

УДК 537.874.6

КП

№ держреєстрації 0115U000690

Інв. №

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
(СумДУ)  
40007, г. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2  
тел.: (0542) 39-23-72, факс: (0542) 33-40-58

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з  
наукової роботи СумДУ  
д. ф.-м. н., професор  
\_\_\_\_\_ А.М. Черноус  
2016.12.25

### **ЗВІТ**

**про науково-дослідницьку роботу**  
**ЕЛЕКТРОФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НИЗЬКОРОЗМІРНИХ**  
**МЕТАМАТЕРІАЛЬНИХ І МЕТАЛЛОДІЕЛЕКТРИЧНИХ СИСТЕМ**  
**МІЛЛІМЕТРОВОГО-ІНФРАКРАСНОГО ДІАПАЗОНА ВХВИЛЬ**  
**(проміжний)**

Начальник НДЧ  
к. ф.-м. н., с.н.с.

Д.І. Курбатов

Керівник НДР  
д. ф.-м. н., професор

Г.С. Воробйов

2016

Рукопис закінчений 25 грудня 2016 р.

Результати роботи розглянуті науковою радою СумДУ,  
протокол № 4 від 23.12.2016 р.

## СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, докт. фіз.-мат. наук, проф.	(2016.12.25)	<b>Г.С. Воробйов</b> Вступ, висновки, розділ 1
Професор, докт. фіз.-мат. наук	(2016.12.25)	О.В. Лисенко розділ 2
Доцент, канд. фіз.-мат. наук	(2016.12.25)	А.І. Рубан Підрозділи 1.1, 1.4
Доцент, канд. фіз.-мат. наук	(2016.12.25)	В.О. Журба Підрозділи 2.1, 2.4
Доцент, канд. фіз.-мат. наук	(2016.12.25)	О.О. Дрозденко Підрозділи 1.4, 1.5
Доцент, канд. фіз.-мат. наук	(2016.12.25)	М.В. Петровський Підрозділи 2.2, 2.3
Інженер 1 кат	(2016.12.25)	А.В. Демченко Підрозділ 2.2
Інженер 1 кат	(2016.12.25)	Ю.О. Крутько Підрозділ 2.2
Аспірант	(2016.12.25)	В.С. Шубников Підрозділ 2.2
Аспірант	(2016.12.25)	І.А. Буряк Підрозділи 1.3, 1.4
Аспірант	(2016.12.25)	Г.А. Олексієнко розділ 1, 2

## РЕФЕРАТ

Проміжний звіт про НДР: 75 стр., 1 рис., 163джерела.

Об'єкт дослідження – процеси вимушеного випромінювання гвинтовими релятивістськими електронними пучками в лазерах на вільних електронах.

Ціль роботи – побудова мультигармонічної теорії плазмово-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах з гвинтовими електронними пучками, визначення режимів роботи, при яких формується потужне електромагнітне випромінювання.

Методи дослідження - В якості основного методу теоретичного аналізу мультигармонічних взаємодій в досліджуваних супергетеродинних лазерах на вільних електронах використовувався метод усереднених характеристик [6,7]. В роботі застосовувався квазігідродинамічний підхід для опису процесів в плазмово-пучкових системах. Також використовувався метод повільно зміннюючихся амплітуд і стандартні чисельні і чисельно-аналітичні методи.

ХВИЛЯ, ХВИЛЕВІД, МЕТАЛОДІЕЛЕКТРИЧНА СТРУКТУРА, ЛАЗЕР НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ, МЕТОД УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК, МУЛЬТИГАРМОНІЧНІ ПАРАМЕТРИЧНІ РЕЗОНАНСИ, ЕЛЕКТРОННИЙ І ПРОТОННИЙ ПУЧКИ, РЕЛЯТИВІСТСЬКІ ЕЛЕКТРОННІ ПУЧКИ.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
РОЗДІЛ 1 ПАРАМЕТРИЧНО-РЕЗОНАНСНІ ВЗАЄМОДІЇ В ПЛАЗМОВО-ПУЧКОВИХ СИСТЕМАХ З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ) .....	7
1.1 Ефект супергетеродинного підсилення .....	7
1.2 Плазмово-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах .....	10
1.3 Особливості резонансних взаємодій в плазмово-пучкових системах з гвинтовими електронними пучками .....	14
1.4 Основні теоретичні підходи в теорії сильнострумівих ЛВЕ.....	18
1.5 Висновки до розділу 1 .....	23
РАЗДЕЛ 2 ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК У ПЛАЗМОВО-ПУЧКОВИХ СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ ЛАЗЕРАХ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ .....	25
2.1 Модель. Вихідні рівняння.....	25
2.2 Модернізований метод усереднених характеристик .....	31
2.3 Параметричні резонансні взаємодії в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ з гвинтовими електронними пучками .	47
2.4 Висновки до розділу 2 .....	56
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ .....	58

## ВСТУП

Серед приладів релятивістської надвисокочастотної електроніки одними з найбільш перспективних з практичної і цікавих з теоретичної точок зору, є лазери на вільних електронах (ЛВЕ) [1-4]. Це обумовлено тим, що ці прилади здатні генерувати та посилювати потужне когерентне електромагнітне випромінювання в широкому діапазоні довжин хвиль від міліметрового до рентгенівського [5-13]. Серед різних типів ЛВЕ слід виділити супергетеродинні лазери на вільних електронах (СЛВЕ) [5-8, 14-23], які характеризуються більш високими підсилювальними властивостями. Пов'язано це з тим, що СЛВЕ використовують додатковий механізм посилення однієї з хвиль, що беруть участь в параметричному резонансі. В якості додаткового механізму посилення в плазмово-пучкових СЛВЕ виступає плазмово-пучкова нестійкість. Завдяки додатковому механізму посилення і при помірних вимогах до параметрів, плазмово-пучкові СЛВЕ є більш компактними, мають більшу вихідну потужність і значення коефіцієнта посилення і т.д. в порівнянні з традиційними ЛВЕ.

Відомо, що використання гвинтових релятивістських електронних пучків (РЕП) в пристроях сильнотримої електроніки з поздовжнім магнітним полем в ряді випадків призводить до підвищення їх ефективності [24-31]. Тому можна припустити, що використання гвинтових релятивістських електронних пучків в плазмово-пучкових СЛВЕ дозволить отримати більш високі значення інкрементів наростання хвиль і інших параметрів в порівнянні з плазмово-пучковими СЛВЕ з прямолінійними релятивістськими електронними пучками [32-33].

Відзначимо, що в плазмово-пучкових СЛВЕ використовуються хвилі просторового заряду (ХПЗ), які експоненціально наростають за рахунок плазмово-пучкової нестійкості і характеризуються лінійною дисперсійною залежністю. Це призводить до того, що для великої кількості гармонік ХПЗ виконуються умови трьох хвильового резонансу, таким чином, мають місце

численні резонансні взаємодії. Відомо, що мультигармонічні взаємодії в плазмово-пучкових СЛВЕ з прямолінійними РЕП істотно впливають на динаміку хвиль [32-33]. Тому слід очікувати, що в плазмово-пучкових СЛВЕ з гвинтовими електронними пучками численні резонансні взаємодії також матимуть істотний вплив на роботу приладу. Таким чином, вивчення мультигармонічних процесів в плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими електронними пучками є завданням важливим і актуальним.

# РОЗДІЛ 1

## ПАРАМЕТРИЧНО-РЕЗОНАНСНІ ВЗАЄМОДІЇ В ПЛАЗМОВО-ПУЧКОВИХ СИСТЕМАХ З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ)

### 1.1 Ефект супергетеродинного підсилення

Відомо, що супергетеродинні лазери на вільних електронах відносяться до класу пристроїв, які здатні генерувати або посилювати потужне когерентне електромагнітне випромінювання в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль. супергетеродинні ЛВЕ [5–7, 14–23] в порівнянні з традиційними параметричними ЛВЕ [1–5, 10–13] характеризуються великими коефіцієнтами посилення електромагнітного випромінювання при однакових значеннях амплітуди поля накачки, інтенсивності пучка і т.п.

Поняття ефекту супергетеродинного підсилення електромагнітних хвиль було сформульовано в праці [48]. Тут розглядалася задача трьох-хвильової взаємодії хвиль одного типу між сигналом, накачкою і холостою хвилею в нелінійній активному середовищі. Частоти хвиль сигналу  $\omega_1$  і накачки  $\omega_2$  вибиралися близькими один до одної, але набагато більшими, ніж частота холостої хвилі  $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2 \ll \omega_1, \omega_2$ . Відомо, що механізмів посилення в високочастотній області немає. Однак, за допомогою нелінійного зв'язку між взаємодіючими хвилями, існує можливість перенесення посилення з низькочастотної холостої хвилі на високочастотну хвилю сигналу. Тому, параметри середовища взаємодії вибиралися таким чином, щоб частота холостої хвилі  $\omega_3$  попадала в полосу посилення, в якій вона посилювалася за рахунок додаткового механізму. Таким чином, за допомогою ефекту супергетеродинного підсилення, вперше стало можливо перенесення посилення вгору по частоті, а саме, з низькочастотної області в високочастотну.

Подібна ідея була сформульована для лазерів на вільних електронах в працях [14–15]. Основною особливістю цієї ідеї є те, що частоти хвилі сигналу і холостої хвилі бралися приблизно рівними  $\omega_1 / \omega_3 \approx 1$ , типи хвиль при цьому були принципово різними. Тому, принцип перенесення енергії з низькочастотного діапазону на високочастотний, тут не реалізується. Однак, в цьому випадку має місце перекачування енергії з електронної хвилі в електромагнітну хвилю. В цьому і полягає основна відмінність даної ідеї [14–15] від запропонованої в праці [48].

Відомо, що в релятивістській плазмовій надвисокочастотній електроніці використовується посилення електронних (поздовжніх) хвиль за рахунок різних типів нестійкостей (плазмово-пучкової, двопотокової і т.д.). Однак при використанні таких механізмів посилення виникають труднощі при трансформації енергії електронної хвилі в енергію електромагнітної хвилі. Для вирішення даної проблеми в працях [14–15] було запропоновано використання ефекту супергетеродинного підсилення, в якому поєднувався принцип посилення поздовжніх хвиль з традиційним для ЛВЕ параметричним резонансом. Перекачування енергії від поздовжніх хвиль до поперечних, здійснюється за рахунок параметрично-резонансної взаємодії між хвилями сигналу, накачки і хвилею просторового заряду. Таким чином, виходить якісно новий тип посилення.

Відомо, що коефіцієнт посилення в супергетеродинних лазерах на вільних електронах в режимі сильної накачки має такий вигляд [14–15]:

$$K_c = \alpha_2 e^{\alpha_1 L} - \alpha_1 e^{\alpha_2 L} / \alpha_2 - \alpha_1, \quad (0.1)$$

де  $\alpha_{1,2} = \Gamma/2 \pm (\Gamma^2/4 + \alpha_p^2)^{1/2}$  — інкремент наростання системи,  $L$  — довжина області взаємодії хвиль,  $\Gamma$  — інкремент наростання додаткового механізму посилення,  $\alpha_p$  — інкремент наростання параметричної нестійкості. Як впливає з виразу (0.1) при відсутності додаткового



механізму посилення  $\Gamma = 0$ , посилення хвиль в системі здійснюється за рахунок параметричної нестійкості з інкрементом  $\alpha_p$ , що відповідає параметричним ЛВЕ. З огляду на умову  $4\alpha_p^2 \ll \Gamma^2$  в (0.1), які представляють практичний інтерес, отримаємо коефіцієнт посилення системи в більш простому вигляді:

$$K_c \cong 1 + \alpha_p^2 \cdot \exp(\Gamma \cdot L) / \Gamma^2. \quad (0.2)$$

Співвідношення (0.2) демонструє, що хвиля сигналу в супергетеродинних ЛВЕ нарастає експонентно за рахунок інкремента додаткової нестійкості  $\Gamma$ . Однак, з цього виразу також випливає, що оскільки інкремент параметричної нестійкості також визначає загальний коефіцієнт посилення, то він не повинен бути надто малим. Для ілюстрації ефективності такого типу посилення розглянемо чисельні оцінки. При  $\Gamma \sim 0,15 \text{ см}^{-1}$ ,  $\alpha_p \sim 0,01 \text{ см}^{-1}$ ,  $L \sim 100 \text{ см}$  отримуємо  $K_c \sim 1,5 \cdot 10^4$ , за відсутності додаткового механізму посилення ( $\Gamma = 0$ ) коефіцієнт посилення системи знаходимо зі співвідношення (0.1), який дорівнює  $K_c \sim 1,5$ . Отже, використання принципу супергетеродинного підсилення в лазерах на вільних електронах дозволяє збільшити коефіцієнт посилення електромагнітної хвилі сигналу на чотири порядки.

Лазери на вільних електронах, які засновані на ефекті супергетеродинного підсилення називають супергетеродинними ЛВЕ. Залежно від застосування типу додаткового посилення (плазмово-пучкова, двопотокова нестійкості) розрізняють плазмово-пучковий, двопотоковий і т.д. супергетеродинні ЛВЕ. Завдяки високим підсилювальним характеристикам в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль, даний тип приладів сильнотрумової електроніки досліджується в багатьох працях [5–7, 14–23, 49–67 и т.д.]. У цих працях аналізувався вплив поздовжнього

магнітного поля, різних типів накачок, власних електричних і магнітних полів і т.п. на ефективність роботи СЛВЕ.

З аналізу літератури з'ясовано, що супергетеродинні ЛВЕ характеризуються на порядок більшими значеннями інкремента наростання хвиль в порівнянні з традиційними параметричними ЛСЕ при еквівалентних параметрах систем. Отже, такі прилади можуть використовувати накачку з меншими амплітудами електромагнітних полів. Це в свою чергу дозволяє отримувати в СЛВЕ еквівалентне з параметричними ЛВЕ посилення когерентних електромагнітних хвиль при менших габаритах системи. Саме тому дослідження супергетеродинних лазерів на вільних електронах є задачею важливою і актуальною.

## **1.2 Плазмово-пучкові супергетеродинні лазери на вільних електронах**

Використання плазмово-пучкових систем для генерації потужного когерентного електромагнітного випромінювання вперше було запропоновано в працях [68–69]. Взаємодія електронного пучка з плазмою призводить до експоненціального наростання амплітуди електромагнітного випромінювання, це явище отримало назву плазмово-пучкової нестійкості. Після того, як цей ефект був експериментально підтверджений [70–72], були зроблені спроби створення нових надпотужних плазмово-подібних приладів в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль, які базуються на плазмово-пучковій нестійкості. Однак ці спроби зазнали невдачі, тому що такий тип приладів зіткнувся з низкою проблем, які вирішити на той час було неможливо. Одна з таких проблем була пов'язана з введенням і виведенням електромагнітного сигналу в плазму. Друга проблема, пов'язана зі створенням стійкої плазми, яка мала б щільність порядку  $10^{12} - 10^{15} \text{ см}^{-3}$ . Така щільність необхідна для генерації електромагнітного випромінювання в міліметровому і субміліметровому діапазоні довжин хвиль.

Потім в результаті стрімкого розвитку прискорювальної техніки стало можливо формувати сильнострумові релятивістські електронні пучки, струми яких значно перевищують граничний вакуумний струм. Застосування цих пучків в плазмовій НВЧ електроніці дозволило вирішити деякі проблеми, наведені вище. Так як швидкість пучка приблизно дорівнює швидкості світла у вакуумі, то зникає необхідність в уповільненні електромагнітної хвилі (випромінювання). Таким чином, електромагнітна хвиля з високою фазовою швидкістю, може легко бути виведена з плазми. А завдяки тому, що плазма здатна нейтралізувати ефекти просторового заряду пучка, стало можливо використовувати струми, які перевищують граничний вакуумний струм, а це в свою чергу призводить до збільшення потужності випромінювання. Все це послужило до створення нового типу пристроїв короткохвильового діапазону довжин хвиль, які отримали назву плазмових релятивістських генераторів. Відзначимо, що плазмово-пучкова нестійкість [73-92] володіє рекордно великими значеннями інкремента наростання поздовжніх хвиль. Саме тому, на її основі будуються потужні генератори і підсилювачі електромагнітного випромінювання в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль [93–102]. Цей клас приладів має ряд переваг в порівнянні з вакуумними СВЧ генераторами. Основними перевагами плазмових СВЧ генераторів, є швидка перебудова частоти випромінювання (за час 30 мкс) за рахунок зміни щільності плазми і велика пропускна здатність (20...30%). Також, плазмові СВЧ генератори використовують РЕП працюють в імпульсному режимі, з тривалістю імпульсу близько 100 нс. За рахунок цього такі прилади позбавлені ряду проблем, які пов'язані з розвитком низькочастотних нестійкостей плазми. Тому плазмові релятивістські підсилювачі або генератори в даний час становлять великий інтерес для вирішення ряду прикладних задач.

Однак, не дивлячись на високі можливості посилення і інші переваги, в плазмових релятивістських генераторах існує проблема перетворення енергії поздовжніх плазмових коливань в енергію поперечних електромагнітних хвиль. Як писалося в попередньому підрозділі, для вирішення даної

проблеми було запропоновано новий тип посилення електромагнітних хвиль [14–15], який об'єднує додатковий механізм посилення (плазмово-пучкова, двопотокова, циклотронна нестійкості і т.д.) і трьох хвильовій параметричний резонанс (комбінаційний резонанс). Таким чином, системи засновані на такому типі посилення мають переваги плазмових релятивістських генераторів, але при цьому позбавлені їх деяких недоліків. До таких приладів відносяться супергетеродинні лазери на вільних електронах. Залежно від типу нестійкості, яку вони використовують, розрізняють плазмово-пучковий супергетеродинний лазер на вільних електронах [15], двопотоковий супергетеродинний лазер на вільних електронах [17] и т.п. Порівняльний аналіз плазмово-пучкових СЛВЕ і двопотокових СЛВЕ, показав, що при однакових параметрах систем, плазмово-пучкові СЛВЕ мають на порядок більші значення інкрементів наростання хвиль. У дисертаційній роботі досліджуються плазмово-пучкові СЛВЕ.

