній перетинці площею $S = 0,8$ см² під час такого впливу шуму?

6.30 При використанні стетоскопа звук більш ефективно передається при безпосередньому контакті з тілом пацієнта, ніж через повітря. Далі звук підсилюється та передається на меншу за площею барабанну перетинку. Знайти, якого акустичного посилення звуку в дБ можна досягти за допомогою стетоскопа, якщо площа голівки становить 15 см², і звук передається до двох барабанних перетинок, кожна з яких має площу 0,9 см². Ефективність передавання звукової хвилі дорівнює 40 %.

6.31 Відомо, що на опорній частоті 1 000 Гц шкали гучності та рівня інтенсивності звуку збігаються. Людина найбільш чутлива до звуків, що мають частоту приблизно 4 000 Гц. У повсякденному житті людина взаємодіє зі звуками, що мають широкий діапазон частот. Наприклад, значна кількість електричних приладів змінного струму створюють звуки частотою 60 Гц; музика, зазвичай, має частоту 400 Гц; старі телевізори функціонують на частоті 15 750 Гц. *А.* Скориставшись кривими рівних гучностей (рис. 6.1), знайти поріг чутності в децибелах для звуків із частотами 60, 400, 1 000, 4 000 та 15 000 Гц. *Б.* Знайти інтенсивності цих звуків у Вт/м².

6.32 Вплив шуму призвів до значного погіршення слуху дитини на частоті 5 000 Гц. Ступінь втрати слуху на цій частоті становить 60 дБ. На всіх інших частотах вона має нормальний слух. Знайти, у

скільки разів потрібно збільшити інтенсивність звуків частотою 5 000 Гц на порозі чутності, щоб вона їх сприймала як нормальні.

6.33 Який рівень інтенсивності в децибелах повинні мати звуки з частотами 60, 3 000 і 8 000 Гц, щоб мати таку саму гучність, як звук із частотою 1 000 Гц і гучністю 40 фонів?

6.34 А. Який рівень інтенсивності в децибелах має звук частотою 600 Гц та гучністю 20 фонів? Б. Знайти рівень інтенсивності, якщо гучність збільшилася до 70 фонів?

6.35 Знайти гучність у фонах для звуків з частотами 200, 1 000, 5 000 і 10 000 Гц, якщо вони всі мають однаковий рівень інтенсивності звуку: а) 60 дБ; б) 110 дБ; в) 20 дБ.

6.36 Припустимо, що людина має ступінь втрати слуху 50 дБ на всіх частотах. У скільки разів треба збільшити інтенсивність звуків на порозі чутності, щоб хворий міг сприймати їх як нормальні? Поріг чутності $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м².

6.37 Знайти ступінь втрати слуху у децибелах для хворого з порушеннями слуху, якщо для того щоб він міг нормально сприймати звуки на порозі чутності $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² інтенсивність звуку повинна бути підсилена в $5 \cdot 10^{12}$ разів.

6.38 Хворий із порушенням слуху має поріг чутності вищий на 10 дБ для частоти 100 Гц і на 50 дБ вищий для частоти 4 000 Гц. Порівняти, у скільки разів значення інтенсивності звуку на порозі чутності для частоти 100 Гц більше за поріг чутності на частоті 4 000 Гц.

6.39 Рівень звуку серцевих тонів, що реєструються стетоскопом, становить 10 дБ. Чому дорівнює відповідна інтенсивність серцевих тонів у Вт/м²?

6.40 Шуму на вулиці із жвавим рухом відповідає рівень інтенсивності звуку 90 дБ, гучному автомобільному сигналу – 100 дБ. Яким буде рівень інтенсивності звуку, якщо ці два джерела лунають одночасно?

6.41 На рисунку 6.3 наведені аудіограми для трьох пацієнтів. Верхній графік відповідає людині з нормальним слухом. Друга

аудиограма свідчить про різке зниження слуху пацієнта на частоті 4 000 Гц і належить дитині, яка втратила слух від гучного звуку іграшкової зброї. Третя аудиограма хворого на пресбіакузіс (прогресуюча втрата слуху для звуків більш високої частоти з віком). Розрахувати інтенсивності звуку, Вт/м², що відповідають порогу чутності на частотах 4 000 Гц та 8 000 Гц у нормі та під час патології.

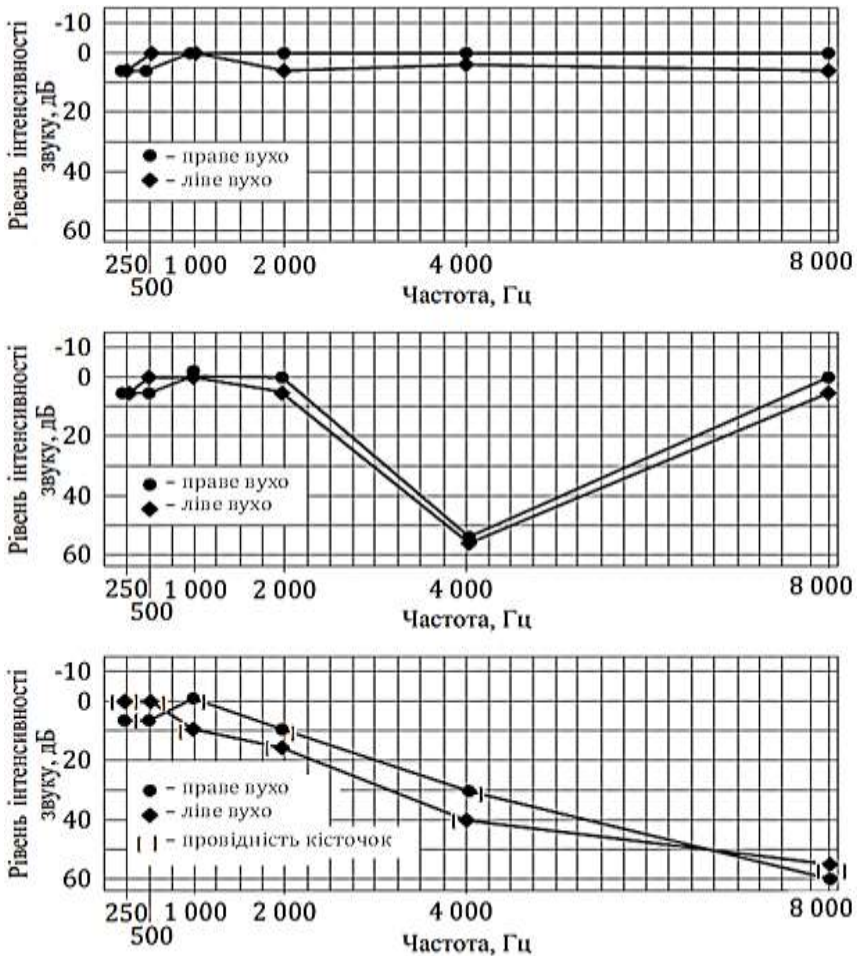


Рисунок 6.3 – Аудиограми пацієнтів

6.42 Людина з нормальним слухом здатна відчувати різницю гучностей двох звуків у 1 фон. У скільки разів відрізняються інтенсивності відповідних звукових хвиль на частоті 1 000 Гц?

6.43 Відомо, що тихій розмові однієї людини відповідає гучність 50 фонів для частоти 1 кГц. Знайти, якою буде гучність звуку при одночасній розмові: а) трьох осіб; б) п'яти осіб.

6.44 Для вимірювання гостроти слуху використовують діагностичний метод – аудіометрію. На спеціальному приладі (аудіометрі) визначають поріг чутності на різних частотах. На рисунку 6.4 наведена аудіограма для хворого зі зниженим слухом, де L – значення порогу чутності. Верхня крива знята для лівого вуха, а нижня – для правого. А. Порівняти значення порогу чутності хворого на частотах 100, 1 000 і 10 000 Гц з нормою. Б. Знайти відповідні мінімальні значення інтенсивностей звуку, Вт/м², які хворий здатний сприймати.

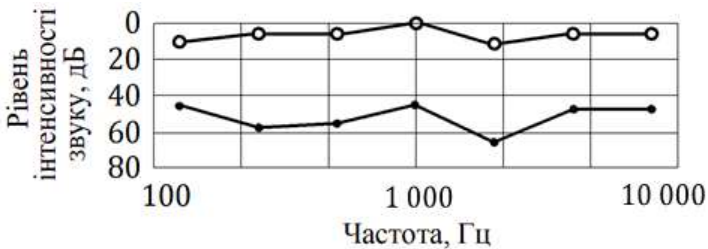


Рисунок 6.4 – Аудіограма хворого зі зниженим слухом

6.45 Під час проходження через звукопоглинальний матеріал гучність звукової хвилі частотою 1 000 Гц зменшилася на 30 фонів. Знайти, якою стала інтенсивність звуку, якщо до проходження перегородки вона становила 10^{-8} Вт/м²?

6.46 Гучна розмова двох галасливих співрозмовників, які говорять одночасно голосно, створює рівень гучності у певному місці простору 90 фонів. Яким буде рівень гучності, якщо один із співрозмовників замовкне? Частоту звуків взяти за 1 000 Гц.

6.47 Використовуючи криві рівних гучностей (рис. 6.1), а) знайти інтенсивність звукової хвилі I_1 у Вт/м², що має частоту 60 Гц і

гучність 60 фонів; б) знайти інтенсивність звукової хвилі I_2 , яка має частоту 10 000 Гц і гучність 80 фонів.

6.48 У нормі вухо людини сприймає звук у діапазоні частот від 16 Гц до 20 кГц. Проте з віком верхній поріг цього діапазону зменшується (табл. 6.3). Яким довжинам хвиль відповідають ці частоти під час поширення звуку в повітрі?

Таблиця 6.3 – Залежність слухового сприйняття від віку

Вік	Маленькі діти	До 20 років	35 років	50 років
Верхня межа частоти, Гц	22 000	20 000	15 000	12 000

6.49 У таблиці 6.4 наведені інтенсивності звукових хвиль для різних типів звуків. Знайти відповідні значення гучності для частоти 1 кГц.

Таблиця 6.4 – Характеристики типових звуків

Діючий звук	Інтенсивність звуку, Вт/м ²	Гучність звуку, фонів
Шепіт	10^{-9}	?
Спокійна музика	10^{-8}	?
Розмова	10^{-7}	?
Шумна вулиця	10^{-5}	?
Крик	10^{-4}	?
Реактивний двигун	10	?

6.50 У таблиці 6.5 подана міжнародна класифікація ступеня втрати слуху. Знайти мінімальне значення інтенсивності звуку, яке здатне сприймати людина з вадами слуху, Вт/м², для кожного ступеня втрати слуху на частоті 1 000 Гц.

Таблиця 6.5 – Міжнародна класифікація ступеня втрати слуху

Ступінь втрати слуху	Середнє значення порогу чутності, дБ	Мінімальна інтенсивність звуку, Вт/м ²
I	26–40	?
II	41–55	?
III	56–70	?
IV	71–90	?
Глухота	≥ 91	?

УЛЬТРАЗВУК ТА ІНФРАЗВУК

📖 Теоретична частина

Таблиця 7.1 – Коефіцієнт загасання ультразвуку на частоті вимірювання ν

Речовина, тканина	Частота випромінювання, МГц	Коефіцієнт загасання ультразвуку, м^{-1}
Вода	1,0	0,01
Жирова тканина	0,87	4,5
Кістка	0,88	71
М'яз	0,87	16
Мозок	0,87	14
Печінка	0,87	15
Плазма крові	0,87	2,0
Цільна кров	1,0	2,5
Шкіра	1,0	40

Таблиця 7.2 – Густина ρ і швидкість звуку v для деяких речовин і тканин

Речовина, тканина	Густина, $\text{кг}/\text{м}^3$	Швидкість звуку, $\text{м}/\text{с}$
Вода	1 000	1 497
Жирова тканина	904	1 460
Кістка	1 695	3 660
Кров	1 050	1 480
М'яз	994	1 550
Мозок	1 053	1 520
Молоко	994	1 500
Печінка	1 083	1 570
Повітря	1,29	331

1 Інтенсивність ультразвукової хвилі I , $\text{Вт}/\text{м}^2$:

$$I = \frac{\Phi}{S} = \omega_p v = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2} v,$$

де ω_0 – циклічна частота коливання, рад/с; ρ – густина середовища, кг/м³; A – амплітуда коливань частинок середовища, м; v – швидкість поширення ультразвуку, м/с.

2 Зв'язок інтенсивності та тиску УЗ-хвилі

$$I = \frac{P^2}{2\rho v},$$

де I – інтенсивність ультразвукової хвилі, Вт/м²; P – звуковий тиск, Па; ρ – густина середовища, кг/м³, v – швидкість поширення ультразвуку, м/с.

3 Хвильовий (акустичний) опір середовища R , кг/(м² · с):

$$R = \rho v,$$

де ρ – густина середовища, кг/м³; v – швидкість поширення ультразвуку, м/с.

4 Коефіцієнт проникнення хвилі ультразвуку, що потрапляє на межу поділу двох середовищ, β :

$$\beta = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

де R_1 – хвильовий опір першого середовища, кг/(м² · с); R_2 – хвильовий опір другого середовища, кг/(м² · с).

5 Коефіцієнт відбиття хвилі ультразвуку, що потрапляє на межу поділу двох середовищ, r :

$$r = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2},$$

де R_1 – хвильовий опір першого середовища, кг/(м² · с); R_2 – хвильовий опір другого середовища, кг/(м² · с);

$$\beta + r = 1.$$

6 Ефект Доплера

Спостерігач наближається зі швидкістю v_c до нерухомого джерела:

$$\vartheta' = \frac{v + v_c}{v} \vartheta.$$

Джерело хвиль рухається зі швидкістю v_d до нерухомого спостерігача:

$$\vartheta'' = \frac{v}{v - v_d} \vartheta.$$

Одночасний рух спостерігача і джерела назустріч один одному:

$$\vartheta''' = \frac{v + v_c}{v - v_d} \vartheta,$$

де v – швидкість поширення звуку у середовищі, м/с; ϑ – частота джерела звуку, Гц; ϑ' , ϑ'' , ϑ''' – частоти, що сприймає спостерігач у відповідному випадку.

7 Доплерівський зсув частот ϑ_d , Гц:

$$\vartheta_d = \frac{2v_0}{v} \vartheta_\Gamma,$$

де v – швидкість поширення звуку в середовищі, м/с; v_0 – швидкість руху тіла, м/с; ϑ_Γ – частота джерела звуку, Гц.

8 Поглинання ультразвуку речовиною

Інтенсивність ультразвуку I , Вт/м², при проходженні крізь речовину на глибині h зменшується за законом

$$I = I_0 e^{-2ah},$$

де I_0 – початкова інтенсивність ультразвуку, Вт/м²; α – коефіцієнт поглинання ультразвуку, м⁻¹.

Амплітуда ультразвукових коливань A , м, при проходженні крізь речовину на глибині h зменшується за законом

$$A = A_0 e^{-\alpha h},$$


де A_0 – початкова амплітуда ультразвукових коливань, м; α – коефіцієнт поглинання ультразвуку, м⁻¹.

9 Глибина половинного послаблення ультразвуку H , м:

$$H = \frac{\ln 2}{2\alpha} = \frac{0,347}{\alpha},$$

де α – коефіцієнт поглинання ультразвуку, м⁻¹.

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

7.1 У фізіотерапевтичних процедурах використовується ультразвук частотою $\vartheta = 800$ кГц та інтенсивністю $I = 1$ Вт/см². Знайти амплітуду коливання молекул м'яких тканин під дією ультразвуку. Густина м'яких тканин $\rho = 1\,050$ кг/м³, швидкість поширення ультразвуку в м'яких тканинах $v = 1\,500$ м/с.

Дано:

$$\vartheta = 800 \text{ кГц} =$$

$$= 800 \cdot 10^3 \text{ Гц},$$

$$I = 1 \text{ Вт/см}^2 =$$

$$= 10^4 \text{ Вт/м}^2,$$

$$v = 1\,500 \text{ м/с},$$

$$\rho = 1\,050 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти:

A —?

Відповідь: $A = 22,4$ нм.

Розв'язання:

$$I = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2} v, \text{ звідси}$$

$$A = \sqrt{\frac{2I}{v\rho\omega_0^2}} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2I}{v\rho}}, \quad (1)$$

$$\omega_0 = 2\pi\vartheta. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$A = \frac{1}{2\pi\vartheta} \sqrt{\frac{2I}{v\rho}},$$

$$A = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 800 \cdot 10^3} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4}{1\,500 \cdot 1\,050}} = 22,4 \text{ (нм)}.$$

$$[A] = \frac{1}{\text{Гц}} \sqrt{\frac{\text{Вт} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{кг}}} = \text{с} \sqrt{\frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{кг}}} = \text{с} \sqrt{\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\text{с}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}} = \text{м}.$$

7.2 Знайти коефіцієнти проникнення β та відбиття r ультразвуку на межі поділу повітря–шкіра. Швидкість поширення УЗ-хвилі в повітрі дорівнює $v_1 = 343,1$ м/с, у шкірі $v_2 = 1\,610$ м/с, густина повітря $\rho_1 = 1,205$ кг/м³, густина шкіри $\rho_2 = 1\,205$ кг/м³.

Дано:

$$v_1 = 343,1 \text{ м/с,}$$

$$v_2 = 1610 \text{ м/с,}$$

$$\rho_1 = 1,205 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_2 = 1\,205 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти:

β —?

r —?

Розв'язання:

$$r = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2}, \quad (1)$$

$$R = \rho v, \text{ тоді } R_1 = \rho_1 v_1, R_2 = \rho_2 v_2. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$r = \frac{(\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2)^2}{(\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2)^2},$$

$$r = \left(\frac{1,205 \cdot 343,1 - 1\,205 \cdot 1\,610}{1,205 \cdot 343,1 + 1\,205 \cdot 1\,610} \right)^2 = 0,99915,$$

$$[r] = \left(\frac{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} - \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}}{\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}} + \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}} \right)^2 = 1,$$

$$\beta + r = 1, \text{ звідси } \beta = 1 - r,$$

$$\beta = 1 - 0,99915 = 0,00085.$$

Відповідь: $r = 0,99915$; $\beta = 0,00085$.

7.3 Знайти, у скільки разів зменшиться інтенсивність ультразвукової хвилі частотою $\vartheta = 1$ МГц при проходженні м'яких тканин на глибину $h = 10$ см, якщо коефіцієнт поглинання ультразвуку м'якими тканинами на цій частоті $\alpha = 0,16 \text{ см}^{-1}$.

Дано:

$$\vartheta = 1 \text{ МГц} = 10^6 \text{ Гц,}$$

$$h = 10 \text{ см} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$\alpha = 0,16 \text{ см}^{-1} = 0,16 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1}.$$

Знайти:

I_0/I_1 —?

Відповідь: $\frac{I_0}{I_1} = 24,5$.

Розв'язання:

$$I = I_0 e^{-2\alpha h}, \text{ звідси}$$

$$\frac{I_0}{I} = e^{2\alpha h},$$

$$\frac{I_0}{I} = e^{2 \cdot 0,16 \cdot 10^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2}} = 24,5,$$

$$\left[\frac{I_0}{I} \right] = e^{\text{м}^{-1} \cdot \text{м}} = 1.$$

7.4 Густина здорової м'язової тканини $\rho = 1\,060 \text{ кг/м}^3$. Її хвильовий опір $R = 1,63 \cdot 10^6 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)}$. Під час дослідження ультразвуком відбитий сигнал був прийнятим через $t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ після випромінювання. На якій глибині h у м'язовій тканині була виявлена неоднорідність?

Дано:

$$\rho = 1\,060 \text{ кг/м}^3,$$

$$R = 1,63 \cdot 10^6 \text{ кг/(м}^2 \cdot \text{с)},$$

$$t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Знайти:

h —?

Відповідь: $h = 1,54 \text{ см}$.

Розв'язання:

$$2h = vt, \text{ звідси } h = \frac{vt}{2}, \quad (1)$$

$$R = \rho v, \text{ звідси } v = \frac{R}{\rho}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$h = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{t}{2},$$

$$h = \frac{1,63 \cdot 10^6}{1\,060} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-5}}{2} = 1,54 \text{ (см)},$$

$$[h] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{кг}} = \text{м}.$$

7.5 Доплерівський зсув частоти при відбитті механічної хвилі від еритроцитів, що рухаються, дорівнює $\vartheta_d = 40 \text{ Гц}$. Частота генератора $\vartheta_\Gamma = 100 \text{ кГц}$. Знайти швидкість течії крові в артерії, якщо швидкість ультразвуку в ній $v = 1\,500 \text{ м/с}$.

