

О.І. Олємскої, О.В. Ющенко

САМООРГАНІЗАЦІЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Суми
"Видавництво СумДУ"
2010

УДК 538.9(075.8)

ББК 22.311

О-53

Рецензенти:

В.Ю. Сторіжко — доктор фіз.-мат. наук, академік НАНУ,
директор Інституту прикладної фізики НАНУ;

С.О. Котречко — доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник
Інституту металофізики ім. Г.В. Курдюмова НАНУ;

Д.О. Харченко — доктор фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник
Інституту прикладної фізики НАНУ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю
"Фізична та біомедична електроніка"
(лист № 1/11 - 502 від 04.02.2010р.)*

Олемской О.І.

О-53 Самоорганізація складних систем: навч. посіб./О.І. Олемской,
О.В. Ющенко.— Суми: Вид-во СумДУ, 2010. — 179с.

ISBN 978-966-657-280-9

У цьому навчальному посібнику розкрито феноменологічне подання колективної поведінки складних систем. У рамках такого підходу розвинута синергетична схема, що являє собою процес самоорганізації суцільного середовища, систем економічного типу і колективну поведінку активних частинок.

Викладений матеріал у повному обсязі охоплює курс "Фізика складних систем" та становить інтерес для наукових співробітників, аспірантів і студентів фізико-технічних спеціальностей.

УДК 538.9 (075.8)

ББК 22.311

ISBN 978-966-657-280-9

© Олемской О.І., Ющенко О.В., 2010

Зміст

ВСТУП	5
1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ САМООРГАНІЗАЦІЇ	13
1.1 Система Лоренца	15
1.2 Кінетика самоорганізації	18
1.3 Автоколивання, обумовлені біфуркацією Хопфа . .	23
1.4 Періодична множина граничних циклів	41
1.5 Дробова система Лоренца	51
Завдання для самоконтролю	62
2 САМООРГАНІЗАЦІЯ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ	65
2.1 Початкові рівняння поведінки сипкого середовища .	67
2.2 Самоорганізація сипкого середовища	68
2.3 Самоорганізація тонкого шару мастила	74
2.4 Синергетична картина переривчастого режиму течії суцільних середовищ	81
2.5 Використання дробової системи рівнянь самоорганізації для статистичного опису переривчастої течії	84
2.6 Дослідження самоподібної течії суцільного середовища	92
Завдання для самоконтролю	97
3 САМОУЗГОДЖЕНИЙ ОПИС СИСТЕМ ЕКОНОМІЧ- НОГО ТИПУ	100
3.1 Синергетична картина фінансового ринку, що еволюціонує відповідно до отриманої інформації . .	103
3.2 Економічна структура суспільства	108

3.3	Динаміка безперервного переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки	118
3.4	Динаміка переривчастого переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки	126
3.5	Еволюційна картина макроекономічних перетворень	136
	Завдання для самоконтролю	140
4	КОЛЕКТИВНА ПОВЕДІНКА АКТИВНИХ ЧАСТИНОК	144
4.1	Колективний рух живих організмів	149
4.2	Самоузгоджена картина формування транспортних потоків	154
4.3	Статистична поведінка транспортних потоків	156
	Завдання для самоконтролю	165
	СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	167

ВСТУП

Ще здавна відомо, що поведінка великих ансамблів об'єктів, які мають запас внутрішньої енергії, виявляє спільні закономірності незалежно від того, належать ці об'єкти до живої чи неживої природи. Так, спостереження за рухом піску в пустельних барханах або за виникненням снігових лавин приводить до відчуття, що за цими процесами приховується розумне начало (типу *Океану* в "Солярисі" А.А. Тарковського). Те саме відчуття виникає під час спостереження за поведінкою представників живої природи, не наділених розумом, — колонії мурашок, рою бджіл, пташиної зграї і т.д. З іншого боку, дії натовпу людей, кожен з яких наділений інтелектом, часто наводять на думку про їх безрозсудність (найбільш яскраво вираженими носіями такої поведінки є угруповання спортивних фанатів). Особливе місце у колі зазначених явищ займає поведінка економічних систем, де конструктивні зусилля величезної маси учасників процесу можуть призводити до мимовільних фінансових крахів, катастрофічного перерозподілу коштів і т.д. До подібних проблем приводять дослідження переходу від неживого до живого, соціальних явищ, психіки людини і багато чого іншого.

Названі проблеми, що зводяться до самоорганізації великих ансамблів, є предметом міждисциплінарного наукового напрямку, що отримав назву *синергетика* (від давньогрецького поняття *співпраця, спільна дія*). Простий фізичний приклад самоорганізації становлять фазові переходи типу кипіння рідини. Їх опис ґрунтується на термодинамічній схемі, в рамках якої з великого термостата виділяється мала підсистема, стан якої задається *параметром порядку*. Термостат впливає на стан

підсистеми за допомогою змін механістичного і термічного параметрів стану, що зводяться до *поля, сполученого параметру порядку*, і *керуючого параметра* (для переходу типу кипіння рідини їх роль відіграють тиск/об'єм і температура/ентропія відповідно). Основна особливість термодинамічної схеми полягає в тому, що термостат може впливати на виділену підсистему, але вона через свої малі розміри не змінює стан термостата.

Зовсім інша картина спостерігається у процесі самоорганізації, де неможливо розділити підсистему і термостат. У зв'язку з цим всі ступені свободи — параметр порядку, сполучене поле і керуючий параметр — набувають рівноправного характеру. Найбільш популярним прикладом такого роду є спонтанне випромінювання лазера, де зазначені величини зводяться до напруженості індукованого поля, електричної поляризації середовища та інверсної заселеності електронних рівнів. Через сумірність із термостатом система, що самоорганізується, набуває відкритого характеру, а її опис вимагає самоузгодженого подання еволюції параметра порядку, сполученого поля і керуючого параметра. Найбільш яскравим проявом такої поведінки є *детермінований хаос*, обумовлений появою в просторі станів траєкторій типу *дивного атрактора*¹ [1].

У колі сучасних проблем особливе місце займають енергетичні, екологічні, соціальні та інші завдання, вирішення яких вимагає, з одного боку, залучення величезних ресурсів, а з іншого — не може бути досягнуте методом проб і помилок, оскільки системі неможливо нав'язати необхідну поведінку. У зв'язку з цим особливу актуальність набули дослідження

¹Атрактор (від англ. *attract* — привертати, притягувати) — множина точок у фазовому просторі динамічної системи, до яких прямують траєкторії системи. Найпростішим випадком атрактора є точка. Атракторами можуть бути і криві, або довільні складні множини точок фазового простору, в тому числі фрактальні множини. В останньому випадку атрактори називають дивними.

колективної поведінки, що виявляється у самоорганізації фізичних, біологічних, соціальних та інших систем [2]– [10]. У результаті з'явився новий напрям, що отримав назву *фізика складних систем*, який займається вивченням систем, поведінка яких може змінюватися непередбачуваним чином залежно від стану їх складових і зовнішніх умов [11]– [15].

Матеріал запропонованого посібника зводиться до викладу оптимальної синергетичної схеми, що дозволяє подати самоузгодженим чином еволюцію складних систем у процесі самоорганізації. Оскільки поняття самоорганізації є узагальненням фізичної концепції фазового переходу, то запропоновану *феноменологічну теорію* необхідно розглядати як розвиток теорії термодинамічних перетворень на відкриті системи (див. розділ 1). Для підтвердження спільності розвинуеного підходу обране широке коло складних систем, що містить об'єкти неживої природи, економічні системи та ансамблі високоорганізованих організмів. Дослідження цих систем у розділах 2–4 показує, що їх поведінка багато в чому визначається дією *стохастичних джерел*, обумовлених впливом випадкових чинників.

У рамках теорії самоорганізації ми ґрунтуємося на системі Лоренца [1], розгляд якої показує (підрозділ 1.1), що її змінні описують самоузгоджену поведінку *параметра порядку, сполученого поля і керуючого параметра*. Згідно з підрозділом 1.2 адіабатичний режим самоорганізації, в якому зміна двох останніх параметрів наслідуює поведінку першого, відповідає картині фазового перетворення з тією відмінністю, що стаціонарне значення керуючого параметра не зводиться до параметра нагнітання. У найпростішому випадку перехід від безперервного перетворення до переривчастого забезпечується залежністю часу релаксації параметра порядку від його величини. У підрозділі 1.3 показано, що за наявності такої залежності зростання параметра нагнітання індукує спочатку

фазовий перехід першого роду, а потім біфуркацію Хопфа, що приводить до зародження *граничного циклу*, який означає періодичні зміни параметра порядку і керуючого параметра, що відповідають реакції Білоусова-Жаботинського. Використання методів, розвинених у теорії катастроф, показує, що жодна з *універсальних деформацій*, які задаються зовнішньою дією, не забезпечує умов стійкості граничного циклу, оскільки такі умови вимагають нелінійної залежності цієї дії від стану системи. Згідно з підрозділом 1.4 зазначена залежність забезпечується за наявності канонічної пари швидких змінних, величини яких залежать від модуля комплексного параметра порядку, що змінюється повільно. Тоді усереднення за швидкими змінами його фази індукує *калібрувальне поле*, напруженість якого зводиться до кутової швидкості обертання фазової площини, що визначається частотою зовнішньої дії. За аналогією з обертальним рухом He^4 поведінка системи, що самоорганізується, зводиться до множинного резонансу, картина якого визначається періодичним розподілом граничних циклів за фазовою площиною. Останній підрозділ 1.5 присвячений узагальненню системи Лоренца на випадок зворотного зв'язку *дробового порядку*, де параметр порядку набуває позитивної степені $a \leq 1$. Згідно з підрозділом 2.6 таке узагальнення забезпечує степеневий спад функції розподілу параметрів стану самоподібної стохастичної системи. Для детерміністичної системи Лоренца спад показника a приводить до зменшення *фрактальної розмірності* та звуження області існування дивного атрактора.

Другий розділ присвячений дослідженню процесів самоорганізації структурованих фізичних систем на прикладах *гранульованого середовища* та *тонкого шару мастила*. Для першого з них самоузгоджене урахування ефектів самоорганізації досягається (підрозділ 2.1) доповненням гідродинамічних доданків членами, що враховують мікроскопічний внесок взаємодії окремих частинок у процесі течії. У результаті перехід

гранульованого середовища до потокового стану подається системою рівнянь, де роль параметра порядку відіграє *амплітуда флуктуацій швидкості* частинок, сполучене поле зводиться до *середньої швидкості*, а керуючий параметр — до *зсувної компоненти напруження*. Показано, що знайдені в підрозділі 2.2 співвідношення для просторових профілів середньої швидкості течії та її флуктуацій дозволяють пояснити експериментальну картину течії сипкого середовища. Задачі про затвердіння тонкого шару мастила за механізмом фазового переходу першого роду присвячений підрозділ 2.3. Тут роль параметра порядку і сполученого поля відіграють зсувні компоненти напруження і деформації, а керуючий параметр зводиться до *тиску*, відліченого від порога, при якому розходиться динамічна в'язкість.

Опис *переривчастого режиму* самоорганізації досягається (підрозділи 2.4-2.6) за допомогою введення до рівняння, яке описує поведінку керуючого параметра, стохастичного джерела, що становить собою *білий шум*. У результаті поведінка системи описується рівнянням Ланжевена, стаціонарний розподіл розв'язань якого показує, що режим переривчастої течії забезпечується флуктуаціями пружного напруження. Наступний підрозділ 2.5 присвячений дослідженню розподілу інтервалів течії системи, що самоорганізується, всі ступені свободи якої мають, з одного боку, зворотний зв'язок дробового порядку, а з іншого — містять адитивні шуми. Це дозволяє описати *степеневий хвіст* розподілу інтервалів течії, показник якого визначається інтенсивністю зворотного зв'язку. У підрозділі 2.6 показано, що, окрім названого підходу, режим переривчастої течії описується *дробово-диференціальним* рівнянням Фоккера-Планка, вигляд якого визначається динамічним показником і показником похідної за часом. Дослідження самоподібних розв'язань цього рівняння показує, що переривчаста течія середовища зводиться до *режиму субдифузії*. Цей висновок підтверджується дослідженням нелінійного рівняння Фоккера-

Планка, у якому дробові показники визначаються неадитивністю стохастичної системи.

У розділі 3 розглянута самоорганізація статистичних ансамблів, флуктуації яких визначають еволюцію систем економічного типу. Дослідження впливу зовнішніх умов на вибір стратегії фінансового ринку описується у підрозділі 3.1. Самоузгоджена еволюція такої системи подається рівняннями, в яких роль параметра порядку відіграє корелятор отриманої інформації з подальшою зміною цін, сполучене поле зводиться до наявної інформації, а керуючий параметр – до трейдерів, що діють згідно з певною стратегією. Використання адіабатичного наближення показує, що суттєва перебудова фінансового ринку, яка означає дотримання всіх гравців певної стратегії, відбувається, якщо їх початкове число перевищує критичний поріг, що задається середнім геометричним від повного та критичного значень числа гравців.

Статистичний розгляд економічної структури суспільства (підрозділ 3.2) ґрунтується на самоузгодженому описі еволюції попиту, виробничої функції та умовної ціни: за умов наслідування двома останніми величинами поведінки першої, економічна система переходить до впорядкованого стану, що відповідає високопродуктивній економіці, якщо купівельна спроможність населення перевищує критичне значення. Економічна структура суспільства визначається співвідношенням купівельної спроможності з інтенсивністю флуктуацій умовної ціни: якщо їх значення малі, середній попит буде також обмежений невеликими значеннями, що відповідають низькопродуктивному стану економіки; зі зростанням однієї з названих величин функція розподілу попиту стає бімодальною; для великих значень купівельної спроможності та малих флуктуацій умовної ціни розподіл попиту має єдиний максимум, що відповідає середньому класу населення. Розподіл попиту набуває степеневі асимптотики, відомої як закон Парето, якщо коливання умовної

ціни переважають над випадковими змінами решти величин. Дослідження самоподібної економічної системи показує, що існування надбагатого прошарку населення можливе тільки за наявності кризових явищ, що перешкоджають економічному розвитку протягом довгого часу.

Підрозділи 3.3–3.5 подають економічну еволюцію для переходу між низько- та високопродуктивним станами. Це досягається за допомогою фазових портретів, які визначають поведінку попиту, виробничої функції та умовної ціни для різних співвідношень часів їх зміни. При несумірності масштабів зміни двох перших величин критичне зростання часу зміни умовної ціни приводить до коливального режиму. Це означає, що високопродуктивний стан досягається за умов послідовних криз та підйомів економіки. У протилежному разі еволюція системи визначається універсальною ділянкою фазової траєкторії, положення якої задається купівельною спроможністю населення. Якщо остання перевищує критичне значення, а умовна ціна змінюється набагато повільніше за інші величини, то система переходить до режиму дивного атрактора, де її еволюція стає абсолютно непередбачуваною.

Четвертий розділ присвячений статистичній теорії активних частинок з урахуванням корельованих шумів. Синергетичне подання колективного руху таких частинок досягається (підрозділ 4.1), якщо за параметр порядку брати середню швидкість, а під сполученим полем і керуючим параметром розуміти далекодіючу силу хімічного типу і параметр внутрішнього стану, що визначає реакцію частинок на цю силу. Використання системи рівнянь самоорганізації дозволяє представити самоузгоджену картину переходу групи активних частинок до режиму поступального руху. Врахування стохастичних джерел показує, що залежно від ступеня збудження та інтенсивностей флуктуацій далекодіючої сили й параметра внутрішнього стану система може здійснювати обертальний рух із центром мас, що перебуває у стані спокою;

поступальний рух, утворюючи щільну групу, або послідовно чергувати зазначені режими.

Якщо в ролі активних частинок виступають керовані транспортні засоби (підрозділ 4.2), то характер колективного руху задається відхиленнями від оптимальних значень інтервалу та швидкості руху, а також внутрішнім параметром транспортного потоку, величина якого визначається умовами руху. У рамках підходу Гамільтона до стохастичних рівнянь руху розклад за кумулянтами приводить до функції розподілу, вигляд якої задається зовнішньою дією. Виявляється, що основну роль у розкиді параметрів транспортного потоку відіграють скорельовані флуктуації його внутрішнього параметра. Зменшенню граничного значення цього параметра, величина якого визначає оптимальний режим руху, сприяє зростання низькочастотної складової інтенсивності шуму, а також збільшення характерного часу зміни інтервалу руху стосовно відповідного масштабу зміни швидкості.

Розділ 1

ОСНОВИ ТЕОРІЇ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Процес самоорганізації є одним із найбільш загадкових та інтригуючих явищ, що привертає увагу фізиків, хіміків, біологів, соціологів та вчених з інших галузей науки. Найбільш популярним прикладом самоорганізації є хімічна реакція Білоусова-Жаботинського¹, за умов якої протягом довгого часу періодично пробігає хвиля, що змінює один колір рідини в пробірці на інший. Оскільки реакція проходить при досить високих температурах, то така поведінка означає, що хаотично рухомі молекули рідини періодично включаються у самоузгоджений процес, який швидко поширюється за об'ємом, змінюючи колективну поведінку системи. Подібні зміни колективної поведінки спостерігаються у великих скупченнях живих організмів (зграя птахів або звірів, рій комах і тому подібне), а також у соціумі – під час війн і революцій, що втягують величезні маси людей навіть всупереч їх волі. Спонтанні процеси самоорганізації спостерігаються також

¹У спрощеній схемі реакція Білоусова-Жаботинського складається з двох стадій, що змінюються з періодичністю в 1 хвилину: на першій стадії тривалентний церій Ce^{3+} (рожевий колір) окислюється бромнватою кислотою $HBrO_3$, що приводить до надлишку іонів Ce^{4+} (блакитний колір); у другій стадії чотиривалентний церій Ce^{4+} відновлюється органічною сполукою (маленовою кислотою) і переходить до Ce^{3+} , тобто блакитний колір змінюється рожевим. У наш час реакцією Білоусова-Жаботинського називають цілий клас хімічних реакцій, що проходять у коливальному режимі, коли деякі параметри реакції (колір, концентрація компонентів, температура та ін.) змінюються періодично, утворюючи складну просторово-часову структуру реакційного середовища.

під час виникнення смерчів, у течіях океану і циклонах, у поведінці клітин організму при морфогенезі і так далі.

Незважаючи на достатньо велике поширення, на сьогоднішній день відсутня мікроскопічна картина самоорганізації, оскільки вона вимагає розуміння механізмів процесу, які в кожному окремому випадку мають різну природу. Так, для реакції Білоусова-Жаботинського недостатньо відомі деталі перехідних реакцій, їх константи, умови вибору реагентів тощо. З іншого боку, можливість появи коливального режиму з'являється вже з розгляду простих моделей. У зв'язку з цим постає питання: чому ці моделі дозволяють пояснити таке складне колективне явище, як самоорганізація? Відповідь на це питання полягає у тому, що множина можливих ступенів свободи складної системи поділяється на два класи — нескінченна множина *мікроскопічних* ступенів і невелике число *макроскопічних* (для позначення останніх існує термін *гідродинамічні моди*). Згідно із синергетичним принципом підпорядкованості [2] у ході еволюції системи гідродинамічні моди пригнічують поведінку мікроскопічних ступенів свободи, цілком визначаючи картину самоорганізації. У результаті колективна поведінка системи задається декількома параметрами, які становлять амплітуди гідродинамічних мод. З іншого боку, в самоорганізації нерівноважної системи повинна відігравати принципово важливу роль дисипація, обумовлена процесами дифузії, в'язкості та теплопровідності, які забезпечують перехід до стаціонарного стану.

Цей розділ присвячений розгляду теорії самоорганізації, що базується на самоузгодженому поданні еволюції дисипативних гідродинамічних мод.

1.1 Система Лоренца

Традиційно фізичні процеси підрозділялися на два великі класи — детерміновані та стохастичні. Згідно з концепцією Лапласа розв'язання рівнянь динаміки (особливо з використанням комп'ютерної бази) дозволяє передбачити поведінку детермінованих систем на скільки завгодно тривалий час. На відміну від цього поведінка стохастичних систем, майбутнє яких практично не залежить від минулого, може бути подана тільки ймовірним чином, коли прогножуються статистичні характеристики типу середніх значень та дисперсій випадкових величин. У 1970-ті роки було показано, що існує ще один важливий клас процесів — так званий *детермінований хаос*. Хоча з формальної точки зору такі процеси є чисто детермінованими (якщо точно знати їх поточний стан, можна встановити, що відбудеться у скільки завгодно далекому майбутньому), передбачити поведінку такої системи можна тільки протягом обмеженого часу, оскільки будь-яка неточність у визначенні початкового стану експоненційно зростає з часом, що призводить до втрати інформації про початковий стан. Таким чином, по закінченні великого відрізка часу система поводить себе хаотично, а її опис знову зводиться до статистичних методів. Необхідно зазначити, що із названих процесів детермінований хаос є, мабуть, найбільш поширеним — така поведінка була виявлена у гідродинамічних системах, фізиці лазерів, астрофізиці, фізиці плазми, екології, соціології й т.д.

Уперше чутливість поведінки системи до задання початкових умов продемонстрував у 1963р. американський вчений Едвард Лоренц [1]. Щоправда, його цікавило таке вузьке практичне питання: чому розвиток новітніх технологій, удосконалення комп'ютерної техніки та обчислювальних алгоритмів не приводить до отримання достовірних прогнозів погоди на термін більше двох-трьох тижнів? Для відповіді на це запитання Лоренц

запропонував просту модель конвекції атмосфери, в рамках якої розглядається релєївська течія у шарі атмосфери зі сталою різницею температур між нижньою та верхньою межами [16].



Едвард Нортон Лоренц (*Edward Norton Lorenz*) (23.05.1917, Уест-Хартфорд, Коннектикут – 16.04.2008, Кембридж, Массачусетс, США) – американський математик і метеоролог, один із засновників теорії хаосу, автор ефекту метелика та атрактора Лоренца. З 1946 року працював у Массачусетському технологічному інституті, професор. Був членом Американської академії гуманітарних і природничих наук, Американського метеорологічного товариства і Національної академії наук США. Іноземний член з відділення океанології, фізики атмосфери і географії (геофізична гідродинаміка) АН СРСР (з 1991 р. РАН) з 27.12.1988 р.

Така течія подається простими рівняннями:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -Y - XZ + rX, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY,\end{aligned}\tag{1.1}$$

де X характеризує швидкість конвективного потоку; Y – різниця температур між нижніми та верхніми потоками; Z пропорційне відхиленню градієнта температур від зафіксованого значення; крапка означає диференціювання за часом t , що вимірюється у масштабі зміни різниці температур Y . Тут $r = R/R_c$ – відношення

числа Релея до критичного значення², σ – число Прандтля³, b – стала, пов'язана з геометрією задачі.

Подальше дослідження системи Лоренца показало, що вона відображає кінетичну картину колективної поведінки макроскопічної системи [17]. При цьому система (1.1) подається у вигляді

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\eta + h, \\ \sigma\dot{h} &= -h + \eta S, \\ (\sigma/b)\dot{S} &= (r - S) - \eta h,\end{aligned}\tag{1.2}$$

де h – поле, сполучене параметру порядку η ; S – керуючий параметр. Легко перекопати безпосередньою підстановкою, що система (1.1) переходить до (1.2), якщо динамічні змінні X, Y, Z і час t замінюються згідно з такими співвідношеннями:

$$t' \equiv \sigma t, \quad \eta \equiv X/\sqrt{b}, \quad h \equiv Y/\sqrt{b}, \quad S \equiv r - Z.\tag{1.3}$$

Рівняння (1.2) показують, що параметр σ становить відношення характерних часів зміни поля h і параметра порядку η , останнє з яких взято за масштаб виміру часу t' ; відповідно параметр b зводиться до відношення характерних часів зміни поля h і керуючого параметра S ; нарешті, параметр r визначає ступінь зовнішньої дії, що віддаляє систему від рівноважного стану. У свою чергу, співвідношення (1.3) показують, що параметр порядку η і сполучене поле h представляють динамічні змінні X ,

²Число Релея – безрозмірне число, що визначає поведінку рідини під впливом градієнта температури. Якщо число Релея більше за деяке критичне значення, рідина стає нестійкою і виникають конвективні потоки та біфуркація. $R = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu\alpha}$, де g – прискорення вільного падіння; β – коефіцієнт теплового розширення; ΔT – різниця температур; d – характерний розмір області рідини; ν – кінематична в'язкість; α – коефіцієнт температуропровідності.

³Число Прандтля є фізичною характеристикою середовища і залежить тільки від його термодинамічного стану ($\sigma = \nu/\alpha$).

Y , віднесені до масштабу \sqrt{b} , а керуючий параметр S зводиться до змінної Z , відліченої від порога r у протилежному напрямі.

Найбільш популярний приклад самоорганізації у фізиці є спонтанне випромінювання лазера, опис якого поклав початок розвитку синергетичної схеми Хакена [2]. При цьому роль параметра порядку η відіграє напруженість поля електромагнітної хвилі, сполучене поле h зводиться до поляризації активного середовища, а керуючий параметр S — до різниці заселеностей електронних рівнів.

1.2 Кінетика самоорганізації

Якщо часи зміни сполученого поля та керуючого параметра набагато менше за масштаб зміни параметра порядку, то в рівняннях (1.2) можна покласти $\sigma \ll 1, b$. Це означає, що величини $h(t) \approx h(\eta(t))$, $S(t) \approx S(\eta(t))$ наслідують зміну параметра порядку $\eta(t)$, і у двох останніх рівняннях (1.2) ліві частини стають нескінченно малими. У результаті отримуємо рівняння

$$h = \frac{r\eta}{1 + \eta^2}, \quad S = \frac{r}{1 + \eta^2}, \quad (1.4)$$

що виражають сполучене поле і керуючий параметр через параметр порядку. Якщо $\eta \ll 1$, перше з цих співвідношень має лінійний вигляд, що характеризується сприйнятливістю $\chi \equiv \partial h / \partial \eta = r$. Зі зростанням параметра порядку до значення $\eta = 1$ залежність $h(\eta)$ виходить на насичення, а для $\eta > 1$ проявляє спадний характер, який відповідає негативній сприйнятливості χ , що означає нестійкість системи. Що стосується останнього рівняння (1.4), то воно описує зменшення керуючого параметра від максимального значення $S = r$ при $\eta = 0$ до мінімальної величини $S = r/2$ при $\eta = 1$. Очевидно, спадний характер

залежності $S(\eta)$ є проявом принципу Ле-Шательє⁴.

Якщо підставити (1.4) до (1.2), то приходимо до рівняння Ландау-Халатникова

$$\dot{\eta} = -\partial E / \partial \eta \quad (1.5)$$

із синергетичним потенціалом

$$E = \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{r}{2} \ln(1 + \eta^2). \quad (1.6)$$



Лев Давидович Ландау (22 січня 1908р., Баку – 1 квітня 1968р., Москва) – радянський фізик, академік АН СРСР (обраний у 1946). Лауреат Нобелівської, Ленінської та трьох Сталінських премій. Член академії наук Данії, Нідерландів, Американської академії наук і мистецтв (США), Французького фізичного товариства, Лондонського фізичного товариства і Лондонського королівського товариства.

Наукова спадщина Ландау велика і різноманітна. Він розробив теорію діамagnetизму вільних електронів – діамagnetизм Ландау (1930р.), разом з Євгеном Ліфшицем створив теорію доменної структури феромагнетиків і отримав рівняння руху магнітного моменту – рівняння Ландау-Ліфшиця (1935р.), ввів поняття антиферомагнетизму як особливої фази магнетика (1936р.), вивів кінетичне рівняння для плазми у випадку кулонівської взаємодії і встановив вигляд інтеграла зіткнень для заряджених частинок (1936р.), створив теорію фазових переходів (1935-1937р.), уперше отримав співвідношення між щільністю рівнів у ядрі та енергією збудження (1937р.), створив теорію надтекучості гелію, поклавши тим самим початок створенню фізики квантових рідин (1940-1941р.), спільно з В.Л. Гінзбургом побудував феноменологічну теорію надпровідності (1950р.), розвинув теорію фермі-рідини

⁴Принцип Ле-Шательє: якщо на систему, яка знаходиться у рівновазі, впливати ззовні, змінюючи яку-небудь із умов (температуру, тиск, концентрацію і т.д.), то рівновага зміщується таким чином, щоб зменшити ці зміни.

(1956р.), запропонував закон збереження комбінованої парності та висунув теорію двокомпонентного нейтрино (1957р.). За піонерські дослідження в галузі теорії конденсованих середовищ, зокрема теорії рідкого гелію, у 1962 році Ландау була присуджена Нобелівська премія з фізики.

Величезною заслугою Ландау є створення радянської школи фізиків-теоретиків, до складу якої входили такі вчені, як І.Я. Померанчук, І.М. Ліфшиць, Є.М. Ліфшиць, О.О. Абрикосов, А.Б. Мігдал, Л.П. Питаєвський, І.М. Халатников, Ю.М. Каган.

Ландау спільно з Євгеном Ліфшицем є творцем класичного десяти томного курсу теоретичної фізики, що неодноразово видавався та був перекладений декількома мовами.

Якщо параметр зовнішньої дії r менший від критичного значення $r = 1$, то залежність $E(\eta)$ має монотонно зростаючий характер з мінімумом у точці $\eta_0 = 0$, і система не упорядковується. У закритичній області $r > 1$ синергетичний потенціал набуває мінімуму при ненульовому значенні параметра порядку

$$\eta_0 = \sqrt{r - 1}, \quad (1.7)$$

яке зростає за кореневою залежністю. При різкому переході до закритичної області $r > 1$ параметр порядку за час

$$\tau = (r - 1)^{-1} \quad (1.8)$$

набуває стаціонарного значення (1.7) за дебаївським законом

$$\eta = \eta_0 (1 - e^{-t/\tau}). \quad (1.9)$$

Викладена картина відповідає безперервному фазовому переходу, коли впорядкований і невпорядкований стани синергетичного потенціалу (1.6) не розділені бар'єром, а параметр порядку повільно зростає з часом згідно із законом (1.9). Для переходу до переривчастого перетворення будемо вважати, що

час релаксації параметра порядку τ_η зростає з його величиною η згідно із залежністю [18]

$$\frac{1}{\tau_\eta} = 1 + \frac{\kappa}{1 + (\eta/\eta_\tau)^2}, \quad (1.10)$$

що характеризується позитивними константами κ, η_τ . У результаті права частина першого з рівнянь (1.2) набуває доданка $-\kappa\eta/[1 + (\eta/\eta_\tau)^2]$. Як і для безперервного перетворення адіабатичне наближення $\sigma \ll 1, b$ приводить до рівняння (1.5), де синергетичний потенціал (1.6) набуває вигляду

$$E = \left[\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{r}{2} \ln(1 + \eta^2) \right] + \frac{\kappa\eta_\tau^2}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{\eta}{\eta_\tau} \right)^2 \right]. \quad (1.11)$$

Для малих значень r залежність $E(\eta)$ має монотонно зростаючий характер з мінімумом $\eta_0 = 0$. У точці

$$r_{c0} = 1 + (\kappa - 1)\eta_\tau^2 + 2\eta_\tau\sqrt{\kappa(1 - \eta_\tau^2)} \quad (1.12)$$

з'являється плато, яке при $r > r_{c0}$ трансформується у мінімум, що відповідає стаціонарному значенню параметра порядку $\eta_0 \neq 0$, і максимум, який розділяє мінімуми впорядкованої та невпорядкованої фаз. З подальшим зростанням параметра r мінімум впорядкованої фази заглиблюється, а висота міжфазного бар'єра зменшується, набуваючи нульового значення для критичного параметра

$$r_c = 1 + \kappa. \quad (1.13)$$

Для $r \geq r_c$ залежність $E(\eta)$ має той самий вигляд, що і для безперервного фазового переходу. Критичне значення (1.13) буде більшим за порогове (1.12), якщо параметр κ перевищуватиме граничну величину

$$\kappa_{min} = \frac{\eta_\tau^2}{1 - \eta_\tau^2}. \quad (1.14)$$

Стационарні значення параметра порядку

$$\eta_0^\mp = \eta_{00} \left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{\eta_\tau^2}{\eta_{00}^4} (r - r_c)} \right]^{1/2}, \quad (1.15)$$

$$\eta_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} [(r - 1) - (1 + \kappa) \eta_\tau^2]$$

відповідають нестійкому стану η_0^- , коли синергетичний потенціал має максимум, і стійкому η_0^+ у його мінімумі. Тут керуючий параметр

$$S_0 = \frac{(1 + \eta_{00}^2) - \sqrt{(1 + \eta_{00}^2)^2 - (1 - \eta_\tau^2) S}}{1 - \eta_\tau^2} \quad (1.16)$$

повільно спадає зі зростанням r від значення

$$S_{c0} = 1 + \eta_\tau \sqrt{\frac{\kappa}{1 - \eta_\tau^2}}, \quad (1.17)$$

що відповідає $r = r_{c0}$, до $S \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$.

Отримані співвідношення (1.12)–(1.17) приводять до залежностей, показаних на рис.1.1. З них видно, що при повільному збільшенні параметра нагнітання у точці $r = r_c$ відбувається стрибок параметра η_0 від нуля до $\sqrt{2}\eta_{00}$, а потім його значення повільно зростає згідно із законом (1.15); при цьому керуючий параметр перестрибує з лінійної ділянки $S = r$ на ту, що спадає (1.16). Для зворотного зменшення r від великих значень параметр порядку η_0^+ спадає згідно із залежністю (1.15), а у точці $r = r_{c0}$, $\eta_0 = \eta_{00}$ стрибком спадає до нуля; відповідно керуючий параметр спочатку зростає згідно із законом (1.16), а після стрибка до верхньої ділянки $S = r$ починає спадати. Така картина означає наявність гістерезису, обумовленого енергетичним бар'єром, який виявляється при $\eta_\tau < 1$. Характерно, що зі зменшенням параметра κ до мінімального рівня (1.14) рівняння

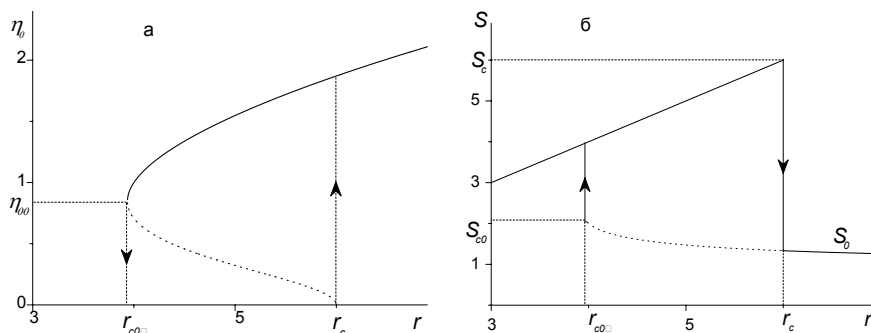


Рисунок 1.1 — Залежність стаціонарних значень параметра порядку (а) та керуючого параметра (б) від параметра нагнітання для $\eta_T = 0.5$, $\kappa = 5$

(1.12), (1.13), (1.17) зводяться до граничних співвідношень $r_{c0} \rightarrow r_c$, $S_{c0} \rightarrow r_c$, які означають звуження петлі гістерезису в точку.

Наведена синергетична схема відповідає феноменологічній картині фазових переходів, у рамках якої керуючий параметр S зводиться до ентропії, а синергетичний потенціал E — до внутрішньої енергії. Принципова відмінність цієї схеми від термодинамічної відображається у залежності параметра S від стану системи, що самоорганізується. Це обумовлено відкритим характером синергетичної системи, яка стає рівноправною до термостата.

1.3 Автоколивання, обумовлені біфуркацією Хопфа

З формальної точки зору термодинамічне перетворення відповідає простим типам перебудови простору станів: за умов безперервного фазового переходу відбувається біфуркація

невпорядкованого стану до пари точок впорядкованої фази, які відповідають різним знакам параметра порядку. У разі переходу першого роду, окрім точки, що відповідає неспорядкованому стану, на фазовому портреті зароджуються сідла, що відповідають енергетичним бар'єрам, і вузли впорядкованої фази [18]. Незалежно від цих відмінностей термодинамічне перетворення характеризується тим, що при фазовому переході мінімум синергетичного потенціалу неспорядкованої фази трансформується в локальні мінімуми впорядкованого стану системи.

Цей підрозділ присвячений дослідженню складнішої картини, коли біфуркація Хопфа⁵ приводить до трансформації локального мінімуму впорядкованої фази до континуального набору мінімумів автомодульованого стану (див. рис.1.2). Очевидно, при цьому на фазовому портреті утворюється граничний цикл, що описує модуляцію параметра порядку [19]. Спочатку ми досліджуємо найбільш простий випадок, в якому біфуркація Хопфа приводить до одиничного граничного циклу, а в підрозділі 1.4 розглянемо складнішу ситуацію, коли перебудова системи виражається у появі набору граничних циклів, що відповідають множинному резонансу.

Згідно з теоремою про центральний багатовид [19] поблизу точки біфуркації еволюція системи, що має $n > 2$ ступенів свободи, визначається часовими залежностями пари дійсних змінних $X_1(t)$, $X_2(t)$. Тому задача зводиться до визначення умов, за яких рівняння руху цих змінних

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= F^{(1)}, & F^{(1)} &= F^{(1)}(X_1, X_2); \\ \dot{X}_2 &= F^{(2)}, & F^{(2)} &= F^{(2)}(X_1, X_2) \end{aligned} \quad (1.18)$$

приводять до розв'язання, що відповідає граничному циклу

⁵Для біфуркації Хопфа втрата стійкості дисипативною системою локальна, тому фазові траєкторії залишаються в околі точки рівноваги, що означає виникнення в цьому околі граничного циклу і, як наслідок, автоколивань.

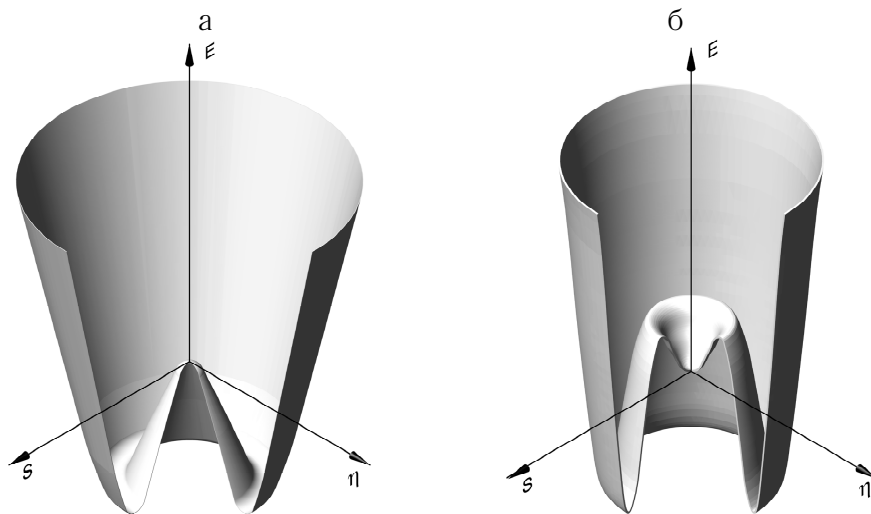


Рисунок 1.2 – Характерний тривимірний вигляд синергетичного потенціалу, що відповідає біфуркації Хопфа за відсутності (а) та за наявності (б) нестійкого циклу

(тут і далі крапка над символами означає диференціювання за часом, праві частини рівнянь (1.18) являють собою узагальнені сили, спряжені відповідним ступеням свободи). Простий приклад граничного циклу дає система лінійних рівнянь Лотки-Вольтерра

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \lambda X_1 - \omega X_2, \\ \dot{X}_2 &= \omega X_1 + \lambda X_2, \end{aligned} \quad (1.19)$$

визначена параметрами λ , ω . Дійсно, якщо поділити одне з цих рівнянь на інше, то подальше інтегрування за умови $\lambda = 0$ приводить до рівняння кола $X_1^2 + X_2^2 = \text{const}$ зі сталою, що визначає її радіус. Звідси бачимо, що у загальному випадку рівняння (1.18) дають граничний цикл, якщо їх лінійна складова зводиться до системи (1.19). Це означає, що в стаціонарному стані

$X_1 = X_{10}$, $X_2 = X_{20}$, де зникає залежність від часу, матриця Якобі

$$\Lambda_{\alpha\beta} \equiv \left. \frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial X_\beta} \right|_{X_\beta = X_{\beta 0}} ; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (1.20)$$

що зводиться до зворотної сприйнятливості, набуває канонічної форми

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

яка, незважаючи на простоту, має загальний вигляд. Дійсно, на діагональні компоненти матриці (1.21) накладається вимога, щоб вони одночасно зводилися до нуля у критичній точці, що відповідає зародженню граничного циклу. Тому вони можуть розрізнятися тільки чисельним коефіцієнтом, від якого легко позбавитися за рахунок вибору одиниць виміру. Що стосується недіагональних компонент, то збіг їх абсолютних величин є наслідком умови Онзагера на симетрію кінетичних коефіцієнтів у рівняннях (1.19), а вибір протилежних знаків забезпечує самоорганізацію системи.

