
ФІЗИКА

УДК 535.81/818.8

БІФУРКАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІКИ ОДНОМОДОВИХ ТВЕРДОТІЛЬНИХ ЛАЗЕРІВ (ОГЛЯД)

С.В. Коломісць, канд. фіз.-мат. наук;
Сумський національний аграрний університет.

І.О. Шуда, канд. фіз.-мат. наук;
Сумський державний університет.

Методом біфуркації народження циклу досліджується динаміка класичних та напівкласичних моделей одномодових твердотільних лазерів з різними модуляторами добротності, знайдено критерії стійкості періодичних коливань інтенсивності, які виникають внаслідок біфуркації Хопфа, побудовано інтервали стійкості для параметрів моделі. Вивчаються біфуркаційні процеси в напівкласичних моделях одномодових лазерів біжучої хвилі. Для асимптотичного інтегрування тривимірної та чотиривимірної лазерних моделей використовується метод Джозефа.

ВСТУП

Розроблення нових методів керування лазерними параметрами, збільшення ефективності лазерів, дослідження фізичних процесів, які б самостабілізували певні нерівноважні режими роботи лазерних систем, залишаються актуальними задачами. Однак вирішення названих проблем неможливо без систематичного вивчення та врахування різних ефектів, що обумовлені взаємодією генерованого випромінювання з активним середовищем або іншими елементами лазера, та приводять до автомодуляції добротності резонатора. Ефекти, які пов'язані з автомодуляцією добротності резонатора, можуть впливати на динаміку генерації та характеристики окремих імпульсів в будь-яких режимах роботи лазера, тобто мають універсальний характер. Удосконалення вихідних характеристик лазерного випромінювання потребує детального вивчення нелінійних фізичних процесів, що відбуваються в лазерах під час генерації.

На сучасному етапі основними задачами фундаментальних досліджень в області нелінійної динаміки твердотільних лазерів є дослідження динаміки генерації кільцевих лазерів, лазерів із нелінійними елементами в резонаторі, вивчення нелінійної взаємодії релаксаційних та автомодуляційних коливань, з'ясування причин виникнення, основних характеристик та сценаріїв розвитку динамічного хаосу в автономних та неавтономних лазерах [1–7]. Актуальність дослідження обумовлена також прикладними аспектами, оскільки результати можуть бути використані для вивчення загальних закономірностей у поведінці інших нелінійних систем, при вивченні умов і причин виникнення автоколивань, параметричних процесів, динамічного хаосу.

Теоретичне вивчення генерації базується на аналізі лазерних моделей, якими є системи нелінійних диференціальних рівнянь. Лазерна модель – типова дисипативна система, втрати в якій обумовлені поглинанням випромінювання різними конструктивними елементами, релаксаційними процесами та виходом генерованого променя з резонатора. Різним режимам генерації відповідають різні розв'язки, які

можуть бути представлені у вигляді траєкторій у фазовому просторі. Особливу роль при аналізі динаміки лазерної системи відіграють точки біфуркації – значення параметрів, при яких змінюється характер траєкторій через зміну типу або числа станів рівноваги. Зокрема, біфуркація народження циклу визначає умови виникнення періодичних коливань у лазерній моделі [8]. За час розвитку квантової електроніки сформувався певний стереотип розв'язування задач з дослідження генерації лазерів. Оскільки тільки в деяких випадках вдавалось знайти розв'язок нелінійної системи в аналітичному вигляді, то режими генерації лазерів розраховувалися, перш за все, за допомогою чисельних методів. В історії динаміки лазерів, яка нараховує більш ніж тридцять років, окремо виділяють 80-ті роки ХХ ст., коли динаміка генерації лазерних моделей починає досліджуватися через застосування якісних методів теорії нелінійних коливань, що дало можливість отримати важливі результати з перебудови каналів генерації, умов виникнення автоколивань генерації надкоротких імпульсів. Застосування якісних методів дослідження динамічних систем (теорії біфуркації) дозволило вивчати окремі режими генерації, які допускає конкретна лазерна модель, класифікувати їх, отримати інформацію про розв'язки через належність лазерних параметрів окремим областям їх змінювання [9].

У той самий час якісні методи теорії нелінійних коливань, надаючи інформацію про загальну картину генерації, не дозволяють визначити її кількісні характеристики. Зокрема, не одержано аналітичні залежності, які характеризують режим випромінювання за умов існування біфуркації Хопфа. У зв'язку з цим виникає потреба застосування кількісних методів теорії нелінійних коливань, що дозволить отримати аналітичні залежності для параметрів лазерної моделі, аналітичний вигляд розв'язків динамічних систем, через аналіз яких вивчити вплив зміни параметрів лазера на його динаміку, проводити більш цілеспрямований пошук методів керування режимами генерації.

1 ТЕОРЕТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ЛАЗЕРІВ

Незважаючи на велику різноманітність типів активних середовищ і методів одержання інверсної заселеності, всі лазери мають три основні частини: активне середовище, систему накачування і резонатор, у зв'язку з чим виникає можливість при дослідженні динаміки генерації лазерів використовувати єдиний підхід. Як відмічалось у Вступі, теоретичне дослідження режимів генерації базується на аналізі класичної (швидкісні рівняння Статца-Демарса) та напівкласичних лазерних моделей. Рівняння подаються у безрозмірній формі, що дозволяє усунути коефіцієнти, які не визначаються під час експерименту. У той самий час, нормування величин має чіткий фізичний зміст: амплітуда поля нормується на насичене значення, а інверсія – на величину, що відповідає порогу генерації лазера. При дослідженні нестационарних режимів генерації лазерів, окрім відомої класифікації, використовується класифікація за співвідношеннями між релаксаційними параметрами – швидкістю релаксації інверсії ν_1 , швидкістю релаксації атомної поляризації ν_2 , швидкістю згасання поля в резонаторі ν . Згідно з [10] існують чотири класи лазерів А, В, С, D, що відповідають різним співвідношенням між релаксаційними параметрами. Релаксаційні параметри лазерів класу А задовольняють співвідношення $\nu \leq \nu_1, \nu_2$, фазовий портрет – одновимірний, представляється за допомогою точок, перехідні процеси – аперіодичні. До класу А належить більшість атомарних газових лазерів та лазери на розчинах органічних барвників. Для лазерів класу В виконуються співвідношення $\nu_2 \gg \nu \gg \nu_1$, динаміка лазерів описується двовимірними моделями, перехідні процеси мають коливальний характер. До лазерів класу В належать твердотільні лазери на слабологованих кристалах та склі (рубін, неодим, інші рідкоземельні елементи), волоконні, напівпровідникові та деякі молекулярні газові лазери низького тиску. Релаксаційні

параметри лазерів класу С мають однаковий порядок: $\nu \approx \nu_2 \geq \nu_1$, відповідні динамічні моделі містять більше двох диференціальних рівнянь, при дослідженні моделей не використовується асимптотичне виключення змінних, фазовий портрет може містити дивний атрактор. Найбільш типовими представниками лазерів класу С є газові лазери. До лазерів класу D, релаксаційні параметри яких задовольняють співвідношення $\nu \geq \nu_1, \nu_2$, належить найменша кількість лазерів, зокрема, пучкові лазери. Як підкреслюється у [10], найпростіші одномодові моделі відіграють особливу роль у динамічній теорії лазерів, оскільки в них розглядається фундаментальна та неусувна нелінійність, яка супроводжує процес взаємодії поля та активного середовища, та поява якої не обумовлена взаємодією мод, наявністю додаткових нелінійних елементів або зовнішніх керуючих сигналів.

Нижче наводяться існуючі моделі одномодових лазерів, які є предметом дослідження.

1.1 РІВНЯННЯ СТАТЦА-ДЕМАРСА

Серед класичних моделей динаміки твердотільних лазерів найбільшого поширення набула система рівнянь Статца-Демарса, яка в безрозмірній формі має вигляд [11]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx(y-1), \\ \dot{y} &= A-y(x+1). \end{aligned} \quad (1.1)$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau}$, $\dot{y} = \frac{dy}{d\tau}$, $G = \frac{T_1}{T}$ – відношення часу релаксації різниці заселеностей рівнів до часу життя фотона в резонаторі; $\tau = \frac{t}{T_1}$ – час, віднесений до часу релаксації різниці заселеностей рівнів; x – безрозмірна інтенсивність випромінювання на частоті генерації; y – відношення густини інверсної заселеності до її порогового рівня; A – параметр накачки.

1.2 МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА З МОДУЛЯТОРОМ ДОБРОТНОСТІ РЕЗОНАТОРА

Як відомо, добротність Q резонатора визначається як помножене на частоту випромінювання ω відношення енергії U , нагромадженої в резонаторі, до енергії, що втрачається за одиницю часу $Q = \frac{\omega U}{-du/dt}$. Якщо скористатися залежністю $Q = T\omega$

[11], то перше з рівнянь (1.1) можна подати у вигляді $\dot{x} = Gx \left(y - \frac{\omega T}{Q} \right)$. У роботі [12]

запропоновано брати добротність як функцію інтенсивності випромінювання. Зокрема, в [13] береться $\frac{\omega T}{Q} = 1 + \frac{b}{\rho x + 1}$, де b, ρ – безрозмірні параметри керування добротністю, тоді система (1.1) набирає вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(y - 1 - \frac{b}{\rho x + 1} \right), \\ \dot{y} &= A - y(x + 1). \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.3 НАПІВКЛАСИЧНА БАЛАНСНА МОДЕЛЬ

Самоузгоджена напівкласична система рівнянь лазера для дворівневого, спектрально однорідного і орієнтаційно упорядкованого середовища

використовується в роботі [10], яка шляхом адіабатного виключення трьох швидкісних фазових координат зводиться до балансної моделі одномодового лазера на твердому тілі:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(\frac{y}{c - ky} - 1 \right), \\ \dot{y} &= A - y - \frac{xy}{c - ky}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

де x – нормована інтенсивність поля випромінювання; y – нормована різниця заселеності (інверсія); G – великий параметр в теорії лазерів класу В; k – відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи; A – параметр накачки; $c = 1 + k + \frac{\Delta^2}{1+k}$; $\Delta = \frac{\omega_0 - \omega_c}{\nu_2}$ – відносна відстройка власної частоти резонатора від центра спектральної лінії.

Якщо значення параметра k наближається до нуля, ним можна знехтувати, тоді система (1.3) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx(y\delta - 1), \\ \dot{y} &= A - y - \delta xy. \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $\delta = \frac{1}{1 + \Delta^2}$.

1.4 МОДЕЛЬ ЛАЗЕРА З ФІЛЬТРОМ

Як відомо, для керування динамікою лазера в резонатор вміщують додатковий елемент, який змінює підсилення або втрати в системі. Зазначеними елементами можуть бути – фільтр, що просвітлюється – комірка з речовиною, поглинання якої зменшується під впливом генерованого випромінювання, однократний або періодичний модулятор втрат, різні нелінійні елементи. Нелінійний фільтр розміщується всередині резонатора, що приводить до зниження стійкості стаціонарної генерації, а при достатньо високій густині молекул поглинаючого середовища – до виникнення незгасаючих пульсацій. Подібний ефект має місце в твердотільних лазерах з нелінійними фільтрами на основі органічних барвників, у молекулярних газових лазерах з нелінійно поглинаючими газовими комірками. Для стабілізації потужності випромінювання лазера використовують нелінійний елемент, втрати в якому зростають зі збільшенням генерованої потужності. Система рівнянь, яка описує динаміку лазера з фільтром, що просвітлюється, має вигляд [8]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx(y - z - 1), \\ \dot{y} &= A - y(x + 1), \\ \dot{z} &= (\beta - z - \gamma xz) \frac{1}{\tau}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

де x – густина інтенсивності випромінювання; y – інверсія в активному середовищі; z – ненасичене поглинання в фільтрі; G – відношення часу релаксації заселеності активного середовища до часу згасання фотонів у резонаторі; A – параметр накачки;

$$\beta = \frac{Q_0 l_2}{\sigma_1}, \quad \sigma = \eta - \ln\left(\frac{r_1 r_2}{2l}\right); \quad Q_0 - \text{непросвітлене значення коефіцієнта}$$

поглинання фільтра; l_1, l_2 – віддалі від фільтра до кінців резонатора; l – довжина резонатора; η – визначає пасивні витрати; r_1, r_2 – коефіцієнти відбиття дзеркал; γ – відношення густини насичення активного середовища до густини насичення фільтра; τ – характеризує відношення часу релаксації заселеності фільтра до часу релаксації заселеності активного середовища.

За допомогою застосування адіабатичного виключення змінних можна зменшити число рівнянь системи (1.5). Знехтувавши похідною \dot{z} , отримуємо алгебраїчне рівняння, з якого знаходимо $z = \beta(1 + \gamma x)^{-1}$. Після чого система (1.5), що описує динаміку лазера з безінерційним фільтром, набирає вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(y - 1 - \frac{\beta}{1 + \gamma x} \right), \\ \dot{y} &= A - y(x + 1). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Якщо в резонатор введено нелінійний елемент, що залежить від інтенсивності поля фотонів x і має зведений коефіцієнт g нелінійної взаємодії резонатора і елемента, то система (1.5) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(y - 1 - \frac{\beta}{1 + \gamma x} - gx \right), \\ \dot{y} &= A - y(x + 1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

2 ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ЛАЗЕРНИХ МОДЕЛЕЙ

Лазери класу В, типовими представниками яких є твердотільні лазери, демонструють велику кількість варіантів поведінки. Зокрема, у [10] наводяться численні експериментальні факти, що засвідчують наявність незгасаючих регулярних пульсацій в динаміці твердотільних лазерів. Проведення теоретичного аналізу лазерних моделей дозволяє вивчити різні режими генерації, з'ясувати вплив модуляції добротності, наявності нелінійних елементів на динаміку лазерів, порівняти результати теоретичних розрахунків з експериментальними даними.

Модель Статца–Демарса використовувалася для теоретичного дослідження динаміки одномодового лазера з втратами резонатора, що автоматично регулюються. У роботах [14,15] вивчається динаміка лазера з від'ємним зворотним зв'язком за наявності нелінійного елемента, який введено в резонатор. Відповідна система диференціальних рівнянь набирає вигляду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx(y - 1 - \beta(x)) \equiv f_1(x, y), \\ \dot{y} &= A - y(x + 1) \equiv f_2(x, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

У зазначених роботах вигляд функції $\beta(x)$ не конкретизується. Рівняння (2.1) лінеаризуються в околі нетривіального стаціонарного розв'язку x_c, y_c :

$A(x_c + 1)^{-1} = 1 + \beta(x_c)$; $y_c = \frac{A}{x_c + 1}$, після чого знаходяться корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(Gx_c\beta' + x_c + 1) \pm \left\{ \frac{1}{4}(Gx_c\beta' + x_c + 1)^2 - Gx_c[(x_c + 1)\beta' + y_c] \right\}^{1/2}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dx}.$$

Відмічається, що аперіодичний перехідний процес реалізується в тому випадку, коли стаціонарна точка є стійким вузлом, тобто якщо корені характеристичного рівняння дійсні та від'ємні. Врахування великого параметра G дозволило авторам отримати умову від'ємності коренів: $\beta' > 0$ та умову відсутності пульсацій:

$\beta' > \beta'_k = 2(G(A-1))^{-1/2}$. Система (2.1) вивчається у [10], де підкреслюється, що у лазерах з додатним зворотним зв'язком при деяких умовах виникає граничний цикл, тобто потужність випромінювання зазнає періодичних коливань. Зауважимо, що балансна напівкласична модель (1.3) переходить в класичну модель Статца-Демарса, якщо взяти $k = \Delta = 0$. Системі рівнянь Статца-Демарса присвячено багато досліджень, які стосуються здебільшого вивчення малих коливань моделі під впливом слабкої періодичної модуляції параметрів, у тому числі за рахунок введення в резонатор модулятора добротності. Подібні питання розглядаються, наприклад, у роботах [16–21].

З'ясування впливу періодичної модуляції параметрів на режими генерації лазерів класу В проведено в роботах [14,17,18], де досліджуються моделі типу (1.4). У монографії [10] також приділяється увага питанням періодичної модуляції параметрів, узагальнюються результати попередніх досліджень. Аналіз динаміки моделі (1.4) проводиться за умови модуляції втрат резонатора, накачки та параметра δ . З порівняння коефіцієнтів підсилення модуляції автор доходить висновку, що серед розглянутих способів резонансного збудження пульсацій лазерів на твердому тілі модуляція накачки найменш ефективна. Результат пояснюється тим, що швидкості релаксації заселеності та накачки в лазерах класу В надто поступаються частотою релаксаційних коливань, тому модуляція накачки перетворюється в коливання інверсії із значним послабленням. Дослідження системи (1.4) проведено в роботі [22], що дало можливість пояснити пульсації випромінювання твердотільних лазерів, що доволіно виникають, дослідити умови формування гігантських імпульсів.

Вивченню динаміки лазера з фільтром, що просвітлюється, присвячена значна кількість теоретичних та експериментальних досліджень. Результати якісного аналізу балансних рівнянь в моделі некогерентної взаємодії випромінювання з речовиною подано в роботах [9,23,24], де разом з нестійкостями, що існують до досягнення першого порогу, коли втрати перевищують підсилення, вивчаються полістабільність та регулярні динамічні режими. Зокрема, у [9] досліджується модель лазера з безінерційним фільтром шляхом застосування елементів теорії біфуркації, з'ясовано умови виникнення автоколивань, запропоновано формули та алгоритми розрахунків стійких та нестійких циклів, результати якісного аналізу підтверджено чисельними методами. У випадку когерентної взаємодії випромінювання з середовищем у лазері з фільтром, що просвітлюється, не тільки виникають нові стани рівноваги, але й діє обумовлений когерентністю механізм нестійкості, в тому числі нижче, ніж перший лазерний поріг. У роботах [25,26] відмічається, що при зміні параметрів лазерної моделі динаміка генерації зазнає біфуркацій, які приводять до регулярних, квазіперіодичних та хаотичних пульсацій, що дає можливість досліджувати гістерезисні явища, які відрізняються від аналогічних ефектів за умови некогерентної взаємодії. У роботах [13,27] вивчаються стаціонарні розв'язки системи (1.5), умови їх стійкості, досліджуються корені характеристичного рівняння, з'ясовано, що лише у поглинаючому середовищі може порушуватися стійкість стаціонарної генерації, розглядаються області абсолютно стійкої генерації, області нестійкості, наводяться спрощені критерії стійкості.

Фундаментальним питанням нелінійної динаміки лазерів присвячено роботи [28–30]. Теоретичне та експериментальне дослідження фізичних процесів, які

самостабілізують певні нерівноважні режими роботи твердотільних лазерів проведено в [31], де значна увага приділяється новим методам керування лазерними параметрами. Режими генерації твердотільних лазерів при модуляції їх параметрів вивчаються в роботах [32,33].

Як показав огляд літературних джерел з динаміки лазерів, саме в роботах мінської школи лазерної фізики при аналізі динаміки лазерних моделей починають застосовуватись методи теорії біфуркації, що дало можливість отримати важливу інформацію про поведінку розв'язків динамічних систем через аналіз належності параметрів лазера певним областям змінювання. Одночасно автори визнають недостатність застосування лише якісних методів. До аналітичних методів дослідники відносять метод Понтрягіна [34], але цей метод дає можливість визначити лише кількість граничних циклів та дослідити їх стійкість, алгоритму побудови самого граничного циклу він не містить. У випадку отримання аналітичних залежностей для параметрів лазерних моделей, аналітичного вигляду розв'язків динамічних систем виникає можливість теоретично дослідити режим неперервної періодичної генерації, вивчити вплив зміни параметрів лазера на його динаміку.

Значна увага вивченню біфуркаційних процесів у лазерних моделях приділяється у монографіях [8,10], де наведені результати теоретичного вивчення динаміки лазерів через аналіз відповідних математичних моделей. У [8] на основі застосування теорії біфуркацій вивчаються фізичні процеси, що породжують нестійкість та приводять до формування регулярних і хаотичних пульсацій. Вплив фізичних механізмів на стійкість стаціонарної генерації, поведінка лазерів в областях нестійкості, сценарії змінювання режимів генерації при різних значеннях параметрів керування досліджуються в [10]. У зазначеній монографії наведені численні експериментальні факти, що демонструють наявність стійких граничних циклів у динаміці лазерів, та неодноразово підкреслюється важливість теоретичного вивчення біфуркації Хопфа – переходу порогу нестійкості системи, при якому відбувається зміна знака дійсної частини комплексного характеристичного кореня та вище якого встановлюється режим незгасаючої автомодуляції випромінювання. Окрема увага приділяється проблемі поставлення обернених задач динаміки лазерів, тобто способів визначення параметрів лазера за особливостями його динамічної поведінки. Автор відмічає, що в цьому напрямку проведено недостатньо досліджень, хоча проблема одержання інформації про параметри лазера та окремі елементи має велике практичне значення. На його думку, для розв'язання зазначеної проблеми необхідно використовувати нові ідеї, що базуються на сучасних концепціях нелінійної динаміки.

3 МЕТОДИ БІФУРКАЦІЙНОГО АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ЛАЗЕРНИХ МОДЕЛЕЙ

Відсутність загальних методів інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь, до яких належать математичні моделі динаміки лазерів, істотно обмежує можливості їх вивчення. Внаслідок цього для одержання аналітичних залежностей між параметрами лазерної моделі необхідно застосовувати адекватні локальні методи. Оскільки лазер є суто дисипативною нелінійною системою, втрати в якій обумовлені поглинанням випромінювання різними конструктивними елементами, релаксаційними процесами та виходом генерованого променя з резонатора, а нелінійність рівнянь його динаміки є продуктом фотонної взаємодії, то виникнення періодичних коливань пов'язується із біфуркацією народження циклу [35]. У цьому підрозділі розглядаються аналітичні методи, які дозволяють дослідити біфуркаційні процеси в лазерних моделях та провести асимптотичне інтегрування відповідних нелінійних систем – алгоритм біфуркації народження циклу [36,37] та метод Джозефа [38]. Слід зазначити, що перехід від класичної до напівкласичної моделей, які враховують нелінійність взаємодії поля з речовиною резонатора, приводить до зростання як кількості параметрів, так і розмірності систем, що істотно збільшує труднощі теоретичних методів аналізу.

3.1 АЛГОРИТМ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ

Теоретичною основою алгоритму біфуркації народження циклу є теорема Хопфа, на основі якої розроблено алгоритм інтегрування систем нелінійних диференціальних рівнянь [36]. Відомо декілька формулювань теореми, але для дослідження наведених лазерних моделей її достатньо сформулювати у спрощеному варіанті [39].

Теорема Е. Хопфа. Нехай система диференціальних рівнянь з параметром μ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \mu), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \mu), \end{cases} \quad (3.1)$$

має нерухому точку x_{1c}, x_{2c} при всіх дійсних значеннях μ , власні значення λ_1, λ_2 лінеаризованої системи є суто уявними при $\mu = \mu_0$. Якщо для дійсної частини власних значень $\operatorname{Re} \lambda_1 = \operatorname{Re} \lambda_2$ виконується умова трансверсальності $\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda}{\partial \mu} \neq 0, \mu = \mu_0$, стаціонарна точка асимптотично стійка при $\mu = \mu_0$, тоді

- а) $\mu = \mu_0$ є точкою біфуркації для системи;
- б) існує інтервал (μ_1, μ_0) , $\mu_1 < \mu_0$, такий, що при $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$ стаціонарна точка є стійким фокусом;
- в) існує інтервал (μ_0, μ_2) , $\mu_2 > \mu_0$, такий, що при $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$ стаціонарна точка є нестійким фокусом, що оточується граничним циклом, розмір якого збільшується разом із зростанням μ .