Також в залежності від типу накачки розрізняють два типу плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ. Плазмово-пучкові СЛВЕ, що використовують накачку у вигляді потужної низькочастотної циркулярно-поляризованої електромагнітної хвилі, називають доплертронном [2–4]. Накачування у вигляді періодичного реверсивно магнітного поля використовують Н-убітронні плазмово-пучкові СЛВЕ [1]. У працях [32–33] були побудовані кубічно-нелінійні теорії плазмово-пучкових СЛСЕ з прямолінійними РЕП доплертронного і Н-убітронного типів. Для даного типу приладів були отримані кубічно-нелінійні системи диференціальних рівнянь комплексних амплітуд полів взаємодіючих хвиль з урахуванням численних параметричних взаємодій. Отримані інкременти наростання в цих системах, характеризуються виключно великими значеннями в порівнянні з параметричними ЛВЕ. З'ясовано, що напрямок обертання вектора напруженості електричного поля хвилі сигналу і вектора напруженості електричного поля хвилі накачування (або вектора індукції магнітного поля)

повинні збігатися, в іншому випадку параметричного зв'язку між хвилями сигналу, накачування і ВПЗ не буде [32–33]. Також досліджені для цих систем механізми насичення і вплив вищих гармонік ВПЗ на динаміку хвиль системи. Показано, що плазмово-пучкові СЛВЕ з прямолінійними РЕП можуть формувати досить потужний електромагнітний сигнал в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль.

У праці [112] досліджувався параметричний ЛВЕ доплертронного типу з прямолінійним РЕП. Тут було з'ясовано, що незвичайна електромагнітна хвиля сигналу може поширюватися в двох напрямках системи, як назустріч, так і вздовж поширення релятивістського електронного пучка (хвильовий вектор сигнальної хвилі може приймати як додатне, так і від'ємне значення). У праці [33] в плазмово-пучковому СЛВЕ з прямолінійним РЕП доплертронного типу досліджувався тільки один режим, в якому звичайна електромагнітна хвиля сигналу поширюється на зустріч електронному пучку. З урахуванням результатів отриманих в працях [111–112] можна зробити висновок про те, що в цьому пристрої можуть реалізовуватися і інші режими взаємодії хвиль сигналу, накачки і ВПЗ. Тому виникає задача визначення оптимальних режимів роботи плазмово-пучкового СЛВЕ доплертронного типу з гвинтовим РЕП.

Аналіз літературних джерел також показав, що поліпшити коефіцієнт посилення в плазмово-пучкових системах з поздовжнім магнітним полем, можна завдяки використанню гвинтових релятивістських електронних пучків [24–31, 59–67, 103–110]. Під гвинтовим пучком тут розуміється релятивістський електронний пучок, який інжектується в плазму під кутом до зовнішнього фокусуєчого магнітного поля. До даної роботи ефективність застосування гвинтових релятивістських електронних пучків в плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах Н-убітронного і доплертронного типів досліджена була. Таким чином, стає доцільно проаналізувати вплив гвинтових РЕП на динаміку хвиль в плазмово-пучкових системах із зовнішнім поздовжнім магнітним полем, так як

збільшення потужності приладів міліметрового та субміліметрового діапазону довжин хвиль, завдання важливе та актуальне.

Як говорилося раніше, зараз інтенсивно досліджуються підсилювачі і генератори когерентного електромагнітного випромінювання в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль, які засновані на пучкових нестійкостях [93–102]. Відзначимо, що однією з особливостей таких пристроїв, є генерація вищих гармонік хвиль. Це пов'язано з тим, що пучкові нестійкості характеризуються лінійним законом дисперсії і тому між вищими гармоніками таких хвиль здійснюються численні параметричні взаємодії. З'ясовано, що такі взаємодії якісно впливають на динаміку хвиль в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з прямолінійними пучками [32–33]. Отже, можна припустити, що і в плазмово-пучкових СЛВЕ з гвинтовими РЕП також матиме місце генерація вищих гармонік хвилі просторового заряду. Тому в дисертаційній роботі виникає необхідність дослідження особливостей мультігармонічних взаємодій хвиль в плазмово-пучкових СЛВЕ з гвинтовими РЕП.

### **1.3 Особливості резонансних взаємодій в плазмово-пучкових системах з гвинтовими електронними пучками**

Можливість використання електронних пучків, що обертаються в поздовжньому магнітному полі для отримання когерентного електромагнітного випромінювання, вперше була теоретично показана, незалежно один від одного А.В. Гапоновим-Греховим [114] і Дж. Шнайдером [115]. Підхід, який використовується в [114] був класичним, а в [115] — квантово-механічним. В один час з теоретичними працями, були отримані і експериментальні результати, що підтверджують можливість ефективної взаємодії гвинтових електронних пучків з електромагнітними хвилями [116–117]. Особливістю таких взаємодій є необхідність врахування релятивістських ефектів, тому що ці ефекти призводять до нового типу

групування електронів. Внаслідок того, що частота обертання електронів в подовжньому магнітному полі залежить від їх швидкості руху, виникає просторове групування електронів.

Після теоретичного опису та експериментального підтвердження можливості отримання індукованого випромінювання при взаємодії гвинтових електронних пучків з високочастотними електромагнітними полями, гвинтові пучки почали активно використовуватися в СВЧ електроніці. Підсилювачі або генератори, в яких під дією однорідних полів електрони здійснюють періодичні гвинтові коливання, є найбільш ефективними для отримання високих потужностей в міліметровому і субміліметровому діапазонах довжин хвиль. Гвинтові пучки використовуються в Мазер на циклотронному резонансі (МЦР), гіро-ЛБХ, гіро ЛОВ, лазерах на вільних електронах і т.д. [118–128]. Серед різновидів МЦР потрібно виділити гіротрони, яким вдалося отримати вихідну потужність 210 кВт з тривалістю імпульсу 40 мкс на частотах до 670 ГГц [123–128]. Однак зазначимо, що в даному класі приладів зі збільшенням частоти електромагнітної хвилі сигналу потужність істотно зменшується.

Як відомо, для збільшення потужності в надвисокочастотній електроніці використовують електронні пучки з високими значеннями струмів. Вакуумні підсилювачі і генератори електромагнітного випромінювання не можуть використовувати пучки з струмами, що перевищують значення граничного вакуумного струму [73–81]. Для того щоб використовувати сильноструменеві пучки, необхідне середовище яке здатне компенсувати просторовий заряд пучка. В якості такого середовища використовуються плазмово-пучкові системи [129–132] з досить щільної плазмою ( $n_b \ll n_p$ ,  $n_b$  — концентрація пучка;  $n_p$  — концентрація плазми). Відзначимо, що в багатьох плазмово-пучкових системах плазму утримують за допомогою фокусуєчих подовжніх магнітних полів, завдяки цьому в таких системах стає можливим використовувати сильноструменеві гвинтові електронні пучки.

Розвиток техніки формування сильноточових релятивістських електронних пучків, а також можливість трансформації енергії електронних хвиль в енергію електромагнітного випромінювання сприяло появі нового класу приладів, які здатні генерувати і підсилювати потужне когерентне електромагнітне випромінювання в короткохвильовому діапазоні довжин хвиль - супергетеродинних лазерів на вільних електронах [5–7, 14–23, 49–67 и т.д.]. У супергетеродинних ЛВЕ, як писалося раніше, використовуються плазмово-пучкові системи, тому що в даному типі приладів основне посилення електромагнітного сигналу досягається за рахунок пучкових нестійкостей, які в свою чергу порушуються в плазмopodobних системах.

Ідея використання двопотокової нестійкості в ЛВЕ з гвинтовими релятивістськими електронними пучками для збільшення ефективності електромагнітного випромінювання вперше була запропонована у праці [133]. Однак, на відміну від супергетеродинних ЛВЕ, в цьому приладі ефект двопотокової нестійкості використовувався для попередньої угруповання електронних пучків, які більш ефективно взаємодіють з електромагнітною хвилею. Тому даний прилад не можна віднести до класу супергетеродинних ЛВЕ. Перший супергетеродинний ЛВЕ був заснований на ефекті плазмово-пучкової нестійкості [15–16], потім був запропонований СЛВЕ, який в якості додаткового механізму посилення використовує двухпотокову нестійкість [15]. Починаючи з перших робіт [15–16] і до сьогоднішніх днів різними дослідниками досить інтенсивно досліджуються різноманітні конструкції СЛВЕ [6–8, 18–23, 49–67 и т.д.]. Супергетеродинні ЛВЕ з гвинтовими електронними пучками, які працюють в монохроматичному режимі, досить активно досліджуються різними науковими групами [24–31, 59–67].

В праці [24] розглядалося взаємодія електромагнітних циклотронних хвиль з замагніченою плазмово-пучковою системою, в якій електронний пучок обертається в магнітному полі. Було показано, що така взаємодія може використовуватися в джерелах потужного когерентного електромагнітного випромінювання в короткохвильовому діапазоні. Плазма, хоч і пасивно,



відіграє основну роль у такому режимі взаємодії. Аналітично та чисельно було отримано, що електронний ККД може досягати значень понад  $\sim 18\%$ .

В праці [25] автором був запропонований двопотоковий мазер на циклотронному резонансі, який працює в мм - субмм діапазонах довжин хвиль. Тут було показано, що в даному приладі робоча частота обернено пропорційна різниці швидкостей пучків і може досягатися при досить низьких енергіях пучків і слабкому фокусуєчому магнітному полі. Встановлено, що до високочастотного групування пучків призводить їх взаємодія з циклотронними хвилями. А для взаємодії двошвидкісних електронних пучків з циклотронними модами, електрони повинні мати спочатку перпендикулярну енергію, так же як в гіротронах, МЦР и т.п.

В працях [26–27, 29–31, 59–60] теоретично досліджувалися допотокові СЛВЕ з гвинтовими електронними пучками. Отримано дисперсійні залежності хвиль в таких приладах [26–27, 59–60]. У працях [29–30] досліджені коефіцієнти посилення електромагнітних хвиль, з'ясовано, що дані СЛВЕ характеризуються виключно високими значеннями інкрементів наростання двопотокової нестійкості. За допомогою чисельного аналізу було встановлено, що присутність поздовжнього магнітного поля призводить до підвищення темпів зростання хвилі сигналу. Однак, коли індукція магнітного поля перевищує оптимальне значення, ефективність роботи СЛСЕ зменшується, тому що потужне поздовжнє магнітне поле обмежує поперечну швидкість потоку, що в свою чергу призводить до зниження ефективності взаємодії високочастотної хвилі з електронами пучка.

Вплив електромагнітних полів, які збуджуються релятивістським електронними пучками на процеси посилення в СЛВЕ проаналізовано в роботах [61–62]. Для деяких режимів роботи двопотоковго СЛВЕ були визначені механізми насичення [31, 63]. Також в лінійному наближенні досліджено в [64–66] вплив теплового розкиду електронів на фізичні процеси двухпотоковая СЛВЕ.

З огляду літературних джерел з'ясовано, що збільшення потужності приладів міліметрового та субміліметрового діапазону довжин хвиль завдання досить важлива. До цієї роботи ефективність застосування гвинтових електронних пучків в плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах Н-убітронного і доплертонного типів досліджена була. Таким чином, дослідження впливу релятивістських гвинтових електронних пучків на динаміку хвиль в плазмово-пучкових системах із зовнішнім поздовжнім магнітним полем є завданням важливою і актуальною.

#### **1.4 Основні теоретичні підходи в теорії сильнострумів ЛВЕ**

Як відомо в плазмово-пучкових СЛСЕ збуджується хвиля просторового заряду, яка наростає за рахунок плазмово-пучкової нестійкості. Така нестійкість характеризується виключно високими значеннями інкремента наростання. Відзначимо, що завдяки лінійної дисперсії хвилі ВПЗ, між гармоніками можуть виникати нелінійні резонансні взаємодії, в результаті яких порушуються вищі гармоніки з порівнянними амплітудами. Тому, в супергетеродинних ЛСЕ бере участь в параметричному взаємодії велика кількість гармонік хвилі просторового заряду. У зв'язку з цим супергетеродинні ЛСЕ слід розглядати як релятивістські сільноточні електронні прилади. Таким чином, для аналізу фізичних процесів в таких приладах необхідно використовувати підходи, які застосовуються в сильнострумової релятивістської електроніці. Розглянемо основні теоретичні методи, що використовуються в побудові теорій сільноточних ЛСЕ.

Тривалий час квантово-механічні методи в теорії ЛВЕ залишалися єдиними [1]. Потім з'ясувалося, що базові робочі механізми ЛВЕ є класичними [134] і опис основних фізичних явищ в ЛВЕ можливо при використанні класичного підходу. Відзначимо, що в рамках квантової теорії однією з основних труднощів є опис колективних ефектів, які проявляються

в пучках з високою щільністю електронів. Тому квантово-механічний опис фізичних процесів в сильнострумових ЛВЕ має обмежену сферу застосування [135]. Для вивчення фізичних процесів в сильнострумових лазерах на вільних електронах найбільш загальними, є підходи засновані на методах теорії плазми [6–8, 73–81]. Релятивістський електронний пучок в такому випадку розглядається як потік дрейфуючій плазми.

Теорія сильнострумових лазерів на вільних електронах, при кінетичному описі плазми ґрунтується на самоузгодженому вирішенні кінетичного рівняння і рівнянь Максвелла [73–79, 136–138]. Щільність зарядів і струмів визначаються за допомогою функції розподілу. Такий підхід дозволяє послідовно описати фізичні процеси в електронних пучках з малою щільністю, і в інтенсивних пучках, в яких колективні ефекти грають важливу роль. Складність використання методу кінетичного рівняння при чисельному аналізі, а також одержання аналітичних рішень, є основним недоліком даного підходу.

У ряді завдань нехтують зіткненнями між зарядженими частинками, в такому випадку інтеграл зіткнень в кінетичному рівнянні Больцмана стає рівним нулю. Функцію розподілу тут подають як одночасткову функцію розподілу, яка визначає щільність ймовірності знаходження частинки плазми в заданий момент часу і точці фазового простору. Таке завдання зводиться до знаходження самоузгодженого рішення кінетичного рівняння Власова і рівнянь Максвелла в беззіткненній межі [73–79, 139]. У теорії плазми кінетичне рівняння зазвичай вирішують за допомогою методу інтегрування за початковими даними [75–76, 79]. Труднощі цього методу полягають у тому, що рішення задачі руху має бути заданим аналітично у вигляді інтеграла за початковими даними.

Також для плазми без зіткнень застосовують гідродинамічний опис [73–79, 140–142]. Такий опис допустимий для так званої холодної плазми, яка поводить себе як потік провідної рідини. Замкнута система рівнянь гідродинаміки складається з рівняння Ейлера і рівняння безперервності для

кожного сорту частинок плазми. В рамках даного методу за допомогою квазігідродинамічного рівняння знаходять гідродинамічну швидкість (імпульс) і концентрацію. Щільність струму і заряду визначаються через гідродинамічну швидкість і концентрацію. Рівняння гідродинаміки спільно з рівняннями Максвелла утворюють повну систему рівнянь для опису самоузгодженого руху частинок плазми з збудженням електромагнітними полями. Хоч квазігідродинамічний опис плазми є і менш загальним в порівнянні з кінетичним підходом, але він набагато простіше. Однак не всі процеси в холодній плазмі можна описати за допомогою гідродинаміки.

Серед підходів теорії плазми також застосовується метод квазіблоховських рівнянь [134, 143–144]. У цьому методі за допомогою кінетичного рівняння записують систему квазіблоховських рівнянь для повільно змінюючихся амплітуд гармонік функції розподілу. Для опису фізичних процесів в досліджуваній системі, необхідно знайти самоузгоджене рішення системи укорочених квазіблоховських рівнянь і укорочених рівнянь для електромагнітних полів. Недоліки цього методу пов'язані зі складністю отримання аналітичних рішень [145].

При побудові теорії сильнострумів ЛВЕ одним з перших «класичних» був метод одночасткових струмів (динаміка одного електрона). Метод одночасткових струмів [146–149] базується на рівняннях Максвелла і релятивістському рівнянні руху окремо взятого електрона в електромагнітних полях. Щільність струму електронного пучка знаходиться як сукупність струмів, створених окремими електронами, які мають різні початкові координати і швидкості. В результаті отримуємо самоузгоджену систему рівнянь, в яку входять релятивістське рівняння руху електрона і рівняння для амплітуди поля хвилі сигналу. Далі отримана система пов'язаних рівнянь аналізується чисельними методами. Результати розрахунків, отримані за допомогою методу одночасткових струмів, добре узгоджуються з експериментальними даними. Саме це є основною перевагою даного методу. Однак слід зазначити, що даний метод є дуже складним, і в

основному спирається на чисельний аналіз. Аналітичний аналіз сильнострумівих ЛВЕ за допомогою методу одночасткових струмів стає досить складним завданням. Внаслідок цього стає неможливим розуміння фізики багатьох процесів, що протікають в досліджуваних сильнострумівих пристроях. Крім цього, за допомогою методу одночасткових струмів досить важко аналізувати колективні ефекти, які починають проявлятися при підвищенні щільності пучка.