Рівнянням (1.18) зручно надати векторну форму

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}, \quad (1.22)$$

використовуючи позначення

$$\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} \equiv \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

У рамках такого подання визначну роль відіграють власні значення Λ , $\bar{\Lambda}$ і вектори e_α , e_α^+ матриці (1.20), які задаються спряженими рівняннями

$$\sum_{\beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} e_\beta = \Lambda e_\alpha, \quad \sum_{\beta=1}^2 e_\beta^+ \Lambda_{\beta\alpha} = \bar{\Lambda} e_\alpha^+. \quad (1.24)$$

Тут показник Ляпунова

$$\Lambda \equiv \lambda + i\omega \quad (1.25)$$

визначається інкрементом λ та частотою ω . У канонічному випадку (1.21) власне значення (1.25) відповідає векторам

$$\vec{e} \equiv |e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^+ \equiv \langle e| = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ i), \quad (1.26)$$

що задовольняють умову нормування

$$\vec{e}^+ \vec{e} \equiv \langle e|e\rangle \equiv \sum_{\alpha=1}^2 e_{\alpha}^+ e_{\alpha} = 1. \quad (1.27)$$

Для надання канонічного вигляду рівнянню (1.22) введемо псевдовектор

$$\vec{x} \equiv |x\rangle = \vec{X} - \vec{X}_0, \quad (1.28)$$

відлічений від стаціонарного стану \vec{X}_0 , та нелінійну складову сили

$$\vec{f} = \vec{F} - \hat{\Lambda} \vec{x}. \quad (1.29)$$

У результаті (1.22) зводиться до вигляду

$$\dot{\vec{x}} = \hat{\Lambda} \vec{x} + \vec{f}(\vec{x}). \quad (1.30)$$

Визначимо комплексно-спряжені змінні:

$$\begin{aligned} z \equiv \langle e|x\rangle &= \sum_{\alpha=1}^2 x_{\alpha} e_{\alpha}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 + ix_2), \\ \bar{z} \equiv \langle x|e\rangle &= \sum_{\alpha=1}^2 x_{\alpha} e_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_1 - ix_2), \end{aligned} \quad (1.31)$$

що являють собою проекцію вектора стану (1.28) на власні вектори (1.26) матриці (1.21). Їх можна отримати дією оператора проектування

$$\hat{P} \equiv |e\rangle \langle e| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

на початковий псевдовектор (1.28), записаний у компонентній формі (1.23):

$$\hat{P}\vec{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + ix_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \equiv z\vec{e}. \quad (1.33)$$

Якщо помножити це рівняння на \vec{e}^+ , отримуємо матричний вираз для визначень (1.31)

$$\begin{aligned} z &= \vec{e}^+ \hat{P}\vec{x} \equiv \langle e|\hat{P}|x \rangle, \\ \bar{z} &= \vec{x}^+ \hat{P}\vec{e} \equiv \langle x|\hat{P}|e \rangle, \end{aligned} \quad (1.34)$$

останнє з яких є результатом комплексного сполучення першого з урахуванням ермітовості оператора \hat{P} . Використовуючи співвідношення (1.32), (1.26), (1.21), легко впевнитися в основних властивостях оператора проектування:

$$\hat{P}\vec{e} = \vec{e}, \quad \vec{e}^+ \hat{P} = \vec{e}^+; \quad \hat{P}^2 = \hat{P}, \quad \hat{P}^+ = \hat{P}, \quad \hat{P}\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}\hat{P}. \quad (1.35)$$

Врахування останньої дії оператора (1.32) на рівняння (1.30) з подальшим помноженням на $\langle e| \equiv \vec{e}^+$ та додаванням за компонентами дає канонічну форму Пуанкаре

$$\dot{z} = \Lambda z + v(z, \bar{z}), \quad v(z, \bar{z}) \equiv \vec{e}^+ \hat{P}\vec{f} = \langle e|\hat{P}|f \rangle, \quad (1.36)$$

в якій виділена лінійна складова узагальненої сили.

Легко впевнитися, що перехід від компонентного подання

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= F^{(1)}(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= F^{(2)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.37)$$

до канонічного рівняння руху для комплексної змінної $z \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2)$, визначеної рівностями (1.31), (1.34), досягається поданням правої частини (1.36) комплексною силою

$$F = F(z, \bar{z}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}F^{(1)}(x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z})) + i \frac{1}{\sqrt{2}}F^{(2)}(x_1(z, \bar{z}), x_2(z, \bar{z})). \quad (1.38)$$

Її нелінійна складова $v \equiv F - \Lambda z$ задається рядом⁶

$$v(z, \bar{z}) = \sum_{2 \leq m+n \leq 3} \frac{v_{mn}}{m!n!} z^m \bar{z}^n + O(|z|^4), \quad |z|^2 \equiv z\bar{z} \quad (1.39)$$

з коефіцієнтами

$$v_{mn} \equiv \left. \frac{\partial^{m+n} v(z, \bar{z})}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \right|_{z, \bar{z}=0} = \left. \frac{\partial^{m+n} F(z, \bar{z})}{\partial z^m \partial \bar{z}^n} \right|_{z, \bar{z}=0}. \quad (1.40)$$

Врахування рівняння (1.38) та зв'язку між похідними

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial x_1}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

приводить співвідношення (1.40) до вигляду

$$\begin{aligned} v_{mn} &= 2^{-\frac{1+m+n}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n \times \\ &\times [F^{(1)}(x_1, x_2) + iF^{(2)}(x_1, x_2)]_{x_1, x_2=0}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

⁶Ми не зупиняємося на причинах вибору верхніх меж для сум у (1.39), (1.47), припускаючи їх інтуїтивно зрозумілими. Математичне обґрунтування такого вибору можна знайти у [19].

Звідси для різних m, n маємо

$$v_{11} = 2^{-3/2} \left[\left(F_{11}^{(1)} + F_{22}^{(1)} \right) + i \left(F_{11}^{(2)} + F_{22}^{(2)} \right) \right], \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_{20} \\ v_{02} \end{pmatrix} &= 2^{-3/2} \left(F_{11}^{(1)} - F_{22}^{(1)} \pm 2F_{12}^{(2)} \right) + \\ &+ i 2^{-3/2} \left(F_{11}^{(2)} - F_{22}^{(2)} \mp 2F_{12}^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} v_{21} &= \frac{1}{4} \left[\left(F_{111}^{(1)} + F_{122}^{(1)} \right) + \left(F_{112}^{(2)} + F_{222}^{(2)} \right) \right] + \\ &+ i \frac{1}{4} \left[\left(F_{111}^{(2)} + F_{122}^{(2)} \right) - \left(F_{112}^{(1)} + F_{222}^{(1)} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.45)$$

де позначено

$$F_{\alpha\beta}^{(\delta)} \equiv \frac{\partial^2 F^{(\delta)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Big|_{\vec{x}=0}, \quad F_{\alpha\beta\gamma}^{(\delta)} \equiv \frac{\partial^3 F^{(\delta)}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} \Big|_{\vec{x}=0}; \quad \alpha, \beta, \gamma; \delta = 1, 2. \quad (1.46)$$

Перейдемо тепер до комплексного параметра порядку ϕ , зв'язок якого зі змінною z задається рівностями

$$z = \phi + \chi(\phi, \bar{\phi}), \quad \chi \equiv \sum_{2 \leq m+n \leq 4} \frac{\chi_{mn}}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n. \quad (1.47)$$

Коефіцієнти χ_{mn} визначаються таким чином, щоб рівняння (1.36) набрало вигляду Гінзбурга-Ландау (у математичній термінології – нормальну форму Пуанкаре, що не містить квадратичних доданків)

$$\dot{\phi} = \Lambda \phi + C |\phi|^2 \phi + O(|\phi|^4), \quad |\phi|^2 \equiv \phi \bar{\phi}. \quad (1.48)$$

Задача зводиться до виразу параметра нелінійності C через структурні константи v_{mn} , визначені рівностями (1.40).

Диференціювання складної функції $z(t) = \phi(t) + \chi(\phi(t), \bar{\phi}(t))$ дає

$$\dot{z} = \dot{\phi} + \chi_\phi \dot{\phi} + \chi_{\bar{\phi}} \dot{\bar{\phi}}; \quad \chi_\phi \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \phi}, \quad \chi_{\bar{\phi}} \equiv \frac{\partial \chi}{\partial \bar{\phi}}. \quad (1.49)$$

Віднімаючи (1.48) від (1.36), отримуємо рівняння

$$\chi_{\phi}\dot{\phi} + \chi_{\bar{\phi}}\dot{\bar{\phi}} = \Lambda\chi(\phi, \bar{\phi}) + [v(z, \bar{z}) - C|\phi|^2\phi] + O(|\phi|^5), \quad (1.50)$$

ліва частина якого впливає із (1.49), а у правій враховане перше рівняння (1.47). Виражаючи часові похідні з (1.48), з точністю до кубічних доданків, знаходимо рівняння

$$\begin{aligned} \phi\Lambda\chi_{\phi} + \bar{\Lambda}\bar{\phi}\chi_{\bar{\phi}} - \Lambda\chi &= \sum_{2 \leq m+n \leq 3} \frac{v_{mn}}{m!n!} (\phi + \chi)^m (\bar{\phi} + \bar{\chi})^n - \\ &- (C\phi + C\chi_{\phi}\phi + \bar{C}\chi_{\bar{\phi}}\bar{\phi})|\phi|^2, \end{aligned} \quad (1.51)$$

у якому врахований розклад (1.39). Згідно з останнім співвідношенням (1.47), ліва частина цього рівняння має вигляд

$$\phi\Lambda\chi_{\phi} + \bar{\Lambda}\bar{\phi}\chi_{\bar{\phi}} - \Lambda\chi = \sum_{2 \leq m+n \leq 4} \frac{\chi_{mn}(m\Lambda + n\bar{\Lambda} - \Lambda)}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n. \quad (1.52)$$

Для визначення коефіцієнтів χ_{mn} із $m+n = 2$ розглянемо рівняння (1.51), утримуючи складові другого порядку за $\phi, \bar{\phi}$. Згідно з (1.52) при цьому ліва частина записується у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{m+n=2} \frac{\chi_{mn}(m\Lambda + n\bar{\Lambda} - \Lambda)}{m!n!} \phi^m \bar{\phi}^n &= \frac{\chi_{20}}{2} \Lambda \phi^2 + \chi_{11} \bar{\Lambda} \phi \bar{\phi} + \\ &+ \frac{\chi_{02}}{2} (2\bar{\Lambda} - \Lambda) \bar{\phi}^2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Порівнюючи її множники при $\phi^2, \phi\bar{\phi}$ і $\bar{\phi}^2$ з відповідними коефіцієнтами у співвідношенні

$$\frac{v_{20}}{2} \phi^2 + v_{11} \phi \bar{\phi} + \frac{v_{02}}{2} \bar{\phi}^2, \quad (1.54)$$

до якого зводиться права частина (1.51), знаходимо

$$\chi_{20} = \frac{v_{20}}{\Lambda}, \quad \chi_{11} = \frac{v_{11}}{\Lambda}, \quad \chi_{02} = \frac{v_{02}}{2\bar{\Lambda} - \Lambda}. \quad (1.55)$$

Далі потрібно виділити у (1.51) доданки, що містять $|\phi|^2\phi$. При цьому в суму (1.52) дає внесок тільки доданок, що відповідає $m = 2, n = 1$, і ліва частина рівняння (1.51) набирає вигляду

$$\chi_{21} \frac{2\Lambda + \bar{\Lambda} - \Lambda}{2!1!} \phi^2 \bar{\phi} = \frac{\chi_{21}}{2} (\Lambda + \bar{\Lambda}) |\phi|^2 \phi = \chi_{21} \Re\Lambda |\phi|^2 \phi. \quad (1.56)$$

Відповідно сума у правій частині містить доданки

$$\begin{aligned} & \frac{v_{20}}{2} (\phi + \chi)^2 + v_{11} (\phi + \chi) (\bar{\phi} + \bar{\chi}) + \frac{v_{02}}{2} (\bar{\phi} + \bar{\chi})^2 + \\ & + \frac{v_{21}}{2} (\phi + \chi)^2 (\bar{\phi} + \bar{\chi}), \end{aligned} \quad (1.57)$$

що приводять до множника перед $|\phi|^2\phi$

$$\begin{aligned} & v_{20}\chi_{11} + v_{11}(\chi_{20} + \bar{\chi}_{11}) + v_{02}\bar{\chi}_{02} + \frac{v_{21}}{2} = \\ & = 2v_{11}v_{20} \frac{\Re\Lambda}{|\Lambda|^2} + \frac{|v_{11}|^2}{\Lambda} + \frac{|v_{02}|^2}{2\Lambda - \bar{\Lambda}} + \frac{v_{21}}{2}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

де остання рівність враховує вигляд коефіцієнтів (1.55). Оскільки доданки рівняння (1.51), що містять $\chi_\phi |\phi|^2\phi$ і $\chi_{\bar{\phi}} |\phi|^2\bar{\phi}$, дають внесок вищого порядку, ніж $|\phi|^2\phi$, то їх можна випустити, і рівності (1.55), (1.56) та (1.58) становлять параметр нелінійності рівняння (1.48) у вигляді

$$C = 2v_{11}v_{20} \frac{\Re\Lambda}{|\Lambda|^2} + \frac{|v_{11}|^2}{\Lambda} + \frac{|v_{02}|^2}{2\Lambda - \bar{\Lambda}} + \frac{v_{21}}{2} - \chi_{21}\Re\Lambda. \quad (1.59)$$

Знайдений вираз (1.59) є неповним, оскільки містить невідомий коефіцієнт χ_{21} , визначення якого вимагає врахування не тільки доданків, пропорційних $|\phi|^2\phi$, але і кубічних доданків $\phi^3 |\phi|^2\bar{\phi}$, $\bar{\phi}^3$ [19]. Слід, проте, врахувати, що параметр нелінійності міститься тільки у доданку вищого порядку ряду (1.48), де дійсне значення показника Ляпунова $\Lambda \equiv \lambda + i\omega$ беруть таким, що

дорівнює нулю. Тоді з (1.59) отримуємо вираз для показника Флоке $\Phi \equiv C|_{\lambda=0}$

$$\Phi = \frac{1}{2}v_{21} - \frac{i}{\omega_0} \left(|v_{11}|^2 + \frac{1}{3}|v_{02}|^2 \right), \quad (1.60)$$

де введена характерна частота $\omega_0 \equiv \omega|_{\lambda=0}$. Стаціонарна точка, що зароджує граничний цикл, стає нестійкою за умови $\Re\Phi < 0$, що зводиться до нерівності $\Re v_{21} < 0$. У результаті умова утворення граничного циклу набирає вигляду

$$\left(F_{111}^{(1)} + F_{122}^{(1)} \right) + \left(F_{222}^{(2)} + F_{112}^{(2)} \right) < 0, \quad (1.61)$$

де врахована рівність (1.45).

Зазначимо, що в монографії [19] замість (1.60) отримано вираз

$$\Phi = \frac{1}{2}v_{21} - \frac{i}{\omega_0} \left(|v_{11}|^2 + \frac{1}{6}|v_{02}|^2 - \frac{1}{2}v_{20}v_{11} \right). \quad (1.62)$$

Але при цьому у визначеннях (1.43)–(1.45) структурних констант $v_{\alpha\beta}$ замість (1.37) використовувалося рівняння $\dot{\vec{y}} = \vec{\mathcal{F}}(\vec{y})$, де відхилення від стаціонарного стану \vec{X}_0 визначалося різницею (1.28), комбінованою з подальшим поворотом:

$$\vec{y} \equiv \mathcal{P}\vec{x}, \quad \vec{x} \equiv \vec{X} - \vec{X}_0. \quad (1.63)$$

Відповідна матриця

$$\hat{\mathcal{P}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\Lambda_{11}}{\omega_0} & -\frac{\Lambda_{12}}{\omega_0} \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

приводить комплексну силу (1.38) до вигляду

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}F. \quad (1.65)$$

У результаті знайдений у [19] критерій утворення граничного циклу виражається дуже громіздкою нерівністю:

$$2\omega_0 \left[\left(\mathcal{F}_{111}^{(1)} + \mathcal{F}_{122}^{(1)} \right) + \left(\mathcal{F}_{222}^{(2)} + \mathcal{F}_{112}^{(2)} \right) \right] < \\ \left(\mathcal{F}_{11}^{(1)} + \mathcal{F}_{22}^{(1)} \right) \left(\mathcal{F}_{11}^{(2)} - \mathcal{F}_{22}^{(2)} - 2\mathcal{F}_{12}^{(1)} \right) + \\ \left(\mathcal{F}_{11}^{(2)} + \mathcal{F}_{22}^{(2)} \right) \left(\mathcal{F}_{11}^{(1)} - \mathcal{F}_{22}^{(1)} + 2\mathcal{F}_{12}^{(2)} \right). \quad (1.66)$$

Тут на відміну від (1.61) нижні індекси вказують диференціювання за компонентами перетвореної координати \vec{y} , а не початкової \vec{x} .

Для підтвердження правомірності критерію (1.61) дослідимо систему Лоренца стосовно лазера, спонтанне випромінювання якого визначається рівняннями еволюції напруженості поля випромінювання E , поляризації середовища P і різниці заселеностей рівнів S [2]. У цьому випадку режим самоорганізованої модуляції можливий тільки за умови, що рівняння для напруженості поля набуває нелінійного доданка [20]:

$$\varphi(E) \equiv \frac{\kappa E}{1 + E^2/E_\tau^2}, \quad (1.67)$$

константи якого $\kappa > 0$, E_τ визначають дисперсію часу релаксації (1.10). У результаті поведінка системи описується рівняннями

$$\begin{aligned} \tau_E \dot{E} &= -E + a_E P - \varphi(E), \\ \tau_P \dot{P} &= -P + a_P E S, \\ \tau_S \dot{S} &= (S_e - S) - a_S E P. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Тут τ_E , τ_P , τ_S – масштаби зміни величин, зазначених індексами; a_E , a_P , a_S – позитивні константи зв'язку; S_e – параметр нагнітання. Виміряємо величини t , E , P , S у масштабах τ_E , $E_s = (a_P a_S)^{-1/2}$, $P_s = (a_E^2 a_P a_S)^{-1/2}$, $S_s = (a_E a_P)^{-1}$ відповідно. Тоді

рівняння (1.68) набирають вигляду

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -E + P - \varphi(E), \\ \sigma \dot{P} &= -P + ES, \\ \varepsilon \dot{S} &= (S_e - S) - EP,\end{aligned}\tag{1.69}$$

де введені співвідношення характерних часів $\sigma \equiv \tau_P/\tau_E$, $\varepsilon \equiv \tau_S/\tau_E$.

При виконанні адиабатичної умови $\tau_P \ll \tau_E$ ліву частину другого рівняння (1.69) можна брати такою, що дорівнює нулю, внаслідок чого поляризація виражається рівністю $P = ES$. Підставляючи її до першого та третього рівнянь (1.69), отримуємо систему

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -E(1 - S) - \varphi(E), \\ \dot{S} &= \varepsilon^{-1} [S_e - S(1 + E^2)].\end{aligned}\tag{1.70}$$

Стационарні стани відповідають невпорядкованому $(0, S_e)$ і впорядкованому станам (останнє визначається рівностями (1.15), (1.16), де як параметр порядку η слід розуміти напруженість E). Як показує подальший розгляд, поведінка системи визначається похідними функції $\varphi(E)$ у першому з рівнянь (1.69):

$$\begin{aligned}\varphi'(E) &= \kappa \frac{1 - E^2/E_\tau^2}{(1 + E^2/E_\tau^2)^2}, \\ \varphi''(E) &= -\frac{2\kappa (E/E_\tau)(3 - E^2/E_\tau^2)}{E_\tau (1 + E^2/E_\tau^2)^3}, \\ \varphi'''(E) &= -\frac{6\kappa (1 - 6(E/E_\tau)^2 + (E/E_\tau)^4)}{E_\tau^2 (1 + E^2/E_\tau^2)^4}.\end{aligned}\tag{1.71}$$

При цьому елементи матриці Якобі мають вигляд

$$\begin{aligned}\Lambda_{11} &= S - \Lambda_c, \quad \Lambda_c \equiv 1 + \varphi'(E); \quad \Lambda_{12} = E; \\ \Lambda_{21} &= -2\varepsilon^{-1}SE; \quad \Lambda_{22} = -\varepsilon^{-1}(1 + E^2),\end{aligned}\tag{1.72}$$

де роль змінних X_1, X_2 відіграють величини E, S , яким потрібно надати значення $0, S_e$ у невпорядкованому стані та (1.15), (1.16) – у впорядкованому. У першому з них

$$\Lambda_{11} = S_e - S_c, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = 0, \quad \Lambda_{22} = -\varepsilon^{-1}. \quad (1.73)$$

Рівняння для власних значень (1.24) дає інкремент

$$\lambda = \frac{1}{2} [(S - \Lambda_c) - \varepsilon^{-1} (1 + E^2)] \quad (1.74)$$

і характерну частоту

$$\omega = \frac{1}{2} \sqrt{8\varepsilon^{-1} E^2 S - [(S - \Lambda_c) + \varepsilon^{-1} (1 + E^2)]^2}. \quad (1.75)$$

Стационарний стан втрачає стійкість за умови

$$\varepsilon(S - \Lambda_c) > 1 + E^2, \quad (1.76)$$

а коливальна поведінка виявляється при

$$8\varepsilon E^2 S > [\varepsilon(S - \Lambda_c) + (1 + E^2)]^2. \quad (1.77)$$

Для невпорядкованого стану $(0, S_e)$ перша з цих умов набирає вигляду

$$S_e > S_c + \varepsilon^{-1}, \quad (1.78)$$

а друга ніколи не виконується. Це означає, що граничний цикл не може зароджуватися з невпорядкованого стану, і далі ми розглянемо тільки впорядкований.

Для перевірки критерію зародження циклу (1.61) випишемо ненульові похідні узагальненої сили:

$$\begin{aligned} F_{11}^{(1)} &= -\varphi''(E_0), & F_{12}^{(1)} &= 1; \\ F_{11}^{(2)} &= -2\varepsilon^{-1} S_0, & F_{12}^{(2)} &= -2\varepsilon^{-1} E_0; \\ F_{111}^{(1)} &= -\varphi'''(E_0); & F_{112}^{(2)} &= -2\varepsilon^{-1}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Тоді з урахуванням (1.71) нерівність (1.61) набирає вигляду

$$3 \frac{\varepsilon \kappa}{E_\tau^2} \frac{1 - 6(E_0/E_\tau)^2 + (E_0/E_\tau)^4}{(1 + E_0^2/E_\tau^2)^4} < 1. \quad (1.80)$$

Значення параметрів S_e , κ , за яких реалізується ця умова, показані на рис.1.3. З нього видно, що граничний цикл утворюється при значному нагнітанні S_e і великих параметрах

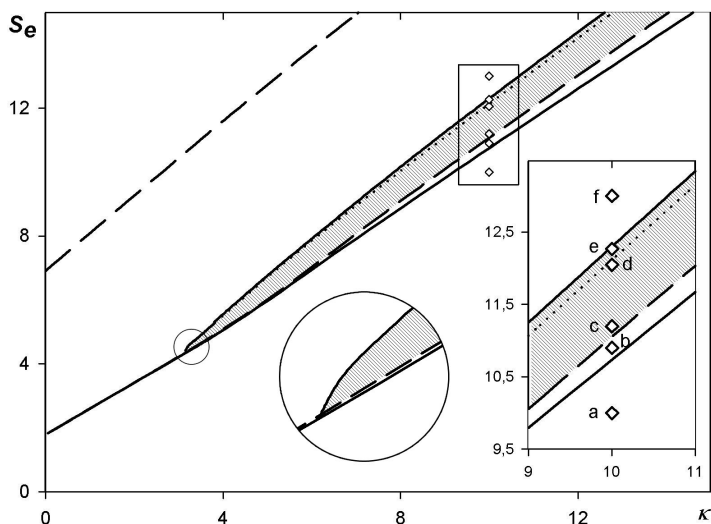


Рисунок 1.3 – Фазова діаграма, що визначає область стійкого граничного циклу (виділена штрихуванням) при $E_\tau = 0.9$. Нижня суцільна лінія задається умовою $\Phi = 0$, верхня – рівністю $C = 0$ при $\lambda < 0$; штрихові лінії визначаються умовою $\Im\omega = 0$, пунктирна – рівністю $\lambda = 0$

нелінійності κ (згідно з [20], зростання параметра E_τ також розширює область самоорганізованої модуляції). Характерно,

що значення параметрів S_e , κ і E_τ , при яких реалізується режим самоорганізованої модуляції, не завжди задаються умовою $\Re\Phi < 0$, яка згідно з (1.80) визначає стійкість граничного циклу (на рис.1.3 цій умові відповідає нижня суцільна лінія). При великих κ нижня межа зародження граничного циклу (штрихова лінія) визначається умовою $\Im\omega = 0$, що забезпечує коливальну поведінку з частотою (1.75). З іншого боку, незважаючи на стійкість впорядкованого стану з інкрементом $\lambda < 0$, вище за пунктирну лінію може реалізуватися режим самоорганізованої модуляції, до якого впорядкована система переходить за сценарієм фазового переходу першого роду. У цьому випадку верхня межа граничного циклу визначається умовою $C = 0$ при $\lambda < 0$, яка накладається на параметр нелінійності (1.59).

Для підтвердження правомірності знайдених умов було проведено чисельне розв'язування рівнянь (1.70) при значеннях параметрів, що відповідають точкам $a-f$ на рис.1.3. Вибір цих точок визначається такими умовами ($\kappa, E_\tau = \text{const}$):

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \lambda < 0, \quad \Im\omega \neq 0, \quad \Phi > 0; \\
 b) \quad & \lambda > 0, \quad \Im\omega \neq 0, \quad \Phi < 0; \\
 c) \quad & \lambda > 0, \quad \Im\omega = 0, \quad \Phi < 0; \\
 d) \quad & \lambda > 0, \quad \Im\omega = 0, \quad \Phi < 0; \\
 e) \quad & \lambda < 0, \quad \Im\omega = 0, \quad C < 0; \\
 f) \quad & \lambda < 0, \quad \Im\omega = 0, \quad C > 0.
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

Згідно з рис.1.4, граничний цикл утворюється в точках c, d, e , і відсутній у станах a, b, f . Відповідно до рис.1.3 це повністю підтверджує критерії (1.61), (1.76) і (1.77) щодо системи Лоренца (1.69).

Завершуючи дослідження самоорганізованої модуляції, розглянемо залежність $\varphi(E)$ сили від параметра порядку, яка забезпечує виконання умови (1.61). Згідно з теорією катастроф [21], зовнішня сила $\varphi_{\text{ext}} \equiv -\partial V_{\text{ext}}/\partial E$ визначається

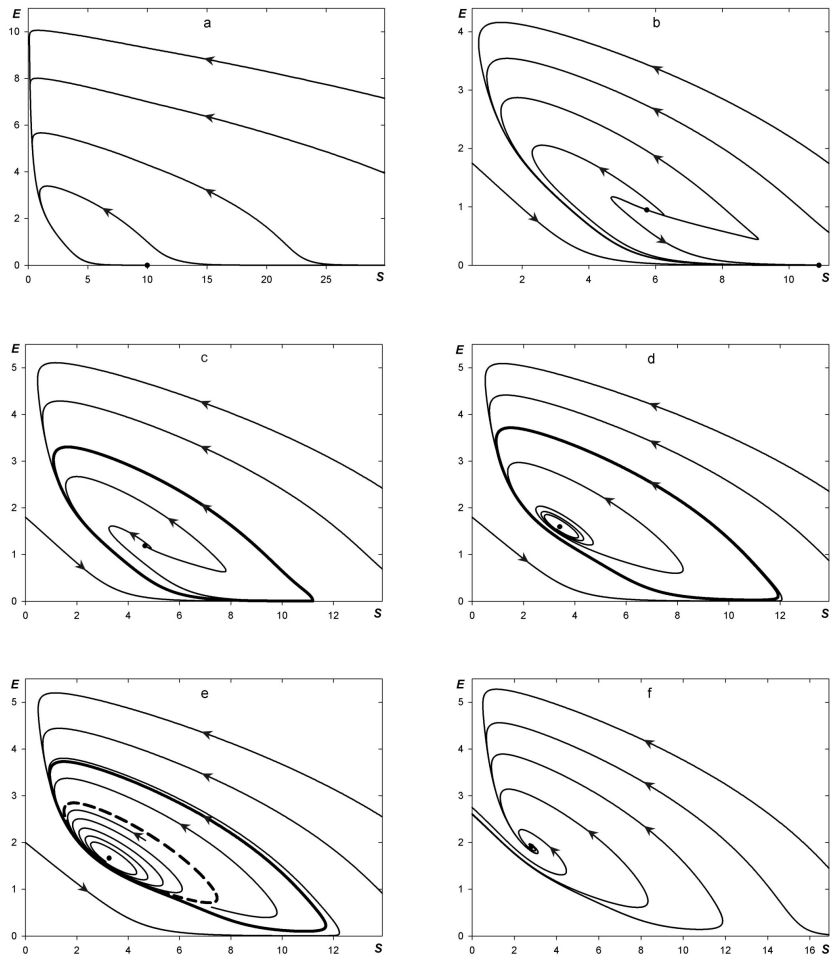


Рисунок 1.4 — Вигляд фазових портретів, що відповідають точкам $a-f$ на рис.1.3 (товста суцільна лінія відповідає стійкому граничному циклу, штрихова — нестійкому)

потенціалом

$$V_{\text{ext}} = AE + \frac{B}{2}E^2 + \frac{C}{3}E^3 + \frac{D}{4}E^4 + \frac{F}{5}E^5, \quad (1.82)$$

вигляд якого задається вибором параметрів A, B, C, D, F . При цьому можливі сценарії поведінки системи вичерпуються трьома типами універсальних деформацій – *складкою*, *збіркою* або *хвостом ластівки*. Перша з них забезпечується, якщо в (1.82) покласти $B = D = F = 0$, а параметри A, C вважати довільними. У разі *збірки* маємо $C = F = 0$, а сталі A, B, D довільні. Для *хвоста ластівки* $D = 0$, а параметри A, B, C, F є вільними. Дослідження універсальних деформацій показало [22], що будь-яка з них забезпечує тільки вироджений випадок, в якому умова утворення граничного циклу $\Re\Phi = 0$ супроводжується виконанням вимоги $\lambda = 0$ втрати стійкості вузла, що охоплюється цим циклом. Характерно, що обидві названі умови забезпечуються тільки при фіксованих значеннях параметрів A, B, C, D, F , вибір яких обмежений лінією в утворюваному ними просторі, при цьому ні при якому виборі цих параметрів не виконується умова стійкості граничного циклу $\Re\Phi < 0$. Таким чином, жодна з універсальних деформацій не приводить до граничного циклу. З фізичної точки зору це обумовлено тим, що потенціал (1.82), який задає ці деформації, визначається тільки зовнішньою дією і не залежить від стану системи, що самоорганізується.

Як показує викладена схема, зовсім інша ситуація складається при включенні нелінійної сили (1.67): її дія приводить спочатку до фазового переходу першого роду, а потім до біфуркації Хопфа, що зароджує модуляцію параметра порядку E і керуючого параметра S . Подання рівняння Гінзбурга-Ландау (1.48) у формі Ландау-Халатнікова (1.5) показує, що картина самоорганізованої модуляції визначається ефективним потенціалом

$$V_{\text{eff}} = -\Lambda|\phi|^2 - \frac{C}{2}|\phi|^4, \quad (1.83)$$

параметри якого задаються рівняннями (1.25), (1.59). Зі зміною модуля параметра порядку $\eta \equiv |\phi|$ дійсна частина цього потенціалу

$$|V_{\text{eff}}| = -\lambda\eta^2 - \frac{\Phi}{2}\eta^4, \quad \lambda \equiv \Re\Lambda, \quad \Phi \equiv \Re C|_{\lambda=0} \quad (1.84)$$

набуває мінімуму в точці $\eta_0 = \sqrt{-\lambda/\Phi}$, якщо виконуються умови

$$\lambda > 0, \quad \Phi < 0. \quad (1.85)$$

Вище ми довели, що ці умови визначають зародження граничного циклу для потенціалу, зображеного на рис.1.2а.

1.4 Періодична множина граничних циклів

У попередньому підрозділі ми показали, що біфуркація Хопфа приводить до швидкої зміни пари спряжених змінних, які визначають картину граничного циклу. Якщо, окрім швидких змінних, є пов'язані з ними повільні, то біфуркація Хопфа може привести до істотної перебудови їх динаміки. Покажемо це на основі рівнянь Гамільтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \quad \{q_i\} = q, Q, \quad \{p_i\} = p, P \quad (1.86)$$

для швидких і повільних координат q, Q і спряжених з ними імпульсів p, P (тут і далі крапка над змінною означає її диференціювання за часом). Відповідний гамільтоніан

$$H(q, p; Q, P) = H_s(Q, P) + H_f(q, p; Q) \quad (1.87)$$

поділяється на складову $H_s(Q, P)$, яка залежить від повільних змінних, і внесок $H_f(p, q; Q)$, величина якого визначається не лише швидкими змінними, але і повільною координатою.

Згідно зі стандартною схемою [23] перейдемо від швидких змінних q, p до канонічної пари, яка зводиться до кута φ , що швидко змінюється, та дії I , що змінюється повільно. Цей перехід не змінює перший доданок гамільтоніана (1.87), перетворюючи другий згідно зі співвідношенням

$$H'_f(\varphi; I, Q) = H_f(q, p; Q) + \dot{Q} \frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial Q}, \quad (1.88)$$

вигляд якого задається функцією $\Psi(q; I, Q)$, що визначається такими зв'язками:

$$\frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial Q} = P, \quad \frac{\partial \Psi(q; I, Q)}{\partial I} = \varphi. \quad (1.89)$$

Ураховуючи швидку зміну кута φ , природно усереднити за ним доданок (1.88):

$$H'(I, Q) \equiv \langle H'_f(\varphi; I, Q) \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H'_f(\varphi; I, Q) d\varphi. \quad (1.90)$$

Для знаходження гамільтоніана (1.90) необхідно замість багатозначної функції $\Psi(q; I, Q)$ використати однозначну визначену функцію

$$\Phi(\varphi; I, Q) \equiv \Psi(q(\varphi; I, Q); I, Q), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (1.91)$$

Тоді останній доданок у рівності (1.88) визначається співвідношенням

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Q} = \frac{\partial \Psi}{\partial Q} + p \frac{\partial q}{\partial Q}. \quad (1.92)$$

Його використання приводить до такої форми середнього (1.90):

$$H'(I, Q) = H(I, Q) + \dot{Q} \left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial Q} - p \frac{\partial q}{\partial Q} \right\rangle, \quad H(I, Q) \equiv \langle H_f(q, p; Q) \rangle. \quad (1.93)$$

У результаті використання канонічної пари змінних *дія-кит* дає усереднене значення гамільтоніана (1.87) у вигляді

$$\begin{aligned} H_{ef}(I; Q, P) &\equiv \langle H'(\varphi, I; P, Q) \rangle = \\ &= \mathcal{H}(I; Q, P) + \dot{Q} \left(\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial Q} \right\rangle - \left\langle p \frac{\partial q}{\partial Q} \right\rangle \right), \end{aligned} \quad (1.94)$$

де перший доданок

$$\mathcal{H}(I; Q, P) \equiv H(I, Q) + H_s(Q, P) \quad (1.95)$$

залежить тільки від повільних змінних.

Рівняння руху цих змінних визначаються умовою екстремуму ефективної дії [23]

$$S_{ef}\{Q(t), P(t); I(t)\} \equiv \int_{t_{in}}^{t_f} \left[P(t) \dot{Q}(t) - H_{ef}(I(t); Q(t), P(t)) \right] dt, \quad (1.96)$$

форма якого задається гамільтоніаном (1.94) (тут t_{in} , t_f становлять початковий та кінцевий моменти часу). Варіація цього виразу за узагальненим імпульсом приводить до рівняння руху

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\alpha}, \quad (1.97)$$

яке зберігає початкову форму (1.86) (тут і далі вважається, що повільні змінні становлять векторні величини з компонентами Q_α , P_α). З іншого боку, варіація дії (1.96) за повільною координатою дає рівняння

$$\dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q_\alpha} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\beta}, \quad (1.98)$$

що містить доданок, обумовлений дією ефективного поля, напруженість якого задається антисиметричним тензором

$$F_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial A_\beta}{\partial Q_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial Q_\beta} \quad (1.99)$$

з векторним потенціалом

$$A_\alpha \equiv \left\langle p_\beta \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} \right\rangle. \quad (1.100)$$

Тут використане правило суми за грецькими індексами, що повторюються.

Отримані співвідношення (1.98)–(1.100) означають, що швидкі зміни величин, які залежать від повільних змінних, індукують ефективне поле, потенціал якого визначається кореляцією між змінами швидкого імпульсу та швидкістю зміни швидкої координати зі зростанням повільної [24]. За повною аналогією з обертанням надтекучого He^4 це означає, що біфуркація Хопфа приводить до обертання не лише конфігураційної точки, але і всієї області фазового простору, обмеженої граничним циклом. Таким чином, фазова площина системи поводить себе не як математичний, а як фізичний об'єкт [25].

Зазначимо, що названий результат отримано для гамільтонових систем, тоді як рівняння Лоренца, що знаходиться в основі розгляду, наведеного у попередньому підрозділі, описують дисипативну систему. Проте із співвідношень (1.86)–(1.100) легко побачити, що проведений розгляд вимагає гамільтонової динаміки тільки для швидких змінних, а повільні можуть змінюватися довільним чином. Маючи на увазі цю обставину, розглянемо кінцеву область фазової площини, яка утворюється координатою q та імпульсом p і обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}_0$ і моментом інерції I . З фізичної точки зору величина $\vec{\omega}_0$ визначає частоту зовнішнього поля, а момент інерції I зводиться до повної дії фазової площини, що обертається. Якщо вона поводить себе як твердий диск, то фазова точка з координатою \mathbf{r} , відліченою від центра обертання, має лінійну швидкість $\mathbf{v}_n = [\vec{\omega}_0 \mathbf{r}]$.

Вище ми показали, що біфуркація Хопфа приводить до утворення граничного циклу, який індукує ефективне поле,

визначене потенціалом (1.100) і напруженістю (1.99). Для фазової площини їх величини зводяться до лінійної та кутової швидкостей \mathbf{w} і $\vec{\omega}$, відповідно. Завдяки дії ефективного поля ці швидкості не збігаються з величинами \mathbf{v}_n і $\vec{\omega}_0$, обумовленими обертанням фазової площини як цілого. Дійсно, якщо утворення граничного циклу подати як впорядкування, що визначається комплексним параметром порядку $\phi = \eta e^{i\varphi}$, то градієнт фази $\mathbf{v}_s \equiv s\nabla\varphi$ з $\nabla \equiv \partial/\partial\mathbf{r}$ і елементарною дією s спрямований так, щоб компенсувати обертання фазового простору поза граничним циклом, де швидкість $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$. Формально це виражається у подовженні градієнта $\nabla \Rightarrow \nabla - (i/s)\mathbf{w}$ калібрувальним полем \mathbf{w} . На відміну від твердотільного обертання фазової площини його дія приводить до нелінійного зв'язку $\vec{\omega} = (1/2)\text{rot } \mathbf{w}$ між кутовою $\vec{\omega}$ і лінійною \mathbf{w} компонентами швидкості обертання.