Дано:

$$\vartheta_d = 40 \text{ Гц},$$

$$\vartheta_\Gamma = 100 \text{ кГц} = 10^5 \text{ Гц},$$

$$v = 1\,500 \text{ м/с}.$$

Знайти:

v_0 —?

Відповідь: $v_0 = 0,3 \text{ м/с}$.

Розв'язання:

$$\vartheta_d = \frac{2v_0}{v} \vartheta_\Gamma, \text{ звідси } v_0 = \frac{\vartheta_d v}{2\vartheta_\Gamma},$$

$$v_0 = \frac{40 \cdot 1\,500}{2 \cdot 10^5} = 0,3 \text{ (м/с)},$$

$$[v_0] = \frac{\text{м} \cdot \text{с}}{\text{с} \cdot \text{с}} = \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

✎ **Задачі для самостійного виконання**

7.6 Для діагностики використовують ультразвукові хвилі частотами від $\vartheta_1 = 1$ МГц до $\vartheta_2 = 15$ МГц. Яким довжинам хвиль відповідає цей діапазон частот у м'язовій тканині? Швидкість поширення ультразвуку в м'язовій тканині $v = 1\,540$ м/с.

7.7 Знайти звуковий тиск, що виникає у кровоносній судині під час поширення УЗ-хвилі з частотою $\vartheta = 1$ МГц та інтенсивністю $I = 10$ Вт/см². Швидкість поширення УЗ-хвилі в крові $v = 1\,590$ м/с, густина крові $\rho = 1\,050$ кг/м³.

7.8 Доплерівський зсув частоти при відбитті ультразвуку від еритроцитів, що рухаються, дорівнює $\vartheta_d = 40$ Гц. Частота генератора $\vartheta_\Gamma = 100$ кГц, швидкість течії крові $v_0 = 0,3$ м/с. Чому дорівнює швидкість ультразвуку v ?

7.9 У фізіотерапевтичних процедурах використовується ультразвук інтенсивністю $I = 1$ Вт/см². Амплітуда коливання молекул м'яких тканин під дією ультразвуку $A = 22,4$ нм. Швидкість поширення ультразвуку в м'яких тканинах дорівнює $v = 1\,500$ м/с, а густина м'яких тканин $\rho = 1\,050$ кг/м³. Знайти частоту ультразвуку.

7.10 Швидкість руху еритроцита в артерії дорівнює $v_0 = 0,3$ м/с. Швидкість ультразвуку $v = 1\,500$ м/с, частота $\vartheta_\Gamma = 100$ кГц. Знайти доплерівський зсув частоти ϑ_d , якщо еритроцит рухається до приймача УЗ-хвилі.

7.11 Як зміниться швидкість руху еритроцитів у кровоносному руслі у пацієнтів зі сфероцитозом, якщо доплерівський зсув частоти у 1,3 раза менший порівняно з нормою?

7.12 Чи однакової частоти буде звук у таких випадках: а) джерело звуку рухається назустріч нерухомому спостерігачу зі швидкістю $v_d = 40$ м/с; б) спостерігач рухається назустріч нерухомому джерелу з тією самою швидкістю $v_c = 40$ м/с? Частота джерела звуку $\vartheta = 600$ Гц. Швидкість звуку в повітрі $v = 340$ м/с;

е) одночасний рух спостерігача та джерела назустріч один одному з однаковою швидкістю $v_c = v_d = 40$ м/с?

7.13 Під час дослідження пацієнта ультразвуком на глибині $h = 1,6$ см у м'язовій тканині була виявлена неоднорідність. Через який час буде прийнятий відбитий сигнал після випромінювання, якщо густина здорової м'язової тканини становить $\rho = 1\,060$ кг/м³, її хвильовий опір дорівнює $R = 1,63 \cdot 10^6$ кг/(м² · с)?

7.14 Під час проходження ультразвукової хвилі через $h = 9$ см м'язової тканини інтенсивність хвилі зменшилася у 20 разів. Знайдіть коефіцієнт поглинання ультразвуку α для м'язової тканини.

7.15 Знайти коефіцієнти проникнення β та відбиття r на межі поділу водне желе–шкіра. Швидкість поширення УЗ-хвилі у водному желе $v_1 = 1\,923$ м/с, у шкірі $v_2 = 1\,610$ м/с, густина водного желе $\rho_1 = 1\,260$ кг/м³, густина шкіри $\rho_2 = 1\,205$ кг/м³. Навіщо при діагностичних УЗ-методах поверхню шкіри пацієнта покривають водним желе?

7.16 Коефіцієнт відбиття ультразвуку на межі поділу повітря–шкіра дорівнює $r = 0,99915$. Швидкість поширення УЗ-хвилі в повітрі $v_1 = 343,1$ м/с, густина повітря становить $\rho_1 = 1,205$ кг/м³. Знайти швидкість поширення УЗ-хвилі у шкірі v_2 , якщо густина шкіри $\rho_2 = 1\,205$ кг/м³.

7.17 Під час обстеження мозку ультразвуком різної частоти виявилось, що відстань, на якій інтенсивність ультразвукової хвилі зменшувалася вдвічі, дорівнювала: а) $H_1 = 2,5$ см для $\vartheta_1 = 0,87$ МГц; б) $H_2 = 3,2$ см для $\vartheta_2 = 1$ МГц. Визначити коефіцієнти поглинання тканин мозку для цих частот.

7.18 Для частоти ультразвуку $\vartheta = 2,64$ МГц коефіцієнт поглинання тканин печінки $\alpha = 0,33$ см⁻¹. На якій глибині інтенсивність ультразвукової хвилі зменшиться вдвічі? Втричі?

7.19 Під час обстеження печінки ультразвуком на частоті $\vartheta = 2,64$ МГц виявилось, що інтенсивність УЗ на глибині

$h = 4,5$ см зменшилася в 1,5 раза. Який коефіцієнт поглинання печінки для УЗ цієї частоти?

7.20 Знайти коефіцієнт відбиття та проникнення ультразвукової хвилі на межі поділу м'яка тканина–повітря. Хвильовий опір м'яких тканин у 3 000 разів більший, ніж хвильовий опір повітря.

7.21 Як зміниться інтенсивність ультразвукової хвилі з частотою 870 кГц, якщо вона пройде шар м'язової тканини товщиною 5 см?

7.22 Для покращання проходження ультразвукової хвилі від випромінювача до м'язової тканини використовуються контактні речовини. Яким повинен бути акустичний опір контактної речовини, щоб коефіцієнт відбиття на межі поділу дорівнював 0,01?

7.23 Під час ультразвукової терапії суглоба ультразвук доходить до кісткової тканини, проходячи крізь шкіру товщиною 1 мм^2 і м'язову тканину товщиною 5 см. У скільки разів інтенсивність звуку, що надходить до суглоба, менша за інтенсивність на поверхні шкіри?

7.24 Визначити коефіцієнт відбиття ультразвуку на межі поділу кісткова тканина–мозок.

7.25 Визначити період коливань та частоту ультразвукової хвилі довжиною 5 мм, що поширюється у кістковій тканині.

7.26 Визначити акустичний опір кісткової та м'язової тканин.

7.27 Знайти, яка частка енергії ультразвукової хвилі перейде з м'язової тканини у кісткову.

7.28 Ультразвукові коливання випромінюються з поверхні площиною 8 см^2 з інтенсивністю 100 Вт/м^2 . Як зміниться інтенсивність випромінювання, якщо його сфокусувати на площі 2 мм^2 ?

7.29 Чому дорівнює довжина УЗ-хвилі у жировій тканині, якщо частота коливань становить 30 МГц, а швидкість поширення хвилі $v = 1\,460 \text{ м/с}$?

7.30 Знайти інтенсивність ультразвукової хвилі у м'язі на глибині 4 см, якщо інтенсивність хвилі на поверхні тіла дорівнювала $1,5 \text{ Вт/м}^2$, а у тканину пройшло лише 75 % енергії хвилі. Для цієї інтенсивності УЗ глибина половинного поглинання дорівнює 2 см.

7.31 Для частоти 3 МГц показник поглинання ультразвуку дорівнює $0,7 \text{ см}^{-1}$, а для частоти 10 МГц – 7 см^{-1} . Як ви вважаєте, які частоти необхідно використовувати для ультразвукового дослідження щитоподібної залози, для печінки? Обґрунтуйте відповідь.

7.32 Дельфіни випускають ультразвукові хвилі частотою $\nu = 250 \text{ кГц}$. Визначити довжину хвилі а) у воді; б) у повітрі. Швидкість поширення УЗ у воді дорівнює $v_1 = 1540 \text{ м/с}$; у повітрі – $v_2 = 331 \text{ м/с}$.

7.33 Ультразвук активно використовується для діагностики та встановлення терміну вагітності. Типова схема установки та ультразвукове зображення подані на рисунку 7.1. Щоб не допустити нагрівання біологічних тканин, в ультразвуковій діагностиці використовуються ультразвукові хвилі дуже малої інтенсивності, порядку 10^{-2} Вт/м^2 . Чи може бути використана для діагностики ультразвукова хвиля з рівнем інтенсивності 100 дБ?



Рисунок 7.1 – Ультразвукова діагностика

7.34 Ультразвуковий випромінювач дозволяє сконцентрувати ультразвукові хвилі на ділянці діаметром 6 мм і доводити

інтенсивність їх до 30 Вт/см^2 . Яку енергію переносять ці хвилі за 5 хвилин?

7.35 Який звуковий тиск створює ультразвук із рівнем інтенсивності 100 дБ , що поширюється у печінці зі швидкістю $1,5 \text{ км/с}$? Густина печінки дорівнює 1100 кг/м^3 .

7.36 Ультразвук з інтенсивністю від 10^3 Вт/м^2 до 10^4 Вт/м^2 використовується в терапії для глибокого прогрівання тканин (ультразвукова діатермія). Чи може бути використана для глибокого прогрівання ультразвукова хвиля, що має рівень інтенсивності 155 дБ ?

7.37 Інтенсивність ультразвуку, використовуваного для лікування захворювань суглобів у великої рогатої худоби, становить $I = 1,2 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2$. Яка кількість енергії проходить через тіло тварини, якщо тривалість процедури $t = 10$ хвилин, а площа вібратора $S = 12 \text{ см}^2$?

7.38 У хірургічних процедурах для подрібнення каменів у жовчному міхурі або для розтину тканин використовують ультразвук з інтенсивністю від 10^3 Вт/м^2 до 10^5 Вт/м^2 (див. приклад рис. 7.2). Чи може бути використаний для розтину тканин ультразвук із рівнем інтенсивності 160 дБ ?

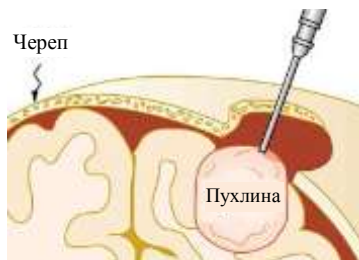


Рисунок 7.2 – Видалення пухлини за допомогою ультразвуку

7.39 У фізіотерапії використовують ультразвук частотою $\vartheta = 800 \text{ кГц}$ й інтенсивністю $I = 1 \text{ Вт/м}^2$. Знайти амплітуду коливань молекул під час дії таким ультразвуком на м'які тканини

(воду), якщо швидкість поширення ультразвуку в тканинах становить $v = 1\,500$ м/с.

7.40 Кількість енергії, переданої ультразвуковою хвилею тілу тварини при лікуванні періартриту за один сеанс, повинна становити $Q = 650$ Дж за інтенсивності ультразвуку $I = 8\,000$ Вт/м². Скільки часу повинен тривати сеанс, якщо площа вібратора $S = 15$ см²?

7.41 Які мінімальні розміри тріщини у кістці можна виявити УЗ-ехолокатором, якщо частота УЗ-коливань $\vartheta = 9$ МГц, швидкість поширення УЗ у кістковій тканині $v = 3\,300$ м/с, число періодів в одному імпульсі $n = 6$?

7.42 На рисунку 7.3 подані схема та зображення ультразвукової доплерографії для ділянки закупореної артерії. Цей діагностичний метод став поширеним для визначення швидкості кровотоку. На зображенні колір демонструє швидкість, причому червоний колір відповідає найвищим швидкостям, а синій – найнижчим. Відомо, що через звуження кров повинна рухатися швидше, ніж через неушкоджену ділянку. Знайти швидкість крові у звуженій ділянці артерії, якщо частота УЗ-випромінювача становила $\vartheta_r = 3,5$ МГц, а детектор зареєстрував доплерівський зсув частот $\vartheta_d = 50$ Гц. Швидкість поширення ультразвуку в м'яких тканинах $v = 1\,500$ м/с?

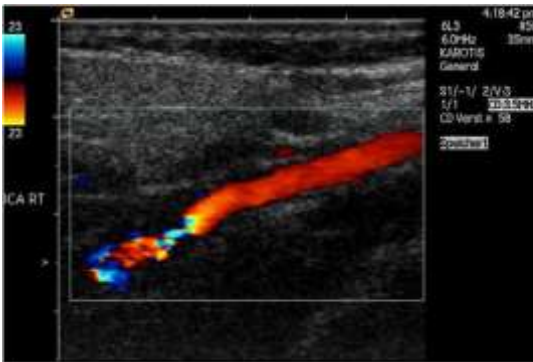


Рисунок 7.3 – Ультразвукова доплерографія

7.43 В ультразвуковій хірургії для розтину тканин використовують ультразвук інтенсивністю $I = 10^5 \text{ Вт/м}^2$. Знайти рівень інтенсивності L у децибелах відповідної ультразвукової хвилі.

7.44 Відбиття УЗ-хвиль від дрібних неоднорідностей стає помітним, якщо їх розміри перевищують довжину хвилі. Оцінити мінімальний розмір ниркового каменя, який може бути виявленим методом УЗ-діагностики при частоті $\vartheta = 5 \text{ МГц}$. Швидкість УЗ-хвиль $v = 1500 \text{ м/с}$.

7.45 А. Знайти, яку мінімальну частоту ультразвуку необхідно використовувати під час діагностики, щоб розрізнити деталі біологічних тканин розміром $0,250 \text{ мм}$. Б. Яка ефективна глибина проникнення ультразвуку даної частоти у біологічні тканини?

7.46 За нормальних умов швидкість течії крові в артеріях $v_0 = 0,6 \text{ м/с}$. Вздовж течії спрямовуються УЗ-хвилі частотою $\vartheta_r = 3,5 \text{ МГц}$. Ці хвилі відбиваються від еритроцитів. Яку частоту хвиль $\vartheta_{\text{пр}}$, відбитих від еритроцитів, зареєструє приймач? Знайти величину доплерівського зсуву частот ϑ_d . Швидкість УЗ-хвилі у крові $v = 1590 \text{ м/с}$.

7.47 Припустимо, що біологічна тканина складається з 2 см жиру, 3 см м'язів і 4 см печінкової тканини (ультразвук поширюється паралельно волокнам). Використовуючи значення коефіцієнтів поглинання ультразвуку, наведених у таблиці 7.3, знайти, у скільки разів зменшиться інтенсивність УЗ-хвилі після проходження цих тканин?

7.48 Припустимо, що біологічна тканина складається з 3 см жиру, 3 см м'язів і 5 см ниркової тканини (ультразвук поширюється уздовж м'язового волокна). Використовуючи значення коефіцієнтів поглинання ультразвуку, наведених у таблиці 7.3, знайти, у скільки разів зменшиться інтенсивність УЗ-хвилі після проходження цих тканин?

7.49 У таблиці 7.3 наведені значення коефіцієнтів поглинання ультразвуку біологічними тканинами на частоті 1 МГц в

одинацях дБ/см. Знайти, у скільки разів зменшиться інтенсивність УЗ-хвилі при проходженні 1 см кожного типу тканин.

Таблиця 7.3 – Коефіцієнти поглинання ультразвуку біологічними тканинами

Біологічна тканина	Коефіцієнт поглинання ультразвуку α , дБ/см	Зниження інтенсивності ультразвуку I/I_0
Кров	0,18	?
Жирова тканина	0,6	?
М'язова тканина (уздовж волокна)	1,2	?
М'язова тканина (паралельна волокну)	3,3	?
Кісткова тканина	20	?
Печінка	0,9	?
Нирки	1	?
Легені	40	?
Очі	2	?
Мозок	0,85	?

7.50 А. Знайти розмір найдрібнішої деталі, що можна розрізнити при ультразвуковій діагностиці, якщо використовувати УЗ-генератор частотою 20 МГц? Б. Чи достатня глибина проникнення ультразвуку даної частоти, щоб дослідити очне дно, яке знаходиться на глибині 3 см від поверхні ока?

7.51 А. На який відстані знаходяться два різних шари біологічних тканин, якщо відбитий УЗ-сигнал від першої тканини був зареєстрований на 0,75 мкс раніше, ніж від другої. Б. Яку мінімальну частоту повинна мати УЗ-хвиля, щоб розрізнити настільки малі деталі?

7.52 Знайти коефіцієнт відбиття та проникнення ультразвукової хвилі на межі поділу м'язова тканина–кісткова тканина. Хвильовий опір кісткової тканини у 5 разів більший, ніж хвильовий опір м'язової тканини.

7.53 А. Знайти, у скільки разів зменшиться інтенсивність ультразвукової хвилі частотою 1 МГц при проходженні біологічної

тканини товщиною 10 см. Коефіцієнт поглинання ультразвуку м'якими тканинами на даній частоті становить 1 дБ/см. *Б.* Визначити, яким буде зниження інтенсивності при зростанні частоти УЗ-генератора до 2 МГц (коефіцієнт поглинання збільшиться вдвічі).

7.54 Припустимо, що ви надсилаєте УЗ-імпульс до тіла людини і реєструєте відбиті сигнали через $t_1 = 31$ мкс, $t_2 = 79$ мкс та $t_3 = 95$ мкс. *А.* Знайти, на якій глибині знаходиться кожна з трьох тканин, якщо швидкість поширення ультразвуку однакова і дорівнює $v = 1540$ м/с. *Б.* На осі x ($x = 0$ – положення джерела) позначте точками позиції, що відповідають межах кожної з тканин. Таким чином ви створили одновимірне ультразвукове зображення, використовуючи режим *В*, де кожна точка (*В* від *bright* – «яскравий») відповідає межі поділу тканин.

7.55 Припустимо, що детектор генерує ультразвукові імпульси у напрямку x від джерела. Лікар проводить вимірювання у восьми різних положеннях на поверхні тіла людини (вісь y). Для кожного положення реєструється серія відбитих сигналів, наведених у таблиці 7.4. Нарисуйте систему координат (де $x = 0$ – положення джерела) і позначте точкою положення кожного відбитого сигналу. Швидкість поширення ультразвуку в м'яких тканинах $v = 1540$ м/с. Час кожного відбиття одержаний у мікросекундах. Таким чином ви створили двовимірне ультразвукове зображення.

Таблиця 7.4

y (мм)	0	10	20	30	40	50	60	70
Відображення 1	35	37	39	40	45	47	48	49
Відображення 2	97	98	58	56	57	96	91	90
Відображення 3			71	73	71			
Відображення 4			99	99	98			

7.56 Легковий автомобіль рухається зі швидкістю 100 км/год, створює інфразвук із рівнем інтенсивності 120 дБ. Водії скаржаться на запаморочення, яке нагадує легке сп'яніння, затуманення зору, підвищену сонливість, слабкість. Знайти

інтенсивність цієї інфразвукової хвилі у $\text{Вт}/\text{м}^2$. Які основи фізичної дії такого інфразвуку?

7.57 У таблиці 7.5 наведені основні джерела інфразвукових хвиль та їх характеристики. За даними таблиці знайти відповідні періоди коливань та інтенсивності коливань для кожного джерела інфразвуку.

Таблиця 7.5 – Джерела інфразвукових хвиль

Джерело інфразвуку	Характерний частотний діапазон, Гц	Періоди коливань, с	Рівні інфра-звуку, дБ	Інтенсивність інфразвуку, $\text{Вт}/\text{м}^2$
Автомобільний транспорт	0,001–16	?	70–120	?
Залізничний транспорт і трамваї	10–16	?	85–120	?
Промислові установки	8–12	?	90–105	?
Вентиляція промислових установок і приміщень	3–20	?	75–95	?
Реактивні літаки	20	?	130	?

7.58 Під час сильних поривів вітру рівень інтенсивності інфразвукових коливань частотою $\nu = 0,1$ Гц досягав $L = 140$ дБ. Наскільки рівень інтенсивності інфразвуку перевищував поріг больового відчуття вуха в діапазоні звукових частот?

7.59 При частоті інфразвуку 1 – 3 Гц можлива киснева недостатність через порушення ритму дихання, а при 5 – 9 Гц з'являються хворобливі відчуття у грудній клітці та нижніх ділянках живота. Знайти відповідні періоди коливань для цих частот.

