Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

В. М. Ігнатенко,
В. Ф. Нефедченко

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З КВАНТОВОЇ ТА ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2018

УДК 539.1.073/.078(076.2)
І-26

Рецензенти:

Д. О. Харченко – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу моделювання радіаційних ефектів та мікроструктурних перетворень у конструкційних матеріалах Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми);

А. І. Салтикова – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики та методики навчання фізики Сумського державного педагогічного університету ім. А. С. Макаренка

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 5 від 8 лютого 2018 року)

Ігнатенко В. М.

І-26 Збірник задач з квантової та ядерної фізики : навчальний посібник / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – 224 с.

ISBN 978-966-657-722-4

Навчальний посібник містить теоретичний матеріал, зведення основних формул, питання з теоретичного матеріалу, приклади розв’язування задач, задачі для самостійного вивчення з квантової та ядерної фізики за розділами: «Атом водню в теорії Бора. Рентгенівські спектри», «Теорія де Бройля. Рівняння Шредінгера», «Елементи фізики твердого тіла», «Будова ядра атома. Радіоактивність. Ядерні реакції», «Поглинання радіоактивного випромінювання. Елементи дозиметрії. Елементарні частинки».

Посібник призначений для проведення практичних, індивідуальних занять та самостійної роботи з фізики.

Для студентів інженерно-технічних та педагогічних спеціальностей першого і другого рівнів закладів вищої освіти.

УДК 539.1.073/.078(076.2)

ISBN 978-966-657-722-4

ЗМІСТ

С.

ПЕРЕДМОВА……………………………………………………………..……. 5

РОЗДІЛ 1
АТОМ ВОДНЮ В ТЕОРІЇ БОРА. РЕНТГЕНІВСЬКІ СПЕКТРИ 7

Теоретичний матеріал…………………………………………………….…. 7

Зведення основних формул…………………………………………………. 7

Питання з теоретичного матеріалу…………………………………….... 10

Приклади розв'язування задач…………………………………………..... 11

Задачі для самостійного розв'язування……………………………….... 28

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ ДЕ БРОЙЛЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА…………….. 41

Теоретичний матеріал…………………………………………………..…. 41

Зведення основних формул…………………………………………………. 41

Питання з теоретичного матеріалу…………………………………………. 46

Приклади розв'язування задач…………………………………...……..... 48

Задачі для самостійного розв'язування……………………………..……. 82

РОЗДІЛ 3
ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА………..……………..…. 97

Теоретичний матеріал…………………………………..………………… 97

Зведення основних формул…………………………………………………. 97

Питання з теоретичного матеріалу……………………………………… 103

Приклади розв'язування задач…………………………………………….. 104

Задачі для самостійного розв’язування………………………………….. 122

РОЗДІЛ 4
БУДОВА ЯДРА АТОМА. РАДІОАКТИВНІСТЬ. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ…………………………………………………… 137

Теоретичний матеріал………………………………………………… 137

Зведення основних формул………………………………………….. 138

Питання з теоретичного матеріалу…………………..……………. 141

Приклади розв’язування задач…………………………..………….. 142

Задачі для самостійного розв’язування……………………………….. 159

РОЗДІЛ 5
ПОГЛИНАННЯ РАДІОАКТИВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ. ЕЛЕМЕНТИ ДОЗИМЕТРІЇ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ….. 175

Теоретичний матеріал………………………………………………… 175

Зведення основних формул………………………………………….. 175

Питання з теоретичного матеріалу……………………..…………. 181

Приклади розв’язування задач……………………………………….. 182

Задачі для самостійного розв’язування…………………………..….. 193

ДОДАТОК А…………………………………………………..……… 209

ДОДАТОК Б…………………………………………………..……… 215

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ………….………… 223

ПЕРЕДМОВА

Фізика є однією з тих наук, знання якої необхідне для успішного вивчення загальнонаукових та спеціальних дисциплін. Під час вивчення курсу фізики студенти повинні засвоїти основні закони й теорії, оволодіти необхідними прийомами розумової діяльності, важливою компонентою якої є вміння розв’язувати задачі з фізики.

Розв’язування задач є одним із найважливіших завдань усього процесу навчання фізики. Лекції створюють загальні контури теоретичного опису того чи іншого фізичного явища, у той час як конкретна задача наповнює закон певним фізичним змістом, наближуючи його до експерименту. У рамках навчального процесу в ЗВО такий посібник є складовою частиною методичного забезпечення організації як аудиторної, так і самостійної роботи студентів. Обмірковування фізичного змісту задач та запропонованих методів їх розв’язування не лише сприяє поглибленому розумінню модельних можливостей теорії, а й розвиває творчу та критичну активність розумової діяльності.

До навчального посібника входять задачі з прикладами розв’язування за розділами, що відповідають програмі курсу фізики для студентів інженерно-технічних та педагогічних спеціальностей першого та другого рівнів закладів вищої освіти. Він містить як оригінальні задачі, так і задачі з різних джерел.

Кожний розділ посібника містить п’ять частин: теоретичний матеріал, зведення основних формул, питання з теоретичного матеріалу, приклади розв’язування задач і задач для самостійного розв’язування з відповідями.

У посібнику вміщені два типи додатків: «математичний» та збірник фізичних констант. «Математичний» додаток містить основні математичні поняття і формули, до яких студент може звертатися під час роботи над усіма розділами посібника. Досвід викладання фізики свідчить, що такі додатки є необхідними, оскільки це дозволяє не відволікатися від фізичного змісту задачі та заощаджувати час під час її розв’язування.

Усі форми занять передбачають значну самостійну позааудиторну роботу студента.

На кожну годину аудиторних занять припадає не менше однієї години самостійної роботи студента, беручи до уваги, що внаслідок браку часу, на семінарах не вдається розглянути всі важливі типи задач та методи їх розв’язування.

Цей посібник дозволяє залучити такі не охоплені семінарами типи задач до кола обов'язкових подібно до вивчення теоретичного матеріалу, який не охоплений лекціями, але є частиною обов'язкової програми.

Посібник створено з таким розрахунком, щоб ним можна було користуватися не лише під час практичних, а й самостійних занять. Увесь матеріал курсу поділений на розділи. Аналіз усіх задач проводиться за єдиною схемою, причому кожний розділ можна вивчати незалежно від інших.

Рекомендується такий порядок вивчення кожного з розділів. У першому підрозділі «Теоретичний матеріал» наведений перелік теоретичних питань, які студент повинен вивчити для розв'язування задач даного розділу.

У другому підрозділі «Зведення основних формул» наведені формули, які студент повинен засвоїти для розв'язування задач розділу.

Потім автори рекомендують студентові проглянути та осмислити третій підрозділ «Приклади розв'язування задач». Під час розв'язування задач потрібно дотримуватися такого порядку:

1) прочитати умову задачі та спробувати зрозуміти її фізичний зміст;

2) записати коротку умову задачі з переведенням усіх одиниць у системні одиниці СІ;

3) спробувати самостійно розв'язати задачу, використовуючи знання відповідного розділу;

4) перевірити правильність розв'язування задачі, порівнюючи з розв'язанням, наведеним у тексті.

Підрозділ «Питання з теоретичного матеріалу» містить питання, які дозволяють студентові виконати самоконтроль, а викладачеві – контроль засвоєння теоретичного матеріалу. Цей розділ містить контрольні питання. Якщо виникають труднощі під час відповіді на певні контрольні питання, потрібно звернутися до відповідних розділів курсу фізики (конспекту лекцій, рекомендованих підручників).

П'ятий підрозділ «Задачі для самостійного розв'язування» містить задачі для самостійного розв'язування. Під час ретельного вивчення відповідного розділу фізики та опрацювання попередніх підрозділів посібника розв'язування задач цього розділу не повинно викликати труднощів. Для контролю правильності розв'язування задач наведені відповіді.

РОЗДІЛ 1
АТОМ ВОДНЮ В ТЕОРІЇ БОРА. РЕНТГЕНІВСЬКІ СПЕКТРИ

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

1 Будова атома водню.
2 Закономірності в атомних спектрах.
3 Серіальні формули.
4 Формула Бальмера.
5 Постулати Бора.
6 Схема енергетичних рівнів атома водню.
7 Рентгенівське випромінювання.
8 Гальмівне рентгенівське випромінювання.
9 Короткохвильова межа суцільного рентгенівського спектра.
10 Характеристичний рентгенівський спектр.
11 Закон Мозлі.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

1.1 Момент імпульсу електрона на стаціонарних орбітах атома Бора (принцип квантування орбіт)

$$L = m\mathrm{v}r = n\hbar \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

де m – маса електрона; r – радіус орбіти; v – швидкість електрона на орбіті; n – головне квантове число; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

1.2 Енергія фотона, що випромінює атом водню при переході з одного стаціонарного стану в інший,

$$W_{\Phi} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = W_m - W_n,$$

де ν – частота випромінювання; W_m і W_n – енергії атома в стаціонарних станах, з якого і на який переходить атом відповідно.

1.3 Енергія електрона, що знаходиться на *n*-й орбіті,

$$W_n = -\frac{hR}{n^2} = \frac{W_1}{n^2},$$

де $R = \dfrac{me^4}{64\varepsilon_0{}^2\pi^3\hbar^3} = 3,29\cdot 10^{15}\,c^{-1}$ – стала Рідберга; ε_0 – діелектрична стала.

1.4 Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

де R' – стала Рідберга $\left(R' = R/c = 1,097\cdot 10^7\ м^{-1}\right)$; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z = 1$ для водню).

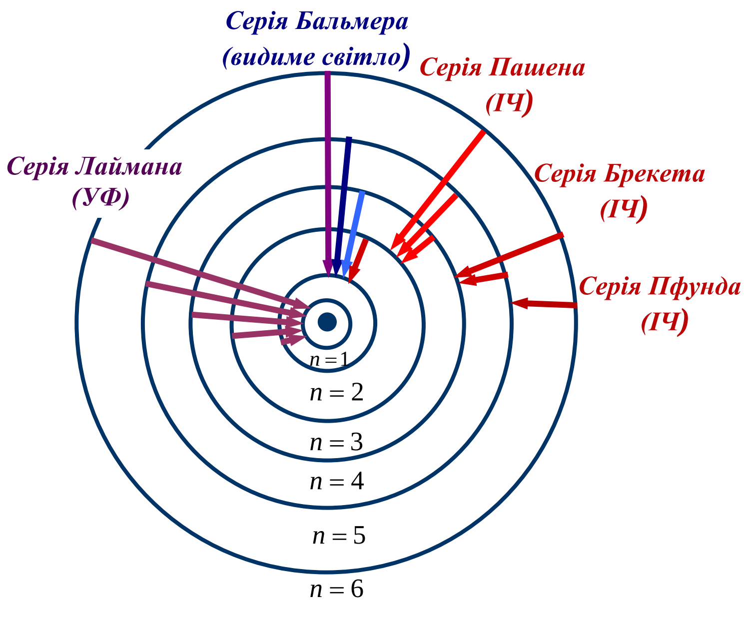


Рисунок 1.1 – До ілюстрації серіальної формули

1.5 Короткохвильова межа $\lambda_{\min}$ суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_K = \frac{hc}{eU},$$

де e – заряд електрона; U – різниця потенціалів, прикладена до рентгенівської трубки; h – стала Планка.

1.6 Закон Мозлі у загальному випадку

$$\sqrt{\omega} = C\left(Z - \sigma\right),$$

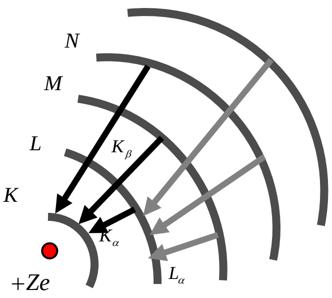


Рисунок 1.2 – До ілюстрації закону Мозлі

де ω – частота ліній рентгенівського спектра; Z – атомний номер елемента, що випромінює цей спектр; σ – стала екранування; C – стала.

Враховуючи, що стала C дорівнює $C = \sqrt{R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)}$, **закон Мозлі** в загальному випадку набере вигляду

$$\omega = R''\left(Z - \sigma\right)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

або $$\frac{1}{\lambda} = R'\left(Z - \sigma\right)^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

де R'' – стала Рідберга $\left(R'' = 2\pi R = 2{,}07 \cdot 10^{16}\ c^{-1}\right)$; n = 1, 2, 3, …; m = n + 1, n + 2,… – головні квантові числа.

Тоді

для ліній K_α (стала екранування $\sigma = 1$)

$$\omega_{K_\alpha} = R''\left(Z - 1\right)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) \quad \text{та} \quad \frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R'\left(Z - 1\right)^2;$$

для ліній K_β (стала екранування $\sigma = 1$)

$$\omega_{K_\beta} = R''\left(Z - 1\right)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}\right) \quad \text{або} \quad \frac{1}{\lambda_{K_\beta}} = \frac{8}{9} R'\left(Z - 1\right)^2;$$

для ліній L_α (стала екранування $\sigma = 7{,}5$)

$$\omega_{L_\alpha} = R\left(Z - 7{,}5\right)^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \quad \text{або} \quad \frac{1}{\lambda_{L_\alpha}} = \frac{5}{36}R'\left(Z - 7{,}5\right)^2.$$

1.7 Енергія фотона K_α -лінії рентгенівського випромінювання

$$W_{K_\alpha} = \hbar\omega = \frac{3}{4}W_i\left(Z - 1\right)^2,$$

де W_i – енергія іонізації атома водню.

ПИТАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

1 Сформулювати правило квантування моменту імпульсу електрона в атомі водню.

2 Пояснити за допомогою формули Бальмера лінійчастий спектр атома водню.

3 Стала Рідберга. Скільки сталих Рідберга Ви знаєте? Як вони пов’язані між собою?

4 Зобразити схему рівнів атома водню. Зазначити на ній переходи, що дають серії Лаймана, Бальмера, Пашена. Зазначити переходи, що відповідають головній лінії та короткохвильовій межі відповідних серій.

5 Як визначити перший потенціал збудження?

6 Пояснити, чому гальмівний рентгенівський спектр є суцільним.

7 Короткохвильова межа $\lambda_{\min}$ суцільного рентгенівського спектра.

8 Чому суцільний рентгенівський спектр має різку межу з боку коротких хвиль? Чим визначається її положення?

9 Пояснити, що таке K-, L-, M-серії рентгенівського характеристичного спектра.

10 Які лінії рентгенівського характеристичного спектра називаються K_α-, K_β-лініями?

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ПРИКЛАД 1.1

Визначити енергію електрона, що перебуває на другій орбіті атома водню.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W_n - ?$
$n = 2$

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти і швидкість v електрона на ній зв'язані співвідношенням

$$m\mathrm{v}r = n\hbar, \tag{1}$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – головне квантове число (n = 1, 2, 3, ...); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v. За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра та електроном надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \tag{2}$$

звідси

$$m\mathrm{v}^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо

$$\mathrm{v}_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \tag{4}$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \tag{5}$$

Енергія атома складається з кінетичної енергії електрона та енергії взаємодії електрона з ядром:

$$W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{6}$$

З використанням співвідношень (4) та (5) одержимо для енергії електрона на n-му рівні

$$W_n = \frac{1}{2}\frac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 n^2\hbar^2} - \frac{1}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2}\frac{me^4}{\hbar^2 n^2} = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 n^2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин визначимо

$$W_n = -\frac{1}{2}\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{\left(4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\right)^2 2^2\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2} = -5{,}47\cdot 10^{-19}\left(Дж\right) = -3{,}42\left(eB\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = \frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2} = \frac{кг\cdot Кл^4}{(Ф/м)^2\ (Дж\cdot \text{с})^2} = \frac{Кл^4\cdot кг\cdot м^2}{Ф^2\cdot Дж^2\cdot c^2} = \frac{Ф^4\cdot B^4\cdot H\cdot м}{Ф^2\cdot Дж^2} =$$

$$= \frac{Ф^2\cdot B^4}{Дж} = \frac{Кл^2 B^4}{B^2 Дж} = \frac{Кл^2 B^2}{Дж} = \frac{Дж^2}{Дж} = Дж.$$

Відповідь: $W_n = -5{,}47\cdot 10^{-19}\ Дж = -3{,}42\, eB.$

ПРИКЛАД 1.2

Розрахувати, користуючись теорією Бора, період обертання електрона в атомі водню, що перебуває у збудженому стані з головним квантовим числом $n = 2$.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$T - ?$
$n = 2$

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти і швидкість v електрона на ній пов’язані співвідношенням

$$m\text{v}r = n\hbar, \tag{1}$$

де m – маса електрона; n – головне квантове число $\left(n = 1,\ 2,\ 3,\ldots\right)$; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\text{v}^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \tag{2}$$

звідси

$$m\mathrm{v}^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо, що швидкість електрона на n-й орбіті дорівнює

$$\mathrm{v}_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \tag{4}$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \tag{5}$$

Період обертання електрона на орбіті визначається співвідношенням

$$T = \frac{2\pi r}{\mathrm{v}}. \tag{6}$$

Підставивши у вираз (6) значення v та r, із співвідношень (4) та (5) одержимо

$$T = \frac{2\pi 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2 \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}} = \frac{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}{me^4}. \tag{7}$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (7) одержимо

$$T = \frac{32\cdot(3{,}14)^3\cdot\left(8{,}85\cdot10^{-12}\right)^2\cdot\left(1{,}05\cdot10^{-34}\right)^3\cdot 2^3}{9{,}1\cdot10^{-31}\left(1{,}6\cdot10^{-19}\right)^4} = 1{,}21\cdot10^{-17}\,(c).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[T] = \frac{[\varepsilon_0]^2[\hbar]^3}{[m][e]^4} = \frac{\left(\textit{Ф}/\text{м}\right)^2\left(\textit{Дж}\cdot c\right)^3}{\textit{кг}\cdot\textit{Кл}^4} = \frac{\textit{Ф}^2\cdot\textit{Дж}^3 c^3}{\textit{Кл}^4\textit{кг}\cdot\textit{м}^2} = \frac{\textit{Кл}^2\textit{Дж}^3 c}{B^2\textit{Кл}^4 H\cdot\textit{м}} =$$

$$= \frac{\textit{Дж}^2\cdot c}{B^2\textit{Кл}^2} = \frac{\textit{Дж}^2\cdot c}{\textit{Дж}^2} = c.$$

Відповідь: $T = 1{,}21\cdot10^{-17}\,c$.

ПРИКЛАД 1.3

Скільки ліній спектра атома водню потрапляє у видиму область $\left(0,4\,мкм \le \lambda \le 0,76\,мкм\right)$? Визначити довжини цих хвиль.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$
$0,4\,мкм \le \lambda \le 0,76\,мкм,$ $R' = 1,097 \cdot 10^{7}\ м^{-1}$

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z = 1$ для водню); $n = 1,\ 2,\ 3, ...,\ k = n + 1;\ n + 2;\ ...$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера $\left(n = 2,\ k = 3;\ 4;\ 5; 6...\right)$. Довжини цих хвиль дорівнюють:

$$\frac{1}{\lambda_1} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{36}{5R'} = \frac{36}{5 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 6,56 \cdot 10^{-7}\left(м\right) = 0,656\left(мкм\right),$$

$\lambda_1 = 0,656\left(мкм\right)$ – червона лінія.

$$\frac{1}{\lambda_2} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{16}{3R'} = \frac{16}{3 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 4,86 \cdot 10^{-7}\left(м\right) = 0,486\left(мкм\right),$$

$\lambda_2 = 0,486\left(мкм\right)$ – блакитна лінія.

$$\frac{1}{\lambda_3} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{25}{21R'} = \frac{25}{21 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 4,34 \cdot 10^{-7}\left(м\right) = 0,434\left(мкм\right),$$

$\lambda_3 = 0,434\left(мкм\right)$ – фіолетова лінія.

$$\frac{1}{\lambda_4} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) \Rightarrow \lambda_4 = \frac{36}{8R'} = \frac{36}{8 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 4,1 \cdot 10^{-7}\left(м\right) = 0,41\left(мкм\right),$$

$\lambda_4 = 0,41\left(мкм\right)$ – фіолетова лінія.

$$\frac{1}{\lambda_5} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2}\right) \Rightarrow \lambda_5 = \frac{49 \cdot 4}{45R'} = \frac{49 \cdot 4}{45 \cdot 1,097 \cdot 10^7} = 3,9 \cdot 10^{-7}\left(м\right) = 0,39\left(мкм\right),$$

$\lambda_5 = 0,39\left(мкм\right) < 0,4\,мкм$ – ультрафіолетова лінія.

Відповідь: у видимій області спектра містяться чотири лінії серії Бальмера $\lambda_1 = 0,656\,мкм$ – червона лінія; $\lambda_2 = 0,486\,мкм$ – блакитна лінія; $\lambda_3 = 0,434\,мкм$ – фіолетова лінія; $\lambda_4 = 0,41\,мкм$ – фіолетова лінія.

ПРИКЛАД 1.4

Визначити найбільші та найменші довжини світлових хвиль, що випромінюються в серіях Лаймана, Бальмера та Пашена.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$
$R' = 1{,}097 \cdot 10^7\ м^{-1}$

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \tag{1}$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z = 1$ для водню); $n = 1,\ 2,\ 3, ...,\ k = n + 1;\ n + 2; ...$

З формули (1) знайдемо довжину хвилі

$$\lambda = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}.$$

У серії Лаймана переходи електрона здійснюються на першу орбіту з усіх інших, тобто $n = 1,\ \ k = 2, 3, 4, ..., \infty$. Отже, максимальна та мінімальна довжини хвиль визначаються таким чином:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R' \left(1 - \frac{1}{2^2} \right)} = \frac{4}{3R'} = \frac{4}{3 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 1{,}22 \cdot 10^{-7} \left(м \right) = 0{,}122 \left(мкм \right).$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R' \left(1 - \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{1}{R'} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7} = 9{,}1 \cdot 10^{-8} \left(м \right) = 0{,}091 \left(мкм \right).$$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера $\left(n = 2,\ k = 3;\ 4;\ 5; ...,\ \infty \right)$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = \frac{36}{5R'} = \frac{36}{5 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 6{,}56 \cdot 10^{-7} \left(м \right) = 0{,}656 \left(мкм \right).$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{4}{R'} = \frac{4}{1{,}097 \cdot 10^7} = 3{,}65 \cdot 10^{-7} \left(м \right) = 0{,}365 \left(мкм \right).$$

У серії Пашена перехід електрона відбувається на орбіту з головним квантовим числом $n = 3$, тоді $k = 4,5,6,...\infty$.

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = \frac{144}{7R'} = \frac{144}{7 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 1{,}875 \cdot 10^{-6} \left(м \right) = 1{,}875 \left(мкм \right).$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{9}{R'} = \frac{9}{1{,}097 \cdot 10^7} = 8{,}2 \cdot 10^{-7} \left(м \right) = 0{,}82 \left(мкм \right).$$

Відповідь: серія Лаймана $\lambda_{\max} = 0{,}122\ мкм$; $\lambda_{\min} = 0{,}091 мкм$.

Серія Бальмера $\lambda_{\max} = 0{,}656 мкм$; $\lambda_{\min} = 0{,}365 мкм$.

Серія Пашена $\lambda_{\max} = 1{,}875 мкм$; $\lambda_{\min} = 0{,}82 мкм$.

ПРИКЛАД 1.5

Визначити колову частоту ω обертання електрона на n-й коловій орбіті водневоподібного атома. Визначити цю величину для іона He^+ при $n = 2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$n = 2,$ $Z = 2$

Частоту обертання електрона на n-ій коловій орбіті водневоподібного атома визначимо за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{1}$$

де T – період обертання електрона. Він дорівнює

$$T = \frac{2\pi r_n}{\mathrm{v}_n}, \tag{2}$$

де v_n – швидкість електрона.

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти водневоподібного атома і швидкість v_n електрона на ній зв'язані співвідношенням

$$m\mathrm{v}_n r_n = n\hbar, \tag{3}$$

де m – маса електрона; n – головне квантове число $(n=1, 2, 3, \ldots)$; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r_n і v_n. За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра Ze та електроном e надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\mathrm{v}_n^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}, \tag{4}$$

звідси

$$m\mathrm{v}_n^2 r = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Поділимо (5) на (4) та одержимо

$$\mathrm{v}_n = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \tag{6}$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{mZe^2}. \tag{7}$$

Підставимо вирази (2), (6) і (7) у співвідношення (1) та одержимо

$$\omega = \frac{\mathrm{v}_n}{r_n} = \frac{mZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar} = \frac{mZ^2e^4}{\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2 n^3\hbar^3} = \frac{2Z^2}{n^3}R', \tag{1}$$

де $R' = \dfrac{me^4}{2\left(4\pi\varepsilon_0\right)^2\hbar^3}$ – стала Рідберга, вона дорівнює $R' = 2,07\cdot10^{16}\, c^{-1}$.

Для іона He^+ $(Z=2)$ при $n=2$ колова частота дорівнює

$$\omega = \frac{2Z^2}{n^3}R' = \frac{2\cdot2^2}{2^3}R' = R' \Rightarrow \omega = 2,07\cdot10^{16}\left(c^{-1}\right).$$

Відповідь: $\omega = 2,07\cdot10^{16}\, c^{-1}$.

ПРИКЛАД 1.6

Визначити, які спектральні лінії з'являються у видимій області спектра випромінювання атома водню під дією ультрафіолетових променів із довжиною хвилі $\lambda = 95\,нм$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda_n - ?$

$\lambda = 95\,нм = 9{,}5 \cdot 10^{-8}\,м,$
$Z = 1$

Енергія кванта світла $\varepsilon = hc/\lambda$ дорівнює різниці енергій збудженого та основного станів, тобто

$$W_n - W_1 = \varepsilon \;\Rightarrow\; W_n = \varepsilon + W_1. \qquad (1)$$

Енергія збудженого стану дорівнює

$$W_n = \frac{W_1}{n^2},\ \text{звідси}\ n = \sqrt{\frac{W_1}{W_n}} = \sqrt{\frac{W_1}{\varepsilon + W_1}}. \qquad (2)$$

Енергія кванта світла дорівнює

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{9{,}5 \cdot 10^{-8}} = 20{,}9 \cdot 10^{-19}\,(Дж) = 13{,}08\,(еВ).$$

Енергія електрона в основному стані дорівнює

$$W_1 = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 \hbar^2} = -13{,}6\,(еВ).$$

Тоді номер збудженого стану

$$n = \sqrt{\frac{-13{,}6}{13{,}08 - 13{,}6_1}} = 5. \qquad (4)$$

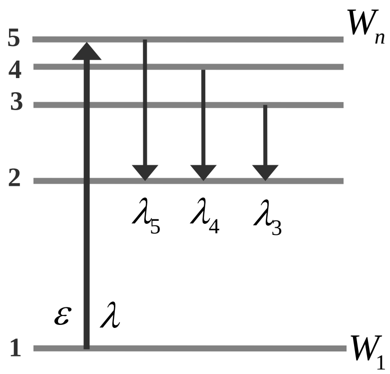


Рисунок 6.3 – До задачі 6.6

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається атомом водню при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (5)$$

де R' – стала Рідберга $\left(R' = R/c = 1{,}097 \cdot 10^{7}\,м^{-1}\right)$.

Для видимої області спектра $m = 2$, тоді можна застосувати формулу Бальмера

$$\frac{1}{\lambda}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right). \qquad (6)$$

У нашому випадку квантове число n може набувати значень $n=5$, $n=4$ та $n=3$, тоді

$$\frac{1}{\lambda_5}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right) \Rightarrow \lambda_5=\frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right)},$$

$$\frac{1}{\lambda_4}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_4=\frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)},$$

$$\frac{1}{\lambda_3}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow \lambda_3=\frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)}.$$

Розрахунки дають

$$\lambda_5=\frac{1}{3,29\cdot10^{15}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right)}=434\cdot10^{-9}\left(м\right)=434\left(нм\right),$$

$$\lambda_4=\frac{1}{3,29\cdot10^{15}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)}=486\cdot10^{-9}\left(м\right)=486\left(нм\right),$$

$$\lambda_3=\frac{1}{3,29\cdot10^{15}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)}=656\cdot10^{-9}\left(м\right)=656\left(нм\right).$$

Відповідь: $\lambda_3=656\,нм$, $\lambda_4=486\,нм$, $\lambda_5=434\,нм$.

ПРИКЛАД 1.7

Електрон в іонізованому атомі гелію перейшов із п’ятого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, що при цьому випромінюється.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$W - ?$
$n = 2,$ $m = 5$

Для визначення енергії фотона скористаємося серіальною формулою для воднеподібних іонів

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{1}$$

де λ – довжина хвилі фотона; R – стала Рідберга; z – заряд ядра у відносних одиницях (при $Z = 1$ формула набирає вигляду, що є характерним для водню); n – номер орбіти, на яку перейшов електрон; m – номер орбіти, з якої перейшов електрон (n і m – головні квантові числа).

Енергія фотона W визначається співвідношенням

$$W = \frac{hc}{\lambda}.$$

Тому, помноживши обидві частини рівняння (1) на hc, одержимо вираз для енергії фотона у вигляді

$$W = Z^2 hcR\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Оскільки всі величини у співвідношенні відомі, проведемо розрахунок W:

$$W = 1{,}1 \cdot 10^7 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) =$$
$$= 1{,}83 \cdot 10^{-18}\left(Дж\right) = 11{,}48\left(еВ\right).$$

Виконаємо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = [R][h][c] = м^{-1} \cdot Дж \cdot с \cdot м/\text{с} = Дж.$$

Відповідь: $W = 1{,}83 \cdot 10^{-18}\ Дж = 11{,}48 еВ$.

ПРИКЛАД 1.8

Фотон вибиває з атома водню, який перебуває в основному стані, електрон із кінетичною енергією $W_K = 10\,eB$. Визначити енергію W цього фотона.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$
$W_K = 10\,eB$

Енергія фотона витрачається на іонізацію атома водню і надання електрону кінетичної енергії:

$$W = W_K + W_i. \tag{1}$$

Енергія іонізації атома водню дорівнює

$$W_i = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \tag{2}$$

де λ знайдемо застосувавши серіальну формулу та врахувавши, що відбувається перехід електрона між основним станом $n = 1$ і рівнем вакууму $m = \infty$:

$$\frac{1}{\lambda} = R'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \tag{3}$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра атома водню; n і m – головні квантові числа.

Підставивши співвідношення (3) у (4), одержимо

$$W_i = hcR'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \tag{4}$$

Тепер із виразів (1) (4) знайдемо енергію фотона:

$$W = W_K + hcR'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$W = 10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} + 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{7} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = 2{,}35\left(\textit{Дж}\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = [W_k] + [R][h][c] = \textit{Дж} + \textit{м}^{-1} \cdot \textit{Дж} \cdot \textit{с} \cdot \textit{м}/\text{с} = \textit{Дж}.$$

Відповідь: $W = 2{,}35\,\textit{Дж}$.

ПРИКЛАД 1.9

Позитроній – це атомоподібна система, яка містить позитрон і електрон, що обертається навколо загального центра мас. Визначити мінімальні розміри подібної системи в рамках теорії Бора.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$d_{\min} - ?$

$\left|e^+\right| = \left|e^-\right| = \left|e\right| = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл,$

$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ Ф/м,$

$h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ Дж/с,$

$m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ кг$

Застосуємо правило квантування орбіт (другий постулат Бора) до позитронію

$$\left(m_{e^+}\mathrm{v}r\right)_+ + \left(m_{e^-}\mathrm{v}r\right)_- = n\hbar, \tag{1}$$

де $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

Оскільки маси електрона і позитрона однакові $m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$, то

$$2m_e\mathrm{v}r = n\hbar. \tag{2}$$

Сила Кулона надає електрону доцентрового прискорення навколо загального центра мас, тобто

$$\frac{m_e\mathrm{v}^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\left(2r\right)^2} \Rightarrow 2m_e\mathrm{v}^2 r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}, \tag{3}$$

де e – заряд електрона.

Поділимо рівняння (3) на рівняння (2) та одержимо вираз для швидкості електрона

$$\mathrm{v} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n\hbar}, \tag{4}$$

який підставимо у рівняння (2) та визначимо вираз для радіусів борівських орбіт позитронію:

$$2m_e\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n\hbar}r = n\hbar \Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e e^2}. \tag{5}$$

Розміри позитронію будуть мінімальними за умови $n = 1$. З урахуванням, що $\hbar = h/2\pi$, одержимо для мінімального радіуса вираз

$$r_{\min} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}, \tag{6}$$

тоді мінімальний діаметр позитронію дорівнює

$$d_{\min} = 2r_{\min} = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}. \tag{7}$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин, виконаємо розрахунки та одержимо

$$d_{\min} = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 6,63^2 \cdot 10^{-68}}{3,14 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6^2 \cdot 10^{-38}} = 1,06 \cdot 10^{-10}\left(м\right) = 106\left(пм\right).$$

Відповідь: $d_{\min} = 106\,пм$.

ПРИКЛАД 1.10

Визначити швидкість v електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі в суцільному спектрі рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda_{\min} = 1\,нм$.

v – ?
$\lambda_{\min} = 1\,нм = 10^{-9}\,м$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Скористаємося формулою для короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \tag{1}$$

де U – різниця потенціалів, прикладена до рентгенівської трубки.
Тоді

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{\min}}. \tag{2}$$

Прискорювальна різниця потенціалів, прикладена до трубки, надає електрону кінетичної енергії

$$eU = \frac{m\text{v}^2}{2}. \tag{3}$$

З виразів (2) і (3) одержимо формулу для швидкості

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_{\min}}}.$$

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-9}}} = 2,08 \cdot 10^{7} \left(м/с \right).$$

Одержаний вираз свідчить, що електрони, які падають на антикатод, є нерелятивістськими.

Відповідь: $\mathrm{v} = 2,08 \cdot 10^{7}\ м/с$.

ПРИКЛАД 1.11

Визначити довжину хвилі λ_{K_α} та енергію W_{K_α} фотона K_α-лінії рентгенівського спектра, що випромінюється ренієм $\left(Z = 75 \right)$ при бомбардуванні його швидкими електронами.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$\lambda_{K_\alpha} - ?\quad W_{K_\alpha} - ?$
$Z = 75$

При бомбардуванні ренію швидкими електронами виникає рентгенівське випромінювання, що має лінійчастий спектр. Ці електрони проникають усередину електронної оболонки атома та вибивають електрони, які належать до глибинних електронних оболонок. Найближча до ядра електронна оболонка (K-оболонка) має два електрони. Якщо один із цих електронів виявляється вибитим за межі атома, то на вільне місце переходить електрон з оболонки, що лежить вище $\left(L,\ M,\ N \right)$. При цьому виникає відповідна лінія K -серії. При переході електрона з L-оболонки на K-оболонку випромінюється найінтенсивніша K_α-лінія рентгенівського спектра.

Довжина хвилі цієї лінії визначається за законом Мозлі для ліній K_α:

$$\omega_{K_\alpha} = R' \left(Z - 1 \right)^2 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{3}{4} R' \left(Z - 1 \right)^2.$$

Ураховуючи, що $\omega = 2\pi c / \lambda$, одержимо

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{3}{4} R \left(Z - 1 \right)^2.$$

Із цього співвідношення довжина хвилі дорівнює

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{3R\left(Z-1\right)^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в останнє співвідношення одержимо відповідь

$$\lambda_{K_\alpha} = \frac{4}{31,097\cdot 10^7\left(75-1\right)^2} = 2,2\cdot 10^{-11}\left(м\right).$$

Знаючи довжину хвилі, визначимо енергію фотона за виразом

$$W_{K_\alpha} = \frac{hc}{\lambda}.$$

Після підставлення числових значень величин визначимо енергію фотона

$$W_{K_\alpha} = \frac{2\cdot 3,14\cdot 6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{2,2\cdot 10^{-11}} = 5,64\cdot 10^{-14}\left(Дж\right).$$

Виконаємо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W_{K_\alpha}] = \frac{[\hbar][c]}{[\lambda]} = \frac{Дж\cdot с\cdot м/\text{с}}{м} = Дж.$$

Відповідь: $\lambda_{K_\alpha} = 2,2\cdot 10^{-11}\ м$; $W_{K_\alpha} = 5,64\cdot 10^{-14}\ Дж$.

ПРИКЛАД 1.12

Яку найменшу різницю потенціалів потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб у спектрі випромінювання вольфраму $\left(Z=74\right)$ спостерігалися всі лінії K -серії?

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$U_{\min}-?$
$Z=74$

Коротнохвильова межа суцільного рентгенівського спектра пов’язана з різницею потенціалів співвідношенням

$$\lambda = \frac{hc}{eU}, \tag{1}$$

де e – заряд електрона; h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі.

Довжина хвилі рентгенівського випромінювання визначається за формулою Мозлі

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(Z-\sigma\right)^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right).$$

Лінії K-серії утворюються при переході на перший енергетичний рівень, тобто $n=1$, а $k=\infty$. Тоді

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(Z-\sigma\right)^2.$$

З іншого боку,

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{eU}{hc}\ \Rightarrow\ R\left(Z-\sigma\right)^2=\frac{eU}{hc}\Rightarrow U=\frac{R\left(Z-\sigma\right)^2 hc}{e}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та визначимо мінімальну різницю потенціалів:

$$U_{\min}=\frac{1{,}097\cdot 10^7\cdot 73^2\cdot 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^8}{1{,}6\cdot 10^{-19}}=73\cdot 10^3\left(B\right)=73\left(\kappa B\right).$$

Відповідь: $U_{\min}\approx 73\kappa B$.

ПРИКЛАД 1.13

Довжина хвилі L_α-лінії вольфраму $\left(Z=74\right)$ $\lambda_W=0{,}148\,нм$. Визначити сталу екранування σ.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$\sigma-?$
$\lambda_W=0{,}148\,нм=1{,}48\cdot 10^{-10}\,м$, $Z=74$

Відповідно до закону Мозлі

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(Z-\sigma\right)^2\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right),\qquad (1)$$

де n і m – енергетичні рівні, між якими відбувається перехід електрона.

Для вольфраму $Z=74$. Для L-серії $n=2$. Для L_α-лінії $k=3$.

Із закону Мозлі (1) знаходимо

$$\frac{1}{\lambda R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)}=\left(Z-\sigma\right)^2\ \Rightarrow\ \sigma=Z-\left[\lambda R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)\right]^{-1/2}.$$

Проведемо розрахунки

$$\sigma = 74 - \left[1,48\cdot 10^{-10}\cdot 1,097\cdot 10^{7}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\right]^{-1/2} = 7,4 .$$

Відповідь: $\sigma = 7,4$.