Добре відомий приклад такої поведінки являє собою надтекучий He^4 , який знаходиться у посудині, що обертається [26, 27]. За аналогією з цим випадком густина ефективної енергії фазової площини, що обертається разом з набором граничних циклів, має вигляд

$$E = e(\eta) + \frac{1}{2} \left| (-is\nabla - \mathbf{w})\eta \right|^2 + \frac{I}{2}\omega^2. \quad (1.101)$$

У рамках феноменологічної схеми густина енергії, зумовлена утворенням граничних циклів, має вигляд (1.6), який поблизу точки біфуркації зводиться до розкладу Ландау

$$e(\eta) = a\eta^2 + \frac{b}{2}\eta^4 \quad (1.102)$$

з коефіцієнтами $a \equiv (1 - r)/2$, $b \equiv r/2$. Другий доданок у правій частині (1.101) визначає енергію неоднорідності з градієнтом, подовженим за рахунок векторного потенціалу калібрувального поля \mathbf{w} , а останній член становить кінетичну енергію площини, що обертається.

За наявності зовнішньої дії з частотою $\vec{\omega}_0$ поведінка системи задається густиною ефективного потенціалу

$$\tilde{E} = E - (I\vec{\omega}_0 + \mathbf{M})\vec{\omega}_0, \quad (1.103)$$

величина якого визначена у відношенні до площини, що обертається з кутовим моментом $\mathbf{M} = I(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)$. Стационарні розподіли параметра порядку $\eta(\mathbf{r})$ і відносної швидкості $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ задаються умовою екстремуму ефективного енергії

$$\mathcal{E}\{\eta(\mathbf{r}), \mathbf{w}(\mathbf{r})\} = \int \tilde{E}(\eta(\mathbf{r}), \mathbf{w}(\mathbf{r})) d\mathbf{r}, \quad (1.104)$$

де інтегрування проводиться по всій фазовій площині. При цьому граничні умови набирають вигляду:

- далеко від граничного циклу

$$\eta = 0, \quad \nabla\eta = 0, \quad \mathbf{w} = [\vec{\omega}_0, \mathbf{r}], \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_0; \quad (1.105)$$

- всередині граничного циклу

$$\eta = \eta_0, \quad \nabla\eta = 0, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \vec{\omega} = 0; \quad (1.106)$$

- на лінії граничного циклу

$$\mathbf{n}(-is\nabla - \mathbf{w})\eta = 0. \quad (1.107)$$

Тут \mathbf{n} — одиничний вектор, перпендикулярний до граничного циклу; $\eta_0 = \sqrt{-a/b}$ — стаціонарне значення параметра порядку, що відповідає мінімуму залежності (1.102).

Згідно з наведеними рівняннями густина енергії неупорядкованої фази, яка нескінченно віддалена від граничного циклу, дорівнює $\tilde{E}(0) = -(I/2)\vec{\omega}_0^2$, тоді як для впорядкованої області, обмеженої цим циклом, маємо $\tilde{E}(\eta_0) = -(|a|/2)\eta_0^2$.

У результаті умова фазової рівноваги $\tilde{E}(\eta_0) = \tilde{E}(0)$ визначає характерне значення кутової швидкості

$$\omega_c \equiv \sqrt{\frac{|a|\eta_0^2}{I}} = \sqrt{\frac{a^2}{Ib}}, \quad (1.108)$$

яке задає масштаб енергії $E_c \equiv I\omega_c^2 = |a|\eta_0^2 = a^2/b$. Окрім цього, визначимо характерні довжини λ , ξ та їх співвідношення

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{Ib}{4|a|}}, \quad \xi \equiv \sqrt{\frac{s^2}{2|a|}}; \quad \kappa \equiv \sqrt{\frac{I}{I_0}}, \quad I_0 \equiv \frac{2s^2}{b}. \quad (1.109)$$

Далі зручно вимірювати густину енергії \tilde{E} в одиницях E_c , величину параметра порядку η віднести до η_0 , кутову швидкість $\vec{\omega}$ – до ω_c , лінійні швидкості \mathbf{v}_n , \mathbf{w} – до $2\sqrt{2}\lambda\omega_c$, кутовий момент \mathbf{M} – до $2\sqrt{2}I\lambda\omega_c$, відстань r – до λ . Тоді густина енергії (1.103) зводиться до простого вигляду

$$\tilde{E} = \left| (-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{w})\eta \right|^2 - \left(\eta^2 - \frac{1}{2}\eta^4 \right) - \left(\vec{\omega}_0 - \frac{1}{2}\vec{\omega} \right) \vec{\omega}. \quad (1.110)$$

Якщо підставити цю рівність до повної енергії (1.104) і проваріювати отриманий функціонал, то отримуємо рівняння

$$\kappa^{-2}\nabla^2\eta = -(1 - \mathbf{w}^2)\eta + \eta^3, \quad (1.111)$$

$$-\text{rot rot } \mathbf{w} = \eta^2\mathbf{w}. \quad (1.112)$$

Згідно з [26, 27] їх розв'язання визначаються параметром κ , який задається двома останніми рівняннями (1.109). Зазвичай область зміни швидких змінних настільки мала, що виконується умова $\kappa \leq 2^{-1/2}$, і самоорганізація системи приводить до утворення єдиного граничного циклу. Цікавішу ситуацію маємо у тому разі, коли фазова площа настільки велика, що

реалізується обернена умова $\kappa > 2^{-1/2}$. Тоді в інтервалі кутових швидкостей $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$, обмежених граничними значеннями

$$\omega_{c1} \equiv \frac{\ln \kappa}{\sqrt{2}\kappa} \omega_c = \frac{|a|}{4s} \left(\frac{I}{I_0} \right)^{-1} \ln \frac{I}{I_0}, \quad (1.113)$$

$$\omega_{c2} \equiv \sqrt{2}\kappa\omega_c = |a|/s, \quad (1.114)$$

утворюється змішаний стан, який є набором колових граничних циклів, що обертаються та періодично розподілені за фазовою площиною, яка перебуває у спокої, незважаючи на дію зовнішнього моменту. Кожному з цих циклів відповідає елементарна дія $2\pi s$, а їх густина на одиницю площі досягає максимальної величини $N_{\max} = 1/\pi\xi^2$ для зовнішньої частоти $\omega_0 = \omega_{c2}$. При зменшенні частоти в інтервалі $0 < \omega_{c2} - \omega_0 \ll \omega_{c2}$ густина граничних циклів зменшується згідно з рівністю

$$\frac{N}{N_{\max}} = \frac{\omega_0}{\kappa} - \frac{\overline{\eta^2}}{2\kappa^2}, \quad (1.115)$$

у якій середнє за фазовою площиною значення $\overline{\eta^2}$ пов'язане з частотою ω_0 співвідношенням

$$\overline{\eta^2} = \frac{2\kappa}{\beta(2\kappa^2 - 1)}(\kappa - \omega_0), \quad \beta \equiv \overline{\eta^4}/(\overline{\eta^2})^2 = 0.1596. \quad (1.116)$$

При цьому середня частота

$$\overline{\omega} = \omega_0 - \overline{\eta^2}/2\kappa = \omega_0 - (\kappa - \omega_0)/\beta(2\kappa^2 - 1) \quad (1.117)$$

менша від зовнішньої ω_0 на величину

$$\overline{M} = -\overline{\eta^2}/2\kappa = -(\kappa - \omega_0)/\beta(2\kappa^2 - 1), \quad (1.118)$$

що дорівнює середній поляризації фазової площини завдяки обертанню граничних циклів. Максимальна величина кутової

швидкості досягається в їх центрах, а мінімальне значення $\omega_{\min} = \omega_0 - \sqrt{2}(\kappa - \omega_0)/(2\kappa^2 - 1)$ – у центрах трикутників, що утворюються решіткою граничних циклів (див. рис.1.5). Середня зміна ефективної енергії (1.104), обумовлена обертанням граничних циклів,

$$\bar{\mathcal{E}} = I\omega_c^2 \left(\frac{1}{2} + \bar{\omega}^2 - \frac{\bar{\eta}^4}{2} \right) = I\omega_c^2 \left[\frac{1}{2} + \bar{\omega}^2 - \frac{(\kappa - \bar{\omega})^2}{1 + \beta(2\kappa^2 - 1)} \right] \quad (1.119)$$

визначається середньою швидкістю $\bar{\omega}$, диференціювання за якою приводить до (1.117).

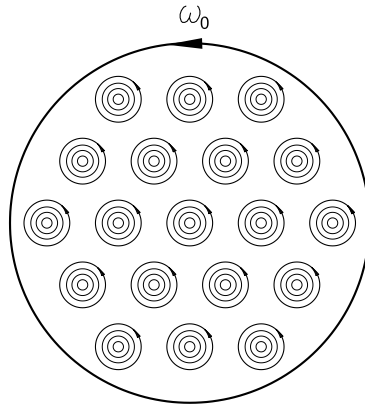


Рисунок 1.5 – Розподіл граничних циклів, що обертаються, за фазовою площиною при $\kappa > 2^{-1/2}$, $\omega_{c1} < \omega_0 < \omega_{c2}$

Поблизу нижньої межі ω_{c1} густина граничних циклів $N = (\kappa/2\pi)\bar{\omega}$ невелика, і їх можна розглядати незалежним чином. Зважаючи на те, що $w(r)$ змінюється на відстанях $r \sim 1$, а $\eta(r)$ – на довжинах $r \sim \kappa^{-1} \ll 1$, для відносної швидкості використаємо

рівняння (1.112) з $\eta^2 \approx 1$ і $\kappa \gg 1$:

$$w = -\kappa^{-1} K_1(r), \quad (1.120)$$

де $K_1(\mathbf{r})$ – функція Ганкеля уявного аргументу. Відповідно параметр порядку визначається рівнянням (1.111) з $w = -1/\kappa r$:

$$\begin{aligned} \eta &\simeq cr \quad \text{при} \quad r \ll \kappa^{-1}, \\ \eta^2 &\simeq 1 - (\kappa r)^{-2} \quad \text{при} \quad r \gg \kappa^{-1}, \end{aligned} \quad (1.121)$$

де c – позитивна константа. Із (1.120) випливає

$$\begin{aligned} w &\approx -1/\kappa r \quad \text{при} \quad r \ll 1; \\ w &\approx -\sqrt{\pi/2\kappa^2} r^{-1/2} e^{-r} \quad \text{при} \quad r \gg 1. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Залежність $\bar{\omega}(\omega_0)$ характеризується монотонно зростаючою кривою, яка при $\omega_0 = \omega_{c1}$ має вертикальну дотичну, а зі зростанням ω_0 виходить на пряму лінію $\bar{\omega} = \omega_0$. Ефективна енергія одного граничного циклу становить $(2\pi/\kappa^2) \ln \kappa$, а кутова швидкість ω у його центрі вдвічі більше ω_{c1} .

Проведений розгляд показує, що утворення граничного циклу в результаті біфуркації Хопфа є фазовим переходом, визначеним комплексним параметром порядку $\phi = \eta e^{i\varphi}$. Його амплітуда η зводиться до повільної змінної (вище вона була позначена як Q), а кут φ швидко змінюється з часом, розподіляючись у просторі таким чином, що градієнт $\mathbf{v}_s \equiv s \nabla \varphi$ компенсує швидкість $\mathbf{v}_n = [\vec{\omega}_0 \mathbf{r}]$ обертання фазової площини як цілого. Завдяки цьому впорядкування сприяє зменшенню лінійної швидкості $\mathbf{w} = \mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ нижче значення \mathbf{v}_n . Оскільки кутова та лінійна складові зв'язані співвідношенням $\vec{\omega} = (1/2) \text{rot} \mathbf{w}$, що властиве напруженості й потенціалу калібрувального поля, то зазначена компенсація приводить також до редукації зовнішнього значення $\vec{\omega}_0$ до внутрішнього $\vec{\omega} < \vec{\omega}_0$.

Зазвичай область зміни координати та імпульсу, що відповідає граничному циклу, займає всю фазову площину, завдяки чому

параметр $\kappa = \sqrt{I/I_0}$ набуває значень $\kappa \sim 1$. При цьому бифуркація Хопфа приводить до утворення єдиного граничного циклу, що являє собою періодичні зміни стану системи, що самоорганізується. У протилежному разі область зміни швидких змінних, що відповідає граничному циклу, набагато менша за повну площу фазової площини, і виконується умова $\kappa \gg 1$. Якщо при цьому система піддається періодичній дії, частота якої ω_0 обмежена інтервалом $\omega_{c1} - \omega_{c2}$, визначеним рівностями (1.113), (1.114), то процес самоорганізації приводить до множинного резонансу із зовнішнім полем (для частот $\omega_0 < \omega_{c1}$ бифуркація Хопфа не реалізується, а для $\omega_0 > \omega_{c2}$ граничний цикл розпливається за всією фазовою площиною, забезпечуючи коливання, задані зовнішнім полем). В інтервалі $\omega_{c1} - \omega_{c2}$ середні величини координати та імпульсу, що відповідають даному резонансу, визначаються положенням відповідного граничного циклу, а амплітуда їх коливань задається кореляційною довжиною ξ , визначеною другою рівністю (1.109). Зі зростанням зовнішньої частоти перший із зазначених резонансів з'являється при $\omega_0 = \omega_{c1}$, а їх максимальне число $N_{\max} \sim \xi^{-2}$ досягається при частоті $\omega_0 = \omega_{c2}$. При цьому густина граничних циклів змінюється згідно із законом (1.115), а середня частота резонансу задається рівністю (1.117).

1.5 Дробова система Лоренца

Як зазначалося у підрозділі 1.1, система Лоренца є однією із найбільш простих і універсальних моделей поведінки складної системи, значно віддаленої від рівноважного стану. У простому випадку поведінка такої системи подається диференціальними рівняннями (1.2), які визначають часові залежності параметра порядку $\eta(t)$, сполученого поля $h(t)$ і керуючого параметра $S(t)$.

Аналітичне дослідження системи (1.2) реалізується тільки за

умов адіабатичного наближення

$$\sigma \ll 1, \quad b \geq 1, \quad (1.123)$$

коли лівими частинами у двох останніх рівняннях можна знехтувати, і вони стають алгебраїчними. У результаті система Лоренца зводиться до рівняння Ландау-Халатнікова (1.5), права частина якого є похідною за параметром порядку від синергетичного потенціалу типу (1.6), (1.11). Такого роду синергетична модель дозволяє узагальнити картину фазових перетворень [18] на структурні перетворення нерівноважного конденсованого середовища [8], течію гранульованого середовища [28] і транспортні потоки [29]; а також подати перехід між хаотичним і когерентним станами фінансового ринку [30]– [31]. Більше того, послаблення зворотного зв'язку і релаксації за рахунок переходу до дробової системи Лоренца (див. нижче) дозволяє інтерпретувати явище самоорганізованої критичності [32].

На відміну від зазначених випадків цей підрозділ присвячений дослідженню детермінованого хаосу [1], який виникає за умов протилежних (1.123). У цьому випадку аналітичний розгляд стає неможливим, і задача зводиться до чисельного дослідження дивного атрактора [33], що становить фрактальну множину точок, до якої збігаються траєкторії системи у фазовому просторі η , h , S . Основною характеристикою такої множини є розмірність, яка набуває дробового значення $D \approx 2.06$ [34] і означає, що атрактор Лоренца не зводиться до двовимірної поверхні і, в цей самий час, не заповнює тривимірний об'єм.

Грунтуючись на фрактальних уявленнях, визначимо кореляційну розмірність ν атрактора Лоренца, користуючись методом Рунге-Кутта 6-го порядку, підвищене значення якого забезпечує необхідну точність [35]. Дотримуючись [1], [36], візьмемо стандартні значення

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3. \quad (1.124)$$

У цьому випадку залежність кореляційної розмірності ν від ступеня зовнішньої дії r має форму, показану на рис.1.6. Видно, що в точці $r \approx 24$ кореляційна розмірність зростає стрибком від $\nu \approx 0$ до вказаного значення $\nu \approx 2.06$. Проте при подальшому зростанні параметра r кореляційна розмірність зазнає провалів до значення $\nu \approx 1$, що відповідає лінійній множині, в областях, прилеглих до точок $r \approx 71$, $r \approx 92.5$, $r \approx 100$ і так далі. При докладнішому дослідженні структури зазначених мінімумів (рис.1.6б) виявляється, що дивний атрактор вироджується в лінію не в окремих точках, а в областях кінцевої ширини $\Delta r \sim 1$. Подальше розв'язання деяких із цих областей (наприклад, показаної на рис.1.6б) виявляє дрібніші мінімуми (типу наведеного на рис.1.6в), де кореляційна розмірність падає до значень, що перевищують $\nu = 1$. Це означає, що перш ніж виродитися в лінію, дивний атрактор може зазнати менш радикальної перебудови, яка, проте, проходить таким самим різким чином, як і у глибоких провалах.

Таким чином, екстремальне зростання параметра зовнішньої дії r приводить до ієрархічного ланцюга перебудов дивного атрактора, що знижують його розмірність. Зміну форми атрактора, що відповідає мінімумам залежності $\nu(r)$ у точках $r = 40$, $r = 90.165$ і $r = 92.5$, де кореляційна розмірність набуває значень $\nu \simeq 2.06; 1.4; 1$, показано на рис.1.7. З нього легко побачити, що зі зростанням r відбувається утворення ієрархічної послідовності острівців, недосяжних для конфігуративної точки, що становить еволюцію системи [37]. Система Лоренца, хоча і є найпростішою нелінійною моделлю, дозволяє пояснити настільки складне явище, як самоорганізована критичність [32]. Це досягається, якщо, з одного боку, ввести у праві частини рівнянь (1.2) стохастичні джерела, а з іншого — ослабити зворотний зв'язок і релаксацію. Залишаючи розгляд стохастичних джерел до підрозділу 2.5, обмежимося дослідженням впливу інтенсивності зворотного зв'язку, величина якого задається позитивним

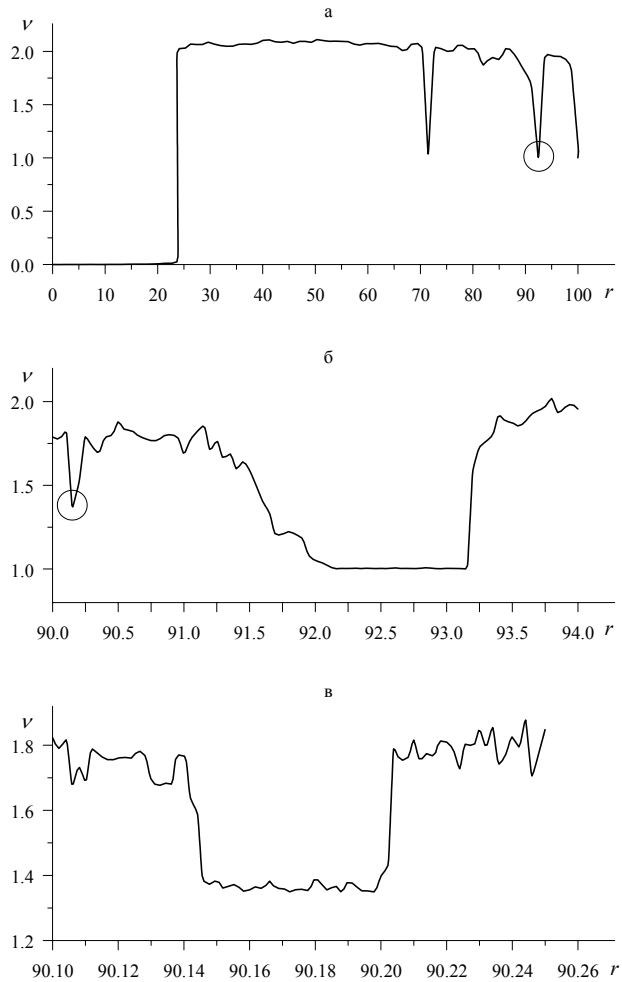
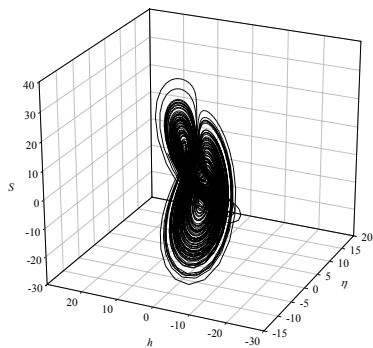


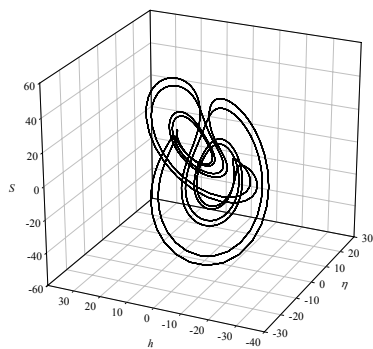
Рисунок 1.6 — Залежність кореляційної розмірності ν від ступеня зовнішньої дії r

показником $a \leq 1$, що виникає із заміною параметра порядку

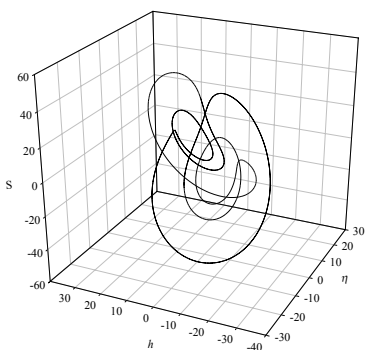
$$\eta \Rightarrow \text{sign}(\eta) |\eta|^a, \quad (1.125)$$



а



б



в

Рисунок 1.7 — Зміна форми атрактора Лоренца зі зростанням ступеня зовнішньої дії: а) $r = 40$; б) $r = 90.165$; в) $r = 92.5$

де знакова функція визначена рівностями $\text{sign}(\eta) = 1$ при $\eta > 0$ і $\text{sign}(\eta) = -1$ при $\eta < 0$. Сенс цієї заміни полягає в тому, що перехід від параметра порядку η до його абсолютного значення дозволяє уникнути уявних значень степеневі функції η^a з дробовим показником a .

З іншого боку, введення знакової функції забезпечує стійкість системи на межі $\eta \rightarrow -\infty$.⁷ У результаті рівняння (1.2) набирають вигляду дробової системи Лоренца [38]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\text{sign}(\eta) |\eta|^a + h, \\ \sigma \frac{\partial h}{\partial t} &= -h + \text{sign}(\eta) S |\eta|^a, \\ \left(\frac{\sigma}{b}\right) \frac{\partial S}{\partial t} &= (r - S) - \text{sign}(\eta) |\eta|^a h. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Для визначення області існування дивного атратора знайдемо розв'язання системи (1.126) в лінійній формі

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 (1 + \alpha e^{\lambda t}), \\ h &= h_0 (1 + \beta e^{\lambda t}), \\ S &= S_0 (1 + \gamma e^{\lambda t}), \end{aligned} \quad (1.127)$$

де λ – невідомий інкремент; параметри η_0 , h_0 , S_0 відповідають стаціонарному стану; амплітуди α, β, γ представляють малі відхилення від цього стану. Підставляючи (1.127) до (1.126), приходимо до системи алгебраїчних рівнянь, які для нульового порядку за $\alpha, \beta, \gamma \ll 1$ дають стаціонарні значення:

$$\eta_0 = \pm (r - 1)^{\frac{1}{2a}}, \quad h_0 = \eta_0^a = \pm \sqrt{r - 1}, \quad S_0 = 1,$$

⁷Дійсно, за відсутності цієї функції ефективна сила на межі $\eta \rightarrow -\infty$ мала б асимптотику $-|\eta|^a$, яка відповідає потенціалу $-(a + 1)^{-1} |\eta|^{a+1}$, що необмежено зменшується. Знакова функція забезпечує позитивні значення цього потенціалу, а отже, і його необмежене зростання на межі $\eta \rightarrow -\infty$.

а у першому порядку – однорідну систему

$$\begin{aligned} (\eta_0\lambda + a\eta_0^a)\alpha - h_0\beta &= 0, \\ -(a\eta_0^a)\alpha + (\sigma h_0\lambda + h_0)\beta - \eta_0^a\gamma &= 0, \\ (ah_0\eta_0^a)\alpha + (h_0\eta_0^a)\beta + \left(\frac{\sigma}{b}\lambda + 1\right)\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Умови розв'язання цієї системи приводять до кубічного рівняння

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \quad (1.129)$$

з коефіцієнтами

$$\begin{aligned} A &\equiv \frac{1+b}{\sigma} + a(r-1)^{-\frac{1-a}{2a}}, \\ B &\equiv \frac{b}{\sigma^2}r + \frac{ab}{\sigma}(r-1)^{-\frac{1-a}{2a}}, \\ C &\equiv \frac{2ab}{\sigma^2}(r-1)^{\frac{3a-1}{2a}}. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Прямою підстановкою неважко переконатися, що рівняння (1.129) має чисто уявні корені, що відповідають втраті стійкості полюсів (1.128), за умови⁸ $AB = C$. У результаті приходимо до біфуркаційного рівняння

$$\left[(1+b) + a\sigma(r-1)^{-\frac{1-a}{2a}} \right] \left[r + a\sigma(r-1)^{-\frac{1-a}{2a}} \right] = 2a\sigma(r-1)^{\frac{3a-1}{2a}}, \quad (1.131)$$

яке визначає область параметрів, де дивний атрактор стає єдиною множиною, що притягує траєкторії. Із графіка відповідної залежності $r(a)$, наведеної на рис.1.8 (пунктирна лінія) для стандартного вибору параметрів (1.124), видно, що зменшення показника a швидко звужує інтервал значень r , при яких

⁸У цьому випадку рівняння (1.129) може бути подане у вигляді $(\lambda - \lambda_0)(\lambda - i\omega)(\lambda + i\omega) = 0$, де λ_0, ω – дійсні числа, що призводять до коефіцієнтів $A \equiv -\lambda_0$, $B \equiv \omega^2$, $C \equiv -\lambda_0\omega^2 = AB$.

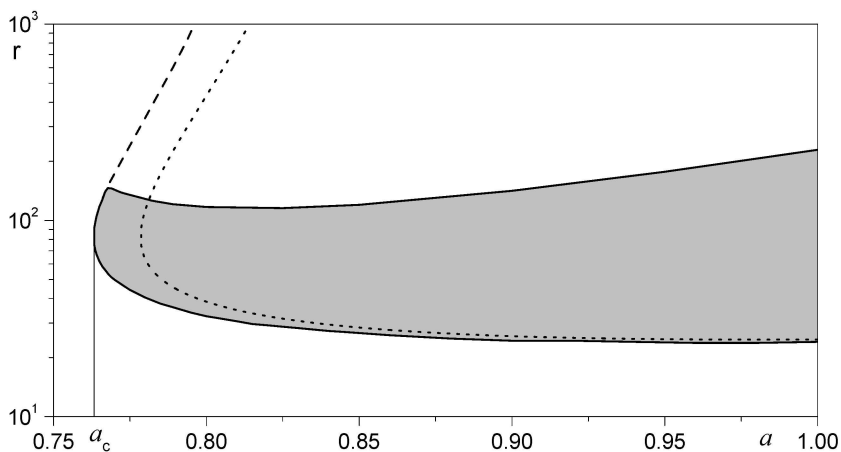


Рисунок 1.8 – Область існування дивного атрактора (обмежена суцільною лінією і затемнена). Штрихова лінія показує межу появи лінійного атрактора (як і для дивного вона знайдена чисельно), пунктирна – область стійкості стаціонарного стану (задається рівнянням (1.131))

реалізується режим дивного атрактора. Більше того, якщо величина a не перевищує критичне значення a_c , то зворотний зв'язок настільки слабкий, що хаотична поведінка не реалізується взагалі.

Визначення критичного показника a приводить до дуже громіздкої чисельної процедури. Щоб уникнути її, скористаємося критичним значенням a_c , починаючи з якого стає нестійким стаціонарний стан (1.127) (із рис.1.8 бачимо, що величина a_c дає нижню межу показника a , при якому з'являється дивний атрактор). Якщо визначити точку $a = a_c$ умовою $|dr/da| = \infty$, то після диференціювання рівняння (1.131) за a приходимо до

рівняння

$$2(3a - 1) + (1 - 5a)r + a(a - 1)\sigma(r - 1)^{-\frac{1-a}{2a}} - \left[\frac{1+b}{\sigma} + a(r-1)^{-\frac{1-a}{2a}} \right] \left[\sigma(1-a) - 2(r-1)^{\frac{1+a}{2a}} \right] = 0. \quad (1.132)$$

Спільне розв'язання рівнянь (1.131), (1.132) дає залежність $a_c(\sigma, b)$, показану на рис.1.9. Із неї бачимо, що зменшенню

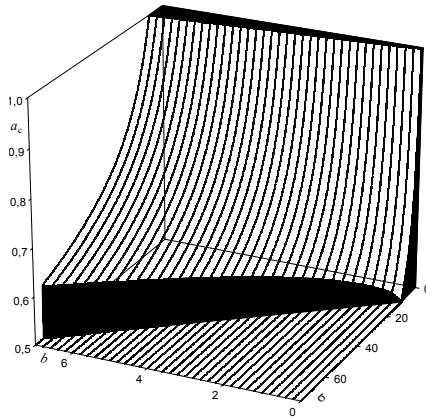


Рисунок 1.9 – Залежність критичного показника a_c від кінетичних параметрів, що є співвідношеннями характерних часів зміни поля і параметра порядку (σ) та поля і керуючого параметра (b)

критичного показника a_c , яке означає розширення області існування дивного атратора, сприяє зростанню параметра σ і зменшенню b . Фізично це означає, що дивний атратор виникає при швидкій зміні параметра порядку і вповільненні керуючого параметра [18]. Характерно, що ні за яких значень параметрів σ, b критичний показник не набуває значення $a_c < 0.5$. Проте в області

$$\sigma > 10 + 8.64 b \quad (1.133)$$

відбувається зрив до мінімальної величини $a_c = 0.5$, коли дивний атрактор виникає незалежно від показника зворотного зв'язку a .

Розглянемо нарешті явний вигляд залежності кореляційної розмірності ν від ступеня зовнішньої дії r для різних значень показника зворотного зв'язку a . Як бачимо із вставки на верхньому полі рис.1.10, навіть дуже незначна варіація a приводить до істотної зміни величини ν , обумовленої як зрушенням існуючих провалів залежності $\nu(r)$, так і появою нових (у першому випадку на кривій $\Delta\nu(r)$ виникає пара піків різного знака, в другому – єдиний мінімум). При помітному зменшенні показника a число провалів, де кореляційна розмірність набуває значення менше ніж $\nu \approx 2.06$, значно збільшується, і залежність $\nu(r)$ набирає явно вираженої фрактальної форми (це видно зі вставки на графіку $\nu(r)$, взятому при $a = 0.9$, де показано тонку структуру мінімумів, виділених на основному полі). Подальше зменшення показника a до значень $a \geq a_c$ приводить, відповідно до рис.1.8, до істотного звуження області дивного атрактора, який при великих r трансформується у лінійну множину з розмірністю $\nu = 1$. З подальшим зростанням параметра r стає нестійким і лінійний атрактор.

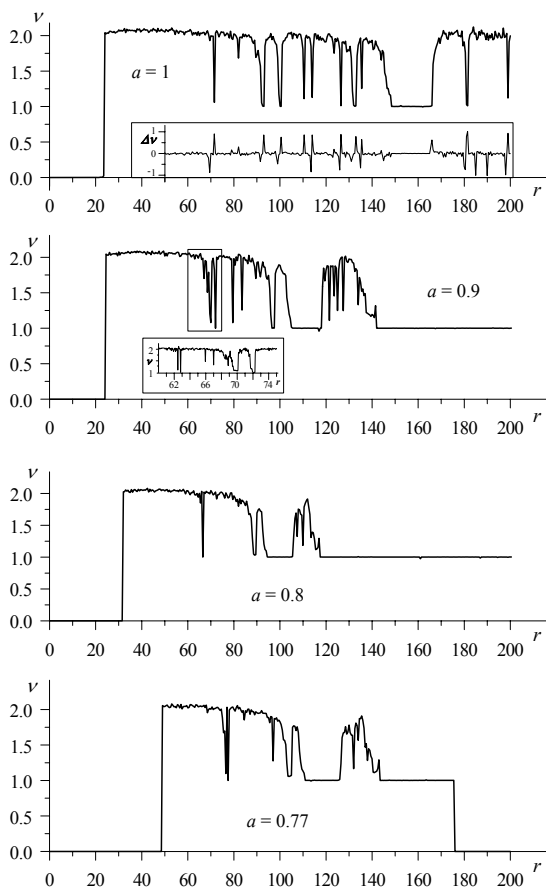


Рисунок 1.10 — Вплив показника зворотного зв'язку a на залежність кореляційної розмірності ν від ступеня зовнішньої дії r . Вставка на верхньому полі показує зміну $\Delta \nu = \nu_{0.999} - \nu_1$ для переходу від значення $a = 1$ до $a = 0.999$. Вставка при $a = 0.9$ показує тонку структуру мінімумів, виділених на основному полі

Завдання для самоконтролю

1. Що являє собою реакція Білоусова-Жаботинського? Чому її відносять до прикладів явища самоорганізації?
2. Запишіть і проаналізуйте систему рівнянь Лоренца (1.1).
3. Отримайте із (1.1) систему вигляду (1.2) за допомогою співвідношень (1.3).
4. Вкажіть, за яких умов сполучене поле h та керуючий параметр S можуть задаватися рівняннями (1.4). Отримайте ці рівняння із системи (1.2).
5. Проаналізуйте рівняння Ландау-Халатнікова, отримане із системи Лоренца за адіабатичних умов.
6. Знайдіть координати можливих мінімумів синергетичного потенціалу (1.6).
7. Отримайте вираз та побудуйте графік залежності параметра порядку від часу.
8. Як змінюється система Лоренца (1.2), якщо від безперервного переходу перейти до переривчастого?
9. Якого вигляду набирає синергетичний потенціал (1.6) для переривчастого переходу?
10. Знайдіть значення параметра r , за яких відбуваються якісні зміни вигляду синергетичного потенціалу.
11. Отримайте стаціонарні значення параметра порядку (1.15), що відповідають екстремумам потенціалу (1.11).

12. Побудуйте графіки залежності стаціонарних значень параметра порядку η та керуючого параметра S від параметра нагнітання r для різних співвідношень між константами κ та η_τ .
13. Дайте визначення біфуркації Хопфа.
14. Проаналізуйте систему лінійних рівнянь Лотки-Вольтерра.
15. Отримайте рівняння (1.30) із (1.18).
16. Який вигляд має оператор проектування?
17. Доведіть основні властивості оператора проектування \hat{P} , що задаються формулами (1.35).
18. Отримайте рівняння (1.42) для коефіцієнтів нелінійної складової комплексної сили з урахуванням рівнянь (1.38)–(1.41).
19. Із загальної формули для коефіцієнтів нелінійної складової комплексної сили отримайте їх конкретний вигляд для різних m і n (див. (1.43)–(1.45)).
20. Знайдіть параметр нелінійності рівняння (1.48) у вигляді (1.59).
21. Запишіть умови утворення граничного циклу.
22. Отримайте вираз для показника Флоке.
23. Знайдіть перші три похідні функції $\varphi(E)$, що задається рівнянням (1.67).
24. За допомогою перенормування основних величин отримайте систему рівнянь (1.68) у безрозмірному вигляді (1.69).

25. Знайдіть вираз для поляризації середовища за адіабатичних умов.
26. Знайдіть умови втрати стійкості стаціонарного стану.
27. Знайдіть умову появи коливальної поведінки.
28. Знайдіть ненульові похідні узагальненої сили (див. (1.79)).
29. Проаналізуйте фазову діаграму, що визначає область стійкого граничного циклу (див. рис.1.3).
30. Як враховуються швидкі та повільні змінні під час запису гамільтоніана (1.94)?
31. Запишіть умови, що реалізуються на лінії, всередині та далеко від граничного циклу.
32. Із загальної формули (1.103) отримайте безрозмірну густину енергії \tilde{E} у вигляді (1.110).
33. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.1.4.
34. Проаналізуйте залежність кореляційної розмірності ν від ступеня зовнішньої дії r .
35. Поясніть необхідність використання знакової функції для побудови дробової системи Лоренца.
36. Знайдіть розв'язок системи рівнянь (1.128) стосовно параметра λ .
37. Дайте визначення дивному атрактору.
38. Проаналізуйте вплив показника зворотного зв'язку a на залежність кореляційної розмірності ν від ступеня зовнішньої дії r .

Розділ 2

САМООРГАНІЗАЦІЯ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Незважаючи на простоту і велике поширення сипких (гранульованих) середовищ, рівень їх дослідження відповідає розвитку фізики твердого тіла першої третини минулого сторіччя [39]– [41]. Це зв'язано з тим, що за різних умов сипке середовище може проявляти як властивості твердого тіла, так і рідини. Найяскравіше така поведінка спостерігається у поведінці сипких пісків, описаній відомим мандрівником В.К. Арсенєвим [42]. Наведений ним опис дає наочне уявлення про подвійну природу сипкого середовища: за умов хаотичної дії хвиль прибою та тиску, зменшеного вихідним струменем газу, пісок проявляє властивості в'язкої рідини; за відсутності названих умов він подібний до твердого тіла. Інтенсивні дослідження останніх 10 – 15 років показали, що така подвійність пов'язана з тим, що середньоквадратична флуктуація u швидкості руху частинок набуває гідродинамічного характеру, що приводить до макроскопічного ступеня свободи – ефективної (*гранульованої*) температури $T \equiv tu^2$ (t – маса частинки) [41], [43].

Найпростішим випадком є плоска течія Куетта, яка забезпечується рівномірним рухом нижньої межі гранульованого середовища зі швидкістю U уздовж осі x . При цьому неоднорідність розвивається у перпендикулярному напрямку y і виявляє такі закономірності [43]:

- поблизу рухомої межі течія обмежена тонким шаром, у

якому флуктуації швидкості u зменшуються повільніше, ніж середнє значення V ;

- просторовий профіль швидкості $V(y)$, віднесеної до максимального значення U , не залежить від величини V , тиску P і режиму течії – стаціонарного або переривчастого;
- напруження зсуву $\sigma = \mu P$ стале за об'ємом течії й характеризується коефіцієнтом тертя $\mu = \mu(U)$, величина якого падає зі зростанням швидкості U до значення, властивого сухому тертю.

Інший прояв подібного роду має твердотільна поведінка тонкого шару мастила, розміщеного між атомарно плоскими поверхнями [44]. Таке завдання покладене в основу проблеми зниження коефіцієнта тертя, що обумовлює її величезне прикладне значення [45]. В експериментальних умовах твердотільна поведінка виявляється в тому, що, досягнувши межі текучості, спостерігається переривчастий рух, який властивий тертю поверхонь твердих тіл. Така поведінка пояснюється частковим затвердінням плівки мастила, що складається із декількох молекулярних шарів. Повне плавлення відбувається, якщо напруження зсуву перевищує деяке критичне значення [46], [47].

Початок аналітичному опису поведінки надтонкого шару змащувальної плівки поклали праці [48]– [50], де, зокрема, було введено параметр порядку, що визначає степінь плавлення завдяки зсуву. Значне просування у феноменологічному уявленні процесу тертя у надтонких рідких плівках було досягнуто в роботі [51], на основі розгляду в'язкопружного середовища в рамках наближення Гінзбурга-Ландау.

Далі ми покажемо [28], [38], [52], що синергетична концепція дозволяє описати послідовним чином перехід від рідиноподібної до твердотільної поведінки як для сипкого середовища (підрозділи 2.1, 2.2), так і для тонкої плівки мастила (підрозділ 2.3).