Нижче наводиться алгоритм біфуркації народження циклу відносно системи двох диференціальних рівнянь (3.1), хоча в повному об'ємі алгоритм охоплює системи n диференціальних рівнянь.

1 З рівнянь $f_1 = 0, f_2 = 0$ знаходиться стаціонарний розв'язок системи x_{kc} , $k = 1, 2$.

2 Будується матриця Якобі $M = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|, i, k = 1, 2, x_k = x_{kc}$.

3 Знаходяться власні значення матриці Якобі

$$\lambda_k = \frac{1}{2} \left(\operatorname{Spur} M \pm \sqrt{(\operatorname{Spur} M)^2 - 4 \det M} \right),$$

де $\operatorname{Spur} M$ - слід матриці, $\det M$ - визначник матриці M .

4 З рівняння $\operatorname{Spur} M = 0$ визначається біфуркаційне значення одного з параметрів. Іноді виникає потреба розглянути кожен з параметрів як біфуркаційний. Якщо власні значення матриці Якобі λ_k комплексно-спряжені при μ з деякого інтервалу, що містить μ_0 , виконується умова трансверсальності, $\operatorname{Im} \lambda_k \equiv \omega_0 \neq 0$, то має місце біфуркація народження циклу.

5 Якщо матриця Якобі при біфуркаційному значенні параметра μ_0 має вигляд

$$M(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix},$$

то необхідно перейти до пункту 6. У протилежному разі

будується матриця перетворення $P = (\operatorname{Re} \bar{R}, -\operatorname{Im} \bar{R})$, де \bar{R} - власний вектор матриці $M(\mu_0)$, що відповідає власному значенню $i\omega_0$. Вектор \bar{R} доцільно нормувати так, щоб його перша компонента дорівнювала одиниці.

6 У системі рівнянь (3.1) виконується заміна змінних: $\bar{x} = x_c + P\bar{y}$, після чого система набирає вигляду

$$\bar{\dot{y}} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2, \mu) \\ f_2(y_1, y_2, \mu) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

де P^{-1} – матриця, обернена до матриці P .

7 У точці $\bar{y} = 0$ обчислюються величини:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + i \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \right) \right], \\ \begin{pmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} \mp 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1 \partial y_2} + i \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \pm 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \right], \\ g_{21} &= \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} + \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_1 \partial y_2^2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_1^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

8 З одержаних значень g_{ij} (3.3) будується величина

$$\Phi(\mu_0) \equiv \Phi_0 = \frac{i}{2\omega_0} \left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}, \quad (3.4)$$

знаходяться її дійсна $\text{Re}\Phi_0$ та уявна $\text{Im}\Phi_0$ частини, обчислюються величини $\lambda_0' \equiv \frac{\partial \text{Re}\lambda}{\partial \mu}$, $\omega_0' \equiv \frac{\partial \text{Im}\lambda}{\partial \mu}$.

9 Знаходиться головний доданок показника Флокке $\beta = \text{Re}\Phi_0$, поправка до періоду коливань:

$$T_1 = -\frac{1}{\omega_0} \left(\text{Im}\Phi_0 - \frac{\omega_0'}{\lambda_0'} \text{Re}\Phi_0 \right), \quad (3.5)$$

малий функціональний параметр ε , за степенями якого записується розв'язок:

$$\varepsilon^2 = \frac{(\mu - \mu_0)\lambda_0'}{-\text{Re}\Phi_0}, \quad (3.6)$$

період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + T_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right) \quad (3.7)$$

10 Періодичний розв'язок системи (3.1), з точністю до вибору початкової фази, записується у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x} + P\bar{y}, \quad y_1 = \operatorname{Re} z, y_2 = \operatorname{Im} z, \\ z &= \varepsilon e^{i\theta} + \frac{i\varepsilon^2}{6\omega_0} (g_{02}e^{-2i\theta} - 3g_{20}e^{2i\theta} + 6g_{11}) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (3.8)$$

де $\theta = \frac{2\pi}{T}$.

Практика застосування алгоритму біфуркації народження циклу показала, що у випадку системи трьох та більшого з числа диференціальних рівнянь їх зведення до канонічного вигляду приводить до значного зростання громіздкості аналітичних перетворень, що знижує ефективність методу. Більш ефективним для побудови періодичного розв'язку в цьому випадку є метод Джозефа, який дозволяє звести n -вимірну задачу до двовимірної.

3.2 МЕТОД ДЖОЗЕФА

Головна ідея методу Джозефа полягає в тому, що тривимірна та чотиривимірні задачі зводяться до двовимірної через проектування фазового простору на площину, яка утворюється власними векторами лінійної частини оператора, що відповідають двом уявним власним значенням матриці Якобі, обчисленої в стаціонарній точці. Беручи до уваги, що інші власні значення мають від'ємну дійсну частину, їх внесок в проекцію розв'язку на площину не враховується. Біфуркаційний параметр подається у вигляді суми свого біфуркаційного значення і невідомого збурюючого параметра, який необхідно розвинути в ряд за степенями малого параметра ε . Невідому частоту коливань та вектор фазових координат також слід розвинути в ряд, що дозволяє від системи нелінійних рівнянь перейти до нескінченної послідовності систем лінійних рівнянь, бо лінійна частина кожної з них буде відомою вектор-функцією, як тільки проінтегрована попередня система. При цьому перша з систем є лінійною і однорідною і має розв'язок у вигляді лінійної комбінації періодичних векторів. Невідомі елементи розвинення в ряд частоти і збурюючого параметра знаходять із алгебраїчної системи лінійних рівнянь, яка отримана за допомогою застосування до правої частини кожної системи альтернативи Фредгольма: розв'язок однорідної спряженої системи повинен бути ортогональним до правої частини відповідної системи. Для з'ясування питання про стійкість періодичного розв'язку застосовується теорема факторизації [38], згідно з якою показник Флокке подається у вигляді добутку двох співмножників, один з яких дорівнює похідній від збурюючого параметра по малому параметру ε . Однак з'ясування цього питання вимагає додаткового вивчення.

Таким чином, біфуркаційний аналіз динаміки лазерних моделей базується на застосуванні кількісних методів теорії нелінійних коливань: алгоритму біфуркації народження циклу та методу Джозефа. Хоча метод Джозефа має певні переваги при знаходженні періодичного розв'язку системи трьох та більшого числа диференціальних рівнянь, очевидну перевагу при з'ясуванні питання про стійкість граничних циклів при отриманні аналітичних залежностей для параметрів моделей має алгоритм біфуркації народження циклу.

4 РЕЖИМ НЕСТАЦІОНАРНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ В КЛАСИЧНІЙ МОДЕЛІ СТАТЦА-ДЕМАРСА

4.1 БІФУРКАЦІЯ ХОПФА В МОДЕЛІ ЛАЗЕРА З ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИМ МОДУЛЯТОРОМ ДОБРОТНОСТІ ЗА ВІДСУТНОСТІ НАВАНТАЖЕННЯ

З метою виявлення періодичних коливань, дослідження їх стійкості та побудови розв'язку для моделі лазера з дробово-раціональним модулятором добротності і

відсутності навантаження розглядається система диференціальних рівнянь Статца-Демарса в безрозмірній формі (1.2).

Згідно з [10] характер поведінки динамічної системи визначається стаціонарними розв'язками системи (1.2), з яких один тривіальний, тобто відповідає відсутності генерації, інший не має фізичного змісту, бо приводить до від'ємних значень фазових координат, додатних за фізичною суттю. Єдино прийнятним є третій розв'язок

$$x_c = \frac{1}{2} \left(U + \sqrt{U^2 + 4V} \right); \quad y_c = \frac{A}{x_c + 1}, \quad (4.1)$$

$$U \equiv A - 1 - \frac{b+1}{\rho}; \quad V \equiv \frac{A-b-1}{\rho}.$$

Для існування додатного кореня при додатних b і ρ слід вимагати виконання нерівності $U^2 + 4V > 0$, яка вважається далі виконаною. Матриця Якобі системи (4.1), обчислена в стаціонарній точці, має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} \frac{Gx_c b \rho}{(\rho x_c + 1)^2} & Gx_c \\ -y_c & -(x_c + 1) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

звідки її власні значення дорівнюють

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ SpM \pm \sqrt{(SpM)^2 - 4 \det M} \right\}, \quad (4.3)$$

$$SpurM = \frac{1}{2} \left[\frac{Gx_c b \rho}{K^2} - (x_c + 1) \right],$$

$$\det M = Gx_c \left[\frac{A}{x_c + 1} - \frac{b \rho (x_c + 1)}{K^2} \right], \quad K = \rho x_c + 1.$$

Відповідно до алгоритму біфуркації народження циклу слід знайти таке значення одного з параметрів, при якому власні значення $\lambda_{1,2}$ стають суто уявними. Нехай, наприклад, у ролі біфуркаційного взято параметр ρ . Тоді його біфуркаційне значення знаходиться з рівняння $SpM = 0$, яке визначає ρ як неявно задану функцію. Оскільки пізніше значення ρ знаходиться при певних значеннях інших параметрів, то немає необхідності доводити існування додатної неявно заданої функції ρ . Щоб корені $\lambda_{1,2}$ були справді уявними при біфуркаційному значенні $\rho = \rho_0$, слід вимагати додатності визначника при визначеному значенні ρ , тобто мусить виконуватись нерівність

$$\det M(\rho_0) = \frac{Gx_c}{x_c + 1} - (x_c + 1)^2 \approx \frac{Gx_c}{x_c + 1} > 0.$$

Виконання і цієї нерівності дає підстави вважати величину $\sqrt{\frac{GAx_c}{x_c+1}}$ нульовим наближенням ω_0 до невідомої частоти модуляції ω . Нарешті, для можливості виконання АБНЦ слід перевірити умову трансверсальності:

$$\frac{\partial SpM}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(x_c+1)(x_c+\rho x'_c)(1-\rho x_c)}{x_c \rho K} - x'_c \right\} \neq 0,$$

$$x'_c \equiv \frac{1}{2\rho^2} \left[b+1 + \frac{U(b+1)-2(A-b-1)}{\sqrt{U^2+4V}} \right].$$

Отже, при дотриманні одержаних обмежень умови теореми Хопфа виконуються.

Перетворення системи до канонічної форми. Власний вектор матриці (4.2), що відповідає власному значенню, має вигляд $\vec{f} = \left(1; \frac{-1}{Gx_c}(x_c+1-i\omega_0) \right)^T$. З векторів $\text{Re}\vec{f}, -\text{Im}\vec{f}$ утворюється матриця перетворення

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{x_c+1}{Gx_c} & -\frac{\omega_0}{Gx_c} \end{pmatrix}.$$

Перехід до нових змінних здійснюється за формулою

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c + z_1 \\ y_c - \frac{(x_c+1)z_1 + \omega_0 z_2}{Gx_c} \end{pmatrix}.$$

Перетворена система рівнянь має вигляд

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

де змінні x, y слід виразити через z_1, z_2 за вищенаведеними формулами. Для знаходження g_{ij} по (3.3) достатньо залишити в $f_{1,2}$ лише нелінійні доданки другого і третього ступенів за сукупністю змінних z_1, z_2 . Тоді урізані значення $f_{1,2}$, про що свідчать риси зверху, набувають вигляду

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= z_1^2 A_{11} - \frac{\omega_0}{x_c} z_1 z_2 - A_{13} z_1^3, \\ \bar{f}_2 &= (Gx_c)^{-1} (x_1 z_1^2 + \omega_0 z_1 z_2), \quad x_1 \equiv 1 + x_c, \\ A_{11} &\equiv \frac{Gb\rho}{K^3} - \frac{x_1}{x_c}, \quad A_{13} \equiv \frac{Gb\rho^2}{K^4}. \end{aligned}$$

У результаті отримуємо

$$P^{-1} \begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{F}_1 \equiv \bar{f}_1, \quad \bar{F}_2 \equiv -z_1^2 A_{21} + \frac{z_1 z_2}{x_c} + z_1^3 A_{23},$$

$$A_{21} \equiv (A_{11} - 1) \frac{x_1}{\omega_0}, \quad A_{23} \equiv A_{13} \frac{x_1}{\omega_0}.$$

Далі за формулами (3.3) знаходимо

$$g_{11} = \frac{1}{2} \left[A_{11} - i(A_{11} - 1) \frac{x_1}{\omega_0} \right],$$

$$\begin{pmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[A_{11} \mp \frac{1}{x_c} - i \left((A_{11} - 1) \frac{x_1}{\omega_0} \mp \frac{\omega_0}{x_c} \right) \right],$$

$$g_{21} = \frac{3}{4} A_{13} \left(-1 + i \frac{x_1}{\omega_0} \right).$$

Відповідно до (3.4) маємо

$$\operatorname{Re}\Phi = \frac{1}{8} \left\{ 2A_{11}^2 \frac{x_1}{\omega_0^2} - 2A_{11} \frac{x_1}{\omega_0^2} - A_{11} \frac{1}{x_c} + (A_{11} - 1) \frac{x_1}{\omega_0^2 x_c} \right\} - \frac{3}{4} A_{13}. \quad (4.5)$$

У біфуркаційному значенні параметра ρ виконується співвідношення $b\rho_0 G x_c = x_1 K^2$. Тоді (4.5) набуває вигляду

$$\operatorname{Re}\Phi = \frac{1}{8} \left\{ \left(2A_{11}^2(\rho_0) - 2A_{11}(\rho_0) + (A_{11}(\rho_0) - 1) \frac{x_1}{x_c \omega_0^2} - A_{11}(\rho_0) \frac{1}{x_c} \right) \right\} -$$

$$- \frac{3}{4} \frac{x_1 \rho_0}{x_c K^2}; \quad A_{11}(\rho) = - \frac{x_1 \rho_0}{K(\rho_0)}. \quad (4.6)$$

Зважаючи на те що $\omega_0^2 \approx GA$, можна опустити три перших доданка у фігурних дужках, бо вони не впливають на знак $\operatorname{Re}\Phi$ за умови, що x_c достатньо віддалене від нуля (наприклад $x_c > 0.1$, що надалі вважається виконаним). Отже, для стійкості періодичного руху достатньо вимагати виконання нерівності

$$\frac{1}{8} \frac{x_1 \rho_0}{x_c K(\rho_0)} \left\{ 1 - \frac{6}{K(\rho_0)} \right\} < 0,$$

або

$$\rho_0 x_c - 5 < 0. \quad (4.7)$$

Цей критерій спочатку перевіряється для частинного випадку, коли $b = A - 1$. Тоді (4.1) дає

$$x_c = U \equiv A \frac{\rho_0 - 1}{\rho_0} - 1.$$

Підставлення цього значення в умову $SpM = 0$ приводить до рівняння

$$A(A-1)\xi^3 - G(A-1)\xi^2 - G(A-2)\xi + G = 0, \quad (4.8)$$

де позначено $\xi \equiv \rho - 1$.

Проаналізуємо рівняння (4.8) за критерієм стійкості системи. Якщо взяти параметр $A = 30$, то один із коренів $\xi_1 = \frac{1}{29}$ приводить до $x_c = 0$, що відповідає відсутності генерації, другий $\xi_2 = -0.9997$ приводить до $x_c < 0$, що не має фізичного сенсу. Третій корінь $\xi_3 = 3335$ дає $x_c = 29$. Але ці значення не задовольняють критерій (4.8). Аналогічний висновок можна зробити в загальному випадку, коли слід розглянути систему

$$\frac{x_c b \rho_0}{(x_c + 1)(\rho_0 x_c + 1)^2} = \frac{1}{G}, \quad x_c = \frac{1}{2} \left[U + \sqrt{U^2 + 4V} \right], \quad (4.9)$$

де U, V даються в (4.1). Якщо, ρ_0, x_c вибрати з фізично прийнятого інтервалу, то згідно з першим рівнянням (4.9), в якому $G^{-1} \approx 10^{-5}$, параметр b мусить бути малою величиною. Так, значення $b = 0.05, x_c = 29, \rho_0 = 60$ дають нев'язку порядку 10^{-5} , а для другого 10^{-3} . Але і в цьому випадку критерій стійкості порушується, і граничний цикл є нестійким.

Більш детально цей випадок розглянуто у [40,41].

4.2 БІФУРКАЦІЯ ХОПФА В ДИНАМІЦІ ТВЕРДОТІЛЬНОГО ЛАЗЕРА З КВАДРАТИЧНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

У попередньому підрозділі було показано, що граничний цикл, викликаний біфуркацією Хопфа, не задовольняє умови стійкості. У цьому підрозділі розглядається та ж модель, але з додатковим квадратично-нелінійним елементом, який можна розглядати як квадратичне навантаження, тобто розглядається модель (1.6) з попереднім модулятором добротності і навантаженням rx [40,42]. Для зручності перепишемо (1.6) у вигляді:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(y - 1 - \frac{b}{\rho x + 1} - rx \right) \equiv f_1(x, y), \\ \dot{y} &= A - (x + 1)y \equiv f_2(x, y). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ця система має розв'язки, характер яких зображений на рис.4.1.

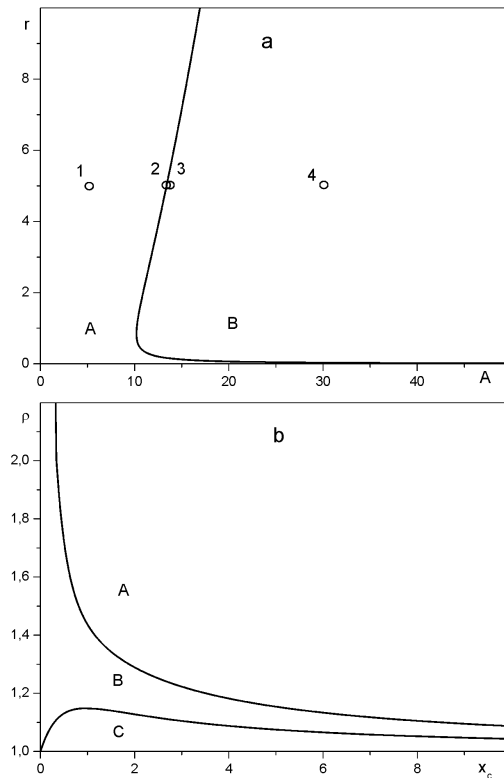


Рисунок 4.1 – Біфуркаційні діаграми при $G = 1, b = A - 1$ (область В відповідає граничному циклу, точка 2 лежить на лінії біфуркації)

Із рисунка бачимо, що в області В граничний цикл є стійким, а в А і С – він відсутній. Фазові портрети, які відповідають точкам 1, 3, 4, показані на рис.4.2, де можна бачити, що зміна параметрів A, r і ρ корінним чином змінює топологію фазового портрета: зі зростанням параметра накачки A в обмежених зверху і знизу інтервалах зміни параметрів r і ρ фокус S із притягуючого стає відштовхуючим і виникає граничний цикл, що охоплює цей фокус. Деталі граничного циклу, який відповідає режиму модуляції вихідного сигналу, показані на рис. 4.3 у різних масштабах зміни фазових змінних x, y , що представляють інтенсивність випромінювання та інверсію.

Найбільш яскраво граничний цикл проявляється на лінії біфуркації, де фазовий портрет має вигляд, зображений на рис. 4.4. Із нього бачимо, що в точці біфуркації, де дійсна частина характеристичних коренів $\lambda_{1,2}$ дорівнює нулю, траєкторії системи мають вигляд концентричних еліпсів, що відповідають незатухаючим коливанням. Із віддаленістю від біфуркаційної кривої в область В на рис.4.1а фокус F стає відштовхуючим, і стаціонарна поведінка системи визначається тільки граничним циклом. З подальшим віддаленням в область В граничний цикл втрачає стійкість і випромінювання стає стаціонарним.