 Тестові завдання до тематичного блоку 2

I Виберіть правильну відповідь (1 бал):

- 1 Період коливань вимірюється у:
а) м; б) рад/с; в) с; г) c^{-1} .
- 2 Частота коливань вимірюється у:
а) Гц; б) с; в) м; г) c^2 .
- 3 Циклічна частота коливань вимірюється у:
а) рад; б) Гц; в) рад/с; г) м.
- 4 Коефіцієнт загасання вимірюється у:
а) м; б) c^{-1} ; в) Гц; г) с.
- 5 Швидкість коливання тіла вимірюється у:
а) м; б) м/с; в) Гц; г) с.
- 6 Довжина хвилі вимірюється у:
а) Гц; б) м/с; в) с; г) м.

II Виберіть правильну відповідь (1 бал):

- 1 Логарифмічний декремент визначається за формулою:
а) $\lambda = \frac{T}{\beta}$; б) $\lambda = \sqrt{T\beta}$; в) $\lambda = \frac{1}{T\beta}$; г) $\lambda = T\beta$.
- 2 Резонансна циклічна частота визначається за формулою:
а) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\beta^2}$; б) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$;
в) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; г) $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{2\omega_0^2 - \beta^2}$.
- 3 Максимум амплітуди вимушених коливань визначається за формулою:
а) $A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$; б) $A_{\text{рез}} = \frac{2f_0}{\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$;

$$в) A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}; \text{ г) } A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

4 Коефіцієнт відбиття звука при переході з одного середовища до іншого визначається за формулою:

$$а) r = \frac{(R_1 + R_2)^2}{(R_1 - R_2)^2}; \text{ б) } r = \frac{(R_1 + R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2}; \text{ в) } r = \frac{(R_1 - R_2)^2}{(R_1 + R_2)^2}; \text{ г) } r = \frac{(R_1 - R_2)}{(R_1 + R_2)}.$$

5 Коефіцієнт проникнення хвилі ультразвуку, що потрапляє на межу поділу двох середовищ, визначається за формулою:

$$а) \beta = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}; \text{ б) } \beta = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}; \text{ в) } \beta = \frac{4R_1 R_2}{(R_1)^2}; \text{ г) } \beta = \frac{4R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

6 Об'ємна густина енергії звукового поля визначається за формулою:

$$а) \omega_p = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2}; \text{ б) } \omega_p = \frac{\rho A \omega_0^2}{2}; \text{ в) } \omega_p = \sqrt{\frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2}}; \text{ г) } \omega_p = \frac{\rho A^2 \omega_0^2}{2^2}.$$

III Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1) $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ – це:

- а) амплітуда вимушених коливань;
- б) закон незагасальних коливань;
- в) диференціальне рівняння незагасальних коливань;
- г) диференціальне рівняння вимушених коливань;

2) $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ – це:

- а) закон загасальних коливань;
- б) закон незагасальних коливань;
- в) диференціальне рівняння незагасальних коливань;
- г) диференціальне рівняння загасальних коливань;

3) $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ – це:

- а) закон загасальних коливань;
- б) диференціальне рівняння вільних незагасальних коливань;
- в) диференціальне рівняння вільних загасальних коливань;
- г) диференціальне рівняння вимушених коливань;

4) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_B t)$ – це:

- а) закон загасальних коливань;
- б) диференціальне рівняння вільних незагасальних коливань;
- в) диференціальне рівняння вільних загасальних коливань;
- г) диференціальне рівняння вимушених коливань;

5) $S = A \cos[\omega(t - \frac{x}{v})]$ – це:

- а) диференціальне рівняння вимушених коливань;
- б) закон загасальних коливань;
- в) рівняння плоскої хвилі;
- г) диференціальне рівняння вільних загасальних коливань;

6) $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ – це:

- а) закон загасальних коливань;
- б) диференціальне рівняння незагасальних коливань;
- в) закон незагасальних коливань;
- г) диференціальне рівняння вимушених коливань.

IV Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1 У формулі, що визначає період коливань фізичного маятника,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgh}}, h - \text{це:}$$

- а) довжина маятника;
- б) коефіцієнт квазіпружної сили;
- в) відстань між центром ваги та віссю підвісу;
- г) швидкість коливання маятника.

2 У формулі, що визначає період коливання математичного

маятника, $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, l – це:

- а) коефіцієнт квазіпружної сили;
- б) відстань між центром ваги та віссю підвісу;
- в) довжина маятника;
- г) швидкість коливання маятника.

3 У формулі, що визначає період коливання математичного маятника, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, m – це:

- а) коефіцієнт квазіпружної сили;
- б) момент інерції маятника;
- в) маса маятника;
- г) довжина маятника.

4 У формулі, що визначає амплітуду загасальних коливань, $A = A_0 e^{-\beta t}$, β – це:

- а) коефіцієнт загасання;
- б) коефіцієнт відбиття;
- в) коефіцієнт проникнення;
- г) час.

5 У формулі, що визначає гучність звуку, $E = 10k \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$, k – це:

- а) поріг больового відчуття;
- б) поріг чутності;
- в) коефіцієнт пропорційності;
- г) звуковий тиск.

6 У формулі інтенсивності звуку $I = \frac{P^2}{2\rho v}$, P – це:

- а) густина середовища;
- б) звуковий тиск;
- в) гучність звуку;
- г) інтенсивність звуку.

V Виберіть правильну відповідь, поясніть відповідь (2 бали):

1 Якщо частота коливань дорівнює $\vartheta = 2$ Гц, тоді циклічна частота ω дорівнює

- а) π рад/с; б) 2π рад/с; в) 4π рад/с; г) $1/(2\pi)$ рад/с.

2 Якщо частота коливань дорівнює $\vartheta = 2$ Гц, тоді період коливань T дорівнює

а) $0,5\pi$ с; б) $1/(4\pi)$ с; в) 0,5 с; г) 0,2 с.

3 Якщо звукова хвиля зі швидкістю $v = 330$ м/с поширюється за період $T = 2$ с, тоді довжина хвилі λ дорівнює

а) 115 м; б) 660 м; в) 220 м; г) 0,006 м.

4 Якщо частота коливань $\vartheta = 10$ Гц, тоді період коливань T дорівнює

а) 10 с; б) 0,1 с; в) 1 с; г) $0,1\pi$ с.

5 Якщо період коливань $T = 4$ Гц, тоді частота коливань ϑ дорівнює

а) $0,25\pi$ Гц; б) 4 Гц; в) 1 Гц; г) 0,25 Гц.

6 Який період T поширення звукової хвилі зі швидкістю $v = 330$ м/с, якщо довжина хвилі $\lambda = 990$ м,

а) 0,33 с; б) 326 700 с; в) 330 с; г) 3 с.

VI Переведіть величину до системи СІ, поясніть відповідь (2 бали):

1) 300 мкм – це:

а) $3 \cdot 10^{-6}$ м; б) $3 \cdot 10^{-4}$ м; в) $3 \cdot 10^{-8}$ м; г) $3 \cdot 10^{-5}$ м;

2) 20 Вт/мм² – це:

а) $2 \cdot 10^3$ Вт/м²; б) $2 \cdot 10^{-3}$ Вт/м²;
в) $2 \cdot 10^{-6}$ Вт/м²; г) $2 \cdot 10^7$ Вт/м²;

3) 20 мм – це:

а) $2 \cdot 10^{-3}$ м; б) $2 \cdot 10^{-2}$ м; в) $2 \cdot 10^{-4}$ м; г) 2 м;

4) 60 рад/хв – це:

а) 360 рад/с; б) 6 рад/с; в) 1 рад/с; г) 10 рад/с;

5) 0,5 кДж – це:

а) $5 \cdot 10^{-3}$ Дж; б) $5 \cdot 10^2$ Дж; в) $5 \cdot 10^{-4}$ Дж; г) $5 \cdot 10^4$ Дж;

б) 6 кг/см³ – це:

- а) $6 \cdot 10^6$ кг/м³; б) $6 \cdot 10^{-6}$ кг/м³;
в) $6 \cdot 10^{-2}$ кг/м³; г) $6 \cdot 10^2$ кг/м³;
- 7) 0,7 мм – це:
а) $7 \cdot 10^{-2}$ м; б) $7 \cdot 10^{-4}$ м; в) $7 \cdot 10^{-3}$ м; г) $7 \cdot 10^{-5}$ м;
- 8) 0,8 Дж/см³ – це:
а) $8 \cdot 10^2$ Дж/м³; б) $8 \cdot 10^6$ Дж/м³;
в) $8 \cdot 10^{-7}$ Дж/м³; г) $8 \cdot 10^5$ Дж/м³;
- 9) 30 кДж – це:
а) $3 \cdot 10^3$ Дж; б) $3 \cdot 10^2$ Дж; в) $3 \cdot 10^{-4}$ Дж; г) $3 \cdot 10^4$ Дж;
- 10) 60 г/см³ – це:
а) $6 \cdot 10^4$ кг/м³; б) $6 \cdot 10^2$ кг/м³;
в) $6 \cdot 10^3$ кг/м³; г) $6 \cdot 10^{-8}$ кг/м³;
- 11) 0,004 мкм – це:
а) $4 \cdot 10^{-9}$ м; б) $4 \cdot 10^{-6}$ м; в) $4 \cdot 10^{-3}$ м; г) $4 \cdot 10^6$ м;
- 12) 1,8 км/хв – це:
а) $3 \cdot 10$ м/с; б) $1,8 \cdot 10^3$ м/с; в) $3 \cdot 10^3$ м/с; г) $3 \cdot 10^2$ м/с.

□ Теми рефератів та доповідей до тематичного блоку 2

- 1 Періодичні й коливальні процеси в організмі людини та біосистемах.
- 2 Автоколивання та автохвилі в органах і тканинах.
- 3 Загасальні та незагасальні коливання. Вимушені коливання. Резонанс.
- 4 Реєстрація механічних коливань серця (балістокардіографія, апексокардіографія, кінетокардіографія, динамокардіографія).
- 5 Вібрація. Дія вібрацій на організм людини. Захист від вібрацій.
- 6 Звукові хвилі. Характеристики звукових хвиль.
- 7 Шум, дія шуму на організм людини. Захист від шуму.
- 8 Фізика слуху.

- 9 Дія ультразвуку й інфразвуку на організм людини.
- 10 Ультразвукова діагностика.
- 11 Ефект Доплера. Застосування ефекту Доплера в медицині (доплерографія).
- 12 Звукові методи діагностики (аускультация, фонокардіографія, перкусія).
- 13 Характеристики звукового відчуття (висота, тембр, гучність). Аудиометрія – метод визначення гостроти слуху.
- 14 Ультразвук у терапії.
- 15 Ультразвук у хірургії.
- 16 Слухові апарати та протези.

ТЕРМОДИНАМІКА. МЕХАНІЗМИ ТЕПЛООБМІНУ

📖 Теоретична частина

✍ **Кількість теплоти Q** – енергія, що передається від більш нагрітого тіла до менш нагрітого тіла, не пов'язана з перенесенням речовини і виконанням роботи.

Одиниці вимірювання – джоуль (Дж) та калорія (кал).

Співвідношення між одиницями: 1 кал = 4,18 Дж.

1 Кількість переданої теплоти за зміни температури на ΔT тіла масою m , Дж:

$$Q = mc\Delta T = C\Delta T,$$

де m – маса речовини, кг; c – питома теплоємність речовини, Дж/(кг · °С); C – теплоємність речовини, Дж/°С; ΔT – зміна температури, °С.

2 Теплота пароутворення Q , Дж:

$$Q = mL,$$

де Q – енергія, необхідна для перетворення рідини масою m , кг, у пару; L – питома теплота пароутворення, Дж/кг.

3 Теплота плавлення Q , Дж:

$$Q = m\lambda,$$

де Q – енергія, необхідна для перетворення твердої речовини масою m , кг, у рідину; λ – питома теплота плавлення, Дж/кг.

4 Кількість переданої теплоти шляхом теплопровідності Q , Дж:

$$Q = \frac{k_{TS}}{l}(T_1 - T_2)t,$$

де k_T – коефіцієнт теплопровідності, Дж/(м · с · К);
 S – поверхня тіла, м²; l – довжина тіла, м; $T_1 - T_2$ – різниця температур, К; t – час, с.

5 Кількість переданої теплоти шляхом конвекції Q , Дж:

$$Q = k_K S_K (T_1 - T_2) t,$$

де k_T – коефіцієнт конвекції, що залежить від швидкості руху рідини або газу, Дж/(м² · с · К); S_K – площа тіла, що зазнає дії конвекційних потоків, м²; $T_1 - T_2$ – різниця температур, К; t – час, с.

6 Кількість переданої теплоти шляхом випромінювання Q , Дж:

$$Q = k_B e S_B (T_1^4 - T_2^4) t,$$

де e – випромінювальна здатність тіла (для світлошкірих людей $e = 1$); $k_B = 5,1 \cdot 10^{-8}$ Дж/(с · м² · К⁴) – коефіцієнт випромінювання шкіри людини; S_B – поверхня тіла, що бере участь у випромінюванні, м²; T_1 – температура тіла, К; T_2 – температура довкілля, К; t – час, с.

7 Маса речовини m , кг:


$$m = \rho V,$$

де V – об'єм, що займає речовина, м³; ρ – густина речовини, кг/м³.

8 Зв'язок температури t , вираженої у градусах Цельсія, °С, із абсолютною температурою T , що вимірюється у кельвінах, К:

$$T = 273 + t.$$

 **Практична частина**

 **Приклади розв'язання задач**

8.1 Припустимо, що товщина тканини між внутрішньою та зовнішньою поверхнями тіла $l = 3$ см, середня площа поверхні, через яку проводиться тепло, дорівнює $S = 1,5$ м². Знайти кількість

теплоти Q , що віддається шляхом теплопровідності за добу, якщо різниця температур між внутрішньою частиною тіла та шкірою $\Delta t = 2 \text{ }^\circ\text{C}$. Коефіцієнт теплопровідності для тканин організму $k_T = 18 \cdot 10^{-2} \text{ ккал}/(\text{м} \cdot \text{год} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$.

Дано:

$$l = 3 \text{ см} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$S = 1,5 \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 2 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$k_T = 18 \cdot 10^{-2} \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{год} \cdot \text{ }^\circ\text{C}},$$

$$t = 1 \text{ доба} = 86\,400 \text{ с.}$$

Знайти:

$$Q - ?$$

Відповідь: $Q = 1,81 \text{ МДж}$.

Розв'язання:

$$k_T = 18 \cdot 10^{-2} \frac{\text{ккал}}{\text{м} \cdot \text{год} \cdot \text{ }^\circ\text{C}} =$$

$$= \frac{18 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 4,18}{3\,600} \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{ }^\circ\text{C}} = 0,209 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{ }^\circ\text{C}},$$

$$Q = \frac{k_T S}{l} (T_1 - T_2) t,$$

$$Q = \frac{0,209 \cdot 1,5 \cdot 2 \cdot 86\,400}{3 \cdot 10^{-2}} = 1,81 \text{ МДж},$$

$$[Q] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{с}}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{м}} = \text{Дж}.$$

8.2 Знайти кількість теплоти Q , що віддається поверхнею шкіри через випаровування $V = 0,5 \text{ л}$ поту. Температура тіла $37 \text{ }^\circ\text{C}$, питома теплота пароутворення $L = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$, густина поту $\rho = 998,2 \text{ кг/м}^3$.

Дано:

$$V = 0,5 \text{ л} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$L = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг},$$

$$\rho = 998,2 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти:

$$Q - ?$$

Розв'язання:

$$Q = Lt, \tag{1}$$

$$m = \rho V, \tag{2}$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$Q = L\rho V,$$

$$Q = 2,4 \cdot 10^6 \cdot 998,2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 1,198 \text{ (МДж)},$$

$$[Q] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{м}^3} = \text{Дж}.$$

Відповідь: $Q = 1,198 \text{ МДж}$.

8.3 У стані спокою людина робить приблизно 20 вдихів за хвилину, при цьому вдихає $V = 0,5 \text{ л}$ повітря при кожному вдиху. Скільки тепла Q відводиться за годину, якщо вона видихає $m = 0,02 \text{ г}$ водяної пари на 1 літр повітря. Температура пари вища на $\Delta t = 7 \text{ }^\circ\text{C}$, ніж температура довкілля. За нормальних умов питома теплоємність повітря $c = 1\,010 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$, густина повітря $\rho = 1,2 \text{ кг}/\text{м}^3$, питома теплота пароутворення $L = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$.

Дано:

$$c = 1\,010 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C}},$$

$$L = 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг},$$

$$\Delta t = 7 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$\rho = 1,2 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

$$n = 20 \text{ вдихів},$$

$$t_1 = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с},$$

$$V_1 = 0,5 \text{ л} =$$

$$= 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3,$$

$$t_2 = 1 \text{ год} = 3\,600 \text{ с},$$

$$\frac{m_{\text{п1}}}{V} = 0,02 \text{ г}/\text{л} =$$

$$= 0,02 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

Знайти:

$$Q - ?$$

Розв'язання:

1 Кількість теплоти, необхідної для підвищення температури повітря на $7 \text{ }^\circ\text{C}$,

$$Q_1 = ct\Delta T.$$

Маса повітря, яку вдихає людина за 1 годину, $m = \rho V$.

Об'єм повітря при кожному вдиху

$$V_1 = 0,5 \text{ л}.$$

Об'єм повітря за хвилину:

$$V_{\text{хв}} = n \cdot V_1; V_{\text{хв}} = 20 \cdot 5 \cdot 10^{-4} = 10^{-2} \text{ м}^3.$$

Об'єм повітря за годину:

$$V_{\text{год}} = 60 \cdot V_{\text{хв}}; V_{\text{год}} = 60 \cdot 10^{-2} = 0,6 \text{ м}^3.$$

$$\text{Тоді } Q_1 = c\rho V_{\text{год}}\Delta T.$$

$$Q_1 = 1\,010 \cdot 1,2 \cdot 0,6 \cdot 7 = 5\,090,4 \text{ (Дж)}.$$

$$[Q_1] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{ }^\circ\text{C}}{\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{м}^3} = \text{Дж}.$$

2 Кількість теплоти, необхідної для перетворення повітря на пару, $Q_2 = m_{п}L$, де $m_{п}$ – маса пари; $m_{п} = \frac{m_{п1}}{V} \cdot V_{год}$. Тоді

$$Q_2 = \frac{m_{п1}}{V} \cdot V_{год} \cdot L, Q_2 = 0,02 \cdot 0,6 \cdot 2,4 \cdot 10^6 = 28\,800 \text{ Дж.}$$

$$[Q_2] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{кг}} = \text{Дж.}$$

3 Загальна кількість теплоти, відведеної за годину,

$$Q = Q_1 + Q_2, Q = 5\,090,4 + 28\,800 = 33\,890,4 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $Q = 33\,890,4 \text{ Дж.}$

8.4 На ділянку тіла хворого площею $S = 0,1 \text{ м}^2$ накладається лікувальна грязь товщиною $h = 8 \text{ см}$ за температури $t_1 = 44 \text{ }^\circ\text{C}$. Визначити кількість теплоти, одержаної хворим, якщо вважати, що 30 % її розсіюється у довкілля. Питома теплоємність грязі $c = 200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$, її густина $\rho = 1\,400 \text{ кг}/\text{м}^3$. Температура тіла $t_2 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$.

Дано:

$$S = 0,1 \text{ м}^2,$$

$$h = 8 \text{ см} = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м,}$$

$$c = 200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C}),$$

$$\rho = 1\,400 \text{ кг}/\text{м}^3,$$

$$t_1 = 44 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$t_2 = 37 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$\eta = 30 \text{ } \%.$$

Розв'язання:

$$Q = c m \Delta T, \quad (1)$$

$$m = \rho V, \quad (2)$$

$$V = Sh. \quad (3)$$

Підставимо (2), (3) до (1). Одержимо

$$Q = c \rho S h \Delta T.$$

$$Q = 200 \cdot 1\,400 \cdot 0,1 \cdot 8 \cdot 10^{-2} \cdot (44 - 37) =$$

$$= 15\,680 \text{ Дж.}$$

$$[Q] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{ }^\circ\text{C}}{\text{кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{м}^3} = \text{Дж.}$$

Знайти:

$$Q_1 - ?$$

Враховуючи, що 30 % теплоти

розсіюється, тоді хворий одержує 70 %.

$$Q_1 = 0,7 \cdot Q,$$

$$Q_1 = 0,7 \cdot 15\,680 = 10\,976 \text{ Дж.}$$

Відповідь: $Q_1 = 10\,976 \text{ Дж.}$

8.5 Розрахувати кількість теплоти Q , відведеної від поверхні шкіри за рахунок конвекції в безвітряних погодних умовах ($k_k = 6 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{год} \cdot ^\circ\text{C})$) за добу. Площа відкритої поверхні тіла $S = 1,7 \text{ м}^2$. Температура повітря $t_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C}$, середня температура шкіри $t_2 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$.