ПРИКЛАД 1.14

Гранична довжина хвилі K-серії характеристичного рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda = 0,11284\,нм$. Визначити, який це елемент.

$Z - ?$
$\lambda = 0,1284\,нм = 1,284\cdot 10^{-10}\,м,$ $\sigma = 1,$ $n = 1,$ $m = \infty$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довжина хвилі рентгенівського випромінювання визначається законом Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(Z-\sigma\right)^{2}\left(\frac{1}{n^{2}}-\frac{1}{m^{2}}\right),$$

де n і m – енергетичні рівні, між якими відбувається перехід електрона.

Фотон із граничною довжиною хвилі в K-серії випромінюється при переході з рівня $m = \infty$ на рівень $n = 1$.

Тоді

$$\left(Z-\sigma\right)^{2} = \frac{1}{\lambda R\left(\frac{1}{n^{2}}-\frac{1}{m^{2}}\right)} = \frac{1}{\lambda R\left(1-\frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{\lambda R},$$

$$Z-\sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} + a .$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз:

$$Z = \sqrt{\frac{1}{1,284\cdot 10^{-10}\cdot 1,097\cdot 10^{7}}} + 1 \approx 27 .$$

Визначили, що порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва дорівнює $Z = 27$. Цим елементом є кобальт.

Відповідь: $Z = 27$ – кобальт.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1.1 Використовуючи постулати Бора, одержати формули: 1) для швидкості руху електрона по орбіті в атомі водню. Визначити цю швидкість для двох перших електронних орбіт (v_1 і v_2); 2) для радіусів дозволених електронних орбіт в атомі водню. Визначити ці радіуси для двох перших електронних орбіт (r_1 і r_2).

Відповідь: 1) $v_1 = 2{,}19 \cdot 10^6\, м/с$; $v_2 = 1{,}09 \cdot 10^6\, м/с$. 2) $r_1 = 52{,}5\, пм$; $r_2 = 210{,}3\, пм$.

1.2 Знайти: 1) період обертання електрона на першій борівській орбіті в атомі водню; 2) його кутову швидкість.

Відповідь: $T_{об} = 1{,}43 \cdot 10^{-16}$ *с*; $\omega = 4{,}4 \cdot 10^{16}$ *рад/с*.

1.3 Визначити силу кулонівського притягання між електроном, що перебуває на першій орбіті атома водню, F_1 та ядром. У скільки разів ця сила більша за силу гравітаційного притягання $F_{гр}$ між електроном та протоном на тій самій відстані?

Відповідь: $F_1 = 82{,}4\, нН$; $F_1 / F_{гр} = 2 \cdot 10^{39}$.

1.4 Визначити потенціальну $W_П$, кінетичну $W_К$ і повну W енергію електрона, який перебуває на першій орбіті атома водню.

Відповідь: $W_П = -27{,}2\, еВ$; $W_К = 13{,}6\, еВ$; $W = -13{,}6\, еВ$.

1.5 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення повних енергій.

Відповідь: $W_2 / W_1 = 4$.

1.6 Визначити для першої і другої орбіт атома водню значення сили кулонівського притягання та напруженість електричного поля.

Відповідь: 1) $F_1 = 81{,}9\, нН$; $E_1 = 512\, ГВ/м$; 2) $F_2 = 5{,}12\, нН$; $E_2 = 32{,}1\, ГВ/м$.

1.7 Радіус першої орбіти в атомі водню $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}\, м$. Визначити напруженість E електричного поля ядра на цій відстані та кінетичну енергію $W_К$ електрона на цій орбіті.

Відповідь: $E = 5{,}1 \cdot 10^{11}\, В \cdot м$; $W_К = 13{,}6\, еВ$.

1.8 Яку мінімальну енергію потрібно надати електрону в атомі водню, щоб перевести його з основного стану в перший збуджений?

Відповідь: $W_{\min} = 10{,}2\, еВ$.

1.9 Визначити довжину хвилі кванта, що випромінюється атомом водню при переході з одного енергетичного рівня на інший, якщо при цьому енергія атома зменшилася на $10,2\,eB$?

Відповідь: $\lambda = 0,12\,нм$.

1.10 Скориставшись теорією Бора, визначити для електрона, що перебуває на першій і другій орбітах в атомі водню, відношення магнітного моменту p_m електрона до механічного L.

Відповідь: $p_m / L = 8,79 \cdot 10^{10}\,Кл/кг$.

1.11 Обчислити індукцію магнітного поля в центрі атома водню, обумовленого рухом електрона по першій борівській орбіті.

Відповідь: $B = 12,5\,Тл$.

1.12 У скільки разів збільшиться радіус орбіти електрона в атомі водню, що перебуває в основному стані, при збудженні його квантом з енергією $W = 12,09\,eB$?

Відповідь: $r_n / r_1 = 9$.

1.13 При переході електрона в атомі водню з однієї орбіти на іншу випромінюються фотони, що відповідають довжині хвилі $\lambda = 652\,нм$ (червона лінія). Яку енергію ΔW втрачає при цьому атом водню?

Відповідь: $\Delta W = 1,9\,eB$.

1.14 Які спектральні лінії виникають при збудженні атомарного водню електронами з енергією $W = 12,5\,eB$?

Відповідь: $\lambda_1 = 102,6\,нм$; $\lambda_2 = 656\,нм$; $\lambda_3 = 121,6\,нм$.

1.15 Які спектральні лінії виникають при збудженні атомарного водню електронами з енергією $W = 14\,eB$?

Відповідь: усі лінії лінійчастого спектра водню.

1.16 Атом водню випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 4,86 \cdot 10^{-7}\,м$. На скільки змінилась енергія електрона в атомі?

Відповідь: $\Delta W = 2,56\,eB$.

1.17 Перехід електрона в атомі водню з n-ї на k-ту орбіту $(k = 1)$ супроводжується випромінюванням фотона з довжиною хвилі $\lambda = 102,6\,нм$. Знайти радіус n-ї орбіти.

Відповідь: $r = 477\,пм$.

1.18 Яку роботу необхідно виконати, щоб видалити електрон із другої орбіти атома водню за межі притягання його ядром?

Відповідь: $A = 3,4eB$.

1.19 Атом водню в основному стані поглинув квант світла з довжиною хвилі $\lambda = 121,5нм$. Визначити радіус орбіти збудженого атома водню. Радіус орбіти електрона в атомі водню, який перебуває в основному стані, дорівнює $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11}\ м$.

Відповідь: $r = 2,12 \cdot 10^{-10}\ м$.

ФОРМУЛА БАЛЬМЕРА

1.20 Визначити довжину хвилі спектральної лінії, що відповідає переходу електрона в атомі водню із шостої орбіти на другу.

Відповідь: $\lambda = 4,1 \cdot 10^{-7}\ м$.

1.21 У яких межах мають міститися довжини хвиль монохроматичного світла, щоб при збудженні атома водню квантами світла радіус орбіти електрона збільшився у 9 разів?

Відповідь: $97,2нм < \lambda \le 102,5нм$.

1.22 Скільки ліній спектра атома водню потрапляє у видиму область $\left(0,4мкм \le \lambda \le 0,76мкм\right)$? Визначити довжини цих хвиль.

Відповідь: $\lambda_1 = 0,656мкм$ – червона лінія; $\lambda_2 = 0,486мкм$ – блакитна лінія; $\lambda_3 = 0,434мкм$ – фіолетова лінія; $\lambda_4 = 0,41мкм$ – фіолетова лінія.

1.23 Знайти найменшу і найбільшу довжини хвиль спектральних ліній водню у видимій області спектра.

Відповідь: $\lambda_{\max} = 656нм$; $\lambda_{\min} = 656нм$.

1.24 Знайти найменшу і найбільшу довжини хвиль спектральних ліній водню: 1) серії Лаймана; 2) серії Пфунда.

Відповідь: 1) $\lambda_{\max} = 122нм$; $\lambda_{\min} = 91нм$; 2) $\lambda_{\max} = 7,46мкм$; $\lambda_{\min} = 2,28мкм$.

1.25 Знайти найменшу і найбільшу довжини хвиль спектральних ліній водню: 1) серії Пашена; 2) серії Брекета.

Відповідь: 1) $\lambda_{\max} = 1870нм$; $\lambda_{\min} = 818нм$; 2) $\lambda_{\max} = 4040нм$; $\lambda_{\min} = 1455нм$.

1.26 Довести, що частота, яка випромінюється при переході з $(n+1)$-ї на n-ту борівську орбіту, прямує при $n \to \infty$ до частоти обертання електрона на n-й орбіті.

1.27 Визначити довжину хвилі перших трьох ліній серії Бальмера. Стала Рідберга для водню дорівнює $R = 109677,58\,см^{-1}$.

Відповідь: $\lambda_1 = 656,3\,нм$; $\lambda_2 = 486,1\,нм$; $\lambda_3 = 434\,нм$.

1.28 Визначити довжини хвиль перших трьох ліній: 1) серії Лаймана; 2) серії Пашена.

Відповідь: 1) $\lambda_1 = 121,6\,нм$; $\lambda_2 = 102,6\,нм$; $\lambda_3 = 97,25\,нм$;
2) $\lambda_1 = 1875,6\,нм$; $\lambda_2 = 1282,2\,нм$; $\lambda_3 = 1094,1\,нм$.

1.29 Визначити довжини хвиль перших трьох ліній: 1) серії Брекета; 2) серії Пфунда.

Відповідь: 1) $\lambda_1 = 4,052\,мкм$; $\lambda_2 = 2,63\,мкм$; $\lambda_3 = 2,17\,мкм$;
2) $\lambda_1 = 7,46\,мкм$; $\lambda_2 = 4,65\,мкм$; $\lambda_3 = 3,74\,мкм$.

1.30 Визначити енергію атома водню в основному стані W_1 та його потенціал іонізації U_i.

Відповідь: $W_1 = -13,5\,еВ$; $U_i = 13,5\,В$.

1.31 Чи буде атом водню поглинати випромінювання з частотою $\nu = 2R'c$? (R' – стала Рідберга; c – швидкість світла у вакуумі).

Відповідь: поглинання частоти $\nu = 2R'c$ відбувається та супроводжується іонізацією атома.

1.32 Визначити енергію, яку потрібно надати атому водню, щоб його серія Бальмера містила лише одну спектральну лінію.

Відповідь: $1,89\,еВ \le W < 2,56\,еВ$.

1.33 Які спектральні лінії з'являться у спектрі атомарного водню при його опроміненні ультрафіолетовим світлом із довжиною хвилі $\lambda = 100\,нм$.

Відповідь: $\lambda_1 = 121,6\,нм$; $\lambda_2 = 102,6\,нм$; $\lambda_3 = 656\,нм$.

1.34 Визначити, які спектральні лінії з'являються у видимій області спектра випромінювання атома водню під дією ультрафіолетових променів із довжиною хвилі $\lambda = 95\,нм$.

Відповідь: $\lambda_1 = 656\,нм$, $\lambda_2 = 486\,нм$, $\lambda_3 = 434\,нм$.

1.35 Фотон з енергією $\varepsilon = 12{,}12 eB$ поглинається атомом водню, що перебуває в основному стані, та переводить атом у збуджений стан. Визначити головне квантове число цього стану.

Відповідь: $n = 3$.

1.36 Визначити енергію $W_Ф$ (в eB) та довжину хвилі λ квантів, що відповідають головній лінії: 1) серії Лаймана; 2) серії Бальмера атома водню.

Відповідь: 1) $W_Ф = 10{,}2 eB$; $\lambda = 122 нм$; 2) $W_Ф = 1{,}89 eB$; $\lambda = 658 нм$.

1.37 Визначити енергію $W_Ф$ (в eB) та довжину хвилі λ квантів, що відповідають головній лінії: 1) серії Пашена; 2) серії Пфунда атома водню.

Відповідь: 1) $W_Ф = 0{,}66 eB$; $\lambda = 1884 нм$; 2) $W_Ф = 0{,}167 eB$; $\lambda = 7444 нм$.

1.38 Визначити енергію $W_Ф$ (в eB) та довжину хвилі λ квантів, що відповідають головній лінії серії Брекета атома водню.

Відповідь: $W_Ф = 0{,}307 eB$; $\lambda = 4051 нм$.

1.39 Атомарний водень, збуджений світлом певної довжини хвилі, при переході в основний стан випромінює лише три спектральні лінії. Визначити довжини хвиль цих ліній. До яких серій вони належать?

Відповідь: $\lambda_1 = 122 нм$; $\lambda_2 = 103 нм$ – серія Лаймана;
$\lambda_3 = 656 нм$ – серія Бальмера.

1.40 Визначити кількість N спектральних ліній, що містяться в спектрі атомарного водню, атоми якого при збудженні перейшли із основного стану на n-й енергетичний рівень.

Відповідь: $N = n(n-1)/2$.

1.41 Визначити найменші номери рівнів атома водню, між якими можливі переходи, що супроводжуються випромінюванням радіохвиль із довжинами 1, 10, 100 і 1000 см.

Відповідь: між рівнями сусідніми з $n = 60,\ n = 130,\ n = 280,\ n = 600$.

1.42 Визначити розмір атома, який перебуває на рівні з головним квантовим числом $n = 100$.

Відповідь: $a_{100} \sim 1 мкм$.

ПОТЕНЦІАЛ ІОНІЗАЦІЇ

1.43 Визначити перший потенціал U_1 збудження атома водню.

Відповідь: $U_1 = 10,2\,B$.

1.44 Перший потенціал збудження атома водню дорівнює $U_1 = 10,2\,B$. За якої температури T середня кінетична енергія атомів водню дорівнює енергії збудження?

Відповідь: $T = 7,88 \cdot 10^4 K$.

1.45 Визначити перший потенціал U_1 збудження атома водню з енергії іонізації атома водню $W_i = 13,6\ eB$.

Відповідь: $U_1 = 10,2\,B$.

1.46 Визначити роботу, яку потрібно виконати, щоб видалити електрон із другої борівської орбіти за межі його притягання ядром.

Відповідь: $A = 3,4 eB$.

1.47 Фотон з енергією $W = 17,7 eB$ вибиває електрон з основного стану атома водню. Визначити швидкість електрона за межами атома.

Відповідь: $\mathrm{v} = 1,2 Мм/c$.

1.48 З якою мінімальною кінетичною енергією повинен рухатись атом водню, щоб при непружному лобовому зіткненні з іншим атомом водню, який перебуває у спокої, один із них випустив би фотон? Припустимо, що до зіткнення обидва атоми перебувають в основному стані.

Відповідь: $W_{\min} = 20,5 eB$.

ВОДНЕВОПОДІБНИЙ АТОМ

1.49 Знайти: 1) радіус першої борівської електронної орбіти для іонізованого атома гелію; 2) швидкість електрона на ній.

Відповідь: $r_1 = 26,3 пм;\ \mathrm{v}_1 = 4,38 Мм/c$.

1.50 Визначити для водневоподібного атома радіус n-ї борівської орбіти та швидкість електрона на ній. Знайти ці величини для першої борівської орбіти іона Li^{++}.

Відповідь: $r_1 = 17,5 пм$; $\mathrm{v}_1 = 6,57 Мм/c$.

1.51 Визначити енергію основного стану W_1, $еВ$ і потенціал іонізації U_i, $В$ іона He^+.

Відповідь: $W_1 = -54,4\,еВ$; $U_i = 40,8\,В$.

1.52 Визначити енергію основного стану W_1, $еВ$ і потенціал іонізації U_i, $В$ іона Li^{++}.

Відповідь: $W_1 = -122\,еВ$; $U_i = 92\,В$.

1.53 Підрахувати довжину хвилі λ, яку випромінює іон гелію He^+ при переході з другого енергетичного рівня на перший. Зробити такий самий підрахунок для іона літію Li^{++}.

Відповідь: $\lambda_{He} = 30,5\,нм$; $\lambda_{Li} = 13,5\,нм$.

1.54 Визначити частоту світла, що випромінюється двократно іонізованим атомом літію при переході електрона на рівень із головним квантовим числом $n = 2$, якщо радіус орбіти електрона змінився у 9 разів.

Відповідь: $\nu = 6,58 \cdot 10^{15}\,Гц$.

1.55 Визначити найменшу енергію $W_{\min}$, яку потрібно надати в основному стані тричі іонізованому атому берилію, щоб збудити повний спектр цього атома.

Відповідь: $W_{\min} = -218\,еВ$.

1.56 Позитроній – це атомоподібна система, яка містить позитрон та електрон, що обертається навколо загального центра мас. Визначити мінімальні розміри подібної системи в рамках теорії Бора.

Відповідь: $d_{\min} = 106\,пм$.

1.57 Від'ємні мюони можуть захоплюватись атомом та заміщувати в ньому електрони електронної оболонки. На практиці може заміщуватися лише один електрон. Отримані внаслідок подібної заміни атоми називаються мезоатомами. Маса мюона $m_\mu = 207\,m_e$. Визначити радіус першої борівської орбіти $a_{0\mu}$ в мезоатомі та порівняти його з аналогічною орбітою у водневоподібному a_1 атомі.

Відповідь: $a_{0\mu} = \left(2,56 \cdot 10^{-13} / Z\right) м$; $a_1 / a_{0\mu} = 207$.

ГАЛЬМІВНИЙ РЕНТГЕНІВСЬКИЙ СПЕКТР

1.58 Визначити короткохвильову межу $\lambda_{\min}$ суцільного спектра рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює під напругою $U = 30\,кВ$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 41\,пм$.

1.59 Визначити короткохвильову межу λ_{min} суцільного спектра рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює під напругою $U = 50\,кВ$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 24,9\,пм$.

1.60 Визначити мінімальну довжину хвилі $\lambda_{\min}$ гальмівного рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює під напругою $U = 75\,кВ$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 16,6\,пм$.

1.61 Визначити найменшу довжину хвилі $\lambda_{\min}$ гальмівного рентгенівського випромінювання, якщо рентгенівська трубка працює під напругою $U = 150\,кВ$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 8,29\,пм$.

1.62 Визначити швидкість v електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі в суцільному спектрі рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda_{\min} = 1\,нм$.

Відповідь: $\mathrm{v} = 2,08 \cdot 10^7\ м/с$.

1.63 Збільшення напруги на рентгенівській трубці вдвічі зменшує короткохвильову межу суцільного спектра на $\Delta\lambda = 25\,пм$. Визначити початкове значення напруги U_1.

Відповідь: $U_1 = 25\,кВ$.

1.64 При збільшенні напруги на рентгенівській трубці у $\eta = 1,5$ раза довжина хвилі короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра змінилася на $\Delta\lambda = 26\,пм$. Визначити початкове значення напруги U_1.

Відповідь: $U_1 = 16,7\,кВ$.

1.65 Довжина хвилі γ-випромінювання радію дорівнює $\lambda = 0,0016\,\textit{пм}$. Яку різницю потенціалів потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб одержати рентгенівські промені з цією довжиною хвилі?

Відповідь: $U_{\min} = 770\,\textit{кВ}$.

1.66 Антикатод рентгенівської трубки бомбардується електронами, швидкість яких $\mathrm{v} = 100\,\textit{Мм/с}$. Визначити максимальну частоту випромінювання в суцільному рентгенівському спектрі з урахуванням залежності маси електрона від швидкості його руху.

Відповідь: $\nu = 1,6 \cdot 10^{23}\,\textit{с}^{-1}$.

1.67 Найменша довжина хвилі рентгенівських променів, отриманих від трубки, що працює при напрузі $U = 40\,\textit{кВ}$, дорівнює $\lambda = 31\,\textit{пм}$. Обчислити за цими даними сталу Планка.

Відповідь: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\,\textit{Дж} \cdot \textit{с}$.

1.68 Мінімальна довжина хвилі рентгенівського випромінювання, отриманого від рентгенівської трубки, яка працює при напрузі $U = 60\,\textit{кВ}$, дорівнює $\lambda = 20,7\,\textit{пм}$. Обчислити за цими даними сталу Планка.

Відповідь: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}\,\textit{Дж} \cdot \textit{с}$.

1.69 Визначити довжину хвилі коротковхвильової межі суцільного рентгенівського спектра, якщо швидкість електронів, що бомбардують анод рентгенівської трубки, дорівнює $\mathrm{v} = 0,8 \cdot c$, де c – швидкість світла у вакуумі.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 4,55\,\textit{пм}$.

1.70 Визначити довжину хвилі коротковхвильової межі суцільного рентгенівського спектра, якщо збільшення напруги на рентгенівській трубці вдвічі зменшує коротковхвильову межу суцільного спектра на $\Delta\lambda = 50\,\textit{пм}$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 100\,\textit{пм}$.

1.71 Визначити напругу на рентгенівській трубці, якщо найменша довжина хвилі суцільного рентгенівського спектра дорівнює $\lambda_{\min} = 20,6\,\textit{пм}$.

Відповідь: $U = 60,3\,\textit{кВ}$.

ЛІНІЙЧАСТІ РЕНТГЕНІВСЬКІ СПЕКТРИ

1.72 Розрахувати довжину хвилі λ і енергію W фотона, який належить K_α-лінії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання платини $(Z = 78)$.

Відповідь: $\lambda = 20,5\,нм$; $W = 60,6\,кеВ$.

1.73 Визначити наближено частоту та довжину хвилі K_α-лінії молібдену, а також енергію кванта, що відповідає цій лінії.

Відповідь: $\nu = 4,15 \cdot 10^{18}\,Гц$; $\lambda = 7,23 \cdot 10^{-11}\,м$; $W = 17,2\,кеВ$.

1.74 За якої найменшої напруги $U_{\min}$ на рентгенівській трубці починають з'являтися лінії K-серії для золота?

Відповідь: $U_{\min} = 18,91\,кВ$.

1.75 За якої мінімальної напруги $U_{\min}$ на рентгенівській трубці з молібденовим $(Z = 42)$ антикатодом можлива поява L-серії випромінювання? Стала екранування дорівнює $\sigma_L \approx 7$.

Відповідь: $U_{\min} = 3,18\,кВ$.

1.76 Визначити наближено мінімальну напругу на рентгенівській трубці, за якої в спектрі випромінювання з'являються K_α-лінії молібдену $(Z = 42)$ та міді $(Z = 29)$.

Відповідь: $U_{Mo} \approx 17,1\,кВ$; $U_{Cu} \approx 8\,кВ$; $U_{Fe} \approx 6,4\,кВ$.

1.77 За якої найменшої напруги на рентгенівській трубці із залізним $(Z = 26)$ антикатодом з'являються лінії K-серії?

Відповідь: $U_{\min} = 6,39\,кВ$.

1.78 Яку найменшу різницю потенціалів потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб у спектрі випромінювання вольфраму $(Z = 74)$ спостерігалися всі лінії K-серії?

Відповідь: $U_{\min} \approx 73\,кВ$.

1.79 Яку найменшу різницю потенціалів потрібно прикласти до рентгенівської трубки, щоб у спектрі випромінювання міді спостерігалися всі лінії K-серії?

Відповідь: $U_{\min} = 10,7\,кВ$.

1.80 Визначити напругу на рентгенівській трубці з нікелевим антикатодом, якщо різниця довжин хвиль K_α-ліній і короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра дорівнює $\Delta\lambda = 84\,пм$.

Відповідь: $U = 4{,}96\,кВ$.

1.81 Найбільша довжина хвилі K_α-серії рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda = 0{,}21\,нм$. З якого матеріалу зроблений антикатод?

Відповідь: $Z = 25$ – марганець.

1.82 Гранична довжина хвилі K-серії характеристичного рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda = 112{,}84\,пм$. Визначити, який це елемент.

Відповідь: $Z = 27$ – кобальт.

1.83 Під час дослідження лінійчастого рентгенівського спектра деякого елемента виявилося, що довжина хвилі K_α-лінії дорівнює $\lambda = 76\,пм$. Що це за елемент?

Відповідь: $Z = 41$ – ніобій.

1.84 Під час дослідження лінійчастого рентгенівського спектра деякого елемента виявилося, що довжина хвилі лінії K_α дорівнює $\lambda = 72\,пм$. Визначити порядковий номер елемента в Періодичній системі елементів Менделєєва. Що це за елемент?

Відповідь: $Z = 42$ – молібден.

1.85 Визначити порядковий номер елемента в Періодичній системі елементів Менделєєва за умови, що гранична частота K-серії характеристичного рентгенівського спектра дорівнює $\nu = 5{,}55 \cdot 10^{18}\,Гц$.

Відповідь: $Z = 21$ – скандій.

1.86 Визначити довжину хвилі найдовшої лінії K-серії характеристичного рентгенівського спектра, якщо анод рентгенівської трубки виготовлений із платини $(Z = 78)$. Стала екранування дорівнює одиниці.

Відповідь: $\lambda = 20{,}4\,пм$.

1.87 Визначити довжину хвилі λ_K, яка відповідає межі K-смуги поглинання нікелю $(Z = 28)$. Вважати, що відповідна серія випромінювання виникає внаслідок іонізації атома.

Відповідь: $\lambda_K = 125\,пм$.

1.88 Скориставшись законом Мозлі, визначити, у скільки разів довжина хвилі K_α-лінії вольфраму $(Z_1 = 74)$ менша K_α-лінії заліза $(Z_2 = 26)$.

Відповідь: $\lambda_{Fe}/\lambda_W = 8,5$.

1.89 Визначена експериментально довжина хвилі, що відповідає границі *K*-смуги поглинання срібла $(Z = 47)$, дорівнює $\lambda_K = 47,4\,нм$. Визначити за цими даними сталу екранування σ_K в законі Мозлі для *K*-смуги.

Відповідь: $\sigma_K \approx 3$.

1.90 Довжина хвилі K_α-лінії ванадію $(Z_1 = 23)$ $\lambda_V = 0,25073\,нм$, а в міді $(Z_2 = 29)$ – $\lambda_{Cu} = 0,15443\,нм$. 1. Виходячи з цих даних, визначити константи C і σ у рівнянні закону Мозлі: $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$. 2. Визначити атомний номер Z елемента, у якого довжина лінії K_α $\lambda = 0,19399\,нм$. Що це за елемент?

Відповідь: 1. $C = 1,253 \cdot 10^8\, c^{-1/2}$, $\sigma = 1,12$; 2. $Z = 26$ – залізо.

1.91 Довжина хвилі K_α-лінії вольфраму $(Z_1 = 74)$ $\lambda_W = 0,021381\,нм$, а в срібла $(Z_2 = 47)$ – $\lambda_{Ag} = 0,056378\,нм$. Виходячи з цих даних, визначити константи C і σ в рівнянні закону Мозлі $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$.

Відповідь: $C = 1,336 \cdot 10^8\, c^{-1/2}$, $\sigma = 3,7$.

1.92 Довжина хвилі L_α-лінії вольфраму $(Z_1 = 74)$ $\lambda_W = 0,147635\,нм$, а в свинцю $(Z_2 = 82)$ – $\lambda_{Pb} = 0,117504\,нм$. Виходячи з цих даних, визначити: 1) константи C і σ в рівнянні закону Мозлі $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$; 2) атомний номер Z елемента, в якого довжина лінії L_α $\lambda = 0,131298\,нм$. Що це за елемент?

Відповідь: 1. $C = 5,398 \cdot 10^7\, c^{-1/2}$, $\sigma = 7,8$; 2. $Z = 78$ – платина.

1.93 Довжина хвилі L_α-лінії заліза $(Z_1 = 26)$ $\lambda_{Fe} = 1,7602\,нм$, а у цинку $(Z_2 = 30)$ – $\lambda_{Zn} = 1,2282\,нм$. Виходячи з цих даних, визначити константи C і σ в рівнянні закону Мозлі $\sqrt{\omega} = C(Z - \sigma)$.

Відповідь: $C = 5,098 \cdot 10^7\, c^{-1/2}$, $\sigma = 5,7$.

1.94 У атомі танталу $(Z=73)$ здійснюється перехід з M-шару на L-шар. Визначити довжину хвилі фотона, що випромінюється, якщо стала екранування $\sigma=5,5$.

Відповідь: $\lambda=144\,нм$.

1.95 Визначити сталу екранування σ для L-серії рентгенівського випромінювання, якщо при переході електрона в атомі вольфраму $(Z=74)$ з M-оболонки на L-оболонку довжина хвилі фотона, що випромінюється, дорівнює $\lambda=140\,пм$.

Відповідь: $\sigma=5,63$.

1.96 Довжина хвилі L_α-лінії вольфраму $(Z=74)$ $\lambda_W=0,148\,нм$. Визначити сталу екранування σ.

Відповідь: $\sigma=7,4$.

1.97 В атомі вольфраму $(Z=74)$ електрон перейшов з M-оболонки на L-оболонку. Визначити енергію фотона W, що випромінюється. Стала екранування $\sigma=5,63$.

Відповідь: $W=8,81\,кеВ$.

1.98 Визначити граничну довжину хвилі K-серії в спектрі характеристичного рентгенівського випромінювання платини $(Z=78)$.

Відповідь: $\lambda=15,4\,пм$.

1.99 При збільшенні напруги на рентгенівській трубці від $U_1=1\,кВ$ до $U_2=20\,кВ$ різниця довжин хвиль K_α-ліній і короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра збільшилася втричі. З якого елемента виготовлений антикатод?

Відповідь: $Z=29$ – мідь.

1.100 Визначити: 1) яким елементам належать K_α-лінії з довжинами хвиль $\lambda_1=193,5\,пм$, $\lambda_2=178,7\,пм$, $\lambda_3=165,6\,пм$; $\lambda_4=143,4\,пм$; 2) чому дорівнює довжина хвилі K_α-лінії елемента, пропущеного в цьому переліку? Стала екранування $\sigma=1$.

Відповідь: 1) $Z_1=26-Fe$, $Z_2=27-Co$, $Z_3=28-Ni$, $Z_4=30-Zn$.

2) $\lambda=155\,пм$, $Z=29-Cu$.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ ДЕ БРОЙЛЯ. РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

1 Теорія де Бройля.
2 Фізичний зміст хвиль де Бройля.
3 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга.
4 Одновимірне часове рівняння Шредінгера.
5 Фізичний зміст хвильової функції.
6 Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів.
7 Власні значення енергії.
8 Власні хвильові функції.
9 Потенціальна яма.
10 Потенціальний бар’єр.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

2.1 Довжина хвилі де Бройля:

а) у класичному наближенні $\left(\mathrm{v} \ll c;\ p = m_0\mathrm{v}\right)$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}},$$

де m_0 – маса спокою частинки; v – її швидкість; $\hbar$ – стала Планка – Дірака, $\hbar = h/2\pi$;

б) у релятивістському випадку $\left(\mathrm{v} \approx c;\ p = \dfrac{m_0\mathrm{v}}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/\mathrm{c}^2}}\right)$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0\mathrm{v}}\sqrt{1-\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{c}^2}}\ .$$

2.2 Зв’язок довжини хвилі де Бройля з кінетичною енергією частинки W_K:

а) у класичному наближенні $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0W_K}}$, б) у релятивістському випадку $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}$, де W_0 – енергія спокою частинки $\left(W_0 = m_0c^2\right)$.

2.3 Співвідношення невизначеностей Гейзенберга:

а) для координати та імпульсу частинки

$$\Delta p_x \Delta x \geq \hbar ,$$

де Δp_x – невизначеність проекції імпульсу частинки на вісь x; Δx – невизначеність її координати;

б) для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar ,$$

де ΔW – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

2.4 Одновимірне часове рівняння Шредінгера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x},$$

де i – уявна одиниця $\left(i = \sqrt{-1}\right)$; m – маса частинки; ψ – хвильова функція, що описує стан частинки.

Хвильова функція, що описує одновимірний рух вільної частинки,

$$\psi\left(x,t\right) = A\exp\frac{i}{\hbar}\left(px - Wt\right),$$

де A – амплітуда хвилі де Бройля; p – імпульс частинки; W – повна енергія частинки.

2.5 Умова нормування хвильової функції

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi\left(x,t\right)\right|^2 dV = 1.$$

2.6 Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - U\right)\psi = 0,$$

де W – повна енергія частинки; $U(x)$ – потенціальна енергія; $\psi(x)$ – координатна (або амплітудна) частина хвильової функції.

2.7 Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів у тривимірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 y}+\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 z}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-U\right)\psi=0 .$$

Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів в операторній формі

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-U\right)\psi=0 ,$$

де $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2}{\partial^2 y}+\dfrac{\partial^2}{\partial^2 z}$ – оператор Лапласа.

2.8 Рівняння Шредінгера гармонічного осцилятора

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\psi=0 ,$$

де m – маса частинки; $\omega=\sqrt{k/m}$ – власна частота класичного гармонічного осцилятора; k – коефіцієнт жорсткості.

Під час розв'язування рівняння Шредінгера потрібно враховувати стандартні умови, які повинна задовольняти хвильова функція: скінченність (в усьому просторі), однозначність, неперервність самої ψ-функції та її першої і другої похідних.

2.9 Ймовірність $d\Psi$ **знайти частинку в інтервалі від** x **до** $x+dx$ (в одновимірному випадку) визначається формулою

$$d\Psi=\left|\psi\left(x\right)\right|^2dx ,$$

де $\left|\psi\left(x\right)\right|^2$ – густина ймовірності.

Ймовірність Ψ знайти частинку в інтервалі від x_1 до x_2 знаходиться інтегруванням $d\Psi$ за зазначеними межами інтегрування:

$$\Psi=\int_{x_1}^{x_2}\left|\psi\left(x\right)\right|^2dx .$$

2.10 Власні значення енергії W_n частинки, яка перебуває на n -му енергетичному рівні в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, визначається формулою

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2 \ \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right),$$

де l – ширина потенціальної ями.

Власна хвильова функція, що відповідає цій енергії, має вигляд

$$\psi_n\left(x\right) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x.$$

Власні значення енергії гармонічного осцилятора

$$W_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega,$$

де n = 0, 1, 2, 3, …

Енергія нульових коливань гармонічного осцилятора

$$W_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

2.11 Коефіцієнт заломлення $n_з$ хвиль де Бройля на межі невисокого потенціального бар'єра нескінченної ширини (рис. 2.1)

$$n_з = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_1}{k_2},$$

де λ_1 і λ_2 – довжини хвиль де Бройля в областях *I* і *II* (частинка рухається з області *I* в *II*); k_1 і k_2 – відповідні значення хвильових чисел.

2.12 Коефіцієнти відбивання ρ і проходження τ хвиль де Бройля на межі невисокого $\left(U < W\right)$ потенціального бар'єра нескінченної ширини (рис. 2.1):

$$\rho = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2, \ \ \tau = \frac{4k_1k_2}{\left(k_1 + k_2\right)^2},$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа хвиль де Бройля в областях *I* і *II*.

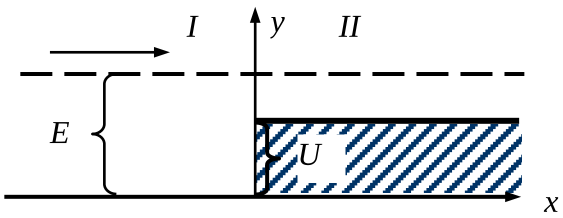


Рисунок 2.1 – Проходження квантовою частинкою невисокого потенціального бар’єра нескінченної ширини

2.13 Коефіцієнт прозорості *D* прямокутного потенціального бар’єра скінченної ширини

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} d \sqrt{2m(U - W)}\right] \quad ,$$

де U – висота потенціального бар’єра; W – енергія частинки; d – ширина бар’єра; m – маса частинки.

ПИТАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

1 Записати дебройлівську довжину хвилі λ релятивістської частинки маси m через її: а) швидкість v; б) кінетичну енергію W_K.

2 Знайти залежність дебройлівської довжини хвилі λ від кінетичної енергії W_K: а) ультрарелятивістської частинки $\left(W_K \gg mc^2\right)$; б) нерелятивістської частинки $\left(W_K \ll mc^2\right)$.

3 При фіксованій швидкості v релятивістської частинки зобразити графік залежності дебройлівської довжини хвилі λ від маси частинки. Чи зміниться характер цієї кривої у випадку нерелятивістської частинки?

4 Порівняти довжини хвиль де Бройля для електрона і протона, що мають однакову швидкість.

5 Визначити довжини хвиль де Бройля для: а) ультрарелятивістських протонів з енергією $W = 70\,ГеВ$; б) ультрахолодних нейтронів з енергією $W = 10^{-9}\,еВ$.

6 Визначити дебройлівську довжину хвилі λ теплових нейтронів, що відповідає їх найбільш імовірній швидкості за кімнатної температури $T = 300\,K$.

7 Яку кінетичну енергію повинні мати електрони при виході з прискорювача для того, щоб вони могли ефективно використовуватися в експериментах із розсіювання в дослідженнях внутрішньої структури об’єкта з лінійними розмірами порядку: а) $a \sim 10^{-10}\,м$ (атом); б) $a \sim 10^{-15}\,м$ (ядро).

8 Положення намистинки $\left(m = 1г\right)$ та електрона визначено з однаковою невизначеністю $\Delta x = 10^{-2}\,м$. Визначити квантово-механічну невизначеність швидкості Δv_x намистинки та електрона.

9 Пояснити, чому уявлення про борівські орбіти є несумісним із принципом невизначеностей Гейзенберга.

10 Поясніть фізичний зміст співвідношення невизначеностей для енергії та часу.

11 Електрон локалізований в області з лінійними розмірами $l = 1\,мкм$. Середнє значення його кінетичної енергії дорівнює $T = 4\,еВ$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей Гейзенберга: а) відносну

невизначеність $\Delta v/v$ швидкості електрона; б) невизначеність його кінетичної енергії ΔT .

12 Вільна нерелятивістська частинка масою m з енергією W рухається вздовж осі x. Написати вираз для псі-функції $\psi(x,t)$ у випадках руху частинки вздовж та проти осі x.

13 Дати визначення квантового гармонічного осцилятора.

14 Пояснити фізичний зміст існування енергії нульових коливань для квантового гармонічного осцилятора.

15 Частинка масою m міститься в одновимірній нескінченно глибокій потен-ціальній ямі прямокутної форми (рис. 7.2). Потрібно: а) сформулювати рівняння Шредінгера для частинки і написати загальне розв'язання цього рівняння; б) записати граничні умови та вибрати систему відповідних їм власних розв'язань.