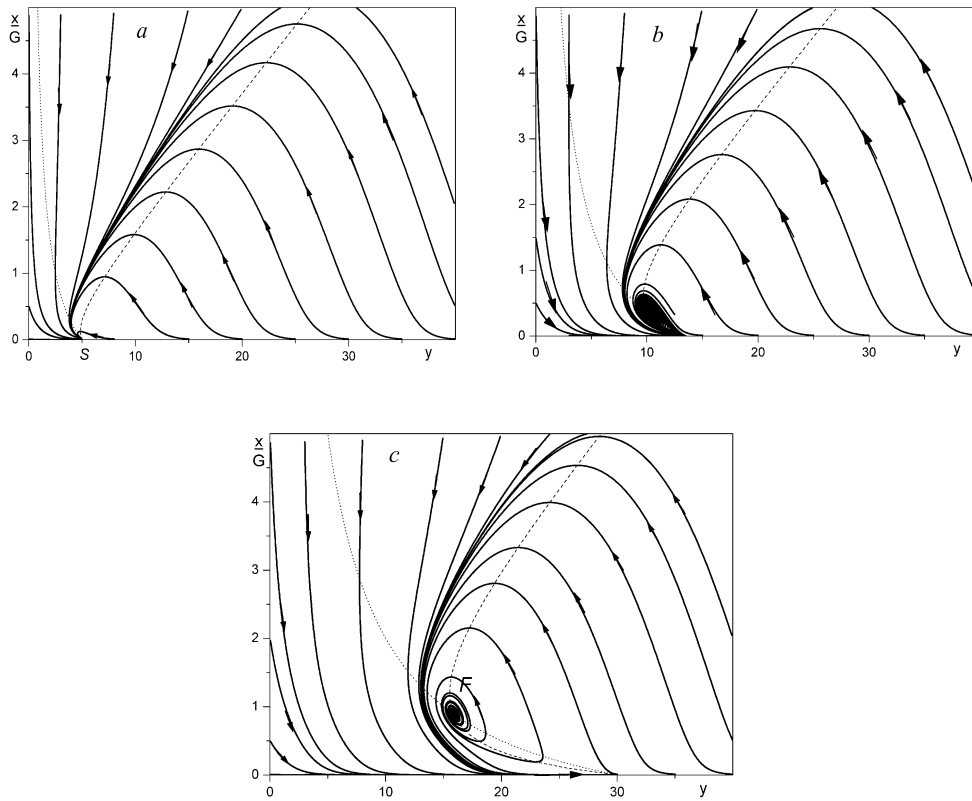


Рисунок 4.2 - Типовий вигляд фазових портретів твердотільного лазера з дробово-раціональним модулятором добротності та квадратичним навантаженням (рис. а, с відповідають точкам 1, 4 біфуркаційної діаграми на рис.4.1, а рис. b – точці 3)

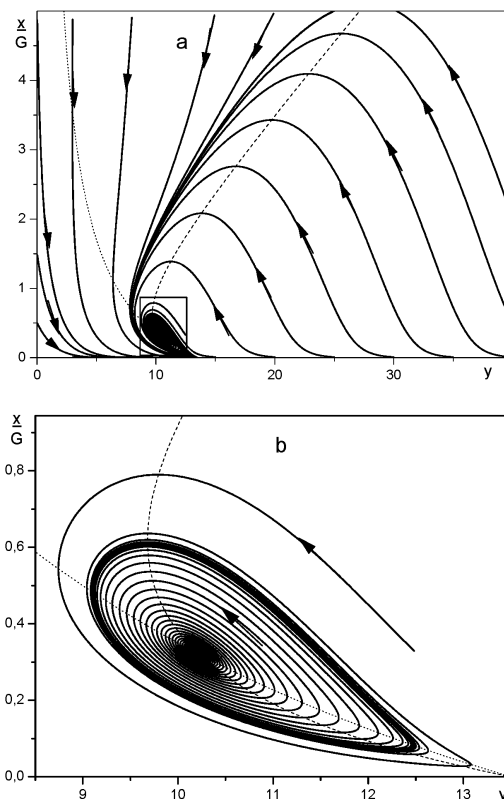


Рисунок 4.3 - Граничний цикл, що відповідає точці 3 на рис. 4.1 (рис. b дає збільшений масштаб фрагмента, відміченого рамкою на рис. a)

4.2.1 СТАЦІОНАРНІ РОЗВ'ЯЗКИ І БІФУРКАЦІЙНІ ЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ

Система (4.10) має 5 параметрів G , A , r , ρ і b , кожен з яких можна розглядати як біфуркаційний. У цьому підрозділі буде зосереджена увага на трьох з них: ρ , r і b . Рівняння, що визначають стаціонарний розв'язок, мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_c &= Ax_1^{-1}, \quad x_1 = x_c + 1, \\ \frac{bx_1}{\rho x_c + 1} &= A - x_1(1 + rx_c). \end{aligned} \quad (4.11)$$

З матриці Якобі системи (4.10), обчисленій в стаціонарному розв'язку,

$$M = \begin{pmatrix} Gx_c \left(\frac{b\rho}{K^2} - r \right) & Gx_c \\ -Ax_1^{-1} & -x_1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

знаходяться власні значення:

$$2\lambda_{1,2} = SpM \pm \sqrt{(SpM)^2 - 4 \det M}, \quad (4.13)$$

$$SpM = Gx_c \left(\frac{b\rho}{K^2} - r \right) - x_1, \quad K = \rho x_c + 1,$$

$$\det M = \left[\frac{A}{x_1} + x_1 \left(r - \frac{b\rho}{K^2} \right) \right] Gx_c.$$

Для того щоб стаціонарний розв'язок був стійким фокусом, як того вимагає теорема Хопфа, необхідно і достатньо, щоб власні значення $\lambda_{1,2}$ були комплексно спряженими, а їх дійсні частини від'ємні. Комплексна спряженість вимагає, у свою чергу, додатності $\det M$. Як легко бачити, обидві ці вимоги будуть виконані, якщо $r > b\rho K^{-2}$. У біфуркаційному значенні параметра виконується рівняння

$$\frac{b\rho}{K^2} - r = \frac{x_1}{Gx_c}.$$

Зважаючи на значення параметра $G = 10^5$, праву частину цього рівняння можна взяти за нуль, тобто записати його у вигляді

$$b\rho = rK^2. \quad (4.14)$$

Спочатку візьмемо за біфуркаційний параметр ρ . Тоді друге рівняння (4.11) зручно записати у вигляді

$$\psi(x_c) \equiv r\rho x_c^3 + (r + \rho + r\rho)x_c^2 + (r + \rho + b + 1 - A\rho)x_c + b - A + 1 = 0, \quad (4.15)$$

де параметр b береться таким, що дорівнює характерному значенню $A - 1$. Рівняння (4.15) має один нульовий розв'язок, що відповідає відсутності генерації потоку фотонів, один від'ємний, що не має фізичного змісту, і лише один дійсний і додатний:

$$x_c = \frac{-S_1 + \sqrt{S_1^2 + 4\rho r(A(\rho - 1) - r - \rho)}}{2\rho r}, \quad S_1 \equiv r + \rho + r\rho, \quad (4.16)$$

де передбачається виконання нерівності $A(\rho - 1) > r + \rho$. Для знаходження біфуркаційного значення параметра слід підставити значення x_c із (4.16) в (4.14), що дає рівняння

$$\rho^3 r(A - 1) - \rho^2 [4r(A - 1) + (1 + r)^2] + 2r\rho(2A + r - 1) - r^2 = 0. \quad (4.17)$$

Воно має три зміни знаків коефіцієнтів і за ознакою Декарта серед його коренів міститься щонайменше один додатний. Знаходження коренів рівняння (4.17) для різних значень параметра навантаження r доцільно пов'язувати з конкретним кристалом, що використовується в резонаторі лазера. Для рубінового резонатора $A = 30$ і рівняння (4.17) набирає вигляду

$$29\rho^3 r - \rho^2 (120r + (r - 1)^2) + 2r\rho(59 + r) - r^2 = 0. \quad (4.18)$$

Легко показати, що воно має три дійсних корені, розміщених в інтервалах (0; 1), (1; 2), (2; 3) для r з інтервалу (1; 10). Однак корені з інтервалу (0; 1) не задовольняють нерівність $A(\rho-1) > r + \rho$, тому відкидаються. У таблиці 4.1 наведені біфуркаційні значення ρ_0 для певних значень параметра r , а також відповідні їм значення стаціонарних розв'язків x_c та показник Флокке $\text{Re}\Phi$. Придатність тих чи інших стаціонарних розв'язків і біфуркаційних значень параметрів буде перевірятись в наступних пунктах вимогою стійкості граничного циклу.

Матриця Якобі (4.12) при біфуркаційному значенні параметра $\rho = \rho_0$ має вигляд

$$M_0 = \begin{pmatrix} x_1 & Gx_c \\ -A & -x_1 \\ \frac{1}{x_1} & \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Її визначник $\omega_0^2 \equiv \frac{GAx_c}{x_1} - x_1^2 \approx \frac{GAx_c}{x_1}$ дає квадрат першого наближення до частоти модуляції ω_0 .

Після перевірки умови трансверсальності будується власний вектор матриці (4.19), за допомогою якого вводяться нові змінні z_1, z_2 , що дозволяє звести систему (4.10) до вигляду

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x_1 & -\omega_0 \\ Gx_c & Gx_c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Для застосування алгоритму біфуркації народження циклу в правих частинах нової системи необхідно залишити квадратичні і кубічні доданки по сукупності змінних z_1, z_2 . При таких обмеженнях праві частини нової системи набувають вигляду

$$F_1 = - \left(GA_1 z_1^2 + \frac{\omega_0}{x_c} z_1 z_2 + \frac{Gb\rho z_1^3}{K^4} \right), \quad (4.20)$$

$$F_2 = \frac{x_1}{\omega_0} (GA_1 - 1) z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{x_c} + G \frac{x_1 b \rho^2}{\omega_0 K^4} z_1^3, \quad A_1 = r + \frac{x_1}{Gx_c} - \frac{b\rho}{K^3}.$$

Згідно з (1.17) комплекси g_{ij} дорівнюють

$$g_{11} = \frac{1}{2} \left[-A_1 G + i \frac{x_1}{\omega_0} (GA_1 - 1) \right],$$

$$\begin{pmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[-A_1 G \mp \frac{1}{x_c} + i \left(\frac{x_1}{\omega_0} (GA_1 - 1) + \frac{\omega_0}{x_c} \right) \right], \quad (4.21)$$

$$g_{21} = \frac{3}{4} \frac{b\rho^2 G}{K^4} \left(-1 + \frac{ix_1}{\omega_0} \right).$$

Величина $\text{Re}\Phi$ обчислюється із виразу (1.18):

$$\operatorname{Re}\hat{O}(\rho_0) = \frac{1}{8} \left[\frac{2A_1 G x_1 (GA_1 - 1)}{\omega_0^2} + \frac{A_1 G}{x_c} - \frac{x_1 (GA_1 - 1)}{x_c \omega_0^2} - \frac{3Gb\rho^2}{K^4} \right].$$

Оскільки $A_1 \cong r - \frac{b\rho_0}{K^3}$, $GA_1 - 1 \cong GA_1$, $\omega_0^2 \cong Gx_c A x_1^{-1}$, то знак $\operatorname{Re}\Phi$ визначається доданками, що мають порядок $O(G)$. Тоді доданки порядків $O(G^0)$, $O(G^{-1})$ можна відкинути, що дає критерій стійкості

$$\operatorname{Re}\Phi \cong \left(2A_1^2 x_1^2 + A_1 A - 3A x_c D_1 \right) \frac{G}{8A x_c} < 0, \quad (4.22)$$

$$A_1 = r - \frac{b\rho_0(r, A)}{K^3(r, A)}, \quad D_1 = \frac{\rho_0^2(r, A)b}{K^4(r, A)}, \quad K = \rho_0(r, A)x_c(r, \rho_0, A) + 1.$$

У цих формулах x_c визначається залежністю (4.16), а ρ_0 знаходиться з (4.17). Отже, всі компоненти критеріїв залежать від параметрів A, r, b , для останнього з яких взято значення $b = A - 1$, що дозволило знайти x_c в аналітичному вигляді. Після вибору r і A і визначення ρ_0 необхідно перевірити виконання нерівності $A(\rho_0 - 1) > r + \rho_0$. Перевірка критерію (4.22) здійснена далі для $A = 30$ і деяких значень r (див. таблицю 4.1).

Таблиця 4.1 - Залежність параметра біфуркації ρ_0 , стаціонарної інтенсивності x_c та показника Флокке $\operatorname{Re}\Phi$ від коефіцієнта нелінійності r

r	ρ_0	x_c	$\operatorname{Re}\Phi$
0,25	0,8611	-	-
0,5	1,6046	3,0120	-7,245
1	1,6647	2,1737	-14,009
2	1,6899	1,4293	-52,769
3	1,6899	1,0583	-100,382
4	1,6838	0,8250	-173,689
5	1,6813	0,5552	-247,323
6	1,6671	0,5362	-329,971
7	1,6593	0,4381	-401,582
8	1,6499	0,3572	-458,838
10	1,6338	0,2323	-330,646

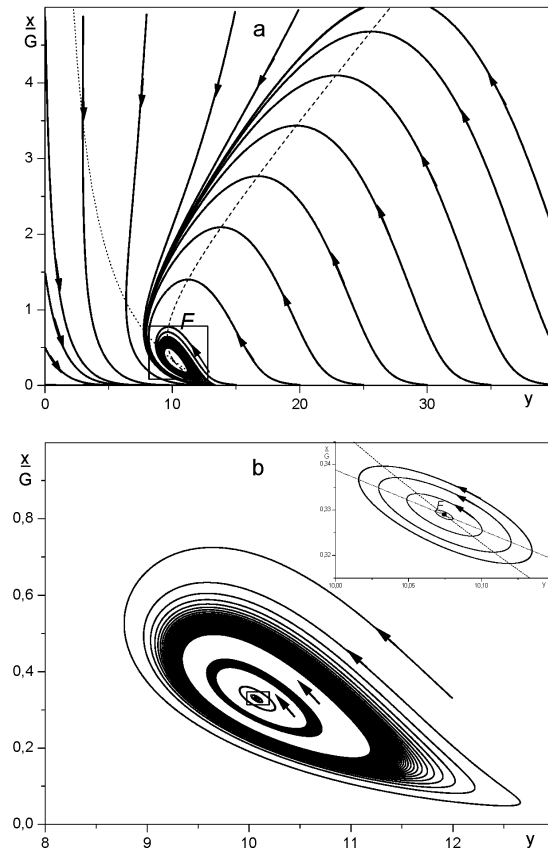


Рисунок 4 - Граничний цикл, що відповідає точці біфуркації 2 на рис. 4.1 (рис. b і вставка на ньому дають збільшені масштаби граничного циклу)

Для побудови наближеного періодичного розв'язку знайдемо $\text{Im} \Phi$, малий параметр ε та період модуляції T :

$$\begin{aligned} \text{Im} \Phi &= \frac{GA_1}{12\omega_0} \left[2A_1G + \frac{1}{x_c} \left(3 + x_c + \frac{5x_1^3 A_1}{A} \right) \right] + \frac{3b\rho_0^2 x_1 G}{8\omega_0 K^4}, \\ \varepsilon^2 &= -\frac{(\rho - \rho_0)\lambda'(\rho_0)}{\text{Re}\Phi(\rho_0)}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \tau_1 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \right), \\ \tau_1 &= -\frac{1}{\omega_0} \left(\text{Im} \Phi - \frac{\text{Re}\Phi(\rho_0)}{\lambda'(\rho_0)} \omega_0'(\rho_0) \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Далі за формулами (3.8) запишемо розв'язок системи (4.10)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P\bar{z}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} = & \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2 G}{6\omega} \begin{bmatrix} -2 \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix} A_1 + \frac{x_1}{\omega_0} A_1 \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ 2 \sin \theta/2 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\omega_0}{Gx_c} \begin{pmatrix} 2 \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} - 3A_1 \begin{bmatrix} -x_1/\omega_0 \\ 1 \end{bmatrix} + O(\varepsilon^3), \quad \theta = \frac{2\pi\tau}{T}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Потужність випромінювання, що виділяється на корисному навантаженні, розраховується за формулою [5]

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T rx^2(\tau) d\tau. \quad (4.25)$$

Підставлення в (4.25) першої компоненти розв'язку (4.24) дає

$$P = r \left\{ \left[x_c^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4 G^2}{36\omega_0^2} \left[A_1^2 \left(2 + \frac{x_1^2}{2\omega_0^2} \right) + \frac{8\omega_0^2}{G^2 x_c^2} + 36A_1^2 \left(\frac{x_1}{\omega_0} \right)^2 \right] + O(\varepsilon^6) \right] \right\}. \quad (4.26)$$

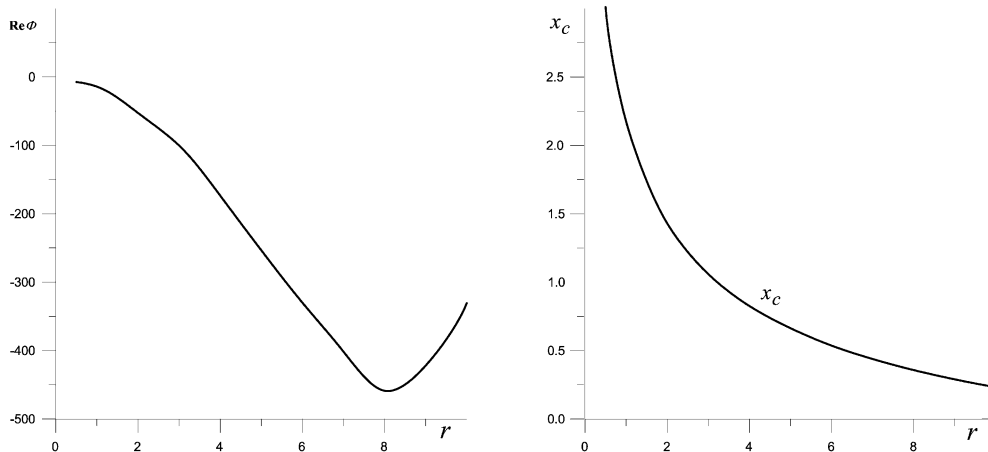
Розрахунки показали, що завдяки модуляції відбувається приріст потужності порівняно з її значенням у стаціонарному режимі в межах 10%, що може знайти практичне застосування.

4.2.2 ПЕРЕВІРКА КРИТЕРІЮ СТІЙКОСТІ

Результати перевірки критеріїв стійкості наведені у таблиці 5.1. Для найбільшого кореня рівняння (4.18) в інтервалі зміни r від 1 до 10 стійкість відсутня. Найменший корінь цього ж рівняння при кожному r не задовольняє нерівності $A(\rho_0 - 1) - r - \rho_0 > 0$, тому його не внесено у таблицю. Стійкість спостерігається для середнього кореня. У міру зростання коефіцієнта r зростає і модуль показника Флокке, що означає зростання стійкості. Однак для $r > 16$ зникає відповідний стаціонарний розв'язок x_c , бо починає порушуватися наведена вище нерівність. Але ще раніше, коли $r \in (11; 16)$, x_c стає малою величиною, що знаходяться за межею тих значень ($x_c > 0.1$), до яких застосовано асимптотичний аналіз показника Флокке. Отже, стійкість періодичного циклу спостерігається для одного з трьох біфуркаційних значень ρ_0 , коли r знаходиться в інтервалі (1; 10). У таблиці наведено також два значення ρ_0 для $r = 0.5$ і $r = 0.25$. У першому випадку, меншому із наведених коренів, відповідає стійкий цикл, більшому – не стійкий. У другому випадку ($r = 0.25$) з трьох коренів два менші одиниці, що не дає дійсного додатного стаціонарного розв'язку. Для третього кореня відповідний розв'язок не стійкий. Отже, для стійкості граничного циклу у випадку квадратичного навантаження зведений коефіцієнт нелінійної взаємодії повинен перевищувати певний рівень. У даному випадку він знаходиться в інтервалі (0.25; 0.5)

На рис.4.5 показана залежність дійсної частини показника Φ і стаціонарного значення інтенсивності x_c від коефіцієнта нелінійності r . Як бачимо з першого графіка, найбільша стійкість спостерігається при $r = 8$, далі зі збільшенням коефіцієнта нелінійної взаємодії стійкість поступово зменшується. На другому

графіку відображено зменшення інтенсивності випромінювання x_c при зростанні коефіцієнта r .



Рисеунок 4.5 - Залежність показника $\text{Re}\Phi$ і стаціонарного значення x_c від коефіцієнта нелінійності r .

4.2.3 ВИБІР ІНШИХ БІФУРКАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ

При будь-якому виборі біфуркаційного параметра стаціонарний розв'язок знаходиться із рівняння (4.15). Але якщо в ролі біфуркаційного вибрати параметр b , то вільними параметрами будуть ρ і r , і b не можна вибрати довільно, як раніше.

Якщо записати розв'язок через формули Кардана, то його вигляд буде надто громіздким. Тому обмежимося біфуркаційним значенням, тобто виключимо залежність x_c від b . Підставлення біфуркаційного значення $b_0 = rK^2/\rho$ у друге рівняння (4.11) дає

$$2r\rho x_c^2 + x_c(r(1+\rho) + \rho(1+r)) + r + \rho - A\rho = 0. \quad (4.28)$$

Звідси знаходиться стаціонарний розв'язок, обчислений при біфуркаційному значенні b_0 :

$$x_c = \frac{-S_2 + \sqrt{S_2^2 + 8r\rho(A\rho - r - \rho)}}{4r\rho}, \quad (4.29)$$

$$A\rho > r + \rho, \quad S_2 = r(1+\rho) + \rho(1+r).$$

Одержане значення b_0 незручне тим, що воно залежить від x_c . Останнє можна включити, якщо знайти ρx_c з (4.14) і з (4.29) і прирівняти їх:

$$\sqrt{\frac{b\rho}{r}} - 1 = \frac{-S_2 + \sqrt{S_2^2 + 8r\rho(A\rho - r - \rho)}}{4r}.$$

З одержаного рівняння знаходимо

$$b_0 = \left\{ \frac{-S_2 + \sqrt{S_2^2 + 8r\rho(A\rho - r - \rho)}}{4r} + 1 \right\}^2 \frac{r}{\rho}. \quad (4.30)$$

Остаточний вигляд критерію отримаємо після підставлення значень x_c і b_0 в (4.22). Оскільки залежність x_c від b тут виключена, то наступні похідні, необхідні для побудови розв'язку, спрощуються до виразів

$$\frac{\partial \operatorname{Re} \lambda}{\partial b} \equiv \lambda' = \frac{G\rho x_c}{2K^3}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} \lambda}{\partial b} \equiv \omega'_0 = -\frac{G\rho x_c}{2\omega_0 K^3}.$$

Для запису малого параметра ϵ все необхідне, що дозволяє скористатися формулами (4.24) і записати розв'язок. Однак критерій стійкості у цьому випадку має громіздкий вигляд і незручний в користуванні. Значення b_0 доцільно підставити в критерій (4.22), після чого він набирає вигляду

$$\operatorname{Re} \Phi = \frac{G\rho r}{8AK^2} W_1, \quad W_1 \equiv 2\rho x_1^2 r x_c + A(\rho x_2 - 2) < 0. \quad (4.31)$$

З нерівності $W_1 < 0$ знаходиться інтервал стійкості для параметра ρ :

$$0 < \rho < \frac{2}{x_c} \cdot \frac{A}{2rx_1^2 + A}. \quad (4.32)$$

Залишається задовольнити рівняння (4.28). Якщо x_c взяти за новий параметр, то можна знайти ρ , або r . У першому випадку

$$\rho = \frac{x_1 r}{A - 1 - x_c(1 + 2rx_1)}. \quad (4.33)$$

Підставлення (4.33) у (4.32) приводить до нерівності, яка задовольняється, якщо параметр A взяти з інтервалу

$$A > \frac{1}{4} \left(h + \sqrt{h^2 + 16r^2 x_1^3 x_c} \right), \quad h = 2x_c(1 + 2rx_1) + 2 + x_1 r x_c. \quad (4.34)$$

Для параметра малості одержимо

$$\epsilon^2 = \frac{(b - b_0)\lambda'}{-\operatorname{Re} \Phi} = \frac{4(b - b_0)Ax_c}{-rW_1} > 0. \quad (4.35)$$

Розв'язок знаходиться з (4.24), куди слід підставити значення ϵ та параметр

$$A_1 = \frac{r\rho x_c}{K} = \frac{x_1 r^2 x_c}{A - x_1(1 + rx_c)}. \quad (4.36)$$

При виборі A , що задовольняє нерівність (4.34), знаменник в A_1 буде додатним. Розрахунок граничного циклу починається з вибору r і x_c , чим визначається відповідно до (4.34) нижня межа для A . Вибір A і підставлення його значення в (4.33) визначає ρ , що дає змогу знайти біфуркаційне значення b_0 .

Якщо до вільних параметрів бажано віднести A і x_c , то з рівняння (4.28) знаходимо

$$r = \frac{(A - x_1)\rho}{x_1(2\rho x_c + 1)}. \quad (4.37)$$

Підставлення (4.37) у (4.32) зводить останню нерівність до вигляду

$$[2x_1(A - x_1) + 2Ax_c]\rho^2 x_c - 3\rho Ax_c - 2A < 0.$$

Вона виконується, якщо ρ знаходиться в інтервалі $(0; \rho_1)$, де

$$\rho_1 = \frac{3Ax_c + \sqrt{9A^2x_c^2 + 16A(A(2x_c + 1) - x_1^2)}}{4x_c[A(2x_c + 1) - x_1^2]}. \quad (4.38)$$

Тепер значення A_1 має вигляд

$$A_1 = \frac{r\rho x_c}{K} = \frac{\rho^2(A - x_1)}{x_1(2\rho x_c + 1)K}.$$

Вираз для ε слідує із (4.35), а розв'язок з (4.24), куди слід підставити нові значення ε і A_1 .