Дано:

$$S = 1,7 \text{ м}^2,$$

$$t_1 = 30 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$t_2 = 37 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$k_k = 6 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{год} \cdot ^\circ\text{C}},$$

$$t = 1 \text{ доба} = 86\,400 \text{ с.}$$

Знайти:

$$Q - ?$$

Відповідь: $Q_d = -7,17 \text{ МДж.}$

Розв'язання:

$$k_k = 6 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^2 \cdot \text{год} \cdot ^\circ\text{C}} =$$

$$= \frac{6 \cdot 10^3 \cdot 4,18}{3\,600} \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C}} = 6,97 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C}}.$$

$$Q = k_k S_k (T_1 - T_2) t,$$

$$Q = 6,97 \cdot 1,7 \cdot (30 - 37) \cdot 86\,400 = -7,17 \text{ МДж},$$

$$[Q] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C}} = \text{Дж.}$$

✍ Задачі для самостійного виконання

8.6 Знайти кількість теплоти, необхідної для перетворення льоду масою $m = 2 \text{ г}$, що має температуру $t_1 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$, у пару, температурою $t_2 = 130 \text{ }^\circ\text{C}$. Взяти до уваги, що температура плавлення льоду $t_{\text{п}} = 0 \text{ }^\circ\text{C}$, температура випаровування води $t_{\text{в}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, питома теплота плавлення $\lambda = 3,33 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$,

питома теплота випаровування $L = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Питома теплоємність $c = 4186$ Дж/(кг · °С).

8.7 Знайти кількість теплоти Q , яку необхідно надати $m = 0,5$ кг воді, щоб: а) збільшити температуру на $\Delta t = 3$ °С, якщо питома теплоємність води $c = 4186$ Дж/кг · °С; б) щоб збільшити температуру від $t_1 = 10$ °С до $t_2 = 45$ °С?

8.8 Кількість теплоти, що віддається поверхнею шкіри через випаровування поту, дорівнює 2 МДж. Знайти об'єм поту, що випаровується, якщо його густина $\rho = 998,2$ кг/м³, питома теплота пароутворення $L = 2,4 \cdot 10^6$ Дж/кг.

8.9 Під час помірної фізичної активності людина масою $m = 70$ кг потребує 260 ккал/год енергії. З цієї кількості принаймні $Q = 208$ ккал перетворюється в теплоту. Знайти, яке підвищення температури ΔT тіла відбудеться, якщо тепло буде залишатися в організмі. Питома теплоємність тканин тіла $c = 3,5 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °С).

8.10 Припустимо, що товщина тканини між внутрішньою та зовнішньою поверхнями тіла $l = 2$ см, середня площа поверхні, через яку проводить тепло, становить $S = 1,5$ м². Знайти кількість теплоти Q , що віддається шляхом теплопровідності за 6 годин, якщо різниця температур між внутрішньою частиною тіла і шкірою $\Delta t = 2$ °С. Коефіцієнт теплопровідності для тканин організму $k_T = 18 \cdot 10^{-2}$ ккал/(м · год · °С).

8.11 Розрахувати кількість теплоти Q , відведеної від поверхні шкіри за рахунок конвекції в безвітряних погодних умовах ($k_K = 6$ ккал/(м² · год · °С) за 3 години. Площа відкритої поверхні тіла $S = 1,6$ м². Температура повітря $t_1 = 25$ °С, середня температура шкіри $t_2 = 37$ °С.

8.12 Яку кількість теплоти необхідно витратити для нагрівання стерилізатора з інструментами до температури $t_2 = 100$ °С, якщо маса стерилізатора та металеві частини шприца $m_1 = 180$ г, маса скляного циліндра $m_2 = 20$ г і маса води $m_3 = 100$ г? Початкова температура $t_1 = 14$ °С. Стерилізатор і металева частина

виготовлені зі сталі. Питома теплоємність сталі $c_1 = 500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, скла $c_2 = 832 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, води $c_3 = 4200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$.

8.13 Коефіцієнт випромінювання шкіри людини $k_B = 5,1 \cdot 10^{-8} \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{K}^4)$. Знайти кількість теплоти Q , випромінюваної поверхнею тіла людини площею $S = 1,8 \text{ м}^2$ за добу, якщо температура шкіри $t_1 = 36,6 \text{ }^\circ\text{C}$, температура довкілля $t_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

8.14 На ділянку тіла хворого площею $S = 0,1 \text{ м}^2$ накладається лікувальна грязь товщиною $h = 10 \text{ см}$. Кількість теплоти, одержаної хворим, становить $Q_1 = 11200 \text{ Дж}$. Вважати, що 25 % теплоти лікувальної грязі розсіюється у довкілля. Питома теплоємність грязі $c = 200 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, її густина $\rho = 1400 \text{ кг}/\text{м}^3$. Температура тіла $t_2 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$. Визначити температуру лікувальної грязі t_1 .

8.15 Зі шкірних покривів людини, крім поту, постійно відбувається випаровування міжклітинної рідини (у середньому 0,5 л за добу), що одержало назву «невідчутного випаровування». Скільки теплоти витрачає людина за 2 години на це випаровування? Припустимо, що випаровування відбувається за температури $t = 30 \text{ }^\circ\text{C}$. Питома теплота випаровування за цієї температури $L = 2,44 \text{ МДж}/\text{кг}$, а густина міжклітинної рідини $\rho = 998,2 \text{ кг}/\text{м}^3$.

8.16 Визначити, у скільки разів відрізняються кількості випромінюваної теплоти ділянок поверхні тіла людини, що мають температури 34 і 33 $^\circ\text{C}$ відповідно. Температуру довкілля взяти $t_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

8.17 Під час діагностики методом термографії пухлини молочної залози пацієнтці дають випити розчин глюкози. Через деякий час реєструють теплове випромінювання поверхні тіла. Клітини пухлинної тканини більш інтенсивно поглинають глюкозу, внаслідок чого їх тепловипромінювання зростає. На скільки градусів при цьому змінюється температура ділянки шкіри над пухлиною, якщо випромінювання з поверхні зростає на 1 % (у

1,01 раза)? Початкова температура ділянки тіла дорівнює $37\text{ }^\circ\text{C}$. Взяти температуру довкілля такою, що дорівнює $t_2 = 25\text{ }^\circ\text{C}$.

8.18 Розтирання рук приводить до їх розігріву шляхом перетворення роботи в теплову енергію. Розрахувати, на скільки градусів підвищиться температура долонь, якщо людина виконує 20 розтирань руками вперед-назад із силою тертя 40 Н . Шлях, що проходить долоня за один рух, становить $7,5\text{ см}$, а маса тканин, які здійснюють тертя, дорівнює 100 г .

8.19 Калорійність їжі вимірюється шляхом прямої калориметрії. Цей метод полягає в тому, що вимірюється кількість теплоти, виділеної при згорянні. Знайти, скільки кілокалорій на грам маси містить 5 грамів горіхового масла, якщо енергія, виділена під час згоряння, приводить до підвищення температури води масою $0,5\text{ кг}$ на $54,9\text{ }^\circ\text{C}$. Врахувати, що вода знаходиться в алюмінієвій посудині масою $0,1\text{ кг}$.

8.20 За відсутності теплообміну виконання інтенсивних фізичних навантажень може призвести до підвищення температури тіла людини до $40\text{ }^\circ\text{C}$. З якою швидкістю повинна відбуватися тепловіддача організму (відповідь знайти у Дж/с), щоб знизити температуру тіла до $37\text{ }^\circ\text{C}$ за 30 хвилин ? Маса тіла людини дорівнює 80 кг , а питома теплоємність тканин тіла становить $3,5 \cdot 10^3\text{ Дж/(кг} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$.

8.21 Розрахувати швидкість тепловіддачі шляхом теплопровідності, припускаючи, що внутрішня температура тіла людини дорівнює $37\text{ }^\circ\text{C}$, а температура шкіри становить $34\text{ }^\circ\text{C}$. Товщина тканин між внутрішньою та зовнішньою поверхнями тіла 1 см , а площа поверхні тіла дорівнює $1,4\text{ м}^2$.

8.22 Людина в стані спокою вдихає 2 л повітря температурою $37\text{ }^\circ\text{C}$. За один дихальний цикл з поверхні легень випаровується $4 \cdot 10^{-2}\text{ г}$ води. *А.* Знайти, яка кількість теплоти виділяється за один вдих. *Б.* Знайти швидкість тепловіддачі у ватах ($1\text{ Вт} = 1\text{ Дж/с}$), якщо людина робить 18 вдихів за хвилину. *В.* Припускаючи, що температура оточуючого середовища становить $20\text{ }^\circ\text{C}$, знайти

швидкість тепловіддачі, що витрачається на нагрів повітря до температури тіла. *Г.* Знайти загальну швидкість тепловіддачі при диханні. Порівняти одержане значення зі швидкістю обміну речовин в організмі. Зробити висновок, чи є дихання основним механізмом теплообміну в цьому випадку.

8.23 Людина у середньому споживає 3 000 ккал їжі за один день, більша частина з якої витрачається на підтримку сталої температури тіла. Вважаючи, що половина з цієї енергії витрачається на випаровування (у процесі дихання та виділення поту), розрахувати масу випаровуваної води.

8.24 Функцію ізоляції ластоногих виконує товстий шар підшкірного жиру. Більшу частину життя моржі проводять у воді. Скільки теплоти перейде крізь шар жиру товщиною $h_1 = 7$ см і шкіру товщиною $h_2 = 5$ мм за 40 хвилин перебування моржа під водою? Коефіцієнт теплопровідності жиру $k_{т1} = 0,2$ Вт/(м · К), шкіри $k_{т2} = 0,45$ Вт/(м · К), температура води $t_3 = 0$ °С, температура жиру на внутрішній стороні $t_1 = 37$ °С, на зовнішній – $t_2 = 12$ °С. Площа поверхні тіла моржа дорівнює 5 м².

8.25 Припустимо, що людина вкрита з голови до ніг вовняною ковдрою товщиною 2 см. Тепловіддача через ковдру відбувається шляхом теплопровідності зі швидкістю 50 Вт. Визначити різницю температур між шкірою та оточуючим середовищем, якщо площа поверхні тіла дорівнює $1,4$ м².

8.26 Яка кількість теплоти потрібна для сушіння лікарської сировини масою $m = 10$ т, якщо маса готової продукції дорівнювала 80 % від маси до сушіння? Початкова температура сировини $t_1 = 20$ °С, температура в сушарці $t_2 = 80$ °С. За 80 °С питома теплота випаровування води $L = 2,3$ МДж/кг. Для спрощення розрахунків вважати, що все випаровування відбувається при 80 °С. Питома теплоємність сировини $c = 1,51$ кДж/(кг · К).

8.27 Розрахувати швидкість теплообміну шляхом теплопровідності через м'язову тканину товщиною 3 см, якщо площа поверхні тіла становить $1,5$ м², а різниця температур

дорівнює $2\text{ }^{\circ}\text{C}$. Порівняти результат із загальною величиною швидкості теплообміну, що відповідає споживанню їжі, енергетичною цінністю $2\ 400$ ккал за день. Припустити, що людина не виконує ніяких фізичних навантажень.

8.28 Припустимо, що людина масою 75 кг входить до сауни, розігрітої до температури $50\text{ }^{\circ}\text{C}$. *А.* Розрахувати швидкість теплообміну шляхом випромінювання, якщо температура тіла дорівнює $37\text{ }^{\circ}\text{C}$, випромінювальна здатність шкіри становить $0,98$, а площа поверхні тіла дорівнює $1,5\text{ м}^2$. *Б.* Якщо інші види теплообміну збалансовані, знайти, з якою швидкістю буде підвищуватися температура тіла.

8.29 Термографія полягає у вимірюванні теплоти, виділеної з різних ділянок поверхні тіла шляхом випромінювання. Завдяки цьому діагностичному методу можна визначити розподіл температур по поверхні тіла (типова термограма подана на рисунку 8.1, де кожний колір відповідає певному значенню температури). Знайти, на скільки відсотків зміниться швидкість тепловіддачі шляхом випромінювання через ділянку шкіри температурою $34\text{ }^{\circ}\text{C}$ порівняно з ділянкою, що має таку саму площу температурою $36,6\text{ }^{\circ}\text{C}$.

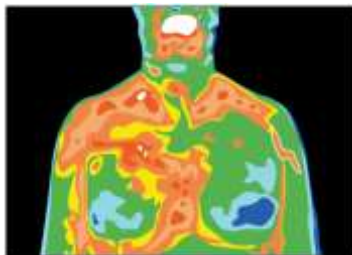


Рисунок 8.1 (до задачі 8.29)

8.30 Відомо, що у процесі дихання теплообмін відбувається шляхом випаровування води з поверхні легень. *А.* Розрахувати максимальну масу випаровуваної води під час вдихання $1,5$ л повітря температурою $37\text{ }^{\circ}\text{C}$ та початковою вологістю $40,0\%$ (припустити, що температура тіла також дорівнює $37\text{ }^{\circ}\text{C}$). *Б.* Скільки джоулів енергії треба витратити на випаровування такої кількості води? *В.* Яка швидкість тепловіддачі у ватах при диханні, якщо у стані спокою людина робить 10 вдихів за хвилину?

8.31 Не всі ділянки шкіри однаково відводять з організму тепло. У людини особливу роль у теплопровідності відіграють кисті рук та

ступні ніг. У деяких експериментах показано, що крізь поверхню кистей, що займає 6 % від загальної площі поверхні тіла, може відбуватися до 80 % основного обміну. Визначити коефіцієнт теплопровідності шкіри товщиною $l = 2$ мм на кистях рук, якщо різниця температур на зовнішній і внутрішній поверхнях $\Delta T = 0,3$ К, загальна площа поверхні тіла $S = 2$ м², а енергія основного обміну $Q = 7,78$ МДж.

8.32 Знайти, на скільки градусів збільшиться температура тіла людини масою 80 кг за добу, якщо її добовий раціон споживання їжі становить 2 500 ккал. Припустити, що 95 % спожитої енергії видаляється з тіла у вигляді теплоти. Оцінити, чи є одержаний результат реальним. Яке припущення є хибним?

8.33 Кісткову тканину консервують, як правило, за температури $t_1 = -40$ °С, решту тканин (шкіра, сухожилля, рогівки очей, нервів, судин) за температури $t_2 = -196$ °С. Виразити значення цих температур за шкалою: а) Кельвіна; б) Фаренгейта. Які явища у живому організмі спостерігаються при $t_2 = -196$ °С?

8.34 Під час фізичних навантажень теплопровідність живих тканин може збільшитися від $k_1 = 6$ ккал/(м · год · °С) до $k_2 = 130$ ккал/(м · год · °С). У скільки разів збільшиться їх тепловіддача?

8.35 Яку кількість теплоти за добу витрачає людина завдяки теплопровідності крізь шкіру, якщо вважати, що коефіцієнт теплопровідності $k_T = 0,25$ Дж/(м · с · К)? Площа поверхні тіла $S = 1,8$ м², товщина шкіри $l = 2$ мм, а різниці температур на зовнішній і внутрішній поверхнях $\Delta T = 0,1$ К.

8.36 На якій глибині температура тканини підвищується на $\Delta t = 4$ °С при опроміненні її ультразвуком інтенсивністю $I = 1$ Вт/см², якщо теплопровідність тканини $k_T = 1,3$ Дж/(м · с · К)? Вважати, що на нагрівання витрачається 40 % енергії ультразвуку.

8.37 У кріохірургії стоматологи найчастіше застосовують такі апарати: а) азотний апарат КА-1 з температурою зонда $T_1 = 113$ К, інтенсивністю теплового потоку $I_1 = 103$ кВт/м²; б) КАО-2 з

температурою зонда $T_2 = 103 \text{ K}$ і інтенсивністю теплового потоку $I_2 = 60 \text{ кВт/м}^2$; в) фреоновий апарат з температурою зонда $T_3 = 248 \text{ K}$, інтенсивністю теплового потоку $I_3 = 16,5 \text{ кВт/м}^2$. Знайти градієнти температур на язичку, які виникають під час застосування цих апаратів. Коефіцієнт теплопровідності $k_T = 0,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$ є однаковим для всіх випадків.

8.38 Полярник носить теплий одяг товщиною $l_1 = 2,5 \text{ см}$, загальною площею $S = 1,8 \text{ м}^2$. Температура на зовнішній поверхні одягу $t_1 = -40 \text{ }^\circ\text{C}$, а на внутрішній, яка прилягає до тіла, $t_2 = +35 \text{ }^\circ\text{C}$. Знайти тепловий потік Φ крізь одяг за рахунок теплопровідності, якщо: а) одяг сухий, її коефіцієнт теплопровідності $k_{T1} = 0,025 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{K)}$; б) одяг став вологим, її коефіцієнт теплопровідності $k_{T2} = 0,58 \text{ Дж/(м} \cdot \text{с} \cdot \text{K)}$ і одяг при цьому ущільнився до $l_2 = 1 \text{ см}$.

8.39 У проктології заморожування тканин здійснюється шляхом аплікації наконечника кріоапарата впродовж $t = 5 \text{ хв}$. Зона проморожування тканин поширюється на $l = 1,5 \text{ см}$ від поверхні наконечника. Яка кількість теплоти проходить крізь одиничну поверхню за один сеанс? Наконечники цих апаратів мають температуру в контакт з тканинами $t_2 = -183 \text{ }^\circ\text{C}$, температура тканин $t_1 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$. Коефіцієнт теплопровідності $k_T = 0,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$.

8.40 Визначити коефіцієнт теплопровідності м'язів k_T , якщо крізь кожний 1 см^2 їх поверхні за годину проходить $Q = 96 \text{ Дж}$ тепла. Зовнішня поверхня м'язів має температуру $t_1 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$, внутрішня $t_2 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$, товщина м'язів $l = 4 \text{ мм}$.

8.41 У педіатрії патологічні утворення заморожуються з поверхні у глибину контактним способом (аплікацією холодоагенту у вигляді сформованої грудочки з рівною поверхнею – «сухий лід» за $t_2 = -79,5 \text{ }^\circ\text{C}$ або спеціальним апаратом). Температура тканин $t_1 = 37 \text{ }^\circ\text{C}$. Тривалість аплікації становить 30 с на шкірі й удвічі менше – на слизових оболонках. Знайти відповідні густини теплових потоків. Коефіцієнт теплопровідності шкіри $k_{T1} = 0,3 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$; слизових оболонок $k_{T2} = 0,5 \text{ Вт/(м} \cdot \text{K)}$; глибина проморожування в обох випадках $l = 0,5 \text{ см}$.

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ БАЛАНС ОРГАНІЗМУ

📖 Теоретична частина

1 Площа поверхні тіла S , м²:

$$S = 0,202m^{0,425}H^{0,725},$$

де m – маса тіла, кг; H – зріст людини, м.

2 Перший закон термодинаміки

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A.$$

🔗 Кількість теплоти, переданої системі ΔQ витрачається на зміну внутрішньої енергії системи ΔU та виконання системою роботи ΔA .

3 Робота A , Дж:

$$A = F\Delta x,$$

де A – фізична величина, що визначає енергетичні витрати під час переміщення фізичного тіла чи його деформації, Дж; F – сила, що діє на тіло, Н; Δx – переміщення тіла, м.

4 Механічна робота A , Дж:

$$A = mgh,$$

де m – маса тіла, кг; $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – стала вільного падіння; Δh – зміна висоти, м.

5 Коефіцієнт корисної дії η :

$$\eta = \frac{A}{Q} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де Q – кількість переданої теплоти системі, Дж; A – робота, виконана системою, Дж; Q_1 – кількість наданої теплоти системі, Дж; Q_2 – кількість відданої теплоти, Дж.

6 **Теплота згоряння Q , Дж:**

$$Q = m\lambda,$$

де m – маса тіла, кг; λ – питома теплота згоряння, Дж/кг.

7 **Дихальний коефіцієнт ДК:**

$$\text{ДК} = V_{CO_2} / V_{O_2},$$

де V_{CO_2} – об'єм виділеного в процесі дихання CO_2 ; V_{O_2} – об'єм спожитого за той самий час кисню.

8 **Регулювання ваги тіла**

Під час дієти, позбавленої необхідної кількості їжі, організм «перебудовується» та починає використовувати внутрішні запаси. Так, калорійний коефіцієнт для вуглеводів і білків $K_1 = 17,2$ кДж/г, для жирів $K_2 = 38,9$ кДж/г.


$$E = E_{\text{ф. а}} St,$$

де E – енергія, витрачена людиною, Дж; $E_{\text{ф. а}}$ – енерговитрати організму, Дж/($m^2 \cdot c$); S – поверхня тіла, m^2 ; t – час, с.