Серед інших методів заснованих на чисельному аналізі слід зазначити метод великих часток. Існує ряд теорій сильнострумівих ЛВЕ в яких використовується даний метод [150–155]. Його відмінність від методу одночасткових струмів полягає в тому, що для дослідження системи береться не один окремо взятий електрон, а групи електронів з близькими координатами і швидкостями. Переваги і недоліки цього методу такі ж, як і у методу одночасткових струмів. Даний метод широко застосовують для перевірки результатів отриманих за допомогою інших теоретичних підходів.

У теорії сильнострумівих ЛВЕ також широко використовують методи ієрархічного підходу до теорії коливань і хвиль [5–8, 156–158]. До таких методів відносять: метод усередненого кінетичного рівняння, метод квазігідродінамічного рівняння і метод усереднених характеристик. Відзначимо, що методи усередненого кінетичного і квазігідродінамічного рівняння є окремими випадками методу усереднених характеристик. Метод усереднених характеристик розроблявся як базовий і універсальний при вирішенні систем диференціальних рівнянь в приватних похідних і з швидкоосцилювальними правими частинами. Даний метод заснований на методах асимптотичного інтегрування [159–160] і стандартному методі характеристик. Алгоритм обчислень даного методу можна умовно розділити на три основних етапи. На першому етапі вихідну систему рівнянь в часткових похідних, які перебувають на нульовому рівні ієрархії, перетворюють до системи укорочених рівнянь (рівнянь вищого рівня ієрархії). На цьому етапі за допомогою заміни Крилова-Боголюбова

здійснюється перехід до усереднених змінних, що не залежать від швидкоосцилюючих фаз. На другому етапі шукаються рішення системи укорочених рівнянь вищого ієрархічного рівня. Основна цінність укорочених рівнянь полягає в їх простоті. На відміну від випадку вихідної системи для їх інтегрування можна використовувати традиційні чисельні або аналітичні методи математичної фізики. На третьому етапі проводиться зворотне перетворення отриманих рішень, тобто перехід від найвищого ієрархічного рівня до нульового.

Перевагою методу усереднених характеристик в порівнянні з іншими методами теорії сильнострумових ЛВЕ є те, що він базується на математично обґрунтованих асимптотичних схемах і при цьому має переваги плазмового підходу. Потрібно відзначити, що метод усереднених характеристик успішно застосовується для аналізу складних мультигармонічних взаємодій хвиль в супергетеродинних ЛВЕ, тобто дозволяє аналізувати параметрично-резонансні взаємодії, в яких бере участь велика кількість гармонік. При цьому важливо відзначити, що одну частину результатів можна отримати в аналітичному вигляді, а іншу у вигляді добре адаптованому для чисельного аналізу.

На основі літературного аналізу теоретичних методів застосовуваних в теоріях сильнострумових лазерах на вільних електронах був зроблений висновок, що для дослідження мультигармонічних процесів в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ з гвинтовими релятивістськими електронними пучками найбільш ефективним, є метод усереднених характеристик. Тому, в даній дисертаційній роботі базовим при вирішенні самоузгодженого завдання руху електронного пучка в заданих електромагнітних полях є метод усереднених характеристик.

## 1.5 Висновки до розділу 1

1. В результаті літературного аналізу було визначено, що серед різних типів лазерів на вільних електронах, що працюють в міліметровому діапазоні довжин хвиль найбільшими значеннями коефіцієнтів посилення при менших габаритах і значеннях амплітуди поля накачування, характеризуються супергетеродинні лазери на вільних електронах. Тому дослідження такого класу приладів заслуговує на особливу увагу серед завдань релятивістської сильнострумової електроніки.

2. Як показав огляд літературних джерел для підвищення ефективності роботи приладів сильнострумової електроніки з поздовжнім фокусуючим магнітним полем, використовують гвинтові релятивістські електронні пучки. Встановлено, що невивченою є завдання нелінійного аналізу рівнів і механізмів насичення хвиль в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими РЕП. Тому виникає необхідність в проведенні такого аналізу для визначення найбільш ефективних режимів роботи приладу.

3. З'ясовано, що в сильнострумових ЛВЕ в яких хвилі з лінійною дисперсією посилюються за рахунок пучкових нестійкостей має місце порушення вищих гармонік хвиль. Такі мультигармонічні процеси якісно впливають на динаміку хвиль приладу, а саме істотно зменшують рівні насичення хвилі сигналу. Дослідження впливу мультигармонічних взаємодій хвиль на підсилювальні властивості плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими електронними пучками раніше не проводилося. Тому виникає необхідність в побудові мультигармонічних кубічно-нелінійних теорій плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими електронними пучками.

4. Аналіз літератури показав, що облік множинних резонансів між гармоніками взаємодіючих хвиль в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ, є досить складною математичною задачею. З'ясовано, що серед різних методів сильнострумової електроніки найбільш ефективним для вирішення мультигармонічних завдань в плазмово-пучкових СЛВЕ є метод усереднених характеристик.



## РАЗДЕЛ 2

### ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК У ПЛАЗМОВО-ПУЧКОВИХ СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ ЛАЗЕРАХ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ

В даному розділі викладені особливості застосування методу усереднених характеристик при вирішенні задачі руху і безперервності в плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками. Для опису множинних параметричних взаємодій гармонік хвиль з гвинтовими релятивістськими електронними пучками була проведена модернізація методу усереднених характеристик, в частині побудови схеми асимптотичного інтегрування. Основні наукові результати розділу опубліковані в роботах [36, 39, 46].

#### **2.1 Модель. Вихідні рівняння**

У досліджуваних моделях плазмово-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах використовуються сильнострумові гвинтові релятивістські електронні пучки. Відомо, що на рух таких пучків сильно впливає власний статичний заряд. Для того щоб компенсувати просторовий заряд пучка, використовують фокусуючі поздовжні магнітні поля, іонний фон, який вважається нерухомим відносно руху пучка і т.д. У досліджуваних моделях лазерів на вільних електронах враховувалося, що статичне поле просторового заряду компенсовано одним з можливих способів. Таким чином, електронний пучок вважаємо зарядово-скомпенсованим. Також враховуємо, що діаметр досліджуваних гвинтових релятивістських електронних пучків не перевищує  $\sim 1$  см. При цьому довжина досліджуваних хвиль знаходиться в діапазоні 2,0-0,5 мм. Таким чином, поперечні розміри пучка значно перевищують довжину хвиль, які поширюються в

досліджуваних системах. У цьому випадку пучок можна вважати поперечно необмеженим.

Відомо, що тепловою швидкістю частинок можна знехтувати, якщо раз-мір неоднорідностей змінного поля набагато більший дебаєвського радіусу екранування [5, 76, 118–119, 162–163]. Умова знехтування тепловим рухом можна записати в такому вигляді

$$v_T \ll v_{ph}, \quad (2.1)$$

де  $v_T$  — середньоквадратична тепла швидкість руху;

$v_{ph}$  — фазова швидкість хвилі.

Сильнострумові гвинтові РЕП, які використовуються в досліджуваних системах, характеризуються температурою близько  $10^4$  К, таким чином тепла швидкість частинок в таких пучках не перевищує  $6 \cdot 10^7$  м/с. При цьому фазові швидкості досліджуваних хвиль близькі до швидкості світла  $c \sim 3 \cdot 10^8$  м/с. Отже умова (2.1) виконується з високою точністю, і тому тепловою швидкістю частинок в досліджуваних плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах будемо нехтувати.

При розгляді плазмово-пучкових систем зіткненнями між частинками пучка і плазми можна знехтувати. Такий опис плазми може бути застосовано для тих процесів, які протікають за час, менший вільного пробігу частинок. Тому частоти досліджуваних хвиль повинні набагато перевищувати частоту зіткнень між частинками

$$\omega \gg \nu. \quad (2.2)$$

В результаті аналізу співвідношення (2.2), відносно задач плазмової сильнострумової електроніки [5, 76, 118-119, 162-163], було з'ясовано, що електронні пучки і плазмові системи, які застосовуються в таких задачах, у багатьох випадках вважаються беззіткненими.

Таким чином, гвинтові релятивістські електронні пучки і плазмові системи, які досліджуються в дисертаційній роботі, можна вважати холодними і безіткненними

$$v = 0, v_T = 0. \quad (2.3)$$

У дисертаційній роботі досліджуються взаємодії електромагнітних хвиль в плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками. Узагальнена схема таких взаємодій представлена на рис. 2.1. Плазмове середовище 1, яке характеризується ленгмюровською частотою  $\omega_p$ , знаходиться в поздовжньому фокусуєчому магнітному полі з індукцією  $B_0$ . У це середовище інжектується електронний пучок 2. Вектор швидкості електронів пучка  $\mathbf{v}_b$  спрямований під кутом  $\beta$  відносно вектора індукції фокусуєчого магнітного поля  $\mathbf{B}_0$  (рис. 2.1), так що  $\text{tg}\beta = v_{b\perp} / v_{bz}$ , де  $v_{b\perp} = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2}$  і  $v_{bz}$  – поперечна і поздовжня компоненти швидкості електронів пучка. Ленгмюровська частота електронного пучка  $\omega_b, \omega_b \ll \omega_p$ . Під дією поздовжнього магнітного поля електрони плазмово-пучкової системи обертаються з частотою  $\omega_H = B_0 e / m_e c$ .

Вважаємо, що  $\omega_H \ll \omega_p$ . Відзначимо, що в залежності від типу накачування плазмово-пучкові СЛСЕ бувають двох типів: доплертронний (накачування у вигляді потужної низькочастотної електромагнітної хвилі) і Н-убітронний (накачування у вигляді періодичного реверсивного магнітного поля). Система накачування 3 (рис. 2.1) характеризується частотою  $\omega_{2,1}$  і хвильовим числом  $k_{2,1}$ . Також на вхід системи подається слабка високочастотна циркулярно-поляризована електромагнітна хвиля сигналу з частотою  $\omega_{1,1}$  і хвильовим числом  $k_{1,1}$ . В результаті параметрично-резонансної взаємодії між хвилями сигналу і накачування в плазмі

збуджується хвиля просторового заряду, яка характеризується частотою  $\omega_{3,1}$  і хвильовим числом  $k_{3,1}$ .

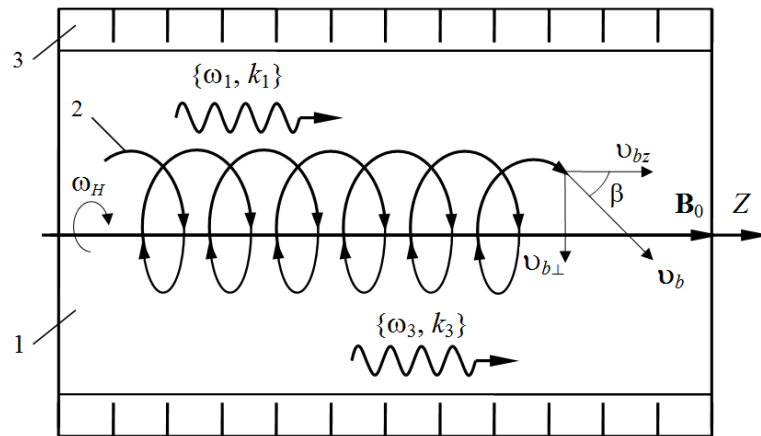


Рисунок 2.1 - Узагальнена схема взаємодії хвиль в плазмово-пучковим супер-гетеродинам ЛСЕ з гвинтовим релятивістським електронним пучком

Умова параметричного резонансу між хвилями сигналу, накачування і ВПЗ в плазмово-пучковій системі має такий вигляд:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1} - \omega_{2,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (2.4)$$

При використанні гвинтового релятивістського електронного пучка в плазмово-пучковому супергетеродинам ЛСЕ мають місце коливання на релятивістській циклотронній частоті  $\omega_H/\bar{\gamma}_b$ . Тому в системі виникають додаткові резонансні умови, які мають такий вигляд

$$\begin{aligned} \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b) - (\omega_{2,1} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b), \\ \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b) - (\omega_{2,1} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b), \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

У супергетеродинних лазерах на вільних електронах має місце ефект супергетеродинного підсилення. Суть його полягає у використанні додаткового механізму посилення однієї з трьох хвиль, які беруть участь в параметричному резонансі. У досліджуваному приладі в якості додаткового механізму виступає посилення хвилі ВПЗ за рахунок плазмово-пучкової нестійкості [73-87]. Сам трьоххвильовий параметричний резонанс по суті зводиться лише до перенесення додаткового посилення з хвилі просторового заряду на електро-магнітну хвилю сигналу. Через те, що інкремент наростання плазмово-пучкової нестійкості є високими [73-87], коефіцієнт посилення електромагнітної хвилі виявляється також досить великим. Тому параметри системи необхідно вибирати таким чином, щоб в досліджуваній системі хвиля просторового заряду наростала за рахунок плазмово-пучкової нестійкості, а інкремент наростання першої гармоніки ВПЗ за рахунок плазмово-пучкової нестійкості був максимальним.

Також відзначимо, що однією із особливостей плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ є те, що хвиля просторового заряду, наростаюча за рахунок плазмово-пучкової нестійкості, характеризується квазілінійною дисперсійною залежністю [5, 32–33, 76]:

$$k_{3,m} \approx \omega_{3,m} / v_{bz} \quad (2.6)$$

де індекс « $m$ » — номер гармоніки;

$k_{3,m}$  — хвильове число  $m$ -й гармоніки;

$\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m$  — частота  $m$ -й гармоніки.

У зв'язку з цим частоти і хвильові числа  $m$ -х гармонік пропорційні номеру гармоніки  $m$ . Тому між гармоніками хвилі просторового заряду виникає безліч трьоххвильових параметричних резонансів, умови яких мають вигляд

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (2.7)$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b) + (\omega_{3,m_3} \mp \omega_H/\bar{\gamma}_b),$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b) + (\omega_{3,m_3} \mp 2\omega_H/\bar{\gamma}_b) \quad (2.8)$$

де  $m_1, m_2, m_3$  – номери гармонік хвилі просторового заряду. Такі трьоххвильові взаємодії призводять до порушення вищих гармонік ВПЗ. З огляду на (2.6), вирази (2.7) - (2.8) зводяться до загальної мультигармонічної умови

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (2.9)$$

Зауважимо, що номери гармонік є цілими числами. Тому умова (2.9) може бути виконано багатьма способами, наприклад,  $4 = 2 + 2$ ,  $3 = 4 - 1$  і так далі.

Для опису динаміки хвиль в плазмово-пучкових СЛСЕ з гвинтовими РЕП з урахуванням множинних параметричних взаємодій в якості вихідних будемо використовувати релятивістське квазігідродинамічне рівняння [58]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) + v \right\} \mathbf{v}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \mathbf{E})}{c^2} \right\} - \frac{v_{T,\alpha}^2}{3} \left\{ \frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial n_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\gamma_\alpha^2}{2c^2} \frac{\partial v_\alpha^2}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.10)$$

рівняння безперервності

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (n_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (2.11)$$

і рівняння Максвелла в диференційній формі

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 e n_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha=1}^2 e n_{\alpha}, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. (2.12)$$

де  $e = -|e|$  — заряд електрона;

$m_e$  — маса спокою електрона;

$\nu$  — частота зіткнень частинок;

$n_{\alpha}$  — концентрація  $\alpha$ -го сорту частинок;

$\gamma_{\alpha} = \left(1 - \mathbf{v}_{\alpha}^2 / c^2\right)^{-1/2}$  — релятивістський фактор  $\alpha$ -го сорту частинок;

$c$  — швидкість світла у вакуумі;

$\mathbf{v}_{\alpha}$  — вектор швидкості відповідного сорту частинок;

$\mathbf{r}$  — радіус-вектор;

$\mathbf{E}$  — напруженість електричного поля;

$\mathbf{B}$  — індукція магнітного поля.

## 2.2 Модернізований метод усереднених характеристик

Для пошуку самоузгодженого рішення квазігідродинамічного рівняння (2.10), рівняння безперервності (2.11) і рівнянь Максвелла (2.12) в досліджуваних системах, необхідно розбити задачу формально на три незалежні етапи:

1) пошук рішень задачі руху частинок плазми і гвинтового РЕП в заданих електромагнітних полях;

2) знаходження рішень задачі для концентрації електронів пучка і плазми, вважаючи, що швидкості і електромагнітні поля відомі;

3) рішення задачі збудження електромагнітних полів, враховуючи, що швидкості і концентрації частинок відомі функції

Задачу руху і безперервності будемо вирішувати за допомогою методу усереднених характеристик [36, 39], завдання збудження електромагнітних полів – за допомогою методу повільно змінних амплітуд. Наростання хвиль

в досліджуваних плазмово-пучкових системах будемо описувати в рамках тимчасової задачі. При розгляді такої модельної задачі вважається, що амплітуди і фази хвиль є функціями тільки часу. При цьому враховуємо, що початкові умови однакові в будь-якій точці простору. Розглянемо особливості застосування методу усереднених характеристик для вирішення завдання руху і безперервності в плазмово-пучковому супергетеродинному ЛСЕ з гвинтовими електронними пучками з урахуванням множинних параметричних резонансів вищих гармонік хвиль.

**При вирішенні задачі руху** будемо використовувати релятивістське квазігідродинамічне рівняння (2.10) з урахуванням співвідношень (2.3). Рішення рівняння (2.10) будемо шукати у рамках адіабатичного наближення, при якому початкові значення амплітуди поля приймаються рівними нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . У цьому випадку амплітуда поля повільно зростає за експоненціальним законом. Таким чином, часовий інтервал наростання амплітуди поля вигідно відрізняється від інших часових інтервалів процесів, які протікають в досліджуваних системах.