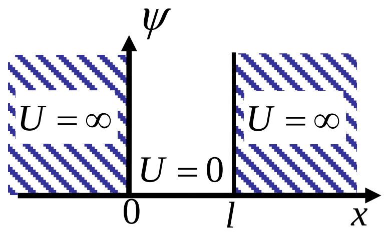


Рисунок 2.2 – Одновимірна нескінченно глибока прямокутна потенціальна яма

16 Записати спектр власних W_n значень енергії частинки в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі прямокутної форми.

17 У скільки разів повна енергія електрона на другому енергетичному рівні одновимірної потенціальної ями більша, ніж на першому?

18 Чому дорівнює потенціальна енергія частинки в потенціальній ямі?

19 Зобразити потенціальний прямокутний потенціальний бар'єр висотою U .

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ПРИКЛАД 2.1

Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорювальну різницю потенціалів U. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для двох випадків: 1) $U_1 = 60\,В$; 2) $U_2 = 600\,кВ$.

$\lambda - ?$

$U_1 = 60\,В,$

$U_2 = 600\,кВ = 6 \cdot 10^5\,В$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її імпульсу p і визначається виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \tag{1}$$

Імпульс частинки можна знайти, якщо відома її кінетична енергія W_K. Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією для нерелятивістського (коли $W_K \le W_0$) і релятивістського (коли $W_K \approx W_0$) випадків визначається співвідношеннями

$$p = \sqrt{2m_0 W_K}\,,\; p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}\,,$$

де $W_0 = m_0 c^2$ – енергія спокою частинки.

Вираз (1) з урахуванням цих співвідношень запишеться у нерелятивістському та релятивістському випадках таким чином:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 W_K}},\; \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}. \tag{2}$$

Порівняємо кінетичні енергії електронів, що пройшли задані в умові задачі різниці потенціалів $U_1 = 60\,В$ і $U_2 = 600\,кВ$, з енергією спокою електрона і залежно від цього зробимо висновок, яку з наведених формул необхідно використовувати для розрахунків довжини хвилі де Бройля.

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів U, дорівнює

$$W_K = |e|U\,. \tag{3}$$

У першому випадку

$$W_{K1} = |e|U_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60\,Дж = 60\,еВ = 0,5 \cdot 10^{-4}\,МеВ,$$

тобто енергія набагато менша від енергії спокою електрона $W_0 = m_0c^2 = 0,51 МеВ$. Тому для розрахунків можна використати нерелятивістську формулу.

У другому випадку кінетична енергія

$$W_{K2} = |e|U_2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5\,Дж = 0,6\,МеВ,$$

тобто більша за енергію спокою електрона. Тому в цьому випадку необхідно використати релятивістську формулу.

З урахуванням виразу (3) співвідношення (2) наберуть вигляду

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{eU_2\left(eU_2 + 2m_0c^2\right)}}. \tag{4}$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (4) одержимо відповідь

$$\lambda_1 \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60}} = 1,58 \cdot 10^{-10}\,(м),$$

$$\lambda_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{\left(2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5\right)1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5}} = = 1,26 \cdot 10^{-12}\,(м).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\lambda] = \frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][e][U]}} = \frac{1Дж \cdot с}{\sqrt{1кг \cdot 1Кл \cdot 1В}} = \sqrt{\frac{1Дж}{1кг}}1с = \sqrt{\frac{1кг \cdot м^2/с^2}{1кг}}1с = 1м.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 158\,пм$; $\lambda_2 = 1,26\,пм$.

ПРИКЛАД 2.2

Паралельний пучок моноенергетичних електронів спрямований на вузьку щілину шириною $b = 1\,мкм$. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який міститься на відстані $l = 20\,см$ від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 48\,мкм$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

v-?

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,кг$,

$b = 1\,мкм = 10^{-6}\,м$,

$l = 20\,см = 0{,}2\,м$,

$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}\,Дж/с$,

$\Delta x = 48\,мкм = 4{,}8 \cdot 10^{-5}\,м$

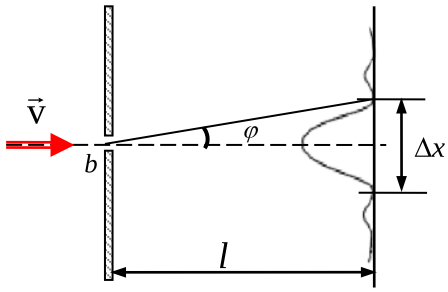


Рисунок 2.3 – До задачі 2.2

Умова мінімумів при дифракції на щілині

$$b \sin\varphi = \pm k\lambda, \tag{1}$$

де b – ширина щілини; φ і k – кут і порядок дифракції; λ – довжина хвилі. В умові цієї задачі $k = 1$, тоді $\sin\varphi = \lambda/b$. З рисунка 2.3 знаходимо, що ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 2l\,\mathrm{tg}\varphi$. Оскільки кут φ є малим $(\Delta x \ll l)$, то $\sin\varphi \simeq \mathrm{tg}\varphi$. Отже,

$$\Delta x = 2l \sin\varphi = \frac{2l\lambda}{b} \;\Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x b}{2l}. \tag{3}$$

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її швидкості й визначається виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m\mathrm{v}} \Rightarrow \mathrm{v} = \frac{2\pi\hbar}{m\lambda} = \frac{4\pi\hbar l}{m\Delta x b}. \tag{4}$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$\mathrm{v} = \frac{4 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34} \cdot 0{,}2}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-6}} = 6{,}06 \cdot 10^{6}\,(м/с) = 6{,}06\,(Мм/с).$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 6{,}06\,Мм/с$.

ПРИКЛАД 2.3

Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює $W_K = 10\,eB$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$l_{\min} - ?$
$W_K = 10\,eB = 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ *Дж*

Для розв'язування задачі використаємо співвідношення невизначеностей

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar,$$

де Δx – невизначеність координати частинки; Δp_x – невизначеність імпульсу частинки; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

Нехай атом має лінійні розміри l, тоді електрон атома перебуватиме десь у межах цієї області з похибкою

$$\Delta x = l/2.$$

У цьому випадку співвідношення невизначеностей набирає вигляду

$$\frac{l}{2}\Delta p_x \geq \hbar,$$

звідси

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \qquad (1)$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x, тобто $\Delta p_x \leq p_x$ Імпульс p_x пов'язаний із кінетичною енергією W_K співвідношенням

$$p_x = \sqrt{2mW_K}.$$

Підставивши ці вирази у (1) та перейшовши від нерівності до рівності, одержимо

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mW_K}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо відповідь

$$l_{\min} = \frac{2 \cdot 1{,}05 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10}} = 1{,}23 \cdot 10^{-10} \left(м \right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][W_k]}} = \frac{1Дж \cdot с}{\sqrt{1кг \cdot 1Дж}} = \sqrt{\frac{1Дж}{1кг}} \cdot 1с = \sqrt{\frac{1кг \cdot м^2/с^2}{1кг}} \cdot 1с = 1м.$$

Відповідь: $l_{\min} = 1{,}23 \cdot 10^{-10}$ $м$.

ПРИКЛАД 2.4

Електрон із кінетичною енергією $W_K = 15eВ$ локалізований в області розміром $l = 1мкм$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta v_x / v_x - ?$
$W_K = 15eВ = 2{,}4 \cdot 10^{-18}$ $Дж$

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга має вигляд

$$\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar, \tag{1}$$

де Δx – невизначеність координати електрона; Δp_x – невизначеність його імпульсу.

Врахуємо, що імпульс частинки дорівнює

$$p = m\text{v} \Rightarrow \Delta p = m\Delta \text{v}_x. \tag{2}$$

Підставимо вираз (1) в (2) та одержимо

$$\Delta x \, m\Delta \text{v}_x \geq \hbar.$$

Врахуємо, що $\Delta x = d/2$.

$$\frac{d}{2} m\Delta \text{v}_x \geq \hbar,$$

звідси

$$\Delta \text{v}_x \geq \frac{2\hbar}{md}. \tag{3}$$

Імпульс частинки пов'язаний із його кінетичною енергією виразом

$$p = m\text{v} = \sqrt{2mW_K}\,.$$

Із рівняння знайдемо, що

$$\text{v} = \sqrt{\frac{2mW_K}{m^2}} = \sqrt{\frac{2W_K}{m}}\,. \tag{4}$$

Відносну невизначеність швидкості електрона визначимо розділивши рівняння (3) на (4):

$$\frac{\Delta\text{v}_x}{\text{v}} = \frac{2\hbar}{md\sqrt{\dfrac{2W_K}{m}}} = \frac{2\hbar}{d\sqrt{2mW_K}}\,.$$

Після підставлення числових значень величин одержимо

$$\frac{\Delta\text{v}_x}{\text{v}} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{10^{-6}\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10}} = 3{,}18\cdot 10^{-4}\,.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{[d]\sqrt{[m][W_K]}} = \frac{Дж\cdot с}{м\cdot\sqrt{кг\cdot Дж}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}}\cdot\frac{с}{м} = \sqrt{\frac{кг\cdot м^2}{кг\cdot с^2}} = \frac{м}{с}\cdot\frac{с}{м} = 1.$$

Відповідь: $\Delta\text{v}/\text{v} = 3{,}18\cdot 10^{-4}$.

ПРИКЛАД 2.5

Довжина хвилі фотона, який випромінюється атомом, дорівнює $\lambda = 0,6\,мкм$. Ураховуючи, що час життя збудженого стану $\Delta t = 10^{-8}\,c$, визначити відношення природної ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W/W - ?$

$\lambda = 0,6\,мкм = 6 \cdot 10^{-7}\,м,$
$\Delta t = 10^{-8}\,c$

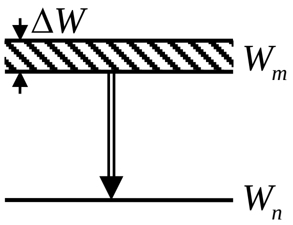


Рисунок 2.4 – До задачі 2.5

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔW – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

$$\Delta W = \hbar / \Delta t.$$

Енергія, що випромінюється атомом, дорівнює

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

тоді відношення ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом, дорівнює

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\hbar\lambda}{\Delta t hc} = \frac{\hbar\lambda}{2\pi\hbar c\Delta t} = \frac{\lambda}{2\pi c\Delta t}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо розрахунки

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 10^{-8}} = 3,18 \cdot 10^{-8}.$$

Відповідь: $\Delta W/W = 3,18 \cdot 10^{-8}$.

ПРИКЛАД 2.6

Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 0{,}55\,мкм$. Тривалість випромінювання $\Delta t = 10\,нс$. Визначити найменшу похибку, з якою можна виміряти довжину хвилі випромінювання.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\lambda - ?$
$\lambda = 0{,}55\,мкм = 5{,}5 \cdot 10^{-7}\,м,$ $\Delta t = 10^{-8}\,c$

Енергія фотона дорівнює

$$W = \frac{hc}{\lambda}, \tag{1}$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі випромінювання.

Продиференціюємо вираз (1) $dW = -hc\dfrac{d\lambda}{\lambda^2}$, тоді $\Delta W = -hc\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$, звідси

$$\Delta\lambda = \frac{|\Delta W|\lambda^2}{hc}. \tag{2}$$

Візьмемо співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \ge \hbar, \tag{3}$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

Із виразу (3) визначимо невизначеність енергії $\Delta W = \dfrac{\hbar}{\Delta t} = \dfrac{h}{2\pi\Delta t}$, підставимо у вираз (2) та одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta t c}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення:

$$\Delta\lambda = \frac{0{,}55^2 \cdot 10^{-12}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-8} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1{,}6 \cdot 10^{-14}\,(м).$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 1{,}6 \cdot 10^{-14}\,м$.

ПРИКЛАД 2.7

Середній час життя атома у збудженому стані дорівнює $\tau = 10\,нс$. Визначити природну ширину $\Delta\lambda$ спектральної лінії $(\lambda = 12\,мкм)$, що відповідає переходу між збудженими рівнями атома.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\lambda - ?$

$\lambda = 12\,мкм = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,м,$
$\tau = 10^{-8}\,c$

При переході електрона з одного стаціонарного стану в інший випромінюється (або поглинається) енергія, що дорівнює

$$\frac{hc}{\lambda} = W_m - W_n, \qquad (1)$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі випромінювання.

З виразу (1) випливає, що невизначеність довжини хвилі $\Delta\lambda$ випромінювання пов'язана з невизначеністю енергії рівнів W_m і W_n атома співвідношенням

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \Delta W_m + \Delta W_n. \qquad (2)$$

Візьмемо співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \ge \hbar, \text{ або } \Delta W \Delta t \ge \frac{h}{2\pi}, \qquad (3)$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – невизначеність часу переходу атома з одного стаціонарного стану в інший.

Оскільки Δt не перевищує середнього часу життя τ збудженого стану атома, то мінімальна невизначеність енергії збуджених рівнів згідно з (3) дорівнює

$$\Delta W_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \qquad (4)$$

З виразу (2) з урахуванням (4) знайдемо мінімальну невизначеність довжини хвилі випромінювання, що називається природною шириною спектральної лінії:

$$\Delta\lambda_{\min} = \lambda^2 \frac{\Delta W_m + \Delta W_n}{hc} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n}\right). \qquad (5)$$

Коли один зі станів, між якими здійснюється перехід, є основним, то

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \qquad (6)$$

Підставимо у вираз (6) числові значення й одержимо

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\left(1,2\cdot 10^{-5}\right)^2}{2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot 10^{-8}} = 5,2\cdot 10^{-14}\,(м).$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 5,2\cdot 10^{-14}\ м$.

ПРИКЛАД 2.8

Електрон перебуває у збудженому стані $(n=3)$ в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої l. Визначити ймовірність Ψ виявлення електрона в середній третині ями. Зобразити графічно густину ймовірності виявлення електрона у цьому стані та пояснити фізичний зміст одержаного результату.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W-?$
$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x,$ $n=3,$ $\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}$

Власна функція для частинки в потенціальній ямі має вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \qquad (1)$$

де l – ширина ями; n – головне квантове число (номер енергетичного рівня); x – координата частинки.

У нашому випадку

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right). \qquad (2)$$

Густина ймовірності є квадратом модуля хвильової функції

$$\left|\psi_3(x)\right|^2 = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right);$$

$\left|\psi_3(x)\right|^2 = \max$ за умови

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k = 0,1,2,3,...$$

Таким чином, координати максимумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = \frac{l\left(1/2 + k\right)}{3}; \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{l}{6}, \;\; x_2 = \frac{l}{2}, \;\; x_3 = \frac{5l}{6}.$$

$\left|\psi_3(x)\right|^2 = \min$ за умови $\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{l}x = \pi k, \;\; k = 0, 1, 2, 3, ...$

Відповідно координати мінімумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = kl/3, \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 0; \;\; x_2 = l/3; \;\; x_3 = 2l/3; \;\; x_4 = l.$$

Графічно густина ймовірності виявлення електрона в цьому стані зображена на рисунку 2.5.

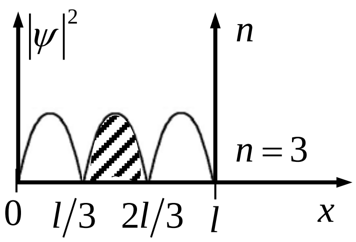


Рисунок 2.5 – Густина ймовірності виявлення електрона в потенціальній ямі на енергетичному рівні з головним квантовим числом $n = 3$

Ймовірність W виявлення електрона в середній третині ями визначається інтегралом, після розв'язування якого одержимо

$$W=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\left|\psi_3(x)\right|^2dx=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{2}{l}\sin^2\frac{3\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{6\pi}{l}x\right)dx=$$
$$=\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}dx-\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\cos\frac{6\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{l}\frac{l}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}=$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin\frac{6\pi}{l}\frac{2l}{3}-\sin\frac{6\pi}{l}\frac{l}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin4\pi-\sin2\pi\right)=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $W=1/3$.

ПРИКЛАД 2.9

Електрон перебуває в потенціальному ящику шириною l (рис. 2.6). В яких точках в інтервалі ($0\le x\le l$) густина ймовірності перебування електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

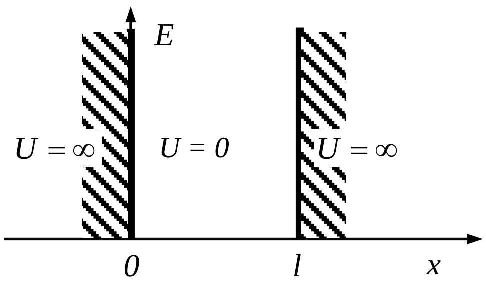


Рисунок 2.6 – Частинка в одновимірній потенціальній ямі

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$x-?\ \left|\psi\right|^2-?$
l
$\left|\psi_1\right|^2=\left|\psi_2\right|^2$

Припустимо, що квантова частинка може рухатися лише вздовж осі *x*. При цьому рух обмежується непроникними для частинки стінками: $x=0$ і $x=l$. Потенціальна енергія в цьому випадку має вигляд, зображений на рис. 2.5: вона дорівнює нулю при $0\le x\le l$ та перетворюється на нескінченність при $x<0$ та $x>l$.

Для розв'язування задачі використаємо рівняння Шредінгера для одновимірного випадку

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2x}+\frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\psi=0. \qquad (1)$$

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може. Тому ймовірність виявлення частинки зовні ями дорівнює нулю. Відповідно і функція ψ за межами потенціальної ями повинна дорівнювати нулю. З умови неперервності випливає, що хвильова функція ψ дорівнює нулю і на межах ями, тобто

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \tag{2}$$

Цю умову повинен задовольняти розв'язок рівняння (1).

В області $0 < x < l$, де хвильова функція не дорівнює нулю, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2} W\psi = 0 \tag{3}$$

(у цій області $U = 0$). Уведемо позначення $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} W$,

в результаті одержимо рівняння, добре відоме з теорії коливань,

$$\psi'' + k^2 \psi = 0.$$

Це диференціальне рівняння гармонічних коливань.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(x) = A\sin(kx + \alpha). \tag{4}$$

Умову (2) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α. З умови $\psi(0) = 0$ одержимо

$$\psi(0) = A\sin\alpha = 0,$$

звідси випливає, що стала α повинна дорівнювати нулю: $\alpha = 0$. Крім того, повинна виконуватись умова

$$\psi(l) = A\sin(kl + \alpha), \tag{5}$$

що можливо лише в разі, якщо

$$kl = \pm n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Підставивши значення k у співвідношення (5), одержимо власні функції частинки в потенціальному ящику шириною *l:*

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{7}$$

Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування хвильової функції, яка в цьому разі має вигляд

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = 1. \tag{8}$$

На кінцях проміжку інтегрування підінтегральна функція перетворюється на нуль. Тому значення інтеграла можна одержати помноживши середнє значення $\sin^2\frac{n\pi x}{l}$ (яке, як добре відомо, дорівнює 0,5) на довжину проміжку l: $A^2(1/2)l = 1$, звідси $A = \sqrt{2/l}$. Таким чином, власні функції мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $n = 1, 2, 3, \ldots$.

На першому та другому енергетичних рівнях ці функції мають вигляд

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}. \tag{9}$$

Ймовірність перебування частинки в будь-якій точці потенціальної ями на цих рівнях визначається співвідношеннями

$$\Psi_1 = \int_0^l \psi_1^2(x)dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx,$$

$$\Psi_2 = \int_0^l \psi_2^2(x)dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx.$$

Згідно з умовою задачі густина ймовірності перебування квантової частинки в деяких точках на першому і другому рівнях енергії однакова, звідси $|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2$. Після зіставлення співвідношень (9) одержимо

$$\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}.$$

Розв’язавши тригонометричне рівняння $\sin\frac{\pi x}{l} = \pm\sin\frac{2\pi x}{l}$, одержимо $x_1 = l/3$, $x_2 = 2l/3$.

Підставимо відповідні значення x у співвідношення

$$|\psi|_1^2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{2}{l}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2l}, \quad |\psi|_2^2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2l}.$$

На рисунку 2.7 схематично зображені графіки розподілу хвильової функції та густини ймовірності в одновимірній потенціальній ямі на першому та другому енергетичних рівнях.

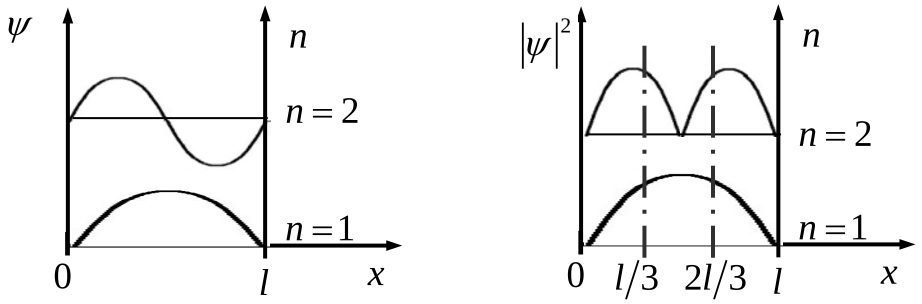


Рисунок 2.7 – Хвильова функція (ліворуч) та густина ймовірності виявлення електрона (праворуч) у потенціальній ямі на першому та другому енергетичних рівнях

Відповідь: $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$; $|\psi|^2 = \frac{3}{2l}$.

ПРИКЛАД 2.10

Знайти енергію основного стану атома водню.

$W - ?$
$n = 1$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівняння Шредінгера для тривимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0\,.$$

Оскільки задача є симетричною, це рівняння зручно записати у сферичних координатах. Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має такий вигляд:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi\,,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi\,,\quad z=r\cos\theta\,.$$

Після підставлення цих виразів рівняння Шредінгера набирає вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\varphi}=-\frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\psi\,. \quad (1)$$

Для того щоб одержати рівняння Шредінгера для атома водню, необхідно врахувати, що потенціальна енергія електрона має вигляд $U=-ke^2/r$, де $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$. Як розв'язок диференціального рівняння хвильову функцію візьмемо у вигляді $\psi=e^{-r/a}$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (1) і враховуючи, що часткові похідні $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ та $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ перетворюються на нуль, одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(e^{-r/a}\right)}{\partial r}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{ke^2}{r}\right)e^{-r/a}.$$

Після ряду перетворень одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a}e^{-r/a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{ke^2}{r}\right)e^{-r/a},\quad \frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{ke^2}{r}\right),$$

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\frac{1}{r}=-\frac{2m}{\hbar^2}W-\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}. \qquad (2)$$

Прирівнявши члени, що містять $1/r$, знайдемо

$$\frac{2}{a}=\frac{2mke^2}{\hbar^2},$$

звідси

$$a=\frac{\hbar^2}{mke^2}. \qquad (3)$$

Прирівнявши вільні члени рівняння (2), одержимо вираз для енергії

$$W=-\frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

Підставляючи у це рівняння співвідношення (3), одержимо кінцевий результат

$$W=-\frac{\left(mke^2\right)^2}{2m\hbar^2}=-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень m, e, $\hbar$ знайдемо

$$W=-\left(\frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}=-21{,}8\cdot 10^{-19}\left(Дж\right)=-13{,}6\left(eB\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W]=\frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2}=\frac{кг\cdot Кл^4}{(Ф/м)^2\,(Дж\cdot с)^2}=\frac{Кл^4\cdot кг\cdot м^2}{Ф^2\cdot Дж^2\cdot с^2}=\frac{Ф^4\cdot B^4\cdot H\cdot м}{Ф^2\cdot Дж^2}=$$

$$=\frac{Ф^2\cdot B^4}{Дж}=\frac{Кл^2B^4}{B^2\,Дж}=\frac{Кл^2B^2}{Дж}=\frac{Дж^2}{Дж}=Дж.$$

Відповідь: $W=-13{,}6\,eB$.

ПРИКЛАД 2.11

Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Використовуючи умову нормування ймовірностей, визначити нормувальний коефіцієнт A.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$A - ?$

$\psi = Ae^{-r/a}$,

$a = 5,29 \cdot 10^{-11}$ *м*

Умова нормування хвильової функції

$$\int_0^\infty \left|\psi\left(x,t\right)\right|^2 dV = 1. \qquad (1)$$

У нашому випадку елементарний об'єм $dV = 4\pi r^2 dr$. Квадрат модуля хвильової функції дорівнює

$$\left|\psi\left(x,t\right)\right|^2 = A^2 e^{-2r/a}, \qquad (2)$$

тоді вираз (1):

$$\int_0^\infty A^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_{-\infty}^\infty r^2 e^{-2r/a} dr = 1. \qquad (3)$$

Із таблиці А.8 знаходимо інтеграл:

$$\int_{-\infty}^\infty r^2 e^{-2r/a} dr = \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = \frac{a^3}{4}. \qquad (4)$$

Підставимо значення інтеграла у співвідношення (3) та одержимо

$$4\pi A^2 \frac{a^3}{4} = 1 \;\Rightarrow\; A = 1\Big/\sqrt{\pi a^3}\,. \qquad (5)$$

Підставимо значення борівського радіуса та визначимо нормувальний коефіцієнт A:

$$A = 1\Big/\sqrt{3{,}14 \cdot \left(5,29 \cdot 10^{-11}\right)^3} = 1,47 \cdot 10^{15} \left(м^{-3/2}\right).$$

Відповідь: $A = 1\Big/\sqrt{\pi a^3} = 1,47 \cdot 10^{15}\ м^{-3/2}$.

ПРИКЛАД 2.12

ψ – функція частинки має вигляд $\psi = \dfrac{A}{r}e^{-r/a}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Визначити середню відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$\langle r \rangle - ?$

$\psi = \dfrac{A}{r}e^{-r/a}$,

$a = \text{const}$

Середнє значення фізичної величини визначається за формулою

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dV . \tag{1}$$

У нашому випадку середня відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра дорівнює

$$\langle r \rangle = \int_{0}^{\infty} r|\psi|^2 dV , \tag{2}$$

де dV – елементарний об’єм, $dV = 4\pi r^2 dr$. Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = \frac{A^2}{r^2}e^{-2r/a} . \tag{3}$$

Нормувальний коефіцієнт A визначимо з умови нормування хвильової функції

$$\int_{0}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dV = 1 . \tag{4}$$

Підставимо значення елементарного об’єму та вираз (3) в умову (4) та одержимо

$$\int_{0}^{\infty} \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_{0}^{\infty} e^{-2r/a} dr = 1 . \tag{5}$$

Інтеграл $\int_{0}^{\infty} e^{-2r/a} dr$ визначимо використовуючи таблицю А.8:

$$\int_0^{\infty} e^{-2r/a}dr = \frac{a}{2}e^{-2r/a}\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{2},$$

підставимо його значення в (5) та визначимо нормувальний коефіцієнт

$$4\pi A^2\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}. \tag{6}$$

Для визначення середньої відстані частинки до силового центра підставимо в умову (2) вирази елементарного об’єму (3) та (6):

$$\langle r\rangle = \int_0^{\infty} r\frac{A^2}{r^2}e^{-2r/a}4\pi r^2 dr = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} re^{-2r/a}dr. \tag{7}$$

Із таблиці А.8 знаходимо інтеграл

$$\int_0^{\infty} re^{-2r/a}dr = \frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{4}, \tag{8}$$

підставимо його значення в (7) та визначимо середню відстань частинки до силового центра:

$$\langle r\rangle = \frac{2}{a}\frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $\langle r\rangle = a/2$.

ПРИКЛАД 2.13

Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити середнє значення квадрата відстані $\langle r^2 \rangle$ електрона до ядра в основному стані.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\langle r^2 \rangle - ?$

$\psi = Ae^{-r/a}$,

$a = 5,29 \cdot 10^{-11}$ *м*

Середнє значення фізичної величини визначається за формулою

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dV . \quad (1)$$

У нашому випадку середня відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра дорівнює

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 |\psi|^2 dV , \quad (2)$$

де dV – елементарний об'єм,

$$dV = 4\pi r^2 dr . \quad (3)$$

Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = A^2 e^{-2r/a} . \quad (4)$$

Значення нормувального коефіцієнта A визначимо з умови нормування хвильової функції (див. приклад 2.11):

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} . \quad (5)$$

З урахуванням виразів (3), (4) та (5) середня відстань (2) частинки до силового центра набере вигляду

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3} \int_0^{\infty} r^4 e^{-2r/a} dr .$$

З таблиці А.8 знаходимо інтеграл

$$\int_0^\infty r^4 e^{-2r/a} dr = \frac{4!}{\left(\frac{2}{a}\right)^5} = \frac{2\cdot 3\cdot 4a^5}{32} = \frac{3}{4}a^5,$$

тоді

$$\left\langle r^2 \right\rangle = \frac{4}{a^3}\cdot\frac{3}{4}a^5 = 3a^2. \qquad (6)$$

Підставимо значення борівського радіуса в одержаний вираз для середнього значення квадрата відстані електрона до ядра в основному стані та проведемо розрахунки:

$$\left\langle r^2 \right\rangle = 3\cdot 5{,}29^2\cdot 10^{-22} = 8{,}4\cdot 10^{-21}\left(м^2\right).$$

Відповідь: $\left\langle r^2 \right\rangle = 3a^2 = 8{,}4\cdot 10^{-21} м^2$.

ПРИКЛАД 2.14

Визначити, за якої температури дискретність енергії електрона, що перебуває в одновимірній прямокутній ямі з нескінченно високими стінками шириною $l = 2\cdot 10^{-9}\ м$, дорівнює енергії теплового руху.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T-?$
$l = 2\cdot 10^{-9}\ м$

Енергія електрона, що перебуває в потенціальній ямі на n-му енергетичному рівні, дорівнює

$$W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2 \quad \left(n = 1, 2, 3, \ldots\right),$$

де l – ширина потенціальної ями.

Дискретність (різниця) ΔW енергій на n-му та $\left(n+1\right)$-му енергетичних рівнях

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left[\left(n+1\right)^2 - n^2\right] = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(n^2 + 2n + 1 - n^2\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(2n+1\right).$$

Енергія теплового руху електрона $W = \frac{3}{2}kT$.

За умовою задачі $\Delta W = W$, звідси визначимо температуру:

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}(2n+1)=\frac{3}{2}kT \quad \Rightarrow \quad T=\frac{\pi^2\hbar^2}{3kml^2}(2n+1).$$

ΔW має мінімальне значення при $n=1$, тоді

$$T=\frac{\pi^2\hbar^2}{kml^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та одержимо

$$T=\frac{\pi^2\left(1,05\cdot10^{-34}\right)^2}{1,38\cdot10^{-23}\cdot9.1\cdot10^{-31}\left(2\cdot10^{-9}\right)^2}=2166(K).$$

Відповідь: $T=2166K$.

ПРИКЛАД 2.15

Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню $\psi=Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити найбільш імовірну відстань r_i електрона до ядра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$r_i-?$

$\psi=Ae^{-r/a}$,

$a=5,29\cdot10^{-11}\ м$

Ймовірність виявити частинку в об'ємі dV дорівнює

$$d\Psi=\left|\psi(r)\right|^2 dV, \tag{1}$$

де dV – елементарний об'єм,

$$dV=4\pi r^2 dr. \tag{2}$$

Квадрат модуля хвильової функції

$$\left|\psi\right|^2=A^2e^{-2r/a}. \tag{3}$$

Тоді ймовірність

$$d\Psi=A^2e^{-2r/a}4\pi r^2dr=4\pi A^2r^2e^{-2r/a}dr. \tag{4}$$

Густина ймовірності дорівнює

$$w = \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a}. \qquad (5)$$

Найбільш імовірна швидкість визначається з умови $\frac{dw}{dr} = 0$.

Знайдемо похідну від густини ймовірності:

$$\frac{dw}{dr} = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} = 4\pi A^2 \frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-2r/a}\right) = 4\pi A^2 \left(2re^{-2r/a} - r^2 e^{-2r/a}\frac{2}{a}\right) =$$

$$= 8\pi A^2 re^{-2r/a}\left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

та прирівняємо її до нуля:

$$8\pi A^2 re^{-2r/a}\left(1 - \frac{r_i}{a}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{r_i}{a} = 0 \Rightarrow r_i = a.$$

Ураховуючи, що a – борівський радіус, дійдемо висновку

$$r_i = a = 5,29 \cdot 10^{-11}\,(м).$$

Відповідь: $r_i = 5,29 \cdot 10^{-11}$ $м$.

ПРИКЛАД 2.16

Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; А і a – сталі. Визначити:

а) сталі А і a;

б) енергію електрона W_1;

в) найбільш імовірну відстань між електроном і ядром;

г) середнє значення модуля кулонівської сили, що діє на електрон;

д) середнє значення потенціальної енергії електрона в полі ядра.

$A-?\ \ a-?\ \ W_1-?$ $r_i-?\ \ \langle F_K\rangle-?\ U-?$
$\psi = Ae^{-r/a}$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Значення нормувальної сталої A візьмемо з прикладу 2.11:

$$A = 1\Big/\sqrt{\pi a^3}\,. \tag{1}$$

Підставимо вираз для хвильової функції з умови задачі

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a} \tag{2}$$

у рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 r} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - U\right)\psi = 0\,. \tag{3}$$

Потенціальна енергія електрона в кулонівському полі

$$U = \frac{-ke^2}{r}, \tag{4}$$

де $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; e – заряд електрона; ε_0 – електрична стала.

Після ряду перетворень одержимо:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 r} = \frac{\partial^2}{\partial^2 r}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a},$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{ke^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a} = 0\,,$$

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)+\frac{2}{r}\left(+\frac{kme^2}{\hbar^2 r}\right)=0,$$

$$a=\frac{\hbar^2}{kme^2} \quad W=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}. \tag{5}$$

При $n=1$
$$W_1=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}=-\frac{ke^2}{2}=-2\pi\varepsilon_0 e^2. \tag{6}$$

Ймовірність того, що частинка міститься між двома нескінченно близькими сферичними поверхнями з радіусами r і $r+dr$, визначається виразом

$$d\Psi=4\pi\left|\psi(r)\right|^2 r^2 dr. \tag{7}$$

З виразу (7) випливає, що найбільш імовірна відстань між електроном і ядром відповідає максимуму функції $d\Psi/dr$. Продиференціюємо цю функцію та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d}{dr}\left[4\pi\left|\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}\right|^2 r^2\right]=0,$$

$$4\pi\left[\frac{1}{\pi a^3}e^{-2r/a}\left(-\frac{2}{a}\right)r^2+\frac{1}{\pi a^3}e^{-2r/a}2r\right]=0 \Rightarrow e^{-2r/a}2r\left[\left(-\frac{1}{a}\right)r+1\right]=0.$$

Таким чином, найімовірніша відстань дорівнює

$$r_i=a.$$

Середнє значення модуля кулонівської сили $F(r)=ke^2/r^2$, що діє на електрон, визначається формулою

$$\langle F_K\rangle=\int_0^\infty F(r)\left|\psi^2\right|4\pi r^2 dr=\frac{4ke^2}{a^3}\int_0^\infty e^{-2r/a}dr=\frac{4ke^2}{a^3}\frac{a}{2}=\frac{2ke^2}{a^2}.$$

Аналогічно визначається середнє значення потенціальної енергії $U(r)=-ke^2/r$:

$$\langle U\rangle=\int_0^\infty U(r)\left|\psi^2\right|4\pi r^2 dr=-4\pi\int_0^\infty\frac{ke^2}{r}e^{-2r/a}r^2 dr=-\frac{4\pi ke^2}{\pi a^3}\int_0^\infty re^{-2r/a}dr=-\frac{ke^2}{a}.$$

Відповідь: а) $A=1/\sqrt{\pi a^3}$; $a=\hbar^2/kme^2$; б) $W_1=-2\pi\varepsilon_0 e^2$; в) $r_i=a$;
г) $\langle F_K\rangle=2ke^2/a^2$; д) $\langle U\rangle=-ke^2/a$.

ПРИКЛАД 2.16

Частинка з енергією W рухається в додатному напрямку осі x та зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює U_0, а ширина l, причому $W < U_0$. Записати рівняння Шредінгера для областей I, II і III.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

W,
U_0

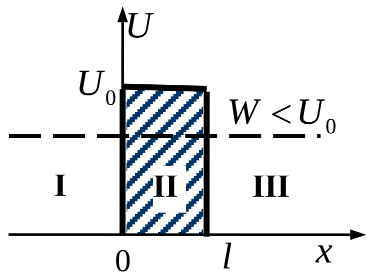


Рисунок 2.8 – Потенціальний бар'єр

Використаємо одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-U\right)\psi=0,$$

де W – повна енергія частинки; U – потенціальна енергія; ψ – координатна (або амплітудна) частина хвильової функції.

Для областей I і III потенціальна енергія дорівнює $U=0$, тоді рівняння Шредінгера для них запишемо таким чином:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}+\frac{2m}{\hbar^2}W\psi=0.$$

Для області II

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-U_0\right)\psi=0,$$

причому $W-U_0<0$.

ПРИКЛАД 2.17

Моноенергетичний потік електронів $(W = 100\,eB)$ падає на низький прямокутний потенціальний бар'єр нескінченної ширини (рис. 2.7). Визначити висоту потенціального бар'єра *U*, якщо відомо, що 4 % електронів, що падають на бар'єр, відбивається.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$U - ?$

$W = 100\,eB = 1{,}6 \cdot 10^{-17}$ *Дж*,

$\rho = 0{,}4$

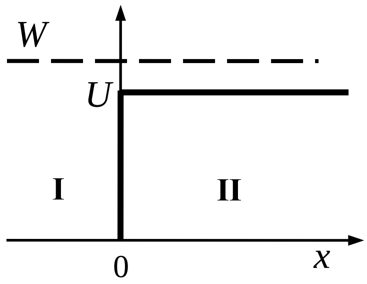


Рисунок 2.9 – Потенціальний бар'єр

Коефіцієнт відбивання електронів від низького потенціального бар'єра задається виразом

$$\rho = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right|^2,$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа, що відповідають руху електронів в областях *I* та *II*.

В області *I* кінетична енергія електрона дорівнює W, відповідно хвильове число задається виразом

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mW}.$$

Оскільки координата електрона не визначена, імпульс електрона визначається точно, а з цього випливає, що можна говорити про точне значення його кінетичної енергії.