2.1 Початкові рівняння поведінки сипкого середовища

Розуміння закономірностей плоскої течії Куетта може бути досягнуте в рамках гідродинамічної теорії [43], де поведінка системи параметризується полями температури $T(y, t)$ і швидкості $V(y, t)$. Перше підпорядковується рівнянню теплопровідності

$$\dot{T} = -\epsilon T + (\chi T')' + \sigma V', \quad (2.1)$$

доповненому законом течії $\sigma = \eta V'$. Тут ϵ – параметр дисипації, обумовленої непружними зіткненнями частинок; χ – температуропровідність; η – динамічна в'язкість; σ – зсувна компонента напруження; крапка означає повну похідну $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{V}\nabla$ за часом t , штрих – за координатою y . Поле швидкості визначається рівнянням руху

$$\dot{V} = \nu V'', \quad (2.2)$$

де кінематична в'язкість ν пов'язана з динамічною $\eta = \nu\rho$ через густину середовища ρ . За умов плоскої течії тиск підпорядковується умові $P' = 0$, що означає його незмінність за об'ємом. Система (2.1),(2.2) замикається рівнянням стану

$$d^3 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) = \frac{T}{P}, \quad (2.3)$$

де d – розмір частинки, критична густина ρ_c відповідає точці переходу до склоподібного стану. Завдяки зміні густини ρ матеріальні константи ϵ , χ , ν критичним чином залежать від параметрів стану:

$$\epsilon, \chi \sim \frac{P}{T^{1/2}}; \quad \nu \sim \left(\frac{P}{T} \right)^\beta T^{1/2}, \quad \beta \geq 1. \quad (2.4)$$

Якісна зміна поведінки системи, зумовлена гідродинамічною модою флуктуацій швидкості, виражається за наявності двох режимів: класична течія рідини, що відповідає кінцевим температурам T , малим тиску P і густині ρ ; твердотільна поведінка, за якої T дуже мала, P великий, а густина $\rho \leq \rho_c$ близька до критичної. Вказана відмінність подана у [43] за рахунок апіорного додавання середовищу необхідних критичних властивостей — у першій області показник β взятий рівним одиниці, а в другій істотно перевищує її ($\beta \simeq 1.75$). У результаті гідродинамічна теорія [43] пояснює експериментальну картину течії сипкого середовища, тоді як картина переходу з твердотільного режиму до гідродинамічного залишається за рамками розгляду. Розглянемо цю картину, дотримуючись роботи [28].

2.2 Самоорганізація сипкого середовища

Враховуючи нерівноважний характер переходу, можна вважати, що його опис досягається в рамках синергетичного подання [8], яке узагальнює термодинамічну картину фазових перетворень. Як видно із підрозділів 1.1, 1.2, задача зводиться до знаходження рівнянь релаксації для параметра порядку, сполученого йому поля і керуючого параметра. При написанні цих рівнянь ми виходитимемо з того, що самоузгоджена картина досягається, якщо для кожного ступеня свободи враховується мікроскопічний канал дисипації, зумовлений рухом окремих частинок, і макроскопічний — пов'язаний з колективною поведінкою (течією середовища).

Як параметр порядку, що відрізняє текучий стан від твердотільного зручно взяти замість температури T середньоквадратичну амплітуду флуктуацій швидкості $u \equiv \sqrt{T/m}$. Тоді, опускаючи нелінійні доданки і вводячи

гідродинамічний член $\dot{u} \sim \dot{V} = \nu V''$, із рівняння (2.1) отримуємо

$$\dot{u} = -\frac{u}{t_u} + \chi u'' + a\nu V'', \quad a = \text{const} > 0. \quad (2.5)$$

Тут перший доданок враховує мікроскопічний канал дисипації за рахунок непружних зіткнень, інтенсивність яких, визначена в (2.1) параметром ϵ , обернено пропорційна часу релаксації t_u . Доданки, що залишилися, становлять макроскопічний канал дисипації за рахунок просторової зміни швидкості флуктуацій u (термічний внесок) та її середнього значення V (гідродинамічний внесок). У рамках самоузгодженої схеми гідродинамічне рівняння (2.2) слід доповнити нелінійним доданком, що відображає мікроскопічний канал дисипації, зумовлений дією сколювального напруження на флуктуації швидкості:

$$\dot{V} = -g u \sigma + \nu V''. \quad (2.6)$$

Тут g — позитивна константа. Останнє з рівнянь визначає релаксацію пружного напруження σ до значення σ_e , що задається зовнішньою дією:

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma_e - \sigma}{t_\sigma} - g_\sigma \nu u V''. \quad (2.7)$$

Як і раніше, перший доданок відображає мікроскопічний механізм релаксації, що забезпечується локальним перерозподілом частинок з характерним часом t_σ ; другий доданок враховує колективний внесок, обумовлений флуктуаційним перерозподілом частинок, що рухаються з прискоренням $\dot{V} \sim \nu V''$.

Для аналізу синергетичних рівнянь (2.5)–(2.7) зручно скористатися безрозмірними змінними, якщо віднести час t , координату y , амплітуду флуктуацій швидкості u , її середнє

значення V і пружне напруження σ до таких масштабів¹:

$$t_u, \quad l \equiv \sqrt{\chi t_u}, \quad u_c \equiv (gg_\sigma t_\sigma)^{-1/2}, \quad V_c \equiv \frac{\chi}{a\nu} u_c, \quad \sigma_c \equiv (agt_u)^{-1}. \quad (2.8)$$

Тут гідродинамічні величини координати і часу визначаються виразами

$$\lambda^2 \equiv \nu\tau = \frac{\eta^2}{\rho G}, \quad \tau \equiv \frac{\eta}{G}, \quad (2.9)$$

де G – характерне значення модуля зсуву. У результаті поведінка сипкого середовища подається безрозмірною системою рівнянь

$$\dot{u} = -u + u'' + V'', \quad (2.10)$$

$$(\tau/t_u)(l/\lambda)^2 \dot{V} = -u\sigma + V'', \quad (2.11)$$

$$(t_\sigma/t_u)\dot{\sigma} = (\sigma_c - \sigma) - uV''. \quad (2.12)$$

Характер їх розв'язання задається співвідношенням часів t_u , τ , t_σ і масштабів l , λ . Дисипативна картина фазового переходу реалізується, коли непружні зіткнення настільки слабкі, що час релаксації t_u набагато перевищує гідродинамічний масштаб $(l/\lambda)^2 \tau$ і мікроскопічний час t_σ [8]:

$$(l/\lambda)^2 \tau \ll t_u, \quad t_\sigma \ll t_u. \quad (2.13)$$

Оскільки безрозмірні швидкості \dot{u} , \dot{V} , $\dot{\sigma}$ мають однаковий порядок, то умови (2.13) дозволяють знехтувати лівими частинами рівнянь (2.11), (2.12). У результаті отримуємо залежності кривизни профілю середньої швидкості V'' і внутрішнього напруження σ від середньоквадратичної флуктуації швидкості u у вигляді (1.4), де параметр порядку η замінюється амплітудою флуктуацій швидкості u , поле h – кривизною V'' , а ентропія S – напруженням

¹У звичайних умовах кінематична в'язкість ν не перевищує коефіцієнт температуропровідності χ , а масштаб зміни середньої швидкості V_c перевищує відповідне значення u_c амплітуди її флуктуацій [43].

σ . Тоді спонтанне зростання амплітуди флуктуацій в інтервалі, обмеженому максимальним значенням $u = 1$, приводить до збільшення кривизни V'' профілю середньої швидкості та релаксації внутрішнього напруження $\sigma < \sigma_e$ нижче за рівень, що фіксується зовнішніми умовами. Підстановка співвідношення $V''(u)$ у (2.10) дає рівняння Гінзбурга-Ландау-Халатнікова

$$\dot{u} = u'' - \frac{\partial E}{\partial u}, \quad (2.14)$$

вигляд якого визначається енергією флуктуацій $E(u)$, що задається співвідношенням (1.6) і вимірюється в одиницях u_c^2 . Для малого напруження σ_e залежність $E(u)$ має монотонно зростаючий вигляд з мінімумом $u = 0$, що відповідає твердотільному стану. Зі зростанням σ_e до значень, що перевищують критичний рівень σ_c , з'являється мінімум

$$u_0 = \sqrt{\sigma_e - 1}, \quad (2.15)$$

який відповідає текучому стану (впорядкована фаза). При цьому кривизна профілю швидкості набуває кінцевого значення $V_0'' = u_0$, а внутрішнє напруження спадає до критичного значення $\sigma_c = 1$.

У стаціонарному стані $\dot{u} = 0$ рівняння (2.14) має перший інтеграл

$$\frac{1}{2}(u')^2 = E + |E_0|, \quad E_0 \equiv E(u_0) \simeq -\frac{1}{4}(\sigma_e - 1)^2 < 0. \quad (2.16)$$

Тут ми врахували, що у впорядкованій фазі, яка відповідає $y = -\infty$, виконання умов $u = u_0$, $u' = 0$ вимагає, щоб константа інтегрування зводилася до абсолютного значення енергії впорядкування E_0 , для оцінки якої проведено розклад до квадратичних доданків за різницю $(\sigma_e - 1) \ll 1$.

Залишаючи в рівнянні (2.16) доданки порядків u^2 і u^4 , знаходимо стаціонарний розподіл флуктуацій у вигляді кінка

$$u = u_0 \tanh\left(\frac{y_0 - y}{\xi}\right), \quad \xi^2 \equiv \frac{2}{\sigma_e - 1}, \quad (2.17)$$

де введена кореляційна довжина ξ , що розходиться при критичному значенні пружного напруження; стала інтегрування $y_0 \gg \xi$ визначає ширину примежової області, де флуктуації швидкості спадають від стаціонарного значення (2.15) до нуля. Підставляючи розподіл (2.17), який зменшується на кореляційній довжині ξ , до залежності $\sigma(u)$, бачимо, що у перехідній області сколювальна компонента напруження монотонно зростає від критичного значення $\sigma_c = 1$ до величини $\sigma_e > \sigma_c$, що задається зовнішніми умовами (див. рис.2.1а). Такий розподіл напруження обумовлює критичне зростання коефіцієнта тертя $\mu \equiv \sigma/P$ від гідродинамічного значення $1/P \equiv (gat_u P)^{-1}$, що спадає зі зменшенням інтенсивності непружних зіткнень і посиленням зв'язку флуктуацій з напруженням (див. (2.6)), до величини σ_e/P , що відповідає сухому тертю. Зазначимо, що вказана поведінка аж ніяк не суперечить висновку [43] про незмінність пружного напруження в області течії. Дійсно, цей висновок ґрунтується на використанні макроскопічного наближення, в рамках якого міжфазна межа передбачається нескінченно тонкою, тоді як у нашому випадку пружне поле змінюється на кореляційній довжині $\xi \neq 0$.²

Комбінування залежності $V''(u)$ зі співвідношенням $u'(y)$, що впливає із (2.16), приводить до рівняння для середньої швидкості течії

$$V' = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left[\frac{1 + u^2}{(\sigma_e - 1) - u^2} \right]. \quad (2.18)$$

Згідно з рис.2.1б, градієнт цієї швидкості монотонно зростає на

²Відмітимо також, що формальне використання рівності (2.16) на межі течії $y = y_0$, що відповідає $u = 0$, приводить до кінцевого градієнта флуктуацій швидкості

$$u'_0 = \frac{u_0}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_e - 1).$$

З фізичної точки зору наявність такого градієнта зовсім не означає появу теплого потоку $J \propto T'$, оскільки на межі течії градієнт температури $T' \equiv 2muu'$ зникає завдяки зникненню флуктуацій самої швидкості $u = 0$.

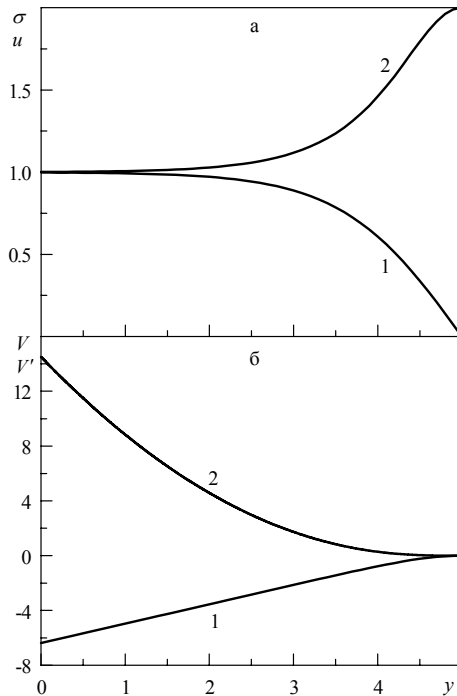


Рисунок 2.1 – а) просторова залежність середньоквадратичних флуктуацій швидкості u (крива 1) і пружного напруження σ (крива 2); б) відповідні профілі градієнта швидкості V' (крива 1) і середньої швидкості V (крива 2). Прийнято, що $y_0 = 5$, $\sigma_e = 2$

відстанях $0 < y < y_0$ від значення

$$V'(0) \simeq -\sqrt{2}\frac{y_0}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{2(\sigma_e - 1)}{\sigma_e} \quad (2.19)$$

до нуля. У результаті профіль швидкості $V(y)$ розбивається на ділянки швидкого ($0 < y < y_0 - \xi$) і повільного ($y_0 - \xi < y < y_0$) падіння. Оскільки флуктуації $u(y)$ змінюються лише при $y_0 - \xi <$

$y < y_0$, то в основній області течії $0 < y < y_0 - \xi$ середня швидкість спадає швидше, ніж її флуктуації [43].

Проведений розгляд показує, що використання рівнянь самоорганізації (2.5)–(2.7) дозволяє подати самоузгоджену картину переходу сипкого середовища із твердотільного до текучого стану.

2.3 Самоорганізація тонкого шару мастила

Згідно з експериментальними даними, перехід тонкого шару мастила до рідкого стану може забезпечуватися як термодинамічним, так і механічним плавленням [51]. Якщо перший із вказаних процесів є звичайним фазовим переходом, то розуміння другого може бути досягнуто лише в рамках синергетичного підходу, викладеного в підрозділі 1.2. Цей підхід ґрунтується на тому положенні, що режим рідкої течії відрізняється від твердотільного аномально великими флуктуаціями швидкостей руху молекул [38], [28]. У даному підрозділі ми виходимо з іншої особливості реологічного³ переходу – затвердіння суцільного середовища супроводжується критичним зростанням тиску [43]. Як бачимо з подальшого, використання цієї особливості дозволяє подати не лише механічне, але й термодинамічне плавлення середовища [52]. Це досягається за рахунок того, що самоорганізація являє собою реологічний процес, викликаний, з одного боку, позитивним зворотним зв'язком напруження зсуву σ і тиску P з деформацією зсуву ε , а з іншого – негативним зв'язком напруження зсуву σ і деформації ε з тиском P .

Переходячи до вибору змінних, що параметризують систему,

³Реологія – наука про деформації та течію суцільних середовищ, що виявляють пружні, пластичні та в'язкі властивості.

виходитимемо з поведінки часу релаксації

$$\tau = \chi/\gamma, \quad (2.20)$$

величина якого задається узагальненою сприйнятливістю χ і кінетичним коефіцієнтом γ [53]. Для в'язкопружного середовища роль сприйнятливості відіграє зворотний модуль зсуву G^{-1} , а кінетичний коефіцієнт зводиться до зворотного значення η^{-1} в'язкості зсуву. У результаті співвідношення (2.20) набирає вигляду [54]

$$\tau = \eta/G. \quad (2.21)$$

Для в'язкопружного переходу і фазових перетворень типу зсуву модуль G прямує до нуля, і час релаксації (2.21) розходиться [55]. Для переходів типу *рідина–твердий стан* узагальнена сприйнятливість практично не змінюється, і розходження часу (2.21) забезпечується зростанням в'язкості [56].

Переходячи до викладу останнього із названих сценаріїв, припустимо, що рівняння релаксації компоненти зсуву σ тензора пружного напруження має лінійну форму

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + G\varepsilon. \quad (2.22)$$

Тут перший доданок у правій частині описує дебаєвську релаксацію за час τ_σ , другий член відповідає за реакцію напруження на деформацію зсуву ε . У стаціонарному випадку $\dot{\sigma} = 0$ кінетичне рівняння (2.22) переходить у закон Гука

$$\sigma = G\varepsilon. \quad (2.23)$$

Релаксація в'язкопружного середовища описується рівнянням Фойхта-Кельвіна [57]

$$\dot{\varepsilon} = -\varepsilon/\tau_0 + \sigma/\eta, \quad (2.24)$$

де τ_0 – час релаксації середовища, що не зводиться до величини (2.21), а останній доданок описує течію в'язкої рідини, викликану

напруженням зсуву. Стационарний випадок $\dot{\varepsilon} = 0$ відповідає закону гуківського типу $\sigma = G_{ef}\varepsilon$, де ефективний модуль $G_{ef} \equiv \eta/\tau_0$ розходиться в точці перетворення. Критичне уповільнення релаксації середовища забезпечується необмеженим зростанням величини η . Проте, якщо температурне розходження в'язкості зсуву описується законом Фогеля-Фулчера, то досліджувана особливість забезпечується зміною тиску поблизу порога P_{cr} [58]

$$\eta = \frac{\eta_0}{P/P_{cr} - 1}, \quad (2.25)$$

де $\eta_0 \equiv \tau_0 G$ – характерне значення в'язкості.

Як показує розгляд, викладений у підрозділах 1.1, 1.2, самоузгоджений опис вимагає, щоб рівняння для параметра порядку σ і сполученого поля ε були доповнені рівнянням руху керуючого параметра P :

$$\dot{P} = (P_e - P)/\tau_P - g_P \sigma \varepsilon. \quad (2.26)$$

Тут P_e – тиск, що фіксується зовнішніми умовами; τ_P – відповідний час релаксації; $g_P > 0$ – константа зворотного зв'язку.

Далі зручно вимірювати величини σ , ε , P , t в одиницях

$$\sigma_{sc} = \sqrt{\frac{P_{cr} G}{\tau_P g_P}}, \quad \varepsilon_{sc} = \sqrt{\frac{P_{cr}}{\tau_P g_P G}}, \quad P_{sc} = P_{cr}, \quad \tau_{sc} = \tau_\sigma, \quad (2.27)$$

відповідно. Тоді основні рівняння (2.22), (2.24), (2.26) набувають вигляду

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + \varepsilon, \quad (2.28)$$

$$\tau_0 \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + (P - 1)\sigma, \quad (2.29)$$

$$\tau_P \dot{P} = (P_e - P) - \sigma \varepsilon, \quad (2.30)$$

властивого системі Лоренца (1.2), якщо під параметром порядку мати на увазі напруження зсуву σ , під сполученим полем –

деформацію зсуву ε , а під керуючим параметром – тиск ($P - 1$), відлічений від порога $P = 1$.

Аналіз поведінки системи досягається в рамках адіабатичного наближення, що забезпечується співвідношенням масштабів часу

$$\tau_0, \tau_P \ll \tau_\sigma, \quad (2.31)$$

коли деформація $\varepsilon(t)$ і тиск $P(t)$ наслідують зміни напруження $\sigma(t)$. Вважаючи ліві частини рівнянь (2.29), (2.30) такими, що дорівнюють нулю, приходимо до залежностей сколювальної деформації та тиску від компоненти зсуву пружного напруження, що має вигляд (1.4). Ці залежності означають, з одного боку, що самоорганізація приводить до зменшення тиску P , викликаного негативним зворотним зв'язком напруження σ і деформації ε , а з іншого – відбувається зростання пружної деформації ε , обумовлене позитивним зворотним зв'язком напруження σ з тиском P . Очевидно, такий процес відповідає появі твердотільного стану, яке відрізняється від рідкого наявністю сколювальних компонент пружного поля.

Підстановка залежностей типу (1.4) до (2.28) дає рівняння Ландау-Халатнікова вигляду (1.5), де синергетичний потенціал має форму

$$V = \frac{\sigma^2}{2} - \frac{P_e - 1}{2} \ln(1 + \sigma^2). \quad (2.32)$$

Для тиску, що перевищує критичну величину

$$P_0 = 2, \quad (2.33)$$

стаціонарний стан $\dot{\sigma} = 0$ відповідає мінімуму потенціалу (2.32), де пружне напруження, деформація та тиск набувають значення

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 = \sqrt{P_e - 2}, \quad P_0 = 2, \quad (2.34)$$

що відповідають твердотільному стану шару мастила. Відповідно зсувна в'язкість дорівнює $\eta_0 \equiv \eta(P = P_0)$.

Рівняння Максвелла (2.22) передбачає використання ідеалізованої моделі, в рамках якої залежність напруження від деформації має вигляд закону Гука $\sigma = G\varepsilon$ для $\varepsilon < \varepsilon_{sc}$, а після досягнення граничного значення $\sigma = \sigma_{sc}$ пружне напруження залишається сталим, забезпечуючи пластичну течію зі швидкістю $\dot{\varepsilon} = (\sigma - \sigma_{sc})/\eta$. Насправді ділянка пластичної деформації кривої $\sigma(\varepsilon)$ має не нульовий, а кінцевий нахил, що фіксується коефіцієнтом зміцнення $\Theta < G$. Це приводить до залежності модуля зсуву $G \equiv \eta_0/\tau_\sigma$ у рівнянні (2.22) від напруження σ . Для врахування цієї залежності скористаємося найпростішим наближенням

$$G(\sigma) = \Theta + \frac{G - \Theta}{1 + (\sigma/\sigma_G)^2}, \quad (2.35)$$

яке описує в'язкопружний перехід при значенні напруження σ_G , що не перевищує масштаб σ_{sc} . У результаті час релаксації τ_σ набуває залежності

$$\frac{1}{\tau_\sigma(\sigma)} = \frac{1}{\tau_\Theta} \left[1 + \frac{\theta^{-1} - 1}{1 + (\sigma/\sigma_G)^2} \right], \quad (2.36)$$

де введено час пластичної релаксації (порів. з (2.21))

$$\tau_\Theta = \eta_\sigma/\Theta, \quad (2.37)$$

а величина $\theta = \Theta/G < 1$ визначає відношення нахилів пластичної та гуківської ділянок деформаційної кривої.

У рамках адіабатичного наближення (2.31) система рівнянь самоорганізації (2.28)–(2.30), де замість τ_σ стоїть $\tau_\sigma(\sigma)$, зводиться до рівняння Ландау-Халатнікова вигляду (1.5) із синергетичним потенціалом

$$\begin{aligned} V = & \frac{\sigma^2}{2} \left\{ 1 - \frac{P_e - P_{cr}}{P_{cr}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{sc}} \right)^{-2} \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{sc}} \right)^2 \right] \right\} + \\ & + \frac{\sigma_G^2}{2} (\theta^{-1} - 1) \ln \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_G} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.38)$$

де використані розмірні величини. За аналогією з аналізом, проведеним у підрозділі 1.2, легко побачити, що для малих значень P_e залежність $V(\sigma)$ має монотонно зростаючий вигляд з мінімумом у точці $\sigma = 0$. Для значення

$$P_c^0 = P_{cr} \left[2 + \frac{\sigma_G^2}{\sigma_{sc}^2} (\theta^{-1} - 2) + 2 \frac{\sigma_G}{\sigma_{sc}} \sqrt{(\theta^{-1} - 1) \left(1 - \frac{\sigma_G^2}{\sigma_{sc}^2} \right)} \right] \quad (2.39)$$

з'являється плато, яке при $P_e > P_c^0$ трансформується в мінімум, що відповідає значенню параметра порядку $\sigma_0 \neq 0$, і максимум, що розділяє мінімуми впорядкованої і невпорядкованої фаз. Із подальшим зростанням параметра P_e мінімум впорядкованої фази заглиблюється, а висота міжфазного бар'єра зменшується, набуваючи нульового значення при критичному значенні

$$P_c = P_{cr}(1 + \theta^{-1}). \quad (2.40)$$

Для $P_e \geq P_c$ залежність $V(\sigma)$ має той самий вигляд, що і для фазового переходу другого роду. Стационарні значення параметра порядку мають вигляд

$$\sigma_0 = \sigma_{00} \left\{ 1 \mp \left[1 + \left(\frac{\sigma_{sc} \sigma_G}{\sigma_{00}^2} \right)^2 \frac{P_e - P_c}{P_{cr}} \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \quad (2.41)$$

$$\sigma_{00}^2 \equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{P_e}{P_{cr}} - 2 \right) \sigma_{sc}^2 - \frac{\sigma_G^2}{\theta} \right], \quad (2.42)$$

де верхній знак відповідає нестійкому стану, коли синергетичний потенціал має максимум, а нижній — стійкому. Як видно з рис. 1.1а, при повільному збільшенні зовнішнього тиску у точці $P_e = P_c$ відбувається стрибок параметра σ_0 від нуля до $\sqrt{2}\sigma_{00}$, а потім його значення зростає повільно. При зворотному зменшенні P_e від великих значень параметр порядку σ_0 повільно зменшується до

точки $P_e = P_c^0$, $\sigma_0 = \sigma_{00}$, а потім стрибком набуває нульового значення. Цей гістерезис зумовлений енергетичним бар'єром, властивим переходу першого роду, який реалізується в інтервалі $P_c^0 < P_e < P_c$ для величин параметра $\alpha \equiv \sigma_G / \sigma_{sc}$, менших за значення 1. Зі зростанням швидкості зміни тиску петля гістерезису звужується.

Істотна відмінність синергетичних переходів від термодинамічних полягає у тому, що стаціонарне значення керуючого параметра P_0 не збігається зі значенням P_e , що задається зовнішньою дією. Для переходу другого роду це значення зводиться до критичної величини P_{cr} , а в разі першого роду реалізується значення

$$P_- = P_{cr} \left[1 + \frac{(1 + \beta^2) - \sqrt{(1 + \beta^2)^2 - p(1 - \alpha^2)}}{1 - \alpha^2} \right], \quad (2.43)$$

$$\beta^2 \equiv \left(\frac{\sigma_{00}}{\sigma_{sc}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[(p - 1) - \frac{\alpha^2}{\theta} \right],$$

$$\alpha \equiv \frac{\sigma_G}{\sigma_{sc}}, \quad p \equiv \frac{P_e}{P_{cr}}, \quad (2.44)$$

що відповідає мінімуму залежності $V(\sigma)$. Оскільки величини P_c, P_- являють собою мінімальні значення керуючого параметра, починаючи з яких відбувається фазовий перехід, то вказаний факт означає, що негативний зворотний зв'язок між параметром порядку і сполученим полем, який відповідає останньому доданку (2.26), викликає настільки сильне зниження керуючого параметра, яке лише на межі забезпечує самоорганізацію. Згідно з рис. 1.16 при квазістатичному зростанні P_e від 0 до P_c стаціонарне значення керуючого параметра лінійно зростає в тому самому інтервалі. Після стрибка вниз при $P_e = P_c$ величина P_0 повільно зменшується згідно із залежністю (2.43) до P_{cr} при $P_e \rightarrow \infty$. При зворотному зменшенні P_e стаціонарний тиск P_0 спочатку

монотонно зростає за залежністю (2.43), а потім здійснює стрибок у точці P_c^0 від значення

$$P_m^0 = P_{cr} \left(2 + \alpha \sqrt{\frac{\theta^{-1} - 1}{1 - \alpha^2}} \right) \quad (2.45)$$

до P_c^0 . Зазначений гістерезис виявляється тільки в області, обмеженій мінімальним значенням

$$\theta_{min} = 1 - \alpha^2. \quad (2.46)$$

2.4 Синергетична картина переривчастого режиму течії суцільних середовищ

Особливість поведінки суцільного середовища, яка властива системам, що самоорганізуються, полягає у тому, що при підвищенні зовнішнього навантаження твердотільний стан переходить до режиму течії не відразу, а через *переривчастий режим* (в англійській термінології *stick-slip regime*), при якому стан спокою чергується з течією середовища випадковим чином [39]– [41]. Далі ми покажемо, що така поведінка визначається дією стохастичних джерел на систему, що самоорганізується [28, 38].

Через гідродинамічний характер синергетичних рівнянь (2.5)– (2.7) пружне напруження становить величину σ , усереднену за фізично малим об'ємом. На відстанях порядку розміру частинок виявляються флуктуації, для врахування яких у рівняння (2.7) слід додати стохастичне джерело $(\sqrt{I}/t_\sigma)\eta(t)$, що характеризується інтенсивністю I і білим шумом $\eta(t)$, для якого $\langle \eta(t) \rangle = 0$, $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t - t')$. Тоді в адіабатичному наближенні (2.13) кривизна профілю швидкості $V''(t)$ і напруження $\sigma(t)$ набувають

стохастичних доданків:

$$V''(t) = V'' + \tilde{V}''\eta(t), \quad \sigma(t) = \sigma + \tilde{\sigma}\eta(t); \quad (2.47)$$

$$\tilde{V}'' \equiv \frac{g}{\nu} \frac{\sqrt{I}u}{1 + u^2/u_c^2}, \quad \tilde{\sigma} \equiv \frac{\sqrt{I}}{1 + u^2/u_c^2}, \quad (2.48)$$

де перші доданки (2.47) мають вигляд (1.4). Комбінування цих рівностей з (2.5) приводить до просторово залежного рівняння Ланжевена

$$t_u \dot{u} = l^2 u'' + f(u) + \sqrt{I(u)}\eta(t), \quad (2.49)$$

$$f(u) \equiv -u + \frac{\sigma_e}{\sigma_c} \frac{u}{1+u^2/u_c^2}, \quad I(u) \equiv \left[a\nu t_u \tilde{V}''(u) \right]^2. \quad (2.50)$$

Стационарний розподіл його однорідних розв'язань

$$\mathcal{P}(u) \propto I^{-1}(u) \exp \left\{ \int \frac{f(u)}{I(u)} du \right\}, \quad (2.51)$$

має максимум у точці, що визначається умовою [59]

$$x^3 - \frac{\sigma_e}{\sigma_c} x^2 - 2 \frac{I}{\sigma_c^2} (x - 2) = 0, \quad x \equiv 1 + \frac{u^2}{u_c^2}. \quad (2.52)$$

Згідно з фазовою діаграмою, показаною на рис.2.2, при напруженнях σ_e , що перевищують межу $\sigma_{c2} \equiv (1 + 2I)\sigma_c$, найбільш імовірні флуктуації швидкості відповідають значенням $u \neq 0$, і поведінка системи зводиться до дослідженого раніше режиму течії. Зі зменшенням напруження до $\sigma_e < \sigma_{c2}$ з'являється максимум у точці $u = 0$, що відповідає твердотільному стану. Під кривою $\sigma_{c1} \equiv \sigma_e(I)$, що задається рівнянням

$$\frac{I^2}{\sigma_c^4} - \frac{I}{\sigma_c^2} \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right)^3 = 0, \quad (2.53)$$

цей максимум стає єдиним.

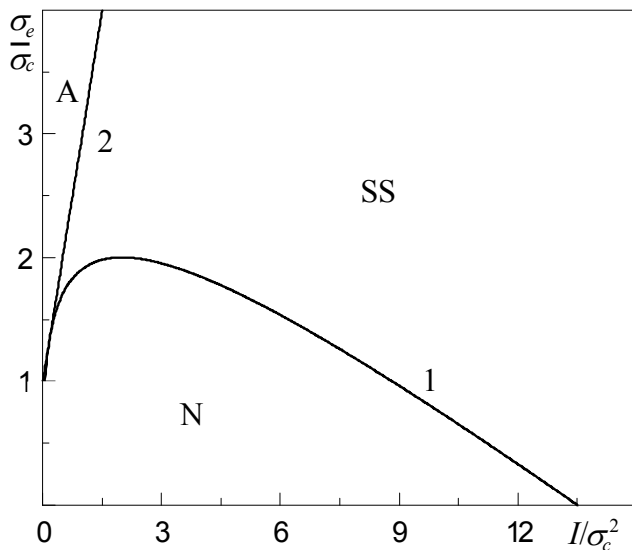


Рисунок 2.2 – Фазова діаграма станів сипкого середовища під дією пружного напруження із середнім значенням σ_e та інтенсивністю флуктуацій I . Криві 1, 2 показують межі σ_{c1} , σ_{c2} області спокою N і безперервної течії A , SS – режим *stick-slip*

Таким чином, урахування флуктуацій пружного напруження приводить до появи двофазного стану при навантаженнях $\sigma_{c1}(I) < \sigma_e < \sigma_{c2}(I)$. У цій області система може випадковим чином переходити із твердотільного стану до текучого, реалізуючи переривчастий режим *stick-slip*. Такий режим досягається навіть за відсутності зовнішнього напруження, якщо інтенсивність флуктуацій перевищує значення $I_c = (27/2)\sigma_c^2$. При цьому реалізується поведінка, властива самоорганізованій критичності [13].

2.5 Використання дробової системи рівнянь самоорганізації для статистичного опису переривчастої течії

Задача зводиться до знаходження функції розподілу $P(\tau)$ тривалості τ інтервалів течії, що чергуються зі станом спокою. Оскільки досліджуваний режим характеризується відсутністю якого-небудь масштабу часу, то розподіл визначається однорідною функцією

$$P(\tau) = \tau^{-2a} \mathcal{P}(x), \quad x \equiv \tau/\tau_c, \quad (2.54)$$

властивою для самоподібних систем. Тут $a < 1$ — показник розподілу; τ_c — критичне значення тривалості інтервалу течії, що відповідає проміжку часу між двома сусідніми випадками течії. Останнім часом з'ясувалося (див., наприклад, [15]), що статистична поведінка таких систем визначається ентропією Реньї

$$s = \frac{\ln \sum_i p_i^q}{1 - q}, \quad (2.55)$$

яка набирає больцманівського вигляду на межі $q \rightarrow 1$. Умова екстремуму цього виразу з урахуванням умови нормування $\sum_i p_i = 1$ при фіксованому значенні енергії $\zeta = \sum_i \varepsilon_i p_i$ приводить до розподілу

$$p_i = Z^{-1} [1 - \beta(1 - q)(\varepsilon_i - \zeta)]^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.56)$$

зі статистичною сумою

$$Z = \sum_i [1 - \beta(1 - q)(\varepsilon_i - \zeta)]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (2.57)$$

Вираз (2.56) набирає стандартної експоненціальної форми для $q = 1$, тоді як у випадку $q \neq 1$ характеризується степеневою асимптотикою $p_i \sim (\zeta - \varepsilon_i)^{\frac{1}{1-q}}$.

З формальної точки зору еволюцію стохастичної системи можна розглядати як процес дифузії за потенційним рельєфом, який має складну фрактальну структуру [60]. Для отримання відповідного рівняння Ланжевена ми виходитимемо з подання такої дифузії як самоузгодженої еволюції стохастичної системи в результаті конкуренції позитивного зворотного зв'язку, що обумовлює збільшення ентропії (*complexity*) системи s , і негативного внеску, який зменшує енергію пружного напруження ζ . При цьому величина τ відіграє роль параметра порядку, ентропія s відповідає сполученому полю, а енергія ζ становить керуючий параметр.

Дотримуючись синергетичного підходу, подамо самоузгоджену еволюцію системи співвідношеннями, що зв'язують швидкості зміни $\dot{\tau}, \dot{s}, \dot{\zeta}$ зазначених величин з їх значеннями. Тоді детерміністичну картину еволюції системи описуватимуть рівняння типу (1.2) для ступенів свободи τ, s, ζ . Для врахування стохастичності їх необхідно доповнити випадковими доданками, пропорційними білому шуму $\eta(t)$. У результаті самоузгоджена поведінка стохастичної системи подається узагальненими рівняннями самоорганізації:

$$t_\tau \dot{\tau} = -\tau + A_\tau s + \sqrt{I_\tau} \eta(t), \quad (2.58)$$

$$t_s \dot{s} = -s + A_s \tau \zeta + \sqrt{I_s} \eta(t), \quad (2.59)$$

$$t_\zeta \dot{\zeta} = (\zeta_e - \zeta) - A_\zeta \tau s + \sqrt{I_\zeta} \eta(t), \quad (2.60)$$

де t_i — часи релаксації відповідних величин; A_i — константи лінійного та нелінійного зв'язків, I_i — інтенсивності флуктуацій кожного із ступенів свободи $i = \tau, s, \zeta$.

В адіабатичному наближенні $t_s, t_\zeta \ll t_\tau$ рівняння (2.59), (2.60) призводять до залежностей

$$s(t) = \bar{s} + \tilde{s}\eta(t), \quad \zeta(t) = \bar{\zeta} + \tilde{\zeta}\eta(t), \quad (2.61)$$

де детерміністичні та флуктуаційні складові визначаються

рівняннями:

$$\bar{s} = A_s \zeta_e \tau d(\tau), \quad \tilde{s} = \left(\sqrt{I_s} + A_s \tau \sqrt{I_\zeta} \right) d(\tau); \quad (2.62)$$

$$\bar{\zeta} = \zeta_e d(\tau), \quad \tilde{\zeta} = \left(\sqrt{I_\zeta} - A_s \tau \sqrt{I_s} \right) d(\tau),$$

$d(\tau) \equiv (1 + A_s A_\zeta \tau^2)^{-1}$. Останній із флуктуаційних доданків нефізичний, оскільки дає повну компенсацію флуктуацій $\tilde{\zeta}$ для тривалості інтервалу течії $\tau = A_\zeta^{-1} \sqrt{I_\zeta / I_s}$. Формальною причиною зазначеної суперечності є неможливість вживання звичайних методів аналізу до рівняння Ланжевена [61]. Тому, використовуючи відоме правило адитивності дисперсій гаусівських випадкових величин [15], запишемо флуктуаційні доданки для ентропії та енергії пружного напруження у вигляді

$$\tilde{s} = \sqrt{I_s + A_s^2 \tau^2 I_\zeta} d(\tau); \quad \tilde{\zeta} = \sqrt{I_\zeta + A_\zeta^2 \tau^2 I_s} d(\tau). \quad (2.63)$$

Таким чином, завдяки дії синергетичного принципу супідрядності адитивні флуктуації ентропії та енергії пружного напруження стають мультиплікативними.

Підстановка першого із співвідношень (2.61) до (2.58) приводить до рівняння Ланжевена

$$t_\tau \dot{\tau} = f(\tau) + \sqrt{I(\tau)} \eta(t), \quad (2.64)$$

де ефективна сила та інтенсивність стохастичного джерела визначаються рівностями

$$f(\tau) \equiv -\tau + A_\tau A_s \zeta_e \tau d(\tau), \quad (2.65)$$

$$I(\tau) \equiv I_\tau + A_\tau^2 (I_s + A_s^2 \tau^2 I_\zeta) d^2(\tau). \quad (2.66)$$

Зазначимо, що вираз (2.66) впливає із правила адитивності інтенсивностей шумів, тоді як безпосередня підстановка

рівнянь (2.61), (2.62), у (2.58) привела б до результату $\left[I_\tau^{1/2} + A_\tau \left(I_s^{1/2} + A_s \tau I_\zeta^{1/2} \right) d(\tau) \right] \eta(t)$.

Рівняння Ланжевена (2.64) має нескінченний набір випадкових розв'язань, розподіл яких визначається рівнянням Фоккера-Планка

$$\frac{\partial P(\tau, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ -f(\tau)P(\tau, t) + \frac{\partial}{\partial \tau} [I(\tau)P(\tau, t)] \right\}. \quad (2.67)$$

У стаціонарному випадку $\partial P/\partial t = 0$ розподіл інтервалів течії задається співвідношеннями (2.51), де u замінюється на τ . Згідно з (2.66) степенева поведінка, властива режиму самоорганізованої критичності (СОК), реалізується за умов $I_\tau, I_s \ll I_\zeta$, для яких стаціонарний розподіл інтервалів течії набирає вигляду

$$P(\tau) = \frac{Z^{-1}}{\tau^2 d^2(\tau)} \exp \left\{ \frac{I_\zeta^{-1}}{(A_s A_\tau)^2} \int \frac{f(\tau)}{\tau^2 d^2(\tau)} d\tau \right\} \quad (2.68)$$

з константою нормування Z . На межі $\tau \rightarrow 0$ інтеграл у (2.68) прямує до сталої величини, а множник $d(\tau)$ до одиниці, і отриманий розподіл характеризується асимптотикою $P \sim \tau^{-2}$. Хоча вона має степеневий вигляд (2.54), показник $2a = 2$ перевищує значення $2a \approx 1.5$, властиве режиму СОК.