Якщо в ролі біфуркаційного взяти r , то x_c знаходиться з того ж рівняння (4.15), де вільними параметрами будуть A , b , ρ . Тому можна взяти попередню залежність $b = A - 1$ і одержати значення (4.16) для x_c . Його Підставлення в (4.14) приводить до рівняння (4.17), яке записується відносно r :

$$r^2(\rho - 1)^2 - r\rho\Psi + \rho^2 = 0, \quad \Psi \equiv 2(\rho - 1)(1 - 2A) + \rho^2(A - 1).$$

Його дійсний додатний розв'язок

$$r_0 = \frac{\rho}{2(\rho - 1)^2} [\Psi + \sqrt{\Omega}], \quad \Omega = \Psi^2 - 4(\rho - 1)^2 \quad (4.39)$$

існує при виконанні нерівностей

$$\rho > 2\left(\frac{A - \sqrt{A}}{A - 1}\right) \quad 0 < \rho < 2\left(\frac{A - \sqrt{A}}{A - 1}\right).$$

Підставлення рівнянь (4.16) і (4.39) в умову (4.22) дає вираз

$$A_1 = r - \frac{(A - 1)\rho}{K^3} = \frac{\rho(\Psi + \sqrt{\Omega})}{2(\rho - 1)^2} - \frac{(A - 1)\rho}{K^3},$$

з урахуванням якого критерій стійкості набуває вигляду

$$2A_1^2x_1^2 + A_1A - \frac{3\rho^2(A-1)Ax_c}{K^4} < 0, \quad (4.40)$$

де вільними є параметри ρ , A .

Розглянемо конкретний приклад. Якщо $\rho=7$, $A=2$, то $\Psi=13$, $\Omega=25$, $r_0=1.75$, $x_c=0.14285$, $A_1=0.867$, $K=1.994$. Підставлення цих значень у критерій (4.40) дає від'ємну ліву частину -19.44 . З огляду на умову $b=A-1$ одержаний результат має звужене значення. Цей недолік можна усунути попереднім способом, а саме, взявши x_c як новий параметр (див. нижче).

Підставлення біфуркаційного значення r_0 в рівняння (4.15) перетворює його до вигляду

$$bx_1(\rho x_c + K) + (x_1 - A)K^2 = 0, \quad x_1 = x_c + 1.$$

Звідси знаходимо $b = \frac{K^2(A-x_1)}{x_1(2\rho x_c + 1)}$. Після підставлення значень ρ_0 і b отримуємо

$$A_1 = \frac{\rho x_c^2(A-x_1)}{x_1K(2\rho x_c + 1)}, \quad D_1 = \frac{\rho^2(A-x_1)}{x_1K^2(2\rho x_c + 1)}. \quad (4.41)$$

У результаті критерій стійкості зводиться до нерівності

$$\text{Re}\Phi = \frac{G\rho^2x_c(A-x_1)}{8x_1A(2\rho x_c + 1)K^2} \cdot W_2 < 0,$$

де W_2 збігається з лівою частиною нерівності, наведеною після (4.37). Отже, критерій виконується, якщо ρ знаходиться в інтервалі (4.38). Значення малого параметра ε становить

$$\varepsilon^2 = \frac{4x_1A(r-r_0)(2\rho x_c + 1)K^2}{-\rho^2(A-x_1)W_2} > 0.$$

Підставлення знайдених значень ε , A_1 в (4.24) дає відповідний розв'язок. У цьому випадку значення похідних λ' , ω'_0 такі:

$$\lambda' = -\frac{Gx_c}{2}, \quad \omega'_0 = \frac{x_1Gx_c}{2}.$$

Якщо біфуркаційним параметром вважати r і підставити його значення в (4.15), то з останнього знаходиться $b = \frac{(1-x_c\rho)(A-x_1)K}{x_1(\rho x_c + K)}$. Підставлення значень r_0 і b в критерій (4.22) приводить його до вигляду:

$$\frac{(1-x_c\rho)(A-x_1)\rho^2x_c}{x_1(\rho x_c+K)K^2} + A - \frac{3A}{K} < 0.$$

Виконання нерівності буде гарантовано при виконанні умов $1 < \rho x_c < 2$; $A > x_c + 1$. Якщо критерій стійкості факторизується, то він зводиться до набору критеріїв, кожен з яких є взаємно незалежним. Якщо, наприклад, $\rho = 0,5$, $A = 10$, $x_c = 3$ то $x_1 = 4$, $K = 2,5$, і ліва частина попередньої нерівності набирає від'ємного значення -2.0225 . У системі координат x_c, ρ відрізок ρ знаходиться між гіперболами, що проходять в першому квадранті: $\frac{1}{x_c} < \rho < \frac{2}{x_c}$. У системі координат x_c, A параметр A знаходиться над прямою $A - x_c - 1 = 0$, що проходить в першому і другому квадрантах.

Отже, ми отримали критерії стійкості періодичних коливань інтенсивності поля фотонів в умовах біфуркації Хопфа по одному із параметрів управління; інтервали стійкості для параметрів накачки і стаціонарного значення інтенсивності. Виявлено три види функціонального виходу приладу: модуляція нестійка, стійка з широким інтервалом стійкості, стійка з вузьким інтервалом стійкості. Теоретично підтверджено існування багатьох порогів для параметра накачки і отримана функціональна залежність від інших параметрів.

5 НЕСТАЦІОНАРНІ РЕЖИМИ ГЕНЕРАЦІЇ У НАПІВКЛАСИЧНИХ МОДЕЛЯХ ТВЕРДОТІЛЬНИХ ЛАЗЕРІВ

Застосування алгоритму біфуркації народження циклу дало можливість дослідити біфуркаційні процеси та побудувати періодичний розв'язок класичної моделі Статца-Демарса з різними модуляторами добротності [40]. Перехід від класичної до напівкласичних моделей, які враховують нелінійність взаємодії поля з речовиною резонатора, приводить до зростання як кількості параметрів, так і розмірності систем, що істотно збільшує труднощі теоретичних методів аналізу. Мета дослідження – поширити алгоритм біфуркації народження циклу на клас напівкласичних моделей одномодових твердотільних лазерів. Істотною обставиною є те, що періодичний розв'язок будується не навколо конкретного стаціонарного розв'язку, а навколо стаціонарного розв'язку, що віднесений до параметрів і може набувати різних значень, чим певною мірою компенсується локальність методу. З іншого боку, сам розв'язок стає функцією параметрів лазера, що забезпечує можливість постановлення обернених задач динаміки лазерів.

Як відомо, введення в резонатор лазера нелінійного елемента є одним з найбільш ефективних засобів впливу на динаміку лазера. У монографії [10] підкреслюється, що нелінійність середовищ, які заповнюють резонатор, в окремих випадках має більш істотний вплив на динаміку, ніж нестационарність параметрів. Зокрема, цим механізмом пояснюється режим незгасаючих пульсацій випромінювання неодимового лазера. Там само наведено експериментальні дані, які ілюструють наявність стійких коливань в динаміці лазера при різних значеннях структурних параметрів, проаналізовано вплив модулятора добротності резонатора, який залежить від інтенсивності потоку фотонів, на динаміку лазера класичної моделі. Оскільки функціональна залежність не конкретизувалась, то автор обмежився кількома зауваженнями щодо можливих типів коренів характеристичного рівняння і відповідного режиму генерації, виділяючи випадок, коли нестійкий фокус охоплюється стійким граничним циклом. Подальша конкретизація проблеми пов'язана з вивченням біфуркації Хопфа, яка виникає при певних значеннях параметрів. Важливою також є задача встановлення класу допустимих типів моделей,

які визначаються кількістю параметрів, з метою проведення їх повного аналізу для з'ясування основних залежностей, що визначають режим стійких коливань сигналу на виході із резонатора.

5.1 РЕЖИМ НЕПЕРЕРВНОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ В БАЛАНСНІЙ МОДЕЛІ ТВЕРДОТІЛЬНОГО ЛАЗЕРА

Вивчається динаміка напівкласичної балансної моделі, яка порівняно з класичною моделлю Статца-Демарса враховує два додаткові параметри Δ – відносну відстройку власної частоти резонатора від центра спектральної лінії та k – відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи.

СТІЙКІСТЬ СТАЦІОНАРНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ.

З метою з'ясування умов виникнення біфуркації Хопфа в балансній моделі одномодового лазера розглядається система (1.3), стаціонарний розв'язок якої знаходиться з рівнянь

$$\begin{aligned} x_c &= (A(1+k) - c)(1+k)^{-1}, \\ y_c &= \frac{c}{1+k}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Система (1.3) переходить в систему рівнянь Статца-Демарса, якщо знехтувати значенням k як малим параметром, та за умови, що центр спектральної лінії ω_0 збігається з власною частотою резонатора ω_c , тобто $k = \Delta = 0$. За визначених умов стаціонарний розв'язок (5.1) також переходить в стаціонарний розв'язок класичної моделі Статца-Демарса. З аналізу (5.1) випливає, що для забезпечення додатності значень x_c, y_c потрібно вимагати виконання нерівності $A(1+k) > c$. Для класичної моделі нерівність $A > 1$ є умовою збудження генерації потоку фотонів, таким чином, урахування параметра k підвищує поріг збудження.

Матриця Якобі системи (5.1), обчислена у стаціонарному розв'язку, має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{G(1+k)^2 x_c}{c} \\ -1 & -\left(1 + \frac{(1+k)^2 x_c}{c}\right) \end{pmatrix},$$

її власні значення

$$2\lambda_{1,2} = -h \pm \left(h^2 - 4Gx_c \frac{(1+k)^2}{c} \right)^{1/2}, \quad h = 1 + \frac{(1+k)^2 x_c}{c}. \quad (5.2)$$

Оскільки x_c, c набувають додатних значень, $G \approx 10^5$, доходимо висновку, що в стаціонарному розв'язку практично завжди знаходиться стійкий фокус, що збігається з класичною моделлю Статца-Демарса. Однак якщо у випадку класичної моделі декремент і частота коливань мали відповідно значення $d = -\frac{A}{2}$, $\omega \approx \sqrt{G(A-1)}$, то для напівкласичної моделі маємо

$$d = -\frac{1}{2} \left(\frac{A(1+k)^2}{c} - k \right), \quad \omega \approx \left(G \left(\frac{A(1+k)}{c} - 1 \right) (1+k) \right)^{1/2}.$$

З аналізу (5.2) випливає, що дійсна частина комплексних коренів не може перетворитися в нуль, тобто коливання будуть згасаючими і біфуркація Хопфа неможлива, що характерно також для класичної моделі лазера Статца-Демарса [11]. Отже, врахування величин k і Δ не змінює фазового портрета системи, а лише впливає на деякі його характеристики.

УМОВИ ВИНИКНЕННЯ БІФУРКАЦІЇ ХОПФА.

Система рівнянь (1.3), що описує динаміку лазера, за наявності модулятора добротності $\varphi(x, a, b)$ має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(\frac{y}{c-yk} - 1 - \varphi(x) \right), \\ \dot{y} &= A - y - \frac{xy}{c-yk}, \quad c = 1 + k + \frac{\Delta^2}{1+k}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

де x - інтенсивність поля випромінювання фотонів; y - різниця заселеності рівнів атомів; k - відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи; A - параметр накачки; $\Delta = (\omega_0 - \omega_c) \nu_2^{-1}$ - відносна відстройка власної частоти резонатора від центра спектральної лінії ω_c , де ν_2 - швидкість релаксації поляризації атомної системи; G - великий параметр в теорії лазерів класу В. Функція $\varphi(x, a, b)$ задає нелінійні ефекти взаємодії потоку фотонів у модуляторі добротності резонатора за допомогою параметрів керування a, b . Всі величини - параметри, фазові координати і час - подано в безрозмірній формі.

Стационарний розв'язок динамічної системи (5.3) знаходиться з рівнянь

$$\begin{aligned} x_c k \psi^2(x_c) + (c - kA + x_c) \psi(x_c) - A &= 0, \\ y_c &= \frac{c \psi(x_c)}{\beta(x_c)}, \quad \psi(x_c) = 1 + \varphi(x_c), \quad \beta(x_c) = 1 + k \psi(x_c). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Матриця Якобі правих частин системи, обчислена у стаціонарному розв'язку, набирає вигляду

$$M = \begin{pmatrix} -Gx_c \frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x} & Gx_c \beta^2(x_c) \\ -\psi(x_c) & -\frac{\nu}{c} \end{pmatrix}, \quad \nu = c + x_c \beta^2(x_c),$$

її власні значення є такими:

$$\begin{aligned} 2\lambda_{1,2} &= \text{Spur} M \pm \left[(\text{Spur} M)^2 - 4 \det M \right]^{1/2}, \\ \text{Spur} M &= -Gx_c \frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x} - \frac{\nu}{c}, \quad \det M = \frac{Gx_c}{c} \left(\nu \frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x} + \psi(x_c) \beta^2(x_c) \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Згідно з теоремою Хопфа в системі (5.3) виникають періодичні коливання, якщо власні значення матриці Якобі є суто уявними. Власні числа (5.5) є суто уявними при виконанні двох умов, одна з яких зводиться до рівняння

$$\text{Spur}M = -Gx_c \frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x} - \frac{\nu}{c} = 0, \quad (5.6)$$

а друга до нерівності $\det M > 0$. Наявність великого параметра G дозволяє звести рівняння (5.6) до вигляду $\frac{\partial \psi(x_c)}{\partial x} = 0$, звідки знаходиться біфуркаційне значення одного з параметрів моделі. За визначених умов матриця Якобі має суто уявні власні значення

$$\lambda_{1,2} = \pm i \left(G \frac{x_c \beta^2}{c} \psi(x_c) - \left(\frac{\nu}{c} \right)^2 \right)^{1/2} \approx \pm i \left(G \frac{x_c \beta^2 \psi}{c} \right)^{1/2} \equiv \pm i \omega_0,$$

чим одночасно знайдено перше наближення ω_0 до невідомої частоти модуляції ω .

У роботі [43] проведено біфуркаційний аналіз динамічної системи, що дозволило не тільки з'ясувати умови виникнення біфуркації Хопфа, а також отримати критерій стійкості періодичних коливань інтенсивності:

$$\text{Re} \Phi = \frac{G}{8\beta^2 \psi x_c} \left[2\nu \rho_2^2 + \beta^2 \psi(x_c) (\rho_2 - 3\rho_3 x_c) \right],$$

де $\psi(x_c) = 1 + \varphi(x_c)$, $\beta(x_c) = 1 + k\psi(x_c)$, ρ_2, ρ_3 – коефіцієнти ряду Маклорена функції $(x_c + z_1)\psi(x_c + z_1)$ при степенях z_1^2, z_1^3 .
Урахування значення

$$c = \frac{\beta(A - x_c \psi(x_c))}{\psi(x_c)}, \quad A > x_c \psi(x_c), \quad (5.7)$$

яке отримано з рівняння (5.4), приводить критерій стійкості до вигляду

$$\text{Re} \hat{O} = \frac{G}{8x_c \beta \psi^2(x_c)} \left\{ 2A\rho_2^2 + \psi^2(x_c) \left[2\rho_2^2 k x_c + \beta(\rho_2 - 3\rho_3 x_c) \right] \right\}. \quad (5.8)$$

МОДЕЛЮВАННЯ МОДУЛЯТОРА ДОБРОТНОСТІ РЕЗОНАТОРА.

Одержання практично важливих результатів можливо за умов конкретизації функціональної залежності $\varphi(x, a, b)$. У роботі розглядається напівкласична балансна модель з нелінійним модулятором, що враховує багатофотонну взаємодію. Лазерна модель досліджується за наявності квадратичного, кубічного та біквадратичного модулаторів добротності з двома параметрами керування, які послідовно розглядаються як біфуркаційні.

У першому випадку розглядається квадратична залежність модулятора добротності $\varphi_1 = ax^2 - bx$, де a і b – додатні параметри керування.

Елементи ρ_2, ρ_3 критерію (5.8) знаходяться як коефіцієнти многочлена $(x_c + z_1)(1 + a(x_c + z_1)^2 + b(x_c + z_1))$ при степенях z_1 і мають вигляд $\rho_2 = 3x_c a - b$, $\rho_3 = a$.

Спочатку в ролі біфуркаційного використовується параметр a . З рівняння $\text{Spr}M = 2ax_c - b = 0$ знаходиться його біфуркаційне значення: $a_0 = \frac{b}{2x_c}$, тоді

$\rho_{20} = \frac{1}{2}b$, $\rho_{30} = \frac{b}{2x_c}$, $\psi_{10} = 1 - \frac{1}{2}bx_c > 0$. Остання нерівність випливає з вимоги

додатності ω_0^2 , що накладає обмеження на значення другого параметра керування:

$b < \frac{2}{x_c}$. Враховуючи, що умовою стійкості періодичних коливань, згідно з теоремою

Хопфа, є від'ємність показника Флокке, після підстановки знайдених значень в залежність (5.8) отримуємо критерій стійкості

$$Ab^2 + \psi_{10}^2(b^2 kx_c - 2b\beta_{10}) < 0. \quad (5.9)$$

Розв'язуючи нерівність (5.9) та враховуючи обмеження (5.7), отримуємо інтервал стійкості для параметра накачки A :

$$x_c \psi_{10} < A < \psi_{10}^2 \left(\frac{2\beta_{10}}{b} - kx_c \right). \quad (5.10)$$

Необхідна умова існування одержаного інтервалу полягає у виконанні нерівності

$\psi_{10} \left(\frac{2\beta_{10}}{b} - kx_c \right) > x_c$, звідки випливає інтервал для параметра керування b :

$0 < b < \frac{1}{x_c}$, який уточнює попередній: $0 < b < \frac{2}{x_c}$.

У другому випадку як біфуркаційний береться параметр b , тоді $b_0 = 2ax_c$, $\rho_{20} = ax_c$, $\rho_{30} = a$, $\psi_{10} = 1 - ax_c^2 > 0$. З останньої нерівності знаходиться

обмеження $a < \frac{1}{x_c^2}$. За допомогою аналогічних перетворень одержуємо інтервал

стійкості для параметра накачки

$$x_c \psi_{10} < A < \psi_{10}^2 \left(\frac{\beta_{10}}{ax_c} - kx_c \right). \quad (5.11)$$

Умова існування інтервалу (5.11) $\psi_{10} \left(\frac{\beta_{10}}{ax_c} - kx_c \right) > x_c$ потребує виконання

нерівності $0 < a < (2x_c^2)^{-1}$, яка уточнює попередню для параметра керування a .

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ МОДЕЛІ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ.

Отримані аналітичні результати підтверджуються чисельним розв'язком системи (5.3) методом Рунге-Кутта при $\varphi = ax^2 - bx$ [44]. У зазначеній роботі для з'ясування впливу керуючих параметрів на режими поведінки лазера розглядається

біфуркаційна діаграма на площині (b, a) , яка визначає області існування від'ємного значення дійсної частини показника Флокке (рис.5.1). З рисунка бачимо, що при заданому параметрі накачки A та відомих k, c і G на площині (b, a) формується замкнена крива, яка відповідає $\text{Re}\Phi = 0$. В області, яка обмежена цією кривою, дійсна частина показника Флокке є від'ємною, тобто всередині області має реалізуватися стабільний коливальний режим. Суттєво важливим є той факт, що при великих інтенсивностях загасання потоку фотонів (великих a) і при будь-яких значеннях інтенсивності генерації фотонів у модуляторі (довільних b) стабільний коливальний режим не реалізується. При малих значеннях a і збільшенні значень b система здатна перейти у режим стійких коливань внаслідок біфуркації Хопфа. Якщо величина b продовжує збільшуватися, то система виходить із режиму стійких коливань, тобто маємо реверсивну біфуркацію Хопфа. Таким чином, виникнення та руйнування стійкого періодичного випромінювання є наслідком однієї причини – зростання інтенсивності виробництва фотонів у модуляторі.

Поведінка системи на фазовій площині (x, y) при різних співвідношеннях між параметрами керування a і b наведена на рис.5.2.

Як показує рис.5.2а, в області 1 (див. рис.5.1) на фазовій площині існує стійкий фокус C . На лінії $\text{Re}\Phi = 0$ відбувається класична біфуркація Хопфа, коли утворюються граничні цикли на фазовій площині при будь-яких початкових умовах в околі центра, що раніше відповідав фокусу (рис.5.2б). В області 2 (рис.5.1) виникає єдиний стійкий граничний цикл (рис.5.2в) – фокус стає нестійким і траєкторії, що починаються з нього, потрапляють на стійкий граничний цикл зсередини, а траєкторії, що починаються при великих початкових значеннях закручуються на цикл ззовні. Виходячи з області 2 через праву (верхню) границю, система зазнає біфуркації Хопфа (на лінії фазові портрети мають такий вигляд, як на рис.5.2б).

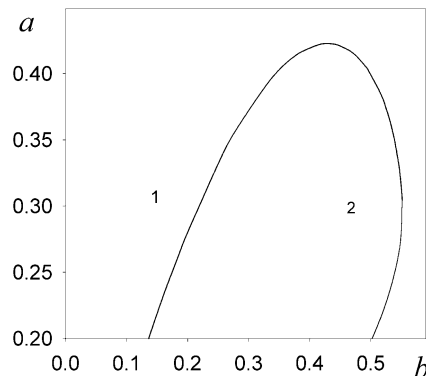


Рис.5.1 - Біфуркаційна діаграма народження стійкого коливального випромінювання при $A = 2, G = 400, k = 0, 1, c = 1, 9$ (області 1 і 2 визначають режими затухаючих коливань та стійкого періодичного випромінювання)

Аналіз отриманих результатів показав [44], що змінюючи значення параметрів керування модулятором добротності можна перевести резонатор із стану затухаючого випромінювання у стан стійких коливань. Суттєво важливим є те, що модулятор має працювати як підсилювач сигналу (завдяки параметру b), що виходить із кристала, в якому утворюються фотонний потік, але підсилення такого сигналу обмежується параметром a . При цьому система зазнає реверсивного переходу утворення стійкого коливального режиму у достатньо широкому діапазоні параметра підсилення.

ВИБІР ІНШИХ МОДУЛЯТОРІВ ДОБРОТНОСТІ

Наступною використовується кубічна залежність модулятора добротності від інтенсивності поля фотонів $\varphi_2 = ax^3 - bx$, де a, b – додатні параметри. Для цієї моделі отримаємо: $\rho_2 = 6x_c^2 a + b$, $\rho_3 = 4ax_c$.

У випадку біфуркаційного параметра $a_0 = \frac{b}{3x_c^2}$ елементи критерію стійкості набувають значень $\rho_{20} = b, \rho_{30} = 4b(3x_c)^{-1}$, $\psi_{20} = 1 - \frac{2}{3}bx_c > 0$, звідки $b < \frac{3}{2x_c}$.