В області *II* кінетична енергія електрона дорівнює $W - U$, відповідно хвильове число записується у вигляді

$$k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(W - U)}.$$

Коефіцієнт відбивання можна записати таким чином:

$$\rho = \left| \frac{\sqrt{2mW} - \sqrt{2m(W-U)}}{\sqrt{2mW} + \sqrt{2m(W-U)}} \right|^2 . \qquad (1)$$

Поділимо чисельник та знаменник дробу (1) на $\sqrt{2mW}$ та одержимо

$$\rho = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{U}{W}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{U}{W}}} \right|^2 . \qquad (2)$$

Розв'язавши рівняння (2) відносно $\sqrt{1 - U/W}$, одержимо:

$$\rho \left(1 + \sqrt{1 - \frac{U}{W}} \right)^2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{U}{W}} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\rho} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{U}{W}} \right) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{U}{W}} \right),$$

$$\sqrt{\rho} + \sqrt{\rho} \sqrt{1 - \frac{U}{W}} = 1 - \sqrt{1 - \frac{U}{W}} \Rightarrow \left(1 + \sqrt{\rho} \right) \sqrt{1 - \frac{U}{W}} = 1 - \sqrt{\rho},$$

$$\sqrt{1 - \frac{U}{W}} = \frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} .$$

Підносячи обидві частини рівності до квадрата, знайдемо висоту потенціального бар'єра:

$$1 - \frac{U}{W} = \left(\frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} \right)^2 \Rightarrow U = W \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\rho}}{1 + \sqrt{\rho}} \right)^2 \right] . \qquad (3)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (3) знайдемо відповідь

$$U = 100 \left[1 - \left(\frac{1 - \sqrt{0,04}}{1 + \sqrt{0,04}} \right)^2 \right] = 55,6 (eB) .$$

Відповідь: $U = 55,6\ eB$.

ПРИКЛАД 2.18

Частинка масою $m = 10^{-19}\,кг$ під час руху в додатному напрямку осі x зі швидкістю $\mathrm{v} = 20\,м/с$ зустрічає на своєму шляху нескінченно широкий прямокутний потенціальний бар’єр, висота якого дорівнює $U = 100\,eB$. Визначити коефіцієнт відбивання хвиль де Бройля на межі потенціального бар’єра.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$\rho - ?$

$m = 10^{-19}\,кг$,

$U = 100\,eB = 1{,}6 \cdot 10^{-17}\,Дж$,

$\mathrm{v} = 20\,м/с$

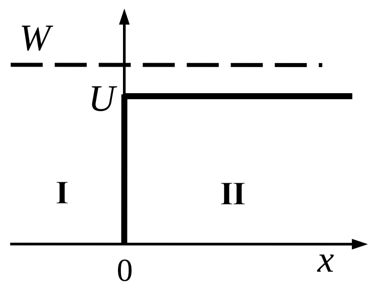


Рисунок 2.10 – Потенціальний бар’єр

Кінетична енергія частинки дорівнює

$$W = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \tag{1}$$

Коефіцієнт відбивання електронів від низького потенціального бар'єра задається виразом

$$\rho = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2, \tag{2}$$

де k_1 і k_2 – хвильові числа, що відповідають руху електронів у областях *I* та *II*.

В області *I* кінетична енергія електрона дорівнює W, відповідно хвильове число задається виразом

$$k_1 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mW}. \tag{3}$$

Оскільки координата електрона не визначена, імпульс електрона визначається точно, а з цього випливає, що можна говорити про точне значення його кінетичної енергії.

В області II кінетична енергія електрона дорівнює $W-U$, відповідно хвильове число записується у вигляді

$$k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(W-U\right)}. \tag{4}$$

Коефіцієнт відбивання можна записати таким чином:

$$\rho = \left|\frac{\sqrt{2mW} - \sqrt{2m\left(W-U\right)}}{\sqrt{2mW} + \sqrt{2m\left(W-U\right)}}\right|^2. \tag{5}$$

Поділимо чисельник та знаменник дробу (5) на $\sqrt{2m}$ та одержимо

$$\rho = \left|\frac{\sqrt{W} - \sqrt{W-U}}{\sqrt{W} + \sqrt{W-U}}\right|^2. \tag{6}$$

З виразу (1) визначимо енергію частинки

$$W = \frac{10^{-19}400}{2} = 2\cdot 10^{-17}\left(Дж\right) = 125\left(еВ\right).$$

Порівнюючи енергію частинки з висотою потенціального бар'єра, дійдемо висновку, що $W > U$.

Підставимо у співвідношення (6) числові значення фізичних величин та визначимо коефіцієнт відбивання хвиль де Бройля на межі потенціального бар'єра:

$$\rho = \left|\frac{\sqrt{125} - \sqrt{125-100}}{\sqrt{125} + \sqrt{125-100}}\right|^2 = 0{,}146.$$

Відповідь: $\rho = 0{,}146$.

ПРИКЛАД 2.19

Електрон з енергією $W = 4{,}9 eB$ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого $U_0 = 5eB$. За якої ширини d бар'єра ймовірність його проходження дорівнює $\Psi = 0{,}2$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d - ?$
$W = 4{,}9eB = 7{,}84 \cdot 10^{-19}$ *Дж*, $U_0 = 5eB = 8 \cdot 10^{-19}$ *Дж*, $\Psi = 0{,}2$

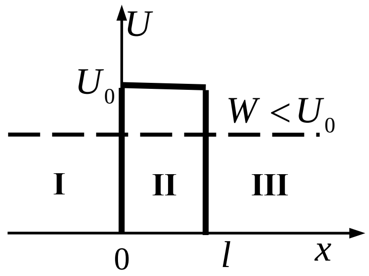


Рисунок 2.11 – Потенціальний бар'єр

Ймовірність проходження частинки через потенціальний бар'єр за своїм фізичним змістом збігається з коефіцієнтом прозорості $(D = \Psi)$. Тоді ймовірність того, що електрон пройде через прямокутний потенціальний бар'єр, визначається співвідношенням

$$D \approx \exp\left[-\frac{2}{\hbar} d \sqrt{2m(U - W)}\right] ,$$

де U – висота потенціального бар'єра; W – енергія частинки; d – ширина бар'єра; m – маса частинки.

Виконаємо перетворення:

$$\ln D = -\frac{2}{\hbar} d \sqrt{2m(U - W)} \quad \Rightarrow \quad d = -\hbar \frac{\ln D}{2\sqrt{2m(U - W)}}.$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин та проведемо розрахунки:

$$d = -1{,}05 \cdot 10^{-34} \frac{\ln 0{,}2}{2\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} (8 - 7{,}84) \cdot 10^{-19}}} .$$

Відповідь: $d = 0{,}5 \textit{нм}$.

ПРИКЛАД 2.20

Довести, що хвильова функція $\psi(x) = Axe^{-x^2\sqrt{mk}/(2\hbar)}$ може бути розв'язанням рівняння Шредінгера для гармонічного осцилятора, маса якого m і стала квазіпружної сили k. Визначити власне значення повної енергії осцилятора.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$

$\psi(x) = Axe^{-x^2\sqrt{mk}/(2\hbar)}$,

$m,\ k$

Одновимірне рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0, \qquad (1)$$

де W – повна енергія частинки; $U(x)$ – потенціальна енергія; $\psi(x)$ – координатна (або амплітудна) частина хвильової функції.

Потенціальна енергія гармонічного осцилятора визначається співвідношенням $U(x) = m\omega_0^2 x^2/2$, тоді

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(W - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0. \qquad (2)$$

Уведемо позначення, $a = \sqrt{mk}/(2\hbar)$, запишемо хвильову функцію у вигляді

$$\psi(x) = Axe^{-ax^2} \qquad (3)$$

та визначимо другу похідну від неї:

$$\frac{d\psi}{dx} = Ae^{-ax^2} - 2aAx^2e^{-ax^2},$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -2aAxe^{-ax^2} - 4aAxe^{-ax^2} + 4a^2Ax^3e^{-ax^2} = -6aAxe^{-ax^2} + 4a^2Ax^3e^{-ax^2}.$$

Підставимо значення похідної в рівняння Шредінгера (2):

$$-6aAxe^{-ax^2}+4a^2Ax^3e^{-ax^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(W-\frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right)Axe^{-ax^2}=0,$$

$$-6a+4a^2x^2+\frac{2m}{\hbar^2}W-\frac{m^2\omega_0^2x^2}{\hbar^2}=0.$$

Урахуємо, що власна частота коливань гармонічного осцилятора дорівнює $\omega_0=\sqrt{k/m}$, і підставимо вираз для a:

$$-\frac{3\sqrt{mk}}{\hbar}+\frac{mk}{\hbar^2}x^2+\frac{2m}{\hbar^2}W-\frac{mkx^2}{\hbar^2}=0,\qquad W=\frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\;\Rightarrow\; W=\frac{3}{2}\hbar\omega_0.$$

Відповідь: $W=\dfrac{3}{2}\hbar\omega_0$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

ТЕОРІЯ ДЕ БРОЙЛЯ

2.1 Визначити імпульс і енергію: а) рентгенівського фотона; б) електрона. Довжина хвилі кожного $\lambda = 10^{-10}\,м$.

Відповідь: а) $p_\gamma = 6,63 \cdot 10^{-24}\,Н \cdot с$, $W_\gamma = 12,4\,кеВ$; б) $p_e = 6,63 \cdot 10^{-24}\,Н \cdot с$, $W_e = 151\,еВ$.

2.2 Визначити довжину хвилі де Бройля λ електрона, якщо його швидкість $\mathrm{v} = 1\,Мм/с$. Виконати такий самий розрахунок для протона.

Відповідь: $\lambda_e = 7,28 \cdot 10^{-10}\,м$; $\lambda_p = 3,97 \cdot 10^{-13}\,м$.

2.3 Кінетична енергія протона дорівнює його енергії спокою. Визначити довжину хвилі де Бройля цього протона.

Відповідь: $\lambda_p = 7,64 \cdot 10^{-16}\,м$.

2.4 Визначити, за якої швидкості руху довжина хвилі де Бройля для електрона дорівнює комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $\mathrm{v} = 2,12 \cdot 10^{8}\,м/с$.

2.5 Визначити масу зарядженої частинки $(q = e)$, що після прискорення різницею потенціалів U = 500 *В* має довжину хвилі де Бройля $\lambda = 1,28\,пм$.

Відповідь: $m = 1,672 \cdot 10^{-27}\,кг$.

2.6 Визначити, яку прискорювальну різницю потенціалів повинен пройти протон, щоб довжина хвилі де Бройля для нього дорівнювала $\lambda = 1\,нм$.

Відповідь: $U = 0,822\,мВ$.

2.7 Одержати: 1) залежність між довжиною хвилі де Бройля λ релятивістської частинки та її кінетичною енергією; 2) залежність між довжиною хвилі де Бройля λ релятивістського електрона та прискорювальним потенціалом.

Відповідь: 1) $\lambda = hc \big/ \left[W_K \left(W_K + 2mc^2 \right) \right]$; 2) $\lambda = hc \big/ \left[eU \left(2mc^2 + eU \right) \right]$.

2.8 Визначити кінетичні енергії протона та електрона, для яких довжина хвилі де Бройля дорівнює $\lambda = 0,06\,нм$.

Відповідь: $W_{K,p} = 0,23\,еВ$; $W_{K,e} = 419\,еВ$.

2.9 Кінетична енергія протона дорівнює його енергії спокою. Як зміниться довжина хвилі протона при збільшенні кінетичної енергії вдвічі?

Відповідь: $\lambda_1/\lambda_2 = 1,63$.

2.10 Якої енергії необхідно додатково надати електрону, щоб його дебройлівська довжина хвилі зменшилася від $\lambda_1 = 100\,пм$ до $\lambda_2 = 50\,пм$?

Відповідь: $W = 0,45\,кеВ$.

2.11 Електрон рухається по колу радіусом $r = 0,5\,см$ в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 8\,мТл$. Визначити його довжину хвилі де Бройля λ.

Відповідь: $\lambda = 0,1\,нм$.

2.12 Знайти довжину хвилі де Бройля для α-частинки, нейтрона і молекули азоту, що рухаються із середньою квадратичною швидкістю за температури $t = 25\,^0C$.

Відповідь: $\lambda_\alpha = 73\,пм; \lambda_n = 145\,пм; \lambda_N = 28\,пм$.

2.13 Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, що рухається по першій борівській орбіті в атомі водню.

Відповідь: $\lambda_e = 0,33\,нм$.

2.14 Знайти довжину хвилі де Бройля для електрона, що перебуває на третій борівській орбіті в атомі водню.

Відповідь: $\lambda_e = 1\,нм$.

2.15 Протон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 15\,мТл$ по колу $R = 1,4\,м$. Визначити довжину хвилі протона.

Відповідь: $\lambda_p = 0,197\,пм$.

2.16 Визначити довжину хвилі де Бройля електрона з кінетичною енергією $W_K = 1\,кеВ$.

Відповідь: $\lambda_e = 38,8\,пм$.

2.17 Кінетична енергія електрона дорівнює $W_K = 0,6\,МеВ$. Визначити довжину хвилі де Бройля.

Відповідь: $\lambda_e = 1,26\,пм$.

2.18 Визначити, за якого значення кінетичної енергії довжина хвилі де Бройля електрона дорівнює його комптонівській довжині хвилі.

Відповідь: $W_K = 0,212\,МеВ$.

2.19 Визначити, як зміниться довжина хвилі де Бройля електрона в атомі водню при переході його з четвертої борівської орбіти на другу.

Відповідь: $\lambda_4/\lambda_2 = 2$.

2.20 Отримайте зв'язок між довжиною колової електронної орбіти та довжиною хвилі де Бройля.

Відповідь: $2\pi r = n\lambda$.

2.21 У досліді Девіссона та Джермера, які виявили дифракційну картину при відбиванні пучка електронів від природної дифракційної гратки – монокристала нікелю, виявилося, що під кутом $\alpha = 55^0$ відносно напрямку падаючих електронів спостерігається максимум відбивання четвертого порядку при кінетичній енергії електронів $W_K = 180\,eB$. Визначити відстань між кристалографічними площинами нікелю.

Відповідь: $d = 0,206\,нм$.

2.22 Моноенергетичний пучок нейтронів, одержаний унаслідок ядерної реакції, падає на кристал із періодом $d = 0,15\,нм$. Визначити швидкість нейтронів, якщо брегівське відбивання першого порядку спостерігається при куті ковзання $\vartheta = 30^0$.

Відповідь: $\mathrm{v} = 2,64\,км/с$.

2.23 Паралельний пучок моноенергетичних електронів спрямований на вузьку щілину шириною $b = 1\,мкм$. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який міститься на відстані $l = 20\,см$ від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x = 48\,мкм$.

Відповідь: $\mathrm{v} = 6,06\,Мм/с$.

2.24 Паралельний пучок електронів, прискорений різницею потенціалів $U = 50\,B$, спрямований нормально на дві паралельні щілини, що містяться в одній площині. Відстань між щілинами дорівнює $d = 10\,мкм$. Визначити відстань між центральним і першим максимумами дифракційної картини на екрані, що міститься на відстані $l = 0,6\,м$ від щілин.

Відповідь: $\Delta x = 10,4\,мкм$.

СПІВВІДНОШЕННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

2.25 Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити розміри ядра атома, вважаючи, що мінімальна енергія нуклона в ядрі 8 *МеВ*.

Відповідь: $d = 1{,}6\,фм$.

2.26 Використовуючи співвідношення невизначеностей, показати, що в ядрі не можуть перебувати електрони. Лінійні розміри ядра взяти такими, що дорівнюють $d = 5{,}8\,фм$. Урахувати, що питома енергія зв'язку в середньому становить 8 *МеВ*/*нуклон*.

Відповідь: $W_K = 80\,МеВ \gg 8\ МеВ$.

2.27 Середня кінетична енергія електрона в основному стані атома водню дорівнює $W = 13{,}6\,еВ$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, знайти найменшу похибку, з якою можна обчислити координату електрона в атомі.

Відповідь: $\Delta x = 52{,}8\,пм$.

2.28 Електронний пучок прискорюється в електронно-променевій трубці різницею потенціалів $U = 200\,В$. Визначити, чи можливо одночасно виміряти траєкторію електрона з точністю до $\Delta x = 100\,пм$ (точністю порядку діаметра атома) і його швидкість із точністю до 10 %.

Відповідь: $\Delta x\, m\mathrm{v}_x = 7{,}64 \cdot 10^{-35}\ Дж \cdot с < \hbar$.

2.29 Ширина сліду електрона, кінетична енергія якого $W_K = 1{,}5\,кеВ$, на фотоплівці, одержаного за допомогою камери Вільсона, дорівнює $\Delta x = 1\,мкм$. Визначити, чи можна за таким слідом виявити відхилення в русі електрона від законів класичної механіки.

Відповідь: $\Delta p / p \ll 1$, ні.

2.30 Електронний пучок прискорюється в електронно-променевій трубці різницею потенціалів $U = 1\,кВ$. Відомо, що невизначеність швидкості дорівнює 0,1 % від її числового значення. Визначити невизначеність координати електрона. Чи є електрони в такому досліді класичною частинкою?

Відповідь: $\Delta x = 38{,}8\,нм$, ні.

2.31 Знайти відношення невизначеностей швидкості електрона, якщо його координата встановлена з точністю до $\Delta x = 10\,мкм$, та пилинки масою $m = 1\,пкг$, якщо її координата встановлена з такою самою точністю.

Відповідь: $\Delta v_e / \Delta v_n = 1{,}1 \cdot 10^{18}$.

2.32 За допомогою співвідношення невизначеностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$ оцінити мінімально можливу енергію електрона в атомі водню. Взяти невизначеність координати такою, що дорівнює радіусу атома. Порівняти одержаний результат із теорією Бора.

Відповідь: $W_{\min} = 13{,}6\,еВ$.

2.33 Електрон рухається в атомі водню по першій борівській орбіті. Знайти невизначеність координати електрона, якщо невизначеність його швидкості дорівнює 10 % від її числового значення. Чи є застосовним у цьому випадку для електрона поняття траєкторії?

Відповідь: $\Delta x = 3{,}34\,нм \gg r_0$.

2.34 Довести із співвідношення невизначеностей, що для частинки, невизначеність координати якої дорівнює довжині хвилі де Бройля, невизначеність швидкості дорівнює за порядком величини самій швидкості частинки.

2.35 Оцінити найменші похибки, з якими можна визначити швидкість електрона, протона і кульки масою $m = 1\,мг$, якщо координати частинок і центра кульки встановлені з невизначеністю $\Delta x = 1\,мкм$.

Відповідь: $\Delta v_e = 115\,м/с$; $\Delta v_p = 0{,}063\,м/с$; $\Delta v_к = 10^{-22}\,м/с$.

2.36 Електрон з кінетичною енергією $W_K = 15\,еВ$ міститься в металевій пилинці діаметром $d = 1\,мкм$. Оцінити відносну похибку $\Delta v / v$, з якою може бути визначена його швидкість.

Відповідь: $\Delta v / v = 3{,}18 \cdot 10^{-4}$.

2.37 Скориставшись співвідношенням невизначеностей, оцінити розмитість енергетичного рівня у атомі водню: 1) для основного стану; 2) для збудженого стану (час його життя дорівнює $\tau = 10^{-8}\,с$).

Відповідь: $\Delta W_1 = 0$; $\Delta W_2 = 414\,неВ$.

2.38 Довжина хвилі фотона, який випромінюється атомом, дорівнює $\lambda = 0,6\,мкм$. Ураховуючи, що час життя збудженого стану $\Delta t = 10^{-8}\,с$, визначити відношення природної ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, що випромінюється атомом.

Відповідь: $\Delta W / W = 3,18 \cdot 10^{-8}$.

2.39 Знайти невизначеність енергії електрона, коли він перебуває в атомі діаметром $d = 0,3\,нм$.

Відповідь: $\Delta W = 16,7\,eB$.

2.40 Середній час життя атома в збудженому стані дорівнює $\Delta t = 12\,нс$. Знайти мінімальну невизначеність $\Delta\lambda$ довжини хвилі $\lambda = 12\,мкм$ випромінювання при переході атома в основний стан.

Відповідь: $\Delta\lambda = 6,4 \cdot 10^{-16}\,м$.

2.41 Середній час життя π^0-мезона дорівнює $\tau = 1,9 \cdot 10^{-16}\,c$. Чому дорівнює енергетична роздільна здатність приладу, за допомогою якого можна зареєструвати π^0-мезон?

Відповідь: $\Delta W = 5,6 \cdot 10^{-19}\,Дж$.

2.42 Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 0,55\,мкм$. Тривалість випромінювання $\Delta t = 10\,нс$. Визначити найменшу похибку, з якою можна виміряти довжину хвилі випромінювання.

Відповідь: $\Delta\lambda = 1,6 \cdot 10^{-14}\,м$.

2.43 Середній час життя атома в збудженому стані дорівнює $\Delta t = 10\,нс$. Визначити природну ширину $\Delta\lambda$ спектральної лінії $(\lambda = 12\,мкм)$, що відповідає переходу між збудженими рівнями атома.

Відповідь: $\Delta\lambda = 5,2 \cdot 10^{-14}\,м$.

2.44 Кінетична енергія електрона в атомі водню порядку $W_K = 10\,eB$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити лінійні розміри атома.

Відповідь: $l_{\min} = 1,23 \cdot 10^{-10}\,м$.

РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА

2.45 ψ – функція частинки має вигляд $\psi = \dfrac{A}{r}e^{-r/a}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Використовуючи умову нормування ймовірностей, визначити нормувальний коефіцієнт A.

Відповідь: $A = \sqrt{1/(2\pi a)}$.

2.46 Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Використовуючи умову нормування ймовірностей, визначити нормувальний коефіцієнт A.

Відповідь: $A = 1,47 \cdot 10^{15}\ м^{-3/2}$.

2.47 ψ – функція частинки має вигляд $\psi = Ae^{-r^2/2a^2}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Використовуючи умову нормування ймовірностей, визначити нормувальний коефіцієнт A.

Відповідь: $A = \sqrt{1/(\pi^{3/2}a^3)}$.

2.48 ψ – функція частинки має вигляд $\psi = \dfrac{A}{r}e^{-r/a}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Визначити середню відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра.

Відповідь: $\langle r \rangle = a/2$.

2.49 ψ – функція частинки має вигляд $\psi = Ae^{-r^2/2a^2}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Визначити середню відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра.

Відповідь: $\langle r \rangle = 2a/\sqrt{\pi}$.

2.50 Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити середнє значення квадрата відстані $\langle r^2 \rangle$ електрона до ядра в основному стані.

Відповідь: $\langle r^2 \rangle = 3a^2 = 8,4 \cdot 10^{-21}\ м^2$.

2.51 Хвильова функція, що описує частинку, має вигляд $\psi = \dfrac{A}{r} e^{-r^2/a^2}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; A – нормувальний множник, який дорівнює $A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a \sqrt{2\pi}}}$, a – стала. Визначити середнє значення квадрата відстані $\langle r^2 \rangle$ частинки до силового центра.

Відповідь: $\langle r^2 \rangle = a^2/4$.

2.52 Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню, $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити найбільш імовірну відстань r_i електрона до ядра.

Відповідь: $r_i = a = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ *м*.

2.53 Хвильова функція, що описує частинку, має вигляд $\psi = Ae^{-r^2/(2a^2)}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Визначити найбільш імовірну відстань r_i частинки до силового центра.

Відповідь: $r_i = a$.

2.54 Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; А і a – сталі. Визначити:

а) сталі А і a;

б) енергію електрона W_1;

в) найбільш ймовірну відстань між електроном і ядром;

г) середнє значення модуля кулонівської сили, що діє на електрон;

д) середнє значення потенціальної енергії електрона в полі ядра.

Відповідь: а) $A = 1/\sqrt{\pi a^3}$; $a = \hbar^2/kme^2$; б) $W_1 = -2\pi\varepsilon_0 e^2$; в) $r_i = a$;

г) $\langle F_K \rangle = 2ke^2/a^2$; д) $\langle U \rangle = -ke^2/a$.

2.55 Доведіть, що хвильова функція $\psi(x) = Axe^{-x^2\sqrt{mk}/(2\hbar)}$ може бути розв'язанням рівняння Шредінгера для гармонічного осцилятора, маса якого m і стала квазіпружної сили k. Визначити власне значення повної енергії осцилятора.

Відповідь: $W = 1{,}5\hbar\omega_0$.

2.56 Частинка масою m рухається в одновимірному потенціальному полі $U(x) = kx^2/2$ (гармонічний осцилятор). Хвильова функція, що описує поведінку частинки в основному стані, має вигляд $\psi(x) = Ae^{-ax^2}$, де A – нормувальний коефіцієнт; a – стала. Використовуючи рівняння Шредінгера, визначити: 1) сталу a; 2) енергію частинки в цьому стані.

Відповідь: 1) $a = m\omega_0/(2\hbar)$; 2) $W = k\omega_0/2$, де $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

2.57 Математичний маятник можна розглядати як гармонічний осцилятор. Визначити енергію нульових коливань, W_0, *еВ*, для маятника довжиною $l = 1\,м$, який перебуває в полі тяжіння Землі.

Відповідь: $W_0 = 1{,}03 \cdot 10^{-15}\,eB$.

2.58 Маса математичного маятника дорівнює $m = 100\,г$, а довжина $l = 0{,}5\,м$. Визначити амплітуду A, яка відповідає енергії нульових коливань цього маятника, за умови, що маятник можна вважати гармонічним осцилятором.

Відповідь: $A = 1{,}54 \cdot 10^{-17}\,м$.

ЧАСТИНКА В ПОТЕНЦІАЛЬНІЙ ЯМІ

2.59 Знайти хвильову функцію і значення енергії частинки масою *m*, що перебуває в одновимірній нескінченно глибокій потенціальній ямі шириною l.

Відповідь: $\psi_n = \sqrt{2/l}\sin n\pi x/l$; $W = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$.

2.60 Електрон перебуває в потенціальній ямі шириною *l*. В яких точках в інтервалі *(0 < x <l)* густина ймовірностей перебування електрона на першому і другому енергетичних рівнях однакова? Підрахувати густину ймовірності для цих точок. Розв`язок пояснити графічно.

Відповідь: $x_1 = l/3$; $x_1 = 2l/3$; $|\psi|^2 = 3/2l$.

2.61 Частинка в потенціальний ямі шириною l перебуває в збудженому стані. Визначити ймовірність знаходження частинки в інтервалі $0 < x < l/4$ на другому енергетичному рівні.

Відповідь: $\Psi = 0{,}25$.

2.62 Частинка в потенціальній ямі з нескінченно високими стінками перебуває в основному стані. Яка ймовірність Ψ виявлення частинки: а) в середній третині ящика; б) у крайній третині ящика?

Відповідь: а) $\Psi = 0,61$; б) $\Psi = 0,2$.

2.63 Частинка в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі шириною l перебуває в збудженому стані $(n = 3)$. Визначити, в яких точках інтервалу $0 < x < l$ густина ймовірності перебування частинки має максимальне і мінімальне значення.

Відповідь: $w = w_{\min}$ при $x = l/3, x = 2l/3$; $w = w_{\max}$ при $x = l/6, x = l/2, x = 5l/6$.

2.64 Електрон знаходиться в одновимірній потенціальній ямі шириною l. Визначити середнє значення координати $\langle x \rangle$ електрона $(0 < x < l)$.

Відповідь: $\langle x \rangle = l/2$.

2.65 Електрон перебуває в основному стані в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 0,1\,нм$. Визначити імпульс електрона.

Відповідь: $p = 3,3 \cdot 10^{-24}$ *кг·м/с*.

2.66 Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 1\,нм$. Визначити найменшу різницю енергетичних рівнів електрона.

Відповідь: $\Delta W = 0,37\,еВ$.

2.67 Електрон перебуває в одновимірній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, ширина якої $l = 1,4\,нм$. Визначити енергію, що випромінюється при переході електрона з третього енергетичного рівня на другий.

Відповідь: $\Delta W = 0,95\,еВ$.

2.68 Хвильова функція, що описує стан частинки в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками, має вигляд $\psi(x) = A\sin kx$. Визначити: 1) власну хвильову функцію $\psi_n(x)$; 2) нормувальний коефіцієнт A.

Відповідь: $\psi_n(x) = A\sin\dfrac{\pi n}{l}x$; $A = \sqrt{2/l}$.

2.69 Частинка в одновимірній потенціальній ямі шириною l із нескінченно високими стінками перебуває в збудженому стані $(n=2)$. Визначити ймовірність виявлення частинки в області $3l/8 \le x \le 5l/8$.

Відповідь: $\Psi = 0,091$.

2.70 Електрон перебуває в збудженому стані $(n=3)$ в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої l. Визначити ймовірність Ψ виявлення електрона в інтервалі $0 < x < l$. Зобразити графічно густину ймовірності виявлення електрона в такому стані та пояснити фізичний зміст одержаного результату.

Відповідь: $\Psi = 1/2$.

2.71 Електрон перебуває в збудженому стані $(n=3)$ в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої l. Визначити ймовірність Ψ виявлення електрона в середній третині ями. Зобразити графічно густину ймовірності виявлення електрона в такому стані та пояснити фізичний зміст одержаного результату.

Відповідь: $\Psi = 1/3$.

2.72 Визначити ширину одновимірної прямокутної потенціальної ями з нескінченно високими стінками, за якої дискретність енергетичного спектра електрона дорівнює енергії його теплового руху за температури $T = 300\,K$.

Відповідь: $l = 5,4 \cdot 10^{-9}\,м$.

2.73 Частинка перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками. Визначити, в скільки разів зміниться відношення різниці сусідніх енергетичних рівнів $\Delta W_{n+1,n}/W_n$ частинки при переході від $n=3$ до $n'=8$.

Відповідь: зменшиться втричі.

2.74 Визначити ширину одновимірної прямокутної потенціальної ями з нескінченно високими стінками, в якій енергія протона на першому рівні дорівнює $W = 10\,МеВ$.

Відповідь: $l = 4,7 \cdot 10^{-15}\,м$.

2.75 Частинка перебуває в основному стані в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною a.

Визначити відношення ймовірностей знаходження частинки в середній частині ями і на відстані $a/4$ від її краю. Яким буде це відношення, якщо частинка перебуває на другому енергетичному рівні?

Відповідь: 2; 0.

2.76 Визначити, за якої температури дискретність енергії електрона, що перебуває в одновимірній прямокутній потенціальній ямі з нескінченно високими стінками шириною $l = 2 \cdot 10^{-9}\ м$, дорівнює енергії теплового руху.

Відповідь: $T = 2166\,K$.

2.77 Визначити ширину одновимірної потенціальної ями з нескінченно високими стінками, якщо при переході електрона з третього енергетичного рівня на другий випромінюється енергія $\Delta W = 1 eB$.

Відповідь: $l = 1{,}37 \cdot 10^{-9}\ м$.

2.78 Довести, що енергія вільних електронів у металі не квантується. Вважати, що ширина прямокутної одновимірної потенціальної ями з нескінченно високими стінками для електрона в металі дорівнює $l = 10\,см$.

Відповідь: $\Delta W_n = 0{,}75 n \cdot 10^{-16}\ м$.

ПОТЕНЦІАЛЬНИЙ БАР’ЄР

2.79 Моноенергетичний потік електронів $(W = 100 eB)$ падає на низький прямокутний потенціальний бар’єр нескінченної ширини (рис. 1). Визначити висоту потенціального бар’єра U, якщо відомо, що 4 % електронів, що падають на бар’єр, відбивається.

Відповідь: $U = 55{,}6\ eB$.

2.80 Частинка з енергією W рухається в додатному напрямку осі x та зустрічає на своєму шляху потенціальний бар’єр, висота якого дорівнює U_0 і ширина l, причому $W < U_0$. Запишіть рівняння Шредінгера для областей 1, 2 і 3.

2.81 Електрон з енергією $W = 25 eB$ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар’єр, висота якого дорівнює $U_0 = 9 eB$. Визначити коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля на межі бар’єра.

Відповідь: $n = 0{,}8$.

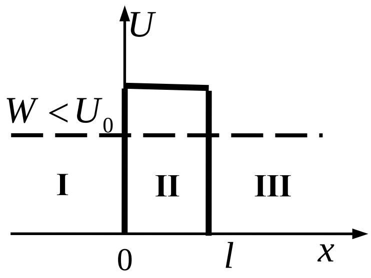


Рисунок 2.12 – До задачі 2.80

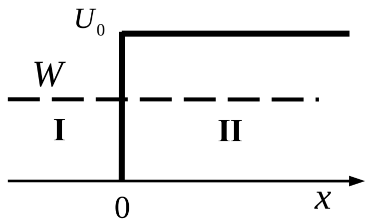


Рисунок 2.13 – До задачі 2.81

2.82 Частинка з енергією $W = 10\,eB$ зустрічає на своєму шляху нескінченно широкий прямокутний потенціальний бар'єр, висотою $U_0 = 5\,eB$. Визначити коефіцієнт заломлення хвиль де Бройля на межі бар'єра.

Відповідь: $n = 0,707$.

2.83 Електрон із довжиною хвилі де Бройля $\lambda_1 = 100\,пм$ проходить широкий прямокутний потенціальний бар'єр висотою $U_0 = 100\,eB$. Визначити довжину хвилі де Бройля λ_2 після проходження бар'єра.

Відповідь: $\lambda_2 = 172\,пм$.

2.84 Частинка з енергією $W = 50\,eB$ зустрічає на своєму шляху нескінченно широкий прямокутний потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює $U_0 = 20\,eB$. Визначити ймовірність відбивання частинки від цього бар'єра.

Відповідь: $\Psi = 0,016$.

2.85 Електрон з енергією $W = 10\,eB$ зустрічає на своєму шляху нескінченно широкий прямокутний потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює $U_0 = 6\,eB$. Визначити, у скільки разів зміняться його швидкість, довжина хвилі де Бройля та фазова швидкість при проходженні цього бар'єра.

Відповідь: $v_2/v_1 = 0,632$; $\sqrt{\lambda_2/\lambda_1} = 1,58$; $v_{ф2}/v_{ф1} = 0,632$.

2.86 Електрон з енергією $W = 100\,eB$ зустрічає на своєму шляху нескінченно широкий прямокутний потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює $U_0 = 64\,eB$. Визначити ймовірність відбивання електрона від бар'єра.

Відповідь: $\Psi = 0,0625$.

2.87 Частинка масою $m = 10^{-19}\,кг$ під час руху в додатному напрямку осі x зі швидкістю $v = 20\,м/с$ зустрічає на своєму шляху нескінченно широкий прямокутний потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює $U = 100\,eB$.

Визначити коефіцієнт відбивання хвиль де Бройля на межі потенціального бар'єра.

Відповідь: $\rho = 0{,}146$.

2.88 При якому відношенні висоти потенціального бар'єра до енергії електрона, що падає на бар'єр, коефіцієнт відбивання дорівнює $\rho = 0{,}5$?

Відповідь: $U/W = 0{,}971$.

2.89 Електрон з енергією $W = 10eB$ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр. Визначити висоту бар'єра, за якої показник заломлення хвиль де Бройля дорівнює коефіцієнту відбивання $n = \rho$.

Відповідь: $U_0 = 9{,}13eB$.

2.90 Електрон проходить через потенціальний прямокутний бар'єр шириною $d = 0{,}5\textit{нм}$. Висота бар'єра більша за енергію електрона на 1 %. Визначити коефіцієнт прозорості за умови, що енергія електрона дорівнює:
1) $W = 10eB$; 2) $W = 100eB$.

Відповідь: $D = 0{,}2$; $D = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$.

2.91 Ширина прямокутного потенціального бар'єра дорівнює $d = 0{,}2\textit{нм}$. Різниця між висотою бар'єра та енергією електрона, що падає на бар'єр, $U_0 - W = 1eB$. У скільки разів зміниться ймовірність проходження електрона через бар'єр, якщо різниця енергій збільшиться в 10 разів?

Відповідь: зменшиться у 79 разів.

2.92 Протон з енергією $W = 5eB$ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює $U_0 = 10eB$, а ширина $d = 0{,}1\textit{нм}$. Визначити ймовірність проходження протоном цього бар'єра. У скільки разів потрібно звузити бар'єр, щоб ймовірність походження його протоном була такою самою, як для електрона за вищенаведених умов?

Відповідь: $\Psi = 1{,}67 \cdot 10^{-43}$; $d/d' = 42{,}8$.

2.93 Ширина прямокутного потенціального бар'єра дорівнює $d = 0{,}1\textit{нм}$. Різниця між висотою бар'єра та енергією електрона, що падає на бар'єр, дорівнює $U_0 - W = 5eB$. Визначити, в скільки разів зміниться коефіцієнт прозорості потенціального бар'єра, якщо різниця енергій $U_0 - W$ збільшиться в 4 рази.

Відповідь: зменшиться у $D_1/D_2 = 10$ разів.

2.94 При якій ширині d прямокутного потенціального бар'єра коефіцієнт прозорості для електронів дорівнює $D = 0,01$? Різниця енергій $U_0 - W = 10 eB$.

Відповідь: $d = 0,143 нм$.

2.95 Електрон з енергією W рухається в додатному напрямку осі x та зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює U_0. За якого значення $U_0 - W$ коефіцієнт прозорості дорівнює $D = 0,001$? Ширина бар'єра $d = 0,1 нм$.

Відповідь: $U_0 - W = 0,45 eB$.

2.96 Електрон з енергією $W = 9 eB$ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого $U_0 = 10 eB$, а ширина $d = 0,1 нм$. Визначити ймовірність того, що електрон пройде через потенціальний бар'єр?

Відповідь: $\Psi = 0,2$.

2.97 Електрон з енергією $W = 4,9 eB$ зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого $U_0 = 5 eB$. При якій ширині d бар'єра ймовірність його проходження дорівнює $\Psi = 0,2$?

Відповідь: $d = 0,5 нм$.

2.98 Електрон з енергією W рухається в додатному напрямку осі x та зустрічає на своєму шляху потенціальний бар'єр, висота якого дорівнює U_0. При якому значенні енергій $U_0 - W$ ймовірність проходження електрона через бар'єр дорівнює $\Psi = 0,99$? Ширина бар'єра $d = 0,1 нм$.

Відповідь: $U_0 - W = 10^{-4} eB$.

2.99 Ядро випромінює α-частинки з енергією $W = 5 MeB$. Визначити коефіцієнт прозорості D бар'єра для α-частинок. Бар'єр має прямокутну форму, його висота дорівнює $U_0 = 10 MeB$, а ширина $d = 5 фм$.

Відповідь: $D = 0,89$.

2.100 Протон і електрон пройшли однакову прискорювальну різницю потенціалів $\Delta\varphi = 10 кB$. У скільки разів відрізняються коефіцієнти прозорості для електрона D_e і протона D_p, якщо бар'єр має висоту $U_0 = 20 кeB$ та ширину $d = 0,1 пм$?

