Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Шосткинський інститут Сумського державного університету
Фармацевтична компанія «Фармак»
Управління освіти Шосткинської міської ради
Виконавчий комітет Шосткинської міської ради

ОСВІТА, НАУКА ТА ВИРОБНИЦТВО: РОЗВИТОК І ПЕРСПЕКТИВИ

МАТЕРІАЛИ

II Всеукраїнської науково-методичної конференції,

(Шостка, 20 квітня 2017 року)

Суми
Сумський державний університет
2017

УДК 512.622

СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ

В.В. Лобастов, С.Г. Кочубей, Т.В. Кузьменко
Шосткинська спеціалізована школа I-III ступенів № 1
вул. Чернігівська, 10, м. Шостка, 41100
sh1admin70@ukr.net

Зараз поняття симетрії в алгебрі, зокрема, симетричні многочлени зустрічається лише у профільному навчанні школярів і висвітлюється поверхово, тому метою даної роботи є дослідження поняття симетричних многочленів.

Об'єктом дослідження є симетричні многочлени від двох змінних, за допомогою яких спрощується розв'язання ряду задач і що, найголовніше, проводиться стандартним шляхом.

Предметом дослідження є вивчення властивостей симетричних многочленів та їх застосування при розв'язуванні відповідних задач.

Звідси випливає головна мета дослідження, яка полягає в тому, що необхідно виявити основні властивості й визначити коло задач, які розв'язуються за допомогою симетричних многочленів.

Переваги у застосуванні: знижують степінь та спрощують обчислення.

Тому в роботі розкрито один доволі загальний метод розв'язування систем рівнянь вищих степенів. Він не досить універсальний, але його можна застосувати до більшості систем, з якими стикається учень. Метод, про який йде мова, оснований на теорії симетричних многочленів. Ми побачимо, що теорія досить проста і що вона дозволяє розв'язувати не лише системи алгебраїчних рівнянь, а й різноманітні задачі алгебри (розв'язування ірраціональних та зворотних рівнянь, доведення нерівностей, розклад многочленів на множники в області дійсних чисел і т.д.).

Будь-який симетричний многочлен від коренів x_1,...... x_n наведеного алгебраїчного рівняння $x_n + a_1x_{n-1} + ... + a_n = 0$ є многочленом від коефіцієнтів цього рівняння.

Симетричні многочлени застосовуються для вирішення різноманітних завдань шкільної математики. Наведемо приклади.

Симметричені многочлени $x + y$ и xy є найпростішими. Любий симетричний многочлен овід x і у можно записати у вигляді многочлена від $a_1=x+y$, $a_2= xy$.

Існує доволі легкий спосіб, якій дозволяє отримувати симметричні многочлени. Кожну степеневу суму $s_n= x^n+y^n$ можно записати у вигляді многочлена через a_1 і a_2:

$$s_1=x+y= a_1,$$
$$s_2= x^2+y^2 =(x+y)^2-2xy=a_1^2-2a_2,$$
$$s_3=x^3+y^3 =(x+y)(x^2+xy+y^2)=(x+y)((x+y)^2-3xy)=a_1(a_1^2-3a_2)$$

Дуже часто зустрічаються системи рівнянь, ліві частини яких симетрично залежать від невідомих *x*, *y*.

В цьому випадку перейти до нових невідомих $a_1 = x + y$ и $a_2 = xy$. Вигода такої заміни невідомих заключається в тому, що степені рівнянь після заміни зменшуються (оскільки $a_2 = xy$ є многочленом другої степені від *x*, *y*). Іншими словами, як правило розв'язання системи відносно нових невідомих a_1,a_2 легше, ніж розв'язання першої системи.

Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо дві нові змінні a=x+y,b=xy. Використаємо вираз $x^3+y^3 = a_1(a_1^2-3a_2)$. Тоді задана система прийме вигляд:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab + b^3, \\ a + b = 5. \end{cases}$$

розв'язками системи є пари чисел $a_1=2$, $b_1=3$,$a_2=3$, $b_2=2$. Отримали дві системи

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Перша система не має дійсних виразів з другої знаходимо два дійсні вирази. (1;2); (2;1).

Розглянемо приклади розкладання однорідних симетричних многочленів на множники.

Симетричний многочлен виражають через a_1 і a_2 і потім отримані вирази розкладають на множники. При вираженні симетричного многочлена четвертої степені через a_1 і a_2 отримаємо многочлен другої степені відносно a_2. Для розкладання його на множники достатньо знайти корні отриманого многочлена другої степені.

Розглянемо приклад. Розкласти на множники многочлен

$$f(x,y) = 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 = 10s_4 - 27a_2s_2 - 110a_2^2.$$

Ми маємо: $f(x,y) = 10x^4 - 27x^3y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$.

За формулою

$$s_k = a_1 s_{k-1} - a_2 s_{k-2}$$

знаходимо:$s_k = a_1 s_{k\text{-}1}\text{-}a_2 s_{k\text{-}2}$

$$f(x,y) = 10a_1^4 - 67a_1^2a_2 - 36a_2^2.$$

Цей многочлен другої степені відносно a_2 легко розкладаємо на множники. Так як він має корні $a_2 = -2a_1^2$ и $a_2 = \frac{5}{36}a_1^2$, то

$$f(x,y) = -36(a_2 + 2a_1^2)\left(a_2 - \frac{5}{36}a_1^2\right) = (2a_1^2 + a_2)(5a_1^2 - 36a_2).$$

Підставляючи замість a_1 і a_2їх значення $a_1 = x + y$, $a_2 = xy$,отримуємо:

$$f(x,y) = (2(x+y)^2 + xy)(5(x+y)^2 - 36xy) =$$
$$= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 26xy + 5y^2).$$

Кожен з двох квадратних тричленів, які стоять в правій частині, знову можна розкласти на множники. Наприклад перший з них, тобто $2x^2 + 5xy + 2y^2$, розглядається як квадратний многочлен відносно x, та має корні

$x = -0{,}5y$, $x = -2y$, і тому

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2(x + 0{,}5y)(x + 2y) = (2x + y)(x + 2y).$$

Аналогічно знаходимо:

$$5x^2 - 26xy + 5y^2 = (x - 5y)(5x - y).$$

На прикладі симетричних многочленів ми побачили, що симетрія в широкому сенсі - це незмінність при будь-яких перетвореннях. Математики з давнини прагнули до краси математичних формул і справедливо вважали, що красива формула відрізняється від негарної тим, що в красі більше симетрії.

Як і плоскі фігури або просторові тіла, многочлени можуть володіти симетрією. Завдяки застосування симетричних многочленів до елементарної алгебри, значно спрощується рішення систем рівнянь, нерівностей, різних завдань.

Ми бачимо, що симетрія в алгебрі не тільки робить перетворення красивим, але і значно полегшує обчислювальну роботу.

Список використаних джерел:

1. Вайтроб, А. Ю. Симметрия [Текст] / А. Ю. Вайнтроб, А. Б. Сосинский // Квант. - 1984. - № 3. - С. 19 - 22.

2. Вейль, Г. Симметрия [Текст] / Г. Вейль. — М.: Наука, 1998. – 123 с., ил.

3. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики [Текст] / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. — М.: Просвещение, 1996. – 288 с.