Неважко бачити, що необхідне зменшення показника a досягається, якщо параметр порядку τ у синергетичних рівняннях (2.58)–(2.60) набуває степеня $a < 1$. З фізичної точки зору заміна параметра $\tau \leq 1$ збільшеним значенням τ^a означає, що процес впорядкування позначається на самоузгодженій поведінці системи сильніше, ніж в ідеальному випадку $a = 1$. У результаті така поведінка подається дробовою схемою самоорганізації зі стохастичними джерелами:

$$t_\tau \dot{\tau} = -\tau^a + A_\tau s + \sqrt{I_\tau} \eta(t), \quad (2.69)$$

$$t_s \dot{s} = -s + A_s \tau^a \zeta + \sqrt{I_s} \eta(t), \quad (2.70)$$

$$t_\zeta \dot{\zeta} = (\zeta_e - \zeta) - A_\zeta \tau^a s + \sqrt{I_\zeta} \eta(t). \quad (2.71)$$

Для аналізу цих рівнянь зручно використати безрозмірні величини, якщо віднести час t , тривалість інтервала течії τ , ентропію s , енергію пружного напруження ζ і відповідні інтенсивності шуму I_τ, I_s, I_ζ до таких масштабів:

$$\begin{aligned} t_c &\equiv t_\tau (A_s A_\zeta)^{\frac{a-1}{2a}}; \\ \tau_c &\equiv (A_s A_\zeta)^{-\frac{1}{2a}}, \quad I_\tau^c \equiv (A_s A_\zeta)^{-\frac{1}{a}}; \\ s_c &\equiv (A_\tau^2 A_s A_\zeta)^{-\frac{1}{2}}, \quad I_s^c \equiv (A_\tau^2 A_s A_\zeta)^{-1}; \\ \zeta_c &\equiv (A_\tau A_s)^{-1}, \quad I_\zeta^c \equiv (A_\tau A_s)^{-2}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

У результаті система (2.69)–(2.71) набирає вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= -\tau^a + s + \sqrt{I_\tau} \eta(t), \\ (t_s/t_c) \dot{s} &= -s + \tau^a \zeta + \sqrt{I_s} \eta(t) \\ (t_\zeta/t_c) \dot{\zeta} &= (\zeta_e - \zeta) - \tau^a s + \sqrt{I_\zeta} \eta(t). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Перш ніж приступити до аналізу функції розподілу інтервалів τ , зазначимо, що в стаціонарному детерміністичному випадку система (2.73) приводить до розв'язання

$$\tau_0 = (\zeta_e - 1)^{\frac{1}{2a}}, \quad a \leq 1, \quad (2.74)$$

яке узагальнює стандартну кореневу залежність з $a = 1$. Використання фрактальної моделі Ізінга показує [62], що показник a визначається параметром Цалліса $0 \leq q \leq 1$ згідно з рівністю

$$a = \frac{1+q}{2}. \quad (2.75)$$

Таким чином, приходимо до умови $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Використання рівнянь (2.73) дозволяє природним чином подати можливі сценарії поведінки систем, яким властивий режим СОК [63]. Перший із цих сценаріїв реалізується за відсутності флуктуацій ($I_\tau, I_s, I_\zeta = 0$), якщо час релаксації енергії перевищує

відповідні часи зміни ентропії та тривалості інтервалу течії: $t_\zeta \geq t_s t_\tau$; крім того, параметр зовнішньої дії ζ_e повинен перевищувати критичне значення $\zeta_e = 1$ [8]. У результаті дробова система Лоренца (2.73) являє собою дивний атрактор, описаний у підрозділі 1.5. Врахування флуктуацій $I_\tau, I_s, I_\zeta \neq 0$ забезпечує стохастичну поведінку, яка навіть за відсутності зовнішньої дії ($\zeta_e = 0$) може проявляти самоорганізацію і, таким чином, відповідає режиму СОК іншого класу.

Розгляд цього режиму зводиться до дослідження стохастичної системи із шумами $I_\tau, I_s, I_\zeta \neq 0$, які задовольняють адіабатичну умову $t_s, t_\zeta \ll t_\tau$. Тоді поведінка системи подається рівняннями (2.61)–(2.64), де τ замінюється на τ^a , $d(\tau)$ на $d_a(\tau) \equiv 1 + \tau^{2a}$, а ефективні значення сили та інтенсивності шуму набирають вигляду

$$f(\tau) \equiv -\tau^a + \zeta_e \tau^a d_a(\tau), \quad (2.76)$$

$$I(\tau) \equiv I_\tau + (I_s + I_\zeta \tau^{2a}) d_a^2(\tau). \quad (2.77)$$

Відповідно розподіл тривалості інтервалів руху середовища має вигляд (2.51) з максимумом, що задається рівнянням

$$2a I_\zeta \tau^{2a} + \tau^{1-a} (1 + \tau^{2a})^2 [(\zeta_e - 1) - \tau^{2a}] = 2a (I_\zeta - 2I_s). \quad (2.78)$$

Звідси видно, що вплив флуктуацій інтервалів течії неістотний, тоді як флуктуації енергії пружного напруження та ентропії позначаються критичним чином. Межа переходу до текучого стану, яка фіксується умовою $\tau = 0$, визначається рівнянням

$$I_\zeta = 2I_s. \quad (2.79)$$

Критичні значення інтенсивностей шумів задаються умовою $\left| \frac{d\tau}{d\zeta_e} \right| = \infty$, яка приводить до виразу

$$\tau^{1-a} (1 + \tau^{2a})^2 [(5 + a^{-1}) + (a^{-1} - 1)\tau^{-2a}] - \zeta_e \tau^{1-a} (1 + \tau^{2a}) [(3 + a^{-1}) + (a^{-1} - 1)\tau^{-2a}] = 4a I_\zeta. \quad (2.80)$$

Спільне розв'язання рівнянь (2.78), (2.80) в режимі СОК ($\zeta_e = 0$) приводить до фазової діаграми, показаної на рис.2.3. З цієї

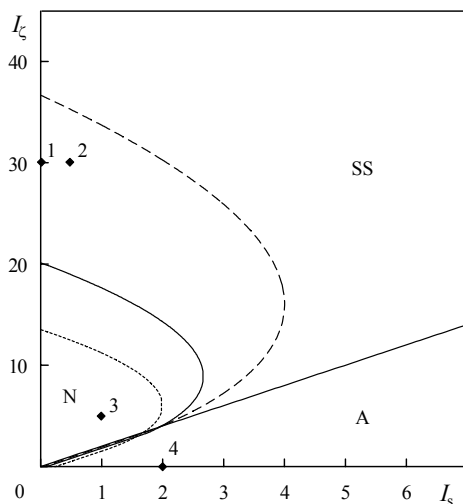


Рисунок 2.3 – Фазова діаграма станів системи залежно від інтенсивностей флуктуацій I_ζ , I_s енергії пружного напруження та ентропії при $I_\tau = 0$, $\zeta_e = 0$ (пунктирна, суцільна і штрихова криві відповідають показникам $a = 0.5, 0.75, 1.0$; ромби 1–4 відповідають кривим на рис.2.4)

діаграми видно, що такий режим реалізується у двофазній області SS , яка відповідає переривчастій течії. Зі зменшенням параметра зворотного зв'язку a ця область істотно розширюється.

Стационарний розподіл тривалості інтервалів течії для інтенсивностей флуктуацій енергії пружного напруження та ентропії, що відповідають точкам 1–4 на рис.2.3, має вигляд, показаний на рис.2.4. З нього виходить, що степенева поведінка, властива режиму СОК, реалізується за умов $I_\tau, I_s \ll I_\zeta$. У

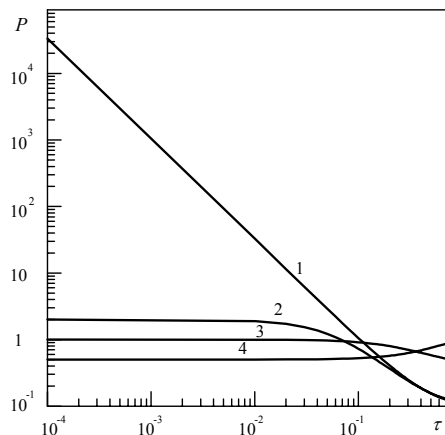


Рисунок 2.4 — Розподіл інтервалів течії при $a = 0.75$ та інтенсивностях флуктуацій, що відповідають ромбам з відповідними номерами на рис.2.3

результаті приходимо до (2.54) з функцією

$$\mathcal{P}(\tau) = Z^{-1} d_a^{-2}(\tau) \exp \left\{ -I_\zeta^{-1} \int \frac{d_a^{-2}(\tau)}{\tau^a} d\tau \right\}. \quad (2.81)$$

Тут Z — константа нормування, а безрозмірний інтервал течії τ , віднесений до масштабу τ_c (див. другу рівність (2.72)) відіграє роль скейлінгової змінної $x \equiv \tau/\tau_c$ у (2.54). Оскільки на межі $\tau \rightarrow 0$ інтеграл у (2.81) веде себе регулярним чином, то отриманий розподіл зводиться до необхідного степеневого вигляду.

2.6 Дослідження самоподібної течії суцільного середовища

Виходитимемо із визначення інтеграла дробового порядку ϖ [64, 65]

$$\mathcal{I}_x^\varpi f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\varpi)} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1-\varpi}} dx', \quad \varpi > 0, \quad (2.82)$$

де $f(x)$ – довільна функція, $\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера. Обернена операція похідної $\mathcal{D}_x^\varpi \equiv \mathcal{I}_x^{-\varpi}$ подається рівністю

$$\mathcal{D}_x^\varpi f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(-\varpi)} \int_0^x \frac{f(x')}{(x-x')^{1+\varpi}} dx'. \quad (2.83)$$

В області $0 < \varpi < 1$ зручно використати визначення

$$\mathcal{D}_x^\varpi f(x) \equiv \frac{\varpi}{\Gamma(1-\varpi)} \int_0^x \frac{f(x) - f(x')}{(x-x')^{1+\varpi}} dx', \quad (2.84)$$

де врахована відома рівність $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$ при $a \equiv -\varpi$.

Згідно з (2.82) функція (2.81) може зводитися до інтеграла порядку $1-a$:

$$\mathcal{P}(\tau) = Z^{-1} d_a^{-2}(\tau) \exp \left\{ - \frac{\Gamma(1-a)}{I_\zeta} \mathcal{I}_{-\tau}^{1-a} d_a^{-2}(\tau) \right\}. \quad (2.85)$$

З іншого боку, відомо [66]– [73], що співвідношення такого типу являє собою розв'язання дробового рівняння Фоккера-Планка

$$\begin{aligned} & \tau^{-2a} \mathcal{D}_t^\omega \mathcal{P}(\tau, t) = \\ & = \mathcal{D}_{-\tau}^\varpi \left\{ \tau^{-a} \mathcal{P}(\tau, t) + \frac{I_\zeta \mathcal{D}_{-\tau}^\varpi}{\Gamma(\varpi)} [d_a^2(\tau) \mathcal{P}(\tau, t)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Помножуючи рівняння (2.86) на $\tau^{2\varpi}$ та усереднюючи за τ , для середньої величини порядку $\alpha \equiv 2\varpi$

$$|\tau| \equiv \langle \tau^\alpha \rangle^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \langle \tau^\alpha \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \tau^\alpha P(\tau, t) d\tau, \quad \alpha > 0, \quad (2.87)$$

де розподіл $P(\tau, t)$ задається однорідною функцією (2.54), отримуємо

$$|\tau|^z \sim t, \quad z = \frac{2\varpi}{\omega}. \quad (2.88)$$

Цей вираз відповідає межі великого часу, де визначну роль відіграє дифузійний внесок (z — динамічний показник). Комбінування рівностей (2.85), (2.88) і (2.82) приводить до співвідношення $1 - a = \varpi = z\omega/2$, згідно з яким

$$a = 1 - \frac{z\omega}{2}. \quad (2.89)$$

У наближенні середнього поля розподіл (2.54) має показник $a = 3/4$, що приводить до співвідношення

$$z\omega = 1/2. \quad (2.90)$$

Якщо еволюція системи проходить за відсутності пасток у фазовому просторі, то показник похідної за часом набуває значення $\omega = 1$ [74], яке відповідає динамічному показнику $z = 1/2$. Його величина набагато менша за значення $z = 1$, властиве балістичній поведінці, і не може відповідати режиму СОК. З іншого боку, дифузійний режим, що відповідає показнику $z = 2$, забезпечується тільки для показника похідної за часом $\omega = 1/4$.

Таким чином, у наближенні середнього поля, коли $a = 3/4$, $\varpi = 1/4$, переривчастий режим течії, зумовлений наявністю ефективних пасток у фазовому просторі, характеризується

показником похідної за часом $\frac{1}{4} < \omega < \frac{1}{2}$. Відповідно динамічний показник змінюється в інтервалі $2 > z > 1$.

Розглянемо тепер зв'язок зазначених показників з параметром неадитивності q , який визначає співвідношення (2.55)–(2.57). Як відомо, еволюція неадитивної системи подається нелінійним рівнянням Фоккера-Планка [75]

$$\mathcal{D}_t^\omega P(\tau, t) = \mathcal{D}_{-\tau}^2 P^q(\tau, t), \quad (2.91)$$

де показники $\omega > 0$, $q > 0$ не є цілими, а одиниці виміру визначаються величиною коефіцієнта дифузії. Для однорідної функції розподілу

$$P(\tau, t) = \tau_c^{-1} \mathcal{P}(x); \quad x \equiv \tau/\tau_c, \quad \tau_c \equiv \tau_c(t) \quad (2.92)$$

отримаємо

$$\tau_c^{1+q} \sim t^\omega. \quad (2.93)$$

З іншого боку, використання лінійного рівняння Фоккера-Планка дробового порядку (див. (2.86))

$$\mathcal{D}_t^\omega P(\tau, t) = \mathcal{D}_{-\tau}^{2\varpi} P(\tau, t) \quad (2.94)$$

приводить до залежності

$$\tau_c^{2\varpi} \sim t^\omega, \quad (2.95)$$

порівняння якої з (2.93) дає зв'язок

$$1 + q = 2\varpi. \quad (2.96)$$

Оскільки для самоподібних систем середнє значення $|\tau|$ у (2.87) зводиться до масштабу τ_c , то з рівнянь (2.88), (2.93) і (2.95) випливає зв'язок

$$1 + q = z\omega. \quad (2.97)$$

Вище ми показали, що типове значення величини $z\omega$ не перевищує 1 (так, у наближенні середнього поля маємо (2.90)). У результаті умова (2.97) не виконується, і наведений режим еволюції системи не реалізується. Цей режим відповідає картині супердифузії, яка забезпечується польотами Леві, що становлять довільні (у тому числі нескінечні) зсуви блукаючої частинки [74, 76]. Згідно з рівнянням Фоккера-Планка (2.86) такий процес характеризується динамічним показником $z \equiv 2\varpi/\omega \leq 2$. Цей показник визначається індексом Леві α , значення якого задає імовірність зсуву \mathbf{x}

$$p(\mathbf{x}) \sim x^{-(D+\alpha)} \quad (2.98)$$

у фрактальному фазовому просторі розмірністю D . При $\alpha < 2$ показник z зводиться до індексу Леві ($z = \alpha < 2$), а для $\alpha \geq 2$ відповідає звичайній дифузії ($z = 2$) [77].

Основна особливість польотів Леві полягає в тому, що блукання неперервні у часі, але дискретні у просторі. Зовсім інша ситуація спостерігається у випадку субдифузії, коли зсуви частинки неперервні, але завдяки дії пасток відбуваються в дискретні моменти часу. Вище ми показали, що саме така ситуація відповідає переривчастому режиму течії, коли показник похідної за часом $\omega < 1$ є дробовим. На мікроскопічному рівні цей процес може бути поданий розподілом Цалліса [75, 78]

$$p(\mathbf{x}) \propto [1 - \beta(1 - q)x^2]^{\frac{1}{1-q}}, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad (2.99)$$

де параметр $q > 1$ задається фрактальними властивостями фазового простору і фіксується показником Леві α згідно з рівністю

$$q = 1 + \frac{2}{D + \alpha}. \quad (2.100)$$

Перевага степеневого виразу (2.99) порівняно з експоненціальним розподілом полягає в тому, що для всіх показників $\alpha > 0$ він дає

кінцеве значення q -зваженого середнього Цалліса

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle_q \equiv \int \mathbf{x}^2 p^q(\mathbf{x}) d^D x, \quad (2.101)$$

де підінтегральна функція змінюється, як $x^{-(1+\alpha)}$. У результаті закон випадкових блукань набирає вигляду

$$\langle \mathbf{x}^2 \rangle_q \sim t^\omega, \quad \omega = \begin{cases} q - 1, & \alpha, q < 2; \\ 1 - (q - 1)\frac{D}{2}, & \alpha \geq 2, q > 1. \end{cases} \quad (2.102)$$

На відміну від закону супердифузії (2.95), де $\varpi < 1$, $\omega = 1$, у випадку субдифузії отримуємо обернені співвідношення $\varpi = 1$, $\omega < 1$, і остання рівність у (2.88) дає динамічний показник $z > 2$. У загальному випадку $\varpi, \omega \neq 1$ підстановка (2.102) до (2.97) приводить до зв'язків

$$z = \begin{cases} \frac{1+q}{1-\frac{D}{2}(q-1)}, & 1 < q \leq q_D; \\ \frac{1+q}{q-1}, & q_D \leq q \leq 2, \end{cases} \quad (2.103)$$

де введене граничне значення параметра неадитивності

$$q_D \equiv \frac{4 + D}{2 + D}. \quad (2.104)$$

Зазначимо, що отримані співвідношення (2.102)–(2.104) визначають процес субдифузії не у реальному геометричному просторі, а у фазовому з фрактальною розмірністю D .

Завдання для самоконтролю

1. Що являє собою плоска течія Куета?
2. Сформулюйте основні принципи гідродинамічної теорії поведінки сипкого середовища.
3. Подайте рівняння (2.5)–(2.7) у безрозмірному вигляді.
4. Знайдіть розв'язання системи (2.10)–(2.12) за умов (2.13) щодо кривизни профілю середньої швидкості V'' і внутрішнього напруження σ .
5. Знайдіть розв'язання рівняння Гінзбурга-Ландау-Халатнікова (2.14).
6. Отримайте рівняння (2.18) для середньої швидкості течії.
7. Проаналізуйте просторові залежності середньоквадратичних флуктуацій швидкості u , пружного напруження та відповідні профілі градієнта швидкості V' і середньої швидкості V .
8. Чим може забезпечуватися перехід тонкого шару мастила до рідкого стану?
9. Запишіть самоузгоджену систему рівнянь, що описує перехід тонкого шару мастила до рідкого стану.
10. Подайте рівняння (2.22), (2.24) і (2.26) у безрозмірному вигляді.
11. Знайдіть розв'язання системи (2.28)–(2.30) за умов (2.31) щодо деформації зсуву ε і тиску $P - 1$, відліченого від порога $P = 1$.

12. Із рівняння (2.28) з урахуванням умов (2.31) та розв'язань рівнянь (2.29), (2.30) отримайте рівняння Ландау-Халатнікова і відповідний синергетичний потенціал.
13. Враховуючи, що в системі (2.28)–(2.30) час релаксації τ_σ змінюється згідно з (2.36), отримайте синергетичний потенціал у вигляді (2.38).
14. Наведіть синергетичний потенціал (2.38) у безрозмірному вигляді.
15. Знайдіть стаціонарні значення напруження зсуву, що відповідають екстремумам синергетичного потенціалу (2.38).
16. Знайдіть тиск, що відповідає мінімуму залежності (2.38).
17. Отримайте рівняння Ланжевена (2.49) з урахуванням у рівнянні (2.7) стохастичного джерела $(\sqrt{I}/t_\sigma)\eta(t)$, що характеризується інтенсивністю I і білим шумом $\eta(t)$.
18. Отримайте умови визначення максимуму стаціонарного розподілу (2.51).
19. Проаналізуйте фазову діаграму станів сипкого середовища під дією пружного напруження із середнім значенням σ_e та інтенсивністю флуктуацій I .
20. Запишіть вираз для ентропії Реньї.
21. Запишіть і проаналізуйте узагальнені рівняння самоорганізації, що являють собою самоузгоджену поведінку стохастичної системи.
22. Отримайте рівняння Ланжевена (2.64) з урахування розв'язань системи (2.58)–(2.60) за адіабатичних умов.

23. Запишіть і проаналізуйте дробові рівняння самоорганізації зі стохастичними джерелами.
24. Наведіть рівняння (2.69)–(2.71) у безрозмірному вигляді.
25. Яким чином можна подати сценарії поведінки систем, яким властивий режим самоорганізованої критичності (СОК)?
26. Отримайте рівняння (2.76),(2.77) із (2.73).
27. Проаналізуйте фазову діаграму станів системи залежно від інтенсивностей флуктуацій енергії пружного напруження та ентропії.
28. Запишіть та проаналізуйте розподіл Цалліса для імовірності зсуву x .

Розділ 3

САМОУЗГОДЖЕНИЙ ОПИС СИСТЕМ ЕКОНОМІЧНОГО ТИПУ

Останніми роками спостерігається значний розвиток класичної економіки [79] за рахунок використання концепцій і методів, першочергово розроблених у природничих науках. Так, застосування методів статистичної фізики дозволило представити основні особливості економічних крахів, побудувати теорію фінансових ризиків, розвинути принципи формування оптимального портфеля, інтерпретувати процеси зміни економічних показників і обмінних курсів валют [31, 80, 81]. З іншого боку, з'явилася еволюційна економіка, яка спирається на теорію систем, що розвиваються, та теорію біологічної еволюції [82, 83]. Нарешті, отримала розвиток синергетична економіка [84, 85], що базується на теорії відкритих систем, що дозволяє представити процеси самоорганізації у фізиці, хімії, біології, соціології і т.д. Таким чином сформувався новий напрям — *фізична економіка* [86] (в англомовній літературі використовується термін *econophysics* [31, 80, 81]).

На сьогоднішній день склалися три основні напрями еконофізики [87]. Перший зводиться до дослідження часових рядів, що показують зміни обмінних курсів валют, вартості цінних паперів, товарів, послуг і т.д. Інший напрям являє собою мережевий аналіз економічних систем, у рамках якого кожному агентові (країні, підприємству, трейдеру, товару або послугі) приписується вузол складної мережі, а їх взаємодія подається відповідними зв'язками. Нарешті, останній із названих

напрямів зводиться до дослідження розподілів внутрішніх валових продуктів країн та індивідуальних доходів, а також розподілів фірм за чисельністю зайнятих робітників, за основним капіталом, кількістю реалізованих товарів, наданими послугами і так далі. Розвитку цього напряму, що зводиться до статистичного аналізу складних систем, присвячена основна частина цього розділу.

Одним із об'єктів дослідження фізичної економіки є фінансовий ринок, який становить складну статистичну систему, поведінка якої непередбачувана завдяки величезному числу чинників, що впливають на динаміку цін [81]. Дуже простим і природним методом прогнозування поведінки такої системи є зіставлення існуючого стану ринку з попереднім [88]. Таке зіставлення характеризується взаємозв'язком між отриманою інформацією, яка зводиться до набору професійних знань про зовнішні та внутрішні чинники, що визначають динаміку макроекономічних величин (процентної ставки, інфляції, геополітичного положення, профілю зміни цін і т.д.), і реакцією фінансового ринку, яка виражається в кореляції між інформацією про попередній стан ринку і подальшій зміні цін. Якщо на нескінченно віддалених часах фіксації інформації та цін відповідний корелятор набирає ненульового значення, то встановлюється когерентний стан фінансового ринку, еквівалентний угоді трейдерів про дотримання певної стратегії. Дослідженню умов такої угоди присвячений підрозділ 3.1.

Найважливіше завдання фізичної економіки зводиться до з'ясування умов еволюції низькопродуктивного стану економіки до високопродуктивного, з одного боку, та опису картини переходу між ними (*економічної кризи* або *економічного дива*) – з іншого [30]. Відповідно до типу стаціонарного стану складається і економічна структура суспільства, що становить розподіл населення за ліквідними накопиченнями або іншим показником. На основі соціологічних опитувань,

експертних оцінок і непрямих даних було з'ясовано, що можна виділити низько- та високооплачувану групи населення, а також порівняно нечисленний надбагатий прошарок — так званий *утікаючий хвіст*, доходи і накопичення якого настільки великі, що обмежуються державою або переводяться до інших країн (відплив капіталу). Більш ніж століття тому було встановлено, що розподіл багатства у надбагатому прошарку підпорядковується степеневому закону Парето [89], емпіричні дослідження якого виявили [90, 91], що відповідний показник залишається сталим не лише з часом, але і практично не змінюється з переходом від одного економічного співтовариства до іншого.



Вільфредо Парето (Vilfredo Pareto) (Париж, 15.07.1848р. — Женева, 20.08.1923р.), італійський економіст і соціолог, представник математичної школи в економіці. Парето відомий своїм так званим "законом Парето що описує процес розподілу доходів, і теорією еліти. В основу його соціології покладена ідея про те, що значна частина соціальних дій не має нічого спільного з логікою, а вчинки індивідів зазвичай продиктовані намаганням надати нераціональним діям деяку видимість логічності. В його уявленні історія людства подається як зміна настроїв серед еліти.

Використання методів фізичної економіки дозволило пояснити основні із зазначених особливостей. Так, якщо уявити накопичення багатства w як процес випадкових блукань, то використання дискретної [92] та неперервної [93] моделей приводить до немонотонного розподілу

$$P(w) \propto w^{-\nu} \exp\left(-\frac{\nu-1}{w}\right), \quad (3.1)$$

хвіст якого має вигляд закону Парето із показником ν . Аналогічну залежність дають також феноменологічна модель Лотки-Вольтерра, що досліджує еволюцію системи *хижак–жертва* [94], і мікроскопічна модель Максвелла, в рамках якої трейдери уявляються як частинки, що випробовують непружні зіткнення [95]. Спільним недоліком підходів, розвинених у [92]–[95], є те, що вони приводять до відсутності надбідного прошарку, властивого країнам з нерозвиненою економікою. Крім того, не враховується механізм, що показує, яким чином здійснюється перехід від одного типу розподілу до іншого (наприклад, як можна позбавитися надбідного прошарку).

Подолання зазначених обмежень досягається в підрозділах 3.2, 3.3, 3.4 на основі простої феноменологічної моделі, використання якої дозволяє за аналогією з теорією конденсованого середовища [8, 10] зобразити економічну структуру суспільства та умови реалізації перехідних явищ типу економічної кризи.

3.1 Синергетична картина фінансового ринку, що еволюціонує відповідно до отриманої інформації

Оскільки фінансовий ринок є відкритою системою, доречно досліджувати його в рамках синергетичного підходу, що узагальнює картину фазових перетворень [18]. Згідно з підрозділом 1.1, проста теорія, що описує перехід між хаотичним і когерентним станами ринку, ґрунтується на рівняннях еволюції параметра порядку, сполученого поля та керуючого параметра.

Для визначення сенсу зазначених величин розглянемо систему, що складається з \mathcal{M} трейдерів, із яких $N \leq \mathcal{M}$ дотримуються певної стратегії (назвемо їх стратегічно орієнтованими), а останні $\mathcal{M} - N$ діють випадковим чином (випадково орієнтовані трейдери).

Припустимо, що ціна $P(t)$ деякого активу (акції, облігації і т.д.), взятого в момент часу t , змінюється за проміжок часу τ на величину $\delta P(t + \tau)$. При цьому стратегічно орієнтовані партнери ухвалюють рішення зі зміни ціни, виходячи із зміни інформації $\delta I(t)$, що відбувається в попередній момент часу t у фінансових індексах, самій ціні або інших економічних показниках (дивідендах, процентній ставці, рівнях інфляції, безробіття та інше). У результаті випадкові величини $\delta I(t)$ і $\delta P(t + \tau)$ виявляються статистично залежними, і корелятор

$$\langle \delta P(t + \tau) \delta I(t) \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta P(t + \tau) \delta I(t) dt$$

набуває ненульового значення.

Корінна зміна фінансового ринку, що означає угоду про вибір певної стратегії, відбувається, якщо цей корелятор набуває кінцевих значень при нескінченному віддаленні моментів фіксації інформації та цін, тобто за умови $\tau \rightarrow \infty$. Таким чином, відмінність стратегічно орієнтованих трейдерів від випадково орієнтованих зводиться до того, що для перших корелятор

$$C = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \delta P(t + \tau) \delta I(t) \rangle \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \delta P(t + \tau) \delta I(t) dt \quad (3.2)$$

набуває ненульових значень, а для других $C = 0$. У зв'язку з цим можна говорити про корелятор (3.2) як про параметр порядку, що визначає вибір стратегії у діях трейдерів. Відповідно, сполучене поле зводиться до інформації I , а роль керуючого параметра відіграє число N трейдерів, що діють згідно з певною стратегією. Це означає, що зі зростанням N вище критичного значення, фінансовий ринок переходить з некорельованого стану $C = 0$, в якому трейдери діють випадковим чином, до когерентного стану

$C \neq 0$, що визначається вибором стратегії щодо малого числа трейдерів $N \ll \mathcal{N}$.

Згідно із синергетичною ідеологією, викладеною в підрозділах 1.1, 1.2, еволюція системи, що самоорганізується, визначається самоузгодженими рівняннями, які зв'язують швидкості dC/dt , dI/dt , dN/dt зміни основних параметрів з їх значеннями C, I, N :

$$\tau_C \dot{C} = -C + A_C I, \quad (3.3)$$

$$\tau_I \dot{I} = -I + A_I C N, \quad (3.4)$$

$$\tau_N \dot{N} = (N_i - N) - A_N C I. \quad (3.5)$$

Тут крапка означає диференціювання за часом N_i – початкове число стратегічно орієнтованих трейдерів; τ_z – часи релаксації; A_z – константи зв'язку ступенів свободи; $z = C, I, N$. Для аналізу рівнянь (3.3)–(3.5) зручно використати безрозмірні змінні, якщо віднести час t , корелятор C , інформацію I і число трейдерів N до масштабів

$$\tau_C, \quad C_{sc} \equiv (A_I A_N)^{-1/2}, \quad I_{sc} \equiv (A_C^2 A_I A_N)^{-1/2}, \quad N_{sc} \equiv (A_C A_I)^{-1}.$$

У результаті еволюція фінансового ринку подається канонічною системою рівнянь самоорганізації (1.2), де роль параметра порядку відіграє корелятор C , сполучене поле зводиться до інформації I , а керуючий параметр – до числа трейдерів N .

Подальший аналіз проводиться за аналогією з викладеним у підрозділі 1.2, а нижче наведемо тільки його результати. Самоузгоджена поведінка фінансового ринку забезпечується, якщо характерний час τ_C зміни корелятора (3.2) набагато перевищує відповідні масштаби τ_I, τ_N для інформації та числа трейдерів. При цьому зміни останніх величин наслідують еволюцію корелятора згідно зі співвідношенням (1.4), де параметр порядку η замінюється корелятором C , сполучене поле h відповідає інформації I , а керуючий параметр S відповідає числу трейдерів N . Таким чином, збільшення корелятора C в

інтервалі, обмеженому максимальним значенням C_{sc} , приводить до зростання інформації I і до зменшення числа стратегічно орієнтованих трейдерів N нижче за початкове значення N_i . Еволюція фінансового ринку описується рівнянням Ландау-Халатнікова (1.5), де ефективний потенціал визначається рівністю (1.6). Для малих значень N_i синергетичний потенціал має мінімум у точці $C = 0$, що відповідає некорельованому стану фінансового ринку, в якому відсутній будь-який зв'язок між отриманою інформацією та його поведінкою. Зі зростанням N_i до значень, що перевищують критичний рівень N_{sc} , з'являється мінімум (тут і далі використані розмірні одиниці).

$$C_0 = C_{sc} \sqrt{\frac{N_i}{N_{sc}} - 1}, \quad (3.6)$$

що відповідає когерентному стану, коли фінансовий ринок розвивається відповідно до стратегії, вибраної відносно малою кількістю трейдерів $N_i \ll \mathcal{N}$. Із синергетичної точки зору такий стан відповідає впорядкованій фазі, в якій інформація має стаціонарне значення $I_0 = C_0/A_C$, а стаціонарне число трейдерів, що діють згідно з визначеною стратегією, зменшується до критичного значення $N_{sc} < N_i$.

Набір трейдерів можна розглядати за аналогією з положеннями броунівської частинки, подаючи його як випадковий гаусівський ансамбль, в якому \mathcal{N} випадкових стрибків частинки приводять до середньоквадратичного зсуву порядку $\sqrt{\mathcal{N}} \ll \mathcal{N}$ [61]. Іншими словами, із повного числа \mathcal{N} випадкових переміщень когерентними (у сенсі руху в певному напрямі) будуть тільки $\sqrt{\mathcal{N}}$ стрибків. Грунтуючись на цій аналогії, можна вважати, що в задачі про фінансовий ринок початкове число гравців N_i , які діють узгодженим (когерентним) чином, має порядок квадратного кореня із повного числа трейдерів \mathcal{N} . Враховуючи, що всі величини виміряні у масштабі N_{sc} , доходимо висновку, що фінансовий ринок може знаходитися у когерентному стані за

виконання умови

$$N_i > \sqrt{\mathcal{N}N_{sc}}. \quad (3.7)$$

У загальному випадку набір трейдерів може зводитися не до ансамблю Гауса, а до стохастичної системи, що випробує польоти Леві або що потрапляє в пастки (у першому випадку еволюція системи зводиться до процесу супердифузії, в другому – до субдифузії) [74]. Для такої системи коренева залежність $\sqrt{\mathcal{N}N_{sc}}$ набирає складнішого вигляду $(\mathcal{N}N_{sc})^{1/z}$, що визначається динамічним показником z , який набуває значень $z < 2$ для супердифузії та $z > 2$ для субдифузії. У результаті умова (3.7) записується у загальному вигляді

$$N_i > (\mathcal{N}N_{sc})^{1/z}. \quad (3.8)$$

Таким чином, фінансовий ринок починає дотримуватися певної стратегії, якщо початкове число трейдерів перевищує критичну межу, що задається середнім геометричним від повного і критичного значень числа гравців.

Проведений розгляд показує, що врахування інформації про попередній стан фінансового ринку може істотним чином змінити його поточний стан. Ця зміна полягає в такому: якщо число трейдерів N_i , що перевищує критичне значення $(\mathcal{N}N_{sc})^{1/z}$, вибирає певну стратегію зі зміни ціни, то система переходить до когерентного стану, що відповідає мінімуму синергетичного потенціалу (1.6), у якому корелятор (3.2) має стаціонарне значення (3.6). При цьому частка решти гравців, число яких $\mathcal{N} - N_i \leq \mathcal{N}$, набагато перевищує початкове число $N_i \ll \mathcal{N}$ стратегічно орієнтованих трейдерів, починають діяти згідно з обраною стратегією. Іншими словами, узгоджені дії малої частки трейдерів $N_i/\mathcal{N} \ll 1$ спонтанним чином нав'язують своє рішення основній масі гравців \mathcal{N} .

Очевидно, подана ситуація може реалізуватися як в економіці, так і у соціумі, поведінка якого проявляється у кризових

подіях типу війн, революцій, переворотів та інших соціальних потрясінь. Характерна особливість таких явищ полягає у тому, що відносно нечисленна, але жорстко організована група нав'язує своє рішення основній масі населення. Найбільш яскравими прикладами таких подій є жовтневий переворот у Росії та прихід до влади фашистів у Німеччині.

3.2 Економічна структура суспільства

Оскільки суспільство — це відкрита економічна система, доречно досліджувати його в рамках синергетичного підходу. Як показують попередні приклади, завдання зводиться до знаходження рівнянь еволюції параметра порядку, сполученого поля і керуючого параметра.

Для заданих значень ліквідних засобів U і ціни P роль параметра порядку, що відрізняє високопродуктивний стан економіки від низькопродуктивного відіграє *функція попиту* $Q(U, P)$, що становить кількість товару, придбаного за одиницю часу: у низькопродуктивному, невпорядкованому стані маємо $Q = 0$, у високопродуктивному, впорядкованому $Q \neq 0$. Відповідно сполучене поле зводиться до *виробничої функції* F , яка визначається кількістю продукту, виробленого за одиницю часу (часу обороту) залежно від кількості працівників, зайнятих у процесі, та вкладених (оборотних) коштів. Керуючий параметр представляє умовну ціну $p \equiv P/U$, яка визначається відношенням дійсної ціни до наявних коштів.

У рамках синергетичного підходу еволюція системи визначається системою самоузгоджених рівнянь типу (3.3)–(3.5), які зв'язують швидкості зміни \dot{Q} , \dot{F} , \dot{p} зазначених величин із їх значеннями Q , F , p . Для аналізу цієї системи введемо масштаби

вимірів часу t , попиту Q , виробничої функції F і умовної ціни p :

$$\tau_Q, \quad Q_c \equiv (A_F A_p)^{-1/2}, \quad F_c \equiv (A_Q^2 A_F A_p)^{-1/2}, \quad p_c \equiv (A_Q A_F)^{-1} \quad (3.9)$$

відповідно. У результаті економічна еволюція подається безрозмірною системою рівнянь (1.1), де параметр порядку η , сполучене поле h і керуючий параметр S зводяться до величин Q , F , p , а параметр нагнітання r – до купівельної спроможності p_e . Якщо для характерних часів виконується співвідношення $\tau_F, \tau_p \ll \tau_Q$, то зміни виробничої функції та ціни наслідують еволюцію попиту згідно зі співвідношенням типу (1.4). Це означає, що збільшення попиту в інтервалі, обмеженому максимальним значенням Q_c , приводить до зростання виробничої функції F і до зменшення умовної ціни p нижче за рівень, що фіксується купівельною спроможністю p_e . Економічна еволюція описується рівнянням Ландау-Халатнікова (1.5), де ефективний потенціал визначається рівністю (1.6). За малих значень p_e синергетичний потенціал має монотонно зростаючий вигляд з мінімумом $Q_0 = 0$, що відповідає низькопродуктивному стану економіки, в якому переважає бідний прошарок населення. Зі зростанням p_e до значень, що перевищують критичний рівень p_c , з'являється мінімум

$$Q_0 = Q_c \sqrt{\frac{p_e - p_c}{p_c}}, \quad (3.10)$$

що відповідає висопродуктивному стану, в якому переважає населення із середніми доходами (середній клас). При цьому виробнича функція набуває стаціонарного значення $F_0 = A_Q Q_0$, а умовна ціна зменшується до критичного значення $p_0 = p_c$.

Основна особливість використаного підходу полягає в тому, що економічна еволюція подається усередненими значеннями попиту Q , виробничої функції F та умовної ціни p , величини яких насправді випадково змінюються з часом. Для врахування цієї обставини додамо в праві частини рівнянь самоорганізації

стохастичні доданки $\sqrt{I_Q}\eta(t)$, $\sqrt{I_F}\eta(t)$, $\sqrt{I_p}\eta(t)$, що визначаються білим шумом $\eta(t)$ та інтенсивностями I_Q , I_F , I_p , вимірними в одиницях $(A_F A_p)^{-1}$, $(A_Q^2 A_F A_p)^{-1}$, $(A_Q A_F)^{-2}$ відповідно. Тоді в рамках адіабатичного наближення виробнича функція F та умовна ціна p розділяються на детерміністичні складові \bar{F} , \bar{p} і стохастичні доданки \tilde{F} , \tilde{p} (перші визначені рівністю (2.62), а другі – виразами (2.63), де під τ , s , ζ слід розуміти Q , F , p). У результаті стохастичний процес економічної еволюції описується рівнянням Ланжевена типу (2.64). Розподіл його випадкових розв'язань задається рівнянням Фоккера-Планка, що має форму (2.67), де ефективні значення сили та інтенсивності шуму визначаються співвідношенням типу (2.65), (2.66).

Таким чином, стаціонарний розподіл попиту зводиться до дослідженого в підрозділі 2.5. Зокрема, виявляється, що мінімальний попит $Q = 0$ реалізується, якщо купівельна спроможність p_e не перевищує критичного значення

$$p_c^0 = 1 + 2I_p - 4I_F, \quad (3.11)$$

яке зростає зі збільшенням коливань ціни товару і зменшується із розкидом виробничої функції. Така ситуація відповідає низькопродуктивному стану економіки. Для дослідження умов утворення високопродуктивного стану розглянемо спочатку звичайний випадок $I_F = 0$, у якому стаціонарний попит набуває значень

$$Q_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[(p_e - 3) + \sqrt{(3 - p_e)^2 + 4(2p_e - 3 + 2I_p)} \right]. \quad (3.12)$$

Мінімальна величина

$$Q_c^2 = \frac{1}{2} \left[(p_e - 3) - \sqrt{(p_e + 7)(p_e - 1)} \right] \quad (3.13)$$

досягається на прямій (3.11), де $I_F = 0$. При купівельній спроможності $p_e < 4/3$ критичний попит Q_c є комплексним, а

зі зростанням до значень $p_e > 4/3$ стає дійсним. Таким чином, трикритична точка

$$p_e = 4/3, \quad I_p = 1/6 \quad (3.14)$$

визначає межу утворення високопродуктивного стану. Якщо $p_e < 4/3$ то за умови (3.11) корінь $Q = 0$ відповідає максимуму розподілу попиту, тоді як при $p_e > 4/3$ — мінімуму; відповідно корні Q_{\pm} визначають симетричні максимуми високопродуктивного стану. Цей стан реалізується над кривою $p_e(I_p)$, що визначається рівнянням

$$2I_p = \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{p_e}{3} \right) - \frac{p_e^2}{8} \right] \pm \left\{ \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{p_e}{3} \right) - \frac{p_e^2}{8} \right]^2 - 2p_e^3 \right\}^{1/2}, \quad (3.15)$$

згідно з яким ця крива перетинає горизонтальну вісь у точках $I_p = 0$ та $I_p = 27/2$ і має максимальне значення $p_e = 2$ для

$$I_p = 2. \quad (3.16)$$

При $I_F = 0$ крива (3.15) дотикається прямої (3.11) в точці (3.14).