Відповідь: $D_e / D_p \approx 74$.

РОЗДІЛ 3
ЕЛЕМЕНТИ ФІЗИКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

1 Теплоємність тіла. Закон Дюлонга і Пті.
2 Молярна теплоємність хімічно складних тіл.
3 Основні положення квантової теорії теплоємності Ейнштейна.
4 Теорія теплоємності кристалів за Дебаєм.
5 Електричні властивості твердих тіл.
6 Зонна теорія електропровідності кристалічних тіл.
7 Розподіл Фермі.
8 Контактні явища.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

3.1 Молярна внутрішня енергія хімічно простих (що складаються з однакових атомів) твердих тіл у класичній теорії теплоємності визначається за формулою

$$U_M = 3RT \ ,$$

де R – газова стала; T – термодинамічна температура.

3.2 Теплоємність тіла при сталому об'ємі визначається першою похідною від внутрішньої енергії U за температурою, тобто

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} \ .$$

Молярна теплоємність

$$C_M = \frac{dQ}{\nu dT} \ ,$$

де $\nu = m/M$ – кількість молів; M – молярна маса речовини.

Питома теплоємність

$$c = \frac{dQ}{m\, dT} \ .$$

3.3 Закон Дюлонга і Пті. Молярна теплоємність C_M хімічно простих твердих тіл визначається співвідношенням

$$C_M = 3R\,.$$

3.4 Закон Неймана – Коппа. Молярна теплоємність хімічно складних тіл (що складаються з різних атомів) дорівнює

$$C_M = 3nR\,,$$

де n – загальна кількість частинок у хімічній формулі сполуки.

3.5 Середнє значення енергії $\langle W \rangle$ квантового осцилятора, що припадає на один ступінь вільності, у квантовій теорії Ейнштейна визначається за формулою

$$\langle W \rangle = W_0 + \frac{\hbar\omega}{\exp\left[\hbar\omega/(kT)\right] - 1},$$

де W_0 – нульова енергія $\left(W_0 = 0{,}5\hbar\omega\right)$; ω – циклічна частота коливань осцилятора; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура.

3.6 Молярна внутрішня енергія кристала у квантовій теорії теплоємності Ейнштейна визначається співвідношенням

$$U_M = U_{M,0} + 3R\frac{\theta_E}{\exp\left(\theta_E/T\right) - 1},$$

де $U_{M,0} = 1{,}5R\theta_E$ – молярна нульова енергія за теорією Ейнштейна; $\theta_E = \hbar\omega/k$ – характеристична температура Ейнштейна.

3.7 Молярна теплоємність кристала у квантовій теорії теплоємності Ейнштейна дорівнює

$$C_M = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \frac{\exp\left(\theta_E/T\right)}{\left[\exp\left(\theta_E/T\right) - 1\right]^2}.$$

За низьких температур $\left(T \ll \theta_E\right)$:

$$C_M = 3R\left(\frac{\theta_E}{T}\right)^2 \exp\left(-\theta_E/T\right).$$

3.8 Молярна внутрішня енергія кристала за теорією Дебая дорівнює

$$U_M = U_{M,0} + 3RT \cdot 3\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3}{\exp(x)-1}dx,$$

де $U_{M,0} = \frac{9}{8}R\theta_D$ – молярна нульова енергія кристала за теорією Дебая; $\theta_D = \hbar\omega_{\max}/k$ – характеристична температура Дебая, $x = \hbar\omega/(kT)$.

3.9 Молярна теплоємність кристала за теорією Дебая визначається співвідношенням

$$C_M = 3R\left[12\left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3(\theta_D/T_1)}{e^{\theta_D/T_1} - 1}\right].$$

Граничний закон Дебая. В області низьких температур $(T \ll \theta_D)$ остання формула набере вигляду

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5}R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3.$$

3.10 Енергія ε фонона пов’язана з циклічною частотою ω коливань класичної хвилі співвідношенням

$$\varepsilon = \hbar\omega.$$

3.11 Квазіімпульс фонона

$$p = 2\pi\hbar/\lambda.$$

3.12 Швидкості поздовжніх v_l та поперечних v_t хвиль у кристалі визначаються за формулами:

$$\mathrm{v}_l = \sqrt{E/\rho},\ \mathrm{v}_t = \sqrt{G/\rho},$$

де E і G – модулі відповідно поздовжньої та поперечної пружності (модуль Юнга та модуль зсуву); ρ – густина тіла.

ЕЛЕКТРИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТВЕРДИХ ТІЛ

3.13 Закони Ома і Джоуля – Ленца в диференціальній формі

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad \omega_P = \sigma E^2,$$

де j – густина струму; ω_P – об'ємна густина теплової потужності; σ – питома провідність; E – напруженість електричного поля.

3.14 Питома електрична провідність визначається співвідношенням

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2 n \langle l \rangle}{m \langle u \rangle},$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – концентрація електронів; $\langle l \rangle$ – середня довжина їх вільного пробігу; $\langle u \rangle$ – середня швидкість хаотичного руху електронів.

3.15 Закон Відемана – Франца має вигляд

$$\frac{\lambda}{\sigma} = 3\frac{k^2}{e^2}T,$$

де λ – теплопровідність; σ – питома електропровідність; k – стала Больцмана.

3.16 Розподіл Фермі за енергіями для вільних електронів у металі має вигляд:

при $T \neq 0$ $$dn(W) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{W^{1/2}dW}{\exp\left[\left(W - W_F\right)/kT\right] + 1};$$

при $T = 0$ $$dn(W) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} W^{1/2}dW \text{ (при } W < W_F,$$

де $dn(W)$ – концентрація електронів, енергія яких перебуває в інтервалі значень від W до $W + dW$; m і W – маса та енергія електрона; W_F – рівень (або енергія) Фермі.

3.17 Енергія рівня Фермі в металі при $T = 0$:

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3},$$

де n – концентрація вільних носіїв.

3.18 Питома електропровідність власних напівпровідників визначається за формулою

$$\sigma = en\left(\mu_n + \mu_p\right),$$

де e – заряд електрона; n – концентрація носіїв заряду (електронів та дірок); μ_n і μ_p – рухомості електронів та дірок.

3.19 Концентрація вільних носіїв у власному напівпровіднику дорівнює

$$n_i = p_i = \frac{2\left(2\pi kT\sqrt{m_n m_p}\right)^{3/2}}{h^3}\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де m_n, m_p – ефективні маси електронів та дірок; ΔW – ширина забороненої зони матеріалу.

3.20 Концентрація вільних носіїв у домішковому напівпровіднику дорівнює

$$n = \frac{2\left(2\pi m_n kT\right)^{3/2}}{h^3}\exp\left(\frac{W_a}{2kT}\right),$$

де W_a – енергія активації атомів домішки.

3.21 Залежність питомого опору провідника від температури

$$\rho = \rho_0\left(1+\alpha T\right),$$

де ρ і ρ_0 – питомі опори відповідно за T та $T = 0\ {}^0C$; T – температура за шкалою Цельсія; α – температурний коефіцієнт опору.

3.22 Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає.

3.23 Положення рівня Фермі у власному напівпровіднику визначається співвідношенням

$$W_F = -\frac{\Delta W}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\frac{m_p}{m_n}.$$

3.24 Внутрішня контактна різниця потенціалів на межі між металами

$$U_i = \frac{W_{F1} - W_{F2}}{e},$$

де W_{F1} і W_{F2} – енергії Фермі ізольованих зразків металів; e – заряд електрона.

3.25 Зовнішня різниця потенціалів між двома зразками металів, розділених повітряним проміжком, дорівнює

$$U_K = \frac{A_{B1} - A_{B2}}{e},$$

де A_{B1} і A_{B2} – роботи виходу ізольованих зразків металів, e – заряд електрона.

3.26 Залежність струму I від напруги U для ідеального $p-n$-переходу

$$I = I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; e – елементарний заряд, $e = 1,6\cdot10^{-19}\,Кл$; k – стала Больцмана; T – абсолютна температура, $k = 1,38\cdot10^{-23}\,Дж/K = 8,625\cdot10^{-5}\,еВ/K$.

ПИТАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

1 Чому дорівнює молярна внутрішня енергія хімічно простих твердих тіл у класичній теорії теплоємності?

2 Дати визначення питомої та молярної теплоємностей.

3 Чому дорівнює молярна теплоємність хімічно простих та складних твердих тіл у класичній теорії теплоємності?

4 Пояснити фізичний зміст температури Дебая кристала.

5 Що таке фонон? Чому дорівнюють його енергія, квазіімпульс та швидкість?

6 Оцінити за порядком величини температуру Дебая за умови, що мінімальна довжина хвиль фононів у кристалі дорівнює $\lambda_{\min} = 2a \approx 0,6\,нм$ (a-стала гратки), а швидкість звуку $v = 5\,км/с$.

7 Пояснити фізичний зміст молярної нульової енергії кристала за теорією Дебая.

8 Ферміони та бозони. Розподіл Фермі – Дірака.

9 Рівень Фермі. Положення рівня Фермі в металі.

10 Положення рівня Фермі у власному напівпровіднику.

11 Пояснити різницю енергетичних станів електронів у кристалі та ізольованому атомі.

12 Як зміниться спектр енергій валентних електронів, якщо кількість атомів, які утворюють кристал, збільшити утричі?

13 Пояснити різницю електричних властивостей металів, діелектриків та напівпровідників із точки зору зонної теорії твердого тіла.

14 Як змінюється з температурою опір напівпровідника? Чому?

15 Ширина забороненої зони речовини дорівнює 1 еВ. Ця речовина є ізолятором чи напівпровідником?

16 Як змінюється з температурою опір провідника? Чому?

17 Пояснити механізм виникнення контактної різниці потенціалів із точки зору зонної теорії.

18 Внутрішня контактна різниця потенціалів на межі двох металів.

19 Зовнішня контактна різниця потенціалів на межі двох металів.

20 Сила струму у *p*–*n*-переході.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ПРИКЛАД 3.1

Визначити, з якого матеріалу виготовлена металева кулька, маса якої $m = 25\,г$, якщо відомо, що для її нагрівання від $T_1 = 10\,^0C$ до $T_2 = 30\,^0C$ необхідно витратити кількість теплоти $Q = 117\,Дж$. При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$M - ?$

$m = 25\,г = 0{,}025\,кг,$
$T_1 = 10\,^0C = 283\,K,$
$T_2 = 30\,^0C = 303\,K,$
$Q = 117\,Дж$

За визначенням молярна теплоємність дорівнює кількості теплоти dQ, необхідної для нагрівання одного моля речовини на один Кельвін:

$$C_M = \frac{dQ}{\nu dT},$$

$$dQ = \nu C_M dT \;\Rightarrow\; Q = \nu C_M \Delta T \;\Rightarrow\; Q = \nu C_M \left(T_2 - T_1\right). \quad (1)$$

Кількість речовини визначається зі співвідношення $\nu = m/M$, де M – молярна маса речовини.

За законом Дюлонга і Пті молярна теплоємність C_M хімічно простих твердих тіл визначається співвідношенням

$$C_M = 3R.$$

Підставимо молярну теплоємність із закону Дюлонга і Пті у вираз (1) та одержимо

$$Q = 3R\frac{m}{M}\left(T_2 - T_1\right) \;\Rightarrow\; M = 3R\frac{m}{Q}\left(T_2 - T_1\right).$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$M = 3 \cdot 8{,}31 \cdot \frac{25 \cdot 10^{-3}}{117} \cdot \left(303 - 283\right) = 0{,}1065\left(кг/моль\right).$$

За таблицею Менделєєва знаходимо, що цей метал – паладій.

Відповідь: $M = 0{,}1065\,кг/моль$ – паладій.

ПРИКЛАД 3.2

Визначити кількість теплоти ΔQ, необхідну для нагрівання кристала $NaCl$ масою $m = 20\,г$ на $\Delta T = 2\,K$ у двох випадках, коли нагрівання відбувається за температури: а) $T_1 = \theta_D$; б) $T_2 = 2\,K$. Характеристична температуру Дебая для $NaCl$ дорівнює $\theta_D = 320\,K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta Q - ?$

$m = 20\,г = 0{,}02\,кг,$
$\Delta T = 2\,K,$
$T_1 = \theta_D,$
$T_2 = 2\,K,$
$\theta_D = 320\,K,$
$R = 8{,}31\dfrac{Дж}{моль \cdot K},$
$M = 58{,}5 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$

Кількість теплоти ΔQ, необхідна для нагрівання тіла від температури τ_1 до τ_2, можна підрахувати за формулою

$$\Delta Q = \int_{\tau_1}^{\tau_2} C dT\,, \qquad (1)$$

де C – теплоємність тіла.

Теплоємність тіла пов'язана з молярною теплоємністю C_M співвідношенням

$$C = m/M\, C_M\,,$$

де m – маса тіла; M – молярна маса.

Тоді вираз (1) набере вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{M}\int_{\tau_1}^{\tau_2} C_M dT\,. \qquad (2)$$

У загальному випадку C_M є функцією температури, тому її не можна виносити за знак інтеграла. Але у випадку а) зміною теплоємності порівняно з її значенням за температури T_1 можна знехтувати і вважати, що на всьому інтервалі ΔT вона є сталою. З урахуванням вищевикладеного формула (2) набере вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{M} C_M \Delta T\,. \qquad (3)$$

Молярна теплоємність у теорії Дебая

$$C_M = 3R\left[12\left(\frac{T_1}{\theta_D}\right)^3 \int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3dx}{e^x-1} - \frac{3(\theta_D/T_1)}{e^{\theta_D/T_1}-1}\right].$$

У першому випадку при $T_1=\theta_D$ із таблиці інтегралів визначаємо

$$\int_0^{\theta_D/T} \frac{x^3dx}{e^x-1} = \int_0^1 \frac{x^3dx}{e^x-1} - 0,225,$$

тоді

$$C_M = 3R\left[12\cdot 1\cdot 0,225 - \frac{3\cdot 1}{e^1-1}\right] = 2,87\,R.$$

Підставимо значення C_M у співвідношення (3) та одержимо

$$\Delta Q = \frac{0,02}{58,5\cdot 10^{-3}} 2,87\cdot 8,31\cdot 2 = 16,3(\textit{Дж}).$$

У випадку б) $T \ll \theta_D$ для знаходження ΔQ скористаємося граничним законом Дебая, а саме

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R\left(\frac{T}{\theta_D}\right)^3,$$

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\int_{T_2}^{T_2+\Delta T} T^3dT = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\left[\frac{(T_2+\Delta T)^4}{4} - \frac{T_2{}^4}{4}\right].$$

Ураховуючи, що $T_2+\Delta T = 2T_2$, одержимо

$$\Delta Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\left[\frac{(2T_2)^4}{4} - \frac{T_2{}^4}{4}\right] = \frac{3\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}15T_2{}^4.$$

Виконаємо обчислення:

$$\Delta Q = \frac{3\pi^4}{5}\frac{8,31}{320^3}\frac{0,02}{58,5\cdot 10^{-3}}15\cdot 2^4 = 1,22\cdot 10^{-3}(\textit{Дж}).$$

Відповідь: а) $\Delta Q = 16,3\,Дж$; б) $\Delta Q = 1,22\,мДж$.

ПРИКЛАД 3.3

Однакові маси свинцю та кремнію охолоджують за допомогою рідкого гелію від $T_1 = 10\,K$ до $T_2 = 4,2\,K$. Визначити відношення кількостей теплоти Q_1/Q_2, необхідних для такого охолодження. Температури Дебая дорівнюють $\theta_D\left(Pb\right) = 95\,K$ та $\theta_D\left(Si\right) = 645\,K$ відповідно. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$Q_1/Q_2 - ?$

$T_1 = 10\,K$,
$T_2 = 4,2\,K$,
$\theta_D\left(Pb\right) = 95\,K$,
$\theta_D\left(Si\right) = 645\,K$,
$M_{Si} = 28 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$,
$M_{Pb} = 0,207\,кг/моль$

Для знаходження молярної теплоємності за умови $T \ll \theta_D$ можна скористатися граничним законом Дебая

$$C_M = \frac{12\pi^4}{5} R \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3 . \qquad (3)$$

Кількість теплоти ΔQ, необхідна для нагрівання тіла від температури τ_1 до τ_2, можна підрахувати за формулою

$$Q = \int_{\tau_1}^{\tau_2} C dT , \qquad (1)$$

де C – теплоємність тіла.

Теплоємність тіла пов'язана з молярною теплоємністю C_M співвідношенням

$$C = m/M\, C_M ,$$

де m – маса тіла; M – молярна маса.

Тоді вираз (1) набере вигляду

$$\Delta Q = \frac{m}{M} \int_{T_1}^{T_2} C_M dT . \qquad (2)$$

У загальному випадку C_M є функцією температури, тому її не можна виносити за знак інтеграла.

$$Q = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\int_{T_1}^{T_2} T^3 dT = \frac{12\pi^4}{5}\frac{R}{\theta_D{}^3}\frac{m}{M}\left[\frac{T_2{}^4}{4} - \frac{T_1{}^4}{4}\right].$$

Відношення кількостей теплоти, необхідних для охолодження однакових мас свинцю та кремнію, дорівнює

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\dfrac{12\pi^4}{5}\dfrac{R}{\left[\theta_D\left(Pb\right)\right]^3}\dfrac{m}{M_{Pb}}\left[\dfrac{T_2{}^4}{4} - \dfrac{T_1{}^4}{4}\right]}{\dfrac{12\pi^4}{5}\dfrac{R}{\left[\theta_D\left(Si\right)\right]^3}\dfrac{m}{M_{Si}}\left[\dfrac{T_2{}^4}{4} - \dfrac{T_1{}^4}{4}\right]} = \frac{M_{Si}\left[\theta_D\left(Si\right)\right]^3}{M_{Pb}\left[\theta_D\left(Pb\right)\right]^3}.$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{28\cdot 10^{-3}\cdot\left[645\right]^3}{0,207\cdot\left[95\right]^3} = 42,3.$$

Відповідь: $Q_1/Q_2 = 42,3$.

ПРИКЛАД 3.4

Визначити енергію Фермі для міді, виходячи з припущення, що кількість вільних електронів дорівнює кількості атомів металу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\varepsilon_F - ?$
$\rho = 8,93\cdot 10^3\ кг/м^3$,
$M = 63,5\cdot 10^{-3}\ кг/моль$

Енергія Фермі у металі при $T = 0$ визначається співвідношенням

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}, \qquad (1)$$

де m – маса електрона; n – концентрація вільних носіїв; $\hbar$ – стала Планка – Дірака; $\hbar = 1,05\cdot 10^{-34}\ Дж\cdot с$.

Концентрація атомів міді дорівнює

$$n = \frac{\rho N_A}{M}, \qquad (2)$$

де N_A – стала Авогадро; ρ – густина міді; M – молярна маса міді.

Підставимо формулу (2) у співвідношення (1) та одержимо

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2\rho N_A}{M}\right)^{2/3}.$$

Виконаємо перевірку розмірності

$$[W_F] = \frac{[\hbar]^2}{[m]}\left(\frac{[\rho][N_A]}{[M]}\right)^{2/3} = \frac{(Дж\cdot с)^2}{кг}\left(\frac{[кг/м^3][моль^{-1}]}{[кг/моль]}\right)^{2/3} =$$

$$= \frac{Дж\cdot с^2\cdot кг\cdot м\cdot м}{кг\cdot с^2\cdot м^2} = Дж.$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$W_F = \frac{1{,}05^2\cdot 10^{-68}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}\left(\frac{3\cdot 3{,}14^2\cdot 8{,}93\cdot 10^3\cdot 6{,}02\cdot 10^{23}}{63{,}5\cdot 10^{-3}}\right)^{2/3} == 1{,}13\cdot 10^{-18}\,(Дж).$$

Відповідь: $W_F = 1{,}13\cdot 10^{-18}\ Дж$.

ПРИКЛАД 3.5

Визначити максимальну енергію фонона, який може виникнути в кристалі, температура Дебая якого $\theta_D = 300\,К$. Яку довжину хвилі мав би фотон із такою самою енергією?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega_m - ?\ \lambda - ?$
$\theta_D = 300\,К$

Найбільша частота ω_m, яка може виникнути в кристалічній гратці, пов'язана з температурою Дебая співвідношенням

$$\hbar\omega_m = k\theta_D,$$

де $\hbar$ – стала Планка – Дірака, $\hbar = 1{,}05\cdot 10^{-34}\ Дж\cdot с$; k – стала Больцмана, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ Дж/К$.

Звідси випливає, що максимальна енергія фотона

$$\varepsilon_m = \hbar\omega_m = k\theta_D.$$

Довжина хвилі фотона з частотою ω_m дорівнює

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_m} = \frac{2\pi\hbar c}{k\theta_D}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$\varepsilon_m = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4,14 \cdot 10^{-21} \left(Дж\right).$$

$$\lambda = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 4,8 \cdot 10^{-5} \left(м\right).$$

Відповідь: $\varepsilon_m = 4,14 \cdot 10^{-21}\ Дж$; $\lambda = 4,8 \cdot 10^{-5}\ м$.

ПРИКЛАД 3.6

Визначити ширину забороненої зони власного напівпровідника ΔW, якщо за температури $T_1 = 27\,^0C$ і $T_2 = 127\,^0C$ його опір відповідно дорівнює $R_1 = 157\,кОм$ та $R_2 = 10\,Ом$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$
$T_1 = 27\,^0C = 300\,K,$ $T_2 = 127\,^0C = 400\,K,$ $R_1 = 157\,кОм = 1,57 \cdot 10^5\,Ом,$ $R_2 = 10\,Ом$

Залежність питомої електропровідності від температури визначається за законом

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT}}, \tag{1}$$

де ΔW – ширина забороненої зони; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ Дж/К$.

Знайдемо зв'язок між питомою електропровідністю та опором

$$\sigma = \frac{1}{\rho},\ R = \rho\frac{l}{S} \Rightarrow \rho = R\frac{S}{l} \Rightarrow \sigma = \frac{l}{RS}. \tag{2}$$

Визначимо відношення питомих електропровідностей для різних температур з урахуванням співвідношення (1):

$$\sigma_1 = \frac{l}{R_1 S} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{l}{R_2 S} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT_2}}}{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT_2}}}=e^{\frac{\Delta W}{k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)} \Rightarrow \frac{\Delta W}{k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)=\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta W=\frac{k}{\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}}\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \Delta W=\frac{kT_1T_2}{T_1-T_2}\ln\frac{R_2}{R_1}\ .$$

Підставимо значення фізичних величин в останній вираз та одержимо

$$\Delta W=\frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\cdot 400}{400-300}\ln\frac{1{,}57\cdot 10^{5}}{10}=1{,}6\cdot 10^{-19}\,(Дж)=1(еВ).$$

Відповідь: $\Delta W=1еВ$.

ПРИКЛАД 3.7

Питома провідність кремнію дорівнює $\sigma_1=19\,См/м$ за температури $T_1=600\,К$ і $\sigma_2=4\,095\,См/м$ за температури $T_2=1\,200\,К$. Визначити ширину ΔW забороненої зони для кремнію.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W-?$
$\sigma_1=19\,См/м$,
$T_1=600\,К$,
$\sigma_2=4095\,См/м$,
$T_2=1200\,К$

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma=\sigma_0\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \tag{1}$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k=1{,}38\cdot 10^{-23}\,Дж/К$.

Злогарифмуємо вираз (1) та одержимо

$$\ln\sigma=\ln\sigma_0+\ln\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right)\Rightarrow \ln\sigma=\ln\sigma_0-\frac{\Delta W}{2kT}.$$

Тоді

$$\ln\sigma_1 = \ln\sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_1}, \qquad \ln\sigma_2 = \ln\sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_2}.$$

Знайдемо різницю логарифмів

$$\ln\sigma_2 - \ln\sigma_1 = \frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Тоді ширина забороненої зони

$$\Delta W = 2k\frac{\ln\sigma_2/\sigma_1}{\left(1/T_1 - 1/T_2\right)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки

$$\Delta W = 2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\frac{\ln 4095/19}{\left(1/600 - 1/1200\right)} = 1{,}78\cdot 10^{-19}\left(\text{Дж}\right) = 1{,}11\left(eB\right).$$

Відповідь: $\Delta W = 1{,}78\cdot 10^{-19}\ \text{Дж} = 1{,}11 eB$.

ПРИКЛАД 3.8

Визначити концентрацію n вільних електронів у металі, якщо відомо, що при густині струму провідності $j = 5\,A/см^2$ середня швидкість спрямованого руху електронів дорівнює $\langle v\rangle = 0{,}05\,см/с$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n - ?$

$j = 5\,A/см^2 = 5\cdot 10^4\ A/м^2$,

$\langle v\rangle = 0{,}05\,см/с = 5\cdot 10^{-4}\ м/с$,

$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл$

Густина струму пов'язана із середньою швидкістю спрямованого руху $\langle v\rangle$ співвідношенням

$$j = ne\langle v\rangle,$$

де n – концентрація вільних електронів у металі; e – заряд електрона.

З цього виразу визначимо концентрацію

$$n = \frac{j}{e\langle v\rangle}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$n=\frac{5\cdot10^{4}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot5\cdot10^{-4}}=6{,}25\cdot10^{26}\left(м^{-3}\right).$$

Відповідь: $n=6{,}25\cdot10^{26}\,м^{-3}$.

ПРИКЛАД 3.9

У скільки разів зміниться у разі підвищення температури від $T_1=300\,К$ до $T_2=330\,К$ електропровідність власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W=0{,}5\,еВ$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W-?$
$T_1=300\,К,$ $T_2=330\,К,$ $\Delta W=0{,}5\,еВ=0{,}8\cdot10^{-19}\,Дж$

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma=\sigma_0\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),\tag{1}$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k=1{,}38\cdot10^{-23}\,Дж/К$.

Тоді

$$\sigma_1=\sigma_0\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2=\sigma_0\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{\sigma_0\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)}=\exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{0,8\cdot 10^{-19}}{2\cdot 1,38\cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{300}-\frac{1}{330}\right)\right] = 2,41.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,41$, питома електропровідність збільшиться у 2,41 раза.

ПРИКЛАД 3.10

Зразок германію нагрівають від 0 до 17 ^0C. Визначити, як зміниться його опір. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0,72\,eB$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_1/R_2 - ?$

$T_1 = 0^0\,C = 273\,K,$

$T_2 = 17^0\,C = 290\,K,$

$\Delta W = 0,72\,eB = 1,152\cdot 10^{-19}$ *Дж*

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \tag{1}$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1,38\cdot 10^{-23}$ *Дж/К*.

Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Питома провідність є оберненою величиною питомого опору $\rho = 1/\sigma$. Опір циліндричного провідника дорівнює

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S},$$

де l – довжина провідника; S – площа його перерізу.

Зі збільшенням температури опір власного напівпровідника зменшується, відношення опорів дорівнює

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{R_1}{R_2} = \exp\left[\frac{1{,}152 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{290}\right)\right] = 2{,}45.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2{,}45$.

ПРИКЛАД 3.11

Кульку, радіус якої $r_1 = 4 см$, виготовлену з металу, з роботою виходу $A_1 = 1 еВ$ з'єднали з іншою кулькою радіусом $r_2 = 2 см$, виготовленою з металу, з роботою виходу $A_2 = 7 еВ$. Визначити контактну різницю потенціалів $\Delta\varphi$, потенціал кожної кульки φ, заряд та кількість електронів, які пройшли по провіднику N та нове значення енергії Фермі W_F цієї системи.

$\Delta\varphi - ?$ $\varphi_1 - ?$ $\varphi_2 - ?$
$q - ?$ $N - ?$ $W_F - ?$

$r_1 = 4 см = 4 \cdot 10^{-2} м,$
$r_2 = 2 см = 2 \cdot 10^{-2} м,$
$A_1 = 1 еВ = 1,6 \cdot 10^{-19}\ Дж,$
$A_2 = 7 еВ = 11,2 \cdot 10^{-19}\ Дж$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

При з'єднанні електрони з тіла з меншою роботою виходу (кулька 1) будуть переходити у тіло з більшою роботою виходу (кулька 2) до того часу, поки система не перейде у стан стійкої рівноваги і рівні Фермі не збіжаться. У цьому стані заряд першої кульки стане $+q$, а другої – $-q$. Хоча заряди однакові за модулем, потенціали, яких наберуть кульки, відрізняються. Потенціали першої та другої кульок відповідно дорівнюють

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \quad \text{та} \quad \varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. \tag{1}$$

Різниця потенціалів, що утворилася між кульками, $\varphi_2 - \varphi_1$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \tag{2}$$

дорівнює контактній різниці потенціалів

$$\Delta\varphi = \frac{1}{e}\left(A_2 - A_1\right). \tag{3}$$

Прирівняємо вирази (2) і (3)

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{e}\left(A_2 - A_1\right). \tag{4}$$

З одержаного рівняння (4) визначимо заряд, що пройшов по провіднику:

$$q=\frac{4\pi\varepsilon_0}{e}\frac{A_2-A_1}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}}=\frac{4\pi\varepsilon_0}{e}\frac{\left(A_2-A_1\right)r_2r_1}{r_2+r_1}. \qquad (5)$$

Підставимо одержане значення заряду у вирази (1) та одержимо співвідношення для визначення потенціалу кожної кульки

$$\varphi_1=\frac{4\pi\varepsilon_0}{e}\frac{\left(A_2-A_1\right)r_2r_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1\left(r_2+r_1\right)}=\frac{\left(A_2-A_1\right)r_2}{e\left(r_2+r_1\right)};\ \varphi_2=\frac{4\pi\varepsilon_0}{e}\frac{\left(A_2-A_1\right)r_2r_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2\left(r_2+r_1\right)}=\frac{\left(A_2-A_1\right)r_1}{e\left(r_2+r_1\right)}. \qquad (6)$$

Кількість електронів дорівнює відношенню заряду, який пройшов по провіднику до заряду одного електрона:

$$N=\frac{q}{e}. \qquad (7)$$

Нове значення рівня Фермі, відраховане від рівня енергії нескінченно віддаленого електрона, дорівнює

$$\begin{aligned}\varepsilon_F&=-A_1-\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=-A_2+\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=-A_1-\frac{\left(A_2-A_1\right)r_2}{r_2+r_1}=\\&=\frac{-A_1\left(r_2+r_1\right)-\left(A_2-A_1\right)r_2}{r_2+r_1}=-\frac{A_1r_2+A_1r_1+A_2r_2-A_1r_2}{r_2+r_1}=-\frac{A_1r_1+A_2r_2}{r_2+r_1}.\end{aligned} \qquad (8)$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержані співвідношення (3), (5), (6), (7), (8) та одержимо контактну різницю потенціалів

$$\Delta\varphi=\frac{1}{1,6\cdot10^{-19}}\left(7-1\right)\cdot1,6\cdot10^{-19}=6\left(B\right),$$

заряд, що пройшов по провіднику,

$$q=\frac{4\cdot\pi\cdot8,85\cdot10^{-12}}{1,6\cdot10^{-19}}\frac{6\cdot1,6\cdot10^{-19}\,4\cdot2\cdot10^{-4}}{6\cdot10^{-2}}=8,9\cdot10^{-12}\left(Кл\right),$$

потенціал кожної кульки

$$\varphi_1=\frac{8,9\cdot10^{-12}}{4\cdot\pi\cdot8,85\cdot10^{-12}\,4\cdot10^{-2}}=6,29\left(B\right);\quad \varphi_2=\frac{8,9\cdot10^{-12}}{4\cdot\pi\cdot8,85\cdot10^{-12}\,2\cdot10^{-2}}=12,6\left(B\right),$$

кількість електронів, що пройшли по провіднику N,

$$N = \frac{8,9 \cdot 10^{-12}}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 5,56 \cdot 10^{7},$$

нове значення енергії Фермі W_F системи:

$$W_F = -\frac{4 + 7 \cdot 2}{6} = -3(eB).$$

Відповідь: $\Delta\varphi = 6\,B$; $q = 8,9 \cdot 10^{-12}\ Кл$; $N = 5,56 \cdot 10^{7}$;
$\varphi_1 = 2\,B$; $\varphi_2 = 4\,B$; $W_F = -3eB$.

ПРИКЛАД 3.12

Опір $p-n$-переходу, що перебуває під зворотною напругою $U = 0,1B$, дорівнює $R = 692\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу при прямому підключенні? Температура дорівнює $T = 300\,K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_2 - ?$
$U = 0,1B,$ $R_1 = 692\,Ом,$ $T = 300\,K$

Сила струму у $p-n$-переході

$$I = I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,Кл$; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\ Дж/K = 8,625 \cdot 10^{-5}\ eB/K$; T – абсолютна температура.

За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

У випадку зворотного та прямого підключень маємо

$$R_1 = \frac{-U}{I_S\left(e^{-eU/(kT)} - 1\right)} \text{ та } R_2 = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

Тоді

$$\frac{R_2}{R_1} = -\frac{e^{-eU/(kT)}-1}{e^{eU/(kT)}-1} \quad \Rightarrow \quad R_2 = -R_1\frac{e^{-eU/(kT)}-1}{e^{eU/(kT)}-1} \quad .$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки

$$R_2 = -692\frac{e^{-1,6\cdot10^{-19}\cdot0,1/\left(1,38\cdot10^{-23}\cdot300\right)}-1}{e^{1,6\cdot10^{-19}\cdot0,1/\left(1,38\cdot10^{-23}\cdot300\right)}-1} = 692\frac{0,979}{46,7} = 14,5\left(Ом\right).$$

Відповідь: $R_2 = 14,5\,Ом$.

ПРИКЛАД 3.13

Опір $p-n$-переходу, що перебуває під прямою напругою $U = 1B$, дорівнює $R_1 = 10\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу при зворотному підключенні? Температура дорівнює $T = 300\,K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_2 - ?$
$U = 1B,$ $R_1 = 10\,Ом,$ $T = 300\,K$

Сила струму у $p-n$-переході

$$I = I_S\left(e^{eU/(kT)}-1\right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e = 1,6\cdot10^{-19}\,Кл$; k – стала Больцмана, $k = 1,38\cdot10^{-23}\,Дж/K = 8,625\cdot10^{-5}\,eB/K$; T – абсолютна температура.

За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)}-1\right)}.$$

У випадку прямого та зворотного підключень маємо

$$R_1 = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)}-1\right)} \quad \text{та} \quad R_2 = \frac{-U}{I_S\left(e^{-eU/(kT)}-1\right)}.$$

$$R_2 = -R_1\frac{e^{eU/(kT)}-1}{e^{-eU/(kT)}-1}.$$

Під час розрахунку врахуємо, що $e^{eU/(kT)} \gg 1 \;\Rightarrow\; e^{eU/(kT)} - 1 \approx e^{eU/(kT)}$ і $e^{-eU/(kT)} \ll 1 \;\Rightarrow\; e^{eU/(kT)} - 1 = -1$. Тоді

$$R_2 \approx R_1 e^{eU/(kT)}.$$

Проведемо обчислення $R_2 \approx e^{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1/\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300\right)} = 6{,}1\cdot 10^{17}\ \left(Ом\right)$.

Відповідь: $R_2 = 6{,}1\cdot 10^{17}\ Ом$.

ПРИКЛАД 3.14

Визначити мінімальну енергію $W_{\min}$, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$, якщо його питома провідність змінюється в 10 разів за зміни температури від $T_1 = 20^0 C$ до $T_2 = 3^0 C$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W_{\min} - ?$
$U = 1 В,$
$R_1 = 10\,Ом,$
$T_1 = 20^0 C = 293\,K,$
$T_2 = 3^0 C = 276\,K$

Мінімальна енергія, необхідна для утворення пари електрон – дірка у власному напівпровіднику, дорівнює ширині забороненої зони $W_{\min} = \Delta W$. Питома провідність власних напівпровідників залежить від температури згідно з виразом

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає.

Запишемо цей вираз для двох температур

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right) \quad \text{і} \quad \sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right).$$

Поділимо перший вираз на другий та визначимо ширину забороненої зони напівпровідника

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_1}\right)}{\exp\left(-\dfrac{\Delta W}{2kT_2}\right)} = \exp\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \Rightarrow \Delta W = \frac{2kT_1T_2}{T_1 - T_2}\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Підставимо числові значення відповідних фізичних величин в одержаний вираз та знайдемо мінімальну енергію, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$:

$$W_{\min} = \Delta W = \frac{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 293\cdot 276}{293-276}\ln 10 = 3{,}023\cdot 10^{-19}\left(Дж\right) = 1{,}89\left(eB\right).$$

Відповідь: $W_{\min} = 1{,}89\,eB$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ ТЕПЛОЄМНОСТІ

3.1 Визначити, з якого матеріалу виготовлена металева кулька, маса якої $m = 25\,г$, якщо відомо, що для її нагрівання від $T_1 = 10\,^0C$ до $T_2 = 30\,^0C$ потрібно витратити кількість теплоти $Q = 117\,Дж$. При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: $M = 0{,}1065\,кг/моль$ – паладій.

3.2 З якого матеріалу виготовлений зразок, для нагрівання якого від температури $T_1 = 20\,^0C$ до $T_2 = 50\,^0C$ потрібно витратити $Q = 410\,Дж$ тепла? Маса зразка $m = 0{,}05\,кг$. При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: $M = 91{,}2 \cdot 10^{-3}\,кг/моль$ – цирконій.

3.3 З якого матеріалу виготовлений зразок, для нагрівання якого від температури $T_1 = 0\,^0C$ до $T_2 = 50\,^0C$ потрібно витратити $Q = 127{,}8\,Дж$ тепла? Маса зразка $m = 0{,}02\,кг$. При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: $M = 0{,}195\,кг/моль$ – платина.

3.4 Використовуючи закон Дюлонга і Пті, визначити, в скільки разів питома теплоємність алюмінію більша за питому теплоємність платини.

Відповідь: у 7,22 раза.

3.5 У скільки разів питома теплоємність кремнію більша за питому теплоємність вольфраму? При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: у 6,56 раза.

3.6 У скільки разів питома теплоємність натрію більша за питому теплоємність вольфраму? При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: у 8 разів.

3.7 Свинцева куля, яка летить зі швидкістю $\mathrm{v} = 400\,м/с$ потрапляє в стіну. Визначити, на скільки градусів нагрілася куля за умови, що 10 % кінетичної енергії йде на її нагрівання. Питому теплоємність свинцю визначити за законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: $\Delta T = 93,6\,K$.