Таблиця 9.1 – Енерговитрати людини залежно від фізичної активності

Вид фізичної активності	Енерговитрати організму, ккал/($m^2 \cdot \text{год}$)
Сон	35
Положення лежачи без сну	40
Сидіння	50
Положення стоячи	60
Повільна ходьба	140
Біг	600
Фізична робота середньої важкості	150
Їзда на велосипеді	250

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

9.1 Щодня зі споживаною їжею працівник фізичної праці одержує приблизно $Q = 17$ МДж. Упродовж дня він виконує роботу $A = 10$ МДж. Яка частина енергії η , що надходить з їжею, перетворюється на корисну роботу?

Дано:

$$Q = 17 \text{ МДж} = 17 \cdot 10^6 \text{ Дж,}$$

$$A = 10 \text{ МДж} = 10 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Знайти:

$$\eta - ?$$

Відповідь: $\eta = 0,59$.

Розв'язання:

$$\eta = \frac{A}{Q},$$

$$\eta = \frac{10 \cdot 10^6}{17 \cdot 10^6} = 0,59,$$

$$[\eta] = \frac{\text{Дж}}{\text{Дж}} = 1.$$

9.2 Щодня людина одержує з їжею $Q = 3\,300$ ккал. Упродовж робочого дня людина піднімає ящики масою $m = 20$ кг із рівня землі на платформу, що перебуває на висоті $h = 1,5$ м над землею. Людина підіймає ці ящики кожні $t_1 = 10$ с упродовж робочого дня ($t = 8$ год). Яка частка одержаної нею енергії необхідна для здійснення роботи A / Q ?

Дано:

$$Q = 3\,300 \text{ ккал} =$$

$$= 3\,300 \cdot 10^3 \text{ кал,}$$

$$m = 20 \text{ кг,}$$

$$h = 1,5 \text{ м,}$$

$$t_1 = 10 \text{ с,}$$

Розв'язання:

$$1 \text{ кал} = 4,18 \text{ Дж, тоді}$$

$$3\,300 \cdot 10^3 \text{ кал} = 3\,300 \cdot 10^3 \cdot 4,18 \text{ Дж;}$$

$$Q = 13,794 \cdot 10^6 \text{ Дж,}$$

$$A = mghN,$$

де $N = \frac{t}{t_1}$ – кількість піднімань ящиків,

$$t = 8 \text{ год} = 8 \cdot 3 \text{ 600 с.}$$

що людина виконує за робочий день.

Тоді

Знайти:

$$A = mghN = mgh \frac{t}{t_1},$$

$$\frac{A}{Q} = ?$$

$$\frac{A}{Q} = \frac{mght}{Qt_1},$$

$$\frac{A}{Q} = \frac{20 \cdot 9,8 \cdot 1,5 \cdot 8 \cdot 3 \text{ 600}}{13,794 \cdot 10^6 \cdot 10} = 0,061 = 6,1 \%,$$

$$\left[\frac{A}{Q} \right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{\text{с}^2 \cdot \text{Дж} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Дж}} = 1.$$

Відповідь: $\frac{A}{Q} = 6,1 \%$.

9.3 За деякими оцінюваннями плавець на дистанції витрачає $Q = 240$ кДж енергії за 1 хвилину, $t = 1$ хв. При цьому лише чверть цієї енергії витрачається на механічну роботу ($A = 0,25Q$) його рук і ніг. Чому дорівнює середня сила F , що перешкоджає переміщенню плавця, якщо за одну хвилину він пропливає $l = 100$ м?

Дано:

Розв'язання:

$$Q = 240 \text{ кДж} = 24 \cdot 10^4 \text{ Дж,}$$

$$A = F\Delta x = Fl, \text{ звідси}$$

$$t = 1 \text{ хв} = 60 \text{ с,}$$

$$F = \frac{A}{l} = \frac{0,25Q}{l},$$

$$A = 0,25Q,$$

$$F = \frac{0,25 \cdot 24 \cdot 10^4}{100} = 600 \text{ (Н)},$$

$$l = 100 \text{ м.}$$

$$[F] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{м}} = \text{Н}.$$

Знайти:

$$F = ?$$

Відповідь: $F = 600$ Н.

9.4 Знайти, яку енергію витрачає людина масою $m = 70$ кг на:
а) метаболічні процеси впродовж 8-годинного сну. Припустимо,

що висота людини $H = 160$ см; б) знайти, яку енергію вона витратить на 30-хвилинну ранкову пробіжку.

Дано:

$$m = 70 \text{ кг,}$$

$$t_c = 8 \text{ год,}$$

$$t_6 = 30 \text{ хв,}$$

$$H = 160 \text{ см} = 1,60 \text{ м,}$$

$$E_c = 35 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{год}),$$

$$E_6 = 600 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{год}).$$

Знайти:

$$E_1 - ?$$

$$E_2 - ?$$

Розв'язання:

$$E = E_{\text{ф. а}} St, \quad (1)$$

де $E_{\text{ф. а}}$ – енерговитрати людини

залежно від фізичної активності,

$$S = 0,202 m^{0,425} H^{0,725}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$E = E_{\text{ф. а}} \cdot 0,202 m^{0,425} H^{0,725} t,$$

$$E_1 = E_c \cdot 0,202 m^{0,425} H^{0,725} t_c,$$

$$E_2 = E_6 \cdot 0,202 m^{0,425} H^{0,725} t_6,$$

$$E_1 = 35 \cdot 0,202 \cdot 70^{0,425} 1,6^{0,725} \cdot 8 =$$

$$= 483,82 \text{ ккал} = 2,02 \text{ (МДж)},$$

$$E_2 = 600 \cdot 0,202 \cdot 70^{0,425} 1,6^{0,725} \cdot 0,5 =$$

$$= 518,38 \text{ ккал} = 2,17 \text{ (МДж)},$$

$$[E] = \frac{\text{ккал} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{год}}{\text{м}^2 \cdot \text{год}} = \text{ккал}.$$

Відповідь: $E_1 = 2,02$ МДж, $E_2 = 2,17$ МДж.

9.5 Харчовий добовий раціон людини, яка займається розумовою або легкою фізичною працею, становить 450 г вуглеводів, 100 г жирів і 120 г білків. Яка кількість енергії виділяється в організмі при окисненні їжі? Вважати, що засвоюється 90 % харчових продуктів.

Дано:

$$m_{\text{в}} = 450 \text{ г} = 0,45 \text{ кг,}$$

$$m_{\text{ж}} = 100 \text{ г} = 0,1 \text{ кг,}$$

Розв'язання:

$$E = k_{\text{в}} m_{\text{в}} + k_{\text{б}} m_{\text{б}} + k_{\text{ж}} m_{\text{ж}},$$

$$E = 10^6 (17,2 \cdot 0,45 + 17,2 \cdot 0,12 + 38,9 \cdot 0,1) =$$

$$m_{\sigma} = 120 \text{ г} = 0,12 \text{ кг}, \quad = 13,694 \cdot 10^6 (\text{Дж}).$$

$$k_{\text{в}, \sigma} = 17,2 \text{ кДж/г} = [E] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{кг}} = \text{Дж}.$$

$$= 17,2 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, \quad \Delta U = \eta E - \text{енергія, засвоєна організмом},$$

$$k_{\text{ж}} = 38,9 \text{ кДж/г} = \Delta U = 0,9 \cdot 13,694 \cdot 10^6 = 12,324 \text{ (МДж)},$$

$$= 38,9 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, \quad Q = (1 - \eta)E - \text{енергія, виділена у}$$

$$\eta = 90 \%. \quad \text{вигляді тепла},$$

$$\quad \quad \quad Q = 0,1 \cdot 13,694 \cdot 10^6 = 1,369 \text{ (МДж)}.$$

Знайти:

$Q - ?$

Відповідь: $Q = 1,369 \text{ МДж}$.

✍ Задачі для самостійного виконання

9.6 Знайти коефіцієнт корисної дії η м'яза жаби, якщо в ізотонічному режимі роботи м'яза піднімається вантаж $m = 40 \text{ г}$ на висоту $h = 10 \text{ см}$ і при цьому виділяється теплота $Q = 48 \text{ МДж}$.

9.7 Щодня людина одержує з їжею $Q = 3\,300 \text{ ккал}$. На виконання роботи вона витрачає 10 % одержаної нею енергії. Впродовж робочого дня людина піднімає ящики масою $m = 50 \text{ кг}$ з рівня землі на платформу, що перебуває на висоті $h = 1 \text{ м}$ над землею. Людина підіймає ці ящики кожні $t_1 = 20 \text{ с}$ упродовж робочого дня. Визначити, скільки годин працює людина.

9.8 За деякими оцінюваннями плавець на дистанції витрачає $Q = 1\,200 \text{ кДж}$ енергії за 5 хвилин, $t = 5 \text{ хв}$. При цьому лише чверть цієї енергії витрачається на механічну роботу ($A = 0,25Q$) його рук і ніг. Чому дорівнює середня сила F , що перешкоджає переміщенню плавця, якщо за одну хвилину він пропливає $l = 90 \text{ м}$?

9.9 З'ївши сніданок, студент одержав з їжею $2\,000 \text{ ккал}$. Він хоче витратити одержані калорії в спортзалі, підіймаючи

50-кілограмову штангу на висоту 2 м. Припустимо, що ККД м'язів становить 20 %. А. Скільки разів потрібно підняти штангу, щоб витратити повністю одержану енергію? Припустимо, що студент не витрачає енергії при опусканні штанги на підлогу. Б. Припустивши, що він підіймає штангу кожні 5 секунд, розрахувати, скільки часу йому буде потрібно.

9.10 Знайти, яка енергія необхідна спортсмену масою $m = 80$ кг для виконання стрибків на висоту $h = 70$ см упродовж $t = 15$ хвилин із частотою $\vartheta = 1$ стрибок за секунду. Вважати, що коефіцієнт корисної дії м'язів $\eta = 20$ %.

9.11 Знайти, яку енергію витрачає людина масою $m = 56$ кг на метаболічні процеси впродовж 2 годин: а) під час прогулянки пішки повільною ходою; б) при їзді на велосипеді. Зріст людини $H = 165$ см.

9.12 Під час калорійної дієти використовується крижана вода. Коли випиваєте цю воду, ваш організм повинен виділити стільки енергії, щоб нагріти її до температури людського тіла (37°C). Скільки крижаної води треба пити щодня, щоб компенсувати одержані з їжею 1 000 калорій? Питома теплоємність води $4\,200$ Дж/(кг · К).

9.13 Припустимо, що людина масою $m = 60$ кг та висотою $H = 140$ см зменшує тривалість сну на одну годину в день. Цю екстрагодину вона вирішує витратити на читання (фізична діяльність – сидіння). Знайти, як зменшиться маса тіла людини впродовж року, припустивши що раціон споживання їжі залишається незмінним. Взяти до уваги, що при згорянні жирової тканини виділяється 9,3 ккал на 1 грам маси.

9.14 Розрахувати енергію, одержану студентом, якщо: а) випити чашку чаю масою $m = 200$ г, нагрітого до температури $t = 46,5^\circ\text{C}$ ($t_{\text{тіла}} = 36,5^\circ\text{C}$); б) якщо випити чай разом із бутербродом із маслом (маса хліба $m_1 = 100$ г, масла $m_2 = 20$ г, питома теплота згоряння хліба $\lambda_1 = 9\,260\,000$ Дж/кг, а масла – $\lambda_2 = 32\,690\,000$ Дж/кг).

9.15 Розрахувати, впродовж якого часу людина може вижити без споживання їжі, але при належному питті. Для розрахунків припустити, що: а) початкова маса тіла 70 кг та площа тіла $1,7 \text{ м}^2$; б) поріг виживання досягається під час втрати половини маси тіла; в) спочатку тіло мало 5 кг жирової тканини; г) упродовж голодування людина спить 8 годин на добу, а решту часу не виконує ніяких фізичних навантажень ($45 \text{ ккал}/(\text{м}^2 \cdot \text{год})$).

9.16 Для зменшення ваги людина знижує свій денний раціон від 3 700 ккал на добу до 2 000 ккал на добу. Як довго треба бути на дієті, щоб зменшити масу тіла на 10 кг? Альтернативним способом зниження ваги є підвищення фізичної активності. Розрахувати, скільки годин їзди на велосипеді потрібно, щоб скинути цю вагу (площа тіла $1,8 \text{ м}^2$). За скільки днів зменшиться вага, якщо займатися велоспортом одну годину на день?

9.17 Скільки корисної роботи може бути одержано під час травлення $\nu = 1$ моль глюкози ($\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$), якщо припустити, що тіло людини працює як теплова машина $\eta = 30\%$? Питома теплота згоряння $\lambda = 15,8 \text{ МДж/кг}$.

9.18 При непрямій калориметрії енергетичні витрати людини за 1 годину становили $Q = 0,84 \text{ МДж}$. Який об'єм кисню вона вдихнула, якщо відомо, що у повітрі видиху міститься 13 % кисню та 7 % вуглекислого газу?

9.19 Людина масою 75 кг підіймається сходами на висоту 2,5 метра. Знайти, яку роботу вона при цьому виконує.

9.20 А. Розрахувати середню корисну вихідну потужність, розвинену людиною, під час виконання фізичної роботи $6 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ упродовж 8 годин. Б. Який час потрібний людині, щоб підняти 2 000 кг цегли на платформу висотою 1,5 м, якщо вона буде працювати з тією самою потужністю?

9.21 Відомо, що людина масою 75 кг та зростом 180 см, яка в нормі потребує 12 МДж енергії на добу, буде одержувати з їжею 13 МДж енергії, то вона буде стабільно набирати зайву вагу. Розрахувати, скільки годин їзди на велосипеді впродовж кожного дня потрібно, щоб не набирати зайвої ваги.

9.22 А. Розрахувати, яку вихідну потужність розвиває спринтер масою 70 кг, який розганяється з місця зі швидкістю 10 м/с за час 3 с. Б. Знаючи величину потужності, як ви думаєте, чи може добре тренований атлет повторювати такі навантаження впродовж тривалого проміжку часу?

9.23 Розрахувати потужність у ватах та кінських силах¹⁾, що розвиває штовхальник ядра, якщо йому необхідно 1,2 секунди, щоб прискорити снаряд масою 7,27 кг зі стану спокою до швидкості 14 м/с при одночасному його піднятті на висоту 0,8 м.

9.24 Обчислити роботу, яку виконує людина масою 85 кг, штовхаючи ящик на висоту 4 м вгору по нахиленій поверхні. Кут нахилу поверхні становить 20° з горизонталлю (рис. 9.1). Людина рухається з постійною швидкістю та прикладає до ящика силу 500 Н у напрямку, паралельному поверхні руху.

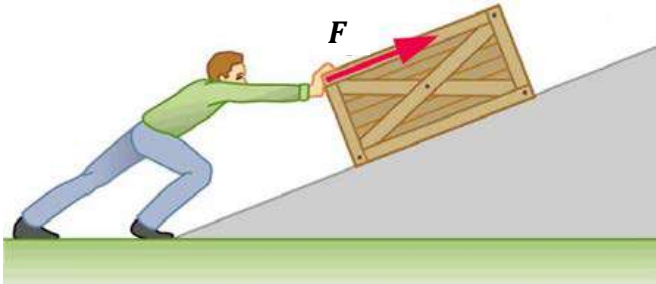


Рисунок 9.1 (до задачі 9.24)

9.25 Одержана з їжею енергія, що не витрачається на роботу або тепловіддачу, відкладається в організмі у вигляді жирової тканини. Знайти, скільки грамів жирової тканини утвориться в тілі впродовж одного дня при споживанні 10 МДж енергії з їжею, якщо людина фізично неактивна: лише сидить впродовж 16 годин і спить 8 годин, що залишилися. Взяти площу поверхні тіла $1,8 \text{ м}^2$.

9.26 А. Знайти коефіцієнт корисної дії професора, який на виконання розумової роботи витрачає $2,1 \cdot 10^5$ Дж енергії, а з їжею

¹⁾ 1 кінська сила = 746 Вт.

він одержує 2 500 ккал енергії. Б. Скільки кілокалорій їжі необхідно спортсмену, який виконує таку саму роботу за величиною енергії з коефіцієнтом корисною дії 20 %?

9.27 Використовуючи дані з таблиці 9.1, розрахувати, яка енергія необхідна студенту масою 70 кг та зростом 170 см упродовж одного дня, якщо він спить 7 годин, ходить пішки 2 години, сидить на заняттях 4 години, їздить на велосипеді 2 години, навчається 6 годин та виконує фізичну роботу середньої важкості впродовж 3 годин (навчання вважати як вид фізичної діяльності – сидіння).

9.28 А. Використовуючи рисунок 9.2, розрахувати, з якою силою тіло жінки діє на підлогу при виконанні віджимань зі сталою швидкістю. Б. Яку роботу вона виконує, якщо під час виконання вправи її центр ваги підіймається на 0,24 м? В. Розрахувати корисну потужність, якщо вона виконує 25 віджимань за 1 хвилину (корисною вважати роботу, виконану як при опусканні, так і підйманні центра ваги).

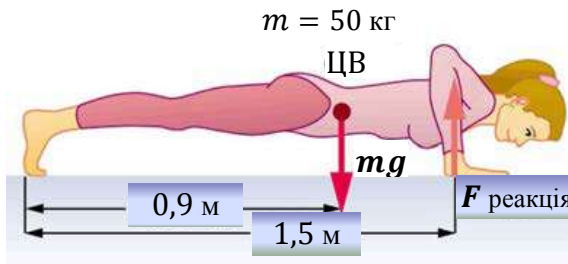


Рисунок 9.2 (до задачі 9.28)

9.29 Розрахувати енергію, витрачену спортсменкою масою 55 кг при виконанні 50 глибоких присідань, якщо при цьому її центр ваги опускається та підіймається на 0,4 м. Взяти до уваги, що робота виконується в обох напрямках як при підйманні, так і присіданні. Припустимо, що коефіцієнт корисної дії м'язів становить 20 %. Розрахувати потужність, якщо вона виконує вправи впродовж 3 хвилин.

9.30 Лижник масою 75 кг підіймається з постійною швидкістю вгору під кутом 3° зі швидкістю 2 м/с проти зустрічного вітру. Сила опору повітря становить 25 Н. Знайти, яку роботу він виконує проти сил опору повітря та гравітації.

9.31 Плавець розвиває силу 80 Н при кожному ударному русі руки по воді (рис. 9.3). Довжина змаху рукою становить 1,8 м. *А.* Розрахувати роботу, яку виконує плавець під час кожного руху рукою. *Б.* Знайти потужність, якщо він виконує 120 змахів-гребків за хвилину.

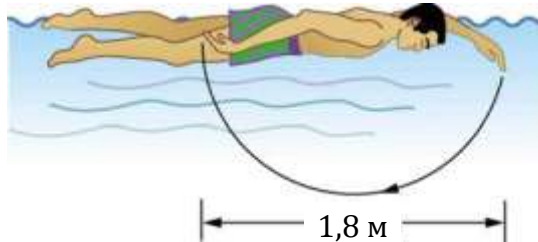


Рисунок 9.3 (до задачі 9.31)

9.32 Відомо, що під час метаболізму жирової тканини виділяється 9,3 ккал енергії на кожен грам. Реклама велотренажера стверджує, що ви можете втратити 0,5 кг жиру за день, лише займаючись дві години в день на їх тренажері. *А.* Розрахувати, скільком ккал відповідає метаболізм 0,5 кг жирової тканини. *Б.* Розрахувати енергію, виділену в організмі за 1 хвилину, ккал/хв за швидкості метаболізму 0,5 кг за 2 години. *В.* Враховуючи одержані результати, зробити висновок, чи є заява рекламодавця реальною.

9.33 Баскетболіст масою 105 кг присідає на 0,4 м, готуючись до стрибка. Відштовхуючись від підлоги, він підстрибує на 0,95 м вище за свою висоту у стоячому положенні. *А.* Розрахувати, з якою початковою швидкістю він відштовхується від підлоги. *Б.* З якою силою він діє на підлогу? *В.* Яку потужність він розвиває в процесі стрибка?

9.34 Людина піднімає 15-кілограмову гирю з підлоги на висоту витягнутої руки (загальна висота підймання 2 м). Скільки разів

вона повинна виконати таку вправу, щоб втратити 0,5 кг жиру? Вважати, що ефективність перетворення метаболічної енергії у механічну дорівнює 25 %.