Описана картина подається діаграмою, наведеною на рис.3.1а. Із нього бачимо, що при значеннях купівельної спроможності, що перевищують межу (3.11), стаціонарний попит набуває кінцевого значення $Q \neq 0$ й економіка відповідає високопродуктивному стану. При зниженні рівня купівельної спроможності з'являється максимум розподілу в точці $Q = 0$, який відповідає низькопродуктивному стану економіки. Під кривою (3.15) цей максимум стає єдиним. Таким чином, коливання ціни приводять до появи області, розміщеної між лініями (3.11), (3.15), у якій економіка може знаходитися як у низько-, так і високопродуктивному стаціонарних станах. Ця область відповідає стратифікованому суспільству, яке згідно з рис.3.1а утворюється навіть за відсутності купівельної спроможності, якщо коливання

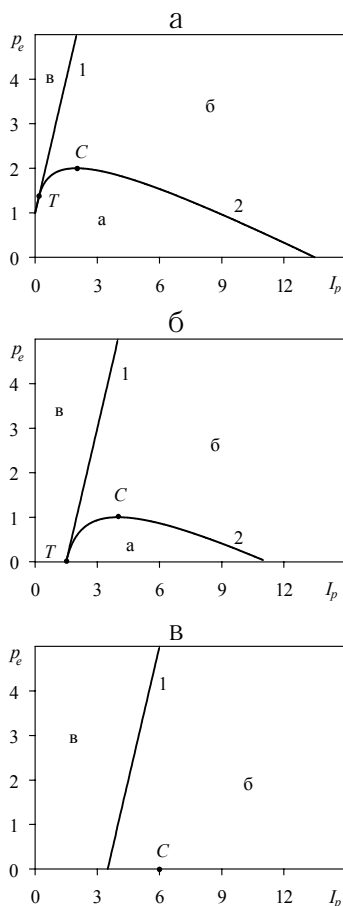


Рисунок 3.1 – Діаграма можливих станів економіки для різних значень купівельної спроможності p_e , коливань ціни I_p і флуктуацій виробничої функції I_F (величини p_e , I_p відкладені за осями координат, значення $I_F = 0, 1, 2$ відповідають рисункам $a, б, в$). Криві 1, 2 показують кордони низькопродуктивного (а) і високопродуктивного (в) станів із областю, що відповідає стратифікованому суспільству (б)

ціни перевищують поріг $I_p = 27/2$. У цьому випадку реалізується картина, властива режиму самоорганізованої критичності [13, 14].

Розглянемо, нарешті, спільний випадок, коли флуктуації виробничої функції $I_F \neq 0$. При цьому координати (3.14) трикритичної точки набирають вигляду

$$p_e = \frac{4}{3}(1 - I_F), \quad I_p = \frac{1}{6}(1 + 8I_F), \quad (3.17)$$

а положення критичної точки (3.16) змінюється складнішим чином. Як бачимо із рис.3.2, врахування флуктуацій виробничої функції $I_F \neq 0$ приводить до притиснення низькопродуктивного стану, обмежуючи область його існування кінцевими інтервалами купівельної спроможності p_e , коливаннями ціни I_p і флуктуаціями виробничої функції I_F . Згідно з рис.3.1б,в зі зростанням останніх до значення $I_F = 1$ трикритична точка (3.17) потрапляє на вісь $p_e = 0$, а при $I_F = 2$ низькопродуктивна область зникає зовсім. Таким чином, коливання виробничої функції трансформують низькопродуктивний стан до високопродуктивного, приводячи до появи середнього класу.

Проведений розгляд показує, що залежно від купівельної спроможності p_e , рівня коливання цін I_p і флуктуацій виробничої функції I_F функція розподілу попиту, що відображає економічну структуру суспільства, набирає вигляду, показано на рис.3.3. Одномодовий режим (рис.3.3в), властивий високопродуктивному стану економіки, характерний для розвинених країн, де домінує середній клас [30]. Бімодальний режим (рис.3.3б), що відповідає стратифікованому суспільству, спостерігався в Росії в 90-ті роки минулого століття [30]. При цьому виділяється група надбагатого населення, яка відповідає хвосту розподілу попиту, що визначається степеневою залежністю Парето

$$P \sim Q^{-\nu} \quad (3.18)$$

із показником $\nu = 1-2$. Незважаючи на нечисленність цієї групи, її доходи становлять не менше половини всіх накопичень населення,

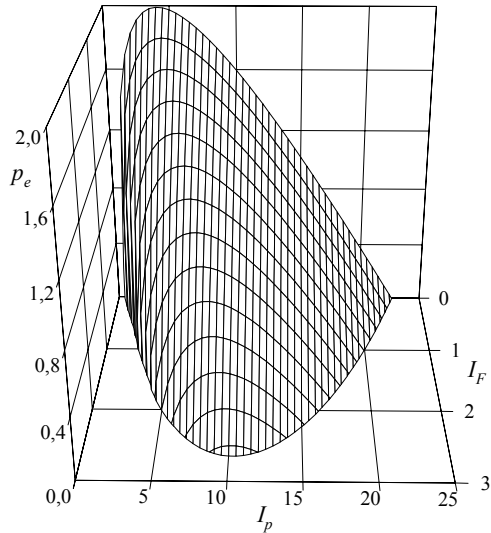


Рисунок 3.2 — Тривимірна діаграма існування
низькопродуктивного стану

і розподіл (3.18) відіграє важливу роль в економічній структурі суспільства.

Починаючи розгляд закону Парето, зазначимо, що його степенева форма є ознакою самоподібної системи, де відсутній характерний масштаб [15]. Дійсно, властивість самоподібності виражається однорідністю функції розподілу

$$P(Q/Q_c) = Q_c^\nu P(Q). \quad (3.19)$$

Згідно з (3.19) зміна масштабу Q_c випадкової величини Q приводить до мультиплікативної зміни ймовірності її реалізації P із характерним показником ν . Якщо ввести масштабовану змінну $\kappa \equiv Q/Q_c$ і функцію перерозподілу $\mathcal{P}(\kappa) \equiv \kappa^\nu P(\kappa)$, можна

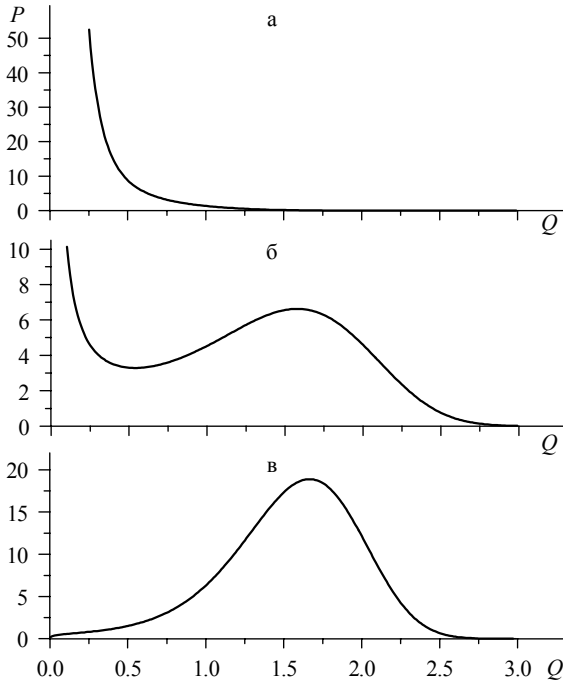


Рисунок 3.3 – Вигляд функції розподілу попиту: а) у низькопродуктивному стані ($p_e = 0.1$, $I_p = 1.1$); б) у режимі, що відповідає стратифікованому суспільству ($p_e = 3$, $I_p = 2$); в) у високопродуктивному стані ($p_e = 3.5$, $I_p = 1.1$)

переписати (3.19) у вигляді

$$P(Q) = Q^{-\nu} \mathcal{P}(\kappa), \quad \kappa \equiv Q/Q_c. \quad (3.20)$$

Для самоподібних систем, де відсутність масштабу виражається умовою $Q_c \rightarrow \infty$, можна скористатися межею $\kappa \rightarrow 0$. При цьому функція $\mathcal{P}(\kappa)$ прямує до сталого значення і розподіл $P(Q)$ набирає

степеневій форми (3.18).

Кількісне подання закону Парето, що базується на розподілі (2.68), зводиться до розгляду, викладеного в підрозділі 2.5. Виявляється, що степенева форма розподілу $P(Q) \sim Q^{-2}$ реалізується за умов $I_p \gg I_Q, I_F$, коли основну роль відіграють коливання ціни. Зменшення показника $\nu = 2$ досягається заміною параметра порядку Q степеневим множником $Q^{\frac{\nu}{2}}$. У результаті економічна еволюція подається фрактальною системою синергетичних рівнянь із стохастичними джерелами (2.69)–(2.71), де під інтервалом τ слід розуміти попит Q , під ентропією s – виробничу функцію F , під ζ – умовну ціну p , а показник a потрібно замінити на $\nu/2$.

У результаті умови переходу до режиму самоорганізації ($p_e = 0$) зображуються діаграмою, показаною на рис.2.3, де стан системи визначається інтенсивністю коливань цін I_p , що відповідає вісі I_ζ , і флуктуаціями виробничої функції I_F (їх інтенсивність відкладена за віссю I_s); беремо також $I_Q = 0$, а пунктирна, суцільна і штрихова криві відповідають показникам Парето $\nu = 1.0, 1.5, 2.0$. З цієї діаграми виходить, що зменшення показника ν істотно розширює область коливань цін I_p і флуктуацій виробничої функції I_F , що відповідає стратифікованому суспільству. Стаціонарний розподіл попиту з інтенсивностями флуктуацій ціни і виробничої функції, що відповідають точкам 1–4 на рис.2.3, має вигляд, показаний на рис.2.4. Із нього випливає, що степенева поведінка, властива закону Парето, реалізується за умов $I_Q, I_F \ll I_p, p_e = 0$.

Для з'ясування умов самоподібного розподілу попиту, що приводить до закону Парето, необхідно скористатися методами аналізу, викладеними у підрозділі 2.5. Виявляється, що функція розподілу (3.20) зводиться до інтеграла дробового порядку $1 - \nu/2$, а з іншого боку є розв'язком дробово-диференціального рівняння Фоккера-Планка (2.86), що має порядок $z\omega/2$ за змінними Q і ω за часом (z – динамічний показник). Звідси випливає зв'язок $z\omega =$

$2 - \nu$, який для типового значення $\nu = 3/2$ дає $z\omega = 1/2$. Оскільки динамічний показник обмежений знизу значенням $z = 1$, то показник похідної за часом не перевищує величину $\omega = 1/2$. Таким чином, процес економічної еволюції відповідає режиму субдифузії, який характеризується наявністю ефективних пасток у просторі станів системи [74]. Це означає, що з часом низькопродуктивний стан періодично змінюється високопродуктивним і суспільство стратифіковане за рівнем попиту.

Отриманий висновок підтверджується в рамках підходу Цалліса [75], де еволюція системи представляється нелінійним рівнянням Фоккера-Планка типу (2.91). Для заданого значення показника нелінійності q економічна еволюція відповідає процесу субдифузії, який визначається показником похідної за часом (2.102) і динамічним показником (2.103).

Проведений розгляд показує, що дія стохастичних джерел і фрактальний зворотний зв'язок дозволяють подати основні особливості економічної структури суспільства на основі системи рівнянь самоорганізації. При цьому надбагатий прошарок стратифікованого суспільства характеризується степеневим розподілом (3.20), показник ν якого визначається інтенсивністю процесів самоорганізації. З іншого боку, використання дробово-диференціального рівняння Фоккера-Планка показує, що величина ν задається динамічним показником z і показником похідної за часом ω . У результаті стандартне співвідношення $z\omega = 1/2$ виконується тільки за наявності пасток у просторі станів, де $\omega < 1$. Стосовно економічної системи це означає наявність кризових явищ типу фінансових крахів, що перешкоджають розвитку суспільства протягом досить тривалого періоду часу.

3.3 Динаміка безперервного переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки

Стандартна картина синергетичного переходу ґрунтується на адіабатичному наближенні, в рамках якого час релаксації попиту τ_Q набагато перевищує відповідні масштаби τ_F , τ_p для виробничої функції та ціни. У результаті зміни двох останніх величин наслідують еволюцію попиту згідно з рівняннями стану, що виражаються рівностями (1.4). Тоді економічна еволюція описується рівнянням Ландау-Халатнікова типу (1.5), яке приводить до простого закону дебаївської релаксації (1.9), що має монотонний характер. Цей та наступний підрозділи присвячені дослідженню більш загальних сценаріїв еволюції системи, яка може набирати дуже складного вигляду.

Найпростіша картина безперервного переходу, який прийнято відносити до другого роду, подається безрозмірною системою рівнянь самоорганізації (1.2), де параметр порядку η , сполучене поле h і керуючий параметр S зводяться до величин Q , F , p відповідно. Дослідимо спочатку випадок $\tau_F \ll \tau_Q, \tau_p$, коли найменше значення має час релаксації виробничої функції, що наслідуює зміни попиту й ціни. Тоді можна припустити $\dot{F} = 0$, що дає зв'язок $F = pQ$. Його врахування приводить до системи рівнянь

$$\dot{Q} = -Q(1 - p), \quad (3.21)$$

$$\dot{p} = \delta^{-1} [p_e - p(1 + Q^2)], \quad \delta \equiv \tau_p/\tau_Q, \quad (3.22)$$

поведінка якої задається купівельною спроможністю p_e і співвідношенням характерних часів зміни ціни і попиту δ .

У загальному випадку стандартний аналіз [96] системи (3.21), (3.22) показує, що її фазовий портрет характеризується наявністю двох особових точок $D(p_e, 0)$, $O(1, Q_0)$ з координатами $p = p_e$, $Q =$

0 і $p = 1$, $Q = Q_0$ відповідно, де Q_0 визначено рівністю (3.10). Таким чином, у точці D реалізується низькопродуктивний стан економіки, що відповідає нульовому попиту, а в точці O – високопродуктивний, де попит $Q \neq 0$. Показники Ляпунова в цих точках визначаються рівностями

$$\lambda_D = \frac{\delta(p_e - 1) - 1}{2\delta} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\delta(p_e - 1)}{[\delta(p_e - 1) - 1]^2}} \right\}, \quad (3.23)$$

$$\lambda_O = -\frac{p_e}{2\delta} \left[1 \pm \sqrt{1 - 8\delta \frac{p_e - 1}{p_e^2}} \right]. \quad (3.24)$$

Звідси бачимо, що у передкритичній області ($p_e < 1$), коли купівельна спроможність населення менша від критичного значення $p_c = 1$, точка D є стійким вузлом, а точка O відсутня. У результаті макроекономічна система еволюціонує до стаціонарного низькопродуктивного стану D згідно з фазовим портретом, наведеним на рис.3.4а. Із нього видно, що зростання параметра δ приводить до закручування траєкторій довкола точки D , що вказує на тенденцію до коливального режиму, яка виявляється зі збільшенням інерційності зміни ціни порівняно з попитом.

Згідно з фазовим портретом, наведеним на рис.3.5, ця тенденція реалізується повною мірою при переході в область, де купівельна спроможність $p_e > 1$ перевищує критичне значення. Тут точка D трансформується в сідло і з'являється додаткова точка O , що відповідає високопродуктивному стану економіки. Для значень параметра δ , обмежених величиною

$$\delta_c = \frac{p_e^2}{8(p_e - 1)}, \quad (3.25)$$

ця точка являє собою стійкий вузол, а із його зростанням до значень $\delta > \delta_c$ – стійкий фокус. У першому випадку

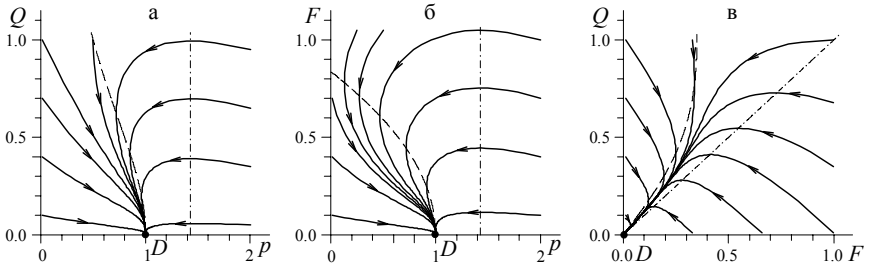


Рисунок 3.4 – Фазові портрети низькопродуктивного стану ($p_e = 0.7p_c$) для безперервного переходу: а) $\tau_F \ll \tau_Q = \tau_p$; б) $\tau_Q \ll \tau_F = \tau_p$; в) $\tau_p \ll \tau_F = \tau_Q$. Тут і на всіх рисунках штрихова лінія вказує точки, в яких фазові траєкторії мають вертикальну дотичну, штрихпунктирна – горизонтальну

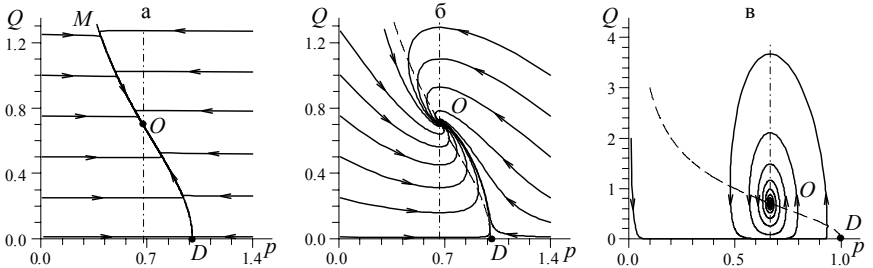


Рисунок 3.5 – Фазові портрети високопродуктивного стану економіки ($p_e = 1.5p_c$) для безперервного переходу: а) $\tau_F \ll \tau_Q = 100\tau_p$; б) $\tau_F \ll \tau_Q = \tau_p$; в) $\tau_F \ll \tau_p = 100\tau_Q$

високопродуктивний стан макроекономіки досягається за рахунок монотонної зміни умовної ціни і попиту, в другому реалізується режим загасаючих коливань цих величин.

Проведений розгляд показує, що при $\tau_Q \ll \tau_p$ у закритичній

області $1 < p_e \leq 2$ виникає коливальний режим переходу макроекономіки до високопродуктивного стану: згідно з рис.3.5в зменшення попиту приводить до збільшення умовної ціни, зростання якої викликає потім збільшення попиту, що зменшує згодом ціну. Очевидно, такого роду коливальний режим дуже важко реалізувати насправді. У дійсності характерна частота становить

$$\omega = p_e \frac{\sqrt{8\delta p_e^{-2}(p_e - 1) - 1}}{2\tau_p}, \quad (3.26)$$

а коефіцієнт загасання дорівнює

$$\alpha = \frac{p_e}{2\tau_p}. \quad (3.27)$$

Отже, зі зростанням купівельної спроможності в інтервалі $1 < p_e < 2$ величини ω, α зростають, а критичне відношення часів релаксації (3.25) зменшується. Це означає, що емісія грошової маси сприяє появі загасаючих коливань, проте більшою мірою цьому сприяє зростання відношення характерних часів $\delta = \tau_p/\tau_Q \gg 1$ (див. рис.3.5).

Обернена межа $\tau_p \ll \tau_Q$ відповідає адіабатичному наближенню, що становить стандартну картину переходу. Згідно із фазовим портретом, показаним на рис.3.5, зменшення параметра $\delta \rightarrow 0$ приводить до збігання всіх траєкторій до ділянки *MOD*, положення якої не залежить від мікроскопічних деталей системи. Із рис.3.5а бачимо, що до потрапляння на цю ділянку ціна швидко змінюється, а потім повільно еволюціонує за ним (при цьому ефект уповільнення позначається тим сильніше, чим менший параметр неадіабатичності δ). З формальної точки зору ділянка *MOD* відповідає притягувальній множині, яку прийнято позначати як *русло великої річки* (в англійській термінології *mainstream*).

Розглянемо тепер випадок $\tau_Q \ll \tau_F, \tau_p$, коли попит змінюється настільки швидко, що встигає наслідувати зміни виробничої

функції та умовної ціни. Тоді можна покласти $\dot{Q} = 0$, що приводить до зв'язку $Q = F$, який дає систему рівнянь

$$\dot{F} = -F(1 - p), \quad (3.28)$$

$$\dot{p} = \tau^{-1} [p_e - (p + F^2)], \quad \tau \equiv \tau_p / \tau_F \quad (3.29)$$

де час t виміряно в одиницях τ_F , і введено відношення характерних часів τ . Аналогічно попередньому випадку фазовий портрет визначається особливими точками $D(p_e, 0)$, $O(1, F_0)$, де величина $F_0 = \sqrt{p_e - 1}$ задає стаціонарне значення виробничої функції. Показники Ляпунова зазначених точок мають вигляд

$$\lambda_D = \frac{\tau(p_e - 1) - 1}{2\tau} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\tau(p_e - 1)}{[\tau(p_e - 1) - 1]^2}} \right\}, \quad (3.30)$$

$$\lambda_O = -\frac{1}{2\tau} \left[1 \pm \sqrt{1 - 8\tau(p_e - 1)} \right]. \quad (3.31)$$

Як і раніше, точка D відповідає низькопродуктивному стану макроекономіки, являючи собою при $p_e < 1$ стійкий (що притягує) вузол, а при $p_e > 1$ – сідло (при цьому, незважаючи на купівельну спроможність $p_e \neq 0$, виробничі потужності не задіяні повною мірою). Точка O , що відповідає високопродуктивному стану, в якому виробнича функція набуває кінцевого стаціонарного значення, реалізується у закритичній області $p_e > 1$, де вона є притягувальним вузлом при малих значеннях параметра τ , і стійким фокусом, якщо величина τ перевищує критичне значення

$$\tau_c = \frac{1}{8(p_e - 1)}. \quad (3.32)$$

Відповідні значення частоти коливань і декремента загасання мають вигляд

$$\omega = \frac{1}{2\tau_p} \sqrt{8\tau(p_e - 1) - 1}, \quad (3.33)$$

$$\alpha = (2\tau_p)^{-1}. \quad (3.34)$$

Зі зростанням купівельної спроможності p_e критичне значення τ_c зменшується, частота ω зростає, а декремент α залишається незмінним.

Проведений аналіз і вигляд фазових портретів на рис.3.6 показують, що при великих значеннях τ , коли ціна змінюється

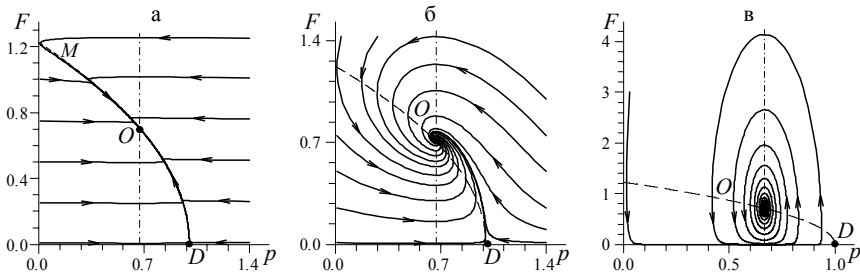


Рисунок 3.6 – Фазові портрети високопродуктивного стану ($p_e = 1.5p_c$) для безперервного переходу: а) $\tau_Q \ll \tau_F = 100\tau_p$; б) $\tau_Q \ll \tau_F = \tau_p$; в) $\tau_Q \ll \tau_p = 100\tau_F$

набагато повільніше виробничої функції, система потрапляє до режиму загасаючих коливань (рис.3.6в). Зі зменшенням величини τ до значень $\tau \ll 1$ досягається повільний режим економічної еволюції (рис.3.6а). Подібно до попереднього випадку в адиабатичній межі $\tau \rightarrow 0$ еволюція економічної системи набуває універсального характеру, що виражається в наявності ділянки MOD на рис.3.6а, потрапляючи на який система повільно рухається до стаціонарної точки O , що відповідає високопродуктивному стану.

У випадку $\tau_p \ll \tau_Q, \tau_F$ найшвидше змінюється умовна ціна, і можна взяти $\dot{p} = 0$. У результаті отримуємо зв'язок $p = p_e - QF$,

що приводить до рівнянь

$$\dot{Q} = -Q + F, \quad (3.35)$$

$$\dot{F} = \sigma^{-1} [p_e Q - F(1 + Q^2)], \quad \sigma \equiv \tau_F / \tau_Q, \quad (3.36)$$

де введено відношення характерних часів σ . Фазовий портрет має особливі точки $D(0, 0)$ і $O(\sqrt{p_e - 1}, \sqrt{p_e - 1})$ (див.рис.3.7), друга з яких реалізується тільки для високопродуктивного стану при

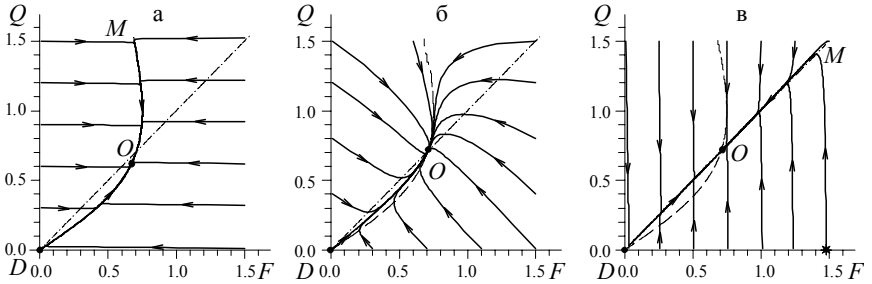


Рисунок 3.7 – Фазові портрети високопродуктивного стану ($p_e = 1.5p_c$) для безперервного переходу: а) $\tau_p \ll \tau_Q = 100\tau_F$; б) $\tau_p \ll \tau_Q = \tau_F$; в) $\tau_p \ll \tau_F = 100\tau_Q$

купівельній спроможності $p_e > 1$. Відповідні показники Ляпунова визначаються рівностями

$$\lambda_D = -\frac{1 + \sigma}{2\sigma} \left[1 \pm \sqrt{1 + 4\sigma \frac{p_e - 1}{(1 + \sigma)^2}} \right], \quad (3.37)$$

$$\lambda_O = -\frac{p_e + \sigma}{2\sigma} \left[1 \pm \sqrt{1 - 8\sigma \frac{p_e - 1}{(p_e + \sigma)^2}} \right]. \quad (3.38)$$

При $p_e < 1$ точка D становить стійкий вузол низькопродуктивного стану, а з переходом до закритичної області $p_e > 1$

трансформується в сідло. При значеннях параметра σ , що належать інтервалу (σ_-, σ_+) , де

$$\sigma_{\pm} = (3p_e - 4) \pm \sqrt{8(p_e - 1)(p_e - 2)}, \quad (3.39)$$

точка O , яка відповідає високопродуктивному стану, є притягувальним фокусом, а поза ним – притягувальним вузлом. Характерні величини частоти

$$\omega = \frac{\sqrt{8\sigma(p_e - 1) - (\sigma + p_e)^2}}{2\tau_F} \quad (3.40)$$

і коефіцієнта загасання

$$\alpha = \frac{\sigma + p_e}{2\tau_F} \quad (3.41)$$

сумірні для всіх значень p_e, σ . Тому на відмінність від випадків, розглянутих вище, тут коливальний режим практично не виявляється.

Згідно з фазовими портретами, показаними на рис.3.7, універсальність кінетичної поведінки системи виявляється як для $\tau_F \ll \tau_Q$, так і для $\tau_F \gg \tau_Q$. У першому випадку вихід на універсальну ділянку відбувається за рахунок швидкої зміни виробничої функції $F(t)$ при практично незмінному попиті $Q(t)$ (рис.3.7а), а в другому спостерігається зворотна картина – попит змінюється дуже швидко, а виробнича функція майже не змінюється (рис.3.7в). В області $\tau_Q \sim \tau_F$ універсальність виявляється тільки для малих початкових значень виробничої функції або попиту (рис.3.7б). На відміну від розглянутих раніше випадків при цьому універсальна ділянка має не спадний, а зростаючий характер.

3.4 Динаміка переривчастого переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки

Картина, розглянута в попередньому підрозділі, передбачає, що в процесі переходів між низько- і високопродуктивним станами характерний час зміни попиту τ_Q зберігає сталі значення. Насправді реакція системи на збільшення попиту Q може приводити до зростання масштабу τ_Q . Подібно до розгляду, проведеного в кінці підрозділу 1.2, можна показати, що таке уповільнення приводить до трансформації безперервного переходу до переривчастого. Дотримуючись (1.10), будемо виходити з простої залежності

$$\tau_Q = \tau_0 \left(1 + \frac{\kappa}{1 + Q^2/Q_\tau^2} \right)^{-1}, \quad (3.42)$$

що характеризується позитивними константами τ_0, κ, Q_τ . Тоді в рамках адіабатичного наближення $\tau_F, \tau_p \ll \tau_0$ ефективний потенціал $V(Q)$ набуває вигляду (1.11), де всі величини виміряні в одиницях (3.9), а під η і r слід розуміти попит Q і купівельну спроможність p_e . Згідно з (1.11) при малих значеннях купівельної спроможності p_e залежність $V(Q)$ має монотонно зростаючий вигляд з мінімумом в точці $Q = 0$, що відповідає низькопродуктивному стану. При значенні p_e^0 , визначеному рівністю (1.12), з'являється плато, яке при $p_e > p_e^0$ трансформується в мінімум, що відповідає значенню попиту $Q_0 \neq 0$ (високопродуктивний стан), і максимум (нестійкий стан), що розділяє мінімуми $Q_0 = 0$ і $Q_0 \neq 0$. З подальшим зростанням купівельної спроможності p_e мінімум високопродуктивного стану заглиблюється, а висота бар'єра, що розділяє стаціонарні стани, спадає, досягаючи нуля при критичному значенні p^c , визначеному формулою (1.13). При $p_e \geq p^c$ залежність $V(Q)$ має той самий

вигляд, що і для розглянутого раніше безперервного переходу. Стаціонарні значення попиту визначаються виразами (1.15).

Як бачимо з рис.1.1а, при повільному збільшенні купівельної спроможності в точці $p_e = p^c$ відбувається стрибок стаціонарного попиту Q_0 від нуля до значення $\sqrt{2}Q_{00}$, а потім його величина повільно зростає. При зворотному зменшенні p_e від великих значень стаціонарний попит Q_0 повільно зменшується до точки $p_e = p_c^0$, $Q_0 = Q_{00}$, а потім стрибком набирає нульового значення. Згідно з рис.1.1б стаціонарне значення умовної ціни p_0 збігається з купівельною спроможністю p_e тільки в інтервалі $0 < p_e < p_c^0$. Для купівельної спроможності $p_e > p_c^0$ умовна ціна p_0 стає двозначною, набираючи вигляду спадної гілки, яка повільно зменшується від значення p_{c0} (див.(1.17)), що відповідає $p_e = p_c^0$, до p_c при $p_e \rightarrow \infty$. При повільному зростанні купівельної спроможності p_e від 0 до p^c стаціонарне значення умовної ціни лінійно зростає в тому самому інтервалі. Після стрибка вниз в точці $p_e = p^c$ величина p_0 повільно зменшується згідно із залежністю (1.16). При зворотному зменшенні купівельної спроможності p_e стаціонарне значення умовної ціни p_0 здійснює стрибок вгору в точці p_c^0 від значення p_{c0} до p_c^0 . Таким чином, у змінах попиту Q та умовної ціни p спостерігається гістерезис, обумовлений наявністю бар'єра ефективного потенціалу (1.11).

Перейдемо до дослідження процесу економічної еволюції, маючи на увазі під характерним часом зміни попиту значення τ_0 , що фігурує в рівності (3.42). У випадку $\tau_F \ll \tau_0, \tau_p$ можна взяти $\dot{F} = 0$, що приводить до виразу (час вимірюється в одиницях τ_0)

$$\dot{Q} = -Q \left[(1 - p) + \kappa (1 + Q^2/Q_1^2)^{-1} \right], \quad Q_1 \equiv Q_\tau/Q_c, \quad (3.43)$$

що відрізняється від (3.21) наявністю останнього доданка. Друге рівняння має той самий вигляд (3.22), що і для безперервного переходу.

Фазовий портрет системи (3.43), (3.22) має три особливі точки $D(p_e, 0)$, $O(p_-, Q_-)$, $S(p_+, Q_+)$, координати яких визначаються

рівностями

$$p_{\pm} = \frac{(1 + Q_{00}^2) \pm \sqrt{(1 + Q_{00}^2)^2 - p_e(1 - Q_1^2)}}{1 - Q_1^2}, \quad (3.44)$$

$$Q_{\pm} = \sqrt{(p_e - p_{\pm})/p_{\pm}}. \quad (3.45)$$

Точці D відповідає показник Ляпунова, що відрізняється від виразу (3.23) заміною різниці $p_e - 1$ на $p_e - p^c$, де величина $p^c = 1 + \kappa$ визначає точку втрати стійкості. Тому, як і для безперервного переходу, для $p_e < p^c$ точка D є стійким вузлом, а при $p_e > p^c$ – сідлом. Показники Ляпунова точок $O(p_-, Q_-)$, $S(p_+, Q_+)$ виражаються через їх координати (3.44), (3.45) рівністю

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \lambda_0 \left(1 \pm \sqrt{1 + \Delta} \right), \\ \lambda_0 &= \frac{p_e - p_{\pm}}{\kappa Q_1^2 p_{\pm}} (p_{\pm} - 1)^2 - \frac{p_e}{2\delta p_{\pm}}, \\ \lambda_0^2 \Delta &= \frac{2}{\delta} (p_e - p_{\pm}) \left(\frac{p_e (1 - p_{\pm})^2}{Q_1^2 \kappa p_{\pm}^2} - 1 \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

де $\delta \equiv \tau_p/\tau_0$. В інтервалі переривчастого переходу $p_c^0 < p < p^c$ точка S є сідлом, а O – притягувальним вузлом або фокусом.

Наведені дані показують, що зі зростанням купівельної спроможності p_e фазовий портрет системи змінюється таким чином (див.рис.3.8). При $p_e < p_c^0$, коли залежність $V(Q)$ має монотонно зростаючий вигляд, точки S , O не реалізуються, а D являє собою стійкий вузол, що відповідає низькопродуктивному стану макроекономіки. При цьому фазовий портрет має вигляд, властивий безперервному переходу (див.рис.3.4а). З перевищенням характерного значення p_c^0 у системі відбувається біфуркація, що полягає в появі сідла S і стійкого вузла/фокуса O , які визначаються координатами (3.44), (3.45). З підвищенням купівельної спроможності p_e сідло, що відповідає енергетичному

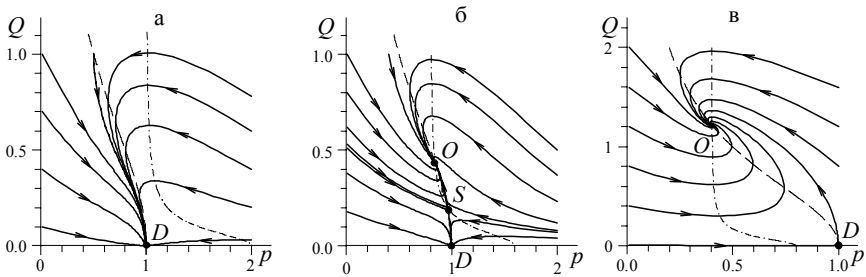


Рисунок 3.8 — Зміна вигляду фазових портретів для переривчастого переходу при різних значеннях купівельної спроможності ($\kappa = 1, Q_\tau = 0.1Q_c, \tau_F \ll \tau_0 = \tau_p$): а) $p_e = p_c$; б) $p_e = 1.25p_c$; в) $p_e = 2.5p_c$

бар'єру на залежності $V(Q)$, наближається до вузла D , і в точці p^c поглинає його. Подальше підвищення купівельної спроможності дає картину, що відповідає високопродуктивному стану для безперервного переходу.

На рис.3.9 показано, яким чином змінюється фазовий портрет, що відповідає високопродуктивному стану економіки ($p_c^0 < p_e < p^c$), зі збільшенням відношення часів релаксації $\delta = \tau_p/\tau_0$. Порівнюючи з рис.3.5, бачимо, що в околі точки O поведінка практично така сама, що і для випадку безперервного переходу: для адіабатичної межі $\tau_p \ll \tau_0$ фазові траєкторії швидко збігаються до універсальної ділянки MOS (рис.3.9а), а для протилежної межі $\tau_p \gg \tau_0$ виявляється режим загасаючих коливань (рис.3.9в). Єдина відмінність полягає в появі сепаратриси в області малих значень попиту, що відображає наявність бар'єру на залежності $V(Q)$. Дослідження часових залежностей шляху, що пройшла точка за фазовою траєкторією, показує [18], що, як і в разі безперервного переходу, тут відбувається уповільнення поблизу *русла великої річки*

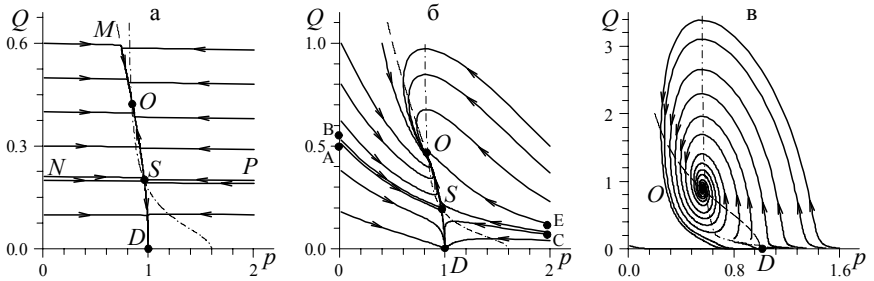


Рисунок 3.9 – Фазові портрети переривчастого переходу ($\kappa = 1, Q_\tau = 0.1Q_c$): а) $p_e = 1.25p_c, \tau_F \ll \tau_0 = 100\tau_p$; б) $p_e = 1.25p_c, \tau_F \ll \tau_0 = \tau_p$; в) $p_e = 1.8p_c, \tau_F \ll \tau_p = 10\tau_0$

MOS, що відповідає околу мінімуму високопродуктивного стану.

Знайдені особливості макроекономічної еволюції можуть бути подані на основі вигляду залежності $V(Q, p)$ ефективного потенціалу від попиту Q та умовної ціни p , що параметризують поведінку системи. При цьому слід виходити з того факту, що в ході своєї еволюції система проводить основний час в околі екстремумів залежності $V(Q, p)$. Оскільки час релаксації уздовж кожної із осей Q, p обернено пропорційний кривизні залежності $V(Q, p)$ уздовж відповідної осі¹, то умова $\tau_p \ll \tau_0$ означає, що залежність $V(Q, p)$ змінюється набагато швидше уздовж осі p , ніж уздовж Q . У результаті виявляється, що поверхня функції $V(Q, p)$ має вузький жолоб уздовж універсальної траєкторії, яка визначається залежністю $p(Q)$ типу (1.4). Як видно з рис.3.9а, в нього система швидко скочується уздовж осі p , що відповідає великій кривизні. Саме наявність цього жолоба забезпечує універсальний характер еволюції системи, оскільки

¹Це впливає з того факту, що вказана кривизна обернено пропорційна відповідній сприйнятливості, яка, у свою чергу, пропорційна відповідному часу релаксації.

поблизу екстремумів залежність $V(Q, p)$ завжди має вигляд параболи:

$$V \approx V(Q_0, p_0) + \frac{\chi_Q^{-1}}{2} (Q - Q_0)^2 + \frac{\chi_p^{-1}}{2} (p - p_0)^2, \quad (3.47)$$

де значення Q_0, p_0 визначають положення екстремуму, а сприйнятливості χ_Q, χ_p – його кривизну.