3.8 Металева кулька падає з висоти $h = 10,9\,м$ на масивну плиту. Після удару її температура збільшилася на $\Delta T = 0,5\,K$. Визначити, з якого матеріалу виготовлена кулька за умови, що 50 % кінетичної енергії кульки витратилося на її нагрівання. При розв'язуванні задачі скористатися законом Дюлонга і Пті.

Відповідь: $M = 0,195\,кг/моль$ – платина.

ТЕОРІЯ ТЕПЛОЄМНОСТІ ЗА ДЕБАЄМ

3.9 Користуючись теорією теплоємності Ейнштейна, визначити зміну ΔU_m молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його від нуля до $T_1 = 0,1\theta_E$. Характеристична температура Ейнштейна для цього кристала дорівнює $\theta_E = 300\,K$.

Відповідь: $\Delta U_m = 340\,Дж/моль$.

3.10 Характеристична температура Дебая для міді $\theta_D = 339\,K$. Визначити її молярну C_M та питому теплоємності c за температури $T = 12\,K$.

Відповідь: $C_M = 0,862\,Дж/(моль \cdot K)$; $c = 13,56\,Дж/(кг \cdot K)$.

3.11 Характеристична температура Дебая для алмазу $\theta_D = 2\,000\,K$. Визначити його молярну C_M та питому теплоємності c за температури $T = 30\,K$.

Відповідь: $C_M = 6,56 \cdot 10^{-3}\,Дж/(моль \cdot K)$; $c = 0,546\,Дж/(кг \cdot K)$.

3.12 Визначити за теорією Дебая молярну C_M та питому теплоємності c хлористого натрію за температури $T = \theta_D/20$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $C_M = 12,14 \cdot 10^{-3}\,Дж/(моль \cdot K)$; $c = 0,21\,Дж/(кг \cdot K)$.

3.13 Молярна теплоємність срібла за температури $T = 20\,K$ дорівнює $C_M = 1,65\,Дж/(моль \cdot K)$. Визначити за цим значенням характеристичну температуру Дебая. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $\theta_D = 211\,K$.

3.14 Визначити характеристичну температуру Дебая для заліза за умови, що за температури $T = 20\,K$ молярна теплоємність заліза дорівнює $C_M = 0,226\,Дж/(моль \cdot K)$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $\theta_D = 410\,K$.

3.15 Однакові маси свинцю та кремнію охолоджують за допомогою рідкого гелію від $T_1 = 10\,K$ до $T_2 = 4,2\,K$. Визначити відношення кількостей теплоти Q_1/Q_2, необхідного для такого охолодження. Температури Дебая дорівнюють $\theta_D(Pb) = 95\,K$ та $\theta_D(Si) = 645\,K$ відповідно. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $Q_1/Q_2 = 42,3$.

3.16 Визначити у дебаєвській моделі відношення теплоємностей зразків Be і Cu однакового об'єму за $T = 340\,K$. Густини берилію та міді відповідно дорівнюють $\rho_{Be} = 1800\,кг/м^3$ і $\rho_{Cu} = 8900\,кг/м^3$, температури Дебая – $\theta_D(Be) = 1440\,K$ та $\theta_D(Cu) = 340\,K$.

Відповідь: $C_{Be}/C_{Cu} = 1,53$.

3.17 Визначити за теорією Дебая теплоємність C та молярну C_M теплоємність цинку масою $m = 0,1\,кг$ за температури $T = 10\,K$. Характеристична температура Дебая для цинку дорівнює $\theta_D = 300\,K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $C = 0,11\,Дж/K$; $C_M = 7,2 \cdot 10^{-2}\,Дж/(моль \cdot K)$.

3.18 Визначити за теорією Дебая теплоємності берилію масою $m = 0,3\,кг$ за температур $T_1 = 20\,K$ і $T_2 = 200\,K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною. Характеристична температура Дебая для берилію дорівнює $\theta_D = 1160\,K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $C_1 = 1,71 \cdot 10^{-5}\,Дж/K$; $C_2 = 1,71 \cdot 10^{-2}\,Дж/K$.

3.19 Яка кількість теплоти потрібна для нагрівання кристалу калію масою $m = 0,2\,кг$ від температури $T_1 = 4\,K$ до температури $T_2 = 5\,K$. Характеристична температура Дебая для калію $\theta_D = 100\,K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $Q = 0,92\,Дж$.

3.20 Визначити кількість теплоти, необхідну для нагрівання кристалу берилію $m = 0,3 кг$ від температури $T_1 = 5 K$ до температури $T_2 = 10 K$. Характеристична температура Дебая для калію $\theta_D = 1160 K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $Q = 97\, мДж$.

3.21 Яка кількість теплоти потрібна для нагрівання кристала $NaCl$ масою $m = 1 кг$ від температури $T_1 = 3 K$ до температури $T_2 = 5 K$? Характеристична температура Дебая для $NaCl$ $\theta_D = 320 K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $Q = 0,138\, Дж$.

3.22 Мідний зразок масою $m = 0,1 кг$ перебуває за температури $T_1 = 10 K$. Визначити кількість теплоти, необхідну для нагрівання зразка до температури $T_2 = 20 K$. Характеристична температура Дебая для міді дорівнює $\theta_D = 339 K$. Умову $T \ll \theta_D$ вважати виконуваною.

Відповідь: $Q = 2,94\, Дж$.

3.23 Визначити за допомогою графіка на рис. 8.6 молярну теплоємність C_{M1} алюмінію за $T_1 = 80 K$, якщо за $T_2 = 240 K$ вона дорівнює $C_{M2} = 22,4\, Дж/(моль \cdot K)$.

Відповідь: $C_{M1} = 10\, Дж/(моль \cdot K)$.

3.24 Визначити за допомогою графіка на рис. 3.1 максимальну частоту $\omega_{\max}$ коливань для міді, теплоємність якої за температури $T = 125 K$ відрізняється від класичної на 25 %.

Відповідь: $\omega_{\max} = 4,1 \cdot 10^{12} c^{-1}$.

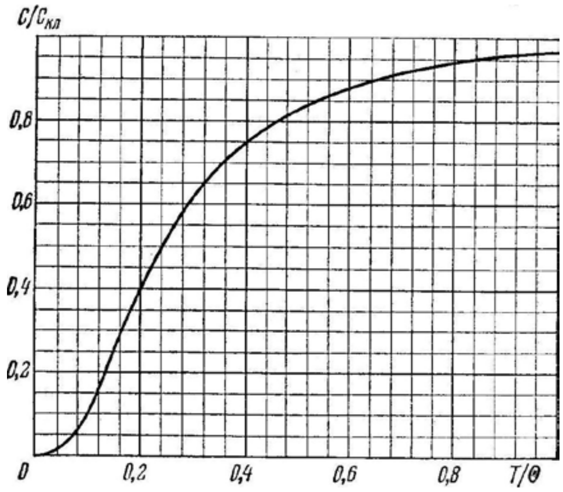


Рисунок 3.1 – До задач 3.23–3.25: $C_{КЛ}$ – класична теплоємність (закон Дюлонга і Пті); θ_D – температура Дебая

3.25 Визначити за допомогою графіка на рис. 3.1 температуру Дебая θ_D для срібла, якщо за $T = 65K$ його молярна теплоємність дорівнює $C_M = 15\,Дж/(моль \cdot K)$.

Відповідь: $\theta_D = 217K$.

3.26 Визначити максимальну частоту ω_{max} власних коливань у кристалі золота за теорією Дебая. Характеристична температура дорівнює $\theta_D = 180K$.

Відповідь: $\omega_{\max} = 2{,}37 \cdot 10^{13} c^{-1}$.

3.27 Визначити мінімальну довжину хвилі $\lambda_{\min}$ Дебая в титані, якщо його характеристична температура дорівнює $\theta_D = 280K$, а швидкість звуку в ньому дорівнює $\mathrm{v} = 6 \cdot 10^3\, м/с$.

Відповідь: $\lambda_{\min} = 1{,}03\,нм$.

3.28 Чому дорівнює в *еВ* максимальна енергія фононів $\varepsilon_{\max}$ в кристалі свинцю, якщо його температура Дебая $\theta_D = 94K$?

Відповідь: $\varepsilon_{\max} = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\,eB$.

3.29 Визначити в електрон-вольтах максимальну енергію фонона, який може збуджуватися в кристалі $NaCl$, що характеризується температурою Дебая $\theta_D = 320K$. Фотон якої довжини хвилі мав би таку саму енергію?

Відповідь: $W = 0{,}028\,eB$; $\lambda = 45\,мкм$.

3.30 Користуючись теорією теплоємності Дебая, визначити зміну ΔU_m молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його від нуля до $T = 0{,}1\,\theta_E$. Характеристичну температуру θ_D Дебая взяти для цього кристала 300 К. Вважати, що $T << \theta_D$.

Відповідь: $\Delta U_m = 14{,}6\,кДж$.

3.31 Знайти відношення характеристичних температур Ейнштейна і Дебая. Використати вирази для нульової енергії за теоріями Ейнштейна та Дебая.

Відповідь: $\theta_E / \theta_D = 3/4$.

3.32 Визначити відношення $<\varepsilon>/<\varepsilon_T>$ середньої енергії квантового осцилятора до середньої енергії теплового руху молекул ідеального газу за температури $T=\theta_E$.

Відповідь: $<\varepsilon>/<\varepsilon_T> = 1{,}16$.

3.33 Розрахувати, використовуючи теорію Дебая, молярну нульову енергію $U_{m,0}$ кристала міді. Характеристична температура θ_D міді дорівнює 320 К.

Відповідь: $U_{m,0} = 2{,}99\,МДж$.

3.34 Швидкість поперечних пружних хвиль в алюмінії $v_\perp = 3131\,м/с$, поздовжніх $v_\parallel = 6400\,м/с$. Визначити температуру Дебая θ_D для алюмінію.

Відповідь: $\theta_D = 410\,K$.

3.35 Нижче наведені значення швидкості поперечних хвиль $v_\perp$, швидкості поздовжніх хвиль $v_\parallel$ і концентрація n атомів для: а) берилію; б) срібла; в) свинцю. Визначити температуру Дебая θ_D для цих металів.

Ме тал	$v_\perp$, м	$v_\parallel$, м	n,10
Бер илій	88 30	125 50	1,2 3
Срі бло	15 90	360 0	0,5 86
Сви нець	70 0	216 0	0,3 28

Відповідь: а) $\theta_D = 1420\,K$; б) $\theta_D = 208\,K$; в) $\theta_D = 76\,K$.

3.36 Визначити енергію U_0 нульових коливань охолодженого до затвердіння одного моля аргону (температура Дебая $\theta_D = 92\,K$ **)**.

Відповідь: $U_0 = 860\,Дж$.

3.37 Розрахувати максимальну частоту ω_{max} Дебая, якщо відомо, що молярна теплоємність C_m срібла за T = 20 К дорівнює 1,7 Дж/(моль · К).

Відповідь: $\omega_{\max} = 2{,}75\cdot10^{13}\,с^{-1}$.

3.38 Використовуючи квантову теорію теплоємності Дебая визначити зміну ΔU_m молярної внутрішньої енергії кристала при нагріванні його на $\Delta T = 2$К від температури $T = \theta_D/2$.

Відповідь: $\Delta U_m = 41{,}4\,кДж$.

ЕЛЕМЕНТИ ЗОННОЇ ТЕОРІЇ

3.39 Зобразити зонні схеми напівпровідників n-типу, p-типу. Пояснити механізм їх провідності.

3.40 Пояснити та зобразити на зонній схемі положення рівня Фермі для електронного та діркового напівпровідників: 1) за $T = 0\,K$; 2) при підвищенні температури $T > 0\,K$.

3.41 У чистий германій додана невелика кількість миш’яку. За допомогою таблиці Менделєєва визначити тип провідності домішкового германію. У чистий кремній додана невелика домішка бору. За допомогою Періодичної системи елементів Менделєєва визначити тип провідності домішкового кремнію.

3.42 У чистий германій додана невелика кількість фосфору. За допомогою таблиці Менделєєва визначити тип провідності домішкового германію.

3.43 У чистий германій додана невелика кількість алюмінію. За допомогою таблиці Менделєєва визначити тип провідності домішкового германію.

3.44 Пояснити за допомогою зонної теорії механізми власної та домішкової фотопровідності.

3.45 Пояснити за допомогою зонної теорії контакт двох металів із різними роботами виходу.

3.46 Чим можна пояснити при контакті двох металів виникнення зовнішньої контактної різниці потенціалів?

3.47 Чим можна пояснити при контакті двох металів виникнення внутрішньої контактної різниці потенціалів?

3.48 Пояснити за допомогою зонної теорії механізм фізичних процесів, що відбуваються під час контакту металу з напівпровідником n-типу для випадків: 1) $A_M > A_H$; 2) $A_M < A_H$ (A_M – робота виходу з металу; A_H – робота виходу з напівпровідника).

3.49 Пояснити за допомогою зонної теорії механізм фізичних процесів, що відбуваються під час контакту металу з напівпровідником p-типу для випадків 1) $A_M > A_H$; 2) $A_M < A_H$ (A_M – робота виходу з металу; A_H – робота виходу з напівпровідника).

3.50 Пояснити, чому виникає запірний шар під час контакту: 1) донорного напівпровідника з металом за умови $A_M > A_H$; 2) акцепторного напівпровідника з металом за умови $A_M < A_H$ (A_M – робота виходу з металу; A_H – робота виходу з напівпровідника).

3.51 Пояснити механізм утворення для контакту метал – напівпровідник пропускного та запірного напрямків для струму.

3.52 У скільки разів зміниться середня енергія $<\varepsilon>$ квантового осцилятора, що припадає на один ступінь вільності, за підвищення температури від $T_1 = \theta_E/2$ до $T_2 = \theta_E$? Врахувати нульову енергію.

Відповідь: У 3,74 раза.

3.53 Визначити концентрацію n вільних електронів у металі за температури T = 0 К. Енергію Фермі взяти $W_F = 1 eB$.

Відповідь: $n = 4{,}57 \cdot 10^{27}\ м^{-3}$.

3.54 Визначити число вільних електронів, яке припадає на один атом натрію за температури T = 0 К. Енергія Фермі для натрію дорівнює $W_F = 3{,}12 eB$. Густина натрію дорівнює $\rho = 970\ кг/м^3$.

Відповідь: $N = 0{,}9$.

3.55 Визначити значення енергії Фермі та концентрацію електронів у зоні провідності за температур $T_1 = 300 K$ і $T_2 = 1\,000 K$ у кристалі германію. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0{,}74 eB$. Припустити, що ефективні маси електронів провідності та дірок дорівнюють масі вільного електрона.

Відповідь: $W_F = 0{,}37 eB$; $n_1 = 1{,}53 \cdot 10^{19}\ м^{-3}$; $n_2 = 2{,}09 \cdot 10^{24}\ м^{-3}$.

3.56 Визначити значення енергії Фермі та концентрацію електронів у зоні провідності за температур $T_1 = 300\,K$ і $T_2 = 1\,000\,K$ у кристалі кремнію. Ширина забороненої зони кремнію дорівнює $\Delta W = 1{,}17\,eB$. Припустити, що ефективні маси електронів провідності та дірок дорівнюють масі вільного електрона.

Відповідь: $W_F = 0{,}585\,eB$; $n_1 = 3{,}76 \cdot 10^{15}\,м^{-3}$; $n_2 = 1{,}72 \cdot 10^{23}\,м^{-3}$.

3.57 Визначити значення енергії Фермі та концентрацію електронів у зоні провідності за температур $T_1 = 300\,K$ і $T_2 = 1\,000\,K$ у кристалі алмазу. Ширина забороненої зони алмазу дорівнює $\Delta W = 5{,}4\,eB$. Припустити, що ефективні маси електронів провідності та дірок дорівнюють масі вільного електрона.

Відповідь: $W_F = 2{,}7\,eB$; $n_1 = 1{,}14 \cdot 10^{-20}\,м^{-3}$; $n_2 = 3{,}81 \cdot 10^{12}\,м^{-3}$.

3.58 Визначити ймовірність того, що електрон у металі перебуває в енергетичному стані з енергією, на $\Delta W = 0{,}05\,eB$ нижчою за рівень Фермі та вищою за енергію Фермі, для двох температур: а) $T_1 = 290\,K$; б) $T_2 = 58$ К.

Відповідь: а) $0{,}893$ і $-0{,}119$; б) $0{,}999955$ і $4{,}5 \cdot 10^{-5}$.

3.59 Метал перебуває за температури $T = 0$ К. Визначити, в скільки разів число електронів із кінетичною енергією від $W_F/2$ до W_F більше за число електронів з енергією від 0 до $W_F/2$.

Відповідь: У $1{,}83$ раза.

3.60 Визначити рівень Фермі W_F у власному напівпровіднику, якщо енергія W_a активації дорівнює $0{,}1$ еВ. За нульовий рівень відліку кінетичної енергії електронів взяти найнижчий рівень зони провідності.

Відповідь: $W_F = -0{,}05\,eB$.

3.61 Визначити відношення концентрацій n_1/n_2 вільних електронів при $T = 0$ у літії та цезії, якщо відомо, що рівні Фермі в цих металах відповідно дорівнюють $W_{F,1} = 4{,}72\,eB$, $W_{F,2} = 1{,}53\,eB$.

Відповідь: $n_1/n_2 = 5{,}41$.

3.62 Визначити значення енергії Фермі для електронів провідності в кристалі молібдену за $T = 2\ 000K$ за умови, що густина кристала $\rho = 1,02 \cdot 10^4\ кг/м^3$. Кількість вільних електронів на атом $z = 1$, ефективна маса електрона провідності дорівнює масі вільного електрона у вакуумі.

Відповідь: $W_F = 5,86eB$.

3.63 Оцінити середнє значення $n(W)$ кількості електронів у стані з енергією $W = 7eB$ за $T = 3000K$ у зоні провідності кристала вольфраму за умови, що густина кристала $\rho = 1,93 \cdot 10^4\ кг/м^3$. Кількість вільних електронів на атом $z = 1$, ефективна маса електрона провідності дорівнює масі вільного електрона у вакуумі.

Відповідь: $n(W) = 9,66 \cdot 10^{-3}$.

3.64 Визначити максимальне значення кінетичної енергії електрона, який рухається в кристалі за $T \to 0K$ за умови, що концентрація електронів провідності в даному металі $n = 10^{23}\ см^{-3}$.

Відповідь: $W_K = 7,85eB$.

3.65 Визначити кількість електронів у зоні провідності кристала вольфраму, об'єм якого дорівнює $V = 100см^3$, за $T \to 0K$. Значення енергії Фермі для кристала вольфраму дорівнює $W_F = 5,81eB$.

Відповідь: $N = 6,35 \cdot 10^{24}$.

3.66 У скільки разів число вільних електронів, які припадають на один атом металу при $T = 0$, більше в алюмінії, ніж у міді, якщо рівні Фермі відповідно дорівнюють $W_{F,1} = 11,7eB$, $W_{F,2} = 7,0eB$?

Відповідь: Утричі.

3.67 Обчислити середню кінетичну енергію $\langle W \rangle$ електронів у металі за температури $T = 0$ К, якщо рівень Фермі $W_F = 7eB$.

Відповідь: $\langle W \rangle = 4,2eB$.

3.68 Електрони в металі перебувають за температури $T = 0$ К. Знайти відносне число $\Delta N/N$ вільних електронів, кінетична енергія яких відрізняється від енергії Фермі не більше ніж на 2%.

Відповідь: $\Delta N/N = 0,03$.

3.69 Визначити відношення концентрації $n_{\max}$ електронів у металі (за $T = 0\,K$), енергія яких відрізняється від максимальної не більше ніж на ΔW, до концентрації $n_{\min}$ електронів, енергія яких не більша від значення $W = \Delta W$; припустити, що $\Delta W = 0,01W_F$.

Відповідь: $n_{\max}/n_{\min} = 14,9$.

ЕЛЕКТРОПРОВІДНІСТЬ

3.70 Визначити об'ємну густину теплової потужності в металевому провіднику, якщо густина струму в ньому дорівнює $j = 5\,А/мм^2$. Напруженість електричного поля в провіднику $E = 2\,мВ/м$.

Відповідь: $\omega_P = 10\,кДж/м^3$.

3.71 Визначити концентрацію вільних електронів у металі, якщо відомо, що при густині струму провідності $j = 5\,А/см^2$ середня швидкість спрямованого руху електронів дорівнює $\langle \mathrm{v} \rangle = 0,05\,см/с$.

Відповідь: $n = 6,25 \cdot 10^{26}\,м^{-3}$.

3.72 Власний напівпровідник (германій) має за деякої температури питомий опір $\rho = 0,48$ Ом · м. Визначити концентрацію n носіїв заряду, якщо рухомість b_n і b_p електронів і дірок відповідно дорівнюють 0,36 і 0,16 м^2/(В · с).

Відповідь: $n = 2,5 \cdot 10^{19}\,м^3$.

3.73 Питома електропровідність кремнію з домішками дорівнює $\sigma = 112\,См/м$. Визначити рухомість b_p дірок та їх концентрацію n_p, якщо стала Холла $R_H = 3,66 \cdot 10^{-4}$ м^3/Кл, за умови, що напівпровідник має лише діркову провідність.

Відповідь: $b_p = 3,5 \cdot 10^{-2}\,м^2/В \cdot с$; $n_p = 2 \cdot 10^{22}\,м^{-3}$.

3.74 У скільки разів зміниться за підвищення температури від 300 до 310 К провідність: а) металу; б) власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого $\Delta W = 0,3\,еВ$? Яким є характер зміни в обох випадках?

Відповідь: а) $\sigma_2/\sigma_1 = 1/1,003$, зменшиться в 1,003 раза;

б) $\sigma_2/\sigma_1 = 1,21$, збільшиться в 1,21 раза.

3.75 Як зміниться за підвищення температури від $T_1 = 300\,K$ до $T_2 = 330\,K$ електропровідність власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W = 0,5\,eB$?

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,41$, питома електропровідність збільшиться у 2,41 раза.

3.76 Зразок германію нагрівають від 0 до $17\,^0C$. Визначити, у скільки разів збільшується його питома провідність. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0,72\,eB$.

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,45$.

3.77 Питома провідність кремнієвого зразка при його нагріванні від температури $T_1 = 0\,^0C$ до температури $T_2 = 18\,^0C$ збільшилася в 4,24 раза. Визначити ширину забороненої зони кремнію.

Відповідь: $\Delta W = 1,1\,eB$.

3.78 Ширина забороненої зони германію приблизно дорівнює $\Delta W = 0,75\,eB$. Електромагнітне випромінювання якої довжини хвилі поглинає германій?

Відповідь: $\lambda_0 = 1,66\,мкм$.

3.79 Ширина забороненої зони кремнію при $T \approx 300\,K$ дорівнює $\Delta W_1 = 1,12\,eB$, а при $T \approx 0\,K$ – $\Delta W_1 = 1,17\,eB$. Як зміниться опір кремнію при збільшенні температури у випадках: 1) $T_1 = 1K,\ T_2 = 1,001K$; 2) $T_1 = 300K,\ T_2 = 310\,K$?

Відповідь: 1) зменшиться у 876 разів; 2) зменшиться удвічі.

3.80 Питома провідність кремнієвого зразка при його нагріванні від температури $T_1 = 0\,^0C$ до температури $T_2 = 20\,^0C$ збільшилася в 5,07 раза. Визначити ширину забороненої зони кремнію.

Відповідь: $\Delta W = 1,12\,eB$.

3.81 Питома провідність кремнієвого зразка при його нагріванні від температури $T_1 = 17\,^0C$ до температури $T_2 = 37\,^0C$ збільшилася в 4,24 раза. Електромагнітне випромінювання якої довжини хвилі поглинає кремній?

Відповідь: $\lambda_0 = 1,11\,мкм$.

3.82 Ширина забороненої зони кремнію при $T \approx 300\,K$ дорівнює $\Delta W_1 = 1{,}12\,eB$, а при $T \approx 0\,K$ – $\Delta W_1 = 1{,}17\,eB$. Електромагнітне випромінювання якої довжини хвилі поглинає кремній в околі цих температур?

Відповідь: за $T \approx 300\,K$ $\lambda_0 = 1{,}11\,мкм$; за $T \approx 0\,K$ $\lambda_0 = 1{,}06\,мкм$.

3.83 Опір фосфіду індію за температури $T_1 = 20\,^0C$ дорівнює $R_1 = 10\,кОм$. Визначити його опір R_2 за температури $T_2 = 80\,^0C$. Ширина забороненої зони фосфіду індію дорівнює $\Delta W = 1{,}34\,eB$.

Відповідь: $R_2 = 0{,}11\,кОм$.

3.84 Опір селену за температури $T_1 = 10\,^0C$ дорівнює $R_1 = 1\,кОм$. Визначити його опір R_2 за температури $T_2 = 100\,^0C$. Ширина забороненої зони селену дорівнює $\Delta W = 1{,}74\,eB$.

Відповідь: $R_2 = 0{,}18\,Ом$.

3.85 Як зміниться електропровідність селену при збільшенні його температури від $T_1 = 10\,^0C$ до $T_2 = 20\,^0C$. Ширина забороненої зони селену дорівнює $\Delta W = 1{,}74\,eB$.

Відповідь: збільшиться у $\sigma_2 / \sigma_1 = 3{,}38$ раза.

3.86 Питома провідність зразка селену при його нагріванні від температури $T_1 = 0\,^0C$ до температури $T_2 = 27\,^0C$ збільшилася у $\sigma_2 / \sigma_1 = 27{,}8$ раза. Визначити ширину забороненої зони селену.

Відповідь: $\Delta W = 1{,}74\,eB$.

3.87 Ширина забороненої зони селену дорівнює $\Delta W = 1{,}74\,eB$. Чому дорівнює червона межа внутрішнього фотоефекту селену?

Відповідь: $\lambda_0 = 714\,нм$.

3.88 Визначити ширину забороненої зони бездомішкового напівпровідника червона межа внутрішнього фотоефекту якого дорівнює $\lambda_0 = 654\,нм$.

Відповідь: $\Delta W = 1{,}9\,eB$.

3.89 Питома провідність кремнію дорівнює $\sigma_1 = 19\,См/м$ за температури $T_1 = 600\,K$ і $\sigma_2 = 4\,095\,См/м$ за температури $T_2 = 1\,200\,K$. Визначити ширину ΔW забороненої зони для кремнію.

Відповідь: $\Delta W = 1{,}11\,eB$.

3.90 Кристал германію, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W = 0,72eB$, нагрівають від $T_1 = 0\,^0C$ до температури $T_2 = 20\,^0C$. У скільки разів збільшиться його питома провідність?

Відповідь: у $\sigma_2/\sigma_1 = 2,83$ раза.

3.91 Кристал германію, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W = 0,67eB$, охолоджують від температури $T_1 = 30\,^0C$ до $T_2 = 0\,^0C$. Як зміниться його опір?

Відповідь: збільшиться у $R_2/R_1 = 4,1$ раза.

3.92 Визначити ширину забороненої зони власного напівпровідника ΔW, якщо за температур $T_1 = 27\,^0C$ і $T_2 = 127\,^0C$ його опір відповідно дорівнює $R_1 = 157\,кОм$ та $R_2 = 10\,Ом$.

Відповідь: $\Delta W = 1eB$.

3.93 Визначити мінімальну енергію, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$, якщо його питома провідність змінюється в 10 разів за зміни температури від $T_1 = 20\,^0C$ до $T_2 = 3\,^0C$.

Відповідь: $W_{\min} = 1,89eB$.

КОНТАКТНІ ЯВИЩА

3.94 Кульку, радіус якої $r_1 = 4см$, виготовлену з металу, з роботою виходу $A_1 = 1eB$ з’єднали з іншою кулькою радіусом $r_2 = 2см$, виготовлену з металу, з роботою виходу $A_2 = 7eB$. Визначити контактну різницю потенціалів $\Delta\varphi$, потенціал кожної кульки φ та заряд, що пройшов по провіднику.

Відповідь: $\Delta\varphi = 6\,B$; $\varphi_1 = 2\,B$; $\varphi_2 = 4\,B$; $q = 8,9 \cdot 10^{-12}\ Кл$.

3.95 Кульку, радіус якої $r_1 = 4см$, виготовлену з металу, з роботою виходу $A_1 = 1eB$ з’єднали з іншою кулькою радіусом $r_2 = 2см$, виготовлену з металу, з роботою виходу $A_2 = 7eB$. Визначити контактну різницю потенціалів $\Delta\varphi$, кількість електронів N, які пройшли по провіднику, та нове значення енергії Фермі W_F цієї системи.

Відповідь: $\Delta\varphi = 6\,B$; $N = 5,56 \cdot 10^7$; $W_F = -3eB$.

3.96 Опір $p-n$-переходу, що перебуває під зворотною напругою $U=0{,}1B$, дорівнює $R=692\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу при прямому ввімкненні? Температура дорівнює $T=300\,K$.

Відповідь: $R_2=14{,}5\,Ом$.

3.97 Опір $p-n$-переходу, що перебуває під зворотною напругою $U=0{,}2\,B$, дорівнює $R=1\,кОм$. Чому дорівнює опір переходу при прямому ввімкненні? Температура дорівнює $T=273K$.

Відповідь: $R_2=0{,}2\,Ом$.

3.98 Опір $p-n$-переходу, що перебуває під прямою напругою, дорівнює $R_1=1\,Ом$, а при зворотному ввімкненні опір переходу $R_2=100\,кОм$. Температура дорівнює $T=300\,K$. Визначити величину цієї напруги.

Відповідь: $U=0{,}3\,B$.

3.99 Пряма напруга прикладена до $p-n$-переходу, дорівнює $U=2\,B$. У скільки разів збільшиться сила струму через перехід, якщо змінити температуру від $T_1=27\,{}^0C$ до $T_2=0\,{}^0C$?

Відповідь: у $I_2/I_1=2{,}09\cdot10^3$ разів.

3.100 Пряма напруга прикладена до $p-n$-переходу, дорівнює $U=1B$ за температури $T_1=7\,{}^0C$. Як зміниться сила струму через перехід у разі збільшення температури до $T_2=27\,{}^0C$?

Відповідь: зменшиться у $I_1/I_2=15{,}8$ раза.

РОЗДІЛ 4

БУДОВА ЯДРА АТОМА. РАДІОАКТИВНІСТЬ. ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

1 Будова атомних ядер.
2 Нуклони. Заряд, розміри та маса атомного ядра.
3 Масове і зарядове число. Ізотопи.
4 Властивості та природа ядерних сил.
5 Дефект маси та енергія зв’язку. Питома енергія зв’язку.
6 Радіоактивність. Закон радіоактивного розпаду.
7 Типи радіоактивного розпаду.
8 Період піврозпаду. Середній час життя радіоактивного ізотопу.
9 Активність. Одиниці вимірювання активності.
10 Ядерні реакції. Реакції поділу. Реакції синтезу.
11 Закони збереження в ядерних реакціях.
12 Енергія ядерної реакції та поріг ядерної реакції.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

4.1 Ядро позначається тим самим символом, що й нейтральний атом:

$$ {}_{Z}^{A}X , $$

де X – символ хімічного елемента; Z – атомний номер (кількість протонів у ядрі); A – масове число (кількість нуклонів у ядрі). Кількість N нейтронів у ядрі дорівнює різниці $A-Z$.

4.2 Радіус ядра атома можна оцінити за формулою

$$ R = R_0 A^{1/3} , $$

де $R_0 = 1,4 \cdot 10^{-15}$ *м*.

4.3 Закон радіоактивного розпаду має вигляд

$$ N = N_0 e^{-\lambda t} , $$

де N – кількість атомів, які не розпалися за час t; N_0 – кількість атомів, які не розпалися, на момент, взятий за початковий (при $t = 0$); λ – стала радіоактивного розпаду.

4.4 Період піврозпаду $T_{1/2}$ – проміжок часу, за який кількість атомів, які не розпалися, зменшується вдвічі. Період піврозпаду пов’язаний зі сталою розпаду співвідношенням

$$ T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda} . $$

4.5 Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$ \Delta N = N_0 - N = N_0 \left(1 - e^{-\lambda t} \right) . $$

Якщо проміжок часу $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для визначення кількості атомів, які розпалися, можна використовувати наближену формулу

$$ \Delta N \approx \lambda N \Delta t . $$

4.6 Середній час життя τ радіоактивного ізотопу – проміжок часу, за який кількість ядер, які не розпалися, зменшується в e разів:

$$ \tau = 1/\lambda . $$

4.7 Кількість атомів, яка міститься в радіоактивному ізотопі, дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

де m – маса ізотопу; M – його молярна маса; N_A – стала Авогадро.

4.8 Активність A нукліда в радіоактивному джерелі (активність ізотопу) є величина, яка дорівнює відношенню кількості dN ядер, які розпалися в ізотопі, до проміжку часу dt, за який відбувся розпад. Активність визначається за формулою

$$A = -\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

або після заміни N за основним законом радіоактивного розпаду одержимо

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

4.9 Активність ізотопу у початковий момент часу $(t = 0)$ дорівнює

$$A_0 = \lambda N_0.$$

4.10 Активність ізотопу змінюється з часом за тим самим законом, що й кількість ядер, які не розпалися:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}.$$

4.11 Питома активність a радіоактивного джерела – це величина, що дорівнює відношенню його активності A до маси m цього ізотопу, тобто

$$a = A/m.$$

4.12 Дефект маси ядра

$$\Delta m = \left[Z m_p + (A - Z) m_n \right] - m_я,$$

де m_p, m_n, $m_я$, – маси протона, нейтрона і ядра відповідно; Z – зарядове число; A – масове число.

4.13 Енергія зв’язку нуклона в ядрі

$$W_{зв} = \Delta m c^2,$$

де Δm – дефект маси ядра; c – швидкість світла у вакуумі. У разі, якщо енергію виражають у мегаелектрон-вольтах, а масу – в атомних одиницях маси, то

$$c^2 = 931{,}4\, МеВ/а.\,о.\,м.$$

4. 14 Питома енергія зв'язку (енергія, що припадає на один нуклон):

$$W_\alpha = 7{,}7\, МеВ,$$
$$W_p = 8{,}5\, МеВ.$$

4.15 Символічний запис ядерної реакції

$${}_Z^AX + a \to {}_{Z'}^{A'}Y + b \text{ або } {}_Z^AX\left(a,b\right){}_{Z'}^{A'}Y,$$

де ${}_Z^AX$ і ${}_{Z'}^{A'}Y$ – початкове та кінцеве ядра відповідно із зарядовими числами Z та Z' і масовими числами A і A'; a – частинка, що бомбардує ядро; b – частинка, що з'являється в результаті реакції.

При позначенні частинок використовують символи:

p – протон; n – нейтрон; d – дейтон; α – альфа-частинка; γ – гамма-фотон.

Під час ядерної реакції виконуються закони збереження :

а) масового числа;

б) зарядового числа;

в) релятивістської повної енергії;

г) імпульсу.

4.16 Правила зміщення

Для α – розпаду ${}_Z^AX \to {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_2^4He$.

Для β^- – розпаду ${}_Z^AX \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^0e$.

Для β^+ – розпаду ${}_Z^AX \to {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{+1}^0e$.

4.17 Енергія ядерної реакції

$$Q = \left[\left(m_1 + m_2\right) - \left(m_3 + m_4\right)\right]c^2;$$

де m_1 і m_2 – маса спокою ядра-мішені та частинки, що його бомбардує; $\left(m_3 + m_4\right)$ – сума мас спокою ядер продуктів реакції.

ПИТАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

1 Пояснити, чому густина ядерної речовини приблизно однакова для всіх ядер.
2 Що більше: маса атомного ядра чи маса вільних нуклонів, які входять до його складу.
3 Що являють собою ядерні сили? Механізм сильної взаємодії.
4 Охарактеризувати властивості та особливості сил, що діють між нуклонами.
5 Пояснити, чому радіоактивні властивості елементів обумовлені лише структурою їх ядер.
6 Відповідно до закону взаємозв'язку маси та енергії кожне змінювання енергії супроводжується відповідною зміною маси. Наприклад, при нагріванні води повинна збільшуватися не лише внутрішня енергія, а й маса води, що нагрівається. Чому ми не помічаємо зміни маси?
7 Символічний запис ядерної реакції. Правила зміщення.
8 Механізм сильної взаємодії.
9 Як визначити вік Землі за зразком природної уранової руди?
10 Ядерні реакції поділу.
11 Ядерні реакції синтезу.
12 Енергетичний вихід ядерної реакції.
13 Пояснити, чому для здійснення термоядерної реакції необхідна дуже висока температура.
14 Чому реакції синтезу атомних ядер є колосальним джерелом енергії?
15 Що таке нуклеосинтез?

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ПРИКЛАД 4.1

На який елемент перетворюється $^{238}_{92}U$ після трьох α - та двох β-перетворень?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$Z' - ?\ A' - ?$

$A = 238,$
$Z = 92$

Кожний альфа-розпад супроводжується зменшенням зарядового числа Z на 2 та зменшенням масового числа A на 4. Кожний бета-розпад призводить до збільшення зарядового числа Z на 1, а масове число A не змінюється. Таким чином, зарядове число Z' одержаного елемента дорівнює

$$Z' = Z - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 92 - 6 + 2 = 88,$$

а масове число

$$A' = A - 3 \cdot 4 = 238 - 12 = 226.$$

Із таблиці Менделєєва бачимо, що цим елементом є радій $^{226}_{88}Ra$.

Відповідь: $^{226}_{88}Ra$.

ПРИКЛАД 4.2

Період піврозпаду ізотопу стронцію ${}^{90}_{38}Sr$ складає 28 років. Знайти середній час життя ядра цього ізотопу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\tau - ?$
$T_{1/2} = 28\, років$

Кількість ядер $dN(t)$, що розпадаються за проміжок часу від t до $t+dt$, дорівнює

$$dN = -\lambda N dt, \tag{1}$$

де λ – стала розпаду.

Час життя кожного з цих ядер дорівнює t. Сума часів життя всіх N_0 ядер, які були при $t=0$, може бути отримана інтегруванням виразу $tdN(t)$. Розділивши результат на N_0, одержимо середній час життя радіоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t dN(t) = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N(t) dt = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N_0 \exp(-\lambda t) dt =$$
$$= \int_0^\infty t\lambda \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{2}$$

З урахуванням того, що стала розпаду λ і період піврозпаду пов'язані співвідношенням

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}, \quad \text{одержимо} \quad \tau = T_{1/2} / \ln 2. \tag{3}$$

Після підставлення числових значень величин у співвідношення (3) визначимо

$$\tau = \frac{28}{0,693} = 40,4 \text{ р.}$$

Відповідь: $\tau = 40,4$ року.