Отже, відповідно до методу усереднених характеристик [36] здійснюємо перехід від рівняння в приватних похідних (2.10) до його характеристик, рівнянь в повних похідних

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha}{c^2} \right) \\ \frac{d\gamma_\alpha}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha)}{c^2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Запишемо систему (2.13) через проекції векторів на осі  $x, y, z$ , а також доповнимо її рівняннями для швидких фаз. Вважаємо, що з часом  $t$  амплітуди хвиль змінюються повільно. Для опису такої залежності введемо повільний час  $\tau = t/\xi$ , де  $\xi$  — великий параметр задачі і має такий вигляд



$$\xi \sim \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \left/ \left| \frac{dx}{dt} \right| \right. \gg 1.$$

$\psi$  — швидка фаза;

$x$  — повільна змінна.

В результаті отримуємо систему рівнянь в стандартному вигляді [36, 39]:

$$\frac{dv_{\alpha x}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_{\alpha y} B_z - v_{\alpha z} B_y) - \frac{v_{\alpha x}}{c^2} (v_{\alpha x} E_x + v_{\alpha y} E_y + v_{\alpha z} E_z) \right], \quad (2.14)$$

$$\frac{dv_{\alpha y}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_y - \frac{1}{c} (v_{\alpha x} B_z - v_{\alpha z} B_x) - \frac{v_{\alpha y}}{c^2} (v_{\alpha x} E_x + v_{\alpha y} E_y + v_{\alpha z} E_z) \right], \quad (2.15)$$

$$\frac{dv_{\alpha z}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_z + \frac{1}{c} (v_{\alpha x} B_y - v_{\alpha y} B_x) - \frac{v_{\alpha z}}{c^2} (v_{\alpha x} E_x + v_{\alpha y} E_y + v_{\alpha z} E_z) \right], \quad (2.16)$$

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} [E_x v_{\alpha x} + E_y v_{\alpha y} + E_z v_{\alpha z}], \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi}, \quad (2.17)$$

$$\frac{dp_{1,\alpha}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{1,\alpha}, \quad \frac{dp_{2,\alpha}}{dt} = \omega_2 - k_2 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{2,\alpha}, \quad (2.18)$$

$$\frac{dp_{3,\alpha,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{\alpha z} \equiv \Omega_{3,\alpha,m} \quad (2.19)$$

де  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  — компоненти вектора напруженості електричного поля;

$B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  — компоненти вектора індукції магнітного поля;  $p_{1,\alpha} = \omega_1 t - k_1 z$  — фаза електромагнітної хвилі сигналу;

$p_{2,\alpha} = \omega_2 t - k_2 z$  — фаза накачування;

$p_{3,\alpha,m} = \omega_{3,m} t - k_{3,m} z$  — фаза електронної хвилі просторового заряду  $m$ -й гармоніки;

Рівняння (2.14)–(2.17) описують зміни повільних змінних, (2.18)–(2.19) — швидких.

У зв'язку з використанням гвинтових релятивістських електронних пучків в плазмово-пучкових СЛСЕ необхідно враховувати, що при не нульовому куті вльоту електронів пучка, відносно поздовжнього фокусирующего магнітного поля, електрони в невозмущеному стані рухаються по колах в поперечній площині з циклотронною частотою  $\omega_H$ . У зв'язку з цим в просторі швидкостей здійснюють перехід від прямокутної декартової системи координат  $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z})$  до циліндричної  $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha\perp}, p_{\alpha 0}, v_{\alpha z})$ , відповідна заміна записується в стандартному вигляді:

$$v_{\alpha x} = v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0}, \quad v_{\alpha y} = v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0}. \quad (2.20)$$

де  $p_{\alpha 0}$  — обертальна фаза  $\alpha$ -го сорту частинок;

$v_{\alpha\perp}$  — поперечна швидкість.

З урахуванням даної заміни рівняння руху (2.14)–(2.17) записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\alpha\perp}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} & \left[ \cos p_{\alpha 0} \left( E_x - \frac{v_{\alpha z}}{c} B_y \right) + \sin p_{\alpha 0} \left( E_y + \frac{v_{\alpha z}}{c} B_x \right) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\alpha\perp}}{c^2} \left( E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z} \right), \right. \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\alpha z}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} & \left[ E_z + \frac{v_{\alpha\perp}}{c} \left( B_y \cos p_{\alpha 0} - B_x \sin p_{\alpha 0} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\alpha z}}{c^2} \left( E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z} \right), \right. \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dt} = \frac{e}{m_e c^2} \left[ E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z} \right], \quad (2.23)$$

$$\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{\omega_H}{\gamma_\alpha} + \frac{e}{m_e \gamma_\alpha v_{\alpha \perp}} \left[ \cos p_{\alpha 0} \left( E_y + \frac{v_{\alpha z}}{c} B_x \right) - \sin p_{\alpha 0} \left( E_x - \frac{v_{\alpha z}}{c} B_y \right) \right] \equiv \Omega_{0\alpha}. \quad (2.24)$$

При використанні асимптотичних схем переходять до усереднених і осциляторних компонентів. Таким чином, заміну (2.20) записують в такому вигляді

$$v_{\alpha x} = (\bar{v}_{\alpha \perp} + \tilde{v}_{\alpha \perp}) \cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}), \quad v_{\alpha y} = (\bar{v}_{\alpha \perp} + \tilde{v}_{\alpha \perp}) \sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}). \quad (2.25)$$

де

$$\bar{p}_{\alpha 0} = -\int_0^t \frac{eB_0}{cm_e \bar{\gamma}_\alpha} dt'$$

— невозмущенная фаза обертання електронів в подовжньому магнітному полі;

$$\bar{v}_{\alpha \perp} = \sqrt{(1 - 1/\bar{\gamma}_\alpha^2)} \cdot \sin \beta \cdot c$$

— невозмущенная перпендикулярна складова вектора швидкості  $\alpha$ -го сорту пучка;

$\tilde{p}_{\alpha 0}$  — осциляторна складова фази обертання;

$\tilde{v}_{\alpha \perp}$  — осциляторна перпендикулярна компонента вектора швидкості пучка.

Пошук рішень системи (2.21)–(2.24) при використанні заміни (2.25) ускладнюється двома математичними проблемами. Перша проблема пов'язана з тим, що в рівнянні руху для фази  $p_{\alpha 0}$  (2.24) в знаменнику стоїть, перпендикулярна складова вектора швидкості  $v_{\alpha \perp}$ , а для плазми дана швидкість дорівнює нулю  $v_{p \perp} = 0$ . Таким чином, отримуємо ділення на нуль. Друга проблема обумовлена тим, що в заміні (2.25) аргумент функції

$\cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$  і  $\sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$  містить осциляторну періодичну функцію фази  $\tilde{p}_{\alpha 0}$ . Таким чином виникає необхідність розкладання цих функцій в ряд Фур'є-Бесселя. При цьому відзначимо, що необхідно рівняння Максвелла (2.12) розкласти в ряди Фур'є по гармонікам для отримання диференціальних рівнянь для комплексних амплітуд гармонік електромагнітних хвиль. Тому, щоб використовувати знайдені рішення системи (2.21)–(2.24) при знаходженні щільностей струму, які входять в рівняння Максвелла, необхідно провести зворотний перехід від функцій Бесселя до гармонічних функцій. У досліджуваних системах одночасно бере участь в трьоххвильовій резонансній взаємодії велика кількість гармонік ВПЗ. Тому прямі і зворотні перетворення в таких задачах стають досить незручними і громіздкими обчислювальними процедурами, які в свою чергу знижують ефективність обчислювального алгоритму. Отже, виникає питання про пошук більш оптимального алгоритму вирішення мультигармонічних задач в плазмово-пучкових СЛСЕ, що використовують гвинтові релятивістські електронні пучки.

Для вирішення вище викладених проблем у дисертаційній роботі пропонується ввести принципово іншу заміну змінних порівняно з (2.25), така заміна записується у вигляді

$$v_{\alpha x} = \bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}, \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}, \quad (2.26)$$

де  $\tilde{v}_{\alpha x}$ ,  $\tilde{v}_{\alpha y}$  — осциляторні  $x$ - і  $y$ - компоненти вектора швидкості пучка і плазми.

В результаті використання заміни (2.26) проводити прямі і зворотні перетворення Фур'є-Бесселя стало непотрібно. Так як функції  $\cos p_{\alpha 0}$  і  $\sin p_{\alpha 0}$  не залежать від осциляторної компоненти фази обертання  $\tilde{p}_{\alpha 0}$ . Також, застосовуючи заміну (2.26) в мультигармонічних задачах плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ з гвинтовими РЕП, вожно використовувати систему

рівнянь (2.14)–(2.17), але при цьому доповнивши її співвідношенням для швидкої обертаючої фази  $p_{0\alpha}$

$$\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{eB_0}{m_\alpha \gamma_\alpha} \equiv \Omega_{\alpha 0}. \quad (2.27)$$

Порівнюючи співвідношення (2.24) і (2.27) для фази обертання частинок  $\alpha$ -го сорту пучка бачимо, що останнє співвідношення набагато простіше. Також відзначимо, що в співвідношенні (2.27) на відміну від (2.24) немає доданка, в якому перпендикулярна складова вектора швидкості  $v_{\alpha\perp}$  знаходиться в знаменнику. Тому проблеми з діленням на нуль в цьому випадку немає.

Отже, для знаходження рішень системи (2.14)–(2.17) будемо використовувати метод усереднених характеристик [36, 39], а також заміну (2.26). Відповідно до цього методу запишемо для системи (2.14)–(2.17) вектор повільних змінних  $\mathbf{x}$ , вектор-функцію  $\mathbf{X}$ , вектор швидких фаз  $\boldsymbol{\psi}$  і вектор фазових швидкостей  $\boldsymbol{\Omega}$  в явному вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_{v_{\alpha x}}, x_{v_{\alpha y}}, x_{v_{\alpha z}}, x_{\gamma_\alpha}, x_\tau\} = \{v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z}, \gamma_\alpha, \tau\}, \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{X} &= \frac{1}{\xi} \{X_{v_{\alpha x}}, X_{v_{\alpha y}}, X_{v_{\alpha z}}, X_{\gamma_\alpha}, X_\tau\}, \\ \frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha x}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} \right)^2 \right) \left[ E_x - \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z}) B_y + \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) B_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\ \frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha y}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} \right)^2 \right) \left[ E_y - \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z}) B_x + \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) B_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha z}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_\alpha}{\bar{\gamma}_\alpha} \right)^2 \right) \left[ E_z + \frac{1}{c} (B_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) - B_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y})) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\
\frac{1}{\xi} X_{\gamma_\alpha} &= \frac{e}{m_e c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})), \\
\frac{1}{\xi} X_\tau &= \frac{1}{\xi}, \quad \Psi = \{p_{1,p}, p_{2,p}, p_{3,p,1}, \dots, p_{3,p,N}, p_{0p}, p_{1,b}, p_{2,b}, p_{3,b,1}, \dots, p_{3,b,N}, p_{0b}\}, \\
\Omega &= \{\Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{0p}, \Omega_{1,b}, \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{0b}\} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

Далі використовуємо описаний в [36, 39] алгоритм модернізованого методу усереднених характеристик для випадку декількох швидких фаз. Згідно з даним алгоритмом переходимо від неусереднених змінних до усереднених повільних змінних. Для цього використовуємо модернізовану заміну Крилова-Боголюбова [36, 39, 158] і заміну (2.26) в якій осциляторні добавки залежать від неусередненого вектора швидких фаз  $\Psi$

$$\begin{aligned}
v_{\alpha x} &= \bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\
v_{\alpha z} &= \bar{v}_{\alpha z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad \gamma_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\gamma_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\
\tau &= \bar{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_\tau^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi).
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Зауважимо, що усереднені змінні задовольняють системі

$$\frac{d\bar{v}_{\alpha \perp}}{dt} \cos \bar{p}_{\alpha 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{v}_{\alpha \perp}}{dt} \sin \bar{p}_{\alpha 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}),$$

$$\frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{\gamma}_{\alpha}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\gamma_{\alpha}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad (2.30)$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}).$$

У рівняннях (2.29) шукана функція  $\mathbf{u}^{(n)}$  має вигляд [36, 158]

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \dots \sum_{m_k=-N}^{m_k=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}}{i(m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k)} \exp(i(m_1\psi_1 + \dots + m_k\psi_k)). \quad (2.31)$$

Відзначимо, що випадки, коли знаменники в (2.31) перетворюються в нуль

$$m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0, \quad (2.32)$$

називають комбінаційними резонансами. Тому жоден із знаменників рішень (2.31) не повинен перетворюватися на нуль, іншими словами, осциляторна функція  $\mathbf{u}^{(n)}$  повинна визначатися тільки не резонансними компонентами  $\mathbf{g}^{(n)}$ .

На відміну від функції  $\mathbf{u}^{(n)}$  рішення для функції  $\mathbf{A}^{(n)}$  визначаються як резонансними компонентами так і середніми значеннями  $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$ . Тому рішення для функції  $\mathbf{A}^{(n)}$  має такий вигляд [36, 158]

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)} \Big|_{m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0}, \quad (2.33)$$

У наведених рішеннях (2.31) і (2.33) використовувалося наступне позначення

$$\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1 \Psi_1, \dots, m_\kappa \Psi_\kappa} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^\kappa \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1 \Psi_1 + \dots + m_\kappa \Psi_\kappa)} d\Psi_1 \dots d\Psi_\kappa$$

Функції  $\mathbf{g}^{(n)}$  до третього наближення по  $1/\xi$  мають вигляд [36, 158]:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad (2.34)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right), \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} = \frac{1}{\xi^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \right]. \quad (2.36) \end{aligned}$$

При вирішенні задачі руху обмежимося кубічним наближенням по  $1/\xi$ . З огляду на, що  $\cos p_{0\alpha} = (\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$  і  $\sin p_{0\alpha} = ((-i)\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$  знаходимо за допомогою функцій  $\mathbf{u}^{(n)}$  і  $\mathbf{A}^{(n)}$ , відповідно рішення рівнянь (2.31) і (2.33). Співвідношення для осциляторної компоненти швидкості  $\tilde{\mathbf{v}}_{\alpha x}^{(1)}$  в першому наближенні записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)} = & \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1)} e^{im p_1} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2)} e^{im p_2} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3)} e^{im p_3} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(m p_1 + p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(m p_2 + p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(m p_3 + p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(m p_1 - p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(m p_2 - p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(m p_3 - p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(m p_1 + 2p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(m p_2 + 2p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(m p_3 + 2p_0)} + \mathbf{u}_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(m p_1 - 2p_0)} + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 - 2p_0)} e^{i(m p_2 - 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - 2p_0)} e^{i(m p_3 - 2p_0)} + c.c. \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
& \quad \left. \times \left( \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H, \alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi + 2p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} + 2) \times \\
& \quad \times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1 + s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi - 2p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} - 2) \times \\
& \quad \times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1 - s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно отримуємо вирази в першому наближенні для осциляторної складової швидкості  $\tilde{v}_{\alpha y}^{(1)}$

$$u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)} = u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1)} e^{i m p_1} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2)} e^{i m p_2} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3)} e^{i m p_3} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 + p_0)} e^{i(m p_1 + p_0)} +$$

$$\begin{aligned}
& + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(m p_2+p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(m p_3+p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(m p_1-p_0)} + \\
& + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(m p_2-p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(m p_3-p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(m p_1+2p_0)} + \\
& + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(m p_2+2p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(m p_3+2p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(m p_1-2p_0)} + \\
& + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(m p_2-2p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(m p_3-2p_0)} + c.c., \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H, \alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3+p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3-p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi+2p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} + 2) \times \\
& \times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi-2p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} - 2) \times \\
& \times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
& \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Осциляторні складові швидкості  $\tilde{v}_{\alpha z}^{(1)}$  в першому наближенні мають

ВИГЛЯД

$$\begin{aligned}
u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)} &= u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1)} e^{im p_1} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2)} e^{im p_2} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3)} e^{im p_3} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(m p_1 + p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(m p_2 + p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(m p_3 + p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(m p_1 - p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(m p_2 - p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(m p_3 - p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(m p_1 + 2p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(m p_2 + 2p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(m p_3 + 2p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(m p_1 - 2p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(m p_2 - 2p_0)} + u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(m p_3 - 2p_0)} + c.c., \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i \bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \exp(ip_{\alpha, 3, m}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_\chi + p_0)} &= \frac{e \bar{v}_{\alpha \perp}}{2 m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau}) (1 + s_\chi)}{i (\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
&\times \left. \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_\chi - p_0)} &= \frac{e \bar{v}_{\alpha \perp}}{2 m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau}) (1 - s_\chi)}{i (\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
&\times \left. \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1)} &= \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Осциляторні функції релятивістського фактора в першому наближенні

$\tilde{\gamma}_\alpha^{(1)}$  мають вигляд

$$\begin{aligned}
u_{\gamma\alpha,m}^{(1)} &= u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\
&+ u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\
&+ u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\
&+ u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\
&+ u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c.,
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha z}}{m_e c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_\chi+p_0)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_\chi-p_0)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} &= \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3\pm p_0)} = \\
&= \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_1\pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_2\pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\gamma\alpha,m}^{(1)(p_3\pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Далі запишемо для першого наближення функції  $\mathbf{A}^{(1)}$

$$A_{v_{\alpha x}}^{(1)} = 0, \quad A_{v_{\alpha y}}^{(1)} = 0, \quad A_{v_{\alpha z}}^{(1)} = 0, \quad A_{\gamma\alpha}^{(1)} = 0, \quad A_{\tau}^{(1)} = 1.$$

Таким чином, використовуючи рішення (2.31) і (2.33), а також функції (2.34)–(2.36) отримуємо, аж до третього наближення по  $1/\xi$ , рішення для системи (2.29), а також для постійних складових (2.30). Відзначимо, що завдяки використанню запропонованої заміни (2.26) (замість стандартної (2.25)) при

вирішенні задачі руху загальний алгоритм знаходження швидкостей значно спростився.