У зв'язку зі сказаним може здатися, що для межі $\tau_0 \ll \tau_p$, протилежній адіабатичній, залежність $V(Q, p)$ також повинна мати жолоб, і стає незрозумілою природа загасаючих коливань, наведених на рис.3.9в. Проте необхідно пам'ятати, що поблизу точки мінімуму залежності $V(Q, p)$ сприйнятливості χ_Q, χ_p у рівності (3.47) пов'язані з часом релаксації τ_0, τ_p різними співвідношеннями $\chi_p \propto \tau_p, \chi_Q \propto \tau_0 |p_e - p^c|^{-1}$. Оскільки $|p_e - p^c| \ll 1$, то, незважаючи на невелике значення τ_0 , кривизна $\chi_Q^{-1} \propto \tau_0^{-1} |p_e - p^c|$ параболи (3.47) уздовж осі Q виявляється порівняною з кривизною $\chi_p^{-1} \propto \tau_p^{-1}$ залежності $V(Q, p)$ уздовж осі p . Іншими словами, для межі $\tau_0 \ll \tau_p$ залежність $V(Q, p)$ має поблизу мінімуму, що відповідає високопродуктивному стану, вигляд параболоїда з малими (і сумірними) кривизнами уздовж осей Q, p . У результаті конфігуративна точка, скочуючись до мінімуму, може здійснювати обертання за поверхнею цього параболоїда. Очевидно, таке обертання і являє собою загасаючі коливання, показані на рис.3.9в.

Відмітимо, що описане критичне зростання сприйнятливості χ_Q у співвідношенні (3.47) носить колективний характер, властивий системі, що самоорганізується. Воно не виявляється поблизу максимуму залежності $V(Q, p)$, у зв'язку з чим не відбувається закручування сепаратриси для межі $\tau_0 \ll \tau_p$ (рис.3.9в).

З аналітичної точки зору випадок $\tau_0 \ll \tau_F, \tau_p$ є найбільш трудомістким, оскільки підстановка ефективного часу зміни попиту (3.42) в початкове рівняння приводить не до лінійного

зв'язку, а до кубічного рівняння. Його розв'язок зручно записати у вигляді

$$3Q = F + Q_+(F) + Q_-(F), \quad (3.48)$$

де введено функції

$$Q_{\pm}(F) = \left\{ F (F^2 + F_1^2) \pm 3Q_1 \sqrt{3 [(F^2 + F_2^2)^2 + F_3^4]} \right\}^{1/3}, \quad (3.49)$$

а сталі F_1, F_2, F_3 , визначені рівностями

$$\begin{aligned} F_1^2 &\equiv \frac{9}{2}Q_1^2(2 - \kappa), & F_2^2 &\equiv \frac{1}{8}Q_1^2 [36(2 - \kappa) - (8 - \kappa)^2], \\ F_3^2 &\equiv \frac{1}{8}Q_1^2 \sqrt{\kappa(8 - \kappa)^3}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Підстановка зв'язку (3.48) до рівняння самоорганізації приводить їх до вигляду (порів. з (3.28), (3.29))

$$\dot{F} = -F + \frac{1}{3}p[F + Q_+(F) + Q_-(F)], \quad (3.51)$$

$$\tau \dot{p} = (p_e - p) - \frac{1}{3}F[F + Q_+(F) + Q_-(F)], \quad (3.52)$$

де час виміряний в одиницях τ_F і введене відношення часів релаксації $\tau \equiv \tau_p/\tau_F$.

Хоча аналітично тут не вдається знайти ні особливих точок, ні відповідних їм показників Ляпунова, чисельне дослідження фазового портрета (рис.3.10) показує, що поведінка системи збігається з дослідженою раніше. У порівнянні з відповідним фазовим портретом безперервного переходу (рис.3.6) можна зазначити, як і у попередньому випадку, появу сепаратриси при значеннях умовної ціни p і виробничій функції F , які відповідають енергетичному бар'єру, що відокремлює високопродуктивний стан від низькопродуктивного.

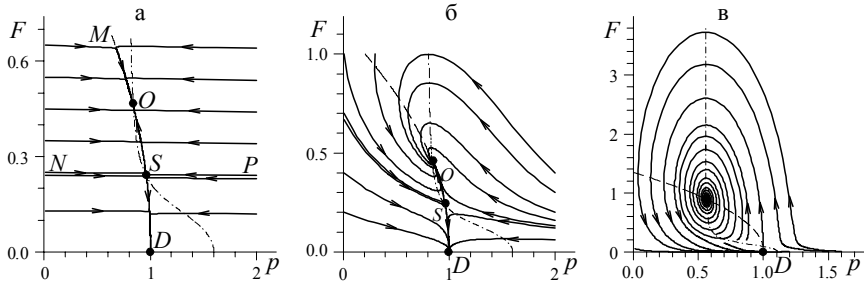


Рисунок 3.10 – Фазові портрети переривчастого переходу ($\kappa = 1, Q_T = 0.1Q_C$): а) $p_e = 1.25p_c, \tau_0 \ll \tau_F = 10^2\tau_p$; б) $p_e = 1.25p_c, \tau_0 \ll \tau_F = \tau_p$; в) $p_e = 1.8p_c, \tau_0 \ll \tau_p = 10\tau_F$

Міркуючи за аналогією з попередніми випадками, неважко побачити, що при $\tau_p \ll \tau_F$, коли максимальним чином виявляється універсальність еволюції системи (див.рис.3.10а), залежність $V(F, p)$ має вузький жолоб уздовж універсальної ділянки траєкторій. Наявність режиму загасаючих коливань для протилежної межі $\tau_p \gg \tau_F$ (рис.3.10в) вказує на критичне зростання сприйнятливості $\chi_F \propto \tau_F |p_e - p^c|^{-1}$ виробничої функції. Очевидно, початковою причиною цього зростання є критичне зростання сприйнятливості $\chi_Q \propto \tau_0 |p_e - p^c|^{-1}$, що відповідає попиту. Наявність жорсткого функціонального зв'язку (3.48) між попитом і виробничою функцією забезпечує зростання сприйнятливості виробничої функції.

Нарешті, випадок $\tau_p \ll \tau_0, \tau_F$ описується співвідношенням (3.36), доповненим рівнянням (порів. з (3.35))

$$\dot{Q} = -Q \left(1 + \frac{\kappa}{1 + Q^2/Q_1^2} \right) + F. \quad (3.53)$$

Фазовий портрет характеризується наявністю трьох особливих точок $D(0, 0)$, $O(F_+, Q_+)$ і $S(F_-, Q_-)$, координати яких задаються

рівностями

$$Q_{\pm} = \left\{ Q_{00}^2 \pm \sqrt{Q_{00}^4 + [p_e - (1 + \kappa)] Q_1^2} \right\}^{1/2}, \quad (3.54)$$

$$F_{\pm} = p_e \frac{Q_{\pm}}{1 + Q_{\pm}^2}. \quad (3.55)$$

Показник Ляпунова особливої точки D визначається виразом (3.37), де замість $1 + \sigma^{-1}$, $p_e - 1$, ($\sigma \equiv \tau_F/\tau_0$) слід підставити $p^c + \sigma^{-1}$, $p_e - p^c$, ($p^c \equiv 1 + \kappa$). При $p_e < p^c$ ця точка є стійким вузлом, а при $p_e \geq p^c$ – сідлом. Показники Ляпунова точок $O(F_+, Q_+)$, $S(F_-, Q_-)$ виражаються за допомогою їх координат (3.54), (3.55) рівностями

$$\begin{aligned} \lambda_{\pm} &= \lambda_0 \left(1 \pm \sqrt{1 + \Delta} \right), \\ \lambda_0 &= \frac{(F_{\pm} - Q_{\pm})^2}{\kappa Q_1^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 + Q_{\pm}^2}{\sigma} + \frac{F_{\pm}}{Q_{\pm}} \right), \\ \lambda_0^2 \Delta &= \frac{(1 - Q_{\pm}^2) F_{\pm}}{\tau Q_{\pm}} - \frac{1 + Q_{\pm}^2}{\sigma} \left[\frac{F_{\pm}}{Q_{\pm}} - \frac{2(F_{\pm} - Q_{\pm})^2}{\kappa Q_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

В інтервалі реалізації переривчастого переходу $p_c^0 < p < p^c$ точка S є сідлом, а O – стійким вузлом або фокусом.

Чисельне визначення фазового портрета приводить до картини, показаної на рис.3.11. У порівнянні з відповідним портретом для безперервного переходу (див. рис.3.7) видно, що, як і раніше, єдине ускладнення полягає в появі сепаратриси в області малих значень виробничої функції F і попиту Q .

Як і для безперервного переходу, відмінністю цього випадку є та обставина, що універсальність еволюції системи виявляється не тільки для межі $\tau_F \ll \tau_0$ (рис.3.11а), але і у протилежному випадку $\tau_F \gg \tau_0$ (рис.3.11в), де, здавалося б, можна чекати появи коливальних. Це пов'язано з тим, що кривизни парабол уздовж осей

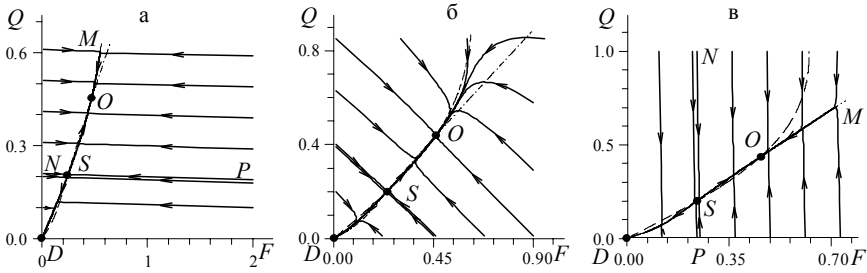


Рисунок 3.11 – Фазові портрети переривчастого переходу ($\kappa = 1$, $Q_\tau = 0.1Q_c$, $p_e = 1.25p_c$): а) $\tau_p \ll \tau_0 = 100\tau_F$; б) $\tau_p \ll \tau_0 = \tau_F$; в) $\tau_p \ll \tau_F = 10^2\tau_0$

F , Q визначаються значеннями $\chi_F^{-1} \propto \tau_F^{-1}|p_e - p^c|$, $\chi_Q^{-1} \propto \tau_0^{-1}|p_e - p^c|$ обернених сприйнятливостей. Тому при $\tau_F \gg \tau_0$ виконується співвідношення $\chi_F^{-1} \ll \chi_Q^{-1}$, яке означає, що кривизна залежності $V(Q, F)$ уздовж осі виробничої функції F набагато менша, ніж уздовж осі попиту Q . У результаті на рис.3.11в траєкторії, за якими конфігуративна точка швидко скочується до *русла великої річки*, напрямлені практично уздовж осі Q .

Відмітимо, що, незважаючи на складність рівності (3.56), вони дозволяють знайти аналітичні вирази для меж інтервалу (σ_-, σ_+) , що задає співвідношення $\sigma = \tau_F/\tau_0$ часів зміни виробничої функції та попиту, всередині якого точка $O(F_+, Q_+)$ є стійким фокусом (див.(3.39)). Ми не наводимо їх, зважаючи на надзвичайну громіздкість.

3.5 Еволюційна картина макроекономічних перетворень

Проведений розгляд показує, що економічна еволюція низькопродуктивного стану до високопродуктивного подається фазовими портретами, показаними на рис.3.4-3.11. У випадку безперервного переходу (рис.3.4-3.7) для купівельної спроможності $p_e < p_c$ фазовий портрет має притягувальний вузол D , що відповідає низькопродуктивному стану економіки; для $p_e > p_c$ він трансформується в сідло, і з'являється додатковий вузол/фокус O , який відповідає високопродуктивному стану. На відміну від цього на фазовому портреті переривчастого переходу (рис.3.8-3.11) при $p_e = p_c^0$ відбувається біфуркація, в результаті якої з'являються сідло S , що відповідає енергетичному бар'єру на залежності $V(Q)$, і притягувальний вузол/фокус O , що відповідає високопродуктивному стану; при цьому притягувальний вузол D , що характеризує низькопродуктивний стан, залишається незмінним. Зі зростанням умовної ціни в інтервалі (p_c^0, p^c) сідло S прямує до вузла D , поглинаючи його в точці p^c , а вузол/фокус O зміщується в бік зростання попиту і виробничої функції.

Тип особливої точки O , що відповідає високопродуктивному стану, залежить від співвідношення характерних часів τ_Q, τ_F, τ_p .² За їх несумірності можна виділити шість характерних режимів:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } \tau_F \ll \tau_p \ll \tau_Q, \quad \text{b) } \tau_Q \ll \tau_p \ll \tau_F, \\
 & \text{c) } \tau_p \ll \tau_F \ll \tau_Q, \quad \text{d) } \tau_p \ll \tau_Q \ll \tau_F; \\
 & \text{e) } \tau_F \ll \tau_Q \ll \tau_p, \quad \text{f) } \tau_Q \ll \tau_F \ll \tau_p.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Як показує проведений аналіз, у випадках а) – d) точка O є притягувальним вузлом, і після закінчення короткого часу траєкторія системи виходить до універсальної ділянки (*русло*

²Для переривчастого переходу під величиною зміни попиту τ_Q слід мати на увазі час релаксації τ_0 , що входить до залежності (3.42).

великої річки), положення якої визначається значенням купівельної спроможності p_e . Наявність такої ділянки обумовлює універсальний характер економічної еволюції системи. Як видно з наведених фазових портретів, русло великої річки розміщене в параметричному просторі Q, F, p таким чином, що при проектуванні на площину $p - Q, p - F$ воно має вигляд монотонно спадної кривої типу *MOD* на рис.3.5а (безперервний перехід) або *MOS* на рис.3.9а (переривчастий перехід). Проекція на площину $F - Q$ близька до бісектриси (див. рис.3.7а, 3.11а). Окрім того, в разі переривчастого переходу з'являється універсальна ділянка *NSP*, що відповідає переходу системи через енергетичний бар'єр (рис.3.8-3.11). Із наведених фазових портретів можна побачити, що для вказаної несумірності часів релаксації в режимах а)–d) вихід до універсальної ділянки відбувається за майже прямолінійними траєкторіями, які практично паралельні осям, що відповідають найменшим часам релаксації. Так, у режимі а) точка спочатку дуже швидко рухається за прямою, паралельною осі F , потім переходить до ділянки, що паралельна осі p , і рухається за нею зі швидкістю в τ_p/τ_F разів меншою, ніж перед цим, але більшою, ніж швидкість подальшого руху за універсальною ділянкою у τ_Q/τ_p разів. Після цього відбувається вихід до русла великої річки.

Для співвідношень часів релаксації у випадках е), f) система зазнає загасаючих коливань у площині, що відповідає двом найбільшим значенням цих часів. Характерно, що для обох випадків найбільше значення має час зміни умовної ціни τ_p . Причиною виникнення коливань є критичне зростання часів τ_Q, τ_F згідно зі співвідношеннями $\tau_Q/(p_e - p^c), \tau_F/(p_e - p^c)$. Поблизу критичної точки p^c вони забезпечують сумірність величин $\tau_Q|p_e - p^c|^{-1}\tau_p$ (у випадку е)) і $\tau_F|p_e - p^c|^{-1}\tau_p$ (у випадку f)), внаслідок чого зв'язок між відповідними величинами Q, p і F, p набуває резонансного характеру. Що стосується еволюції уздовж осей F і Q , які відповідають у випадках е), f) найменшим часам, то вона

зберігає той самий характер, що і при виході на універсальний режим – система зі швидкістю у τ_p/τ_F (випадок e)) і τ_p/τ_Q (випадок f)) разів більшою, ніж частота коливань, переходить до відповідної площини за перпендикулярною віссю.

У загальному випадку кінетична картина переходу із низькопродуктивного стану макроекономіки до високопродуктивного визначається набором трьох синергетичних і трьох кінетичних параметрів. Центральну роль у першій групі відіграє купівельна спроможність p_e , відношення якої до критичного значення p_c визначає тип стану макроекономіки (див. рис.3.8). Два інших синергетичних параметри κ і $Q_1 \equiv Q_\tau/Q_c$, значення яких задають закон (3.42) дисперсії часу зміни попиту, визначають область переривчастого переходу. Вона обмежена мінімальним значенням $\kappa = Q_1^2(1 - Q_1^2)^{-1}$, віддалення від якого розширює цю область. Характерна особливість переривчастого перетворення полягає в тому, що на фазовому портреті з'являється сепаратриса, наявність якої приводить до критичної залежності еволюції системи від вибору її початкового стану. Так, на рис.3.9б показано дві пари близьких станів А, В і С, Е, які, проте, віднесені по різні сторони сепаратриси (крім того, перша пара відповідає низькому значенню початкової ціни, друга – високому). Як видно із часових залежностей, наведених на рис.3.12, наявність сепаратриси обумовлює значне зростання різниці попиту, що відповідають показаним парам точок. Таку поведінку відображає розділення простору станів на високо- і низькопродуктивну області, межа між якими задається сепаратрисою.

Кінетичними параметрами, що визначають поведінку системи, є характерні часи τ_0 , τ_F , τ_p змін попиту, виробничої функції та ціни в автономних режимах. Проведене дослідження показує, що універсальна картина економічної еволюції реалізується, якщо останній із вказаних часів має найменше значення. При цьому система за короткий час τ_p виходить на універсальну ділянку *MOS* (див.рис.3.9–3.11), положення якої залежить тільки від

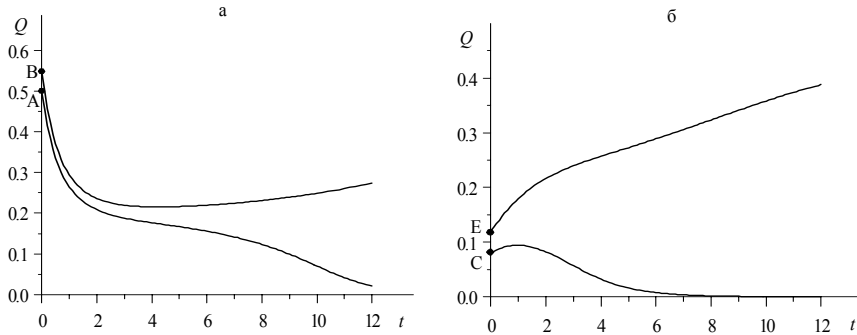


Рисунок 3.12 – Часові залежності попиту, початкові значення якого відповідають парам точок А, В і С, Е на рис.3.9б: а) низьке значення початкової ціни; б) високе

синергетичних параметрів, але не від співвідношення часових масштабів τ_0 , τ_F , τ_p . Очевидно, саме така ситуація реалізується у високорозвинених економічних системах. При аномальному зростанні часу зміни ціни відбувається закручування фазових портретів поблизу високопродуктивного стану, який досягається через послідовність криз і підйомів економіки. Більше того, при виконанні умов $\tau_F \sim \tau_Q \ll \tau_p$, які означають, що купівельна спроможність набирає слабкого надкритичного значення

$$p_e - p^c \sim \tau_Q / \tau_p \sim \tau_F / \tau_p \ll 1, \quad (3.58)$$

система переходить до режиму дивного атрактора, де економічна еволюція стає абсолютно непередбачуваною (див. підрозділ 1.5). Це свідчить про надзвичайну небезпеку регламентації цін в умовах самоузгодженого розвитку макроекономіки.

Завдання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте основні напрями еконофізики.
2. Чим відрізняються стратегічно орієнтовані трейдери?
3. Запишіть самоузгоджену систему рівнянь, що описує перехід між станами фінансового ринку відповідно до отриманої інформації.
4. Подайте рівняння (3.3)–(3.5) у безрозмірному вигляді.
5. На основі системи рівнянь (3.3)–(3.5) отримайте рівняння Ландау–Халатнікова типу (1.5).
6. Отримайте синергетичний потенціал типу (1.6), застосовуючи адіабатичні умови до рівнянь (3.3)–(3.5).
7. Запишіть самоузгоджену систему рівнянь, що описує економічну структуру суспільства.
8. Отримайте рівняння для Q, F, p у безрозмірному вигляді, використовуючи масштаби (3.9).
9. Знайдіть залежність виробничої функції та умовної ціни від попиту за адіабатичних умов.
10. Запишіть стохастичні рівняння самоорганізації, що описують економічну структуру суспільства.
11. Який вигляд мають детерміністичні та стохастичні доданки виробничої функції та умовної ціни?
12. Отримайте стаціонарний розподіл попиту, що задається рівнянням Фоккера–Планка.

13. Проаналізуйте діаграму можливих станів економіки для різних значень купівельної спроможності p_e , коливань ціни I_p і флуктуацій виробничої функції I_F (див. рис.3.1).
14. Який вигляд має функція розподілу попиту у низькопродуктивному, високопродуктивному станах та у стані, що відповідає стратифікованому суспільству?
15. Запишіть фрактальну систему синергетичних рівнянь із стохастичними джерелами, що описує економічну еволюцію.
16. Сформулюйте умови, за яких реалізується самоподібний розподіл, що приводить до закону Парето.
17. Знайдіть координати особливих точок фазового портрета системи (3.21),(3.22).
18. Отримайте вирази (3.23),(3.24) для показників Ляпунова.
19. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.4.
20. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.5.
21. Знайдіть координати особливих точок фазового портрета системи (3.28),(3.29).
22. Отримайте вирази (3.30),(3.31) для показників Ляпунова.
23. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.6.
24. Знайдіть координати особливих точок фазового портрета системи (3.35),(3.36).
25. Отримайте вирази (3.37),(3.38) для показників Ляпунова.
26. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.7.

27. Запишіть самоузгоджену систему рівнянь, що дозволяє описати переривчастий перехід між станами економіки.
28. Побудуйте та проаналізуйте залежності стаціонарних значень попиту та умовної ціни від купівельної спроможності для переривчастого переходу між станами економіки.
29. Запишіть систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку переривчастого переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки, коли найменшим є час зміни виробничої функції.
30. Знайдіть координати особливих точок фазового портрета системи (3.22),(3.43).
31. Отримайте вирази (3.46) для показників Ляпунова.
32. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.8.
33. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.9.
34. Побудуйте та проаналізуйте залежність ефективного потенціалу $V(Q, p)$ від попиту та умовної ціни.
35. Запишіть систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку переривчастого переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки, коли найбільшими є часи зміни виробничої функції та умовної ціни.
36. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.10.
37. Запишіть систему диференціальних рівнянь, що описує динаміку переривчастого переходу між низько- та високопродуктивним станами економіки, коли найменшим є час зміни умовної ціни.

38. Знайдіть координати особливих точок фазового портрета системи (3.36),(3.53).
39. Отримайте вирази (3.56) для показників Ляпунова.
40. Проаналізуйте фазові портрети, наведені на рис.3.11.
41. Проаналізуйте шість можливих режимів (3.57) співвідношення характерних часів зміни відповідних величин.
42. Проаналізуйте часові залежності, наведені на рис.3.12.

Розділ 4

КОЛЕКТИВНА ПОВЕДІНКА АКТИВНИХ ЧАСТИНОК

Основою опису колективної поведінки простих об'єктів типу атомів конденсованого середовища є теорія фазових переходів — феноменологічна, коли цей опис ґрунтується на термодинамічному підході (теорії Ландау), або мікроскопічна, якщо колективні ефекти подаються на основі поведінки одиночних об'єктів (будемо називати їх частинками). Принципово важливою особливістю теорії фазових переходів є та обставина, що колективна поведінка системи зображується єдиним ступенем свободи — гідродинамічною модою, амплітуда якої зводиться до параметра порядку. Це означає, що у великій системі (термостаті) виділяється настільки мала підсистема (її стан визначається параметром порядку), що вона не впливає на стан термостата, який задається термічним параметром (ентропією) і механістичним (зовнішнім полем). У результаті термодинамічна теорія фазових переходів ґрунтується на ієрархії зазначених величин — ентропія та поле визначають величину параметра порядку, тоді як його зміна (наприклад, у процесі релаксації) не впливає на стан термостата [97].

Зовсім інша ситуація складається в системах, що самоорганізуються: так, перехід лазера до режиму спонтанного випромінювання не може бути поданий єдиним параметром порядку (напруженістю індукованого поля), і для повного розуміння картини випромінювання слід врахувати рівноправним чином електричну поляризацію середовища та різницю

заселеностей електронних рівнів [2]. Із того факту, що перша із зазначених величин відіграє роль поля, а друга – ентропії, впливає важливий висновок про рівноправну роль параметрів підсистеми і навколишнього середовища в процесі самоорганізації (із цієї причини такі системи відносять до відкритих). Більше того, теорема Рюеля-Такенса стверджує, що мінімальне число параметрів, які дозволяють нетривіальним чином подати картину самоорганізації (наприклад, перехід до режиму дивного атрактора) дорівнює трьом [2]. Якщо ці параметри мають флуктуаційний характер, то синергетична схема дозволяє пояснити [32] настільки складне явище, як самоорганізована критичність, проявом якої є землетруси, мимовільні лісові пожежі, природний відбір Дарвіна, економічні крахи і т.д. (див. [13, 14]).

У зв'язку із викладеним виникає природне запитання: чи обмежена картина самоорганізації об'єктами неживої природи, або при описі колективних ефектів, коли індивідуальні риси практично нівелюються, синергетичний підхід може бути використаний для живих організмів і соціальних систем?

Зазначимо, що проблема опису біологічних систем на основі методів теоретичної фізики була поставлена ще Гельмгольцем (1845 рік) у рамках концепції *фізики життя* (див. [98]). Ця проблема обумовлена складністю біологічних систем, які складаються із багатьох компонентів, взаємодіючих нелінійним чином, так, що поведінка всієї системи не наслідує поведінку окремих компонентів. З іншого боку, спостережувані в природі складні системи мають дисипативний характер, і самоорганізація вимагає припливу зовнішньої енергії. Використання моделей, що ґрунтуються на методах нелінійної динаміки і теорії самоорганізації, дозволило пояснити такі процеси, як формування біологічного рельєфу (малюнки на вовні тварин і раковинах молюсків), регенерацію (загоєння ран, видозміна органів), біологічні ритми і синхронізацію (діяльність мозку, кардіологічні цикли), скорочення м'язів, асоціативну пам'ять і т.д. [99, 100].

Разом з тим залишається багато біологічних процесів, що не одержали належного розуміння. Вони зводяться до виявлення механізмів структуроутворення, дослідження яких займає одне із центральних місць у природничих і технічних науках при розгляді систем, що мають багато стійких станів. Так, дослідження динаміки системи *хижак-жертва* виявляє наявність просторово-часових структур у вигляді фронтів, що поширюються, регулярних і стохастичних коливань, концентричних і спіральних хвиль [100]. Хоча не всі із зазначених структур знайдені у реальних системах, про правомірність використаних моделей свідчать спостереження спіральних хвиль в океані при обертальному русі плям планктону у кілометровому діапазоні. Стаціонарні структури і рухливі хвилі, що подібні до концентричних кіл або спіралей, можуть виникати також у колоніях різних бактерій [101, 102].

Особливе місце у колі зазначених проблем займає опис можливих режимів колективного руху живих організмів — пташиної зграї, рою комах, що формує слід руху, колонії бактерій, взаємодіючих за допомогою хімічного поля, і т.д. Дослідження [100]— [102] показали, що такий рух не залежить від рівня біологічних скопичень — починаючи від клітин і найпростіших мікроорганізмів і закінчуючи високоорганізованими рибами і птахами. Це дозволяє подати такі скупчення, як ансамблі активних броунівських частинок, кожна з яких, маючи запас внутрішньої енергії, може змінювати свій внутрішній стан, що задається параметром θ . Включаючи взаємодію між частинками, можна подати динаміку скупчення, обумовлену дією якого-небудь реагенту (наприклад, феромонів, за допомогою яких мурахи спілкуються одне з одним). Виділення такого реагенту приводить до просторово-часового розподілу $h(\mathbf{r}, t)$ концентрації хімічних продуктів, що еквівалентно появі поля $\mathbf{f} = -\nabla h(\mathbf{r}, t)$, що є градієнтом концентрації цих продуктів. Характерно, що реакція частинки на хімічний сигнал зводиться не тільки до її зсуву в

просторі, але й до утворення хімічних продуктів, склад яких визначається параметром внутрішнього стану θ . У результаті для групи живих організмів реалізуються такі режими руху:

- обертальний рух навколо відносно порожнього центра мас, у результаті чого скупчення утворює тороїдальну форму (при цьому центр мас знаходиться у спокої);
- поступальний рух, при якому скупчення рухається як ціле, утворюючи щільну групу;
- переривчастий (амебоподібний) рух — послідовне чергування зазначених вище режимів.

Спроба подання різних режимів руху була розпочата в роботі [99], однак розвинена там схема не є самоузгодженою. Це пов'язано з тим, що керуючий параметр, який визначає колективну поведінку системи, задається штучним чином — йому приписуються значення $\theta = \pm 1$. Це обмеження було знято в роботі [103], де розвинуто самоузгоджену схему колективного руху активних частинок, яка ґрунтується на трипараметричній системі рівнянь самоорганізації. Її розгляду присвячено підрозділ 4.1.

Розвиток сучасних засобів комунікації зумовив особливу актуальність проблеми транспортних потоків, де в ролі активних частинок виступають керовані дорожні засоби — автомобілі.¹ До цього часу для опису *транспортних потоків* розроблені та широко використовуються термодинамічна [105], статистична [106], гідродинамічна і кінетична теорії [107]. Вони ґрунтуються на припущенні про послідовний рух автомобілів [107, 108], моделі Максвелла [109] і теорії клітинних автоматів [109, 110]. Математичним виразом моделі послідовного руху є рівняння Ньютона для системи взаємодіючих частинок, що представляють

¹Так, в одній Німеччині щорічні втрати від дорожніх пригод становлять більше 100 мільярдів доларів [104].

автомобілі. У рамках такої постановки основна проблема зводиться до моделювання зовнішньої сили і потенціалу взаємодії між частинками, які є реакцією дорожнього потоку на зміни швидкості та її відхилення від оптимального значення, зміну інтервалу руху і т.д. Модель Максвелла ґрунтується на кінетичному рівнянні Больцмана, в якому вважається, що частота зіткнень частинок не залежить від їх швидкості. Фізично це означає, що автомобіль рухається зі сталою швидкістю доти, поки не наддожене більш повільний, після чого набирає його швидкість. Такий підхід дозволяє провести аналітичний розгляд розподілу за розмірами кластерів автомобілів, що зіштовхнулись, і знайти статистичні характеристики транспортного потоку. Нарешті, у моделі клітинних автоматів час, положення, швидкість і прискорення автомобілів беруться дискретними, в результаті чого транспортний потік зображується одновимірними ґратами, кожний елемент яких може або пустувати, або бути зайнятим одним автомобілем. У результаті, змінюючи стан системи відповідно до заданого алгоритму, можна провести ефективне чисельне моделювання транспортного потоку.

У рамках термодинамічного підходу перехід нестійкого транспортного потоку, що призводить до дорожніх пробок, до стійкого, що відповідає оптимальному режиму руху, представляється як нерівноважний перехід першого роду, який відображає детерміністичний бік явища. Використання керуючого рівняння (*master equation*) дозволяє врахувати стохастичну природу транспортного потоку, що виражається у просторово-часовому розподілі автомобілів. Однак при цьому зовсім упускається вплив флуктуацій, які не тільки відіграють роль *спускового гачка*, що включає фазовий перехід, але і є причиною самоорганізації [2]. Особлива роль у формуванні транспортного потоку належить флуктуаціям внутрішнього параметра, величина якого визначається умовами руху (видимістю траси, станом дорожнього покриття, метеорологічними умовами

і т.д.). Найбільш природним чином врахування таких флуктуацій досягається в рамках синергетического підходу, що базується на системі синергетичних рівнянь. Дослідженню цієї проблеми присвячено підрозділ 4.2.

4.1 Колективний рух живих організмів

Згідно із синергетичною схемою [8] розглянемо колективний рух групи активних частинок, маючи на увазі для визначеності зграю птахів, центр якої може перебувати у спокої або рухатися поступально. Тоді параметр порядку, що розрізняє ці стани, зводиться до середньої швидкості \mathbf{v} руху зграї. Відповідно сполучене поле являє собою далекодіючу силу $\mathbf{f} \equiv -\nabla h(\mathbf{r}, t)$ хімічного типу, а керуючий параметр θ характеризує внутрішній стан, що визначає реакцію частинок на цю силу. У результаті задача зводиться до встановлення зв'язку між швидкостями зміни \dot{v} , \dot{f} , $\dot{\theta}$ зазначених величин та їх значеннями v , f , θ (для простоти будемо досліджувати одновимірний випадок).

Оскільки подальший розгляд проводиться за аналогією з дослідженням суцільних середовищ (розділ 2), фінансового ринку й економічної структури суспільства (розділ 3), то далі наведемо тільки результати. Колективна поведінка групи активних частинок подається системою рівнянь (1.2), де під параметром порядку η , сполученим полем h , керуючим параметром S і параметром зовнішнього впливу r варто розуміти величини v , f , θ і θ_e відповідно. Використання масштабів

$$t_v, \quad v_c \equiv (A_f A_\theta)^{-1/2}, \quad f_c \equiv (A_v^2 A_f A_\theta)^{-1/2}, \quad \theta_c \equiv (A_v A_f)^{-1} \quad (4.1)$$

і співвідношень характерних часів $\sigma \equiv \tau_f / \tau_v$, $b \equiv \tau_f / \tau_\theta$ приводить до канонічної системи (1.2). Самоузгоджена поведінка зграї реалізується, коли час релаксації швидкості τ_v набагато перевищує масштаби зміни сполученого поля τ_f і параметра

внутрішнього стану τ_θ . При цьому зміни двох останніх величин відповідають змінам швидкості згідно із співвідношеннями (1.4), де параметр порядку η замінюється швидкістю v , а сполучене поле h і керуючий параметр S позначаються f , θ . Таким чином, спонтанне зростання середньої швидкості v в інтервалі, обмеженому максимальним значенням v_c , приводить до зростання сполученого поля до величини $f = 1$ і зменшення параметра внутрішнього стану до значення $\theta = \theta_e/2$, що фіксується зовнішнім впливом. Середнє прискорення зграї описується рівнянням Ландау-Халатнікова (1.5), де ефективна енергія $E(v)$ визначається рівністю типу (1.6). При малих значеннях параметра зовнішнього впливу θ_e залежність $E(v)$ має монотонно зростаючий вигляд з мінімумом у точці $v = 0$, що відповідає стану спокою центра мас зграї. Зі зростанням θ_e до значень, які перевищують критичний рівень θ_c , з'являється стаціонарний впорядкований стан

$$v_0 = v_c \sqrt{\frac{\theta_e}{\theta_c} - 1}, \quad (4.2)$$

що відповідає поступальному руху. При цьому сполучене поле набуває кінцевого значення $f_0 = (f_c/v_c)v_0$, а параметр внутрішнього стану зменшується до критичного значення $\theta_0 = \theta_c$.

Раніше ми представляли колективний рух зграї як ціле, використовуючи параметри, усереднені за її об'ємом. Врахуємо тепер флуктуації швидкості, сполученого поля і параметра внутрішнього стану, додаючи у праві частини рівнянь (3.3)–(3.5), де C , I , N і N_i замінені величинами v , f , θ і θ_e , стохастичні джерела $\sqrt{I_v}\eta(t)$, $\sqrt{I_f}\eta(t)$, $\sqrt{I_\theta}\eta(t)$, які визначаються інтенсивностями I_v , I_f , I_θ , вимірними в одиницях $(A_f A_\theta)^{-1}$, $(A_v^2 A_f A_\theta)^{-1}$, $(A_v A_f)^{-2}$ відповідно; множник $\eta(t)$ являє собою білий шум. Тоді в рамках адиабатичного наближення сполучене поле $f(t)$ і параметр внутрішнього стану $\theta(t)$ набувають стохастичної форми (порів. з (2.61)–(2.63)):

$$f(t) = \bar{f} + \tilde{f}\eta(t), \quad \theta(t) = \bar{\theta} + \tilde{\theta}\eta(t); \quad (4.3)$$

$$\bar{f} \equiv \theta_e v d(v), \quad \tilde{f} \equiv \sqrt{I_f + I_\theta v^2} d(v); \quad (4.4)$$

$$\bar{\theta} \equiv \theta_e d(v), \quad \tilde{\theta} \equiv \sqrt{I_\theta + I_f v^2} d(v); \quad (4.5)$$

$$d(v) \equiv (1 + v^2)^{-1}.$$

У результаті стохастична поведінка зграї подається рівнянням Ланжевена (2.64), де ефективна сила та інтенсивність шуму виражаються рівностями (порів. з (2.65), (2.66))

$$F \equiv -v + \frac{\theta_e}{1 + v^2}, \quad I(v) \equiv I_v + (I_f + I_\theta v^2) d^2(v). \quad (4.6)$$

Набір випадкових розв'язань стохастичного рівняння визначається рівнянням Фоккера-Планка (2.67), що приводить до стаціонарного розподілу

$$P(v) = \frac{Z^{-1}}{I(v)} \exp \left\{ \int_0^v \frac{F(v')}{I(v')} dv' \right\}, \quad (4.7)$$

де Z – нормувальна стала.

Знайдений розподіл (4.7) зводиться до дослідженого в підрозділі 2.5. Так, максимум у точці $v = 0$, що відповідає стану спокою, реалізується, якщо параметр зовнішнього впливу θ_e не перевищує критичного значення

$$\theta_c^0 = 1 + 2I_\theta - 4I_f, \quad (4.8)$$

яке зростає зі збільшенням інтенсивності флуктуацій параметра внутрішнього стану і зменшується зі зростанням інтенсивності флуктуацій сполученого поля. Така ситуація відповідає обертальному руху зграї.

Для дослідження умов переходу до режиму поступального руху розглянемо спочатку простий випадок $I_f = 0$, коли швидкість набирає два кінцевих значення v_\pm^2 типу (3.12) і нульову величину $v^2 = 0$. Мінімальні значення v_\pm^2 , що відповідають виразу (3.13),

досягаються на прямій (4.8), де $I_f = 0$. При $\theta_e < 4/3$ корені v_{\pm} є комплексними, а при $\theta_e > 4/3$ – дійсними, причому $v_+ = -v_-$. Таким чином, у трикритичній точці

$$\theta_e = 4/3, \quad I_{\theta} = 1/6 \quad (4.9)$$

виникає поступальний рух, що характеризується симетричним розподілом швидкостей з максимумами в точках v_{\pm} . Умова існування коренів v_{\pm} приводить до залежності

$$2I_{\theta} = \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{\theta_e}{3} \right) - \frac{\theta_e^2}{8} \right] \pm \left\{ \left[\frac{27}{2} \left(1 - \frac{\theta_e}{3} \right) - \frac{\theta_e^2}{8} \right]^2 - 2\theta_e^3 \right\}^{1/2}. \quad (4.10)$$

Вона відповідає кривій $\theta_e(I_{\theta})$, що перетинає горизонтальну вісь у точках $I_{\theta} = 0$, $I_{\theta} = 27/2$ і має максимум у точці

$$\theta_e = 2, \quad I_{\theta} = 2. \quad (4.11)$$

При $I_f = 0$ ця крива торкається прямої (4.8) у точці (4.9).

Фазова діаграма можливих режимів поведінки групи активних частинок наведена на рис.3.1а, де під p_e слід розуміти параметр зовнішнього впливу θ_e , а під I_p – інтенсивність флуктуацій I_{θ} . При цьому криві 1, 2 показують межі областей поступального (в) і обертального (а) рухів; відповідно (б) позначає область переривчастого руху. З діаграми видно, що при значеннях θ_e , які перевищують межу (4.8), найбільш імовірна величина швидкості $v \neq 0$, і група активних частинок рухається поступально. При зниженні θ_e з'являється максимум у точці $v = 0$, що відповідає обертальному руху. Під кривою (4.10) цей максимум стає єдиним.