9.35 Жінка масою 50 кг виконує 10 підтягувань на перекладині за хвилину. При кожному підтягуванні її центр ваги піднімається на 0,5 м. Яку роботу (у джоулях) вона виконує впродовж 5 хвилин і які за цей час будуть витрати метаболічної енергії? Враховувати, що ефективність перетворення метаболічної енергії у механічну дорівнює 25 %.

9.36 При високому стрибку людини масою 70 кг висота його центра ваги збільшується на 51 см (при цьому стрибун «зависає» у повітрі на час, що дорівнює 0,25 с). *А.* Яка кінетична енергія стрибуна у момент відриву від землі? *Б.* Скільки хімічної енергії витрачається на один стрибок, якщо вважати, що ефективність м'язового скорочення (ККД) становить 20 % (відповідь дати у джоулях та кілокалоріях). *В.* Яка середня потужність (у ватах та кінських силах), розвинена під час стрибка? *Г.* З якою частотою людина повинна виконувати такі стрибки впродовж 12 годин, щоб збільшити свій метаболічний рівень вдвічі порівняно з основним обміном (основний обмін взяти 1 500 ккал за добу)?

9.37 У магазині продається глазурований шоколадом пончик. На упаковці написано, що він містить 18 г жирів, 29 г вуглеводів і 2 г білка. Маса пончика дорівнює 57 г. Оцінити енергетичну цінність поживних речовин. Яку частку калорій містять жири?

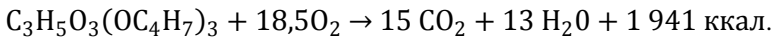
9.38 Людина купує у магазині тістечко, на упаковці якого написано: жири 26 г, вуглеводи 29 г, білки 2 г, загальна маса 64 г. Знайти енергетичну цінність цього тістечка. Порівняти енергетичну цінність поживних речовин тістечка і пончика (задача 9.37).

9.39 Інший пончик тієї самої фірми, що і у задачі 9.37, містить 13 г жирів, 34 г вуглеводів і 2 г білка при загальній масі 60 г. *А.* Порівняти зазначену на упаковці енергетичну цінність цього пончика (260 ккал) з енергетичною цінністю «стандартного пончика» (задача 9.37). *Б.* Визначити, яка частка калорій визначається жирами. *В.* Визначити, який відсоток маси пончика не пов'язаний ні з жирами, ні з білками, ні з вуглеводами.

9.40 Ви споживаєте 465 г деякого продукту. Вам відомо, що 10 % ваги цього продукту становить вода, 5 % – елементи, що не перетравлюються, і 30 % калорій міститься у вигляді жирів. Скільки калорій ви вживаєте, споживаючи цей продукт?

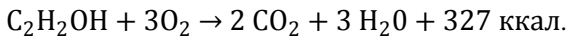
9.41 Ви перебуваєте у барі та хочете спожити салат на 600 ккал. Якщо вважати, що ваша їжа містить 20 % (за масою) води і 5 % клітковини, а частина, що залишилася, містить 50 % вуглеводів, 20 % білків і 30 % жирів, то яку кількість їжі (у грамах) ви повинні спожити?

9.42 Розгляньте окиснення ліпиду трибутирину:



Знайти кількість енергії, виділеної на 1 грам, тепловий еквівалент і дихальний коефіцієнт.

9.43 Розгляньте окиснення етилового спирту:



А. Знайти кількість енергії, виділеної на 1 грам, тепловий еквівалент і дихальний коефіцієнт. Б. Порівняти одержані величини з відповідними величинами для вуглеводів, білків і жирів.

9.44 Закруглюючи коефіцієнти, що входять до рівняння Харіса-Бенедикта, можна записати так:

$$\text{для чоловіків: } \text{ОО} = 66 + 13,7m + 5H - 6,9Y;$$

$$\text{для жінок: } \text{ОО} = 665 + 9,6m + 1,7H - 4,7Y,$$

де ОО – основний обмін, ккал за добу; m – маса тіла, кг; H – зріст, см; Y – вік, роки. Наскільки відрізняються значення основного обміну, що відповідають цим формулам, для 25-річного чоловіка зростом 6 футів і масою 200 фунтів та 50-річної жінки зростом 5 футів і масою 125 фунтів? (1 фут = 0,305 м; 1 фунт = 0,454 кг)?

БІОФІЗИКА МЕМБРАННИХ ПРОЦЕСІВ

📖 Теоретична частина

1 **☞ Концентрація** (одиниці вимірювань моль/м³ або кг/м³) – відношення кількості частинок компонента системи (суміші, розчину, стопу), його кількості речовини чи маси (масова концентрація) до об'єму системи:

$$C = \frac{N}{V} = \frac{n}{V} = \frac{m}{V},$$

де N – кількість частинок компонента системи; n – кількість речовини компонента системи, моль; m – маса частинок, кг; V – об'єм системи, м³.

2 **☞ Дифузія** – процес взаємного проникнення молекул або атомів однієї речовини поміж молекул або атомів іншої, що зазвичай приводить до вирівнювання їх концентрацій у всьому займаному об'ємі.

3 **Рівняння дифузії (рівняння Фіка)**

$$J = -D \frac{dC}{dx},$$

де J – густина потоку, моль/(м² · с); D – коефіцієнт дифузії, м²/с; $\frac{dC}{dx}$ – градієнт концентрації, моль/м⁴.

4 **☞ Густина потоку речовини** – це величина, що чисельно дорівнює кількості речовини Δn , моль, перенесеної за одиницю часу Δt , с, через одиницю площі поверхні S , м², перпендикулярної до напрямку перенесення,

$$J = \frac{\Delta n}{\Delta t \cdot S}.$$

5 **Рівняння Фіка при дифузії крізь біологічну мембрану**

$$J = p(C_{\text{вн}} - C_{\text{зн}}),$$

де J – густина потоку речовини, моль/(м² · с); $C_{\text{вн}}$ та $C_{\text{зн}}$ – концентрації частинок всередині та поза клітиною відповідно, моль/м³; p – коефіцієнт проникності, м/с.

6 Коефіцієнт проникності p , м/с

$$p = \frac{Dk}{d},$$

де D – коефіцієнт дифузії, м²/с; k – коефіцієнт розподілу речовини (частинок) між мембраною і довкіллям; d – товщина мембрани, м.

7 Додатковий осмотичний тиск P , Дж, що для малих молярних концентрацій C визначають за законом Вант–Гоффа

$$P = (\alpha + I)CRT,$$

де α – ступінь дисоціації розчиненої речовини; I – ізотонічний коефіцієнт; $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – газова стала; T – абсолютна температура, К; C – концентрація розчиненої речовини, моль/л (молярна концентрація може бути замінена на моляльну, моль/кг).

☞ Дифузія розчинника через напівпроникну мембрану (**явище осмосу**) відтворює додатковий осмотичний тиск, який для малих молярних концентрацій C визначають за законом Вант–Гоффа. **Онкотичний тиск** є складовою осмотичного тиску і виникає, якщо у розчині наявні білки.

8 Робота під час дифузії A , Дж,

$$A = \nu RT \ln\left(\frac{C_1}{C_2}\right),$$

де $\nu = \frac{m}{M}$ – кількість речовини, перенесеної від ділянки 1 до ділянки 2, моль; $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – газова стала; T – абсолютна температура, К; C – концентрація речовини, моль/л.

9 Перенесення маси при дифузії m , кг:

$$m = -D \frac{\Delta\rho}{\Delta x} St,$$

де D – коефіцієнт дифузії, $\text{м}^2/\text{с}$; $\frac{\Delta\rho}{\Delta x}$ – градієнт густини, $\text{кг}/\text{м}^4$;
 S – площа, м^2 ; t – час, с.

10 Середнє значення квадрата зміщення молекули за час τ

$$\langle l^2 \rangle = 2D\tau.$$

11 Опір провідника струму R , Ом:

$$R = \frac{\rho_{\text{п}} l}{S},$$

де $\rho_{\text{п}}$ – питомий опір провідника струму, Ом \cdot м; l – довжина провідника, м; S – площа поперечного перерізу, м^2 .

12 Електричний заряд на мембрані q , Кл:

$$q = C \Delta\varphi_{\text{м}},$$

де C – електроємність мембрани, Ф; $\Delta\varphi_{\text{м}}$ – мембранний потенціал, В.

13 Електроємність мембрани C , Ф:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де ε – діелектрична проникність мембрани;
 $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична стала; $S = 4\pi r^2$ – площа, м^2 , сферичної мембрани радіусом r ; d – товщина мембрани, м.

14 Сила, що діє на заряд в електричному полі F , Н:

$$F = qE,$$

де q – заряд, Кл; E – напруженість електричного поля, В/м.

15 Напруженість електричного поля на мембрані E , В/м:

$$E = \frac{\Delta\varphi_{\text{м}}}{d},$$

де $\Delta\varphi_{\text{м}}$ – мембранний потенціал, В; d – товщина мембрани, м.

16 Сила струму I , А:

$$I = \frac{q}{t},$$

де q – заряд, Кл, що проходить через провідник за одиницю часу t , с.

17 **Густина струму j , А/м²:**

$$j = \frac{I}{S},$$

де I – сила струму, А; S – площа поперечного перерізу провідника, м².

18 **Мембранні потенціали, В.**

✍ **Мембранним потенціалом** називають різницю потенціалів між внутрішньою і зовнішньою поверхнями мембрани.

Якщо концентрація іонів всередині клітини $C_{\text{вн}}$ відрізняється від концентрації іонів зовні $C_{\text{зн}}$, тоді виникає потік заряджених частинок через мембрану.

Якщо мембрана проникна лише для одного виду іонів, то різниця потенціалів $\Delta\varphi_{\text{м}}$, В, (**формула Нернста**)

$$\Delta\varphi_{\text{м}} = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_{\text{зн}}}{C_{\text{вн}}},$$

де $R = 8,31$ Дж/(моль · К) – газова стала; T – температура дифузії, К; $F = 96\,500$ Кл/моль – стала Фарадея; Z – електричний заряд іона ($Z = 1$ для K^+ , Na^+ ; $Z = -1$ для Cl^-).

Якщо мембрана проникна до трьох основних іонів внутрішньоклітинної та позаклітинної рідин, тоді

$$\Delta\varphi_{\text{м}} = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{p_K C[K_{\text{зн}}] + p_{Na} C[Na_{\text{зн}}] + p_{Cl} C[Cl_{\text{вн}}]}{p_K C[K_{\text{вн}}] + p_{Na} C[Na_{\text{вн}}] + p_{Cl} C[Cl_{\text{зн}}]},$$

де p_K , p_{Na} , p_{Cl} – проникності мембрани до відповідних іонів; $C[K_{\text{вн}}]$, $C[Na_{\text{вн}}]$, $C[Cl_{\text{вн}}]$ – концентрації відповідних іонів всередині клітини; $C[K_{\text{зн}}]$, $C[Na_{\text{зн}}]$, $C[Cl_{\text{зн}}]$ – концентрації відповідних іонів зовні клітини, моль/м³.


19 **Співвідношення проникності мембрани в стані спокою**

$$p_K : p_{Na} : p_{Cl} = 1 : 0,04 : 0,45.$$

20 **Співвідношення проникності мембрани в стані збудження**

$$p_K : p_{Na} : p_{Cl} = 1 : 20 : 0,45.$$

 Практична частина

 Приклади розв'язання задач

10.1 Градієнт концентрації іонів на клітинній мембрані становить $\frac{\Delta C}{\Delta x} = 2 \cdot 10^{10}$ моль/м⁴, коефіцієнт дифузії $D = 2 \cdot 10^{-10}$ м²/с. Знайти швидкість потоку іонів $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ крізь мембрану. Мембрану вважати сферичною з радіусом $r = 8$ мкм.

Дано:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = 2 \cdot 10^{10} \text{ моль/м}^4,$$

$$D = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}^2/\text{с},$$

$$r = 8 \text{ мкм} = 8 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Знайти:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} - ?$$

Розв'язання:

Запишемо рівняння Фіка

$$J = -D \frac{\Delta C}{\Delta x}, \quad (1)$$

$$J = \frac{\Delta n}{\Delta t \cdot S}. \quad (2)$$

Прирівняємо (1) до (2), одержимо

$$\frac{\Delta n}{\Delta t \cdot S} = \frac{D \cdot \Delta C}{\Delta x}, \text{ звідси } \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{D \cdot \Delta C \cdot S}{\Delta x}, \text{ де}$$

$S = 4\pi r^2$ – площа сфери, радіусом r ,

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{D \cdot \Delta C \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2}{\Delta x},$$

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = 2 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^{10} \cdot 4 \cdot 3,14 \times$$

$$\times (8 \cdot 10^{-6})^2 = 3,215 \cdot 10^{-9} \text{ (моль/с)},$$

$$\left[\frac{\Delta n}{\Delta t} \right] = \frac{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{м}^2}{\text{с} \cdot \text{м}^4} = \frac{\text{моль}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $\frac{\Delta n}{\Delta t} = 3,215 \cdot 10^{-9}$ моль/с.

10.2 Чому дорівнює напруженість E електричного поля на мембрані в стані спокою, якщо концентрація іонів калію K^+ всередині клітини $C_{\text{вн}} = 125$ ммоль/л, а зовні $C_{\text{зн}} = 2,5$ ммоль/л. Товщина мембрани $d = 8$ нм, а температура дифузії $T = 300$ К.

Знайти питомий електричний заряд q на мембрані, якщо її питома електроємність $c = 1 \text{ мкФ/см}^2$.

Дано:

$$T = 300 \text{ К,}$$

$$C_{\text{вн}} = 125 \text{ ммоль/л} =$$

$$= 125 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-3}} \text{ моль/м}^3,$$

$$C_{\text{зн}} = 2,5 \text{ ммоль/л} =$$

$$= 2,5 \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-3}} \text{ моль/м}^3,$$

$$c_{\text{пит}} = 1 \text{ мкФ/см}^2 =$$

$$= 10^{-2} \text{ Ф/м}^2,$$

$$d = 8 \text{ нм} = 8 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Знайти:

$$E - ?$$

$$\frac{|q|}{s} - ?$$

Розв'язання:

$$\Delta\varphi_{\text{м}} = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_{\text{зн}}}{C_{\text{вн}}}, \quad (1)$$

$$E = \frac{|\Delta\varphi_{\text{м}}|}{d}. \quad (2)$$

Підставимо (1) до (2), одержимо

$$E = \frac{1}{d} \cdot \left| \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_{\text{зн}}}{C_{\text{вн}}} \right|,$$

$$E = \frac{8,31 \cdot 300}{1 \cdot 96\,500 \cdot 8 \cdot 10^{-9}} \ln \frac{2,5}{125} = 12,6 \text{ МВ/м,}$$

$$[E] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}} \ln \frac{\text{моль} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = \frac{\text{В}}{\text{м}},$$

$$|q| = C |\Delta\varphi_{\text{м}}| = c_{\text{пит}} s |\Delta\varphi_{\text{м}}|. \quad (3)$$

Підставимо (1) до (3), одержимо

$$\frac{|q|}{s} = c_{\text{пит}} \left| \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_{\text{зн}}}{C_{\text{вн}}} \right|,$$

$$\frac{|q|}{s} = 10^{-2} \cdot \left| \frac{8,31 \cdot 300}{1 \cdot 96\,500} \ln \frac{2,5}{125} \right| = 10^{-3} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\left[\frac{q}{s} \right] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{м}^2 \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Кл}} \ln \frac{\text{моль} \cdot \text{м}^3}{\text{м}^3 \cdot \text{моль}} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{Дж}}{\text{В} \cdot \text{Кл} \cdot \text{м}^2} =$$

$$= \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}.$$

Відповідь: $E = 12,6 \text{ МВ/м; } \frac{|q|}{s} = 10^{-3} \text{ Кл/м}^2$.

10.3 Температура дифузії $T = 300 \text{ К}$. Розрахувати амплітуду потенціалу дії $\Delta\varphi_{\text{м}}$, якщо концентрація іонів калію K^+ і натрію Na^+ всередині клітини при збудженні становить $C[K_{\text{вн}}] = 125 \text{ ммоль/л}$ та $C[Na_{\text{вн}}] = 1,5 \text{ ммоль/л}$, а зовні $C[K_{\text{зн}}] = 2,5 \text{ ммоль/л}$ та $C[Na_{\text{зн}}] = 125 \text{ ммоль/л}$.

Дано:

$$C[K_{\text{вн}}] = 125 \text{ ммоль/л} = 125 \text{ моль/м}^3,$$

$$C[Na_{\text{вн}}] = 1,5 \text{ ммоль/л} = 1,5 \text{ моль/м}^3,$$

$$C[K_{\text{зн}}] = 2,5 \text{ ммоль/л} = 2,5 \text{ моль/м}^3,$$

$$C[Na_{\text{зн}}] = 125 \text{ ммоль/л} = 125 \text{ моль/м}^3,$$

$$T = 300 \text{ К},$$

$$p_K : p_{Na} = 1 : 20.$$

Знайти:

$$\Delta\varphi_M - ?$$

Відповідь: $\Delta\varphi_M = 72 \text{ мВ}$.

Розв'язання:

$$\Delta\varphi_M = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{p_K C[K_{\text{зн}}] + p_{Na} C[Na_{\text{зн}}]}{p_K C[K_{\text{вн}}] + p_{Na} C[Na_{\text{вн}}]}, \quad (1)$$

$$p_K : p_{Na} = 1 : 20, \text{ звідси}$$

$$p_{Na} = 20p_K. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_M &= \frac{8,31 \cdot 300}{1 \cdot 96 \cdot 500} \ln \frac{p_K \cdot 2,5 + 20 \cdot p_K \cdot 125}{p_K \cdot 125 + 20 \cdot p_K \cdot 1,5} = \\ &= 0,0258 \cdot \ln \frac{2,5 + 2500}{125 + 30} = \end{aligned}$$

$$= 0,0258 \cdot 2,782 = 0,072 \text{ В} = 72 \text{ мВ},$$

$$[\Delta\varphi_M] = \frac{\text{Дж} \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}{\text{моль} \cdot \text{К} \cdot \text{Кл}} \ln \frac{\frac{\text{моль}}{\text{м}^3} + \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}}{\frac{\text{моль}}{\text{м}^3} + \frac{\text{моль}}{\text{м}^3}} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \text{В}.$$

10.4 При одному імпульсі кризь $S = 1 \text{ мкм}^2$ поверхні мембрани проходить близько $N = 20\,000$ іонів натрію. Натрієвий канал відкривається лише на час $t = 1 \text{ мс}$. Яка сила струму I та густина струму j проходять при цьому?

Дано:

$$S = 1 \text{ мкм}^2 =$$

$$= 1 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$N = 20\,000,$$

Розв'язання:

$$I = \frac{q}{t}, \quad (1)$$

$$q = N \cdot e, \text{ де } e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}. \quad (2)$$

Підставимо (2) до (1), одержимо

$$t = 1 \text{ мс} =$$

$$= 1 \cdot 10^{-3} \text{ с.}$$

$$I = \frac{Ne}{t},$$

$$I = \frac{20\,000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1 \cdot 10^{-3}} = 32 \cdot 10^{-13} \text{ (А)},$$

$$[q] = \frac{\text{Кл}}{\text{с}} = \text{А},$$

Знайти:

$$j = \frac{I}{S},$$

I —?

$$j = \frac{32 \cdot 10^{-13}}{1 \cdot 10^{-12}} = 3,2 \text{ А/м}^2,$$

j —?

$$[j] = \frac{\text{А}}{\text{м}^2}.$$

Відповідь: $I = 32 \cdot 10^{-13} \text{ А}, j = \frac{32 \cdot 10^{-13}}{1 \cdot 10^{-12}} = 3,2 \text{ А/м}^2.$

10.5 Мембранний потенціал $\Delta\varphi_M = -110 \text{ мВ}$. Радіус клітини 8 мкм , питома електроємність мембрани $c_{\text{пит}} = 5 \text{ мФ/м}^2$. Який заряд мембрани? Яка кількість іонів повинна перейти із цитоплазми в позаклітинне середовище, щоб створити таку різницю потенціалів?