Для вирішення завдання концентрації використовуємо рівняння безперервності (2.11). Запишемо його в компонентному вигляді

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha x})}{\partial x} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha y})}{\partial y} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha z})}{\partial z} = 0 \quad (2.37)$$

Рішення рівняння безперервності шукаємо аналогічно завданню руху. Перетворюємо рівняння безперервності (2.37) до стандартного вигляду [36], з огляду на, що  $\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha x})/\partial x = 0$  і  $\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha y})/\partial y = 0$ . Далі доповнюємо його рівняннями для швидких фаз (2.18)–(2.19), (2.27). При цьому вважаємо функції швидкостей (2.29) і повільно змінні амплітуди електромагнітних полів, вже відомими функціями. В результаті записуємо систему для задачі безперервності в стандартному вигляді

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = -n_\alpha \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z}, \quad (2.38)$$

$$\frac{dp_{1,\alpha}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{1,\alpha}, \quad \frac{dp_{2,\alpha}}{dt} = \omega_2 - k_2 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{2,\alpha}, \quad (2.39)$$

$$\frac{dp_{3,\alpha,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{\alpha z} \equiv \Omega_{3,\alpha,m}, \quad \frac{dp_{0,\alpha}}{dt} = \frac{eB_0}{m_\alpha c \gamma_\alpha} \equiv \Omega_{0,\alpha}.$$

Запишемо для системи (2.38) - (2.39) вектор повільних змінних  $\mathbf{x}$ , вектор-функцію  $\mathbf{X}$  і вектори швидких фаз  $\Psi$  в явному вигляді

$$\mathbf{x} = \{x_{n_\alpha}\} = \{n_\alpha\}, \quad \frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_{n_\alpha}\} = \left\{ -n_\alpha \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z} \right\},$$

$$\Psi = \{p_{1,p}, p_{2,p}, p_{3,p,1}, \dots, p_{3,p,N}, p_{0,p}, p_{1,b}, p_{2,b}, p_{3,b,1}, \dots, p_{3,b,N}, p_{0,b}\}, \quad (2.40)$$

$$\Omega = \{\Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{0p}, \Omega_{1,b}, \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{0b}\}.$$

Далі використовуємо описаний в [36, 39] алгоритм модернізованого методу усереднених характеристик, для випадку багатьох швидких фаз, відповідно до якого здійснюємо перехід до усереднених змінних

$$n_\alpha = \bar{n}_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}_{n_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \quad (2.41)$$

Зауважимо, що усереднена змінна концентрації задовольняє співвідношення

$$\frac{d\bar{n}_\alpha}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}_{n_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (2.42)$$

Використовуючи рішення (2.31) і (2.33) знаходимо осциляторні  $\mathbf{u}^{(n)}$  і постійні  $\mathbf{A}^{(n)}$  функції концентрації пучка і плазми  $n_\alpha$ . Функції  $\mathbf{u}^{(n)}$  і  $\mathbf{A}^{(n)}$  для першого наближення мають такий вигляд

$$\begin{aligned} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)} = & u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(m p_1 + p_0)} + \\ & + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(m p_2 + p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(m p_3 + p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(m p_1 - p_0)} + \\ & + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(m p_2 - p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(m p_3 - p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(m p_1 + 2p_0)} + \\ & + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(m p_2 + 2p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(m p_3 + 2p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(m p_1 - 2p_0)} + \\ & + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(m p_2 - 2p_0)} + u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(m p_3 - 2p_0)} + c.c., \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} &= \frac{e\bar{n}_{\alpha}}{m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[ \frac{k_{3,m} E_{3z,m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_{\chi}+p_0)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp} \bar{n}_{\alpha}}{2m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{k_{\chi,m} E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1+s_{\chi})}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
&\times \left. \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_{\chi}-p_0)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp} \bar{n}_{\alpha}}{2m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{k_{\chi,m} E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1-s_{\chi})}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
&\times \left. \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} &= \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0, \\
\frac{1}{\xi} A_{n_{\alpha}}^{(1)} &= 0, \quad A_{\tau}^{(1)} = 1.
\end{aligned}$$

Таким чином, завдяки заміні (2.26), рішенням (2.31)–(2.33) і функціям (2.34)–(2.36) знаходимо осциляторні  $\mathbf{u}^{(n)}$  і постійні  $\mathbf{A}^{(n)}$  функції рішень (2.41)–(2.42) з точністю до кубічних доданків по  $1/\xi$ .

### 2.3 Параметричні резонансні взаємодії в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ з гвинтовими електронними пучками

У плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ з гвинтовими РЕП за рахунок обертальної фази електронного пучка, мають місце додаткові множинні параметричні взаємодії. В результаті цього виникає велика кількість комбінаційних фаз, які необхідно враховувати при знаходженні власних електромагнітних полів хвиль. Такі резонансні взаємодії

проявляються вже на лінійній стадії взаємодії. Швидкі фазиякі необхідно враховувати при вирішенні самосузгоджуваної задачі, мають такий вигляд:

$$p_{1,m}, p_{2,m}, p_{3,m}, p_{1,m} + p_0, p_{1,m} - p_0, p_{2,m} + p_0, p_{1,m} - p_0, p_{3,m} + p_0, p_{3,m} - p_0, \\ p_{1,m} + 2p_0, p_{1,m} - 2p_0, p_{2,m} + 2p_0, p_{2,m} - 2p_0, p_{3,m} + 2p_0, p_{3,m} - 2p_0. \quad (2.43)$$

Для отримання самоузгоджуваної системи диференціальних рівнянь для амплітуд гармонік електромагнітних хвиль з урахуванням мультигармонічних взаємодій в квадратично-нелінійному наближенні необхідно множити два мультигармонічних ряди наступного типу

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{m=1}^N (A_{p_{1,m}} e^{ip_{1,m}} + A_{p_{2,m}} e^{ip_{2,m}} + A_{p_{3,m}} e^{ip_{3,m}} + A_{p_{1,m}+p_0} e^{i(p_{1,m}+p_0)} + \\ + A_{p_{1,m}-p_0} e^{i(p_{1,m}-p_0)} + A_{p_{2,m}+p_0} e^{i(p_{2,m}+p_0)} + A_{p_{2,m}-p_0} e^{i(p_{2,m}-p_0)} + A_{p_{3,m}+p_0} e^{i(p_{3,m}+p_0)} + \\ + A_{p_{3,m}-p_0} e^{i(p_{3,m}-p_0)} + A_{p_{1,m}+2p_0} e^{i(p_{1,m}+2p_0)} + A_{p_{1,m}-2p_0} e^{i(p_{1,m}-2p_0)} + \\ + A_{p_{2,m}+2p_0} e^{i(p_{2,m}+2p_0)} + A_{p_{2,m}-2p_0} e^{i(p_{2,m}-2p_0)} + A_{p_{3,m}+2p_0} e^{i(p_{3,m}+2p_0)} + \\ + A_{p_{3,m}-2p_0} e^{i(p_{3,m}-2p_0)} + c.c.) \times \sum_{m'=1}^{N'} (B_{p_{1,m'}} e^{ip_{1,m'}} + B_{p_{2,m'}} e^{ip_{2,m'}} + B_{p_{3,m'}} e^{ip_{3,m'}} + \\ + B_{p_{1,m'}+p_0} e^{i(p_{1,m'}+p_0)} + B_{p_{1,m'}-p_0} e^{i(p_{1,m'}-p_0)} + B_{p_{2,m'}+p_0} e^{i(p_{2,m'}+p_0)} + B_{p_{2,m'}-p_0} e^{i(p_{2,m'}-p_0)} + \\ + B_{p_{3,m'}+p_0} e^{i(p_{3,m'}+p_0)} + B_{p_{3,m'}-p_0} e^{i(p_{3,m'}-p_0)} + B_{p_{1,m'}+2p_0} e^{i(p_{1,m'}+2p_0)} + \\ B_{p_{1,m'}-2p_0} e^{i(p_{1,m'}-2p_0)} + B_{p_{2,m'}+2p_0} e^{i(p_{2,m'}+2p_0)} + B_{p_{2,m'}-2p_0} e^{i(p_{2,m'}-2p_0)} + \\ + B_{p_{3,m'}+2p_0} e^{i(p_{3,m'}+2p_0)} + B_{p_{3,m'}-2p_0} e^{i(p_{3,m'}-2p_0)} + c.c.).$$

Таким чином, виникає математична проблема, яка пов'язана з урахуванням усіх можливих комбінацій фаз (2.43) при розрахунку осциляторних функцій



$\mathbf{u}^{(n)}$  (2.31) в задачах руху і концентрації. Для цього були розроблені комбінаційні схеми, як для монохроматичного режиму ( $m = 1, N = 1$ ), так і для мультигармонічного ( $m = 1, 2, 3, \dots, N$ ).

Розглянемо спочатку комбінаційну схему для п'ятнадцяти швидких фаз (2.43) для перших гармонік хвиль сигналу, накачування і хвилі просторового заряду. Умова параметричного резонансу для фази першої гармоніки  $p_{1,1}$  має вигляд

$$p_{1,1} = p_{3,1} \pm p_0 + (p_{2,1} \mp p_0), \quad p_{1,1} = p_{3,1} \pm 2p_0 + (p_{2,1} \mp 2p_0), \quad p_{1,1} = p_{3,1} + p_{2,1}.$$

Для того щоб обчислити швидкість або концентрацію з фазою  $p_{1,1}$ , необхідно записати комбінаційний ряд такого вигляду

$$\begin{aligned} C_{p_{1,1}} = & A_{p_{2,1}} B_{p_{3,1}} + A_{p_{3,1}} B_{p_{2,1}} + A_{p_{2,1}+p_0} B_{p_{3,1}-p_0} + \\ & + A_{p_{3,1}-p_0} B_{p_{2,1}+p_0} + A_{p_{2,1}+2p_0} B_{p_{3,1}-2p_0} + A_{p_{3,1}-2p_0} B_{p_{2,1}+2p_0} + \\ & + A_{p_{2,1}-p_0} B_{p_{3,1}+p_0} + A_{p_{3,1}+p_0} B_{p_{2,1}-p_0} + A_{p_{2,1}-2p_0} B_{p_{3,1}+2p_0} + A_{p_{3,1}+2p_0} B_{p_{2,1}-2p_0}. \end{aligned}$$

для першої гармоніки фази  $p_{2,1}$

$$p_{2,1} = p_{1,1} \pm p_0 - (p_{3,1} \pm p_0), \quad p_{2,1} = p_{1,1} \pm 2p_0 - (p_{3,1} \pm 2p_0), \quad p_{2,1} = p_{1,1} - p_{3,1},$$

$$\begin{aligned} C_{p_{2,1}} = & A_{p_{1,1}} B_{p_{3,1}}^* + A_{p_{3,1}}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1}+p_0} B_{p_{3,1}+p_0}^* + \\ & + A_{p_{3,1}+p_0}^* B_{p_{1,1}+p_0} + A_{p_{1,1}+2p_0} B_{p_{3,1}+2p_0}^* + A_{p_{3,1}+2p_0}^* B_{p_{1,1}+2p_0} + \\ & + A_{p_{1,1}-p_0} B_{p_{3,1}-p_0}^* + A_{p_{3,1}-p_0}^* B_{p_{1,1}-p_0} + A_{p_{1,1}-2p_0} B_{p_{3,1}-2p_0}^* + A_{p_{3,1}-2p_0}^* B_{p_{1,1}-2p_0}. \end{aligned}$$

для фази першої гармоніки  $p_{3,1}$

$$p_{3,1} = p_{1,1} - p_{2,1}, \quad p_{3,1} = p_{1,1} \pm p_0 - (p_{2,1} \pm p_0), \quad p_{3,1} = p_{1,1} \pm 2p_0 - (p_{2,1} \pm 2p_0),$$

$$\begin{aligned} C_{p_{3,1}} &= A_{p_{1,1}} B_{p_{2,1}}^* + A_{p_{2,1}}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1}+p_0} B_{p_{2,1}+p_0}^* + \\ &+ A_{p_{2,1}+p_0}^* B_{p_{1,1}+p_0} + A_{p_{1,1}+2p_0} B_{p_{2,1}+2p_0}^* + A_{p_{2,1}+2p_0}^* B_{p_{1,1}+2p_0} + \\ &+ A_{p_{1,1}-p_0} B_{p_{2,1}-p_0}^* + A_{p_{2,1}-p_0}^* B_{p_{1,1}-p_0} + A_{p_{1,1}-2p_0} B_{p_{2,1}-2p_0}^* + A_{p_{2,1}-2p_0}^* B_{p_{1,1}-2p_0}. \end{aligned}$$

для фаз перших гармонік  $p_{1,1} \pm p_0$

$$\begin{aligned} p_{1,1} \pm p_0 &= (p_{3,1} \pm p_0) + p_{2,1}, \quad p_{1,1} \pm p_0 = p_{3,1} + (p_{2,1} \pm p_0), \\ p_{1,1} \pm p_0 &= (p_{3,1} \pm 2p_0) + (p_{2,1} \mp p_0), \quad p_{1,1} \pm p_0 = (p_{3,1} \mp p_0) + (p_{2,1} \pm 2p_0), \\ C_{p_{1,1} \pm p_0} &= A_{p_{2,1}} B_{p_{3,1} \pm p_0} + A_{p_{3,1} \pm p_0} B_{p_{2,1}} + A_{p_{2,1} \mp p_0} B_{p_{3,1} \pm 2p_0} + A_{p_{3,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1} \mp p_0} + \\ &+ A_{p_{3,1}} B_{p_{2,1} \pm p_0} + A_{p_{2,1} \pm p_0} B_{p_{3,1}} + A_{p_{3,1} \mp p_0} B_{p_{2,1} \pm 2p_0} + A_{p_{2,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1} \mp p_0}. \end{aligned}$$

для фаз перших гармонік  $p_{2,1} \pm p_0$

$$\begin{aligned} p_{2,1} \pm p_0 &= (p_{1,1} \pm p_0) - p_{3,1}, \quad p_{2,1} \pm p_0 = p_{1,1} - (p_{3,1} \mp p_0), \\ p_{2,1} \pm p_0 &= (p_{1,1} \pm 2p_0) - (p_{3,1} \pm p_0), \quad p_{2,1} \pm p_0 = (p_{1,1} \mp p_0) - (p_{3,1} \mp 2p_0), \\ C_{p_{2,1} \pm p_0} &= A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{3,1}}^* + A_{p_{3,1}}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1} \pm p_0}^* + A_{p_{3,1} \pm p_0}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + \\ &+ A_{p_{1,1}} B_{p_{3,1} \mp p_0}^* + A_{p_{3,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1} \mp p_0} B_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1} \mp p_0}. \end{aligned}$$

для фаз перших гармонік  $p_{3,1} \pm p_0$

$$p_{3,1} \pm p_0 = p_{1,1} \pm p_0 - p_{2,1}, \quad p_{3,1} \pm p_0 = p_{1,1} - (p_{2,1} \mp p_0),$$

$$p_{3,1} \pm p_0 = p_{1,1} \pm 2p_0 - (p_{2,1} \pm p_0), \quad p_{3,1} \pm p_0 = p_{1,1} \mp p_0 - (p_{2,1} \mp 2p_0),$$

$$\begin{aligned} C_{p_{3,1} \pm p_0} &= A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{2,1}}^* + A_{p_{2,1}}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1} \pm p_0}^* + A_{p_{2,1} \pm p_0}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + \\ &+ A_{p_{1,1}} B_{p_{2,1} \mp p_0}^* + A_{p_{2,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1}} + A_{p_{1,1} \mp p_0} B_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1} \mp p_0}. \end{aligned}$$

для фаз перших гармонік  $p_{1,1} \pm 2p_0$

$$p_{1,1} \pm 2p_0 = p_{3,1} \pm 2p_0 + p_{2,1}, \quad p_{1,1} \pm 2p_0 = p_{3,1} + (p_{2,m} \pm 2p_0),$$

$$p_{1,1} \pm 2p_0 = p_{3,1} \pm p_0 + (p_{2,1} \pm p_0),$$

$$\begin{aligned} C_{p_{1,1} \pm 2p_0} &= A_{p_{3,1}} B_{p_{2,1} \pm 2p_0} + A_{p_{2,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1}} + \\ &+ A_{p_{2,1} \pm p_0} B_{p_{3,1} \pm p_0} + A_{p_{3,1} \pm p_0} B_{p_{2,1} \pm p_0} + A_{p_{2,1}} B_{p_{3,1} \pm 2p_0} + A_{p_{3,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1}}. \end{aligned}$$

для фаз перших гармонік  $p_{2,1} \pm 2p_0$

$$p_{2,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} \pm 2p_0 - p_{3,1}, \quad p_{2,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} - (p_{3,1} \pm 2p_0),$$

$$p_{2,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} \pm p_0 - (p_{3,1} \mp p_0),$$

$$\begin{aligned} C_{p_{2,1} \pm 2p_0} &= A_{p_{3,1}}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{3,1}}^* + \\ &+ A_{p_{3,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{3,1} \mp p_0}^* + A_{p_{1,1}} B_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1}}. \end{aligned}$$

для фаз перших гармонік  $p_{3,1} \pm 2p_0$

$$p_{3,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} \pm 2p_0 - p_{2,1}, \quad p_{3,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} - (p_{2,1} \mp 2p_0),$$

$$p_{3,1} \pm 2p_0 = p_{1,1} \pm p_0 - (p_{2,1} \mp p_0),$$

$$C_{p_{3,1} \pm 2p_0} = A_{p_{2,1}}^* B_{p_{1,1} \pm 2p_0} + A_{p_{1,1} \pm 2p_0} B_{p_{2,1}}^* +$$

$$+ A_{p_{2,1} \mp p_0}^* B_{p_{1,1} \pm p_0} + A_{p_{1,1} \pm p_0} B_{p_{2,1} \mp p_0}^* + A_{p_{1,1}} B_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,1} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,1}}.$$

Отримана вище комбінаційна схема для п'ятнадцяти швидкоосцилюючих фаз добре адаптована для проведення чисельного моделювання динаміки хвиль в плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками в монохроматичному режимі.