Підставлення одержаних значень до виразу (5.8) дозволяє отримати критерій стійкості періодичних коливань

$$2Ab^2 + \psi_{20}^2(2b^2 kx_c - 3b\beta_{20}) < 0,$$

тоді інтервал стійкості для параметра накачки A набуває вигляду

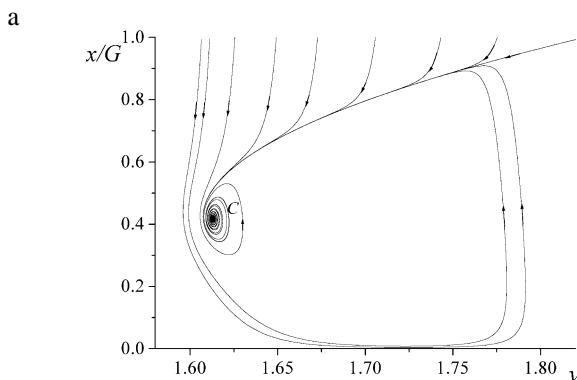
$$x_c \psi_{20} < A < \psi_{20}^2 \left(\frac{3\beta_{20}}{2b} - kx_c \right). \quad (5.12)$$

Умова існування інтервалу (5.12) $\psi_{20} \left(\frac{3\beta_{20}}{2b} - kx_c \right) > x_c$ приводить до нерівності $0 < b < 3(4x_c)^{-1}$, яка уточнює попередню для параметра керування b .

У випадку біфуркаційного параметра b : $b_0 = 3ax_c^2$ отримаємо $\rho_{20} = 3ax_c^2$, $\rho_{30} = 4ax_c$, $\psi_{20} = 1 - 2ax_c^3$, звідки $a < \frac{1}{2x_c^3}$, а інтервал стійкості для параметра накачки набуває вигляду

$$x_c \psi_{20} < A < \psi_{20}^2 \left(\frac{\beta_{20}}{2ax_c^2} - kx_c \right). \quad (5.13)$$

Умовою існування інтервалу (5.13) є виконання нерівності $\psi_{20} > 2ax_c^3$, яка зводиться до нерівності $a < \frac{1}{4x_c^3}$, що уточнює попередню для параметра керування a .



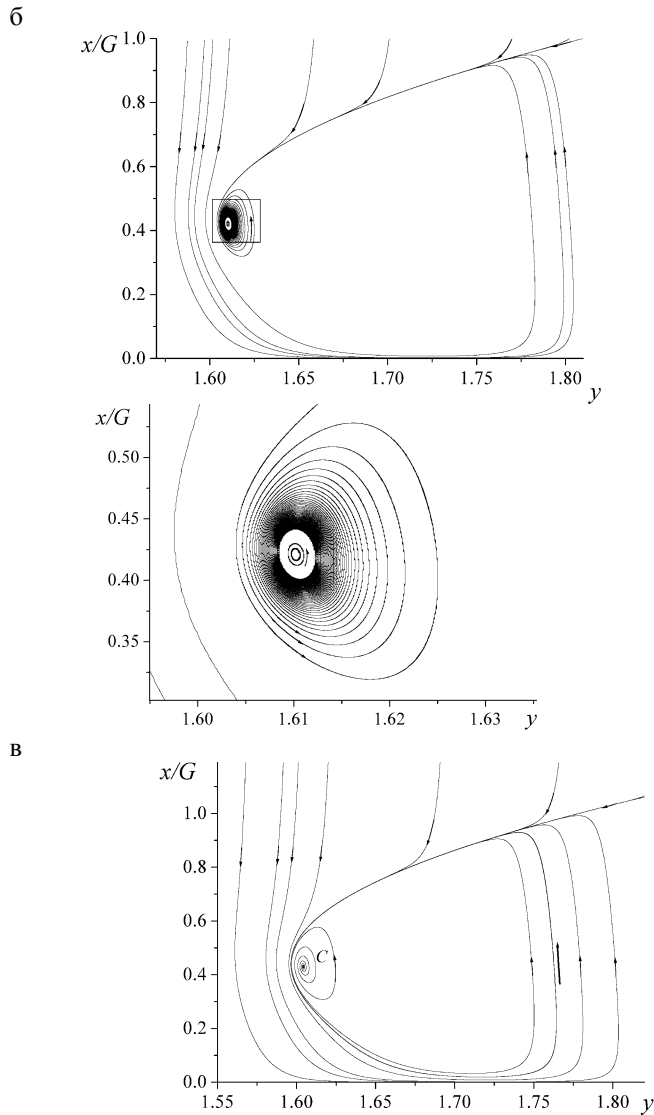


Рис.5.2 - Фазові портрети при $A = 2, G = 400, k = 0,1, c = 1,9$: а) поведінка системи в області 1 (рис.5.1); б) різні масштаби фазових траєкторій на лінії біфуркації Хопфа; в) режим стабільного періодичного випромінювання в області 2 (рис. 5.1)

Наступним розглядається біквадратичний модулятор добротності з двома параметрами керування [45]: $\varphi_3 = x^4 + ax^2 + bx$. Для цього випадку знайдено $\rho_2 = 10x_c^3 + 3ax_c + b, \rho_3 = 10x_c^2 + a$.

При біфуркаційному значенні $a_0 = -(b + 4x_c^3)(2x_c)^{-1}$ елементи критерію стійкості можна записати так: $\rho_{20} = 4x_c^3 - \frac{1}{2}b, \rho_{30} = 8x_c^2 - \frac{b}{2x_c}, \psi_{30} = 1 - x_c^4 + \frac{bx_c}{2} > 0$. З останньої нерівності випливає обмеження: $b > 2(x_c^4 - 1)x_c^{-1}$. Підставлення одержаних

значень елементів до залежності (5.8) дозволяє знайти інтервал стійкості для параметра накачки A

$$x_c \psi_{30} < A < \psi_{30}^2 \left[\beta_{30} \left(10x_c^3 - \frac{1}{2}b \right) \rho_{20}^{-2} - kx_c \right], \quad (5.14)$$

звідки випливає умова його існування $\psi_{30} \left(10x_c^3 - \frac{1}{2}b \right) > \rho_{20}^2 x_c$. Остання нерівність зводиться до квадратної нерівності відносно невідомої ρ_{20} :

$$2\rho_{20}^2 x_c - \rho_{20} (1 - 3x_c^4) - 6x_c^3 (1 + 3x_c^4) < 0,$$

яка виконується для значень ρ_{20} з інтервалу (R_1, R_2) , де $R_{1,2} = (4x_c)^{-1} (1 - 3x_c^4 \mp \sqrt{\sigma})$, $\sigma = (12x_c^4 + 1)^2 + 9x_c^4 (x_c^4 + 2)$. Звідси можна знайти інтервал стійкості для параметра керування b :

$$2(4x_c^3 - R_2) < b < 2(4x_c^3 - R_1). \quad (5.15)$$

Для біфуркаційного значення $b_0 = -4x_c^3 - 2ax_c$ отримаємо $\rho_{20} = 6x_c^3 + ax_c$, $\rho_{30} = 10x_c^2 + a$, $\psi_{30} = 1 - 3x_c^4 - ax_c^2 > 0$, звідки $a < (1 - 3x_c^4)x_c^{-2}$. Для параметра накачки A знайдено інтервал стійкості

$$x_c \psi_{30} < A < \psi_{30}^2 \left[\beta_{30} (12x_c^3 + ax_c) \rho_{20}^{-2} - kx_c \right], \quad (5.16)$$

який існує за умови виконання нерівності $\psi_{30} (12x_c^3 + ax_c) > \rho_{20}^2 x_c$. Умова існування інтервалу (5.16) зводиться до квадратної нерівності відносно ρ_{20} :

$$2\rho_{20}^2 x_c - \rho_{20} (1 - 3x_c^4) - 6x_c^3 (1 + 3x_c^4) < 0.$$

Розв'язання квадратної нерівності дозволяє знайти інтервал стійкості для параметра керування a :

$$\frac{R_1 - 6x_c^3}{x_c} < a < \frac{R_2 - 6x_c^3}{x_c}. \quad (5.17)$$

ПРИКЛАД РОЗРАХУНКІВ ЕЛЕМЕНТІВ ГРАНИЧНОГО ЦИКЛУ.

Аналітичні залежності, що знайдено в результаті біфуркаційного аналізу моделі, дають можливість проводити розрахунки елементів граничного циклу. При квадратичному модуляторі добротності у випадку біфуркаційного параметра a показник Флокке (5.8), від'ємність якого відповідає стійкості періодичних коливань, набуває таких значень

$$\operatorname{Re} \Phi_0 = \frac{GU_1}{16} K_1, \quad U_1 = \frac{b}{\beta_{10} x_c \psi_{10}^2}, \quad K_1 = Ab + \psi_{10}^2 (bkx_c - 2\beta_{10}).$$

Оскільки множник U_1 змінний за величиною, але завжди додатний, то знак $\text{Re}\Phi_0$ визначається лише знаком виразу K_1 . Однак визначення амплітуди коливань вимагає врахування знакосталих множників. У випадку $x_c = 0,2$ для забезпечення стійкості періодичних коливань параметр керування b повинен набувати значень з інтервалу $(0;5)$. Остаточно вибір параметру b визначається рівнем параметра накачки. З залежності (5.10) випливає, що збільшення параметра b приводить до зменшення верхньої межі максимального значення параметра накачки, а отже, і до зменшення потужності випромінювання лазера. На основі цих міркувань для параметра b вибрано інтервал зміни $(0,1;0,6)$. За формулою (5.10) обчислюється верхня межа параметра накачки, а нижня визначається умовою збудження генерації $A > 1$. Запас стійкості періодичної генерації визначається ще двома множниками $G/16$ та U_1 , добуток яких утворює число порядку 10^3 . За результатами розрахунків для $x_c = 0,2$ побудовано графіки залежностей параметра накачки та критерію стійкості K_1 від параметра керування b (рис.5.3), які демонструють, що стійкість випромінювання зростає в міру зменшення параметра накачки.

У випадку біфуркаційного параметра b показник Флокке (5.8) набирає вигляду

$$\text{Re}\Phi_0 = \frac{GU_2}{4} K_2, \quad U_2 = \frac{a}{\beta_{10}\psi_{10}^2}, \quad K_2 = Aax_c + \psi_{10}^2(akx_c^2 - \beta_{10}),$$

додатність чи від'ємність якого визначається виразом K_2 , оскільки $U_2 > 0$. Запас стійкості періодичної генерації визначається значенням $GU_2/4$. За результатами розрахунків для $x_c = 0,5$ верхньої межі параметра накачки та значення критерію K_2 побудовано графіки залежностей A і K_2 від параметра керування a (рис. 5.4). Дані розрахунків свідчать про протилежну залежність: стійкість випромінювання зменшується в міру зменшення параметра накачки.

Для кубічного модулятора добротності у випадку біфуркаційного параметра a показник Флокке (5.8) набирає вигляду

$$\text{Re}\Phi_0 = \frac{GU_3}{8} K_3, \quad U_3 = \frac{b}{\beta_{20}\psi_{20}^2 x_c}, \quad K_3 = 2Ab + \psi_{20}^2(2btx_c - 3\beta_{20}).$$

Якщо $x_c = 0,2$, то для забезпечення стійкості періодичних коливань параметр керування b повинен задовольняти нерівність: $b < 3,75$. Графіки залежностей параметрів накачки A та критерію стійкості K_3 від параметра керування представлені на рис. 5.5.

У випадку біфуркаційного параметра b показник Флокке (5.8) набирає вигляду

$$\text{Re}\Phi_0 = \frac{9GU_4}{8} K_4, \quad U_4 = \frac{ax_c}{\beta_{20}\psi_{20}^2}, \quad K_4 = 2Aax_c^2 + \psi_{20}^2(2ax_c^3 k - \beta_{20}).$$

Графіки залежностей параметра A і критерію стійкості K_4 від параметра керування наведені на рис. 5.6, що засвідчує спадання стійкості за типом релаксаційних коливань малої амплітуди.

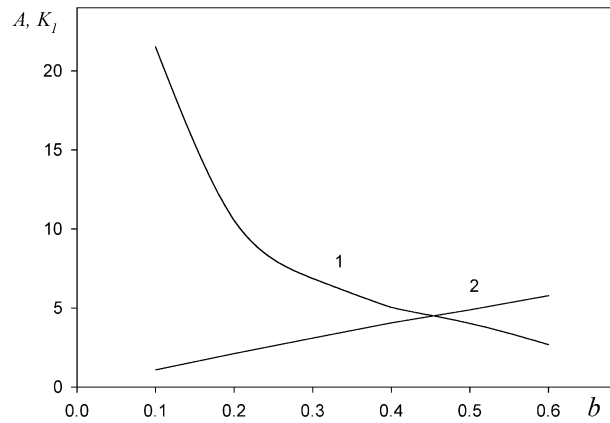


Рис.5.3 - Залежності параметра накачки (крива 1), критерію стійкості (крива 2) від параметра керування b

У випадку біквадратичного модулятора добротності для біфуркаційного параметра a показник Флокке (5.8) набуває значення

$$\operatorname{Re}\Phi_0 = \frac{GU_5}{4} K_5, \quad U_5 = \frac{1}{\beta_{30} x_c \psi_{30}^2},$$

$$K_5 = 2\rho_{20}^2 A + \psi_{30}^2(x_c) \left[2\rho_{20}^2 k x_c - 2\beta_{30}(\rho_{20} + 6x_c^3) \right], \quad \rho_{20} = 4x_c^3 - \frac{b}{2}.$$

У цьому випадку вибором x_c за формулою (5.15) визначається інтервал зміни параметра b , за формулою (5.14) знаходяться нижня та верхня межі параметра накачки. Результати розрахунків інтервалів стійкості для параметра накачки $A_1 - A_2$, значення множника K_5 залежно від параметра b для $x_c = 1, 2$ наведено в табл.5.1.

Таблиця 5.1 - Залежність параметра накачки та критерію стійкості від параметра керування b

b	A_1	A_2	K_5
6	3,031	6,692	-56,045
8	4,471	28,177	-201,024
10	5,911	118,75	-391,217
12	7,791	816,226	-672,778
13,824	8,6649	-	-1994,85
14	8,792	2299,99	-1893,877
16	10,231	1047,03	-1227,304
18	11,67	343,035	-1444,66
20	13,111	176,389	-1556,995
22	14,551	104,013	-1505,087
24	15,991	63,175	-1221,494
26	17,431	34,439	-630,440

Дані таблиці показують, що при $b = 13,824$ $\rho_{20} = 0$, тоді критерій стійкості набуває від'ємного значення незалежно від параметра накачки та стаціонарного

розв'язку (точка абсолютної стійкості) та набирає максимального значення за абсолютною величиною.

У випадку біфуркаційного параметра b показник Флокке має вигляд

$$\operatorname{Re}\Phi_0 = \frac{GU_6}{4} K_6, \quad U_6 = \frac{1}{\beta_{30} x_c \psi_{30}^2},$$

$$K_6 = 2\rho_{20}^2 A + \psi_{30}^2(x_c) [2\rho_{20}^2 k x_c - 2\beta_{30}(\rho_{20} + 6x_c^3)] \rho_{20} = 6x_c^3 + ax_c.$$

Розрахунок елементів починається з визначення інтервалу для параметра керування a за формулою (5.17). Результати розрахунків показують, що при $x_c = 1,4$ елементи граничного циклу набувають значень: $a = -11,70$, $\rho_{20} = 0$, множник K_6 стає від'ємним незалежно від x_c та A . У цьому випадку A_2 не має обмеження, критерій K_6 набуває максимального значення за абсолютною величиною.

Графіки залежностей абсолютних величин критеріїв стійкості періодичної генерації від параметрів керування наведено на рис. 5.7, рис. 5.8. Аналіз графіків показує, що множники K_5, K_6 мають дві точки максимуму та одну точку мінімуму, а в коренях цих множників $K_5(b) = K_6(a) = 0$ стійка генерація випромінювання переходить в нестійку. Оскільки кожне x_c визначає свій інтервал зміни параметра керування, то існує множина інтервалів стійкості, які відокремлені один від одного інтервалами нестійкості.

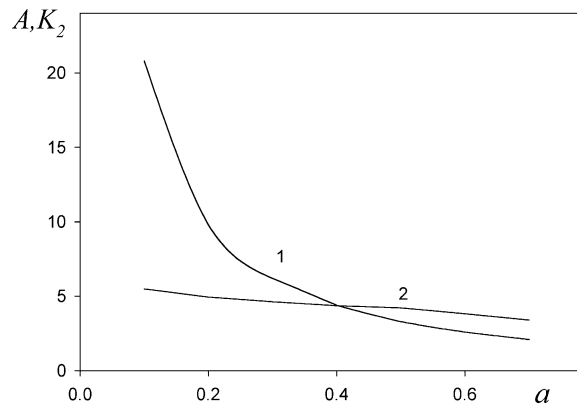


Рисунок 5.4 - Залежності параметра накачки (крива 1), критерію стійкості (крива 2) від параметра керування a

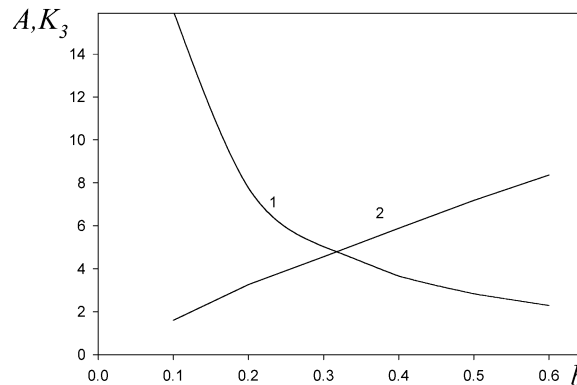


Рисунок 5.5 - Залежності параметра накачки (крива 1), критерію стійкості (крива 2) від параметра керування b

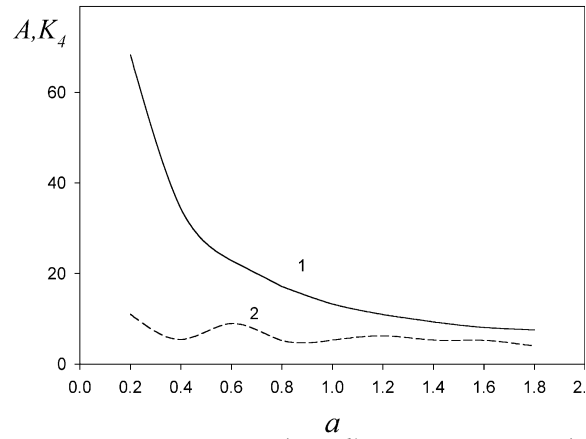


Рисунок 5.6 - Залежності параметра накачки (крива 1), критерію стійкості (крива 2) від параметра керування a

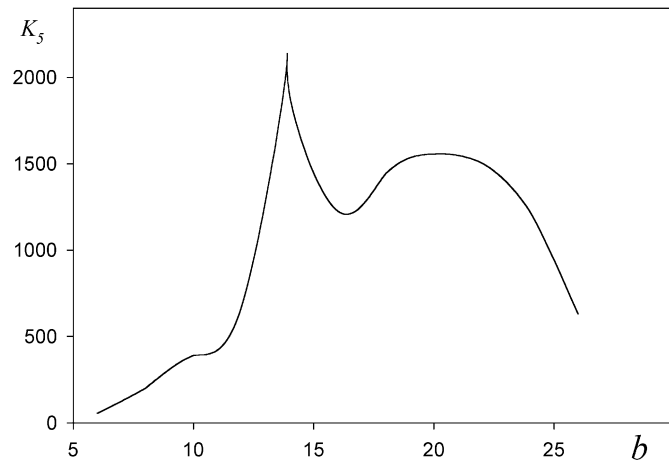


Рисунок 5.7 - Залежність критерію стійкості періодичної генерації від параметра керування b

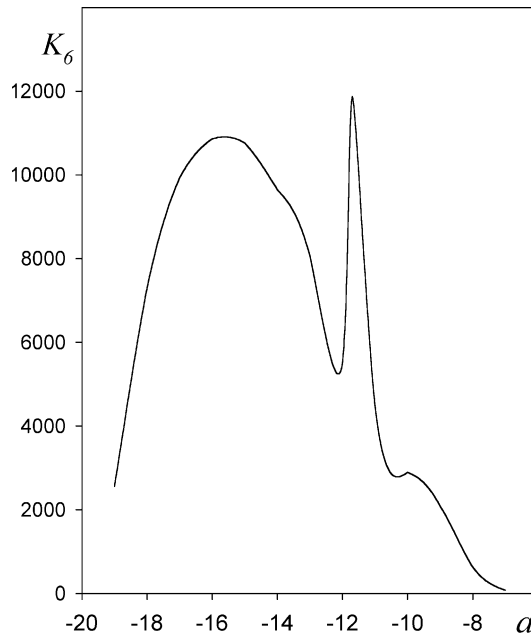


Рисунок 5.8 - Залежність критерію стійкості періодичної генерації від параметра керування a

Отримані аналітичні залежності дозволяють вивчати вплив параметрів лазера на його динаміку. Для з'ясування впливу параметра k на довжину інтервалу стійкості для параметра накачки необхідно знайти похідні по змінній k від правих кінців інтервалів (5.10), (5.11), (5.12) – (5.14), (5.16). Зокрема, для квадратичного модулятора добротності у випадку біфуркаційного параметра a маємо:

$$\frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{2\beta_{10}}{b} - kx_c \right) = \frac{2(1 - bx_c)}{b} \psi_{10}^2. \text{ Оскільки } 0 < b < \frac{1}{x_c}, \text{ то похідна додатна, звідки}$$

випливає, що зростання параметра k приводить до збільшення довжини інтервалу стійкості для параметра накачки A . У випадку біфуркаційного параметра b можна

$$\text{записати: } \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{\beta_{10}}{ax_c} - kx_c \right) = \frac{1 - 2ax_c^2}{ax_c} > 0, \text{ оскільки } a < (2x_c^2)^{-1}. \text{ Таким чином,}$$

зростання параметра k приводить до збільшення інтервалу стійкості і в цьому випадку. У випадку кубічного та біквадратичного модуляторів добротності зростання параметра k також приводить до збільшення інтервалу стійкості для параметра накачки.

При проведенні біфуркаційного аналізу динамічної моделі (5.3) отримано залежності, що не містять параметра c , оскільки параметр c був поданий як функція решти параметрів. Ця обставина, з одного боку, полегшила знаходження критерію стійкості та інтервалів стійкості, а з іншого стала на перешкоді вивченню впливу параметра c на динаміку випромінювання фотонів в періодичному режимі. У роботі [46] було застосовано інший підхід, що дозволило вивчити вплив сумарного параметра c на динаміку генерації. Зокрема, встановлено, що збільшення параметра c приводить до зменшення частоти модуляції ω_0 , збільшення періоду коливальності T . Показано, що зростання c приводить до зменшення інтервалу стійкості параметрів керування. Параметр k має протилежний вплив, а саме його збільшення приводить до збільшення інтервалу стійкості параметрів керування. Однак, вплив параметра k значно менший ніж параметра c , оскільки обмеження накладені на модель (5.3)

роблять його величину порядку $O(0,1)$. Крім того, зростання параметра c приводить до збільшення параметра накачки, при якому можливий стаціонарний розв'язок системи (5.3).