Дано:

Розв'язання:

$$\Delta\varphi_M = -110 \text{ мВ} =$$

$$= -110 \cdot 10^{-3} \text{ В},$$

$$r = 8 \text{ мкм} =$$

$$= 8 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$c_{\text{пит}} = 5 \text{ мФ/м}^2 =$$

$$= 5 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/м}^2.$$

$$q = C \Delta\varphi_M, \quad (1)$$

$$C = c_{\text{пит}} \cdot S, \quad (2)$$

$$S = 4\pi r^2. \quad (3)$$

Підставимо (2), (3) до (1), одержимо

$$q = c_{\text{пит}} \cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta\varphi_M,$$

$$q = -5 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot (8 \cdot 10^{-6})^2 \times$$

$$\times 110 \cdot 10^{-3} = -4,42 \cdot 10^{-13} \text{ Кл},$$

Знайти:

$$[q] = \frac{\text{Ф} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{В}}{\text{м}^2} = \frac{\text{Кл} \cdot \text{В}}{\text{В}} = \text{Кл},$$

q —?

$$N = \frac{|q|}{F},$$

$$N - ? \quad \left| \quad \begin{aligned} N &= \frac{4,42 \cdot 10^{-13}}{96 \cdot 500} = 4,6 \cdot 10^{-18} \text{ (моль іонів) або} \\ N &= N_A \cdot 4,6 \cdot 10^{-18}, \\ N &= 4,6 \cdot 10^{-18} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 2,8 \cdot 10^6 \text{ іонів.} \end{aligned} \right.$$

Відповідь: $q = -4,42 \cdot 10^{-13}$ Кл, $N = 2,8 \cdot 10^6$ іонів.

✍ Задачі для самостійного виконання

10.6 Концентрація молекул формаміду поза клітиною $C_{\text{зн}} = 10$ ммоль/л, всередині клітини $C_{\text{вн}} = 1$ ммоль/л. Яка густина потоку формаміду крізь мембрану клітини, якщо коефіцієнт проникності мембрани до формаміду становить $p = 3 \cdot 10^{-7}$ м/с?

10.7 Знайти градієнт концентрації іонів на клітинній мембрані $\frac{\Delta C}{\Delta x}$, якщо швидкість потоку іонів крізь мембрану становить $\frac{\Delta n}{\Delta t} = 3,215 \cdot 10^{-9}$ моль/с, коефіцієнт дифузії $D = 2 \cdot 10^{-10}$ м²/с. Мембрану вважати сферичною з радіусом $r = 8$ мкм.

10.8 Для молекул білків коефіцієнт латеральної дифузії становить $D = 10^{-14}$ м²/с. Яку відстань l на поверхні мембрани проходить молекула білка за час $\tau = 1$ с?

10.9 Питомий опір нервової клітини становить $\rho_{\text{п}} = 0,5$ Ом · м. Знайти опір аксона, що має довжину $l = 5$ мм та радіус $r_1 = 5$ мкм. Повторити розрахунки для радіуса $r_2 = 500$ мкм.

10.10 Чому дорівнює електричний заряд q на мембрані, якщо концентрація іонів калію K^+ всередині клітини $C_{\text{вн}} = 125$ ммоль/л, зовні $C_{\text{зн}} = 2,5$ ммоль/л? Товщина мембрани $d = 8$ нм, температура дифузії $T = 300$ К, електроємність мембрани $C = 1$ пФ. Знайти напруженість електричного поля на мембрані в стані спокою.

10.11 Розрахувати температуру дифузії T , якщо амплітуда потенціалу дії $\Delta\varphi_{\text{м}} = 72$ мВ, концентрація іонів калію K^+ та натрію Na^+ всередині клітини при збудженні становить

$C[K_{\text{вн}}] = 125$ ммоль/л та $C[Na_{\text{вн}}] = 1,5$ ммоль/л, а зовні $C[K_{\text{зн}}] = 2,5$ ммоль/л і $C[Na_{\text{зн}}] = 125$ ммоль/л.

10.12 Визначити рівноважний мембранний потенціал $\Delta\varphi_{\text{м}}$, що створюється іонами калію K^+ за температури $T = 300$ К. Концентрація калію всередині клітини $C_{\text{вн}} = 10^{-3}$ моль/л, а зовні $C_{\text{зн}} = 10^{-5}$ моль/л. Яка кількість іонів повинна перейти через мембрану, щоб створити таку різницю потенціалів? Питома електроємність мембрани (електроємність на одиницю площі) $\epsilon_{\text{пит}} = 10^{-2}$ Ф/м², площа мембрани $S = 10^{-9}$ м².

10.13 Потенціал спокою нервової клітини становить $\Delta\varphi_{\text{м}} = 89$ мВ. Чому дорівнює концентрація іонів калію всередині нервової клітини $C_{\text{вн}}$, якщо зовні вона дорівнює $C_{\text{зн}} = 12 \cdot 10^{-3}$ моль/л? Температуру взяти $t = 20$ °С.

10.14 Мембрана нервової клітини складається із шару позитивно заряджених іонів зовні та негативно заряджених всередині. Заряджені шари притягуються один до одного. Різниця потенціалів між ними $\Delta\varphi_{\text{м}} = 70$ мВ. Взявши діелектричну проникність $\epsilon = 5,7$ для аксона радіуса $R = 5$ мкм і товщину мембрани $d = 5$ нм, розрахувати силу F , з якою заряди з одного боку мембрани взаємодіють із зарядами з іншого боку мембрани.

10.15 Скільки іонів натрію проходить при одному імпульсі крізь $S = 1$ мкм² поверхні мембрани, якщо густина струму проходить при цьому $j = 3,2$ А/м? Натрієвий канал відкривається лише на час $t = 1$ мс.

10.16 Питома електроємність плазматичної мембрани нервової клітини краба $\epsilon_{\text{пит}} = 1,1$ мкФ/см². Товщина ліпідного бішару мембрани $d = 2$ нм. Знайти діелектричну проникність ліпідного бішару.

10.17 Знайти радіус клітини r , якщо мембранний потенціал становить $\Delta\varphi_{\text{м}} = -110$ мВ, питома електроємність мембрани $\epsilon_{\text{пит}} = 5$ мФ/м², а заряд мембрани $q = -4,42 \cdot 10^{-13}$ Кл.

10.18 Вода надходить з лімфи у кров під дією різниці онкотичних тисків. У скільки разів зміниться інтенсивність потоку води, якщо

спочатку онкотичний тиск крові та лімфи відповідно дорівнювали 32 і 9 мм рт. ст., а потім – 29 і 11 мм рт. ст.?

10.19 Під час захворювання діабетом летальний кінець настає, якщо концентрація цукру в крові досягає 0,25 вагових відсотків. Яким буде осмотичний тиск цукру? Температура тіла 37 °С, дисоціація молекул цукру ($C_6H_{12}O_6$)₂ відсутня ($\alpha = 0$; $I = 1$).

10.20 Онкотичний тиск крові у людини 29 мм рт. ст., а лімфи – 9,5 мм рт. ст. Під дією онкотичних тисків вода надходить з лімфи у кров. Визначити роботу переміщення 25 г води за температури 37 °С.

10.21 У нирках з крові у сечу надходить 50 мл води за температури 37 °С. Визначити, у скільки разів осмотичний тиск вторинної сечі більше за тиск плазми крові, якщо осмотична робота нирок 6,7 кДж.

10.22 Внутрішньоклітинна концентрація іонів Na^+ становить $C_{вн} = 0,015$ моль / л, зовнішньоклітинна $C_{зн} = 0,15$ моль/л, внутрішньоклітинний потенціал дорівнює $\Delta\varphi_m = 60$ мВ відносно зовнішнього, який дорівнює нулю. Температура клітини $t = 37$ °С. Визначити осмотичну $A_{осм}$ і електричну $A_{ел}$ роботи при перенесенні іонів натрію крізь мембрану зсередини нервової клітини.

10.23 Осмотична робота $A_{осм}$, витрачена на перенесення 3 ммолів іонів хлору з гігантського аксона кальмара, становила 8,7 мДж за температури $t = 27$ °С. Визначити відношення концентрацій $C_{зн} / C_{вн}$ ззовні та всередині клітини.

10.24 Розрахувати роботу, яку потрібно витратити, для перенесення одного моля іонів Na^+ із клітини гігантського аксона кальмара у довкілля. Концентрація натрію в клітині $C_{вн} = 69$ ммоль/л, концентрація натрію в середовищі $C_{зн} = 425$ ммоль/л. Внутрішньоклітинний потенціал дорівнює $\Delta\varphi_m = -60$ мВ відносно зовнішнього, що дорівнює нулю. Температуру дифузії взяти такою, що дорівнює $t = 27$ °С.

10.25 Яка різниця потенціалів існує на міжклітинній мембрані, якщо при перенесенні 10 мкмоль іонів натрію у міжклітинне середовище було виконано роботу $A_{\text{ел}} = 57$ мДж?

10.26 Під час перенесення 5 нмоль іонів калію з м'язового волокна жаби в міжклітинне середовище робота, витрачена на подолання сил електричного відштовхування, становила $A_{\text{ел}} = 42,24$ мкДж. Розрахувати різницю потенціалів $\Delta\varphi_{\text{м}}$ на цитоплазматичній мембрані.

10.27 Розрахувати рівноважний мембранний потенціал $\Delta\varphi_{\text{м}}$, створений іонами калію, якщо температура $t = 27$ °С, їх внутрішньоклітинна концентрація $C_{\text{вн}} = 500$ ммоль/л, зовнішньоклітинна $C_{\text{зн}} = 10$ ммоль/л.

10.28 Зовнішньо- та внутрішньоклітинна концентрації іонів хлору дорівнюють відповідно $C_{\text{зн}} = 500$ ммоль/л, $C_{\text{вн}} = 150$ ммоль/л. Потенціал спокою при цьому $\Delta\varphi_{\text{м}} = -32$ мВ. Розрахувати температуру t клітини.

10.29 У скільки разів внутрішньоклітинна концентрація іонів калію повинна перевищувати зовнішню, щоб потенціал спокою становив $\Delta\varphi_{\text{м}} = -32$ мВ? Температура $t = 37$ °С.

10.30 Зовнішньо- та внутрішньоклітинна концентрації натрію дорівнюють відповідно $C_{\text{зн}} = 150$ ммоль/л, $C_{\text{вн}} = 23$ ммоль/л. Розрахувати теоретичне значення максимуму потенціалу дії $\Delta\varphi_{\text{max}}$ за температури $t = 37$ °С, вважаючи, що цитоплазматична мембрана нервового волокна в цих умовах є проникною лише для іонів натрію.

10.31 Визначити товщину ліпідної частини мембрани, якщо відомо, що питома електроємність мембрани $C_{\text{пит}} = 10^{-2}$ Ф/м².

10.32 Яка кількість іонів має вийти з клітини, щоб створити різницю потенціалів $\Delta\varphi_{\text{м}} = -90$ мВ? Вважати, що радіус клітини $r = 10$ мкм, питома електроємність мембрани $C_{\text{пит}} = 10^{-2}$ Ф/м².

10.33 Молярна концентрація кисню в атмосфері $C_{\text{зн}} = 9$ моль/м³. Кисень дифундує з поверхні тіла комахи всередину через трубки, названі трахеями. Довжина середньої трахеї дорівнює приблизно

$h = 2$ мм, а площа її поперечного перерізу $S = 2 \cdot 10^{-9}$ м². Вважаючи, що концентрація кисню всередині тіла $C_{\text{вн}}$ в два рази менша, ніж концентрація кисню в атмосфері, обчислити потік дифузії через трахею. Коефіцієнт дифузії кисню $D = 10^{-5}$ м²/с.

10.34 Подвійний фосфоліпідний шар уподібнює біологічну мембрану до конденсатора. Речовина мембрани є діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. Різниця потенціалів між поверхнями мембрани $\Delta\varphi_M = 0,2$ В за товщини $d = 10$ нм. Розрахувати електроємність $S = 1$ мм² мембрани і напруженість електричного поля в ній.

10.35 Площа поверхні клітини приблизно дорівнює $S = 5 \cdot 10^{-10}$ м². Питома електроємність мембрани (ємність одиниці поверхні) становить $c_{\text{пит}} = 10^{-2}$ Ф/м². При цьому міжклітинний потенціал дорівнює $\Delta\varphi_M = 70$ мВ. Визначити: а) величину заряду на поверхні мембрани; б) кількість одновалентних іонів, що утворюють цей заряд.

10.36 Проникність клітинних мембран до молекул води приблизно в 10 разів вища, ніж для іонів. Що відбудеться, якщо в ізотонічному водному розчині, в якому знаходяться еритроцити, збільшити концентрацію осмотично-активної речовини (наприклад, іонів)?

10.37 Біологічні мембрани знаходяться під дією електричного поля, створеного за рахунок різних концентрацій заряджених іонів (K^+ та Na^+) по різні її боки. Різниця потенціалів між цитоплазмою і позаклітинним середовищем сягає $\Delta\varphi_M = 10^{-1}$ В, а товщина мембрани $h = 10$ нм. Визначити: а) напруженість електричного поля в мембрані; б) до чого приведе зменшення товщини мембрани?

10.38 У скільки разів внутрішньоклітинна концентрація іонів калію K^+ повинна перевищувати зовнішньоклітинну концентрацію, щоб потенціал спокою на мембрані клітини становив $\Delta\varphi_M = 91$ мВ. Температуру взяти такою, що дорівнює $t = 37$ °С.

10.39 У стані спокою проникності мембрани до іонів калію та натрію співвідносяться як $p_K : p_{Na} = 1 : 0,04$, а при збудженні

$p_K : p_{Na} = 1 : 20$. Внутрішньоклітинна концентрація іонів калію становить $C_{вн1} = 350$ ммоль/л, а зовнішньоклітинна $C_{зн1}$ у 50 разів менша. Внутрішньоклітинна концентрація іонів натрію $C_{вн2} = 50$ ммоль/л, а зовнішньоклітинна $C_{зн2}$ у 10 разів більша. Визначити величину рівноважного потенціалу для кожного типу цих іонів у стані спокою та у стані збудження (потенціал дії). Температуру клітини взяти такою, що дорівнює $t = 27$ °С.

10.40 Різниця концентрацій частинок всередині та зовні клітини становить $\Delta C = 45$ ммоль/л, коефіцієнт розподілу речовини між мембраною та зовнішнім середовищем $k = 30$, коефіцієнт дифузії $D = 1,5 \cdot 10^{-10}$ м²/с, густина потоку речовини $J = 25$ моль/(м² · с). Розрахувати товщину d цієї мембрани.

10.41 Розрахувати коефіцієнт розподілу k для речовини, якщо при товщині мембрани $d = 8$ нм коефіцієнт її дифузії становить $D = 7,2 \cdot 10^{-8}$ см²/с, а коефіцієнт проникності мембрани до неї $p = 14$ см/с.

10.42 Розрахувати коефіцієнт дифузії D речовини через плоску біліпідну мембрану товщиною $d = 10$ нм. Якщо концентрація цієї речовини всередині та зовні клітини становить відповідно $C_{вн} = 2$ ммоль/л, $C_{зн} = 30$ ммоль/л. Потік речовини крізь мембрану $J = 0,8$ ммоль/(м² · с), а коефіцієнт розподілу речовини $k = 0,05$.

10.43 Розрахувати коефіцієнт проникності p мембрани до речовини, потік якої через мембрану становить $J = 5 \cdot 10^{-5}$ ммоль/(м² · с). Концентрація цієї речовини всередині та зовні клітини становить відповідно $C_{вн} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ моль/л, $C_{зн} = 3 \cdot 10^{-5}$ моль/л.

10.44 Для аксона кальмара у спокої виміряне значення мембранного потенціалу $\Delta\varphi_M = -156$ мВ. Іонні компоненти мають такі концентрації: $C[K_{вн}] = 400$ ммоль/л, $C[Na_{вн}] = 50$ ммоль/л та $C[K_{зн}] = 20$ ммоль/л, $C[Na_{зн}] = 440$ ммоль/л. Визначити, чому дорівнює відношення проникностей мембрани $p_K : p_{Na}$. Температуру $t = 20$ °С.

10.45 Визначити потенціал на мембрані $\Delta\varphi_M$, якщо температура дифузії $t = 17^\circ\text{C}$. Проникність до іонів хлору дорівнює 30 % від проникності для калію, а проникність для натрію 3 % від проникності до калію. Концентрації іонів калію, натрію та хлору в м'язі жаби дорівнюють: $C[K_{\text{вн}}] = 150$ ммоль/л, $C[Na_{\text{вн}}] = 5$ ммоль/л, $C[Cl_{\text{вн}}] = 2$ ммоль/л; $C[K_{\text{зн}}] = 3$ ммоль/л, $C[Na_{\text{зн}}] = 120$ ммоль/л, $C[Cl_{\text{зн}}] = 80$ ммоль/л.

10.46 Товщина ліпідної частини біологічної мембрани $d = 4$ нм. Діелектрична проникність ліпиду $\varepsilon = 2$. Ліпідний шар оточений розчинами електrolітів – позаклітинним і цитоплазмою. Знайти ємність мембрани, якщо її розглядати як сферичний конденсатор. Радіус клітини $r = 10$ мкм.

10.47 Питома електроємність плазматичної мембрани клітин мотонейрона кішки $\epsilon_{\text{пит}} = 6$ мкФ/см². Яка кількість іонів натрію повинна продифундувати крізь $S = 1$ см² мембрани, щоб генерувати на ній потенціал дії $\Delta\varphi_M = 120$ мВ?

10.48 Градієнт концентрації іонів на клітинній мембрані становить $\frac{\Delta c}{\Delta x} = 3 \cdot 10^{10}$ моль/м⁴, коефіцієнт дифузії $D = 2 \cdot 10^{-10}$ м²/с. Знайти швидкість потоку іонів $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ крізь мембрану. Мембрану вважати сферичною з радіусом $r = 10$ мкм.

10.49 Мембранний потенціал спокою клітини становив $\Delta\varphi_M = -100$ мВ. Яким буде цей потенціал, якщо концентрація іонів калію всередині клітини: а) зменшиться вдвічі; б) збільшиться вдвічі? Температура дифузії $T = 300$ К.

10.50 Концентрація іонів (ммоль/л) між двома боками клітинної мембрани в м'язі жаби має таке значення: $Na(120 / 9,2)$, $K(2,5 / 140)$, $Cl(120 / 3,5)$, де цифри у дужках відносять до зовнішнього/внутрішнього боків мембрани відповідно. Визначити різницю потенціалів на мембрані в разі пасивного транспорту кожного типу іонів. Дати порівняльний аналіз за умови, що експериментальна величина становить -90 мВ.

10.51 Концентрації іонів (ммоль/л) зовні клітинної мембрани м'яза жаби мають такі значення: $Na = 125$, $K = 2,5$, $Cl = 120$. Визначити концентрації іонів (у разі пасивного транспорту) всередині клітини, якщо різниця потенціалів на мембрані становить -94 мВ.

 **Тестові завдання до тематичного блоку 3**

I Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1 У системі СІ концентрація вимірюється у:

а) ммоль/л; б) кг/м³; в) мг/л; г) мкг/м³.

2 Величина мембранного потенціалу вимірюється у:

а) Вт; б) Н; в) В; г) Кл.

3 Електроємність мембрани вимірюється у:

а) Ф; б) Дж; в) Вт; г) Кл.

4 Напруженість електричного поля на мембрані вимірюється у:

а) В · м; б) В/м²; в) В/м³; г) В/м.

5 Густина струму вимірюється у:

а) А; б) А/м²; в) А · м; г) А/м³.

6 Питомий опір провідника вимірюється у:

а) Ом/м²; б) Ом · м; в) Ом/м³; г) Ом/м.

II Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1 Коефіцієнт проникності мембрани визначається за формулою:

а) $p = \frac{Dk}{\pi r^2}$; б) $p = \frac{Dk}{r}$; в) $p = \frac{Dk}{d}$; г) $p = \frac{rk}{\alpha}$.

2 Коефіцієнт корисної дії визначається за формулою:

а) $\eta = \frac{T_1 + T_2}{T_1}$; б) $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$; в) $\eta = \frac{Q}{Q + A}$; г) $\eta = \frac{A + Q}{Q}$.

3 Робота під час дифузії визначається за формулою:

а) $A = \mu RT \ln\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$; б) $A = RT \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$;

в) $A = \nu RT \ln\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$; г) $A = \nu kT \ln\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$.

4 Мембранний потенціал спокою визначається за формулою:

а) $\Delta\varphi_M = \frac{RT}{ZF} \log \frac{C_{\text{ЗН}}}{C_{\text{ВН}}}$; б) $\Delta\varphi_M = \frac{T}{ZF} \ln \frac{C_{\text{ВН}}}{C_{\text{ЗН}}}$;

в) $\Delta\varphi_M = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_{\text{ЗН}}}{C_{\text{ВН}}}$; г) $\Delta\varphi_M = \frac{RT}{ZF} e^{\frac{C_{\text{ЗН}}}{C_{\text{ВН}}}}$.

5 Перенесення маси при дифузії визначається за формулою:

а) $m = -D \frac{\Delta\rho}{\Delta x} St$; б) $m = -D \frac{\Delta S}{\Delta x} \rho t$;

в) $m = -D \frac{\Delta\rho}{\Delta x} S$; г) $m = -\frac{\Delta\rho}{\Delta x} St$.