Як відомо супергетеродинні ЛСЕ використовують пучкові нестійкості для збільшення підсилюючих властивостей. Як говорилося раніше, такі нестійкості характеризуються лінійною дисперсією. У зв'язку з цим в таких системах має місце порушення великої кількості вищих гармонік хвиль. Для того що б описати процес збудження вищих гармонік хвиль в досліджуваних плазмово-пучкових супергетеродинних ЛСЕ з гвинтовими РЕП, необхідно розробити мультигармонічну комбінаційну схему параметричних взаємодій. Така схема повинна враховувати, як мультигармонічні резонанси між хвилею одного типу, так і множинні резонанси між хвилями різного типу.

Умови множинних параметричних резонансів між гармоніками хвиль одного і різних типів для  $m$ -х гармонік фази  $p_{1,m}$ , а також відповідний комбінаційний ряд мають вигляд

$$p_{1,m_3} = p_{1,m_1} + p_{1,m_2}, \quad p_{1,m_3} = (p_{1,m_1} + p_0) + (p_{1,m_2} - p_0),$$

$$p_{1,m_3} = (p_{1,m_1} + 2p_0) + (p_{1,m_2} - 2p_0), \quad p_{1,m} = p_{3,m} + p_{2,m},$$

$$p_{1,m} = p_{3,m} \pm p_0 + (p_{2,m} \mp p_0), \quad p_{1,m} = p_{3,m} \pm 2p_0 + (p_{2,m} \mp 2p_0).$$

$$\begin{aligned} \sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{1,m''}} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{1,m}} B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}+p_0} B_{p_{1,m'}-p_0} + A_{p_{1,m}-p_0} B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m}+2p_0} B_{p_{1,m'}-2p_0} + \\ &+ A_{p_{1,m}-2p_0} B_{p_{1,m'}+2p_0} + A_{p_{2,m}} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}+p_0} B_{p_{3,m'}-p_0} + A_{p_{3,m}-p_0} B_{p_{2,m'}+p_0} + \\ &+ A_{p_{2,m}+2p_0} B_{p_{3,m'}-2p_0} + A_{p_{3,m}-2p_0} B_{p_{2,m'}+2p_0} + A_{p_{2,m}-p_0} B_{p_{3,m'}+p_0} + A_{p_{3,m}+p_0} B_{p_{2,m'}-p_0} + \end{aligned}$$

$$+ A_{p_{2,m}-2p_0} B_{p_{3,m'}+2p_0} + A_{p_{3,m}+2p_0} B_{p_{2,m'}-2p_0}),$$

аналогічно для  $m$ -х гармонік фази  $p_{2,m}$

$$p_{2,m_3} = p_{2,m_1} + p_{2,m_2}, \quad p_{2,m_3} = (p_{2,m_1} + p_0) + (p_{2,m_2} - p_0),$$

$$p_{2,m_3} = (p_{2,m_1} + 2p_0) + (p_{2,m_2} - 2p_0), \quad p_{2,m} = p_{1,m} - p_{3,m},$$

$$p_{2,m} = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{3,m} \pm p_0), \quad p_{2,m} = p_{1,m} \pm 2p_0 - (p_{3,m} \pm 2p_0).$$

$$\begin{aligned} \sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{2,m''}} = & \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{2,m}} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}+p_0} B_{p_{2,m'}-p_0} + A_{p_{2,m}-p_0} B_{p_{2,m'}+p_0} + A_{p_{2,m}+2p_0} B_{p_{2,m'}-2p_0} + \\ & + A_{p_{2,m}-2p_0} B_{p_{2,m'}+2p_0} + A_{p_{1,m}} B_{p_{3,m'}}^* + A_{p_{3,m}}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}+p_0} B_{p_{3,m'}+p_0}^* + \\ & + A_{p_{3,m}+p_0}^* B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m}+2p_0} B_{p_{3,m'}+2p_0}^* + A_{p_{3,m}+2p_0}^* B_{p_{1,m'}+2p_0} + \\ & + A_{p_{1,m}-p_0} B_{p_{3,m'}-p_0}^* + A_{p_{3,m}-p_0}^* B_{p_{1,m'}-p_0} + A_{p_{1,m}-2p_0} B_{p_{3,m'}-2p_0}^* + A_{p_{3,m}-2p_0}^* B_{p_{1,m'}-2p_0}), \end{aligned}$$

для  $m$ -х гармонік фази  $p_{3,m}$

$$p_{3,m_3} = p_{3,m_1} + p_{3,m_2}, \quad p_{3,m_3} = (p_{3,m_1} + p_0) + (p_{3,m_2} - p_0),$$

$$p_{3,m_3} = (p_{3,m_1} + 2p_0) + (p_{3,m_2} - 2p_0), \quad p_{3,m} = p_{1,m} - p_{2,m},$$

$$p_{3,m} = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{2,m} \pm p_0), \quad p_{3,m} = p_{1,m} \pm 2p_0 - (p_{2,m} \pm 2p_0).$$

$$\begin{aligned} \sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{3,m''}} = & \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{3,m}} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}+p_0} B_{p_{3,m'}-p_0} + A_{p_{3,m}-p_0} B_{p_{3,m'}+p_0} + A_{p_{3,m}+2p_0} B_{p_{3,m'}-2p_0} + \\ & + A_{p_{3,m}-2p_0} B_{p_{3,m'}+2p_0}) + A_{p_{1,m}} B_{p_{2,m'}}^* + A_{p_{2,m}}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}+p_0} B_{p_{2,m'}+p_0}^* + \\ & + A_{p_{2,m}+p_0}^* B_{p_{1,m'}+p_0} + A_{p_{1,m}+2p_0} B_{p_{2,m'}+2p_0}^* + A_{p_{2,m}+2p_0}^* B_{p_{1,m'}+2p_0} + \\ & + A_{p_{1,m}-p_0} B_{p_{2,m'}-p_0}^* + A_{p_{2,m}-p_0}^* B_{p_{1,m'}-p_0} + A_{p_{1,m}-2p_0} B_{p_{2,m'}-2p_0}^* + A_{p_{2,m}-2p_0}^* B_{p_{1,m'}-2p_0}. \end{aligned}$$

Умови множинних параметричних резонансів між хвилями одного і різних типів для  $m$ -х гармонік фаз, а також відповідні комбінаційні ряди мають вигляд

$$\begin{aligned}
p_{1,m_3} \pm p_0 &= (p_{1,m_1} \pm p_0) + p_{1,m_2}, \quad p_{1,m_3} \pm p_0 = (p_{1,m_1} \mp p_0) + (p_{1,m_2} \pm 2p_0), \\
p_{1,m} \pm p_0 &= (p_{3,m} \pm p_0) + p_{2,m}, \quad p_{1,m} \pm p_0 = p_{3,m} + (p_{2,m} \pm p_0), \\
p_{1,m} \pm p_0 &= (p_{3,m} \pm 2p_0) + (p_{2,m} \mp p_0), \quad p_{1,m} \pm p_0 = (p_{3,m} \mp p_0) + (p_{2,m} \pm 2p_0), \\
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{1,m''} \pm p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}} B_{p_{1,m'} + p_0} + A_{p_{1,m} \mp p_0} B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{1,m'} \mp p_0} + \\
&+ A_{p_{2,m}} B_{p_{3,m'} \pm p_0} + A_{p_{3,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m} \mp p_0} B_{p_{3,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'} \mp p_0} + \\
&+ A_{p_{3,m}} B_{p_{2,m'} \pm p_0} + A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m} \mp p_0} B_{p_{2,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'} \mp p_0}),
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармонік фаз  $p_{2,m} \pm p_0$

$$\begin{aligned}
p_{2,m_3} \pm p_0 &= (p_{2,m_1} \pm p_0) + p_{2,m_2}, \quad p_{2,m_3} \pm p_0 = (p_{2,m_1} \pm 2p_0) + (p_{2,m_2} \mp p_0), \\
p_{2,m} \pm p_0 &= (p_{1,m} \pm p_0) - p_{3,m}, \quad p_{2,m} \pm p_0 = p_{1,m} - (p_{3,m} \mp p_0), \\
p_{2,m} \pm p_0 &= (p_{1,m} \pm 2p_0) - (p_{3,m} \pm p_0), \quad p_{2,m} \pm p_0 = (p_{1,m} \mp p_0) - (p_{3,m} \mp 2p_0), \\
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{2,m''} \pm p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}} B_{p_{2,m'} \pm p_0} + A_{p_{2,m} \mp p_0} B_{p_{2,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'} \mp p_0} + \\
&+ A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'}}^* + A_{p_{3,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'} \pm p_0}^* + A_{p_{3,m} \pm p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + \\
&+ A_{p_{1,m}} B_{p_{3,m'} \mp p_0}^* + A_{p_{3,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m} \mp p_0} B_{p_{3,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'} \mp p_0}),
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармонік фаз  $p_{3,m} \pm p_0$

$$p_{3,m_3} \pm p_0 = (p_{3,m_1} \pm p_0) + p_{3,m_2}, \quad p_{3,m_3} \pm p_0 = (p_{3,m_1} \mp p_0) + (p_{3,m_2} \pm 2p_0),$$

$$p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} \pm p_0 - p_{2,m}, \quad p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} - (p_{2,m} \mp p_0),$$

$$p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} \pm 2p_0 - (p_{2,m} \pm p_0), \quad p_{3,m} \pm p_0 = p_{1,m} \mp p_0 - (p_{2,m} \mp 2p_0),$$

$$\begin{aligned} \sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{3,m''} \pm p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{3,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}} B_{p_{3,m' \pm p_0}} + A_{p_{3,m} \mp p_0} B_{p_{3,m' \pm 2p_0}} + A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m' \mp p_0}} + \\ &+ A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'}}^* + A_{p_{2,m}}^* B_{p_{1,m' \pm p_0}} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m' \pm p_0}}^* + A_{p_{2,m} \pm p_0}^* B_{p_{1,m' \pm 2p_0}} + \\ &+ A_{p_{1,m}} B_{p_{2,m' \mp p_0}}^* + A_{p_{2,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m} - p_0} B_{p_{2,m' \mp 2p_0}}^* + A_{p_{2,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m} \mp p_0}). \end{aligned}$$

для  $m$ -х гармонік фаз  $p_{1,m} \pm 2p_0$

$$p_{1,m_3} \pm 2p_0 = (p_{1,m_1} \pm 2p_0) + p_{1,m_2}, \quad p_{1,m_3} \pm 2p_0 = (p_{1,m_1} \pm p_0) + (p_{1,m_2} \pm p_0),$$

$$p_{1,m} \pm 2p_0 = (p_{3,m} \pm 2p_0) + p_{2,m}, \quad p_{1,m} \pm 2p_0 = p_{3,m} + (p_{2,m} \pm 2p_0),$$

$$p_{1,m} \pm 2p_0 = (p_{3,m} \pm p_0) + (p_{2,m} \pm p_0),$$

$$\begin{aligned} \sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{1,m''} \pm 2p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{1,m'}} + A_{p_{1,m}} B_{p_{1,m' \pm 2p_0}} + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{1,m' \pm p_0}} + \\ &+ A_{p_{3,m}} B_{p_{2,m' \pm 2p_0}} + A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{3,m' \pm p_0}} + A_{p_{3,m} \pm p_0} B_{p_{2,m' \pm p_0}} + \\ &+ A_{p_{2,m}} B_{p_{3,m' \pm 2p_0}} + A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'}}), \end{aligned}$$

для  $m$ -х гармонік фаз  $p_{2,m} \pm 2p_0$

$$p_{2,m_3} \pm 2p_0 = (p_{2,m_1} \pm 2p_0) + p_{2,m_2}, \quad p_{2,m_3} \pm 2p_0 = (p_{2,m_1} \pm p_0) + (p_{2,m_2} \pm p_0),$$

$$p_{2,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm 2p_0) - p_{3,m}, \quad p_{2,m} \pm 2p_0 = p_{1,m} - (p_{3,m} \pm 2p_0),$$

$$p_{2,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{3,m} \mp p_0),$$

$$\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{2,m''} \pm 2p_0} = \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{2,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'}} + A_{p_{2,m}} B_{p_{2,m' \pm 2p_0}} + A_{p_{2,m} \pm p_0} B_{p_{2,m' \pm p_0}} +$$

$$\begin{aligned}
& + A_{p_{3,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'}}^* + A_{p_{3,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{3,m'} \mp p_0}^* + \\
& + A_{p_{1,m}} B_{p_{3,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{3,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'}}),
\end{aligned}$$

для  $m$ -х гармонік фаз  $p_{3,m} \pm 2p_0$

$$p_{3,m_3} \pm 2p_0 = (p_{3,m_1} \pm 2p_0) + p_{3,m_2}, \quad p_{3,m_3} \pm 2p_0 = (p_{3,m_1} \pm p_0) + (p_{3,m_2} \pm p_0),$$

$$p_{3,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm 2p_0) - p_{2,m}, \quad p_{3,m} \pm 2p_0 = p_{1,m} - (p_{2,m} \mp 2p_0),$$

$$p_{3,m} \pm 2p_0 = (p_{1,m} \pm p_0) - (p_{2,m} \mp p_0),$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m''=1}^{N''} C_{p_{3,m''} \pm 2p_0} &= \sum_{m=1}^N \sum_{m'=1}^{N'} (A_{p_{3,m} \pm 2p_0} B_{p_{3,m'}} + A_{p_{3,m}} B_{p_{3,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{3,m} \pm p_0}^* B_{p_{3,m'} \pm p_0} + \\
& + A_{p_{2,m}}^* B_{p_{1,m'} \pm 2p_0} + A_{p_{1,m} \pm 2p_0} B_{p_{2,m'}}^* + A_{p_{2,m} \mp p_0}^* B_{p_{1,m'} \pm p_0} + A_{p_{1,m} \pm p_0} B_{p_{2,m'} \mp p_0}^* + \\
& + A_{p_{1,m}} B_{p_{2,m'} \mp 2p_0}^* + A_{p_{2,m} \mp 2p_0}^* B_{p_{1,m'}}).
\end{aligned}$$

Таким чином, отримана комбінаційна схема, яка враховує множинні параметрично-резонансні взаємодії між хвилею одного типу і хвилями різного типу. Дана схема добре адаптована для проведення чисельного моделювання динаміки хвиль в плазмово-пучкових СЛСЕ з гвинтовими РЕП в мультигармонічному режимі.

## 2.4 Висновки до розділу 2

1. Проведена модернізація методу усереднених характеристик стосовно задач динаміки мультигармонічних електромагнітних хвиль в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими релятивістськими електронними пучками. Запропоновано нову заміну змінних, яка спрощує загальний алгоритм обчислення.



2. У плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками мають місце параметричні резонансні взаємодії хвиль різного типу, які необхідно враховувати при знаходженні власних електромагнітних полів хвиль. Для обліку таких резонансних взаємодій запропонована комбінаційна схема, яка добре адаптована для чисельного моделювання.

**ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ**

1. Madey J.M.J. Stimulated emission of bremsstrahlung in a periodic magnetic field / J.M.J. Madey // J. Appl. Phys. – 1971. – Vol. 42, No. 5. – P. 1906–1913.
2. А. с. № 705914 СССР МКИ H01J 25/00. Электронный прибор / Р.А. Силин, В.В. Кулиш, Ю.И. Клименко ; заявл. 18.05.72 ; опубл. после снятия грифа секретности 15.05.1991, Бюл. № 26.
3. Мирошниченко В. И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитных волн релятивистским электронным пучком в магнитном поле / В.И. Мирошниченко // Письма в ЖТФ. – 1975. – Т. 1, № 23. – С. 1057–1060.
4. Sprangle P. Stimulated collective scattering from a magnetized relativistic electron beam / P. Sprangle, V.L. Granatstein, L. Baker // Phys. Rev. A. – 1975. – Vol. 12, No. 4. – P. 1697–1701.
5. Kulish V.V. Hierarchic electrodynamics and free electron lasers / V.V. Kulish. – Boca Raton, London, New York : CRC Press, 2011. – 697 p.
6. Kulish V.V. Hierarchical methods: Hierarchy and hierarchic asymptotic methods in electrodynamics, Vol. 1 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 380 p.
7. Kulish V.V. Hierarchical methods: Undulative electrodynamic system, Vol. 2 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 396 p.
8. Kulish V.V. Methods of averaging in nonlinear problems of relativistic electrodynamics / V.V. Kulish. – Atlanta : World Federation Published Company, 1998. – 263 p.
9. Khan S. Free-electron lasers / S. Khan // Journal of Modern Optics. — 2008. — Vol. 55, No. 21. — P. 3469–3512.
10. Brau C. Free electron laser / C. Brau. – Boston: Academic Press, 1990. — 420 p.