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКУ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ

Згідно з алгоритмом біфуркації народження циклу за формулами (3.4)– (3.7) знаходяться його елементи. Врахування значень зазначених елементів та матриці перетворення системи P дозволяє отримати періодичний розв'язок динамічної системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P \left\{ \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2 G}{12\omega_0} \left[2\rho_{20} \begin{pmatrix} -\sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{pmatrix} + 2\rho_{20} \frac{\nu}{\omega_0 c} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\omega_0}{x_c G} \begin{pmatrix} 2 \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} + 6\rho_{20} \begin{pmatrix} \frac{\nu}{\omega_0 c} \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right\} + O(\varepsilon^3) \quad (5.18)$$

Аналіз виразу (5.18) показує, що розв'язок містить елемент ρ_{20} , який залежить від параметрів керування. Отже, вибір параметра керування істотно впливає і на сам розв'язок. Наприклад, як показано у [46], у випадку біквадратичного модулятора при $b = 8x_c^3$ періодична генерація є стійкою для будь-яких $x_c > 0$. Одночасно сам розв'язок набирає найпростішого вигляду

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P \left[\varepsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \frac{\varepsilon^2}{3x_c} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta \end{pmatrix} \right] + O(\varepsilon^3). \quad (5.19)$$

Цей факт можна використати для дослідження динаміки лазера за межами інтервалів стійкості деяких параметрів, що становить окрему проблему [47, 48]. Розв'язок (5.19) в квадратичному наближенні за параметром ε набирає вигляду

$$x = x_c + \psi_1(\varepsilon; \theta), \quad y = y_c - \psi_2(\varepsilon; \theta),$$

де $\psi_1 = \varepsilon \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{3} \cos 2\theta$; $\psi_2 = \varepsilon(\gamma_1 \cos \theta + \gamma_2 \sin \theta) + \frac{\varepsilon^2}{3}(\gamma_1 \cos 2\theta + \gamma_2 \sin 2\theta)$;

$$\gamma_1 = \frac{\nu}{Gx_c\beta^2}; \quad \gamma_2 = \frac{\omega_0 c}{Gx_c\beta^2}.$$

Аналітичний вигляд граничного циклу може бути поданий у вигляді

$$y - y_c = -\frac{1}{Gx_c\beta^2} \left[\varepsilon \left(\nu z + \omega_0 c \sqrt{1 - z^2} \right) + \frac{\varepsilon^2}{3x_c} \left(\nu(2z^2 - 1) + 2\omega_0 c z \sqrt{1 - z^2} \right) \right],$$

$$\text{де } z = \frac{3x_c}{4\varepsilon} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{3x_c} \left(\frac{\varepsilon^2}{3x_c} - (x - x_c) \right)} \right].$$

Важливим результатом біфуркаційного аналізу системи (5.3) є знаходження першого наближення до невідомої частоти модуляції $\omega_0^2 = Gx_c \psi(x_c) \beta^2 c^{-1}$, яку

називають частотою Рабі [10]. Частота Рабі для класичної моделі Статца-Демарса визначається як $\omega_0^2 = G(A-1)$ [10]. У роботі [46] показано, що частота Рабі для моделі Статца-Демарса є частковим випадком одержаної формули. Зокрема, для квадратичного модулятора добротності отримано

$$\omega_0^2 = G[A - (c - kA)(1 - q)]\beta_{10}c^{-1}. \quad (5.20)$$

Для класичної моделі Статца-Демарса [10] за відсутності модулятора добротності $k = 0$, $\Delta^2 = 0$, $\psi = 1$, тому $c = 1$, $q = 0$. При цих значеннях параметрів частота (5.20) набирає вигляду $\omega_0^2 = G(A-1)$, тобто, є частотою Рабі класичної моделі.

Зазначений результат залишається правильним для випадку всіх трьох моделей. Зокрема, у випадку біквадратичного модулятора добротності рівняння (5.4) зводиться до залежності $x_c\psi_{30}(x_c)\beta_{30}(x_c) = A\beta_{30}(x_c) - c\psi_{30}(x_c)$, тоді частота ω_0^2 набирає вигляду

$$\omega_0^2 = G\beta_{30}[A(1 + k\psi_{30}(x_c)) - c\psi_{30}(x_c)]c^{-1}. \quad (5.21)$$

Оскільки у випадку класичної моделі $\psi = 1$, $k = 0$, $c = 1$, то з формули (5.21) випливає, що $\omega_0^2 = G(A-1)$. Враховуючи додатність величини ω_0^2 (5.21), можна отримати інший вигляд умови модуляції $A[1 + k(1 - q)] > c(1 - q)$. Для моделі Статца-Демарса остання нерівність зводиться до нерівності $A > 1$, тобто умова модуляції переходить в умову генерації випромінювання класичної моделі.

Таким чином, у результаті проведення біфуркаційного аналізу балансної моделі встановлено, що внесення в резонатор твердотільного лазера модулятора добротності викликає стійку амплітудну модуляцію випромінювання при біфуркаційному значенні параметра керування модулятором добротності. Теоретично підтверджено експериментальні факти існування багатьох порогів стійкості для параметра накачки, продемонстрована наявність достатньо широких інтервалів змінювання біфуркаційного параметра для забезпечення стійкого режиму періодичної генерації. Знайдено аналітичні оцінки біфуркаційних порогів, з'ясовано умови стійкості періодичної генерації. Одержано періодичні розв'язки для інтенсивності випромінювання та інверсної заселеності рівнів. Запропоновано методику розрахунку елементів граничних циклів.

5.2 БІФУРКАЦІЯ ХОПФА В БАЛАНСНІЙ МОДЕЛІ З КУБІЧНИМ МОДУЛЯТОРОМ ДОБРОТНОСТІ

Балансна система рівнянь лазера (1.3) отримана методом адіабатичного виключення змінних з більш складної системи [10], яка, крім інших, містить параметри: Δ_c – відносна відстройка частоти поля від частоти резонатора, Δ_0 – відносна відстройка частоти поля від центра спектральної лінії. Між параметрами Δ , Δ_0 , Δ_c існує залежність: $\Delta = k\Delta_c - \Delta_0$, де k – відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи. Якщо значення параметра k наближаються до нуля, то виникає можливість вивчити вплив відносної відстройки частоти поля від центра спектральної лінії на характеристики динаміки лазера, що описується системою (1.4). Стационарний розв'язок системи, як і при проведенні попередніх досліджень, віднесено до параметрів.

Модель твердотільного лазера (1.4) за наявності кубічного модулятора добротності $\beta(x) = ax^3 + bx$ має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx(y\delta - 1 - \beta(x)), \\ \dot{y} &= A - y(x\delta + 1), \end{aligned} \quad (5.22)$$

де $\delta = \frac{1}{1+\Delta^2}$, a і b - параметри керування.

Характер поведінки динамічної системи визначається біфуркаційною діаграмою (рис.5.9), де лінії біфуркації зображені при різних значеннях параметра накачки.

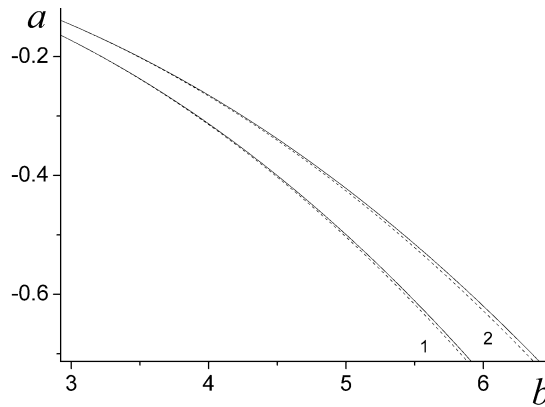


Рисунок 5.9 - Біфуркаційна діаграма системи при $G = 1$, $\delta = 0,9$, $A = 22$ (крива 1), $A = 25$ (крива 2)

В області нижче пунктирної лінії (наприклад, 1) стаціонарний стан системи визначається однією особливою точкою S_0 , розміщеною на лінії $y = 0$ (рис. 5.10а). При збільшенні величини b (перетині пунктирної лінії) в системі відбувається біфуркація народження двох особливих точок S та C (рис. 5.10б), які в області між пунктирною та суцільною лініями є відповідно сідлом та нестійким фокусом. Якісна зміна поведінки системи в околі точки C відбувається при подальшому збільшенні b , а саме при перетині суцільної лінії (рис.5.10в). При потраплянні в область за суцільною лінією точка C стає стійким фокусом (рис.5.10 г). Збільшений масштаб фазового портрета в околі точки C (рис. 5.2в), наведено на рис. 5.11.

Таким чином, суцільна лінія (рис.5.9) відповідає біфуркації втрати стійкості точки C . Оскільки суцільна лінія одержана за умови нульового значення відповідного показника Ляпунова та від'ємності показника Флокке, то біфуркація втрати стійкості вузлової точки є біфуркацією Хопфа. З одержаних результатів випливає, що у системі реалізується два типи біфуркації. Перший з них характеризує виникнення двох додаткових стаціонарних станів, а другий пов'язаний із втратою стійкості фокуса. При збільшенні параметра накачки A змінюється лише положення цих точок та збільшується критичне значення параметрів біфуркацій.

а

б

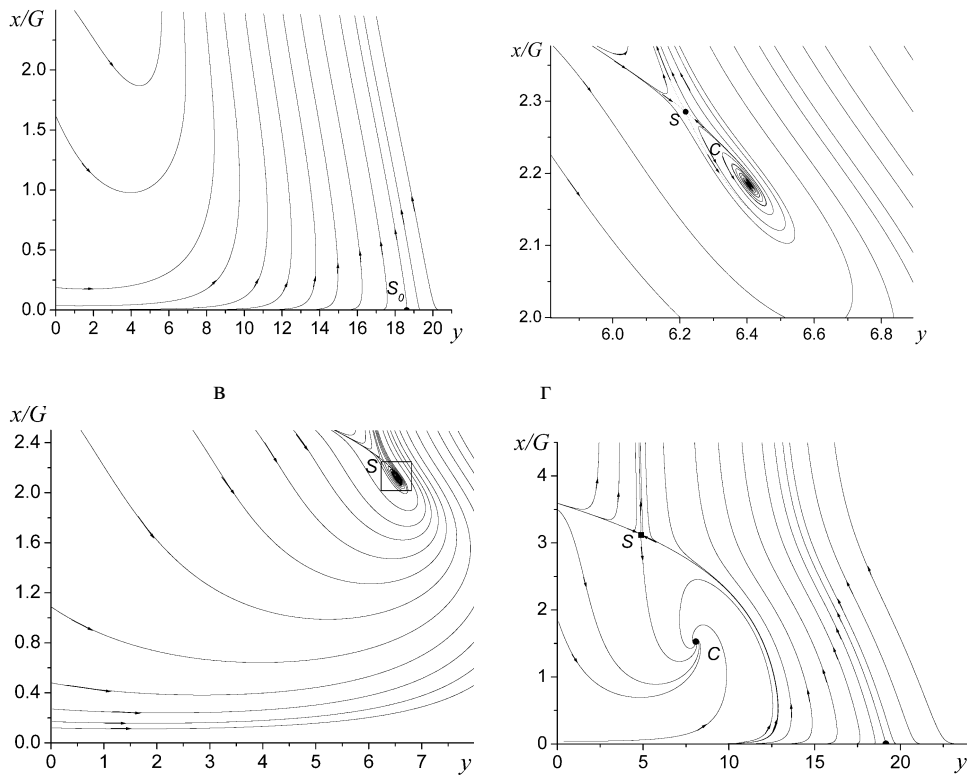


Рисунок 5.10 - Фазові портрети твердотільного лазера з кубічним модулятором добротності: а) поведінка системи в області 1 (рис. 5.1); б) поведінка системи в області між суцільною та пунктирною лінією; в) поведінка системи на суцільній лінії; г) поведінка системи за суцільною лінією

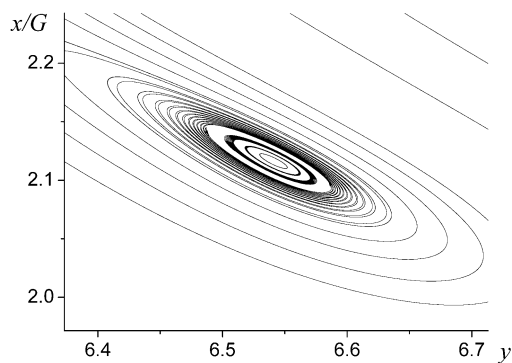


Рисунок 5.11 - Фазовий портрет в околі точки C на рис. 5.2в

Детальний біфуркаційний аналіз системи (5.22) проведено в роботі [49], що дозволило з'ясувати умови виникнення біфуркації Хопфа, дослідити стійкість періодичних коливань та побудувати періодичний розв'язок динамічної системи. Наведемо основні результати роботи [49].

Аналітичне дослідження системи (5.22) проводиться в околі нетривіального стаціонарного розв'язку, який знаходиться з рівнянь

$$A\delta - x_c\delta - 1 - (ax_c^3 + bx_c)(x_c\delta + 1) = 0, \quad (5.23)$$

$$y_c = A(x_c\delta + 1)^{-1}.$$

Власні значення матриці Якобі правих частин системи (5.22) мають вигляд

$$\begin{aligned} 2\lambda_j &= \text{Spur}M \pm \left[(\text{Spur}M)^2 - 4 \det M \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \text{Spur}M &= -G(3ax_c^2 + b)x_c - \alpha, \\ \det M &= G \left[x_c y_c \delta^2 + \alpha x_c (3ax_c^2 + b) \right]. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Згідно з теоремою Хопфа в системі (5.22) виникають періодичні коливання, якщо власні значення матриці Якобі є суто уявними. В першому випадку як біфуркаційний розглядається параметр a , біфуркаційне значення якого знаходиться з рівняння

$$\text{Spur}M = -G(3ax_c^2 + b)x_c - \alpha = 0. \quad (5.25)$$

Для біфуркаційного значення параметра $a_0 = \frac{\alpha - A\delta}{2\alpha x_c^3}$ знайдено власні значення

$$\lambda = \pm i\omega_0, \quad \omega_0 = \left(\frac{Gx_c \delta^2 A}{\alpha} - \alpha^2 \right)^{1/2} \approx \delta \sqrt{\frac{GAx_c}{\alpha}},$$

які насправді є суто уявними, ω_0 є першим наближенням до невідомої частоти модуляції ω . Перевірка умови трансверсальності приводить до результату $\lambda'_0 \equiv \frac{\partial \text{Re} \lambda}{\partial a} = -\frac{3}{2} Gx_c^3 \neq 0$. Отже, виконуються всі умови теореми Хопфа, звідки випливає, що в системі існують періодичні коливання за умови їх стійкості.

ЗАСТОСУВАННЯ АЛГОРИТМУ БІФУРКАЦІЇ НАРОДЖЕННЯ ЦИКЛУ.

В рамках виконання алгоритму біфуркації народження циклу в системі (5.22) відбувається заміна змінних

$$x = x_c + z_1, \quad y = y_c - \frac{1}{Gx_c \delta} (\alpha z_1 + \omega_0 z_2),$$

у результаті система набирає вигляду

$$\dot{z} = P^{-1} \begin{pmatrix} f_1(z_1, z_2) \\ f_2(z_1, z_2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Для застосування алгоритму біфуркації народження циклу в правих частинах системи (5.26) достатньо залишити квадратичні і кубічні доданки по сукупності змінних z_1, z_2 . Лінійна частина системи враховується автоматично при побудові розв'язку, а доданками, порядок яких вище третього, нехтують, оскільки передбачається малість відхилення фазових координат від стаціонарних значень x_c, y_c . При таких обмеженнях урізані праві частини системи (5.26), які позначаються через \bar{F}_1, \bar{F}_2 , мають вигляд

$$\begin{aligned}\bar{F}_1 &= -Dz_1^2 - \frac{\omega_0}{x_c} z_1 z_2 - 4Gax_c z_1^3, \\ \bar{F}_2 &= \frac{\alpha}{\omega_0} (D - \delta) z_1^2 + \frac{z_1 z_2}{x_c} + G \frac{4a\alpha x_c}{\omega_0} z_1^3, \\ D &= \frac{\alpha}{x_c} + D_0, \quad D_0 = G(6ax_c^2 + b).\end{aligned}$$

З частинних похідних другого і третього порядку функцій \bar{F}_1, \bar{F}_2 , обрахованих у початку координат, за формулами (3.3) знаходяться комплекси g_{ij} :

$$\begin{aligned}g_{11} &= \frac{1}{2} \left(-D + i \frac{\alpha}{\omega_0} (D - \delta) \right), \\ \begin{pmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left[-D \mp \frac{1}{x_c} + i \left(\frac{\alpha}{\omega_0} (D - \delta) \mp \frac{\omega_0}{x_c} \right) \right], \\ g_{21} &= 3Gx_c a \left(-1 + \frac{\alpha i}{\omega_0} \right),\end{aligned}$$

з яких утворюється величина Φ (3.4). Дійсна частина Φ , що визначає знак показника Флокке, має вигляд

$$\operatorname{Re} \Phi = \frac{1}{8\omega_0} \left[\frac{2\alpha D(D - \delta)}{\omega_0} + \frac{D\omega_0}{x_c} - \frac{\alpha}{\omega_0 x_c} (D - \delta) \right] - \frac{3}{2} Gx_c a. \quad (5.27)$$

При цьому передбачається, що x_c достатньо віддалене від нуля, досить вважати, що $x_c > 0,1$.

Урахування порядку параметра G та значень $\varphi \equiv 6ax_c^2 + b = \frac{3(\alpha - A\delta)}{2\alpha x_c}$,

$\omega_0^2 = \frac{Gx_c \delta^2 A}{\alpha}$ дозволяє звести вираз (5.27) до вигляду

$$\operatorname{Re} \Phi_0 = \frac{9}{8} G \left(\frac{\alpha - A\delta}{2x_c^2} \right) \left(\frac{\alpha(\alpha - A\delta) - x_c \delta^2 A}{Ax_c \delta^2 \alpha} \right).$$

З вимоги від'ємності останнього виразу впливає критерій стійкості періодичної генерації

$$K_1 = (\alpha - A\delta)(\alpha(\alpha - A\delta) - A\delta^2 x_c) < 0, \quad (5.28)$$

який зводиться до інтервалів стійкості для стаціонарного розв'язку та параметра накачки

$$A - \frac{1}{\delta} < x_c < \frac{1}{\delta} \left(H + \sqrt{H^2 + H} \right), \quad H \equiv A\delta - 1, \quad (5.29)$$

$$\frac{\alpha^2}{\delta(2x_c\delta + 1)} < A < \frac{\alpha}{\delta}. \quad (5.30)$$

Наприклад, для неодимового резонатора ($A = 2$) у випадку $\delta = 0,9$ інтервал стійкості для x_c приймає значення 0,888 - 2,222.

Виконаний аналіз дозволяє здійснити зворотний хід: вибираючи наперед значення x_c , можна встановити межі зміни параметра накачки і знайти значення параметрів керування a і b для забезпечення стійкості періодичного розв'язку.

Для з'ясування впливу відносної відстройки на довжину інтервалу стійкості стаціонарної генерації знаходиться відношення приросту інтервалу до довжини інтервалу, що відповідає відсутності відстройки $\Delta^2 = 0$, тобто $\delta = 1$. Тоді

$$\frac{\Delta_\delta - \Delta_1}{\Delta_1} = \frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{A\delta(A\delta - 1)}}{\sqrt{A(A-1)}} - 1 = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{\delta^2 \left(A - \frac{1}{\delta}\right)}{A-1}} - 1 < 0,$$

звідки, $\Delta_\delta < \Delta_1$, тобто відносна відстройка звужує інтервал стійкості для x_c . Питання про вплив параметра δ на інтервал для параметра накачки A з'ясується через знаходження різниці інтервалів:

$$\Delta A(\delta) - \Delta A(1) = \frac{x_c^2(1 - \delta)}{(2x_c + 1)(2x_c\delta + 1)}.$$

Оскільки $\delta < 1$, тоді $\Delta A(\delta) > \Delta A(1)$, тобто відносна відстройка розширює інтервал стійкості для параметра накачки A . Аналіз залежності (5.30) показує, що приріст інтервалу стійкості сповільнюється в міру зростання x_c .

ВИБІР ІНШИХ ЗВ'ЯЗАНИХ ПАРАМЕТРІВ.

Система рівнянь (5.22) містить шість параметрів, на два з яких G і δ накладено обмеження. Інші чотири A, a, b, x_c не мають певного обмеження своїх величин. При біфуркаційному аналізі на них накладаються два зв'язки у вигляді рівнянь (5.23) і (5.25), звідки можна вилучити будь-яку пару параметрів, які доцільно назвати зв'язаними. Як відмічено в [10], практично кожний параметр можна розглядати як біфуркаційний, а також певною мірою, як параметр керування динамікою лазера. У той самий час практика застосування алгоритму біфуркації народження циклу показує, що перехід від одного біфуркаційного параметра до іншого може мати важливі наслідки для з'ясування особливостей динаміки лазерів у періодичному режимі генерації.

При виборі як зв'язаних параметрів a і x_c з рівняння (5.25) знаходиться біфуркаційне значення параметра a : $a_0 = -\frac{b}{3x_c^2}$. Підставлення знайденого значення

дозволяє звести перше рівняння (5.23) до квадратного відносно x_c , звідки

$$x_c = \frac{1}{4b\delta} \left\{ -(2b + 3\delta) \pm \left[(2b + 3\delta)^2 + 24b\delta(A\delta - 1) \right]^{1/2} \right\}.$$

У цьому випадку $\varphi \equiv 6ax_c^2 + b = -b$, показник Флокке набирає вигляду

$$\operatorname{Re} \Phi_0 = \frac{Gb}{8A\delta^2 x_c} \cdot (2\alpha^2 b + 3A\delta^2).$$

З вимоги від'ємності показника Флокке випливає критерій стійкості: $-\frac{3A\delta^2}{2\alpha^2} < b < 0$. Враховуючи що b від'ємне, а стаціонарний розв'язок x_c повинен набувати додатних значень, отримаємо $b < -\frac{3\delta}{2} \left[(2A\delta - 1) + 2\sqrt{A\delta(A\delta - 1)} \right]$. Однак знайдені значення b не належать одержаному інтервалу стійкості для параметра керування b . Отже, при виборі в якості зв'язаних параметрів a і x_c не існує стійких періодичних коливань. Це не означає, що визначений випадок не становить інтересу для дослідження, адже нестійкість періодичного розв'язку може викликати повторну біфуркацію, що неодноразово підтверджувалось в експериментах [10].

При виборі як зв'язаних параметрів b і x_c з рівняння (5.25) знаходиться біфуркаційне значення параметра b : $b_0 = -3ax_c^2$, його Підставлення в перше рівняння (5.23) дозволяє отримати залежність $\alpha(2ax_c^3 - 1) + A\delta = 0$. Необхідною умовою існування додатного кореня є виконання нерівності $a < (2x_c^3)^{-1}$. З вимоги додатності параметра a випливає $\alpha > A\delta$, тобто допустимий зв'язок можливий при малих значеннях параметрів A і a . Враховуючи що $b_0 = -3ax_c^2$, маємо $\varphi = 3ax_c^2$, тоді показник Флокке з використанням ω_0^2 записується так:

$$\operatorname{Re} \Phi_0 = \frac{9aGx_c}{8A\delta^2} \cdot (2\alpha^2 ax_c^2 - A\delta^2),$$

звідки $0 < a < \frac{A\delta^2}{2(x_c\delta + 1)^2 x_c^2}$. Оскільки $\delta^2 \alpha^{-2} - (x_c + 1)^{-2} < 0$, то наявність відстройки Δ^2 звужує інтервал стійкості для параметра керування a .