ПРИКЛАД 4.3

Середній час життя атомів деякої радіоактивної речовини $\tau = 1$ с. Визначити ймовірність ω того, що ядро атома розпадеться за проміжок часу $t = 1$ с.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$\tau = 1c,$ $t = 1c$

За проміжок часу t розпадається кількість атомів

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left[1 - \exp(-\lambda t)\right] = N_0\left[1 - \exp(-t/\tau)\right],$$

де N – кількість атомів, що не розпалися за час t; N_0 – кількість атомів, що не розпалися, на момент, взятий за початковий (при $t = 0$); λ – стала радіоактивного розпаду; τ – середній час життя радіоактивних атомів.

Ймовірність розпаду одного атома дорівнює

$$\omega = \frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \exp(-\frac{t}{\tau}).$$

Після підставлення числових значень у це співвідношення визначимо

$$\omega = 1 - \exp(-1) = 0,63.$$

Відповідь: $\omega = 0,63$.

ПРИКЛАД 4.4

Визначити початкову активність A_0 радіоактивного магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2\,мкг$, а також його активність A через одну годину. Припустимо, що всі атоми ізотопу – радіоактивні.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$A_0 - ?\ \ A - ?$
$m = 0,2\,мкг = 2\cdot 10^{-10}\,кг,$ $t = 1\,год = 3600\,c,$ $M = 27\cdot 10^{-3}\,кг/моль$

Активність ізотопу у початковий момент часу ($t = 0$) дорівнює

$$A_0 = \lambda N_0, \tag{1}$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Візьмемо до уваги, що стала розпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \tag{2}$$

де $T_{1/2}$ – період піврозпаду, для ^{27}Mg $T_{1/2} = 10\,хв = 600\,с$.

Кількість атомів визначимо із співвідношення

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A, \tag{3}$$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\,моль^{-1}$; M – молярна маса магнію.

З урахуванням виразів (2) і (3) співвідношення (1) набере вигляду

$$A_0 = \frac{mN_A}{MT_{1/2}} \ln 2. \tag{4}$$

Активність ізотопу змінюється з часом за законом

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \tag{5}$$

Замінимо у формулі (5) сталу розпаду її значенням (2) та одержимо

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t} = A_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-t/T_{1/2}} = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}. \tag{6}$$

Після підставлення числових значень у співвідношення (4) та (6) визначимо

$$A_0 = \frac{2 \cdot 10^{-10} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{27 \cdot 10^{-3} \cdot 600} 0,697 = 5,15 \cdot 10^{12}\,Бк = 5,15\left(ТБк\right).$$

$$A = \frac{5,15 \cdot 10^{12}}{2^{3600/600}} = 8,05 \cdot 10^{10}\,Бк = 80,5\left(ГБк\right).$$

Відповідь: $A_0 = 5,15\,ТБк$; $A = 80,5\,ГБк$.

ПРИКЛАД 4.5

Скільки ядер, що містяться в $m = 1г$ тритію ^3_1H розпадеться за середній час життя цього ізотопу?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta N - ?$
$m = 1г = 10^{-3}\,кг,$ $t = \tau,$ $M = 3\cdot 10^{-3}\,кг/моль$

Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \qquad (1)$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Середній час життя радіоактивного ізотопу обернено пропорційний сталі розпаду $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$. Кількість атомів, що розпалися за час $t = \tau$, дорівнює

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) = N_0\left(1 - e^{-1}\right). \qquad (2)$$

Кількість атомів у початковий момент часу визначимо із співвідношення

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A, \qquad (3)$$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\,моль^{-1}$; M – молярна маса тритію.

З урахуванням виразів (3) співвідношення (2) набере вигляду

$$\Delta N = \frac{m}{M} N_A\left(1 - e^{-1}\right). \qquad (4)$$

Підставимо в (4) числові значення та одержимо

$$\Delta N = \frac{10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}} 6{,}02\cdot 10^{23}\left(1 - 2{,}72^{-1}\right) = 1{,}27\cdot 10^{23}.$$

Відповідь: $\Delta N = 1{,}27\cdot 10^{23}$.

ПРИКЛАД 4.6

Період піврозпаду ${}^{60}_{27}Co$ дорівнює $T_{1/2} = 5,3$ року. Визначити, яка частка початкової кількості ядер розпадеться за $t = 5$ років.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta N - ?$

$t = 5\,років,$

$T_{1/2} = 5,3\,року$

Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \tag{1}$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Частка початкової кількості ядер, що розпадеться за час t,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Візьмемо до уваги, що стала розпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \tag{2}$$

де $T_{1/2}$ – період піврозпаду

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t}.$$

За допомогою розрахунків одержимо

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5,3}5} = 0,48.$$

Відповідь: $\Delta N / N_0 = 0,48$.

ПРИКЛАД 4.7

Визначити кількість теплоти, що вивільняється $m = 1мг$ препарату ^{210}Po за період, що дорівнює середньому часу життя цих ядер. Кінетична енергія випромінюваних альфа-частинок дорівнює $W_K = 5,3МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$Q - ?$

$m = 1мг = 10^{-6}\,кг,$
$t = \tau,$
$M = 210 \cdot 10^{-3}\,кг/моль,$
$W_K = 5,3МеВ = 8,48 \cdot 10^{-13}\,Дж$

Початкова кількість радіонуклідів дорівнює

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A,$$

де m – маса препарату; M – його молярна маса.

Тоді кількість ядер, що розпалися, дорівнює

$$\Delta N = \frac{mN_A}{M}(1 - e^{-\lambda\tau}) = \frac{mN_A}{M}(1 - \frac{1}{e}).$$

Середній час життя препарату визначається співвідношенням

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Тоді кількість теплоти, що вивільняється за цей час, дорівнює

$$Q = \Delta N \cdot W_K = W_K \frac{mN_A}{M}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в одержане співвідношення визначимо

$$Q = \frac{5,5 \cdot 10^{-3} 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-6} 6,02 \cdot 10^{23}}{210 \cdot 10^{-3}}\left(1 - \frac{1}{e}\right) \approx 1,6 \cdot 10^{6} = 1,6\left(МДж\right).$$

Відповідь: $Q = 1,6МДж$.

ПРИКЛАД 4.8

Визначити дефект маси Δm, енергію зв'язку $W_{зв}$ та питому енергію зв'язку ядра $^{11}_{5}B$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дефект маси ядра

$$\Delta m = \left[Zm_p + \left(A - Z \right) m_n \right] - m_a,$$

де Z – зарядове число; А – масове число; m_p, m_n і m_a – маси протона, нейтрона та атома.

У нашому випадку $Z = 5$, $A = 11$. У таблицях визначимо маси протона m_p, нейтрона m_n та атома $^{11}_{5}B$ m_a:

$$m_p = 1{,}00728\, а.\, о.\, м.,$$

$$m_n = 1{,}00867\, а.\, о.\, м.,$$

$$m_a = 11{,}00931\, а.\, о.\, м.$$

Підставимо ці дані у формулу для дефекту маси та одержимо

$$\Delta m = 5 \cdot 1{,}00728 + \left(11 - 5 \right) \cdot 1{,}00867 - 11{,}00931 = 0{,}08186\, а.\, о.\, м.$$

Енергія зв'язку нуклона в ядрі

$$W_{зв} = \Delta mc^2,$$

де $c^2 = 931{,}4\, МеВ / а.\, о.\, м.$

Розрахунки приводять до

$$W_{зв} = 0{,}08186 \cdot 931{,}4 = 76{,}2 \left(МеВ \right) = 12{,}2 \left(пДж \right).$$

Питома енергія зв'язку (енергія, що припадає на один нуклон) дорівнює

$$w_{зв} = \frac{W_{зв}}{A}.$$

За допомогою обчислень одержимо

$$w_{зв} = \frac{76{,}2}{11} = 6{,}93 \left(МеВ / нуклон \right).$$

Відповідь: $\Delta m = 0{,}08186\, а.\, о.\, м.$; $W_{зв} = 12{,}2\, пДж$; $w_{зв} = 6{,}93\, МеВ / нуклон$.

ПРИКЛАД 4.9

Знайти енергію реакції ${}_4^9Be + {}_1^1p \rightarrow {}_2^4He + {}_3^6Li$, якщо відомо, що кінетична енергія протона $W_p = 5,45\,MeB$, ядра гелію $W_{He} = 4\,MeB$ і що ядро гелію вилетіло під кутом $\alpha = 90^0$ до напряму руху протона. Ядро-мішень ${}_4^9Be$ нерухоме.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$W_p = 5,45\,MeB,$ $W_{He} = 4\,MeB,$ $\alpha = 90^0$

Енергія реакції Q є різницею між сумою кінетичних енергій ядер-продуктів реакції та кінетичною енергією ядра, що викликає реакцію

$$Q = E_{Li} + E_{He} - E_p\,. \qquad (1)$$

У цьому виразі невідома кінетична енергія $m_B = 50\,\text{т}$ літію. Для її визначення скористаємося законом збереження імпульсу

$$\vec{p}_p = \vec{p}_{He} + \vec{p}_{Li}\,. \qquad (2)$$

Вектори $\vec{p}_H$ і $\vec{p}_{He}$ за умовою задачі взаємно перпендикулярні і, отже, разом з вектором $\vec{p}_{Li}$ утворюють прямокутний трикутник. Тому

$$\left(p_{Li}\right)^2 = \left(p_{He}\right)^2 + \left(p_p\right)^2. \qquad (3)$$

Виразимо в цій рівності імпульси ядер через їх кінетичні енергії. Оскільки кінетичні енергії ядер за умовою набагато менші від енергій спокою цих ядер, то можна скористатися формулою класичної фізики

$$p^2 = 2mE\,. \qquad (4)$$

Замінивши в рівнянні (3) квадрати імпульсів ядер їх виразами (4), після спрощення одержимо

$$m_{Li}E_{Li} = m_{He}E_{He} + m_pE_p\,,$$

звідси

$$E_{Li} = \frac{m_{He}E_{He} + m_pE_p}{m_{Li}}\,.$$

Підставивши цей вираз у співвідношення (1), визначимо

$$Q = \frac{m_{He}E_{He} + m_p E_p}{m_{Li}} + E_{He} - E_H . \qquad (5)$$

Після підставлення у вираз (5) числових значень величин у МеВ та а. о. м., одержимо

$$Q = \frac{4,00260 \cdot 4 + 1,00728 \cdot 5,45}{6,01513} + 4 - 5,45 = 2,13\left(MeB\right).$$

Відповідь: $Q = 2,13 MeB$.

ПРИКЛАД 4.10

Радіоактивне ядро магнію $^{23}_{12}Mg$ викинуло позитрон і нейтрино. Визначити енергію Q β^+-розпаду ядра.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Реакцію β^+-розпаду ядра магнію можна записати так:

$$^{23}_{12}Mg \rightarrow {}^{23}_{11}Na + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu .$$

Припускаючи, що ядро магнію було нерухомим, і враховуючи, що маса спокою нейтрино практично дорівнює нулю, напишемо рівняння енергетичного балансу. На підставі закону збереження релятивістської повної енергії маємо

$$m_{Mg}c^2 = m_{Na}c^2 + E_{Na} + m_e c^2 + E_e + E_\nu . \qquad (1)$$

Енергія розпаду дорівнює

$$Q = E_{Na} + E_e + E_\nu = \left(m_{Mg} - m_{Na} - m_e\right)c^2 . \qquad (2)$$

Виразимо маси ядер магнію і натрію через маси відповідних нейтральних атомів:

$$Q = \left(\left(m_{Mg} - 12m_e\right) - \left(m_{Na} - 11m_e\right) - m_e\right)c^2 . \qquad (3)$$

Оскільки маси спокою електрона і позитрона однакові, то після спрощень співвідношення (3) одержимо

$$Q=\left(m_{Mg}-m_{Na}-2m_e\right)c^2.$$

У таблицях визначимо маси електрона, ізотопів магнію та натрію:

$$m_e=0,00055\,а.\,о.\,м.;\; m_{^{23}_{12}Mg}=22,99414\,а.\,о.\,м.;\; m_{^{23}_{11}Na}=22,98977\,а.\,о.\,м.$$

Підставимо числові значення фізичних величин з урахуванням, що $c^2=931,4\;МеВ/а.\,о.\,м.$, та проведемо розрахунки:

$$Q=\left(22,99414-22,98977-2\cdot 0,00055\right)\cdot 931,4=3,05\left(МеВ\right).$$

Відповідь: $Q=3,05\,МеВ$.

ПРИКЛАД 4.11

Яку масу води, взятої при $0\,^0C$, можна закип'ятити використовуючи енергію термоядерного синтезу гелію з дейтерієм і тритієм, якщо ККД перетворення енергії дорівнює $\eta=10\,\%$? Маса гелію, що утворився, $m=1г$.

$m-?$
$\eta=10\%,$
$m=1г=10^{-3}\,кг,$
$T=0^0\,C,$
$C=4200\,Дж/\left(моль\cdot К\right)$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Запишемо рівняння ядерної реакції синтезу гелію:

$$^2_1H+\,^3_1H\rightarrow\,^4_2He+\,^1_0n.$$

Маса спокою частинок, що утворилися, менша за масу спокою частинок, що вступили в реакцію, тому в процесі синтезу ядер вивільниться енергія

$$Q_0=\left(m_{^2_1H}+m_{^3_1H}-m_{He}-m_n\right)c^2. \qquad (1)$$

При одиничному акті термоядерного синтезу вивільняється енергія Q_0 і витрачається маса $T_{1/2}=0,76$ дейтерію і тритію. Отже, використавши паливо масою m, ми вивільнимо енергію

$$Q = Q_0 \frac{m}{m_0}. \tag{2}$$

Вода при цьому отримає кількість теплоти

$$Q_B = \eta Q. \tag{3}$$

Використавши зв'язок між кількістю теплоти і теплоємністю води, можна записати

$$Q_{\hat{A}} = Cm_B \Delta t. \tag{4}$$

Прирівнявши співвідношення (3) та (4), одержимо

$$\eta Q = Cm_B \Delta t,$$

звідси

$$m_B = \frac{\eta Q}{C\Delta t}. \tag{5}$$

Підставивши в цей вираз співвідношення (1) та (2), одержимо остаточно

$$m_B = \frac{\eta\left(m_{{}_1^2H} + m_{{}_1^3H} - m_{He} - m_n\right)c^2}{Cm_0\Delta t}. \tag{69}$$

Після підставлення числових значень у цей вираз визначимо

$$m_B = \frac{0,1\cdot\left(2,01410 + 3,01605 - 4,00260 - 1,00867\right)\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot\left(3\cdot 10^8\right)^2}{4190\cdot 5\cdot 1,67\cdot 10^{-27}\cdot 100} = 5\cdot 10^4\left(кг\right).$$

Це у 50 млн разів більше за масу термоядерного палива, яке було використане на нагрівання!

Відповідь: $m_B = 50\,\text{т}$.

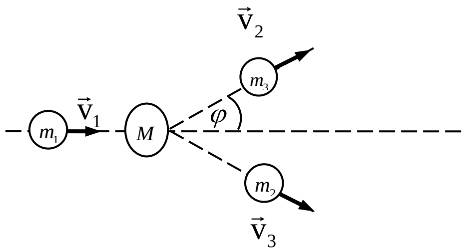
ПРИКЛАД 4.12

У реакції ${}^{14}_{7}N\left(\alpha, p\right){}^{17}_{8}O$ кінетична енергія α-частинки дорівнює $W_\alpha = 7,7\,MeB$. Визначити, під яким кутом до напрямку руху α-частинки вилітає протон, якщо відомо, що його кінетична енергія дорівнює $W_p = 7,7\,MeB$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$

$W_\alpha = 7,7\,MeB,$
$W_p = 8,5\,MeB$



Позначимо, як показано на рисунку m_1, m_2, m_3, масові числа відповідно α-частинки, протона та ядра віддачі (в нашому випадку це ядро атома кисню), W_1, W_2, W_3 – їх кінетичні енергії. Оскільки ядро атома азоту не рухається (його масове число дорівнює M), то закон збереження енергії має вигляд

$$W_1 + Q = W_2 + W_3, \tag{1}$$

де Q – енергія ядерної реакції.

Запишемо закон збереження імпульсу

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3. \tag{2}$$

З рівняння (2) та рисунка маємо для числових значень імпульсу

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1 p_2 \cos\varphi. \tag{3}$$

Оскільки

$$p^2 = \left(m\text{v}\right)^2 = \frac{m\text{v}^2}{2} 2m = W 2m,$$

то рівняння (3) набере вигляду

$$2m_3 W_3 = 2m_1 W_1 + 2m_2 W_2 - 2\cos\varphi\sqrt{2m_1 W_1 2m_2 W_2}$$

або

$$W_3 = \frac{m_1}{m_3}W_1 + \frac{m_2}{m_3}W_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}\ . \qquad (4)$$

Виключимо з (1) та (4) енергію W_3 та одержимо формулу, що пов'язує кінетичну енергію частинок, які бомбардують, із кінетичною енергією одержаних частинок:

$$W_1\left(\frac{m_3 - m_1}{m_3}\right) + Q = W_2\left(\frac{m_2 + m_3}{m_3}\right) - \frac{2\cos\varphi}{m_3}\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}\ . \qquad (6)$$

Визначимо енергію ядерної реакції

$$Q = \left[\left(m_1 + M\right) - \left(m_2 + m_3\right)\right]c^2 . \qquad (7)$$

Розв'яжемо рівняння (6) відносно $\cos\varphi$ та одержимо

$$\cos\varphi = \frac{m_2 + m_3}{2}\sqrt{\frac{W_2}{m_1 m_2 W_1}} - \frac{m_3 - m_1}{2}\sqrt{\frac{W_1}{m_1 m_2 W_2}} - \frac{m_3 Q}{2\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}} . \qquad (8)$$

Візьмемо значення мас частинок, що беруть участь у реакції, з таблиць та підрахуємо енергію реакції:

$$m_1 = 4{,}00388\, а.\, о.\, м.,\ M = 14{,}00752\, а.\, о.\, м.,$$
$$m_2 = 1{,}00814\, а.\, о.\, м.,\ m_3 = 17{,}00453\, а.\, о.\, м.$$

$$Q = \left[\left(4{,}00388 + 14{,}00752\right) - \left(1{,}00814 + 17{,}00453\right)\right]931{,}4 = -1{,}183\left(MeB\right).$$

Підставимо числові значення у співвідношення (8) та одержимо

$$\cos\varphi = \frac{1+17}{2}\sqrt{\frac{8{,}5}{4\cdot 1\cdot 7{,}7}} - \frac{17-4}{2}\sqrt{\frac{7{,}7_{\ 1}}{4\cdot 1\cdot 8{,}5}} - \frac{17\cdot\left(-1{,}183\right)}{2\sqrt{4\cdot 1\cdot 7{,}7\cdot 8{,}5}} = 0{,}59 .$$

$$\varphi = arctg\, 0{,}59 = 30{,}5^0 .$$

Відповідь: $\varphi = 30{,}5^0$.

ПРИКЛАД 4.13

Яка енергія вивільняється при згорянні $m=1г$ ядерного пального в термоядерній реакції ${}^{6}_{3}Li\left({}^{2}_{1}H,\alpha\right){}^{4}_{2}He$? Порівняти одержаний результат з енергією, яку можна отримати під час розпаду $m=1г$ урану ${}^{235}U$. При кожному акті розпаду ядра ${}^{235}U$ вивільняється енергія $W_1 = 200\,МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W_{Li}-?\ W_U-?$
$m=1г=10^{-3}\,кг,$ $W_1=200\,МеВ$

Запишемо рівняння термоядерної реакції

$$ {}^{6}_{3}Li+{}^{2}_{1}H\rightarrow{}^{4}_{2}\alpha+{}^{4}_{2}He. $$

Енергію, яка вивільняється під час цієї реакції, можна визначити із співвідношення

$$ Q=\Delta mc^2, \tag{1} $$

де $c^2=931{,}4\,МеВ/а.о.м.$ для дефекту маси виміряної в $а.о.м.$

Дефект маси дорівнює $\Delta m=\left(m_{{}^{6}_{3}Li}+m_{{}^{2}_{1}H}\right)-2m_{{}^{4}_{2}He}$. У таблицях додатку Б визначимо маси частинок, що беруть участь у реакції:

$$ m_{{}^{6}_{3}Li}=6{,}01513\,а.о.м.;\quad m_{{}^{2}_{1}H}=2{,}01410\,а.о.м.;\quad m_{{}^{4}_{2}He}=4{,}00260\,а.о.м. $$

Підставимо ці дані у формулу для дефекту маси та одержимо

$$ \Delta m=\left(6{,}01513+2{,}01410\right)-4{,}00260=0{,}024\left(а.о.м.\right). $$

При одиничному акті термоядерного синтезу вивільняється енергія

$$ Q=0{,}024\cdot931{,}4=22{,}38\left(МеВ\right) $$

і витрачаються маси літію ${}^{6}_{3}Li$ та дейтерію у співвідношенні 3:1. Отже, з $m=1г$ на літій ${}^{6}_{3}Li$ припадає $m_1=0{,}75г=0{,}75\cdot10^{-3}\,кг$.

Кількість атомів ${}^{6}_{3}Li$ визначимо із співвідношення

$$ N_{Li}=\frac{m_1}{M_{Li}}N_A, \tag{2} $$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\, моль^{-1}$; M_{Li} – молярна маса літію ${}_3^6Li$, $M_{Li} = 6 \cdot 10^{-3}\, кг/моль$.

Таким чином, кількість актів термоядерного синтезу N. Енергія, що при цьому вивільняється, дорівнює

$$W_{Li} = NQ = \frac{m_1}{M_{Li}} N_A Q.$$

За допомогою обчислень одержимо

$$W_{Li} = \frac{0,75 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 22,38 = 16,84 \cdot 10^{23} \left(МеВ\right)$$

або

$$W_{Li} = 16,84 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 2,69 \cdot 10^{11} \left(Дж\right) = 2,69 \cdot 10^{5} \left(МДж\right).$$

Визначимо, яка кількість атомів міститься в $m = 1г$ урану ${}^{235}U$:

$$N_U = \frac{m}{M_U} N_A. \tag{2}$$

Молярна маса урану ${}^{235}U$, $M_U = 235 \cdot 10^{-3}\, кг/моль$.

Енергія, що вивільняється при розпаді N_U атомів урану, дорівнює

$$W_U = N_U W_1 = \frac{m}{M_U} N_A W_1.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в останній вираз та одержимо

$$W_U = \frac{10^{-3}}{235 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 200 = 5,12 \cdot 10^{23} \left(МеВ\right),$$

$$W_U = 5,12 \cdot 10^{23} \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} = 8,2 \cdot 10^{10} \left(Дж\right) = 0,82 \cdot 10^{5} \left(МДж\right).$$

Таким чином, енергія, що вивільняється при згорянні $m = 1г$ ядерного пального в термоядерній реакції ${}_3^6Li\left({}_1^2H, \alpha\right){}_2^4He$ у 3,28 раза більша за енергію, яку можна отримати під час розпаду $m = 1г$ урану ${}^{235}U$.

Відповідь: $W_{Li} = 2,69 \cdot 10^{5}\, МДж$; $W_U = 0,82 \cdot 10^{5}\, МДж$.

ПРИКЛАД 4.14

Запропонований Бете вуглецевий цикл зоряних термоядерних реакцій містить такі перетворення:

$$^{1}H + {}^{12}C \to {}^{13}N + \gamma; \qquad {}^{1}H + {}^{14}N \to {}^{15}O + \gamma;$$
$$^{13}N \to {}^{13}C + {}^{0}_{1}e + \nu_e; \qquad {}^{15}O \to {}^{15}N + {}^{0}_{1}e + \nu_e;$$
$$^{1}H + {}^{13}C \to {}^{14}N + \gamma; \qquad {}^{1}H + {}^{15}N \to {}^{12}C + {}^{4}He.$$

Визначити енергію, що вивільняється в цьому циклі при утворенні одного моля гелію. Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e} = 0,527\,МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Додамо окремо частини рівнянь, що містяться ліворуч та праворуч від знака $\to$:

$$4\,{}^{1}H + {}^{12}C + {}^{14}N + {}^{13}N + {}^{15}O + {}^{13}C + {}^{15}N \to$$
$$\to {}^{13}N + {}^{15}O + {}^{13}C + 2{}^{0}_{1}e + {}^{15}N + {}^{14}N + {}^{12}C + {}^{4}He + 2\nu_e,$$
$$4\,{}^{1}H \to 2{}^{0}_{1}e + {}^{4}He + 2\nu_e.$$

При такому перетворенні вивільняється енергія

$$Q = \Delta mc^2 = \left(4m_H - m_{He} - 2m_e\right)c^2 - 2\cdot 0,527,$$

де $c^2 = 931,4\,МеВ/а.\,о.\,м.$ для дефекту маси, виміряної в $а.\,о.\,м.$; $2\cdot 0,527\,МеВ$ – енергія електронного нейтрино.

У таблицях додатка Б визначимо маси частинок, що беруть участь у реакції:

$$m_{{}^{1}_{1}H} = 1,00783\,а.\,о.\,м.; \quad m_{{}^{4}_{2}He} = 4,00260\,а.\,о.\,м.; m_e = 0,00055\,а.\,о.\,м.$$
$$Q = \left(4\cdot 1,00783 - 4,00260 - 2\cdot 0,00055\right)931,4 - 2\cdot 0,527 = 24,67\,МеВ.$$

В одному молі речовини число Авогадро молекул $N_A = 6,02\cdot 10^{23}\,моль^{-1}$. Таким чином, енергія, що вивільняється в циклі Бете при утворенні одного моля гелію, дорівнює

$$W = 24,67\cdot 6,02\cdot 10^{23} = 1,485\cdot 10^{25}\left(МеВ\right) = 2,38\left(ТДж\right).$$

Відповідь: $W = 2,38\,ТДж$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

БУДОВА ЯДРА

4.1 Визначити атомні номери, масові числа та хімічні символи ядер, які утворяться, якщо в ядрах ${}_{2}^{3}He,\ {}_{4}^{7}Be,\ {}_{8}^{15}O$ протони замінити нейтронами, а нейтрони – протонами.

Відповідь: ${}_{1}^{3}H,\ {}_{3}^{7}Li,\ {}_{7}^{15}N$.

4.2 Визначити середню густину ядра та середню об'ємну густину його електричного заряду.

Відповідь: $\rho = 1,4 \cdot 10^{17}\ кг/м^3;\ \rho_{ел} = 7 \cdot 10^{24}\ Кл/м^3$.

4.3 Визначити кількість протонів та нейтронів, які містять три ізотопи бору: ${}^{9}B$, ${}^{10}B$ і ${}^{11}B$.

Відповідь: ${}^{9}B - Z = 5,\ N = 4$; ${}^{10}B - Z = 5,\ N = 5$; ${}^{11}B - Z = 5,\ N = 6$.

4.4 Визначити, використовуючи таблицю Менделєєва, кількість нейтронів і протонів в атомах Po і Ku.

4.5 Визначити атомні номери, масові числа та хімічні символи ядер, які утворяться, якщо в ядрах ${}^{9}Be,\ {}^{13}N,\ {}^{23}Na$ протони замінити нейтронами, а нейтрони – протонами.

Відповідь: ${}_{5}^{9}B,\ {}_{6}^{13}C,\ {}_{12}^{23}Mg$.

4.6 Яку частку від маси нейтрального атома плутонію становить маса його електронної оболонки?

Відповідь: $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$.

4.7 Визначити зарядове та масове числа ізотопу, що утвориться з торію ${}_{90}^{232}Th$ після двох α-та двох β-перетворень.

Відповідь: $Z = 88$ – радій; $A = 224$.

4.8 У ланцюжку радіоактивних перетворень ${}^{235}U$ в ${}^{207}Pb$ відбувається кілька альфа- і бета-розпадів. Скільки розпадів у цьому ланцюжку?

Відповідь: 7 α-перетворень та 4 β-перетворення.

4.9 Внаслідок радіоактивного розпаду уран ${}^{238}_{92}U$ перетворюється на свинець ${}^{206}_{82}Pb$. Скільки α- та β-перетворень при цьому відбулося?

Відповідь: 8 α-перетворень та 6 β-перетворень.

4.10 На який елемент перетворюється ${}^{238}_{92}U$ після трьох α- та двох β-перетворень?

Відповідь: ${}^{226}_{88}Ra$.

4.11 Внаслідок радіоактивного розпаду уран ${}^{238}_{92}U$ перетворюється на ядро ${}^{234}_{92}U$. Скільки α- та β-перетворень при цьому відбувається?

Відповідь: 1 α-розпад та 2 β-розпади.

4.12 У ланцюжку радіоактивних перетворень після п'яти бета-розпадів і кількох альфа-розпадів ядро важкого елемента перетворюється на ядро стабільного атома, порядковий номер якого на 13 менший за початковий. На скільки меншим стає масове число?

Відповідь: $\Delta A = 36$.

4.13 У ланцюжку радіоактивних перетворень після кількох альфа- і бета-розпадів ядро важкого елемента перетворюється на ядро стабільного атома, в якого кількість нейтронів на 27 менша, ніж у початкового ядра. Відомо, що кількість альфа-розпадів дорівнює кількості бета-розпадів. Чому дорівнює загальна кількість розпадів?

Відповідь: 18.

4.14 В ядро атома азоту ${}^{14}_{7}N$ потрапляє альфа-частинка і залишається в ньому. При цьому утворюється ядро деякого елемента та випромінюється протон. Який порядковий номер цього елемента в Періодичній системі елементів Менделєєва?

Відповідь: $Z = 8$ – кисень.

4.15 При бомбардуванні ядер певного елемента протонами виникає альфа-частинка і випромінюється позитрон. Визначити кількість нейтронів у початковому ядрі.

Відповідь: $N = 1$.

4.16 Після захоплення нейтрона ядро ізотопу ^{238}U перетворюється на радіоактивний ізотоп урану, який після двох послідовних бета-розпадів перетворюється на плутоній. Скільки нейтронів містить це ядро атома плутонію?

Відповідь: 145.

4.17 Ядро $^{239}_{92}U$ є радіоактивним. Після випромінювання електрона воно перетворюється на ядро іншого елемента. Який порядковий номер цього елемента в Періодичній системі елементів Менделєєва?

Відповідь: $Z = 93$ – нептуній.

4.18 Ядро ізотопу берилію ^{9}Be поглинає дейтрон $^{2}_{1}H$ та перетворюється на ядро іншого елемента. При цьому випромінюється один нейтрон. Який порядковий номер утвореного елемента в Періодичній системі елементів Менделєєва?

Відповідь: $Z = 5$ – бор.

4.19 Під час бомбардування ^{6}Li нейтронами утворюються ядро гелію ^{4}He та ізотоп іншого елемента. Визначити кількість нейтронів у ядрі цього ізотопу. Який це ізотоп?

Відповідь: $N = 2$; $Z = 1$ – дейтерій.

4.20 При бомбардуванні нейтронами атома алюмінію ^{27}Al випромінюється альфа-частинка і утворюється ядро іншого ізотопу. Визначити кількість нейтронів у ядрі цього ізотопу. Який це ізотоп?

Відповідь: $N = 13$; $Z = 11$ – натрій.

ЗАКОН РАДІОАКТИВНОГО РОЗПАДУ. АКТИВНІСТЬ

4.21 Визначити вік мінералу, в якому на один атом урану припадає: а) один атом свинцю; б) 0,2 атома свинцю.

Відповідь: а) $t = 4,5 \cdot 10^9$ років; б) $t = 1,44 \cdot 10^9$ років.

4.22 Визначити, в скільки разів початкова кількість ядер радіоактивного ізотопу зменшиться за три роки, якщо за один рік вона зменшилася в 4 рази.

Відповідь: n = 64.

4.23 Визначити у відсотках, яка частина початкової кількості ядер радіоактивного ізотопу не розпадеться за час t, що дорівнює двом середнім термінам життя τ радіоактивного ядра.

Відповідь: $\omega = 13,5$ %.

4.24 Визначити, що і в скільки разів є більш тривалим – три періоди піврозпаду $T_{1/2}$ чи два середніх терміни життя радіоактивного ядра τ.

Відповідь: $3T_{1/2} = 2,08\tau$.

4.25 Визначити період піврозпаду радіоактивного ізотопу, якщо $5/8$ початкової кількості ядер цього ізотопу розпалося за час t = 20 хвилин.

Відповідь: $T_{1/2} = 10\,хв$.

4.26 За $t = 150\,c$ розпалося $7/8$ початкової кількості ядер радіоактивного ізотопу. Чому дорівнює період піврозпаду цього елемента?

Відповідь: $T_{1/2} = 50\,c$.

4.27 Вивести формулу для швидкості радіоактивного розпаду через період напіврозпаду $T_{1/2}$ і початкове число N_0 радіоактивних атомів.

Відповідь: $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0 \exp\left(-\dfrac{t\ln 2}{T_{1/2}}\right)$.

4.28 Лічильник Гейгера зареєстрував за 1 хв 4 000 β-частинок, що виникли при розпаді ядер радіоактивного ізотопу, а через 1 добу – лише 1 000 розпадів. Визначити період піврозпаду ізотопу.

Відповідь: $T_{1/2} = 0,5$ доби.

4.29 Знайти сталу розпаду λ і середній час життя τ радіоактивного ізотопу ^{55}Co, якщо відомо, що його активність зменшується на $\eta = 4\%$ за 1 годину? Продукт розпаду нерадіоактивний.

Відповідь: $\lambda = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\, c$; $\tau = 1$ доба.

4.30 Із кожного мільйона атомів радіоактивного ізотопу щосекунди розпадається 200 атомів. Визначити період піврозпаду ізотопу.

Відповідь: $T_{1/2} = 0{,}96$ години.

4.31 Визначити сталу радіоактивного розпаду для ізотопів: 1) торію ^{229}Th; 2) урану ^{238}U; 3) йоду ^{131}I. Періоди піврозпаду цих ізотопів відповідно дорівнюють 1) 7 000 років; 2) 4,5·10^9 років; 3) 8 діб.

Відповідь: 1) $\lambda = 3{,}14 \cdot 10^{-12}\, c^{-1}$; 2) $\lambda = 4{,}9 \cdot 10^{-18}\, c^{-1}$; 3) $\lambda = 10^{-6}\, c^{-1}$.

4.32 За 1 рік розпалося 60 % радіоактивного елемента. Визначити період піврозпаду цього нукліда.

Відповідь: $T_{1/2} = 0{,}76$ року.

4.33 Скільки ядер, що містяться в $m = 1г$ тритію ^3_1H, розпадеться за середній час життя цього ізотопу?

Відповідь: $\Delta N = 1{,}27 \cdot 10^{23}$.

4.34 Період піврозпаду ^{60}Co дорівнює $T_{1/2} = 5{,}3$ року. Визначити, яка частка початкової кількості ядер цього ізотопу розпадеться через $t = 5$ років.

Відповідь: $\Delta N / N_0 = 0{,}48$.

4.35 Період піврозпаду ^{41}Ar дорівнює $T_{1/2} = 110$ хвилин. Визначити час, за який розпадеться 25 % від початкової кількості ядер.

Відповідь: $t = 45$ хвилин.

4.36 Визначити сталу розпаду і кількість атомів радону ^{222}Rn, які розпалися впродовж 1 доби, якщо початкова маса радону дорівнює $m = 10г$. Період піврозпаду радону ^{222}Rn дорівнює $T_{1/2} = 3{,}82$ доби.

Відповідь: $\lambda = 2{,}094 \cdot 10^{-6}\, c^{-1}$; $\Delta N = 4{,}3 \cdot 10^{21}$.

4.37 Визначити у відсотках, яка частина початкової кількості ядер радіоактивного ізотопу розпадеться за час t, що дорівнює двом середнім термінам життя τ радіоактивного ядра.

Відповідь: $\omega = 86,5$ %.

4.38 Період піврозпаду радіоактивного ізотопу ^{225}Ac дорівнює 10 діб. Визначити час, за який розпадеться третина початкової кількості актинію.

Відповідь: $t = 5,85$ доби.

4.39 Стала радіоактивного розпаду ізотопу ^{210}Pb дорівнює $\lambda = 10^{-9}\ c^{-1}$. Визначити час, упродовж якого розпадеться $2/5$ від початкової кількості ядер цього радіоактивного ізотопу.

Відповідь: $t = 16,2$ року.

4.40 Визначити кількість теплоти, яка вивільняється $m = 1мг$ препарату ^{210}Po за період, що дорівнює середньому часу життя цих ядер. Кінетична енергія випромінюваних альфа-частинок дорівнює $W_K = 5,3 МеВ$.

Відповідь: $Q = 1,6 МДж$.

4.41 Оцінити кількість тепла, що виділяється за 1 добу в калориметрі радіоактивним препаратом ^{24}Na, маса якого m = 1 мг. Кінетична енергія випромінюваних бета-частинок дорівнює $W_K = 1,86 МеВ$. Період напіврозпаду ^{24}Na $T_{1/2} = 15$ годин.

Відповідь: $Q = 5 МДж$.

4.42 Визначити вік стародавніх предметів, якщо відомо, що в них кількість атомів радіоактивного вуглецю, які не розпалися, дорівнює 80 % від кількості атомів цього вуглецю у щойно зрубаному дереві. Період піврозпаду вуглецю дорівнює $T_{1/2} = 5\,570$ років.

Відповідь: $t = 1800$ років.

4.43 Препарат ^{238}U, маса якого дорівнює $m = 1г$, випромінює $1,24 \cdot 10^4$ альфа-частинок за 1 секунду. Визначити його період піврозпаду.

Відповідь: $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ років.

4.44 Несистемною одиницею радіоактивності ізотопу є кюрі (Ки) – це активність препарату, що чисельно дорівнює активності 1 г радію, тобто тому числу розпадів, що відбувається в 1 г радію за 1 с. Визначте це число, знаючи, що період піврозпаду радію $T_{1/2} = 1620$ років.

Відповідь: $A = 3,6 \cdot 10^{10}\,Бк$.

4.45 На скільки відсотків зменшиться активність ізотопу іридію ^{193}Ir за час $t = 15$ діб?

Відповідь: $\Delta A / A_0 = 96\,\%$.

4.46 Активність радіоактивного ізотопу в початковий момент дорівнювала $A_0 = 100\,Бк$. Визначити активність цього ізотопу через час, що дорівнює половині періоду піврозпаду.