11. O'Shea P.G. Free-Electron Lasers: Status and Applications / P.G. O'Shea, H.P. Freund // *Science*. – 2001. – Vol. 292, No. 5523. – P. 1853–1858.
12. Freund H.P. Principles of free-electron lasers / H.P.Freund, T.M.Antonsen. — Springer Science & Business Media, 2012. — 476 p.
13. Saldin E. The physics of free electron lasers / E. Saldin, E. V. Schneidmiller, M. V. Yurkov. — Springer Science & Business Media, 2013. — 470 p.
14. Коцаренко Н.Я. О возможности супергетеродинного усиления электромагнитных волн в электронных потоках / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // *ЖТФ*. – 1980. – Т. 50, № 2. – С. 220–222.
15. Коцаренко Н.Я. Об эффекте супергетеродинного усиления электромагнитных волн в системе плазма-пучок / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // *Радиотехника и электроника*. – 1980. – Т. 25, № 11. – С. 2470–2471.
16. Пат. 835259 СССР, Н 01 J 25/00. Электронный прибор / В.А. Перекупко, А.А. Силивра, Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш. – Заявл. 28.01.80.
17. Болонин О.Н. Супергетеродинное усиление электромагнитных волн в системе двух релятивистских электронных потоков / О.Н. Болонин, В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // *УФЖ*. – Т. 33, № 10. – 1988. – С. 1465–1468.
18. Botton M. Two-stream instability in free electron lasers / M. Botton, A. Ron // *IEEE Transactions on Plasma Science*. – 1990. – Vol.18, No. 3. – P. 416–423.
19. Botton M. Gain enhancement in a free electron laser by two-stream instability / M. Botton, A. Ron // *J. Appl. Phys.* – 1990. – Vol. 67, No. 10. – P. 6583–6585.
20. Kulish V.V. Superheterodyne electron-wave free-electron lasers / V.V. Kulish // *The International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. – 1993. – Vol. 14, No. 3. – P. 415–450.
21. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of superheterodyne and parametric electron laser / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // *The*

International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1993. – Vol. 14, No. 3. – P. 451–567.

22. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of two-stream superheterodyne free electron lasers / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1994. – Vol. 15, No. 1. – P.77–120.

23. Kulish V.V. Hierarchical asymptotic methods in the theory of cluster free electron lasers / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, A.Ju. Brusnik // Journal of Infrared, Millimeter and Terahertz Waves. – 2012. – Vol. 33, No. 2. – P. 149–173.

24. Sprangle P. Nonlinear analysis of a relativistic beam-plasma cyclotron instability / P. Sprangle, L. Vlahos // Physical Review A. — 1986. — Vol. 33, No. 2. — P. 1261–1269.

25. Bekefi G. Double-stream cyclotron maser / G. Bekefi // Journal of Applied Physics. — 1992. — Vol. 71, No. 9. — P. 4128–4131.

26. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a two-stream free-electron laser with a helical wiggler and an axial magnetic field / T. Mohsenpour, N. Mehrabi // Phys. Plasmas. - 2013. - V. 20, No. 8. - P. 082133.

27. Liu W. Instability of Two-stream Free-electron Laser with an Axial Guiding Magnetic Field / W. Liu, Z. Yang, Z. Liang // Int. J. Infrared Millim. Waves. -2006. - V. 27. P. 1073.

28. Shokri B. The excitation of extraordinary and ordinary waves in a magnetized plasma medium by a rotating electron beam / B. Shokri, S. M. Khorashadizadeh // Phys. Plasmas. — 2006. — Vol. 13, No. 5. — P. 052116.

29. Saviz S. Gain enhancement in two-stream free electron laser with a planar wiggler and an axial guide magnetic field / S. Saviz, Z. Rezaei, Z. Farzin, M. Aghamir // Chinese Physics B. - 2012. - V. 21, No. 9. - P. 094103.

30. Mohsenpour T. The gain equation of a helical wiggler free electron laser with ion-channel guiding and/or an axial magnetic field / T. Mohsenpour, H. E. Amri // Chinese Physics Letters. — 2013. — Vol. 30, No. 3. — P. 034102.

31. Ginzburg N. S. Nonlinear theory of a free electron laser with a helical wiggler and an axial guide magnetic field / N. S. Ginzburg, N. Y. Peskov // *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*. — 2013. — Vol. 16, No. 9. — P. 090701.

32. Kulish V. V. Cubic-nonlinear theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with h-ubitron pumping / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, V. V. Koval // *Telecommunications and Radio Engineering*. — 2010. — Vol. 69, No. 20. — P. 1859–1869. (Кулиш В. В. Кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазма-пучковых лазеров на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, В. В. Коваль // *Радиофизика и электроника*. — 2009. — Vol. 14, No. 3. — P. 383—388.)

33. Kulish V.V. Multiharmonic cubic-nonlinear theory of plasma-beamsuperheterodyne free-electron lasers of the dopplertron type / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // *Plasma Physics Reports*. — 2010. — Vol. 36, No. 13. — P. 1185–1190. (Кулиш В.В. Мультигармоническая кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазменно-пучковых лазеров на свободных электронах с доплертронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // *Прикладная физика*. — 2009. — № 5. — С. 76–81.)

34. Nonlinear theory of plasma-beam superheterodyne free electron laser of dopplertron type with non-axial injection of electron beam / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, G.A. Oleksiienko, V.V. Koval and M.Yu. Rombovsky // *Acta Physica Polonica A*. — 2014. — Vol. 126, No. 6. — P. 1263–1268.

35. Супергетеродинные плазменно-пучковые ЛСЭ с винтовыми электронными пучками / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, Г. А. Алексеенко, В.В. Коваль, М.Ю. Ромбовский // *Прикладная физика*. — 2014. — № 5. — С. 24–28.

36. Модернізований метод усереднених характеристик для розв'язування задач мультигармонічних резонансних взаємодій пристроях сильнострумової електроніки / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, Г.А. Олексієнко,

Г.В. Биченко, О.О. Колоскова // Ж. нано- электрон. фіз. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 02015.

37. Кулиш В. В. Мультигармонические взаимодействия волн в плазменно-пучковых супергетеродинных ЛСЭ с винтовыми электронными пучками / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, Г.А. Алексеенко // Успехи прикладной физики. – 2015. – Т. 3. – №5. – С. 438–446.

38. Kulish V. V. Nonlinear interaction of waves in plasma-beam superheterodyne FEL of the dopplertron type with helical electron beam / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // Problems of Atomic Science and Technology. — 2015. — No. 6(100). — P. 83-89.

39. Лисенко О.В. Застосування модернізованого методу усереднених характеристик в задачах теорії плазмово-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах / О.В. Лисенко, Г.А. Олексієнко,

М.О. Феденко // Ж. нано- электрон. фіз. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 04083.40. Лысенко А.В. Плазменно-пучковый супергетеродинный ЛСЭ с H-убитронной накачкой с неосевой инжекцией электронного пучка // А.В. Лысенко, Г.А. Алексеенко / Радиофизика и электроника. — 2016. — Т. 7(21), № 1. — С. 48–54.

41. Oleksiienko G. A. Influence of injection angle of electron beam on dynamics of waves in plasma-beam superheterodyne free electron laser of dopplertron type / G. A. Oleksiienko, V. V. Kulish, A. V. Lysenko // 15<sup>th</sup> International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (SPO 2014): Scientific Works, (Kiev, Ukraine, 23-26, October, 2014). – Kiev, 2014. – С. 143.

42. Oleksiienko G. A. Nonlinear wave interaction in plasma-beam superheterodyne FEL of H-ubitron type with a helical electron beam / G. A. Oleksiienko, V. V. Kulish, A. V. Lysenko // 16<sup>th</sup> International Young Scientists Conference Optics and High Technology Material Science (SPO 2015): Scientific Works, (Kiev, Ukraine, 22-25, October, 2015). – Kiev, 2015. – С. 155.

43. Lysenko A. V. To the theory of plasma-beam superheterodyne free electron laser of the dopplertron type with a helical electron beam / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko, V. V. Koval, M. Yu. Rombovsky // 10<sup>th</sup> International Conference «Electronics and Applied Physics» (APHYS 2014): Conference Proceedings, (Kiev, Ukraine, 22-25, October, 2014). – Kiev, 2014. – С. 138-139.

44. Lysenko A. V. Cubic-nonlinear theory of the plasma-beam superheterodyne FEL dopplertron type with non-axial injection of electron beam / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // 11<sup>th</sup> International Conference «Electronics and Applied Physics» (APHYS 2015): Conference Proceedings, (Kiev, Ukraine, 21-24, October, 2015). – Kiev, 2015. – С. 145-146.

45. Лисенко О. В. Кубічна нелінійна теорія плазмово-пучкового супергетеродинного ЛВЕ доплертронного типу з неосьовою інжекцією електронного пучка / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко // Міжнародна конференція молодих учених и аспірантів (ІЕФ-2015): Матеріали конференції, (Ужгород, Україна, 18-22 травня, 2015) .- Ужгород, 2015. – С. 65.

46. Лысенко А. В. Метод усредненных характеристик для решения мультигармонических задач в сильноточной электронике / А. В. Лысенко, Г. А. Алексеенко // Труды 17 международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2015): Труды конференции, (Харьков-Сумы, Украина, 8-13 июня, 2015). - Сумы, 2015. – С. 142-146.

47. Lysenko A. V. To the theory of superheterodyne plasma-beam free electron laser of the dopplertron type with non-axial electron beam entry / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // 24<sup>th</sup> International Crimean Conference Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo 2014): Conference Proceedings, (Sevastopol, Ukraine, 7-13, September, 2014). – Sevastopol, 2014. – С. 841-842.

48. Гуляев Ю.В. Супергетеродинное усиление электромагнитных волн / Ю.В. Гуляев, П.Е. Зильберман // ФТТ. – 1971. – Т. 13, № 4. – С. 955– 957.

49. Mehdian H. Electron trajectory and growth rate in a two-stream electromagnetically pumped free electron laser and axial guide field / H. Mehdian, S. Saviz // *Phys. Plasmas*. – 2008. – Vol. 15, No. 9. – P. 093103(5).

50. Mehdian H. Two-stream instability in free electron lasers with a planar wiggler and an axial guide magnetic field / H. Mehdian, S. Saviz, A. Hasanbeigi // *Phys. Plasmas* – 2008. – Vol. 15, No. 4. – P. 043103(4).

51. Mehdian H. The effects of self-fields on the electron trajectory and gain in a two-stream electromagnetically pumped free-electron laser with axial guiding field / H. Mehdian, S. Saviz // *Chin. Phys. B*. – 2010. – Vol. 19, No. 1. – P. 014214.

52. Two-stream Smith–Purcell free-electron laser / W.Liu, Z.Yang, Z.Liang, D.Li, K.Imasaki // *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A*. – 2007. – Vol. 570, No. 1, – P. 171–175.

53. Comparison of self-fields effects in two-stream electromagnetically pumped FEL with ion-channel guiding and axial magnetic field / S. Saviz, H. Mehdian, F.M. Aghamir, M. Ghorannevis, A.A. Ashkarran // *Journal of Plasma Physics*. – 2011. – Vol. 77, No. 12. – P. 765–776.

54. Кулиш В.В. К теории супергетеродинных лазеров на свободных электронах клистронного типа / В.В. Кулиш // *УФЖ*. – 1991. – Т. 36, № 1. – С. 28–33.

55. Кулиш В.В. К теории релятивистских параметрических электронно-волновых лазеров на свободных электронах / В.В. Кулиш // *УФЖ*. – Т. 36, № 5. – 1991. – С. 686–693.

56. Кулиш В.В. К теории эффекта супергетеродинного усиления электромагнитных волн в плазме двухпучковой релятивистской электронной системы / В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // *Физика плазмы*. – 1991. – Т. 17, № 6. – С. 696–705.

57. Кулиш В.В. Физика двухпучкового лазера на свободных электронах / В.В. Кулиш // *Вестник МГУ. Серия: Физика и астрономия*. – 1992. – Т. 33, № 3. – С. 64–78.



58. Лысенко А.В. Мультигармонические процессы в супергетеродинных лазерах на свободных электронах: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.04.01 / Лысенко Александр Владимирович. – Сумы, 2012. – 304 с.
59. Hasanbeigi A. Linear theory of quantum two-stream instability in a magnetized plasma with a transverse wiggler magnetic field / A. Hasanbeigi, S. Moghani, H.Mehdian // *Laser and Particle Beams*. – 2014. – Vol. 32. – No. 3. – P. 353-358.
60. Nadrifard S. Wave mode instabilities in a two-stream free-electron laser with a background plasma / S. Nadrifard, B. Maraghechi, T. Mohsenpour // *Plasma Physics and Controlled Fusion*. – 2013. – Vol. 55. – No. 2. – P. 025012.
61. Saviz S. Effects of self-fields on electron trajectory and gain in planar wiggler free-electron lasers with two-stream and ion-channel guiding / S. Saviz, M. Karimi // *Chinese Physics B*. — 2014. — Vol. 23, No. 3. — P. 034103.
62. Mohsenpour T. Self-field effects on instability of wave modes in a two-stream free-electron laser with an axial magnetic field / T. Mohsenpour, O.K.R. Rami // *Phys. Plasmas*. – 2014. – Vol. 21, No. 7. – P. 072113.
63. Mahdizadeh N. Saturation mechanism in a two-stream free-electron laser / N. Mahdizadeh // *Journal of Plasma Physics*. – 2015. – Vol. 81, No. 6. – P. 905810612.
64. Aghamir F.M. Effects of beam temperature and density variation on the growth rate of a two-stream free electron laser / F.M. Aghamir, N. Mahdizadeh // *Phys. Plasmas*. – 2012. – T. 19. – No. 3. – C. 032114.
65. Mahdizadeh N. Effects of finite beam and plasma temperature on the growth rate of a two-stream free electron laser with background plasma / N. Mahdizadeh, F. M. Aghamir // *Journal of Applied Physics*. — 2013. — Vol. 113, No. 8. — P. 083305.
66. Meydanloo S. Dispersion relation and growth rate in two-stream thermal plasma-loaded free-electron laser with helical wiggler / S. Meydanloo, S. Saviz // *Journal of Theoretical and Applied Physics*. — 2014. — Vol. 9, No. 1. — P. 39 – 43.

67. Zolghadr S. H. Plasma and cyclotron frequency effects on output power of the plasma wave-pumped free-electron lasers / S. H. Zolghadr, S. Jafari, A. Raghavi // *Phys. Plasmas*. — 2016. — Vol. 23, No. 5. — P. 053104.
68. Ахиезер А.И. О взаимодействии пучков заряженных частиц с электронной плазмой / А.И. Ахиезер, Я.Б. Файнберг // *ДАН СССР*. — 1949. — Т. 69, № 4. — С. 555–556.
69. Bohm D. Theory of plasma oscillations. V. Excitation and Damping of Oscillations / D. Bohm, E.P. Gross // *Phys. Rev.* — 1949. — Vol. 75, No. 12. — P. 1864–1876.
70. Харченко И.Ф. Взаимодействие электронного пучка с плазмой / И.Ф. Харченко, Я.Б. Файнберг, Р.М. Николаев [и др.] // *ЖЭТФ*. — 1960. — Т. 38, № 3. — С. 685–690.
71. Trivelpiece A., Gould R. W. Space charge waves in cylindrical plasma columns // *Journal Applied Physics*. — 1959. — V.30, №1. — P. 1744-1793.
72. Briggs R. J. *Electron-stream interaction whis plasmas*. Cambridge MA: MIT Press. — 1964.
73. Девидсон Р. Теория заряженной плазмы / Р. Девидсон ; пер. с англ. А.В. Агафонова. — М.: Мир, 1978. — 215 с.
74. Электродинамика плазмы / [ Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др.] ; под ред. А.И. Ахиезера. — М.: Наука, 1974. — 719 с.
75. Кузелев М.В. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. — М. : Наука, 1990. — 336 с.
76. Кузелев М.В. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. — М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. — 544 с.
77. Krall N.A. *Principles of Plasma Physics* / N.A. Krall, A.W. Trivelpiece. — New York: San Francisco Press, 1986. — 686 p.
78. Bellan P. M. *Fundamentals of plasma physics* / P. M. Bellan. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 2008. — 628 p.