Наступна пара поєднує параметри A і b . Останній знаходиться з рівняння (5.23): $b = \frac{\psi(a)}{\alpha x_c}$, підставлення якого в рівняння (5.25) дозволяє знайти біфуркаційне значення параметра накачки $A_0 = \frac{\alpha(1 - 2ax_c^3)}{\delta}$, за умови виконання нерівності $1 - 2ax_c^3 > 0$. У цьому випадку $\varphi = 3ax_c^2$, $\omega_0^2 = Gx_c\delta(1 - 2ax_c^3)$, показник Флокке має вигляд

$$\operatorname{Re} \Phi_0 = \frac{9aGx_c}{8\delta(1 - 2ax_c^3)} (2ax_c^2\alpha + 2ax_c^3\delta - \delta),$$

що дозволяє знайти інтервал стійкості для параметра a : $0 < a < \frac{\delta}{2x_c^2(2\delta x_c + 1)}$.

Аналіз знайденого інтервалу показує, що параметр Δ^2 звужує інтервал стійкості і в цьому випадку. Накладені обмеження на параметри A , x_c , a залишають для них

досить вузькі інтервали змінювання, що відповідає низькому рівню потужності генерації випромінювання.

У випадку зв'язаних параметрів A і a отримано: $A_0 = \frac{\alpha(3+2bx_c)}{3\delta}$,
 $a = \frac{A_0\delta - \alpha - \alpha bx_c}{\alpha x_c^3}$, $\varphi = -b$, $\omega_0^2 = \frac{1}{3}Gx_c\delta(3+2bx_c)$. Показник Флокке записується так:

$$\operatorname{Re}\Phi_0 = \frac{3Gb}{8x_c\delta(3+2bx_c)}[2b(\alpha+x_c\delta)+3\delta].$$

Для додатних b стійкого циклу не існує, а для від'ємних значень знайдено $-\frac{3\delta}{2(\alpha+x_c\delta)} < b < 0$. Як і в попередніх випадках, наявність відстройки зменшує інтервал стійкості.

У випадку пари (A, x_c) отримаємо

$$A_0 = \left(\alpha + \frac{2}{3}b\alpha x_c\right)\delta^{-1}, \quad x_c = \sqrt{\frac{-b}{3a}}, \quad \varphi = -b, \quad \omega_0^2 = G\delta\left(x_c - \frac{2}{9}\frac{b^2}{a}\right),$$

тоді

$$\operatorname{Re}\Phi_0 = \frac{3Gb}{8x_c\delta(3+2bx_c)}[2b(\alpha+x_c\delta)+3\delta].$$

Аналіз проводиться аналогічно до попереднього випадку.

Проведений біфуркаційний аналіз виявив існування інтервалів стійкості режиму періодичної генерації випромінювання, що обґрунтовує доцільність побудови елементів розв'язку та вивчення їх особливостей. Аналізуючи інтервали стійкості для різних пар зв'язаних параметрів доходимо висновку, що у випадку пари зв'язаних параметрів (a, b) умова стійкості (5.29) дозволяє охопити весь інтервал значень параметра накачки, що буває на практиці, і вибрати відповідні значення x_c для забезпечення стійкості режиму періодичної генерації випромінювання. Інші умови стійкості, в яких більшість параметрів обмежена вузьким інтервалом допустимих значень, не дають такої можливості.

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ.

Для побудови періодичного розв'язку за формулами (3.4) – (3.7) знаходяться його елементи. Зокрема, для знаходження періоду коливачь використовується величина $\operatorname{Im}\Phi$, яка з урахуванням порядку параметра G набирає вигляду

$$\operatorname{Im}\Phi = -\frac{G}{24\omega_0 x_c} \left[4G\varphi^2 x_c + \frac{10\alpha^3 \varphi^2}{A\delta^2} + \frac{A\delta^2}{\alpha} + \varphi(5+9\alpha) \right] + \frac{3G\alpha x_c a}{2\omega_0}, \quad \varphi = 6\alpha x_c^2 + b.$$

Вираз записано безвідносно до того, який параметр взято як біфуркаційний. Для біфуркаційного значення параметра a знаходимо

$$\lambda_0' = -\frac{3Gx_c^3}{2}, \quad \omega_0' = \frac{3G\alpha x_c^3}{2\omega_0}, \quad \frac{\omega_0' \operatorname{Re}\Phi_0}{\lambda_0'} = -\frac{9}{16} \cdot \frac{G(\alpha - A\delta)}{A\delta^2 x_c^3 \omega_0} (\alpha(\alpha - A\delta) - A\delta^2 x_c).$$

Враховуючи, що останній вираз має порядок $O(\sqrt{G})$, а вираз $\operatorname{Im}\Phi$ має порядок $O(G^{3/2})$, період коливань можна записати так:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{G^2 \varphi^2 \varepsilon^2}{6\omega_0} + \varepsilon^2 \tau_1 \right),$$

де τ_1 містить доданки виразу $\operatorname{Im}\Phi$ пропорційні G .

Малий функціональний параметр ε – амплітуда модуляції набуває значення

$$\varepsilon^2 = \frac{8(a_0 - a)A\alpha x_c^6 \delta^2}{3(\alpha - A\delta)(\alpha(A - \alpha\delta) - A\delta^2 x_c)},$$

аналіз якого показує, що для забезпечення додатності ε^2 необхідно вимагати виконання нерівності $a_0 > a$, тобто реалізується докритична біфуркація.

Відокремлення дійсної та уявної частин у формулі (3.8), використання значень g_{ij} дозволяє знайти розв'язок системи (5.22) в квадратичному наближенні:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P \left\{ \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{G\varepsilon^2}{6\omega_0} \begin{bmatrix} -2 \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{bmatrix} \varphi + \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ 2 \sin 2\theta \end{pmatrix} \frac{\alpha\varphi}{\omega_0} + \right. \\ &\left. + \begin{pmatrix} 2 \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} \frac{A\delta^2}{\alpha\omega_0} - 3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \varphi \right\} + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5.31)$$

де P – матриця перетворення,

φ, ε визначаються парою зв'язаних параметрів.

Аналіз розв'язку. Розв'язок (5.31) у лінійному наближенні має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta x &\equiv x - x_c = \varepsilon \cos \theta, \\ \Delta y &\equiv y - y_c = -\frac{\varepsilon}{Gx_c\delta} (\alpha \cos \theta + \omega_0 \sin \theta). \end{aligned}$$

Таким чином, Δx змінюється за законом косинусоїди з амплітудою

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(\frac{8}{3} A x_c^6 (a_0 - a) Q \right)^{1/2}, \\ Q &= \delta^2 \alpha (-K_1)^{-1}, \quad a_0 = (\alpha - A\delta) (2\alpha x_c^3)^{-1}, \quad \alpha - A\delta > 0. \end{aligned}$$

Аналогічно можна представити закон змінювання величини Δy :

$$\Delta y = -E \cos(\theta - \theta_0), \quad E = \frac{\varepsilon \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}}{Gx_c \delta},$$

де початкова фаза $\theta_0 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\alpha}$.

Шляхом виключення параметра θ з лінійного розв'язку одержуємо криву

$$\frac{(x-x_c)^2}{a_1^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b_1^2} = 1 + \frac{2\alpha(x-x_c)(\varepsilon^2 - (x-x_c)^2)^{1/2}}{\omega_0 \varepsilon^2}, \quad (5.32)$$

$$a_1^2 = \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad b_1^2 = \frac{\varepsilon^2 \omega_0^2}{(Gx_c \delta)^2},$$

яка існує, якщо $\varepsilon > (x-x_c)$, тому $\frac{x-x_c}{\varepsilon} < 1$, $\varepsilon^{-1}(\varepsilon^2 - (x-x_c)^2)^{1/2} < 1$. З урахування порядку ω_0 доходимо до висновку, що другий доданок у правій частині (5.32) є малою величиною, отже, в першому наближенні рух фазової точки відбувається по кривій, близькій до еліпса з центром у точці (x_c, y_c) і півосями a_1, b_1 .

Одержаний розв'язок можна використати для знаходження деяких інтегральних характеристик режиму періодичного випромінювання до яких належить, зокрема, середня інтенсивність випромінювання за період T , яку сприймає модулятор добротності. Середня інтенсивність визначається таким чином:

$$I = \frac{G}{T} \int_0^T x(t) (ax^3(t) + bx(t)) dt,$$

де $x(t)$ - фазова координата, яка знаходиться з (5.31):

$$x(t) = N_0 + \varepsilon \cos \theta + \frac{G\varepsilon^2}{6\omega_0} N_1(t),$$

$$N_0 = x_c - \frac{G\alpha\varphi}{2\omega_0^2} \varepsilon^2, \quad N_1(t) = -2\varphi \sin 2\theta + W \cos 2\theta, \quad W = \frac{1}{\omega_0} \left(\alpha\varphi + \frac{A\delta^2}{\alpha} \right).$$

У виразах для визначення x^2, x^4 доцільно залишити лише доданки з парними степенями тригонометричних функцій, оскільки саме вони роблять внесок у значення інтеграла, тоді

$$\overline{x^2(t)} = N_0^2 + \varepsilon^2 \cos^2 2\theta + \frac{G^2 \varepsilon^4}{36\omega_0^2} (4\varphi^2 \sin 4\theta + W^2 \cos^2 4\theta),$$

$$\overline{x^4(t)} = N_0^4 + \varepsilon^4 \sin^4 4\theta + 24\varphi^2 \sin^2 4\theta \cos^2 4\theta \cdot W^2 + W^4 \cos^4 4\theta.$$

Використання інтегралів

$$\int_0^T \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \cos^4 \frac{4\pi t}{T} dt = \int_0^T \sin^4 \frac{4\pi t}{T} dt = \frac{3T}{8}, \quad \int_0^T \sin^2 \frac{4\pi t}{T} \cos^2 \frac{4\pi t}{T} dt = \frac{T}{8}$$

приводить до результату

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T (ax^4(t) + bx^2(t)) dt = (aN_0^2 + b)N_0^2 + \left(\frac{3a\varepsilon^2}{4} + b\right) \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{G^2 \varepsilon^4}{36\omega_0^2} \left[\frac{G^2 \varepsilon^4 a}{12\omega_0^2} \left(2\varphi^4 + \frac{W^4}{8}\right) + \left(2\varphi^2 + \frac{W^2}{2}\right) b \right] + a \frac{G^4 \varepsilon^8 \varphi^2 W^2}{432\omega_0^4}.$$

Аналіз одержаного результату показує, що модуляція приводить до збільшення потужності, яка виділяється на модуляторі, що може мати практичне застосування. Оскільки $\varepsilon^2(\delta) < \varepsilon^2(\delta = 1)$, то виділення енергії дещо зменшується при $\delta < 1$.

Вплив параметра Δ^2 на елементи періодичного розв'язку вивчено в роботі [49], де встановлено, що врахування відносної відстройки Δ^2 частоти поля від центра спектральної лінії приводить до зменшення амплітуди інтенсивності випромінювання ε , інверсії E , частоти модуляції ω_0^2 , збільшує період коливань T , звужує інтервал стійкості для стаціонарної інтенсивності поля фотонів.

Таким чином, у результаті чисельного дослідження лазерної нелінійної системи встановлена наявність біфуркації Хопфа в баланській моделі твердотільного лазера з кубічним модулятором добротності. В результаті проведення біфуркаційного аналізу одержано аналітичні розв'язки для інтенсивності випромінювання та інверсної заселеності рівнів, з'ясовано вплив відносної відстройки частоти поля від центра спектральної лінії на елементи граничних циклів. У рамках проведення біфуркаційного аналізу виявлено, що перехід від одного біфуркаційного параметра до іншого може мати важливі наслідки для вивчення динаміки лазера, серед яких - зміна області стійкості граничного циклу, розширення чи звуження інтервалу стійкості для окремого параметра, збільшення чи зменшення періоду та амплітуди коливань.

5.3 АВТОКОЛИВАННЯ В ТВЕРДОТІЛЬНОМУ ЛАЗЕРІ З БЕЗІНЕРЦІЙНИМ ФІЛЬТРОМ

Відомо, що динаміка лазера збагачується при внесенні в резонатор додаткового елемента, внаслідок чого змінюється підсилення або втрати в системі та виникає автомодуляція параметрів. Як зазначений елемент може використовуватися фільтр, що просвітлюється – комірка з речовиною, поглинання якої зменшується під впливом генерованого випромінювання. Нелінійний фільтр розміщується всередині резонатора, що приводить до зниження стійкості стаціонарної генерації, а при достатньо високій густині молекул поглинаючого середовища – до виникнення незгасаючих пульсацій. Як вже відмічалось, саме нелінійність середовищ, які заповнюють резонатор лазера, в деяких випадках має більш істотний вплив на динаміку, ніж нестационарність параметрів.

5.3.1 АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛІ ЛАЗЕРА З БЕЗІНЕРЦІЙНИМ ФІЛЬТРОМ

Огляд літератури свідчить, що динаміка лазера з фільтром є об'єктом дослідження багатьох робіт. Значна увага приділяється аналізу динаміки моделі (1.6), що враховує безінерційність фільтра, в роботі [8], де підкреслюється, що у зазначеній динамічній системі можуть виникнути автоколивання, яким на фазовій площині відповідають замкнені траєкторії – граничні цикли. Автори вводять нову змінну:

$$\eta = y - 1 - \beta(1 + \gamma x)^{-1},$$

після чого система (1.6) набирає вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx\eta, \\ \dot{\eta} = \varphi(x) + \eta\psi(x), \end{cases}$$

де $\varphi(x) = d + \frac{\beta(\gamma-1)x}{1+\gamma} - x$, $\psi(x) = \frac{G\beta\gamma x}{(1+\gamma)^2} - 1 - x$, $d = A - 1 - \beta$.

За допомогою ділення другого рівняння системи на перше отримано рівняння для знаходження фазових траєкторій $\frac{d\eta}{dx} = \frac{\varphi(x)}{Gx\eta} + \frac{\psi(x)}{Gx}$, яке не інтегрується в квадратурах, тому у [8] використовуються якісні методи дослідження можливих фазових траєкторій. Проведено аналіз власних значень характеристичного рівняння, знайдено умову виникнення періодичних коливань, показано, що вся параметрична площина у змінних β, d поділяється на дев'ять областей, в чотирьох з яких існують стійкі граничні цикли. Однак способу побудови граничного циклу в аналітичному вигляді автори не запропонували, хоча таку необхідність вони визнають.

У даній роботі вивчається модель лазера з безінерційним фільтром і нелінійним елементом (1.7), яка отримана з моделі (1.5) за допомогою адиабатичного виключення змінних. Метою дослідження є з'ясування умов виникнення біфуркації Хопфа, визначення біфуркаційних значень параметрів β і g , знаходження критерію стійкості періодичної генерації та інтервалів стійкості для деяких параметрів, побудова періодичного розв'язку системи.

Перед проведенням біфуркаційного аналізу системи (1.7) зупинимося на порівнянні моделі з іншими моделями лазерів. Розглянемо модель (1.7) у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Gx \left(y - 1 - \frac{\beta}{1+\gamma} - gx \right), \\ \dot{y} &= A - y(x+1), \\ z &= \frac{\beta}{1+\gamma}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

де доданок $\frac{\beta}{1+\gamma}$ визначає частину втрат інтенсивності випромінювання в резонаторі, що виникає через поглинання в фільтрі. З іншої точки зору, саме варіація параметрів β і γ обумовлює зміну поглинання. За наявності в моделі (1.7) біфуркації Хопфа, виникає можливість побудувати періодичний розв'язок, який описує режим автоколивань. У свою чергу, маючи періодичний розв'язок, зокрема закон змінювання густини інтенсивності x , можна одержати періодичну залежність від часу третьої фазової координати, тобто ненасиченого поглинання в фільтрі.

Зазначимо, що два перших рівняння системи (5.33) з точністю до позначень збігаються з моделлю Статца-Демарса з дробово-раціональним модулятором добротності та квадратичним навантаженням (1.2). Але ця схожість лише зовні, бо

зміст доданка $\frac{b}{1+\rho x}$ інший, оскільки застосована апроксимація дробово-

раціональною функцією: $\frac{\omega T}{Q(x)} = 1 + \frac{b}{\rho x + 1}$, де ω – частота генерації; T – час життя

фотона в резонаторі; $Q(x)$ – добротність резонатора. Отже, у моделі (1.2) параметри керування b і ρ описують тип гіперболічної залежності модулятора добротності від інтенсивності випромінювання. Підкреслимо, що у випадку $b = r = 0$ отримаємо

класичну модель Статца-Демарса, в якій не існують граничні цикли. У той самий час параметр β (модель 5.33) не може набувати нульового

значення, оскільки це означало б, що ненасичений коефіцієнт поглинання з самого початку роботи лазера з фільтром є нульовим, а насправді на початку роботи він набуває найбільшого значення. Таким чином, зазначені моделі описують зовсім різні лазери, а отже, існує істотна різниця отриманих результатів. З іншого боку, біфуркаційний аналіз зазначених систем також суттєво відрізняється, оскільки при дослідженні моделі (1.2) стаціонарне значення інтенсивності визначається безпосередньо з рівняння для стаціонарного розв'язку, а при проведенні аналізу системи (5.33) стаціонарний розв'язок x_c віднесено до параметрів, що забезпечує відмінність отриманих аналітичних залежностей. Підкреслимо, що біфуркаційний аналіз моделі лазера з безінерційним фільтром проводиться для інших біфуркаційних параметрів, ніж у випадку моделі (1.2). Все сказане дає змогу зробити висновок, що результати досліджень істотно відрізняються, а з математичної точки зору отримані аналітичні залежності доповнюють результати біфуркаційного аналізу моделі, проведеного у [40].

У цій роботі чисельними методами отримана біфуркаційна діаграма при $G=1$, $b=A-1$, на підставі аналізу якої отримано стійкий граничний цикл, який має місце при $A=13,6$, $\gamma=1,3$, $g=2$. Зазначений граничний цикл, що відповідає режиму модуляції вихідного сигналу, представлено в різних масштабах на рис.5.12.

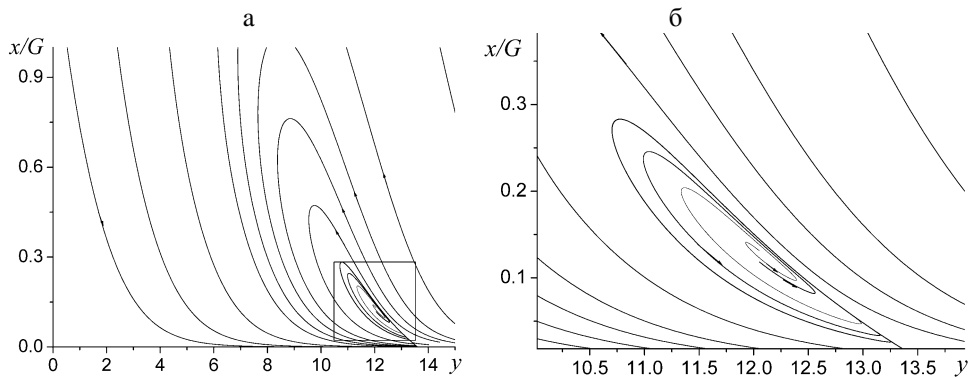


Рисунок 5.12 - Граничний цикл у моделі лазера з безінерційним фільтром (на рис. 5.12 б подано збільшений масштаб граничного циклу)

5.3.2 БІФУРКАЦІЯ ХОПФА В МОДЕЛІ ЛАЗЕРА З БЕЗІНЕРЦІЙНИМ ФІЛЬТРОМ ТА НЕЛІНІЙНИМ ЕЛЕМЕНТОМ

Результати біфуркаційного аналізу моделі лазера з безінерційним фільтром та нелінійним елементом наведені в роботі [50], де встановлено, що внесення в резонатор лазера з фільтром квадратично-нелінійного елемента викликає стійку амплітудну модуляцію випромінювання при біфуркаційному значенні параметрів β і γ . Наведемо основні результати зазначеної роботи.

Система (1.7) вивчається в околі стаціонарного розв'язку, який визначається рівняннями

$$\alpha x_c (\gamma + g + \gamma g x_c) + (\beta + 1) \alpha - A(\gamma x_c + 1) = 0, \quad (5.34)$$

$$y_c = A \alpha^{-1}, \quad \alpha = x_c + 1.$$

Матриця Якобі M правих частин системи, обчислена у стаціонарному розв'язку x_c, y_c , має вигляд

$$M = \begin{pmatrix} Gx_c \left(\frac{\beta\gamma}{K^2} - g \right) & Gx_c \\ -A\alpha^{-1} & -\alpha \end{pmatrix}, \quad K = \gamma x_c + 1. \quad (5.35)$$

Її власні значення

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(\text{Spur}M \pm \sqrt{(\text{Spur}M)^2 - 4 \det M} \right), \quad (5.36)$$

$$\text{Spur}M = Gx_c \left(\frac{\beta\gamma}{K^2} - g \right) - \alpha, \quad \det M = Gx_c \left[\frac{A}{\alpha} - \alpha \left(\frac{\beta\gamma}{K^2} - g \right) \right]$$

розглядаються в околі тих значень параметрів, що перетворюють стаціонарний розв'язок у стійкий фокус, тобто при виконанні нерівностей: $\text{Spur}M < 0$,

$(\text{Spur}M)^2 - 4 \det M < 0$, $\det M > 0$. Необхідною умовою виникнення біфуркації Хопфа є обертання в нуль дійсної частини власних значень:

$$Gx_c \left(\frac{\beta\gamma}{K^2} - g \right) - \alpha = 0. \quad (5.37)$$

Внаслідок цього матриця Якобі (5.35) набуває вигляду

$$M_0 = \begin{pmatrix} \alpha & Gx_c \\ -A\alpha^{-1} & -\alpha \end{pmatrix},$$

а її власні значення стають суто уявними: $\lambda = \pm i\omega_0$, де ω_0 – перше наближення до невідомої частоти модуляції випромінювання ω . За визначених умов стаціонарний розв'язок втрачає стійкість, в системі (1.7) виникають періодичні коливання навколо

стаціонарного розв'язку з частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{GAx_c}{\alpha}}$.

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ АВТОКОЛИВАНЬ.

Періодичні коливання, які можуть виникнути в системі внаслідок набуття одним із параметрів β або γ біфуркаційного значення, існуватимуть лише за наявності області їх стійкості, яка визначається множиною значень параметрів системи. Згідно з алгоритмом біфуркації народження циклу, в роботі [50] досліджено стійкість періодичної модуляції, знайдено критерій стійкості періодичних коливань, який з урахуванням порядку параметра G зводиться до вигляду

$$\text{Re} \Phi = \frac{G}{8Ax_c} (2A_1^2 \alpha^2 + A_1 A - 3AD_1 x_c) < 0, \quad (5.38)$$

$$\text{де } A_1 = g - \frac{\beta\gamma}{(\gamma x_c + 1)^3}, \quad D_1 = \frac{\gamma^2 \beta}{(\gamma x_c + 1)^4}.$$

З урахуванням залежності (5.38) одержуються інтервали стійкості для параметра накачки. У випадку біфуркаційного параметра β_0 :

$$1 < A < \frac{2\alpha^2\gamma^2x_c}{2\alpha\gamma^2x_c - (\gamma x_c + 1)^2(2 - \gamma x_c)},$$

у випадку біфуркаційного параметра g_0 :

$$1 < A < \frac{2\alpha^2\gamma^2x_c}{2\alpha\gamma^2x_c - (2\gamma x_c + 1)(2 - \gamma x_c)}.$$

Показано, що залежно від вибору значень x_c і γ існує достатньо широкий інтервал значень параметра накачки.