6 Електроємність мембрани визначається за формулою:

а) $C = \frac{\mu\mu_0 S}{RT}$; б) $C = \frac{\mu\mu_0 S}{a}$; в) $C = \frac{\mu\mu_0 S}{r}$; г) $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{a}$.

III Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1) $J = -D \frac{dc}{dx}$ – це:

- а) рівняння Ламе;
- б) формула Пуазейля;
- в) рівняння Бернуллі;
- г) рівняння Фіка;

2) $P = (\alpha + I)CRT$ – це:

- а) рівняння нерозривності течії;
- б) закон Стокса;
- в) рівняння Фіка;
- г) закон Вант-Гоффа;

3) $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$ – це:

- а) закон збереження енергії;
- б) другий закон термодинаміки;
- в) рівняння теплового балансу;

г) перший закон термодинаміки;

4) $Q = \frac{k_T S}{l} (T_1 - T_2)t$ – це:

- а) кількість переданої теплоти шляхом теплопровідності;
- б) кількість переданої теплоти шляхом конвекції;
- в) кількість переданої теплоти шляхом випромінювання;
- г) теплота пароутворення;

5) $Q = k_B S_B (T_1^4 - T_2^4)t$ – це:

- а) кількість переданої теплоти шляхом теплопровідності;
- б) кількість переданої теплоти шляхом конвекції;
- в) кількість переданої теплоти шляхом випромінювання;
- г) теплота пароутворення;

6) $Q = k_K S_K (T_1 - T_2)t$ – це:

- а) кількість переданої теплоти шляхом теплопровідності;
- б) кількість переданої теплоти шляхом конвекції;
- в) кількість переданої теплоти шляхом випромінювання;
- г) теплота пароутворення.

IV Виберіть правильну відповідь (1 бал):

1) У рівнянні Фіка для дифузії крізь біологічну мембрану

$J = p(C_{\text{вн}} - C_{\text{зн}})$, p – це:

- а) тиск на мембрані;
- б) коефіцієнт дифузії;
- в) коефіцієнт проникності мембрани;
- г) густина струму;

2) У формулі для кількості теплоти під час зміни температури

$Q = mc\Delta T$, c – це:

- а) питома теплоємність речовини;
- б) концентрація речовини;
- в) коефіцієнт теплопровідності;
- г) питомий коефіцієнт випромінювання;

3) У формулі для обчислення опору провідника $R = \frac{\rho_{пл} l}{S}$, $\rho_{пл}$ – це:

- а) густина матеріалу провідника;
- б) питомий опір провідника;
- в) довжина провідника;
- г) питома кількість зарядів одного знаку;

4) У формулі мембранного потенціалу збудження

$$\Delta\varphi_M = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{p_K C[K_{зн}] + p_{Na} C[Na_{зн}] + p_{Cl} C[Cl_{вн}]}{p_K C[K_{вн}] + p_{Na} C[Na_{вн}] + p_{Cl} C[Cl_{зн}]}, \quad R - \text{це:}$$

- а) опір мембрани;
- б) заряд на мембрані;
- в) стала Фарадея;
- г) універсальна газова стала;

5) У формулі заряду на мембрані $q = C \Delta\varphi_M$, C – це:

- а) електроємність мембрани;
- б) концентрація зарядів на мембрані;
- в) теплоємність мембрани;
- г) діелектрична проникність мембрани;

б) У формулі сили, що діє на електричний заряд $F = qE$, E – це:

- а) модуль пружності заряду;
- б) напруженість електричного поля;
- в) енергія електричного заряду;
- г) електричний потенціал.

V Виберіть правильну відповідь (2 бали):

1 Система перебуває в стаціонарному стані. При цьому:

- а) термодинамічні параметри постійні у часі й однакові в усіх частинах системи, система є відкритою або закритою;
- б) термодинамічні параметри не змінюються у часі, але можуть відрізнятися в різних частинах системи, система ізольована;
- в) система не змінюється у часі, в ній підтримуються постійними градієнти параметрів, система є відкритою або закритою;

г) термодинамічні параметри є постійними у часі й однаковими в усіх частинах системи, система є ізольованою;

д) термодинамічні параметри змінюються з часом, система є відкритою.

2 Біологічна система є такою:

- а) відкритою та рівноважною;
- б) відкритою та нерівноважною;
- в) закритою та рівноважною;
- г) закритою та нерівноважною;
- д) ізольованою та рівноважною;
- е) ізольованою та нерівноважною.

3 Стаціонарний стан є стійким, якщо відхилення від нього приводить до такого:

- а) зростання внутрішньої енергії системи;
- б) зниження внутрішньої енергії системи;
- в) збільшення дисипативної функції;
- г) у наведених пунктах правильної відповіді немає;
- д) ступінь впорядкованості відкритої системи збільшується.

4 Відповідно до теореми Пригожина у стаціонарному стані при фіксованих зовнішніх параметрах швидкість зміни ентропії відкритої системи виявляє себе так:

- а) нескінченно зростає;
- б) набуває постійних, додатних значень;
- в) нескінченно зменшується;
- г) набуває від'ємних значень;
- д) дорівнює нулю.

5 У стані спокою потенціал нервової клітини наближується до рівноважного:

- а) кальцієвого потенціалу;
- б) натрієвого потенціалу;
- в) хлорного потенціалу;
- г) калієвого потенціалу;
- д) потенціалу протонів.

6 Під час генерації потенціалу дії потенціал нервової клітини наближується до рівноважного:

- а) кальцієвого потенціалу;
- б) натрієвого потенціалу;
- в) хлорного потенціалу;
- г) потенціалу протонів.

7 Проникність мембрани для іонів калію в стані спокою:

- а) значно більша за проникність іонів натрію;
- б) значно менша від проникності іонів натрію;
- в) приблизно дорівнює проникності іонів натрію.

8 Під час генерації потенціалу дії проникність мембрани для іонів калію є такою:

- а) більшою за проникність іонів натрію;
- б) меншою за проникність іонів натрію;
- в) приблизно дорівнює проникності іонів натрію.

9 Деполяризація – це:

- А) збільшення мембранної різниці потенціалів;
- Б) зменшення мембранної різниці потенціалів;
- В) зміна знаку заряду в середині клітини;
- Г) зміна знаку заряду ззовні клітини.

10 Первинна дія на мембрану клітини електричним струмом призводить до такого:

- а) деполяризації мембрани;
- б) гіперполяризації мембрани
- в) не впливає на поляризацію клітини.

11 Для виникнення потенціалу дії необхідно виконання такого процесу:

- а) деполяризації мембрани;
- б) гіперполяризації мембрани.

12 Гіперполяризація – це:

- а) збільшення мембранної різниці потенціалів;

- б) зменшення мембранної різниці потенціалів;
- в) зміна знаку заряду в середині клітини;
- г) зміна знаку заряду ззовні клітини.

13 Для виникнення потенціалу дії при дії на клітину електричним струмом електроди розміщуються таким чином:

- а) анод – всередині клітини, катод – ззовні;
- б) анод – ззовні клітини, катод – ззовні клітини;
- в) анод – всередині клітини, катод – всередині клітини;
- г) катод – всередині клітини, анод – ззовні.

VI Переведіть величину до системи СІ, поясніть відповідь (2 бали):

1) 2500 ккал – це:

- а) $10,45 \cdot 10^6$ Дж; б) $10,45 \cdot 10^3$ Дж;
- в) $25 \cdot 10^3$ Дж; г) $25 \cdot 10^5$ Дж;

2) 20 кДж/г – це:

- а) $2 \cdot 10^4$ Дж/кг; б) $2 \cdot 10^7$ Дж/кг;
- в) $2 \cdot 10^{-2}$ Дж/кг; г) $2 \cdot 10^6$ Дж/кг;

3) 150 ммоль/л – це:

- а) $15 \cdot 10^4$ моль/м³; б) $15 \cdot 10^{-3}$ моль/м³;
- в) $15 \cdot 10^{-6}$ моль/м³; г) 150 моль/м³;

4) 50 ккал/(м² · год) – це:

- а) $58,1 \cdot 10^{-3}$ Дж/(м² · с); б) 58,1 Дж/(м² · с);
- в) 13,9 Дж/(м² · с); г) $13,9 \cdot 10^{-3}$ Дж/(м² · с);

5) 300 мкм² – це:

- а) $3 \cdot 10^{-6}$ м²; б) $3 \cdot 10^{-12}$ м²; в) $3 \cdot 10^{-4}$ м²; г) $3 \cdot 10^{-10}$ м²;

6) 10^{-2} мкФ/см² – це:

- а) 10^3 Ф/м²; б) 10^6 Ф/м²; в) 10^{-6} Ф/м²; г) 10^{-4} Ф/м²;

7) 27 °С – це:

- а) 300 К; б) -246 К; в) 27 К; г) 264 К.

8) 120 моль/л – це:

- а) $12 \cdot 10^{-2}$ моль/м³; б) $12 \cdot 10^{-3}$ моль/м³;
в) $12 \cdot 10^3$ моль/м³; г) $12 \cdot 10^4$ моль/м³;

9) 10 мА/см² – це:

- а) 10 А/м²; б) 10^2 А/м²; в) 10^{-7} А/м²; г) 10^{-6} А/м²;

10) 1,1 МОм · см – це:

- а) $1,1 \cdot 10^6$ Ом · м; б) $1,1 \cdot 10^3$ Ом · м;
в) $1,1 \cdot 10^{-2}$ Ом · м; г) $1,1 \cdot 10^4$ Ом · м;

11) 120 см²/хв – це:

- а) $2 \cdot 10^4$ м²/с; б) $12 \cdot 10^{-4}$ м²/с; в) $2 \cdot 10^{-4}$ м²/с; г) $2 \cdot 10^{-2}$ м²/с;

12) 30 мкВ/см – це:

- а) $3 \cdot 10^{-4}$ В/м; б) $3 \cdot 10^{-3}$ В/м; в) $3 \cdot 10^{-5}$ В/м; г) $3 \cdot 10^{-6}$ В/м.

□ Теми рефератів та доповідей до тематичного блоку 3

- 1 Основні поняття термодинаміки. Перший та другий принципи термодинаміки.
- 2 Організм як відкрита термодинамічна система. Енергетичний баланс організму.
- 3 Термометрія та калориметрія.
- 4 Механізми теплообміну організму з довкіллям.
- 5 Використання нагрітих та холодних середовищ у медицині. Кріомедицина.
- 6 Термографія. Використання термографії в медицині.
- 7 Дія факторів зовнішнього середовища на організм. Кліматолікування.
- 8 Вміст енергії у продуктах харчування.
- 9 Енергетична трансформація під час обміну речовин людини, збереження енергії.
- 10 Дифузія, види дифузії. Рівняння Фіка.

- 11 Молекули АТФ. Утворення та використання у вигляді джерела енергії в організмі людини.
- 12 Рівні метаболізму людини. Основний обмін. Масштабування основного обміну.
- 13 Рівні метаболізму при звичайних рівнях діяльності людини. Масштабування рівня метаболізму за допомогою метаболічних еквівалентів і факторів активності.
- 14 Додавання та втрати ваги з точки зору метаболічних процесів в організмі людини.
- 15 Біофізика мембранних процесів. Транспорт речовин через біологічні мембрани.
- 16 Біоелектричні потенціали. Потенціал спокою та потенціал дії.
- 17 Методи реєстрації біопотенціалів.
- 18 Електричне поле, електричний струм. Дія електричного струму на організм людини.
- 19 Електричні властивості тканин тіла.
- 20 Мембрани тканин та розподіл іонів.
- 21 Збудження мембран клітин. Математична модель збудження мембран.
- 22 Іонні канали, волоскові клітини, вестибулярний апарат, смак, сприйняття запахів.
- 23 Електричні властивості серця.
- 24 Електричні сигнали мозку.
- 25 Змінний струм. Основи реографії.
- 26 Магнітне поле. Дія магнітних полів на організм людини.
- 27 Магнітне поле аксона.
- 28 Магнітотерапія. Магнітокардіографія.

Додаток А
(довідковий)

Таблиця А.1 – Одиниці вимірювання величин

Величина		Одиниця		
<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>через основні одиниці Сі</i>
Акустичний опір	<i>R</i>	кілограм на квадратний метр-секунда	$\text{кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$	$[R] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$
Амплітуда коливань	<i>A</i>	метр	м	$[A] = \text{м}$
Відносна деформація	<i>ε</i>	безрозмірна величина		
Гідравлічний опір	<i>X</i>	паскаль-секунда на кубічний метр	$\text{Па} \cdot \text{с}/\text{м}^3$	$[X] = \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}$
Густина	<i>ρ</i>	кілограм на кубічний метр	$\text{кг}/\text{м}^3$	$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
Динамічна в'язкість	<i>η</i>	паскаль-секунда	$\text{Па} \cdot \text{с}$	$[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с} = \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$
Довжина	<i>l</i>	метр	м	$[l] = \text{м}$

Величина		Одиниця		
<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>через основні одиниці Сі</i>
Довжина хвилі	λ	метр	м	$[\lambda] = \text{м}$
Електричний опір	R	ом	Ом	$[R] = \text{Ом} = \frac{\text{В}}{\text{А}}$
Електроємність	C	фарада	Ф	$[C] = \text{Ф} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$
Енергія (кількість теплоти, робота)	$E (Q, A)$	джоуль	Дж	$[Q] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$
Жорсткість	k	ньютон на метр	Н/м	$[k] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$
Звуковий тиск	P	паскаль	Па	$[P] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$
Імпульс	I	кілограм-метр за секунду в квадраті	Кг · м/с ²	$[I] = \frac{\text{Кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$
Інтенсивність звуку	I	ват на квадратний метр	Вт/м ²	$[I] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$
Коефіцієнт загасання	β	секунда у мінус першій степені	с ⁻¹	$[\beta] = \text{с}^{-1}$

Величина		Одиниця		
<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>через основні одиниці СІ</i>
Логарифмічний декремент загасання	λ	безрозмірна величина		
Маса	m	кілограм	кг	$[m] = \text{кг}$
Механічне напруження	σ	паскаль	Па	$[\sigma] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$
Модуль пружності (модуль Юнга)	E	паскаль	Па	$[E] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$
Момент інерції	J	кілограм-метр у квадраті	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$	$[J] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$
Напруженість електричного поля	E	вольт на метр	В/м	$[E] = \frac{\text{В}}{\text{м}}$
Об'єм	V	кубічний метр	м^3	$[V] = \text{м}^3$
Об'ємна густина енергії звукового поля	ω_p	джоуль на кубічний метр	$\text{Дж}/\text{м}^3$	$[\omega_p] = \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$
Об'ємна швидкість	Q	кубічний метр на секунду	$\text{м}^3/\text{с}$	$[Q] = \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$

Величина		Одиниця		
<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>через основні одиниці Сі</i>
Період коливань	T	секунда	с	$[T] = \text{с}$
Площа	S	квадратний метр	м ²	$[S] = \text{м}^2$
Потенціал електричного поля (потенціал)	$\varphi (U)$	вольт	В	$[\varphi] = \text{В} = \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}}$
Потік енергії звукової хвилі	Φ	ват	Вт	$[\Phi] = \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$
Потужність	N	ват	Вт	$[N] = \text{Вт} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$
Прискорення	a	метр за секунду в квадраті	м/с ²	$[a] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Рівень гучності	E	фон	фон	$[E] = \text{фон}$
Рівень інтенсивності звуку (рівень звукового тиску)	L	децибел	дБ	$[L] = \text{дБ}$
Сила	F	ньютон	Н	$[F] = \text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}$

Величина		Одиниця		
<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>найменування</i>	<i>позначення</i>	<i>через основні одиниці СІ</i>
Сила струму	I	ампер	А	$[I] = A = \frac{Кл}{с}$
Тиск	P	паскаль	Па	$[P] = Pa = \frac{Н}{м^2}$
Фаза коливань	φ	радіан	рад	$[\varphi] = рад$
Циклічна частота коливань	ω	радіан за секунду	рад/с	$[\omega] = \frac{рад}{с}$
Час	t	секунда	с	$[t] = с$
Частота коливань	ϑ	герц	Гц	$[\vartheta] = \frac{1}{с}$
Число Рейнольдса	Re	безрозмірна величина		
Швидкість лінійна	v	метр за секунду	м/с	$[v] = \frac{м}{с}$

Список літератури

1. Davidovits P. Physics in Biology and Medicine / P. Davidovits. – ACADEMIC PRESS @ ELSEVIER, 2008. – 320 p.
2. Dillon P. F. Biophysics: A Physiological Approach / P. F. Dillon. – Cambridge University Press, 2012. – 315 p.
3. Hobbie R. K. Intermediate Physics for Medicine and Biology / R. K. Hobbie, B. J. Roth. – Springer, 2015. – 630 p.
4. College Physics / P. P. Urone, R. Hinrichs, K. Dirks, M. Sharma. – Openstax Collage, Rice University, Taxes USA, 2013. – 1273 p.
5. Баврин И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей / И. И. Баврин. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 328 с.
6. Белоновский А. С. Основы биофизики в ветеринарии : учеб. пособие для вузов / А. С. Белановский. – Москва : Дрофа, 2007. – 332 с.
7. Біофізика : підручник / П. Г. Костюк, В. Л. Зима, І. С. Магура [та ін.]; за ред. П. Г. Костюка. – Київ : Обереги, 2001. – 544 с.
8. Герман И. Физика организма человека: пер. с англ.: научное издание / И. Герман. – Долгопрудный : Издательский дом «Интеллект», 2011. – 992 с.
9. Григор'єва Л. І. Основи біофізики і біомеханіки : навч. посібник / Л. І. Григор'єва, Ю. А. Томілін. – Миколаїв : ЧДУ ім. П. Могили, 2011. – 297 с.
10. Лопушанський Я. Й. Збірник задач і запитань з медичної і біологічної фізики : навч. посіб. для студ. вищ. мед. навч. закл. III-IV рівнів акредитації / Я. Й. Лопушанський ; Львів. нац. мед. ун-т ім. Д. Галицького, ТзОВ «Львів. мед. ін-т». – Вид. 3-тє, допов. та випр. – Вінниця : Нова кн., 2010. – 583 с.
11. Медична і біологічна фізика: практикум / О. В. Чалий [та ін.]. – Київ : Книга плюс, 2003. – 217 с.
12. Медична і біологічна фізика : підручник для студ. вищ. мед. закл. освіти III-IV рівнів акредитації / О. В. Чалий, Б. Т. Агапов,

Я. В. Цехмістер [та ін.]; за ред. О. В. Чалого. – Київ. : Книга плюс, 2004. – 760 с.

13. Медична та біологічна фізика : навч. посіб. для студ. вищ. мед. навч. закл. IV рівня акредитації / В. П. Марценюк, В. Д. Дідух, Р. Б. Ладика [та ін]. – Тернопіль : Укрмедкн., 2012. – 303 с.

14. Попов Є. Г. Фізика з основами біофізики. Лабораторний практикум і збірник задач : навчальний посібник / Є. Г. Попов, О. В. Толстенко, В. І. Цоцко. – Дніпропетровськ, 2006. – 125 с.

15. Ремизов А. Н. Сборник задач по медицинской и биологической физике : учеб. пособие для вузов / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина. – Москва : Дрофа, 2001. – 192 с.

16. Тиманюк В. А. Биофизика : учебник для студ. вузов / В. А. Тиманюк, Е. Н. Животова. – Харьков : НФаУ : Золотые страницы, 2003. – 704 с.

17. Федорова В. Н. Краткий курс медицинской и биологической физики с элементами реабилитологии. Лекции и семинары : учеб. пособие / В. Н. Федорова, Л. А. Степанова. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 624 с.

18. Федорова В. Н. Медицинская и биологическая физика. Курс лекций с задачами : учеб. пособие / В. Н. Федорова, Е. В. Фаустов. – Москва : ГЭОТАР-Медиа, 2008. – 592 с.

19. Чалий О. В. Вища математика : навч. посібник для студ. мед. та фарм. навч. закладів / О. В. Чалий, Н. В. Стучинська, А. В. Меленєвська. – Київ : Техніка, 2001. – 204 с.

20. Шевченко А. Ф. Основи медичної і біологічної фізики : підруч. для студ. вищ. мед. навч. закл. I-III рівнів акредитації / А. Ф. Шевченко. – Київ : Медицина, 2008. – 655 с.

Навчальне видання

Корнюшенко Ганна Сергіївна,
Швець Уляна Станіславівна,
Суходуб Леонід Федорович

Медична та біологічна фізика: практикум
Навчальний посібник
У двох частинах
Частина 1

Художнє оформлення обкладинки У. С. Швець
Редактор М. Я. Сагун
Комп'ютерне верстання У. С. Швець

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 10,93. Обл.-вид. арк. 9,82. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