79. Александров А. Ф. Радиофизика. Физика электронных пучков и основы высокочастотной электроники / А. Ф. Александров, М. В. Кузелев. – М: Изд. КДУ, 2007 – 300 с.
80. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей: в 2 т. – Т. 1: Неустойчивости однородной плазмы / А.Б. Михайловский. – Изд. 2-е, исп. и доп. – М.: Атомиздат, 1975. – 272 с.
81. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей: в 2 т. – Т. 2: Неустойчивости неоднородной плазмы / А.Б. Михайловский. – Изд. 2-е, исп. и доп. – М.: Атомиздат, 1977. – 360 с.
82. Krasovitskiy V.B. Instabilities of relativistic electron beam in plasma / V.B. Krasovitskiy. – New York : Nova Publishers, 2008. – 219 p.
83. Bret A. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime / A. Bret, L. Gremillet, M. E. Dieckmann // Phys. Plasmas. — 2010. — Vol. 17, No. 12. — P. 120501.
84. Generation of high-power sub-thz waves in magnetized turbulent electron beam plasmas / M. K. A. Thumm, A. V. Arzhannikov, V. T. Astrelin [et al.] // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. — 2013. — Vol. 35, No. 1. — P. 81–90.
85. Timofeev I.V. Exact kinetic theory for the instability of an electron beam in a hot magnetized plasma / I.V. Timofeev, V.V. Annenkov // Phys. Plasmas —2013.— Vol. 20, No. 9. — 092123
86. Kuzelev M. V. On the theory of electromagnetic interactions of a relativistic electron beam and plasma in a coaxial waveguide in an external magnetic field / M. V. Kuzelev, E. A. Khapaeva // Moscow University Physics Bulletin. — 2015. — Vol. 69, No. 6. — P. 512–518.
87. Bret A. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime / A. Bret, L. Gremillet, M. E. Dieckmann // Phys. Plasmas — 2010.—Vol. 17, No. 12. — 120501

88. Tripathi V.K. Plasma effects in a free electron laser / V.K. Tripathi, C.S. Liu // *IEEE Transactions on Plasma Science*. – 1990. – Vol. 18, No. 3. – P. 466–471.
89. Liu C.S. Interaction of electromagnetic waves with electron beams and Plasmas / C.S. Liu, V.K. Tripathi. – Singapore : World Scientific, 1994. –300 p.
90. Бобылев Ю.В. К нелинейной теории коллективного черенковского взаимодействия плотного релятивистского пучка с плазмой / Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // *Физика плазмы*. – 2009. –Т. 35, № 6. – С. 533–541.
91. Бобылев Ю.В. Нелинейная теория релятивистских пучково-плазменных неустойчивостей в режиме коллективного эффекта Черенкова / Ю.В. Бобылев, М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // *Физика плазмы*. – 2008. – Т. 34, № 2. – С. 122–139.
92. Кузелев М.В. Спонтанное и вынужденное излучение электрона, электронного сгустка и электронного пучка в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе // *УФН*. – 2008. – Т. 178, № 10. – С. 1025–1055.
93. Ponomarev A. V. Relativistic plasma-beam microwave amplifier / A.V. Ponomarev, P.S. Strelkov, A.G. Shkvarunets // *Plasma Physics Reports*. — 1998. — Vol. 24, No. 1. — P. 48–52.
94. Strelkov P. S. Plasma high-power microwave sources driven by relativistic electron beams / P.S. Strelkov // *Journal of Technical Physics*. — 2000. —Vol. 41, No. 1. — P. 469–483.
95. Basic theoretical formulations of plasma microwave electronics. I. a fluid model analysis of electron beam-wave interactions / L. Shenggang, R.J. Barker, Z. Dajun [et al.] // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2000. —Vol. 28, No. 6. — P. 2135–2151.
96. Basic theoretical formulation of plasma microwave electronics. II. kinetic theory of electron beam-wave interactions / L. Shenggang, R.J. Barker, Y. Yung, Z. Dajun // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2000. — Vol. 28, No. 6. — P. 2152–2165.

97. Liu S. Linear theory of the electron beam-wave-plasma interactions in a magnetized plasma waveguide / S. Liu, Y. Wei, X. Yuan, Y. Yan // *Journal of Applied Physics*. — 2007. — Vol. 101, No. 5. — P. 053309.

98. Bogdankevich I.L. Experimental study and numerical simulations of a plasma relativistic microwave amplifier / I.L. Bogdankevich, I.E. Ivanov, P.S. Strelkov // *Plasma Physics Reports*. — 2010. — Vol. 36, No. 9. — P. 762–771.

99. Kartashov I.N. Electromagnetic beam-plasma interactions in a magnetic field / I.N. Kartashov, M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze // *Plasma Physics Reports*. — 2009. — Vol. 35, № 2. — P. 169–176.

100. Kartashov I. N. Amplification of surface waves in a plasma waveguide by a straight relativistic electron beam in a finite magnetic field / I. N. Kartashov, M. V. Kuzelev, A. A. Rukhadze // *Plasma Physics Reports*. — 2004. — Vol. 30, No. 1. — P. 56–61.

101. Plasma relativistic microwave electronics / M. V. Kuzelev, O. T. Loza, A. A. Rukhadze [et al.] // *Plasma Physics Reports*. — 2001. — Vol. 27, No. 8. — P. 669–691.

102. Production of ultra-short high-power microwave pulses in čerenkov backward-wave systems (review) / N. S. Ginzburg, S. D. Korovin, I. V. Pegel [et al.] // *Laser Physics*. — 2006. — Vol. 16, No. 1. — P. 79–88.

103. Neufeld J. Interaction of a plasma with a “helical” electron beam / J. Neufeld, H. Wright // *Physical Review*. — 1964. — Vol. 135, No. 5A. — P. A1175–A1189.

104. Sugaya R. Experimental observation of explosive instability due to a helical electron beam / R. Sugaya, M. Sugawa, H. Nomoto // *Physical Review Letters*. — 1977. — Vol. 39, No. 1. — P. 27–31.

105. Chunyi W. Double-stream electron cyclotron maser / W. Chunyi, L. Shenggang // *International Journal of Electronics*. — 1984. — Vol. 57, No. 6. — P. 1191–1204.

106. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a free-electron laser with a helical wiggler and ion-channel guiding / T. Mohsenpour, B. Maraghechi // *Phys. Plasmas* – 2008. – Vol. 15, N4. – P. 113101.1–113101.10.

107. Progress in theory of instabilities in a rotating plasma / A.B. Mikhailovskii, J.G. Lominadze, A.P. Churikov, V.D. Pustovitov // *Plasma Physics Reports*. – 2009. – Vol. 35, № 4. – P. 273–314.

108. Hemsing E. Helical electron-beam microbunching by harmonic coupling in a helical undulator / E. Hemsing, P. Musumeci, S. Reiche[et al.] // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 102, No. 17. — P. 174801.

109. Experimental and theoretical investigations of high power sub-millimeter wave emission at two-stream instability of high-current REB / A.V. Arzhannikov et. al. // *Fusion Science and Technology*. — 2013. — Vol. 63, No. 1T. — P. 82–87.

110. Saviz S. The effect of beam and plasma parameters on the four modes of plasma-loaded traveling-wave tube with tape helix / S. Saviz // *Journal of Theoretical and Applied Physics*. — 2014. — Vol. 8, No. 3. — P. 1–35.

111. Кузелев М.В. Методы теории волн в средах с дисперсией / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 272 с.

112. Мирошниченко В.И. Вынужденное когерентное рассеяние электромагнитной волны релятивистским электронным пучком в магнитном поле / В.И. Мирошниченко // *Физика плазмы*. – 1976. – Т. 2, № 5. – С. 789–794.

113. Kulish V.V. On the theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with H-ubitron pumping / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // *Technical Physics Letters*. – 2009. – Vol. 35, No. 8. – P. 696–699.(Кулиш В.В. К теории плазма-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // *Письма в ЖТФ*. – 2009. – Т. 35, вып. 15. – С.25–32.)

114. Гапонов А.В. Взаимодействие непрямолинейных электронных потоков с электромагнитными волнами в линиях передачи // Изв. вузов. Радиофизика. — 1959. — Т. 2, № 3. — С. 450–462.
115. Schneider J. Stimulated emission of radiation by relativistic electrons in a magnetic field // Phys. Rev. Lett. — 1959. — V. 2, No. 12. — P. 504–505.
116. Pantell R.H. Electron beam interaction with fast waves // Proc. Symp. on Millimeter waves. — 1959. — V. 9. — P. 301.
117. Pantell R.H. Backward-wave oscillations in an unloaded waveguide // Proc. IRE. — 1959. — V. 47, No. 6. — P. 1146.
118. Трубецков Д.И. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: в 2 т. — Т. 1 / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. — М. : Физматлит, 2003. — 496 с.
119. Трубецков Д.И. Лекции по сверхвысокочастотной электронике для физиков: в 2 т. — Т. 2 / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов. — М. : Физматлит, 2004. — 648 с.
120. Li G. D. Terahertz electron cyclotron maser interactions with an axis-encircling electron beam / G. D. Li, S. H. Kao, P. C. Chang, K. R. Chu // Phys. Plasmas. — 2015. — Vol. 22, No. 4. — P. 043109.
121. Chu K. R. The electron cyclotron maser / K. R. Chu // Reviews of Modern Physics. — 2004. — Vol. 76, No. 2. — P. 489–540.
122. Miroshnichenko V. I. Forced coherent scattering of electromagnetic waves by a relativistic beam of oscillators / V. I. Miroshnichenko // Radiophysical and Quantum Electronics. — 1980. — Vol. 23, No. 3. — P. 252–259.
123. A quarter century of gyrotron research and development / V. L. Granatstein, B. Levush, B. G. Danly, R. K. Parker // IEEE Transactions on Plasma Science. — 1997. — Vol. 25, No. 6. — P. 1322–1335.
124. Nusinovich G. S. The gyrotron at 50: historical overview / G. S. Nusinovich, M. K. A. Thumm, M. I. Petelin // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. — 2014. — Vol. 35, No. 4. — P. 325–381.

125. Glyavin M. Y. Terahertz gyrotrons: state of the art and prospects / M. Y. Glyavin, G. G. Denisov, V. E. Zapevalov [et al.] // *Journal of Communications Technology and Electronics*. — 2014. — Vol. 59, No. 8. — P. 792–797.
126. Du C. H. Theoretical study of a fourth-harmonic 400-ghz gyrotron backward-wave oscillator / C.H. Du, H. Lee, X.B. Qi [et al.] // *IEEE Transactions on Electron Devices*. — 2015. — Vol. 62, No. 1. — P. 207–212.
127. Zai-Gao C. Theoretical and numerical studies on a planar gyrotron with transverse energy extraction / C. Zai-Gao, W. Jian-Guo, W. Yue // *Chinese Physics B*. — 2014. — Vol. 23, No. 10. — P. 108401.
128. Review of subterahertz and terahertz gyrodevices at iap ras and fir fu / V. Bratman, M. Glyavin, T. Idehara [et al.] // *IEEE Transactions on Plasma Science*. — 2009. — Vol. 37, No. 1. — P. 36–43.
129. Dynamics and spectral composition of subterahertz emission from plasma column due to two-stream instability of strong relativistic electron beam / A.V. Arzhannikov, A.V. Burdakov, V.S. Burmasov [et al.] // *IEEE Transactions on Terahertz Science and Technology*. — 2016. — Vol. 6, No. 2. — P. 245–252.
130. Zaboronkova T. M. Electromagnetic wave radiation by an electron beam spiraling in a magnetized plasma column / T. M. Zaboronkova, C. Krafft // *Phys. Plasmas*. — 2007. — Vol. 14, No. 6. — P. 062101.
131. Wang M. Effects of background plasma on free electron laser with planar wiggler / M. Wang, Z. Liang, Z. Yang // *International Journal of Infrared and Millimeter Waves*. — 2003. — Vol. 24, No. 6. — P. 1023–1033.
132. Zirak H. Dispersion relation and growth rate of a relativistic electron beam propagating through a langmuir wave wiggler / H. Zirak, S. Jafari // *Journal of Plasma Physics*. — 2015. — Vol. 81, No. 03. — P. 905810302
133. Bekefi G. Two-stream, free-electron lasers / G. Bekefi, K.D. Jacobs // *J. Appl. Phys.* — 1982. — Vol. 53, No. 6. — P. 4113–4121.



134. Strong-signal theory of a free-electron laser / F.A. Hopf, P. Meystre, M.O. Scully, W.H. Louisell // *Phys. Rev. Lett.* – 1976. – Vol. 37, No. 20. – P. 1342-1345.
135. Torre A. Free electron laser theory / A. Torre, G. Datolli // *CERN Sci. Rept.* – 1989. – Vol. 3. – P. 1–60.
136. Mishra P. K. A comparative study of the full dispersion relation, Compton dispersion relation, and Raman dispersion relation of a free-electron laser in helical wiggler and guiding magnetic fields / P. K. Mishra // *Laser Physics.* — 2006. — Vol. 16, No. 7. — P. 1050–1053.
137. Mishra P. K. Kinetic description of microwave Raman regime free-electron laser in the presence of helical wiggler and guiding magnetic fields / P. K. Mishra // *Optica Applicata.* — 2007. — Vol. 37, No. 1-2. — P. 195-204.
138. Mehdian H. Kinetic description of a free electron laser with an electromagnetic-wave wiggler and ion-channel guiding by using the Einstein coefficient technique / H. Mehdian, S. AbasiRostami, A. Hasanbeigi // *Laser Physics.* — 2016. — Vol. 26, No. 4. — P. 045003.
139. Bahmani M. Influence of finite radial geometry on the growth rate of ion-channel free electron laser / M. Bahmani, A. Hasanbeigi, H. Hamzhepour // *Phys. Plasmas.* — 2013. — Vol. 20, No. 11. — P. 113114.
140. Hasanbeigi A. Growth rate enhancement of free-electron laser by two consecutive wigglers with axial magnetic field / A. Hasanbeigi, A. Farhadian, E. K. Bidhendi // *Pramana.* — 2014. — Vol. 82, No. 6. — P. 1049–1060.
141. Mehdian H. Self-fields in a free-electron laser with electromagnetic-wave wiggler and ion-channel guiding / H. Mehdian, A. Hasanbeigi, S. Jafari // *Phys. Plasmas.* — 2008. — Vol. 15, No. 12. — P. 123101.
142. Mehdian H. Free-electron laser harmonic generation in an electromagnetic-wave wiggler and ion channel guiding / H. Mehdian, A. Hasanbeigi, S. Jafari // *Phys. Plasmas.* — 2010. — Vol. 17, No. 2. — P. 023112.

143. Classical theory of a free-electron laser / F.A. Hopf, P. Meystre, M.O. Scully, W.H. Louisell // *Optics Communications*. – 1976. – Vol. 18, No. 4. – P. 413–416.
144. Лазер на свободных электронах с точки зрения лазерной физики/ F.A. Hopf, T.G. Kuper, G.T. Moore, M.O. Scully // *Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / пер. с англ. под А.А. Рухадзе*. – М.: Мир, 1983. – С. 7–41.
145. Федоров М.В. Электрон в сильном световом поле / М.В. Федоров. – М. : Наука, 1991. – 223 с.
146. Colson W.B. One-body analysis of free electron lasers / W.B. Colson // *Physics of Quantum Electronics*. – 1977. – Vol. 5. – P. 152–196.
147. Colson W.B. Fundamental free electron laser theory and new principles for advanced devices / W.B. Colson // *Proc. Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.* –1987. – Vol. 738. – P. 2–27.
148. Colson W.B. Лазеры на свободных электронах: уравнения Максвелла с одночастичными токами / W.B Colson, S.K. Ride // *Генераторы когерентного излучения на свободных электронах / Под ред. проф.Рухадзе А.А.* – М.: Мир, 1983. – С. 42–68.
149. McMullin W.A. Stochastic particle instability for electron motion in combined helical wiggler, radiation, and longitudinal wave fields / W.A. McMullin, R.C. Davidson // *Phys. Rev. A* — 1982. — Vol. 26. —P. 410-422.
150. Сигов Ю.С. Численные методы кинетической теории плазмы: Учеб. пособие / Ю.С. Сигов. — М.: Изд-во МФТИ, 1984. — 94 с.
151. Численное моделирование различных механизмов стабилизации неустойчивости релятивистского электронного пучка в плотной плазме / Ю.В. Бобылёв, В. А. Панин, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе // *Прикладная физика*. — 2010. — №. 4. — С. 75-90.
152. Clark D. S. Particle-in-cell simulations of Raman laser amplification in preformed plasmas / D. S. Clark, N. J. Fisch // *Phys. Plasmas*. — 2003. —Vol. 10, No. 12. — P. 4848–4855.

153. Birdsall C. K. Plasma physics via computer simulation / C. K. Birdsall, A. B. Langdon. — New York : CRC Press, 2004. — 504 p.
154. Kargarian A. Nonlinear absorption of short intense laser pulse in multispecies plasma / A. Kargarian, K. Hajisharifi, H. Mehdian // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23, No. 8. — P. 082116.
155. Output power fluctuations due to different weights of macro particles used in particle-in-cell simulations of cerenkov devices / R. Bao, H. Wang, Y. Li, C. Liu // Phys. Plasmas. — 2016. — Vol. 23, No. 7. — P. 073114.
156. Куліш В.В. Ієрархічний метод та технічні особливості його застосування у нелінійних задачах електродинаміки. Загальна теорія / В.В. Куліш // УФЖ. — 1998. — Т. 43, № 4. — С. 483 — 499.
157. Куліш В.В. Ієрархічний підхід до нелінійно-резонансних проблем електродинаміки / В.В. Куліш // Вісник Сумського державного університету. — 1997. — №6. — С. 2-10.
158. Савченко В.І. Метод усереднених характеристик та його застосування у нелінійних задачах релятивістської електродинаміки: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.02 / Савченко Валерій Іванович. — Київ, 2005. — 142 с.
159. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М.Крылов, Н.Н. Боголюбов. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 352 с.
160. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребенников. - М.:Наука, 1986. — 256 с.
161. Шматько А.А. Электронно-волновые системы миллиметрового диапазона / А.А. Шматько. — Х. : Харьк. нац. ун-т им. В.Н. Каразина, 2008. — 464 с.
162. Шматько А.А. Электронные приборы сверхвысоких частот/ А.А. Шматько. — Х. : Харьк. нац. ун-т им. В.Н. Каразина, 2006. — 328 с.
163. Molokovsky S.I. Intense electron and ion beams / S.I. Molokovsky, A.D. Sushkov. — Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2005. — 293 p.