За наявності флуктуацій сполученого поля $I_f \neq 0$ координати (4.9) трикритичної точки набирають вигляду

$$\theta_e = \frac{4}{3}(1 - I_f), \quad I_{\theta} = \frac{1}{6}(1 + 8I_f), \quad (4.12)$$

а положення критичної точки (4.11) змінюється більш складним чином. Порівняння рисунків 3.1а-в показує, що флуктуації сполученого поля заглушають обертальний рух: з їх зростанням до значення $I_f = 1$ трикритична точка (4.12) потрапляє на вісь $\theta_e = 0$, а при $I_f = 2$ область обертального руху зникає зовсім. З іншого боку, флуктуації I_θ параметра внутрішнього стану приводять до появи двофазного стану, якому характерний переривчастий рух – її центр мас по черзі рухається поступальним чином або перебуває у спокої. Згідно з рис.3.1а такий режим досягається навіть за відсутності зовнішнього впливу ($\theta_e = 0$), коли інтенсивність флуктуацій I_θ перевищує критичне значення $I_\theta^c = 27/2$, що спадає до $I_\theta^c = 2(I_f - 1/4)$ при $I_f > 2$. У результаті система переходить до режиму самоорганізованої критичності, де розподіл швидкості (4.7) набуває квазістепенового вигляду

$$P(v) \simeq I_\theta^{-1} \left(\frac{1+v^2}{v} \right)^2 \exp \left\{ I_\theta^{-1} \int \frac{F(v)(1+v^2)^2}{v^2} dv \right\} \sim \frac{I_\theta^{-1}}{v^2}, \quad (4.13)$$

якщо між інтенсивностями шумів виконується співвідношення $I_v, I_f \ll I_\theta$. Таким чином, зростання флуктуацій параметра внутрішнього стану приводить до самоподібного режиму, який характеризується однорідною функцією з показником 2.

Як бачимо з рис.3.3, форма розподілу швидкостей активних частинок $P(v)$ визначається з того, якій області фазової діаграми (рис.3.1, 3.2) відповідають параметр зовнішнього впливу θ_e та інтенсивності флуктуацій I_θ, I_f . В області обертального руху, позначеній на рис.3.1 буквою *a*, найбільш імовірними будуть малі швидкості, розподілені відповідно до рис.3.3а. Бімодальний режим, показаний на рис.3.3б, становить переривчастий рух, що відповідає області *b* на рис.3.1. І, нарешті, одномодовий режим (рис.3.3в), у якому найбільш імовірні кінцеві значення швидкості, характерний для поступального руху в області *v* фазової діаграми, наведеної на рис.3.1.

4.2 Самоузгоджена картина формування транспортних потоків

Розглянемо найпростіший випадок односмугового руху, коли автомобілі йдуть один за одним із середньою швидкістю V , дотримуючись інтервалу Δx . У загальному випадку величини V , Δx відрізняються від оптимальних значень v_0 , h , зв'язаних між собою характерним часом $t_0 \equiv h/v_0$, що становить час пробігу оптимального інтервалу. Відхилення від ідеального руху подається девіацією інтервалу

$$\eta \equiv \Delta x - h \quad (4.14)$$

і швидкістю його зміни, відліченої від неузгодженості $v_0 - V$ оптимальної та поточної швидкостей:

$$v \equiv (\Delta \dot{x} - v_0) + V. \quad (4.15)$$

Величини (4.14) і (4.15) відіграють роль параметра порядку і сполученого поля. Синергетичне подання досягається, якщо їх доповнити керуючим (внутрішнім) параметром транспортного потоку θ , величина якого визначається умовами руху (видимістю траси, станом дорожнього покриття, метеорологічними умовами і т.д.).

У результаті поведінка транспортного потоку подається рівняннями:

$$\dot{\eta} = -\frac{\eta}{t_\eta} + v, \quad (4.16)$$

$$\dot{v} = -\frac{v}{t_v} + g_v \eta \theta, \quad (4.17)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_e - \theta}{t_\theta} - g_\theta \eta v + \zeta(t), \quad (4.18)$$

де крапка означає диференціювання за часом; t_η , t_v і t_θ — часи релаксації відповідних величин; g_v і g_θ — позитивні константи

зв'язку. Як і в інших системах, що самоорганізуються, кінетичне рівняння для керуючого параметра відрізняється від інших тим, що релаксація величини θ відбувається не до нуля, а до кінцевого значення θ_e , величина якого визначається умовами руху (далі будемо позначати θ_e як параметр перешкод формуванню оптимального транспортного потоку). Інша особливість рівняння (4.18) полягає в наявності стохастичного джерела $\zeta(t)$, що являє собою процес Орнштейна—Уленбека:

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0, \quad \langle \zeta(t)\zeta(t') \rangle = \frac{I}{\tau_\zeta} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_\zeta}\right), \quad (4.19)$$

де I — інтенсивність флуктуацій керуючого параметра; τ_ζ — час їх кореляції.

У результаті перехід від неупорядкованого транспортного потоку до впорядкованого подається спонтанними відхиленнями інтервалу (4.14) і швидкості (4.15) за умови, що параметр перешкод θ_e перевищує критичне значення. Наше завдання полягає в дослідженні впливу стохастичного джерела на еволюцію параметра порядку $\eta(t)$. З цією метою обмежимося випадком

$$t_\eta \approx t_v \gg t_\theta, \quad (4.20)$$

у якому зміна керуючого параметра θ наслідуює відхилення інтервалу η і швидкості v . Тоді в лівій частині рівняння (4.18) можна покласти $t_\theta \dot{\theta} \simeq 0$, і керуючий параметр виражається рівністю

$$\theta = \theta_e - g_\theta t_\theta \eta v + t_\theta \zeta(t). \quad (4.21)$$

Зведемо систему (4.16), (4.17), (4.21) до єдиного рівняння для параметра порядку $\eta(t)$. З цією метою перейдемо до безрозмірних величин, відносячи час t , відхилення інтервалу η і швидкості v , керуючий параметр θ та інтенсивність шуму ζ до масштабів

$$t_v, \eta_c = (g_v g_\theta t_v t_\theta)^{-1/2}, \quad v_c = t_\eta^{-1} (g_v g_\theta t_v t_\theta)^{-1/2},$$

$$\theta_c = (g_v t_\eta t_v)^{-1}, \quad \zeta_c = (g_v t_\eta t_v t_\theta)^{-1}$$

відповідно. Тоді рівняння (4.16) дає швидкість

$$v = \eta + m\dot{\eta}, \quad (4.22)$$

а рівності (4.17), (4.21) набувають вигляду

$$\dot{v} = -(\eta + m\dot{\eta}) + \varepsilon\eta - \eta^2(\eta + m\dot{\eta}) + \eta\zeta(t), \quad (4.23)$$

$$\theta = \varepsilon - \eta(\eta + m\dot{\eta}) + \zeta(t), \quad (4.24)$$

де позначено

$$m \equiv t_\eta/t_v, \quad \varepsilon \equiv \theta_c/\theta_c. \quad (4.25)$$

Підставляючи рівність (4.23) у результат диференціювання виразу (4.22), приходимо до еволюційного рівняння, що має канонічну форму нелінійного стохастичного осцилятора Ван дер Поля

$$m\ddot{\eta} + \gamma(\eta)\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\zeta(t), \quad (4.26)$$

де коефіцієнт тертя γ , сила f і амплітуда шуму g визначаються виразами

$$\gamma(\eta) \equiv 1 + m(1 + \eta^2), \quad f(\eta) \equiv (\varepsilon - 1)\eta - \eta^3, \quad g(\eta) \equiv \eta. \quad (4.27)$$

4.3 Статистична поведінка транспортних потоків

Задача полягає в знаходженні розподілу системи у фазовому просторі, утвореному узагальненими координатою η та імпульсом $p \equiv m\dot{\eta}$ залежно від часу t . З цією метою наведемо рівняння Ейлера (4.26) у формі Гамільтона

$$\dot{\eta} = m^{-1}p, \quad (4.28)$$

$$\dot{p} = -m^{-1}\gamma(\eta)p + f(\eta) + g(\eta)\zeta(t). \quad (4.29)$$

Тоді шукана густина ймовірності $P(\eta, p, t)$ зводиться до усередненої за шумом ζ функції розподілу $\rho(\eta, p, t)$ розв'язань системи (4.28), (4.29):

$$P(\eta, p, t) = \langle \rho(\eta, p, t) \rangle. \quad (4.30)$$

Будемо виходити з рівняння безперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta} \rho) + \frac{\partial}{\partial p} (\dot{p} \rho) \right] = 0, \quad \rho = \rho(\eta, p, t). \quad (4.31)$$

Підставляючи сюди рівності (4.28), (4.29), приходимо до рівняння Ліувілля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{N}} \zeta \right) \rho, \quad (4.32)$$

де введені оператори

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv -\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial p} \left(f - \frac{\gamma}{m} p \right), \quad (4.33)$$

$$\hat{\mathcal{N}} \equiv -g \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.34)$$

Переходячи до подання взаємодії, в рамках якого мікроскопічна функція розподілу набирає вигляду

$$\wp = e^{-\hat{\mathcal{L}}t} \rho, \quad (4.35)$$

приведемо рівняння (4.32) до простої форми

$$\frac{\partial \wp}{\partial t} = \hat{\mathcal{R}} \wp, \quad \hat{\mathcal{R}} \equiv \zeta \left(e^{-\hat{\mathcal{L}}t} \hat{\mathcal{N}} e^{\hat{\mathcal{L}}t} \right). \quad (4.36)$$

Далі використаємо метод кумулянтного розкладання [111], що з точністю до доданків порядку $O(\hat{\mathcal{R}}^2)$ приводить до кінетичного рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \wp \rangle(t) = \left[\int_0^t \langle \hat{\mathcal{R}}(t) \hat{\mathcal{R}}(t') \rangle dt' \right] \langle \wp \rangle(t). \quad (4.37)$$

Вертаючись від подання взаємодії до вихідного, для функції розподілу (4.30) отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial t} P(t) = \left\{ \widehat{\mathcal{L}} + \int_0^t \langle \zeta(\tau) \zeta(0) \rangle \left[\widehat{\mathcal{N}} \left(e^{\widehat{\mathcal{L}}\tau} \widehat{\mathcal{N}} e^{-\widehat{\mathcal{L}}\tau} \right) \right] d\tau \right\} P(t). \quad (4.38)$$

Звичайно фізичний час t набагато перевищує час кореляції шуму τ_ζ , і верхню межу інтегрування можна брати такою, що дорівнює нескінченності. Тоді розкладання експонент у (4.38) приводить до виразу

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\widehat{\mathcal{L}} + \widehat{\mathcal{C}} \right) P, \quad (4.39)$$

де оператор розсіювання

$$\widehat{\mathcal{C}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{\mathcal{C}}^{(n)}, \quad \widehat{\mathcal{C}}^{(n)} \equiv M^{(n)} \left(\widehat{\mathcal{N}} \widehat{\mathcal{L}}^{(n)} \right) \quad (4.40)$$

визначається комутаторами

$$\widehat{\mathcal{L}}^{(n+1)} = [\widehat{\mathcal{L}}, \widehat{\mathcal{L}}^{(n)}], \quad \widehat{\mathcal{L}}^{(0)} \equiv \widehat{\mathcal{N}} \quad (4.41)$$

і моментами кореляційної функції (4.19)

$$M^{(n)} = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} \tau^n \langle \zeta(\tau) \zeta(0) \rangle d\tau. \quad (4.42)$$

Перші з них становлять

$$M^{(0)} = I, \quad M^{(1)} = I\tau_\zeta. \quad (4.43)$$

У загальному випадку подальший розгляд неможливий, і тому обмежимося випадком передемпфованого осцилятора, у якому сила рідкого тертя перевищує інші складові в $\epsilon^{-1} \gg 1$ раз. Тоді

перехід до безрозмірних величин приводить рівняння (4.28), (4.29) до вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \epsilon^{-1} p, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -\epsilon^{-2} \gamma(\eta) p + \epsilon^{-1} [f(\eta) + g(\eta) \zeta(t)].\end{aligned}\quad (4.44)$$

Відповідно рівняння Фоккера-Планка (4.39) записується у формі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \widehat{\mathcal{L}} \right) P = \epsilon^{-2} \widehat{\mathcal{C}} P, \quad (4.45)$$

де оператор

$$\widehat{\mathcal{L}} \equiv \epsilon^{-1} \widehat{\mathcal{L}}_1 + \epsilon^{-2} \widehat{\mathcal{L}}_2 \quad (4.46)$$

має компоненти

$$\widehat{\mathcal{L}}_1 \equiv -p \frac{\partial}{\partial \eta} - f \frac{\partial}{\partial p}, \quad \widehat{\mathcal{L}}_2 \equiv \gamma \frac{\partial}{\partial p} p. \quad (4.47)$$

Оператор розсіювання $\widehat{\mathcal{C}}$ задається виразами (4.34), (4.40) – (4.42). Тоді з точністю до доданків другого порядку розклад (4.40) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{C}} &= (M^{(0)} - \gamma M^{(1)}) g^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \\ &+ \epsilon M^{(1)} g^2 \left[-\frac{1}{g} \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial}{\partial p} + p \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial p} \right] + O(\epsilon^2).\end{aligned}\quad (4.48)$$

Оскільки практичний інтерес має не повна функція розподілу $P(\eta, p, t)$, а її інтеграл $\mathcal{P}(\eta, t) \equiv \int P(\eta, p, t) dp$, розглянемо моменти вихідного розподілу

$$\mathcal{P}_n(\eta, t) \equiv \int p^n P(\eta, p, t) dp, \quad (4.49)$$

нульовий з яких дає необхідний результат. Помножуючи рівняння (4.45) на p^n та інтегруючи за всіма імпульсами, після комбінування рівностей (4.44)–(4.49) приходимо до рекурентного співвідношення

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \frac{\partial \mathcal{P}_n}{\partial t} + n\gamma \mathcal{P}_n + \epsilon \left(\frac{\partial \mathcal{P}_{n+1}}{\partial \eta} - n f \mathcal{P}_{n-1} \right) = \\ = n(n-1) (M^{(0)} - \gamma M^{(1)}) g^2 \mathcal{P}_{n-2} - \\ - \epsilon n M^{(1)} \left[g^2 \frac{\partial \mathcal{P}_{n-1}}{\partial \eta} + n g \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \mathcal{P}_{n-1} \right] + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (4.50)$$

При $n = 0$ одержуємо рівняння для шуканої функції $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0(\eta, t)$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\epsilon^{-1} \frac{\partial \mathcal{P}_1}{\partial \eta}, \quad (4.51)$$

яке визначається моментом першого порядку \mathcal{P}_1 . Останній задається рівнянням

$$\mathcal{P}_1 = \frac{\epsilon}{\gamma} \left\{ f \mathcal{P} - \frac{\partial \mathcal{P}_2}{\partial \eta} - M^{(1)} \left[g^2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \eta} + g \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \mathcal{P} \right] \right\}, \quad (4.52)$$

що впливає з рівності (4.50), де взято $n = 1$ і враховуються члени першого порядку за $\epsilon \ll 1$. Момент другого порядку \mathcal{P}_2 виходить із (4.50), якщо брати $n = 2$ і врахувати члени нульового порядку за ϵ :

$$\mathcal{P}_2 = \left(\frac{M^{(0)}}{\gamma} - M^{(1)} \right) g^2 \mathcal{P}. \quad (4.53)$$

У результаті рівняння Фоккера-Планка, наведене у формі Крамерса-Моєла

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \eta} (\mathcal{D}_1 \mathcal{P}) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\mathcal{D}_2 \mathcal{P}), \quad (4.54)$$

виражається через коефіцієнти дрейфу та дифузії

$$\mathcal{D}_1 = \frac{1}{\gamma} \left\{ f + \left[M^{(0)} g^2 \frac{\partial \gamma^{-1}}{\partial \eta} + M^{(1)} g \left(\frac{\partial g}{\partial \eta} \right) \right] \right\}, \quad (4.55)$$

$$\mathcal{D}_2 = M^{(0)} \frac{g^2}{\gamma^2}. \quad (4.56)$$

Стационарне розв'язання рівняння (4.54) приводить до розподілу

$$\mathcal{P}(\eta) = \frac{\mathcal{Z}^{-1}(\eta)}{\mathcal{D}_2(\eta)} \exp \left(\int_{-\infty}^{\eta} \frac{\mathcal{D}_1(x)}{\mathcal{D}_2(x)} dx \right), \quad (4.57)$$

де нормувальна константа задається умовою

$$\mathcal{Z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta}{\mathcal{D}_2(\eta)} \exp \left(\int_{-\infty}^{\eta} \frac{\mathcal{D}_1(x)}{\mathcal{D}_2(x)} dx \right). \quad (4.58)$$

Згідно з рис.4.1 розподіл (4.57) має добре виражені максимуми, положення яких визначаються набором величин ε , I , τ_ζ і m . При малому параметрі ε , значення якого визначає рівень перешкод формуванню транспортного потоку, реалізується єдиний максимум у точці $\eta = 0$, що відповідає неупорядкованому стану. Зі зростанням ε з'являються два симетричних максимуми в точках $\pm \tilde{\eta} \neq 0$, що відповідають стаціонарному стану, в якому відбувається спонтанне відхилення від оптимального транспортного потоку. Очевидно, правий із цих максимумів визначає режим розрідженого руху, при якому найбільш імовірним є інтервал $h + \tilde{\eta}$, що перевищує оптимальне значення h , а лівий відповідає перевантаженому (*congested*) транспортному потоку, що відповідає заниженому значенню інтервалу $h - \tilde{\eta}$. Критичне значення параметра перешкод ε , при якому розподіл $\mathcal{P}(\eta)$ набирає бімодального вигляду, задається інтенсивністю I і часом кореляції τ_ζ при випадковій зміні внутрішнього стану транспортного потоку,

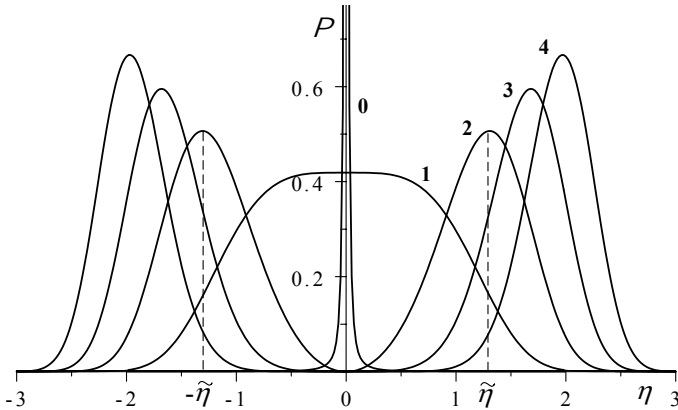


Рисунок 4.1 – Функція розподілу девіації інтервалів руху. Цифрами позначені значення параметра перешкод ε при $m = 1$, $I = 1$, $\tau_\zeta = 1$

а також співвідношенням m характерних часів зміни інтервалу руху і швидкості.

Стационарний стан транспортного потоку визначається умовою екстремуму розподілу (4.57)

$$\frac{\mathcal{D}_1(\eta) - \mathcal{D}'_2(\eta)}{\mathcal{D}_2(\eta)} = 0. \quad (4.59)$$

Підставляючи сюди вираз (4.28), (4.29), приходимо до рівняння

$$[1 + m(1 + \eta^2)]^2 \{[\varepsilon - (1 - I\tau_\zeta)] - \eta^2\} = 2(1 + m)I. \quad (4.60)$$

Його розв'язання показано на рис.4.2, відповідно до якого зростання інтенсивності шуму I приводить до появи на монотонній залежності $\tilde{\eta}(\varepsilon)$ двозначної ділянки, властивої переходам першого роду. Якщо в (4.60) $\eta = 0$, знаходимо граничне значення

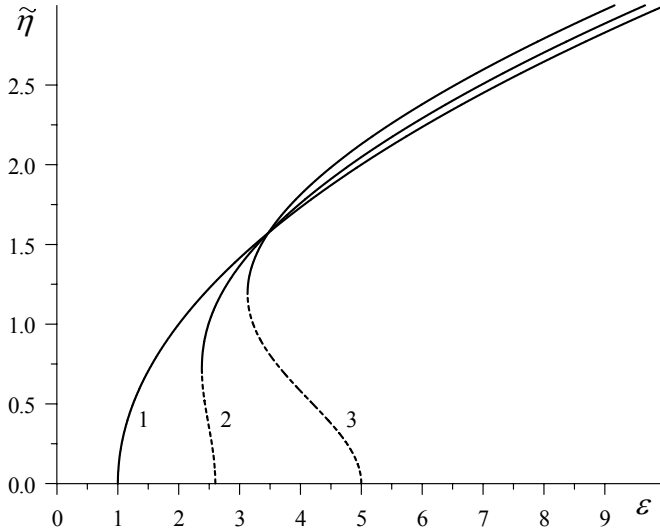


Рисунок 4.2 – Залежність стаціонарної девіації інтервалу руху η_0 від параметра перешкод ε при $m = 1$, $\tau_\zeta = 0.2$. Криві 1, 2, 3 відповідають інтенсивностям шуму $I = 0, 2, 5$

параметра перешкод

$$\varepsilon_0 = 1 - \left(\tau_\zeta - \frac{2}{1+m} \right) I, \quad (4.61)$$

з якого бачимо, що збільшення інтенсивності шуму, особливо його низькочастотної складової, приводить до зменшення граничного значення керуючого параметра, що забезпечує перехід транспортного потоку із оптимального режиму руху. Подібним чином впливає відношення характерного часу зміни інтервалу руху до відповідного масштабу зміни швидкості. З фазової діаграми, наведеної на рис.4.3, видно, що зростання часу кореляції τ_ζ приводить до істотного стиску області неупорядкованого руху, тоді

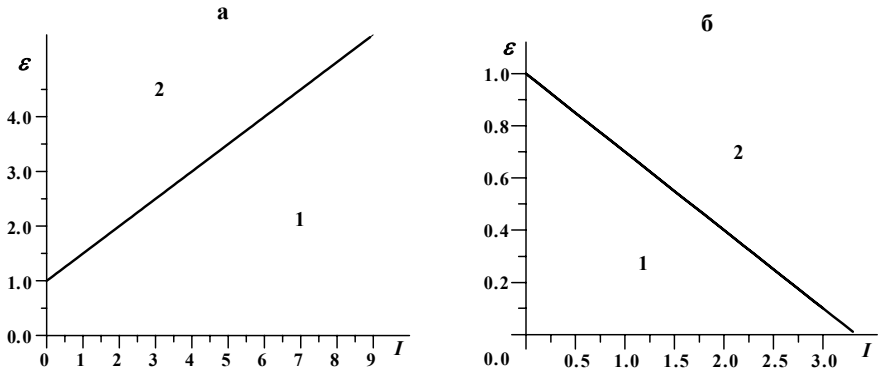


Рисунок 4.3 – Фазові діаграми транспортного потоку для часів кореляції $\tau_c = 0.5$ (а) і $\tau_c = 1.3$ (б) (скрізь $m = 1$). Область 1 відповідає невпорядкованому транспортному потоку, 2 – впорядкованому

як область впорядкованого транспортного потоку розширюється.

Проведений розгляд показує, що погіршення умов руху (наприклад, за рахунок зменшення дальності огляду) приводить до самоорганізації транспортного потоку, що, у свою чергу, приводить до відхилення від оптимального режиму руху. При цьому істотну роль відіграє характер зміни цих умов: так, якщо вони настільки сильно скорельовані, що відповідний час перевищує критичне значення

$$\tau_c = \frac{2}{1 + m}, \quad (4.62)$$

то посилення інтенсивності флуктуацій внутрішнього параметра транспортного потоку неминуче призведе до порушення оптимального режиму руху.

Завдання для самоконтролю

1. Охарактеризуйте можливі режими руху активних частинок.
2. Запишіть самоузгоджену систему рівнянь, що описує колективний рух живих організмів.
3. За допомогою масштабів (4.1) отримайте безрозмірну систему рівнянь, що описує колективний рух живих організмів.
4. Отримайте рівняння для ефективної енергії $E(v)$ скупчення живих організмів.
5. Запишіть стохастичну систему рівнянь, що описує колективний рух живих організмів.
6. Який вигляд мають детерміністичні та стохастичні складові далекодіючої сили і параметра внутрішнього стану?
7. Отримайте стаціонарний розподіл середньої швидкості, що задається рівнянням Фоккера-Планка.
8. Проаналізуйте діаграму можливих режимів руху активних частинок (див. рис.3.1).
9. Який вигляд має функція розподілу середньої швидкості для поступального, обертального та переривчастого режимів руху активних частинок?
10. Запишіть самоузгоджену систему рівнянь, що описує картину формування транспортних потоків.
11. Подайте систему (4.16)–(4.18) у безрозмірному вигляді.
12. Запишіть співвідношення, що характеризує процес Орнштейна-Уленбека.

13. Проаналізуйте систему (4.16)–(4.18) за умов (4.20).
14. Наведіть рівняння (4.26) у формі Гамільтона.
15. Отримайте еволюційного рівняння, що має канонічну форму нелінійного стохастичного осцилятора Ван дер Поля.
16. Отримайте рівняння Ліувілля (4.32).
17. Проаналізуйте функцію розподілу девіації інтервалів руху.
18. Проаналізуйте залежності стаціонарної девіації інтервалу руху η_0 від параметра перешкод ε для різних значень інтенсивності шуму.
19. Проаналізуйте фазові діаграми транспортного потоку для різних часів кореляції.

Список літератури

1. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — V.20. — P.130 — 141.
2. Хакен Г. Синергетика. — М.: Мир, 1980.— 404с.
3. Хакен Г. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — Москва: Мир, 1985. — 419 с.
4. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. — 368 с.
5. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. — Москва: Эдиториал УРСС, 2000. — 336 с.
6. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. — Череповец: Меркурий Пресс, 2000. — 368 с.
7. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — Череповец: Меркурий Пресс, 2000. — 528 с.
8. Олемской А.И., Кацнельсон А.А. Синергетика конденсированной среды. — М.: Эдиториал УРСС, 2003. — 335 с.
9. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах: введение в теорию диссипативных структур. —

- Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 256 с.
10. Олемской А.И., Харченко Д.О. Самоорганизация самоподобных стохастических систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 296 с.
 11. Mainzer K. Thinking in Complexity. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 456 p.
 12. Parisi G. Complex systems: a physicist's viewpoint// Physica A. – 1999. – V.263. – P.557 – 564.
 13. Bak P. How Nature Works: the Science of Self-Organized Criticality. – Oxford: Oxford University Press, 1997. – 212 p.
 14. Jensen H.J. Self-Organized Criticality. Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 1998. – 167 p.
 15. Sornette D. Critical phenomena in natural Sciences. – New York: Springer-Verlag, 2001. – 450 p.
 16. Rayleigh J.W.S. On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // Phil. Mag. – 1916. – V.32. – P.529 – 546.
 17. Olemskoi A.I. Axiomatic theory of self-organizing system //Physica A. – 2002. – V.310. – P. 223 – 233.
 18. Олемской А.И., Хоменко А.В. Трехпараметрическая кинетика фазового перехода // ЖЭТФ. – 1996. – Т.110, №6(12). – С. 2144 – 2167.
 19. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – Москва: Мир, 1985. – 280 с.

20. Олемской А.И., Харченко Д.О., Харченко В.О. Теория самоорганизующейся модуляции// Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. — 2007. — №1. — С.75–85.
21. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — Москва: Мир, 1980. — 607 с.
22. Olemskoï A.I., Shuda I.A., Kharchenko V.O. Self-organization of an unstable system by the Hopf Bifurcation Scenario// УФЖ. — 2006. — Т.51, №3 — С. 311–320.
23. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Механика. — М.: Физматлит, 1988,Т.1. — 214 с.
24. Gozzy E., Thacher W.D. Classical adiabatic holonomy and its canonical structure// Phys.Rev. D. — 1987. — V.35. — P.2398–2406.
25. Олемской О.И., Шуда І.О. Теорія періодичної множини граничних циклів, що народжуються внаслідок біфуркації Хопфа// Вісник Сумського державного університету. Серія Фізика, математика, механіка. — 2007. — №1. — С.86–94.
26. Kleinert H. Gauge Fields in Condensed Matter. Vol.I. Superflow and Vortex Lines. — Singapore: World Scientific, 1989. — 742 p.
27. Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. — Москва: Мир, 1977. — 340 с.
28. Олемской А.И., Ющенко О.В. Феноменологическая теория перехода сыпучей среды в текучее состояние // ЖТФ. — 2003. — Т.73, Вып.10.— С.13 — 17.
29. Olemskoï A.I., Khomenko A.V. Synergetic theory for a jamming transition in traffic flow // Phys. Rev. E. — 2001. — V.63, №3. — P.036116(1–4).

30. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // УФН. – 2002. – Т.172, №9. – С.1045 – 1067.
31. Bouchaud J–P., Potter M. Theory of financial risks. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 232 p.
32. Olemskoi A.I., Khomenko A.V., Kharchenko D.O. Self-organized criticality within fractional Lorenz scheme // Physica A. – 2003. – V.323. – P. 263 – 293.
33. Олемской А.И., Кохан С.В., Ющенко О.В. Зависимость размерности аттрактора Лоренца от внешнего воздействия // Вісник СумДУ – 2003. – № 8(54). – С.5 – 16.
34. Мун Ф. Хаотические колебания. – М.: Мир, 1990. – 311 с.
35. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 336с.
36. Анищенко В.С., Лучинский Д.Г., Макклиток П.В.Е. и др. //ЖЭТФ. – 2002. – V.121. – P. 955.
37. Zaslavsky G.M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport // Phys. Rep. – 2002. – V.371. – P. 461 – 580.
38. Олемской О.І., Ющенко О.В. Статистична теорія переривчастого режиму течії сипучого середовища // УФЖ. – 2003. – Т.48, №10. – С.1095 – 1103.
39. Jaeger H.M., Nagel S.R. Granular solids, liquids, and gases //Rev. Mod. Phys. – 1996. – V.68, №4. – P.1259 – 1273.
40. Kadanoff L.P. Built upon sand: Theoretical ideas inspired by granular flows //Rev. Mod. Phys. – 1999. – V.71, №1. – P.435 – 444.

41. Rajchenbach J. Granular flows // *Advances in Physics* . – 2000. – V.49, №2. – P.229 – 256.
42. Арсеньев В.К. Дерсу Узала – М.: Правда, 1983. – 200 с.
43. Granular shear flow dynamics and forces: Experiment and continuum theory/ L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T.C. Lubensky, J.P. Gollub. // *Phys. Rev. E*. – 2001. – V.65, №1. – P. 011307(1–19).
44. Yoshizawa H., Chen Y.L., Israelachvili J. Fundamental mechanisms of interfacial friction. Relation between adhesion and friction // *Journal of Physical Chemistry*. – 1993. – V.97, №16. – P.4128 – 4141.
45. Persson B.N.J. Sliding friction. Physical principles and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 516 p.
46. Thompson P.A., Robbins M.O. Shear flow near solids: Epitaxial order and flow boundary conditions // *Phys. Rev. A*. – 1990. – V.41. – P. 6830 – 6837.
47. Gao J.P., Luedtke W.D., Landman U. Structure and solvation forces in confined films: Linear and branched alkanes // *Journal of Chemical Physics*. – 1997. – V.106, №10. – P.4309 – 4318.
48. Braun O., Bishop A.R., Röder J. Multistep Locked-to-Sliding Transition in a Thin Lubricant Film // *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – V.82, №15. – P.3097 – 3100.
49. Tomanek D., Zhong W., Thomas H. Calculation of an atomically modulated friction force in atomic-force microscopy // *Europhys. Lett.* – 1991. – V.15. – P.887 – 892.
50. Carlson J.M., Batista A.A. Constitutive relation for the friction between lubricated surfaces // *Phys. Rev. E*. – 1996. – V.53, №4. – P.4153 – 4165.

51. Aranson I.S., Tsimring L.S., Vinokur V.M. Stick-slip friction and nucleation dynamics of ultrathin liquid films // *Phys. Rev. B.* – 2002. – V.65, №15. – P. 125402(1–7).
52. Khomenko A.V., Yushchenko O.V. Solid-liquid transition of ultrathin lubricant film // *Phys. Rev. E.* – 2003. – V. 68, №3. – P.036110(1–6).
53. Кацнельсон А.А., Олемской А.И. Микроскопическая теория неоднородных структур. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 334 с.
54. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – Т.7. – 247 с.
55. Барьяхтар В.Г., Олемской А.И. Теория вязкоупругого перехода бесструктурной конденсированной среды // *ФТТ.* – 1991. – Т.33, №9. – С.2705 – 2710.
56. Havranek A., Marvan M. Glass transition in inorganic glasses, polymers, and crystals // *Ferroelectrics.* – 1996. – V.176. – P.25 – 32.
57. *Rheology* / edited by F.R. Eirich. – New York: Academic Press, 1969. – 143 с.
58. Olemskoi A.I. *Theory of Structure Transformations in Non-Equilibrium Condensed Matter* – New-York: NOVA Science, 1999. – 285 p.
59. Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // *УФН.* – 1998. – Т.168, №3. – С.287 – 321.
60. Олемской А.И. Иерархическая картина супердиффузии // *Письма в ЖЭТФ.* – 2000. – Т.71, Вып.7. – С.412 – 417.

61. Risken H. The Fokker–Planck Equation. — Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 1996. — 474 p.
62. Olemskoi A.I., Yushchenko O.V. Phase transition within deformed Ising model//Вісник СумДУ. — 2003. — № 10(56). — С.13 — 22.
63. Vespignani A., Zapperi S. Order Parameter and Scaling Fields in Self-Organized Criticality // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V.78, №25. — P.4793 — 4796. Vespignani A., Zapperi S. How self-organized criticality works: A unified mean-field picture// Phys. Rev. E. — 1998. — V.57, №6. — P.6345 — 6362.
64. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives — theory and applications. — Gordon and Breach: New-York, 1993. — 976 p.
65. Applications of Fractional Calculus in Physics / Ed. R. Hilfer. — Singapore: World Scientific, 2000. — 460 p.
66. Zaslavsky G. M. Renormalization group theory of anomalous transport in systems with Hamiltonian chaos // Chaos. — 1994. — V.4, №1. — P.25 — 33.
67. Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos// Physica D. — 1994. — V.76. — P. 110 — 122.
68. Saichev A.I., Zaslavsky G.M. Fractional kinetic equations: solutions and applications// Chaos. — 1997. — V.7, №4. — P. 753 — 764.
69. Hilfer R., Anton L. Fractional master equations and fractal timerandom walks // Phys. Rev. E. — 1995.— V.51, №2. — P. R848 — R851.

70. Levy anomalous diffusion and fractional Fokker–Plank equation / V.V. Yanovsky, A.V. Chechkin, D. Schertzer, A.V. Tur // *Physica A*. – 2000. – V.282. – P. 13–34.
71. Barkai E. Fractional Fokker–Plank equation, solution, and application // *Phys. Rev. E*. – 2001. – V.63, №4. – P. 046118(1–17).
72. Sokolov I.M. Thermodynamics and fractional Fokker–Plank equations // *Phys. Rev. E*. – 2001. – V.63, №5. – P. 056111(1–8).
73. Chechkin A.V., Klafter J., Sokolov I.M. Fractional Fokker–Planck Equation for Ultraslow Kinetics // *Europhys. Lett.* – 2003. – V.63, №3. – P.326 – 332.
74. Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical applications // *Phys. Rep.* – 1990. – V.195, №4–5. – P.127 – 293.
75. Gell-mann M., Tsallis C. *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications*. – Oxford: Oxford University Press, 2004. – 404 p.
76. Metzler R., Klafter J. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Rep.* – 2000. – V.339, №1. – P.1 – 77.
77. Fogedby H.C. Levy flights in quenched random force fields // *Phys. Rev. E*. – 1998. – V.58, №2. – P.1690 – 1712.
78. Zanette D.H., Alemany P.A. Thermodynamics of anomalous diffusion // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – V.75, №3. – P.366 – 369.
79. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984. – 293 с.

80. Mantegna R.N., Stanley H.E. An introduction to econophysics. Correlations and complexity in finance. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999. — 158 p.
81. Voit J. The statistical mechanics of financial markets. — Berlin—Heidelberg: Springer—Verlag, 2001. — 220 p.
82. Маевский В.И. Введение в эволюционную экономику. — М.: Япония сегодня, 1997. — 185 с.
83. Нельсон Р.Р., Уинтер С.Дж. Эволюционная теория экономических изменений. — М.: Дело, 2000. — 536 с.
84. Занг В.—Б. Синергетическая экономика: Время и перемены в нелинейной экономической теории. — М.: Мир, 1999. — 335 с.
85. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально—экономических процессов. — М.: Изограф, 1997. — 224 с.
86. Ларуш Л. Физическая экономика как платоновская эпистемологическая основа всех отраслей человеческого знания. — М.: Научная книга, 1997. — 260 с.
87. Wang Y., Wu J., Di Z. Physics of econophysics //http://xxx.lanl.gov/ PS_cache/ cond_mat/pdf/0401/0401025.pdf.
88. Wuyat M., Bouchaud J.-P. Self-referential behavior, overreaction and conventions in financial markets //http://xxx.lanl.gov/ PS_cache/ cond_mat/pdf/0303/0303584.pdf.
89. Pareto V. Cours d'economie politique. — Paris: Macmillan, 1897. — 132 p.
90. Levy M., Solomon S. New evidence for the power—law distribution of welth // Physica A. — 1997. — V.242. — P.90 — 94.

91. Drăgulescu A., Yakovenko V.M. Exponential and power-law probability distributions of wealth and income in the United Kingdom and the United States // *Physica A*. – 2001. – V.299. – P.213 – 221.
92. Bouchaud J.-P., Mezard M. Wealth condensation in a simple model of economy // *Physica A*. – 2000. – V.282. – P.536 – 545.
93. Marsili M., Maslov S., Zhang Y.-C. Dynamic optimization theory of a diversified portfolio // *Physica A*. – 1998. – V.253. – P.403 – 418.
94. Solomon S., Richmond P. Power laws of wealth, market order volumes and market returns // *Physica A*. – 2001. – V.299. – P.188 – 197.
95. Slanina F. Inelastically scattering particles and wealth distribution in an open economy // *Phys.Rev. E*. – 2004. – V.69. – P.046102(1-7).
96. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
97. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: В 10 т. Статистическая физика Ч.1. – М.: Физматлит, 2002. – Т.5. – 616 с.
98. Markl H. Physik des Lebendigen // *A.v. Humboldt-Magazin* – 1995. – V.65. – P. 13 – 24.
99. Ebeling W., Schweitzer F. Self-organization, active brownian dynamics, and biological applications // *Nova Acta Leopoldina NF*. – 2003. – V.88. – P. 169.
100. Формирование пространственно-временных структур, фракталы и хаос в концептуальных экологических моделях на

- примере динамики взаимодействующих популяций планктона и рыбы /А.Б. Медвидинский, С.В. Петровский, И.А. Тихонова и др. // УФН. – 2002. – Т. 172, №1. – С. 31 – 66.
101. Alt W., Hoffmann G. Lecture Notes in Biomathematics. Biological motion. – Berlin: Springer–Verlag, 1990. – 118 p.
102. Иваницкий Г.Р., Медвидинский А.Б., Цыганов М.А. От динамики популяционных автоволн, формируемых живыми клетками, к нейроинформатике // УФН. – 1994. – Т.164, №10. – Р. 1041 – 1072.
103. Олемской А.И., Ющенко О.В. Коллективное движение активных частиц // Известия ВУЗов. Физика. – 2004. – №3 – С. 72–78.
104. Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems //Rev.Mod.Phys. – 2001. – V.73. – P.1067–1141.
105. Nagatani T. Thermodynamic theory for jamming transition in traffic flow // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 4. – P. 4271 – 4276.
106. Mahnke R., Kaupužs J. Stochastic theory of freeway traffic //Phys. Rev. E. – 1999. – V. 59, № 1. – P. 117 – 125.
107. Chowdhury D., Santen L., Schadschneider A. Statistical physics of vehicular traffic and some related systems // Physics Reports. – 2000. – V. 329, №4–6. – P. 199 – 329.
108. Nagatani T. Traffic jams induced by fluctuation of a leading car // Phys. Rev. E. – 2000. – V. 61, № 4. – P. 3534 – 3540.
109. Ben-Naim E., Krapivsky P. L. Maxwell model of traffic flows //Phys. Rev. E. – 1999. – V. 59, № 1. – P. 88 – 96.

110. Neubert L., Lee H. Y., Schreckenberg M. Density waves and jamming transition in cellular automaton models for traffic flow //J. Phys. A. – 1999. – V.32. – P. 6517 – 6525.
111. Ван Кампен Н.Г. Стохастические процессы в физике и химии. – М.: Высшая школа, 1990. – 376 с.

Навчальне видання

Олемской Олександр Іванович
Ющенко Ольга Володимирівна

САМООРГАНІЗАЦІЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки О.В. Ющенко
Редактор Н.А. Гавриленко
Комп'ютерне верстання О.І. Олемського, О.В. Ющенко

Формат 60×84/16. Ум.друк.арк. 10,46. Обл.-вид.арк. 7,38.
Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м.Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.