У результаті біфуркаційного аналізу системи (1.7) знайдено аналітичні залежності для елементів граничного циклу, запропоновано методику їх розрахунку, а також побудовано періодичний розв'язок динамічної системи

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P\bar{z}, \quad \bar{z} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon^2 G}{6\omega_0} \left[\begin{pmatrix} -2 \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{pmatrix} A_1 + \frac{\alpha A_1}{\omega_0} \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ 2 \sin 2\theta \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0}{Gx_c} \begin{pmatrix} 2 \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix} - 3A_1 \begin{pmatrix} -\alpha \\ \omega_0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (5.39)$$

де P – матриця перетворення системи (1.7), $\theta = \frac{2\pi}{T}$.

Уявлення про криву граничного циклу можна отримати, якщо розглянути перше наближення розв'язку за малим параметром ε (5.39):

$$\begin{aligned} x - x_c &= \varepsilon \cos 2\theta, \\ y - y_c &= -\frac{\varepsilon}{Gx_c} (\alpha \cos \theta + \omega_0 \sin \theta) = -\frac{\varepsilon N \cos(\theta - \varphi)}{Gx_c}, \quad (5.40) \\ \varphi &= \arctg \frac{\omega_0}{\alpha}, \quad N = \sqrt{\alpha^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Після вилучення параметра θ з залежностей (5.40) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{d^2} &= 1 + \Delta, \\ \Delta &= \frac{2\alpha\omega_0(x - x_c)\sqrt{\varepsilon^2 - (x - x_c)^2}}{(\omega_0\varepsilon)^2}, \quad a = \frac{\omega_0\varepsilon}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}}, \quad d = \frac{\omega_0\varepsilon}{Gx_c}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Аналіз виразу (5.41) показує, що граничний цикл у першому наближенні описується еліпсом з півосями a, d та центром у стаціонарному розв'язку x_c, y_c .

На підставі даних, отриманих у результаті біфуркаційного аналізу [50], знаходиться густина інтенсивності випромінювання фотонів, яка з урахуванням (5.39) набирає вигляду:

$$x = x_c + \varepsilon \cos \theta + \frac{\varepsilon^2 G}{6\omega_0} \left[A_1 \left(-2 \sin 2\theta + \frac{\alpha}{\omega_0} \cos 2\theta + \frac{3\alpha}{\omega_0} \right) + \frac{2\omega_0}{Gx_c} \cos 2\theta \right] + O(\varepsilon^3).$$

Тоді для ненасиченого поглинання фільтра $z = \frac{\beta}{1 + \gamma x}$ у випадку біфуркаційного

параметра β_0 отримаємо $z = \frac{A - \alpha}{\alpha(\gamma x + 1)}$, а у випадку біфуркаційного параметра g_0 :

$$z = \frac{(A - \alpha)K^2}{\alpha(2\rho x_c + 1)(\gamma x + 1)}, \text{ де } K = \gamma x_c + 1.$$

Період коливань, які виникають в динамічній системі, визначається за формулами (3.5), (3.7) та має вигляд

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{\varepsilon^2 G A_1^2 \alpha}{6A x_c} \right). \quad (5.42)$$

Підкреслимо, що аналітичні залежності для густини інтенсивності поля фотонів, періоду, частоти модуляції, критеріїв та інтервалів стійкості дають можливість поставлення обернених задач динаміки лазерів на твердому тілі. Зокрема, якщо експериментально визначено період коливань T_E , тоді з рівняння $T = T_E$ (5.22) випливає оцінка для параметра ε – амплітуди модуляції:

$$\varepsilon^2 \approx \left(\frac{T_E \omega_0}{2\pi} - 1 \right) \frac{6A x_c}{G A_1^2 \alpha}. \quad (5.23)$$

Варто зазначити, що розв'язання обернених задач динаміки лазерів відкриває широкі перспективи дослідницької роботи. Проведений аналіз показав, що поєднання методу адиабатичного виключення швидкої змінної з алгоритмом біфуркації народження циклу є ефективним способом дослідження динаміки лазера з фільтром. У результаті проведення біфуркаційного аналізу одержано наближені періодичні розв'язки для густини інтенсивності випромінювання, інверсії, ненасиченого поглинання в фільтрі у випадку біфуркації Хопфа, знайдено критерії стійкості періодичної модуляції, інтервали стійкості для параметра накачки, визначено період, частоту модуляції.

6 БІФУРКАЦІЯ ХОПФА У ТРИВИМІРНИХ ТА ЧОТИРИВИМІРНИХ ЛАЗЕРНИХ МОДЕЛЯХ

6.1 МОДЕЛІ ОДНОМОДОВИХ ЛАЗЕРІВ КЛАСУ С

На відміну від інших типів лазерів динамічні властивості лазерів класу С визначаються лише взаємодією між генерованим полем та активним середовищем. Біфуркації в системі та складні режими генерації не пов'язані ні з зовнішнім впливом, ні з наявністю додаткових нелінійних елементів, ні з взаємодією мод, первісна причина нестійкості стаціонарної генерації більш фундаментальна. У роботі [10] отримана модель одномодового лазера біжучої хвилі з некогерентною накачкою:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \rho(z_2 - z_1), \\
\dot{z}_2 &= -\Delta z_3 + z_1 z_4 - z_2, \\
\dot{z}_3 &= \Delta z_2 - z_3, \\
\dot{z}_4 &= \gamma(A - z_4 - z_1 z_2),
\end{aligned}
\tag{6.1}$$

де z_1 – дійсна частина амплітуди поля; z_2 – дійсна частина амплітуди поляризації атомної системи; z_3 – уявна частина амплітуди поляризації атомної системи; z_4 – нормована різниця заселеності; ρ – відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи; $\Delta = \frac{\omega - \omega_0}{\nu_2}$ – відносна відстройка частоти поля від центра спектральної лінії; γ – відношення повздовжньої і поперечної констант релаксації середовища; A – параметр накачки.

Серед моделей одномодових лазерів біжучої хвилі окремо виділяють модель Лоренца-Хакена, яка поклала початок дослідженню автостохастичних процесів у лазерах. Модель Лоренца-Хакена, що утворюється з моделі (6.1) у випадку точної наладки лазера, має вигляд [10]

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= \rho(z_2 - z_1), \\
\dot{z}_2 &= z_1 z_3 - z_2, \\
\dot{z}_3 &= \gamma(A - z_3 - z_1 z_2),
\end{aligned}
\tag{6.2}$$

де z_1 – модуль амплітуди електричного поля; z_2 – модуль амплітуди поляризації атомної системи; z_3 – нормована різниця заселеності; інші змінні мають попереднє значення.

Огляд літературних джерел показав, що біфуркація Хопфа властива різним лазерних моделям, які містять більше двох диференціальних рівнянь. Зокрема, при певних значеннях параметрів у моделі лазера типу Лоренца-Хакена (6.2) та моделі лазера біжучої хвилі (6.1) виникає регулярний режим автоколивань, якому відповідає стійкий граничний цикл.

Як свідчать результати попередніх досліджень, алгоритм біфуркації народження циклу є ефективним методом вивчення режиму неперервної періодичної генерації у випадку двовимірних напівкласичних моделей твердотільних лазерів. Саме наявність великого параметра в теорії лазерів класу В дозволила з'ясувати питання про стійкість періодичної генерації, отримати критерії та інтервали стійкості для параметрів моделей. Застосування зазначеного алгоритму потребує зведення системи до канонічного вигляду, що у випадку системи трьох та більшого числа диференціальних рівнянь приводить до значного зростання громіздкості аналітичних перетворень. Ця обставина стає більш істотною у випадку моделей лазерів класу С, всі параметри яких мають однаковий порядок, оскільки неможливо спростити залежності на основі асимптотичних оцінок співвідношень між параметрами. Більш ефективним у цьому випадку є метод Джозефа, який дає можливість звести n -вимірну задачу до двовимірної через проектування фазового простору на площину, яка утворюється власними векторами лінійної частини оператора, що відповідають двом уявним власним значенням матриці Якобі, обчисленій в стаціонарній точці, а також побудувати періодичний розв'язок динамічної системи.

Динаміка моделей (6.1), (6.2) вивчається у [51], де для побудови наближених розв'язків нелінійних систем одномодових лазерів біжучої хвилі використовується метод Джозефа.

Біфуркаційний аналіз моделі Лоренца-Хакена (6.2) проведено в околі нетривіального стаціонарного розв'язку $z_{1c} = z_{2c} = \sqrt{A-1} = q, z_{3c} = 1$. Знайдено аналітичний вираз порога нестійкості для параметра накачки

$$A_0 = \frac{\rho(\rho + \gamma + 3)}{\rho - \gamma - 1}, \rho > \gamma + 1,$$

перше наближення до невідомої частоти модуляції

$$\omega_0 = \left[\frac{2\rho\gamma(\rho + 1)}{\rho - \gamma - 1} \right]^{1/2}.$$

Побудовано періодичний розв'язок, що описує режим регулярних автоколивань.

Аналогічно проводиться біфуркаційний аналіз чотиривимірної моделі біжучої хвилі, яка порівняно з моделлю Лоренца-Хакена враховує відносну відстройку Δ частоти поля від центра спектральної лінії. Система (6.1) вивчається в околі нетривіального стаціонарного розв'язку

$$z_{1c} = z_{2c} = \sqrt{A - 1 - \Delta^2}, z_{3c} = \Delta\sqrt{A - 1 - \Delta^2}, z_{4c} = \Delta^2 + 1,$$

внаслідок втрати стійкості якого в системі можуть виникнути періодичні коливання. З'ясовано умови виникнення біфуркації Хопфа, визначено біфуркаційне значення параметра накачки

$$A_0 = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4QL}}{2Q},$$

де

$$H = \gamma(2\rho + 1)(\psi\alpha - 2\gamma\beta) - \gamma\alpha(\gamma\beta + 2\rho\alpha), L = \gamma\beta(\gamma\beta + \psi\alpha) - 2\rho\gamma\alpha^2(1 + \Delta^2), \\ Q = \gamma^2(2\rho + 1)(\rho - \gamma - 1),$$

знайдено перше наближення до невідомої частоти модуляції ω :

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma(A(2q + 1) - 3q^2\Delta^2 - q)}{q + \gamma + 2},$$

побудовано періодичний розв'язок динамічної системи.

Для з'ясування питання про стійкість періодичного розв'язку в обох випадках пропонується застосовувати теорему факторизації, згідно з якою показник Флокке подається у вигляді добутку двох співмножників, один з яких дорівнює похідній від збурюючого параметра за малим параметром ε . Однак з'ясування цього питання вимагає додаткового дослідження.

Отже, використання методу Джозефа та алгоритму біфуркації народження циклу при дослідженні напівкласичних моделей одномодових лазерів класу С дозволяє з'ясувати умови виникнення біфуркації Хопфа у відповідних динамічних моделях та побудувати періодичний розв'язок, що виникає навколо стаціонарного внаслідок набуття одним із параметрів моделі свого біфуркаційного значення.

ВИСНОВКИ

Таким чином, застосування кількісних методів теорії нелінійних коливань дозволило виявити і дослідити фізичні процеси, які породжують нестійкість стаціонарної генерації та приводять до формування регулярних пульсацій в класичних і напівкласичних моделях одномодових лазерів. У результаті біфуркаційного аналізу лазерних моделей отримано аналітичні залежності, які описують режим випромінювання за умов існування біфуркації Хопфа, побудовано аналітичні розв'язки динамічних систем.

У рамках алгоритму біфуркації народження циклу знайдено основні характеристики режиму неперервної періодичної генерації для класичних та напівкласичних моделей одномодових лазерів: аналітичні оцінки для біфуркаційних параметрів та біфуркаційних кривих, критерії стійкості періодичних коливань, інтервали стійкості для окремих параметрів. Аналіз отриманих аналітичних залежностей дозволив вивчити вплив зміни параметрів лазера на його динаміку, що сприяє розв'язанню практично важливої задачі керування параметрами лазерного випромінювання.

Результати дослідження показують, що метод може бути застосований як при дослідженні більш складних лазерних моделей, так і при вивченні закономірностей в поведінці інших нелінійних систем – біологічних, економічних, соціальних. Одним із напрямків теоретичного дослідження лазерних моделей є з'ясування питання про стійкість періодичних коливань, які виникають в n – вимірних моделях внаслідок біфуркації Хопфа. Окремого вивчення вимагає сценарій поведінки динамічної системи за межами інтервалів стійкості, оскільки нестійкість може супроводжуватися повторними біфуркаціями, експериментальні підтвердження яких зафіксовані в літературних джерелах. Перспективним напрямком подальших досліджень є застосування аналітичних залежностей, що описують режими генерації, при постановленні та розв'язуванні обернених задач динаміки лазерів.

ПОДЯКИ: Автори висловлюють щире подяку доценту Коваленку Г.П. за наукові консультації і постійний інтерес до роботи, доценту Харченку Д.О., асистенту Кохану С.В. за допомогу при побудові фазових портретів динамічних систем, професорам Воробйову Г.С., Олемському О.І., Проценку І.Ю., доценту Лисенку О.В. за наукові консультації та обговорення результатів роботи.

SUMMARY

Dynamics of both classical and semiclassical models of single-mode solid-state lasers with different Q-spoilers is investigated within bifurcation of the cycle creation approach. Stability criteria of the periodical oscillation of the intensity, which are appear due to the Hopf bifurcation, and stability intervals for the models parameters are studied. Bifurcation processes within semiclassical model of the single-mode running wave lasers are analyzed. Both three and four-dimensional laser models are integrated within the Josephs method.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. Влияние частотной невязанности на динамику излучения твердотельных кольцевых лазеров (обзор) // Квантовая электроника. – 2000. – Т. 30, № 2. – С. 105–114.
2. Бойко Д.Л., Кравцов Н.В. Зависимость автомодуляционной частоты от параметров твердотельного кольцевого лазера // Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25, № 4. – С. 361–366.
3. Клименко Д.Н., Ларионцев Е.Г. Новые периодические и хаотические режимы в твердотельном кольцевом лазере с фазовой оптической невязанностью // Квантовая электроника. – 1998. – Т. 25, № 4. – С. 369–372.
4. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Наумкин Н.И., Сидоров С.С., Фирсов В.В., Чекина С.Н. Влияние магнитного поля на автомодуляционные колебания в кольцевом чип-лазере // Квантовая электроника. – 2001. – Т. 31, № 7. – С. 649–652.
5. Кравцов Н.В., Пашинин П.П., Сидоров С.С., Фирсов В.В. Захват частот автомодуляционных колебаний и гистерезис неавтономного двунаправленного кольцевого твердотельного лазера // Квантовая электроника. – 2002. – Т. 32, № 6. – С. 562–564.

6. Кравцов Н.В., Сидоров С.С., Пашинин П.П., Фирсов В.В., Чекина С.Н. Возбуждение динамического хаоса в монолитном кольцевом лазере при периодической модуляции механических напряжений в активном элементе // Квантовая электроника – 2004. – Т. 34, № 4. – С. 329–332.
7. Золотоверх И.И., Ларионцев Е.Г. Бистабильность и хаос в автономном Nd:YAG-лазере со слабо анизотропным резонатором // Квантовая электроника. – 2004. – Т. 34, № 8. – С. 727–730.
8. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. – Мн.: Навука і тэхніка, 1990. – 280 с.
9. Самсон А.М. Равновесные состояния, автоколебания, полистабильность и гистерезисные явления в лазерах с просветляющимся фильтром: Препринт АН БССР. Ин-т физики; 321. – Мн.: 1984. – 55 с.
10. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. – М.: Наука, Физматлит, 1999. – 364 с.
11. Тарасов Л.В. Физика процессов в генераторах когерентного оптического излучения. – М.: Радио и связь, 1981. – 440 с.
12. Морозов В. Н., Ораевский А.Н. Режимы работы квантовых генераторов с добротностью резонаторов, зависящих от интенсивности поля излучения // ЖТФ. – 1967. – Т.37, № 5 – С. 947–952.
13. Рошин Н.В. К динамике оптического квантового с управляемой добротностью резонатора // Изв. вузов СССР. Радиофизика. – 1973. –Т. 16, № 7. – С. 1006–1019.
14. Statz H., De Mars C.A., Wilson D.T. Problem of Spike Elimination in Lasers // J. Appl. Phys. – 1965. – Vol. 36, № 5. – P. 1510–1514.
15. Tang C.I., Statz H., De Mars G. Spectral Output and spiking Behavior of solid-state Lasers // J. Appl. Phys. – 1963. – Vol. 34, № 8. – P. 2289–2295.
16. Лифшиц Б.Л. К теории вынужденного излучения движущихся тел (явление кинетической модуляции) // ЖЭТФ. – 1970. – Т. 59, № 2. – С. 516 – 523.
17. Винокуров Г.Н. К теории синхронизации пичков лазера периодическим воздействием // Оптика и спектроскопия. – 1971. – Т. 31, № 3. – С. 472–475.
18. Беспалов В.И., Гапонов А.В. Статистические характеристики автомодуляции излучения лазера на твердом теле // Изв. вузов. Радиофизика. – 1965. – Т. 8, № 1. – С. 70–80.
19. Ораевский А.Н., Успенский А.В. Режим пульсаций мощности излучения квантовых генераторов // Труды ФИАН. – 1965. – Т. 31. – С. 96 – 106.
20. Генкин В.Н., Ханин Я.И. Лазеры (обзор) // Изв. вузов. Радиофизика. – 1962. – Т. 5, № 3. – С. 423–458.
21. Ханин Я.И. Динамика нестационарных режимов твердотельных лазеров: Дис. д-ра ф.-м. наук: 01.04.02. – Горький, 1981. – 428 с.
22. Методы расчета оптических квантовых генераторов: В 3 т. / Ф.К. Рутковский, В.П. Грибковский, А.М. Самсон и др.; Под ред. Б.И. Степанова. – Мн.: Наука и техника, 1968. – Т. 2. – 656 с.
23. Самсон А.М., Ранцевич В.А. Полистабильность, автоколебания и гистерезис в лазере с просветляющимся фильтром при внешней подсветке: Препринт АН БССР. Ин-т физики; 452. – Мн.: 1987. – 39 с.
24. Самсон А.М., Григорьева Е.В., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Регулярная и хаотическая динамика лазеров // Изв. АН СССР. Сер. физ. – 1989. –Т. 53. – С. 1076–1082.
25. Григорьева Е.В., Котомцева Л.А., Лойко Н.А., Самсон А.М., Туровец С.И. Мультистабильность и динамический хаос в лазерах // Изв. АН БССР. Сер. физ.- мат. н. – 1989. – № 6. – С. 26–31.
26. Рибакон В.А., Самсон А.М. Автоколебательный режим ОКГ с просветляющимся фильтром // ЖПС. – 1970. – Т. 12. – С. 997–1006.
27. Беспалов И.И., Якубович Е.И. О периодической автомодуляции излучения и возможности генерации гигантских импульсов в трехуровневом ОКГ с неоднородно подсвеченным рабочим веществом // Изв. вузов: Радиофизика. – 1965. – Т. 8, № 5. – С. 909–923.
28. Uchida A., Shinozuka M., Ogawa T., Kannari F. Experiment on chaosynchroznal in two microchip lasers // Opt. Lett. – 1999. – Vol. 24, № 13. – P. 890–892.
29. Otsuka K., Ko J.Y., Rubota T. Nonstationary chaotic oscillations in lasers with frequency-shifted feedback // Opt. Lett. – 2001. – Vol. 26, № 9. – P. 638–640.
30. Tang S., Liu J. M. Synchronization of high frequency chaotic optical pulses // Opt. Lett. – 1999. – Vol. 26, № 9. – P. 596–598.
31. Пешко І.І. Фізичні процеси самовпливу в лазерах на твердому тілі: Автореф. Дис. д-ра фіз.-мат. наук: 01.04.03 / Ін-т фізики НАН України. – К., 2002. – 30 с.
32. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. Режимы генерации твердотельных кольцевых лазеров при модуляции их параметров // Квантовая электроника. – 2004. – Т. 34, № 6. – С. 487–505.
33. Быков В.Н., Садовой А.Г. Эффективность лазера на эрбиевом стекле с пассивной модуляцией добротности резонатора // Квантовая электроника – 2002. – Т. 32, № 3. – С. 202–204.
34. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М.: Наука, 1976. – 176 с.
35. Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 404 с.
36. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла: Пер с англ. – М.: Мир, 1985. – 280 с.
37. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения: Пер с англ. – М.: Мир, 1980. – 368 с.
38. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций: Пер с англ. – М.: Мир, 1983. – 301 с.
39. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Пер с англ. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

40. Шуда І.О. Біфуркаційний аналіз класичних моделей динаміки твердотільних одномодових лазерів: Дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.01. –Суми, 2004.- 155 с.
41. Шуда І.О. Модуляція регулярних незгасаючих пульсацій лазера з керованою добротністю резонатора // Вісник Сумського державного університету. – 2002.– №5(38) – 6 (39). – С. 33–38.
42. Коваленко Г.П., Шуда І.О. Вплив квадратичного навантаження на динаміку твердотільного лазера // Наукові записки: Збірник наукових статей Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. – 2003. – Вип. LI (51). – С. 272–283.
43. Коваленко Г.П., Коломієць С.В. Режим періодичної генерації випромінювання в напівкласичній моделі одномодового лазера на твердому тілі // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2004. – Вип. LVI (56). – С. 63–73.
44. Харченко Д.О., Коломієць С.В., Харченко В.О. Модульоване стійке періодичне випромінювання у твердотільних лазерах // Вісник СумДУ. Серія Фізика, математика, механіка. – 2004.– №10 (69). – С. 218–224.
45. Касти Дж. Большие системы: Пер с англ. – М.: Мир, 1982. – 216 с.
46. Коваленко Г.П., Коломієць С.В. Дослідження періодичних режимів генерації в одномодових лазерах на твердому тілі // Радиофизика и электроника. – Харьков: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2004. – Т.9, № 2. – С. 413–420.
47. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. – М.: Наука, 1991. – 240 с.
48. Лихтенберг А., Либман М. Регулярная и стохастическая динамика: Пер с англ. – М.: Меркурий-ПРЕСС, 2000. – 528 с.
49. Коломієць С.В. Дослідження граничного циклу в найпростішій напівкласичній моделі твердотільного лазера // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2003. – № 2 (28). – С. 145–150.
50. Коваленко Г.П., Коломієць С.В. Біфуркаційний аналіз динаміки лазерів з автомодуляцією добротності // УФЖ. – 2004. – Т.49, №10. –С.960–965.
51. Коломієць С.В. Динаміка напівкласичних моделей одномодових лазерів з модуляцією добротності: Автореф. дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.01. –Суми, 2005. – 21 с.

Надійшла до редакції 12 грудня 2005 р.