Відповідь: $A = 70,7\,Бк$.

4.47 Початкова активність $m = 1г$ ізотопу радію ^{226}Ra дорівнює $A = 1Ки$. Визначити період піврозпаду цього ізотопу.

Відповідь: $T_{1/2} = 1582$ роки.

4.48 Є $m = 4г$ радіоактивного ізотопу кобальту. Скільки грамів кобальту розпадеться за 216 діб, якщо його період піврозпаду $T_{1/2} = 72$ доби?

Відповідь: $\Delta m = 3,5г$.

4.49 За який час у препараті зі сталою активністю $A = 15МБк$ розпадеться $N = 3 \cdot 10^9$ ядер ?

Відповідь: $t = 200с$.

4.50 Початкова маса радіоактивного ізотопу йоду ^{131}I (період піврозпаду $T_{1/2} = 8діб$) дорівнює $m = 8г$. Визначити: 1) початкову активність ізотопу; 2) його активність через три доби.

Відповідь: 1) $A_0 = 4,61ТБк$; 2) $A = 3,55ТБк$.

4.51 Активність радіоактивного ізотопу зменшилася в $k = 250$ разів. Скільком періодам піврозпаду дорівнює минулий проміжок часу?

Відповідь: $t = 7,97T_{1/2}$.

4.52 Визначити період піврозпаду $T_{1/2}$ радіоактивного ізотопу, якщо його активність упродовж п'яти діб зменшилася у 2,2 раза.

Відповідь: $T_{1/2} = 4,4$ доби.

4.53 Визначити питому активність a ізотопу ^{238}U, якщо його період піврозпаду дорівнює $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ років.

Відповідь: $a = 12,3 МБк/кг$.

ЕНЕРГІЯ ЗВ'ЯЗКУ

4.54 Визначити дефект маси, енергію зв'язку та питому енергію зв'язку ядра атома важкого водню $_1^2H$.

Відповідь: $\Delta m = 0,00185 а.о.м.$; $W_{ЗВ} = 1,72 MeB$; $w_{зв} = 0,86 MeB/нуклон$.

4.55 Визначити: а) енергію зв'язку ядер гелію $_2^4He$ та дейтерію $_1^2H$; б) яку енергію потрібно витратити, щоб розщепити ядро гелію на два дейтони $_1^2H$?

Відповідь: а) $E_{ЗВ,He} = 28,3 MeB$; $E_{ЗВ,H} = 2,2 MeB$; б) $E = 23,6 MeB$.

4.56 Визначити енергії зв'язку нейтрона та протона в ядрі ізотопу бора $_5^{11}B$. Поясніть, чому вони є різними.

Відповідь: $E_{ЗВ,n} = 11,46 MeB$; $E_{ЗВ,p} = 11,24 MeB$.

4.57 Визначити масу m_a нейтрального атома, якщо ядро цього атома складається з трьох протонів та двох нейтронів і енергія зв'язку ядра дорівнює $E_{ЗВ} = 26,3 MeB$. Якого елемента це атом?

Відповідь: $m_a = 5,01258 а.о.м.$. Це атом літію $_3^5Li$.

4.58 Визначити дефект маси Δm, енергію зв'язку $W_{зв}$ та питому енергію зв'язку ядра $_8^{16}O$.

Відповідь: $\Delta m = 0,13269 а.о.м.$; $W_{зв} = 124 MeB$; $w_{зв} = 7,72 MeB/нуклон$.

4.59 Визначити дефект маси, енергію зв'язку ядра та питому енергію зв'язку для елемента $_{47}^{108}Ag$, $m_{Ag} = 107,869 а.о.м.$

Відповідь: $\Delta m = 1,028 а.о.м.$; $W_{зв} = 960 MeB$; $w_{зв} = W_{зв}/A = 8,9 MeB/нуклон$.

4.60 Визначити дефект маси, енергію зв'язку ядра та питому енергію зв'язку для елемента ${}^{24}_{12}Mg$, $m_{Mg} = 23{,}98504\,а.о.м.$

Відповідь: $\Delta m = 0{,}213\,а.о.м.$; $W_{зв} = 197\,MeB$; $w_{зв} = 8{,}21\,MeB/нуклон$.

4.61 Визначити, яка енергія відповідає дефекту маси $\Delta m = 3\,мг$ в електрон-вольтах.

Відповідь: $W = 2{,}7 \cdot 10^{11}\,Дж = 1{,}69 \cdot 10^{30}\,еВ$.

4.62 Визначити дефект маси, енергію зв'язку та питому енергію зв'язку ядра для елементів ${}^{4}_{2}He$ і ${}^{12}C$.

Відповідь: для ${}^{4}_{2}He$ $\Delta m = 0{,}0293\,а.о.м.$; $W_{зв} = 27{,}29\,MeB$; $w_{зв} = 6{,}82\,MeB/нуклон$;
для ${}^{12}C$ $\Delta m = 0{,}0957\,а.о.м.$; $W_{зв} = 89{,}13\,MeB$; $w_{зв} = 7{,}43\,MeB/нуклон$.

4.63 Яку енергію потрібно витратити, щоб розділити ядро ${}^{12}C$ на три α-частинки?

Відповідь: $W = 7{,}26\,MeB$.

4.64 При відриванні нейтрона від ядра гелію ${}^{4}_{2}He$ утворюється ядро ${}^{3}_{2}He$. Визначити енергію зв'язку, яку потрібно на це витратити.

Відповідь: $W_{зв} = 20{,}64\,MeB$.

4.65 Енергія зв'язку ядра, яке містить три протони і чотири нейтрони, дорівнює $W_{зв} = 39{,}3\,MeB$. Визначити масу нейтрального атома з таким ядром. Атомом якого хімічного елемента він є?

Відповідь: $m = 1{,}165 \cdot 10^{-26}\,кг$, літій.

ЯДЕРНІ РЕАКЦІЇ

4.66 Визначити порядковий номер Z та масове число A частинки, позначеної літерою x, у символічному запису ядерної реакції:

а) ${}^{14}_{6}C + {}^{4}_{2}He \to {}^{17}_{8}C + x$; б) ${}^{27}_{13}Al + x \to {}^{1}_{1}H + {}^{26}_{12}Mg$.

Які це частинки?

Відповідь: а) $Z = 0;\ A = 1$. Це ${}^{1}_{0}n$ – нейтрон; б) $Z = 0;\ A = 0$. Це ${}^{0}_{0}\gamma$ – гамма-квант.

4.67 Жоліо-Кюрі опромінювали алюміній ${}^{27}_{13}Al$ альфа-частинками, внаслідок цього випромінювався нейтрон і утворювалося штучно радіоактивне ядро. Це ядро випромінювало β^{+}-частинку. Запишіть цю реакцію.

Відповідь: ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}He \to {}^{30}_{15}Pb + {}^{1}_{0}n$; ${}^{30}_{15}Pb \to {}^{30}_{14}Si + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e$.

4.68 Написати відсутні позначення у таких записах ядерних реакцій:

а) ${}^{27}_{13}Al(n,\alpha)x$; б) ${}^{19}_{9}F(p,x){}^{16}_{8}O$; в) ${}^{55}_{25}Mn(x,n){}^{55}_{26}Fe$;

г) ${}^{27}_{13}Al(\alpha,p)x$; д) ${}^{14}_{7}N(n,x){}^{14}_{6}C$; е) $x(p,\alpha){}^{22}_{11}Na$.

Відповідь: а) ${}^{24}_{11}Na$; б) ${}^{4}_{2}He$; в) ${}^{1}_{1}H$; г) ${}^{30}_{14}Si$; д) ${}^{1}_{1}H$; е) ${}^{25}_{12}Mg$.

4.69 Написати відсутні позначення у таких записах ядерних реакцій, викликаних фотонами:

а) ${}^{27}_{13}Al(\gamma,x){}^{26}_{12}Mg$; б) ${}^{27}_{13}Al(\gamma,n)x$;

в) ${}^{63}_{29}Cu(\gamma,x){}^{62}_{29}Cu$; г) $x(\gamma,n){}^{131}_{74}W$.

Відповідь: а) ${}^{1}_{1}H$; б) ${}^{26}_{13}Al$; в) ${}^{1}_{0}n$; г) ${}^{132}_{74}W$.

4.70 Визначити енергії ядерних реакцій:

1) ${}^{2}_{1}H + {}^{7}_{3}Li \to 2\cdot{}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$; 2) ${}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \to {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O$.

Відповідь: 1) $Q = 15,2\,MeB$; 2) $Q = -1,18\,MeB$.

4.71 Визначити енергію, що вивільняється під час ядерних реакцій:

а) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{1}_{1}H + {}^{3}_{1}H$; б) ${}^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \to {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$.

Відповідь: а) $Q = 4,04\,MeB$; б) $Q = 3,26\,MeB$.

4.72 Знайти енергію, яка вивільняється при таких ядерних реакціях:

а) ${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{2}He \to {}^{1}_{1}H + {}^{4}_{2}He$; б) ${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$;

г) ${}^{7}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$; д) ${}^{6}_{3}Li + {}^{1}_{1}H \to {}^{3}_{2}He + {}^{4}_{2}He$.

Відповідь: а) $Q = 18,3\,MeB$; б) $Q = 22,4\,MeB$; в) $Q = 17,3\,MeB$;

г) $Q = 4,02\,MeB$.

4.73 Під час бомбардування ізотопу азоту ${}^{14}_{7}N$ нейтронами утворюється ізотоп вуглецю ${}^{14}_{6}C$, який виявляється β-радіоактивним. Написати рівняння обох реакцій.

4.74 При бомбардуванні ізотопу алюмінію ${}^{27}_{13}Al$ α-частинками утворюється радіоактивний ізотоп фосфору ${}^{30}_{15}P$, який потім розпадається з вивільненням позитрона. Написати рівняння обох реакцій. Визначити питому активність отриманого ізотопу, якщо відомо, що його період напіврозпаду дорівнює 130 с.

Відповідь: $a = 1{,}1 \cdot 10^{23} \left(c \cdot кг\right)^{-1}$.

4.75 При бомбардування ізотопу азоту ${}^{23}_{11}Na$ дейтонами утворюється β-радіоактивний ізотоп натрію ${}^{24}_{11}Na$. Лічильник β-частинок установлений поблизу препарату, що містить радіоактивний ${}^{24}_{11}Na$. Під час першого вимірювання покази лічильника становили 170 імпульсів за 1 хвилину, а через 1 добу – 56 імпульсів за 1 хвилину. Написати рівняння обох реакцій. Знайти період піврозпаду ізотопу ${}^{24}_{11}Na$.

Відповідь: $T_{1/2} = 15$ годин.

4.76 Яку кількість води можна нагріти від $0\,{}^{0}C$ до кипіння, якщо використати все тепло, що вивільниться під час реакції ${}^{7}_{3}Li\left(p, \alpha\right)$ за повного розкладення одного грама літію?

Відповідь: $m = 5{,}7 \cdot 10^{5}\, кг$.

4.77 Визначити поріг ядерної реакції 1) ${}^{14}_{7}N\left(\alpha, p\right)$; 2) ${}^{7}_{3}Li\left(p, n\right)$.

Відповідь: 1) $W = 1{,}52\, MeB$; 2) $W = 1{,}89\, MeB$.

4.78 На атомній електростанції за 1 рік витрачається $m = 19{,}2\, кг$ кг урану ${}^{235}U$.Ураховуючи, що при кожному акті розпаду ядра ${}^{235}U$ вивільняється енергія $W = 200\, MeB$ і коефіцієнт корисної дії при виробленні електроенергії дорівнює η = 25 %, знайти електричну потужність атомної електростанції.

Відповідь: $N = 125\, MBm$.

4.79 Визначити добову витрату чистого урану ^{235}U атомною електростанцією з тепловою потужністю $N = 300\,MBm$, якщо при кожному акті розпаду ядра ^{235}U вивільняється енергія $W = 200\,MeB$.

Відповідь: $m = 316\,г$.

4.80 Яка кількість урану ^{235}U витрачається за 1 добу на атомній електростанції потужністю $N = 5\,MBm$? ККД електростанції становить $\eta = 17\,\%$, та при кожному акті розпаду ядра ^{235}U вивільняється енергія $W = 200\,MeB$.

Відповідь: $m = 31\,г$.

4.81 Яка кількість нейтронів виникає за $t = 1c$ в ядерному реакторі, теплова потужність якого дорівнює $N = 200\,MBm$? При кожному акті поділу ядра ^{235}U вивільняється енергія $W = 200\,MeB$, середня кількість нейтронів, що припадає на один акт поділу, дорівнює 2,5.

Відповідь: $n = 1{,}56 \cdot 10^{19}$.

4.82 Чому дорівнює електрична потужність атомної електростанції, якщо за 1 добу на ній витрачається $m = 220\,г$ ізотопу ^{235}U. ККД електростанції становить $\eta = 25\,\%$, та при кожному акті розпаду ядра ^{235}U вивільняється енергія $W = 200\,MeB$.

Відповідь: $N = 52\,MBm$.

4.83 Порівняйте енергії, що вивільняються при термоядерному синтезі (W_T) $^2_1H + ^2_1H \rightarrow ^4_2He$ і розпаді (W_U) ядра урану ^{235}U, якщо в обох випадках витрачаються однакові маси ядерного пального. При кожному акті розпаду ядра ^{235}U вивільняється енергія $W = 200\,MeB$.

Відповідь: $W_T / W_U = 7{,}55$.

4.84 Яку енергію у кіловат-годинах можна отримати від поділу $m = 1\,г$ урану ^{235}U, якщо в одному акті розпаду ядра ^{235}U вивільняється енергія $W = 200\,MeB$?

Відповідь: $W = 2{,}5 \cdot 10^4$ *кВт-годин*.

4.85 Вважаючи, що в одному акті розпаду ядра ${}^{235}_{92}U$ вивільняється енергія $W = 200\,МеВ$, визначити енергію, що виділяється при розпаді одного кілограма ізотопу ${}^{235}U$, а також масу кам'яного вугілля з теплотворною здатністю $q = 30\,кДж/г$, яка є еквівалентною в тепловому відношенні до одного кілограма урану.

Відповідь: $W = 82\ ТДж$; $m = 2{,}7 \cdot 10^{6}\ кг$.

4.86 Під час вибуху водневої бомби відбувається термоядерна реакція утворення гелію з дейтерію і тритію: а) написати ядерну реакцію; б) визначити енергію, що вивільняється під час цієї реакції; в) яку енергію (у кіловат-годинах) можна отримати при утворенні $m = 1г$ гелію?

Відповідь: б) $Q = 17{,}6\,МеВ$; в) $W = 11{,}8 \cdot 10^{4}$ *кВт-годин*.

4.87 Ізотоп гелію ${}^{3}_{2}He$ утворюється під час бомбардування ядер тритію ${}^{3}_{1}H$ протонами. Написати рівняння ядерної реакції та визначити енергію, що вивільняється під час цієї реакції. Знайти «поріг» ядерної реакції.

Відповідь: $Q = -0{,}78\,МеВ$, реакція є ендотермічною; $W = 1{,}04\,МеВ$.

4.88 Яка енергія вивільняється при об'єднанні одного протона і двох нейтронів в ядро тритію?

Відповідь: $Q = 8\,МеВ$.

4.89 Визначити температуру водневої плазми, за якої стає можливим подолання електростатичного бар'єра відштовхування між протонами. Прийняти, що мінімальна взаємна відстань, за якої починається синтез ядер, дорівнює $r \sim 10^{-14}\ м$.

Відповідь: $T = 10^{9}\ K$.

4.90 Яка енергія вивільняється при згорянні $m = 1г$ ядерного пального в термоядерній реакції ${}^{6}_{3}Li\left({}^{2}_{1}H, \alpha\right){}^{4}_{2}He$? Порівняти одержаний результат з енергією, яку можна отримати під час розпаду $m = 1г$ урану ${}^{235}U$. При кожному акті розпаду ядра ${}^{235}U$ вивільняється енергія $W_1 = 200\,МеВ$.

Відповідь: $W_{Li} = 269\,ГДж$; $W_U = 82\,ГДж$; $W_{Li}/W_U = 3{,}28$.

4.91 Один літр звичайної води містить 0,15мл важкої води $\left(dO_2\right)$. Яка енергія вивільняється при злитті ядер дейтерію, отриманих із 0,15мл dO_2? Скільки літрів бензину потрібно спалити, щоб отримати таку саму енергію? Питома теплота згоряння бензину дорівнює $q = 46\,МДж/кг$, а густина $\rho = 740\,кг/м^3$.

Відповідь: $W = 23{,}1\,ГДж$; $V = 678\,л$.

4.92 Створення термоядерного реактора дозволило б отримати екологічно чисте практично невичерпне джерело енергії. Вартість цієї енергії менша за вартість ядерного палива. Практичний інтерес для такого реактора становлять реакції dd та dt. Яка енергія вивільняється при згорянні $m = 1г$ ядерного пального у термоядерних реакціях dd?

$$d + d \xrightarrow{0,5} He^3 + n; \quad d + d \xrightarrow{0,5} t + p.$$

Порівняти одержаний результат з енергією, яку можна отримати під час розпаду $m = 1г$ урану ^{235}U. При кожному акті поділу ядра ^{235}U вивільняється енергія $W_1 = 200\,МеВ$.

Відповідь: $W_{dd} = 110\,ГДж$; $W_U = 82\,ГДж$; $W_{dd}/W_U = 1{,}29$.

4.93 Створення термоядерного реактора дозволило б отримати екологічно чисте практично невичерпне джерело енергії. Вартість цієї енергії менша за вартість ядерного палива. Практичний інтерес для такого реактора становлять реакції dd та dt. Яка енергія вивільняється при згорянні $m = 1г$ ядерного пального у термоядерних реакціях dt?

$$d + t \to He^4 + n,$$

Порівняти одержаний результат з енергією, яку можна отримати під час розпаду $m = 1г$ урану ^{235}U. При кожному акті розпаду ядра ^{235}U вивільняється енергія $W_1 = 200\,МеВ$.

Відповідь: $W_{dt} = 340\,ГДж$; $W_U = 82\,ГДж$; $W_{dt}/W_U = 4{,}15$.

4.94 На скільки років вистачить запасу термоядерної енергії стосовно термоядерної реакції dd, якщо використати 1 % дейтерію, що міститься у воді океанів, об'єм яких порядку $V = 1{,}33 \cdot 10^{18}\,м^3$ при рівні споживання енергії $W_{сп} \approx 10^{19}\,кДж$ за 1 рік? Сучасний рівень споживання енергії $W'_{сп} \approx 10^{17}\,кДж$. Вважається, що при рівні споживання $W_{сп} \approx 10^{19}\,кДж$ за 1 рік клімат Землі істотно не зміниться. Ця величина дорівнює 1 % від сонячного випромінювання, що поглинається та випромінюється Землею за 1 рік. Кількість дейтерію у воді Світового океану становить 0,015 % від кількості протію.

Відповідь: $t \approx 2{,}4$ *млн років*.

4.95 Запропонований Бете вуглецевий цикл зоряних термоядерних реакцій містить такі перетворення

$$^{1}H + {}^{12}C \to {}^{13}N + \gamma; \qquad {}^{1}H + {}^{14}N \to {}^{15}O + \gamma;$$
$$^{13}N \to {}^{13}C + {}^{0}_{1}e + \nu_e; \qquad {}^{15}O \to {}^{15}N + {}^{0}_{1}e + \nu_e;$$
$$^{1}H + {}^{13}C \to {}^{14}N + \gamma; \qquad {}^{1}H + {}^{15}N \to {}^{12}C + {}^{4}He.$$

Визначити енергію, що вивільняється в цьому циклі при утворенні одного моля гелію. Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e} = 0{,}527\,MeB$.

Відповідь: $W = 2{,}38\,ТДж$.

4.96 Вуглецево-азотний цикл – це послідовність термоядерних реакцій у зірках, що призводить до утворення гелію з водню за участі вуглецю, азоту, кисню та фтору як каталізаторів. Вуглецево-азотний цикл є основним джерелом енергії масивних $(m > 1{,}2m_C)$ зірок на початкових стадіях їх існування. Реакції вуглецево-азотного циклу утворюють чотири цикли, що переплітаються. Розрахувати енергетичний вихід одного з цих циклів

$$^{12}C(p,\gamma)\,^{13}N(e^{+},\nu)\,^{13}C(p,\gamma)\,^{14}N(p,\gamma)\,^{15}O(e^{+},\nu)\,^{15}N(p,\alpha)\,^{12}C.$$

Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e} = 0{,}527\,MeB$.

Відповідь: $Q = 24{,}67\,MeB$.

4.97 Вуглецево-азотний цикл – це послідовність термоядерних реакцій в зірках, що призводить до утворення гелію з водню за участю вуглецю, азоту, кисню та фтору як каталізаторів. Вуглецево-азотний цикл є основним джерелом енергії масивних $(m > 1{,}2m_C)$ зірок на початкових стадіях їх існування. Реакції вуглецево-азотного циклу утворюють чотири цикли, що переплітаються. Розрахувати енергетичний вихід Q одного з цих циклів:

$$^{14}N(p,\gamma)\,^{15}O(e^{+},\nu)\,^{15}N(p,\gamma)\,^{16}O(p,\gamma)\,^{17}F(e^{+},\nu)\,^{17}O(p,\alpha)\,^{14}N.$$

Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e} = 0{,}527\,MeB$.

Відповідь: $Q = 24{,}67\,MeB$.

4.98 Вуглецево-азотний цикл – це послідовність термоядерних реакцій у зірках, що призводить до утворення гелію з водню за участі вуглецю, азоту, кисню та фтору як каталізаторів. Вуглецево-азотний цикл є основним джерелом енергії масивних $\left(m>1,2m_C\right)$ зірок на початкових стадіях їх існування. Реакції вуглецево-азотного циклу утворюють чотири цикли, що переплітаються. Розрахувати енергетичний вихід одного з цих циклів:

$$^{15}N\left(p,\gamma\right)^{16}O\left(p,\gamma\right)^{17}F\left(e^{+},\nu\right)^{17}O\left(p,\gamma\right)^{18}F\left(e^{+},\nu\right)^{18}O\left(p,\alpha\right)^{15}N.$$

Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e}=0,527\,MeB$.

Відповідь: $Q=24,67\,MeB$.

4.99 Вуглецево-азотний цикл – це послідовність термоядерних реакцій у зірках, що призводить до утворення гелію з водню за участі вуглецю, азоту, кисню та фтору як каталізаторів. Вуглецево-азотний цикл є основним джерелом енергії масивних $\left(m>1,2m_C\right)$ зірок на початкових стадіях їх існування. Реакції вуглецево-азотного циклу утворюють чотири цикли, що переплітаються. Розрахувати енергетичний вихід одного з цих циклів:

$$^{16}O\left(p,\gamma\right)^{17}F\left(e^{+},\nu\right)^{17}O\left(p,\gamma\right)^{18}F\left(e^{+},\nu\right)^{18}O\left(p,\gamma\right)^{19}F\left(p,\alpha\right)^{16}O.$$

Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e}=0,527\,MeB$.

Відповідь: $Q=24,67\,MeB$.

4.100 Утворення вуглецю та кисню відбувається на тій стадії еволюції зірок гігантів, коли в їх надрах повністю вигоряє водень і починається горіння гелію. За температур $T\sim10^{8}\,K$ ефективно відбуваються ядерні реакції синтезу

$$3\alpha\rightarrow{}^{12}C+\gamma \text{ та } {}^{12}C+\alpha\rightarrow{}^{16}O+\gamma.$$

Визначити енергію, що вивільняється під час цієї реакції.

Відповідь: $Q_C=7,26\,MeB$; $Q_O=7,17\,MeB$.

РОЗДІЛ 5

ПОГЛИНАННЯ РАДІОАКТИВНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ. ЕЛЕМЕНТИ ДОЗИМЕТРІЇ. ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

ТЕОРЕТИЧНИЙ МАТЕРІАЛ

1 Властивості іонізувального випромінювання.
2 Поглинання γ-випромінювання речовиною. Закон Бугера.
3 Типи доз. Біологічна дія радіації.
4 Елементарні частинки. Класифікація елементарних частинок.
5 Типи фундаментальних взаємодій.
6 Кваркова модель адронів.

ЗВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ ФОРМУЛ

5. 1 Закон поглинання γ-випромінювання речовиною (закон Бугера):

$$I = I_0 e^{-\mu x} \ ,$$

де I_0 – інтенсивність γ-випромінювання, що падає на речовину; I – інтенсивність γ-випромінювання, яке пройшло в речовині відстань x; μ – лінійний коефіцієнт поглинання.

5. 2 Масовий коефіцієнт поглинання

$$k = \frac{\mu}{\rho},$$

ρ – густина речовини, що послаблює випромінювання; μ – лінійний коефіцієнт поглинання.

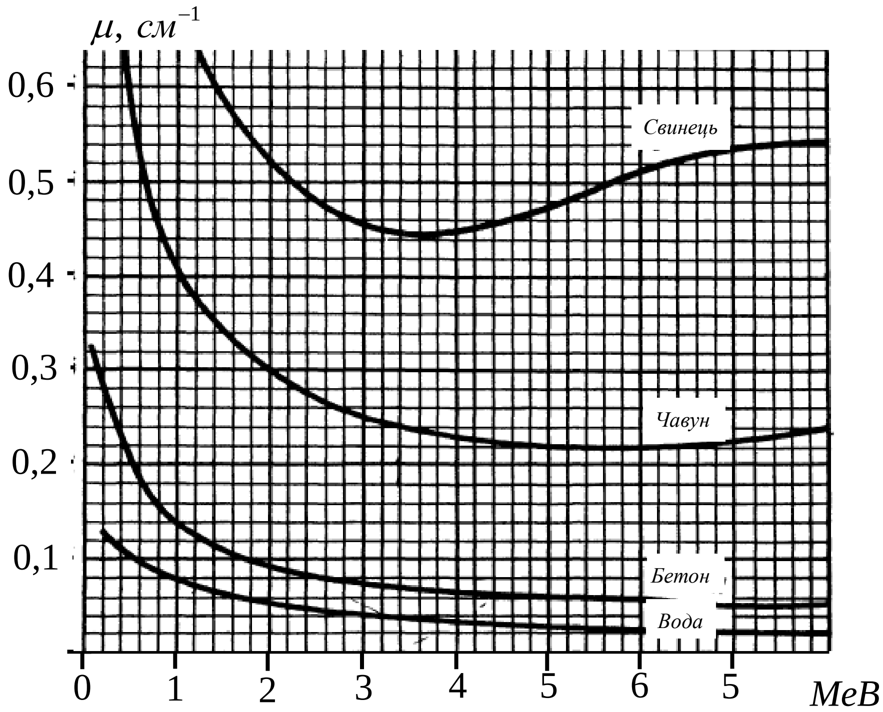


Рисунок 5.1 – Залежність лінійного коефіцієнта поглинання від енергії фотонів

Таблиця 5.1 – ***Коефіцієнти поглинання гамма-випромінювання для твердих тіл***

Енергія,	Алюміній			Свинець		
MeB	$k, м^2/кг$	$\mu, см^{-1}$	$\mu, м^{-1}$	$k, м^2/кг$	$\mu, см^{-1}$	$\mu, м^{-1}$
0,10	0,0169	0,4394	43,9400	0,5460	61,6980	6169,8000
0,20	0,0122	0,3172	31,7200	0,0942	10,6446	1064,4600
0,40	0,0093	0,2410	24,1020	0,0220	2,4860	248,6000
0,60	0,0078	0,2025	20,2540	0,0119	1,3447	134,4700
0,80	0,0068	0,1776	17,7580	0,0087	0,9786	97,8580
1,00	0,0061	0,1596	15,9640	0,0070	0,7944	79,4390
1,50	0,0050	0,1300	13,0000	0,0055	0,6215	62,1500
2,00	0,0043	0,1121	11,2060	0,0046	0,5232	52,3190
3,00	0,0036	0,0936	9,3600	0,0041	0,4633	46,3300
4,00	0,0031	0,0806	8,0600	0,0042	0,4757	47,5730
6,00	0,0026	0,0686	6,8640	0,0044	0,4927	49,2680
8,00	0,0024	0,0627	6,2660	0,0046	0,5175	51,7540
10,00	0,0023	0,0595	5,9540	0,0049	0,5526	55,2570

Енергія,	Бетон		Чавун	
MeB		$\mu, м^{-1}$		$\mu, м^{-1}$
0,10	0,325	32,5		
0,20	0,29	29		
0,40	0,238	23,8	0,640	64,0
0,60	0,19	19	0,520	52,0
0,80	0,16	16	0,458	45,8
1,00	0,14	14	0,410	41,0
1,50	0,11	11	0,340	34,0
2,00	0,095	9,5	0,298	29,8
3,00	0,075	7,5	0,256	25,6
4,00	0,068	6,8	0,230	23,0
6,00	0,06	6	0,220	22,0
8,00	0,058	5,8	0,243	24,3

Таблиця 5.2 – ***Коефіцієнти поглинання гамма-випромінювання для води і повітря***

Енергія,	Вода			Повітря		
$МеВ$	$k, м^2/кг$	$\mu, см^{-1}$	$\mu, м^{-1}$	$k, м^2/кг$	$\mu, см^{-1}$	$\mu, м^{-1}$
0,10	0,0171	0,1710	17,1000	0,0155	0,00020	0,019995
0,20	0,0137	0,1370	13,7000	0,0123	0,00016	0,015867
0,40	0,0106	0,1060	10,6000	0,0095	0,00012	0,012294
0,60	0,0090	0,0896	8,9600	0,0080	0,00010	0,010372
0,80	0,0079	0,0786	7,8600	0,0071	0,00009	0,009107
1,00	0,0071	0,0706	7,0600	0,0064	0,00008	0,008192
1,50	0,0059	0,0590	5,9000	0,0052	0,00007	0,006644
2,00	0,0049	0,0493	4,9300	0,0445	0,00057	0,057405
3,00	0,0039	0,0390	3,9000	0,0036	0,00005	0,004644
4,00	0,0339	0,3390	33,9000	0,0031	0,00004	0,00396
6,00	0,0028	0,0275	2,7500	0,0025	0,00003	0,003225
8,00	0,0024	0,0240	2,4000	0,0022	0,00003	0,002838
10,00	0,0022	0,0219	2,1900	0,0020	0,00003	0,002606

ЕЛЕМЕНТИ ДОЗИМЕТРІЇ

5. 3 Доза опромінення (експозиційна доза) – це величина, що дорівнює відношенню суми електричних зарядів усіх іонів одного знака, які утворилися в повітрі внаслідок іонізувальної здатності радіоактивного випромінювання, до маси цього повітря:

$$D_E = \frac{\Delta q}{\Delta m}.$$

5. 4 Один рентген $(1P)$ – це позасистемна одиниця вимірювання експозиційної дози.

Один рентген відповідає дозі опромінення, за якої в 1м^3 сухого повітря за нормальних умов утворюється $2,08 \cdot 10^{15}$ пар іонів.

5. 5 Потужність дози опромінення

$$\breve{D}_E = \frac{\Delta \breve{D}_E}{\Delta t}.$$

5. 6 Доза поглинання – це величина, що показує яка кількість енергії випромінювання поглинається одиницею маси речовини

$$D_n = \frac{\Delta W}{\Delta m}.$$

5. 7 Відносна біологічна ефективність випромінювання – це показник, за допомогою якого визначають, у скільки разів біологічна дія іонізувальних випромінювань даного типу (наприклад альфа-, бета-променів, нейтронів і т. ін.) більша (або менша) за дію на той самий біологічний об'єкт стандартного випромінювання (жорстких рентгенівських та гамма-променів). Значення показника ВБЕ наведені в таблиці 5.3.

Одиницями біологічної дози є 1Бер, 1 Рем та 1 Зіверт.

1 Бер (біологічний еквівалент рентгена) або 1 Рем (радіаційний еквівалент людини, від англ.): *одиниця вимірювання еквівалентної (біологічної) дози радіації, що враховує різні шляхи передавання енергії від іонізувальної радіації до тканин людського організму:*

$$1Бер = 1Рад \cdot ВБЕ.$$

Таблиця 5.3 – ***Відносна біологічна ефективність випромінювання***

Тип радіації	ВБЕ
Рентгенівські промені та гамма-випромінювання до 3 МеВ, бета-частинки	1
Теплові нейтрони	5
Протони і дейтрони	10
Швидкі нейтрони	10
Альфа-частинки	20

Таблиця 5.4 – ***Одиниці вимірювання доз випромінювання та зв'язок між ними***

Тип дози	Одиниця вимірювання в СІ	Позасистемна одиниця	Зв'язок
Доза опромінення (експозиційна доза)	$1 Кл/кг$	$1 Р$	$1 Кл/кг = 3876 Р$
Потужність дози опромінення	$1 А/кг$		$1 А/кг = 3876 Р/с$
Доза поглинання	$1 Гр = \frac{1 Дж}{1 кг}$	$1 рад$	$1 рад = 0,01 Гр$
Біологічна доза	$1 Бер$	$1 Рем$ $1 Sv$	$1 Бер = 1 Рад \cdot ВБЕ$ $1 Бер = 1 Рем$ $1 Sv = 100 Рем = 100 Бер$

Таблиця 5.5 – ***Кваркова модель адронів***

НАЗВА	ПОЗНАЧЕННЯ	КОЛІР	МАСА	ЗАРЯД
UP (верхній)	U	$u_с, u_з, u_ч$	310	$+\frac{2}{3}$
Down (нижній)	D	$d_с, d_з, d_ч$	310	$-\frac{1}{3}$
Charm (зачарований)	C	$c_с, c_з, c_ч$	1 500	$+\frac{2}{3}$
Strange (дивний)	S	$s_с, s_з, s_ч$	505	$-\frac{1}{3}$
Top Truth (правдивий)	T	$t_с, t_з, t_ч$	2 250	$+\frac{2}{3}$
Botton beuty (красивий)	B	$b_с, b_з, b_ч$	5 000	$-\frac{1}{3}$

ПИТАННЯ З ТЕОРЕТИЧНОГО МАТЕРІАЛУ

1 Охарактеризувати іонізаційну та проникну здатність α-частинок.
2 Охарактеризувати іонізаційну та проникну здатність β-частинок.
3 Охарактеризувати іонізаційну та проникну здатність γ-частинок.
4 Довжина вільного пробігу частинок.
5 Поглинання γ-випромінювання речовиною. Закон Бугера.
6 Лінійний та масовий коефіцієнти поглинання.
7 Біологічна дія радіації.
8 Доза опромінення (експозиційна доза).
9 Доза поглинання.
10 Біологічна доза.
11 Відносна біологічна ефективність.
12 Одиниці біологічної дози.
13 Поняття гранично допустимої дози.
14 Небезпечні дози однократного загального опромінення.
15 Елементарні частинки. Взаємні перетворення елементарних частинок.
16 Класифікація елементарних частинок.
17 Прискорювачі елементарних частинок.
18 Типи фундаментальних взаємодій. Радіуси їх дії. Яка з фундаментальних взаємодій є універсальною?
19 Кварки. Характеристики кварків.
20 Кваркова модель адронів.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

ПРИКЛАД 5.1

На поверхню води падає γ-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414\,пм$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшується вдвічі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$x - ?$
$\lambda = 0,414\,пм = 4,14 \cdot 10^{-13}\,м;$ $I_0 / I = 2$

Згідно із законом поглинання γ-випромінювання речовиною

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \qquad (1)$$

Розв'язуючи рівняння відносно x, обчислимо

$$x = \frac{1}{\mu} \ln \frac{I_0}{I}. \qquad (2)$$

Для визначення коефіцієнта лінійного послаблення знайдемо енергію фотонів

$$W_ф = \frac{hc}{\lambda}. \qquad (3)$$

Підставимо в (3) числові значення та одержимо

$$W_ф = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4,14 \cdot 10^{-13}} = 4,8 \cdot 10^{-13} \left(Дж\right) = 3\left(МеВ\right).$$

За графіком на рисунку 5.1 знайдемо коефіцієнт поглинання води для енергії кванта $W_ф = 3\left(МеВ\right)$, він дорівнює $\mu = 0,02\,см^{-1} = 2\,м^{-1}$. Підставимо одержане значення у формулу (2):

$$x = \frac{1}{2} \ln 2 = 0,35\left(м\right).$$

Відповідь: $x = 0,35\,м$.

ПРИКЛАД 5.2

Визначити товщину шару половинного ослаблення $d_{1/2}$ паралельного пучка γ-випромінювання для води, якщо лінійний коефіцієнт поглинання води для цього випромінювання дорівнює $\mu = 0,047\,см^{-1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{1/2} - ?$
$\mu = 0,047\,см^{-1}$

При проходженні γ-випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона та утворення пар (електрон – позитрон). Унаслідок дії цих трьох факторів інтенсивність γ-випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \tag{1}$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ-випромінювання буде дорівнювати $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\frac{1}{2}I_0 = I_0 e^{-\mu d} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \tag{2}$$

Підставимо в одержаний вираз (2) значення $\ln 2$ та коефіцієнта поглинання μ та проведемо розрахунки:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{4,7} = 0,147\,м.$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0,147\,м$ зменшує інтенсивність γ-випромінювання вдвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,147\,м$.

ПРИКЛАД 5.3

На поверхню води падає гамма-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414\,пм$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшиться вдвічі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{1/2} - ?$
$\mu = 0,047\,см^{-1}$

При проходженні γ-випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона та утворення пар (електрон – позитрон). Унаслідок дії цих трьох факторів інтенсивність γ-випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \qquad (1)$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ-випромінювання буде дорівнювати $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\frac{1}{2}I_0 = I_0 e^{-\mu d} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \;\Rightarrow\; -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \qquad (2)$$

Для визначення коефіцієнта лінійного поглинання обчислимо енергію фотонів гамма-квантів:

$$W_ф = \frac{hc}{\lambda}. \qquad (3)$$

Підставимо у вираз (3) числові значення фізичних величин та одержимо

$$W_ф = \frac{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{4,14\cdot 10^{-13}} = 4,8\cdot 10^{-13}\,(Дж) = 3(МеВ).$$

За таблицею 5.1 залежності лінійного коефіцієнта поглинання гамма-променів від їх енергії знаходимо $\mu = 0,039\,\left(см^{-1}\right)$.

Підставимо у вираз (2) числові значення $\ln 2$, коефіцієнта поглинання μ та одержимо

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{3} = 0{,}178\left(м\right).$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0{,}178\,м$ зменшує інтенсивність γ-випромінювання з енергією $W_ф = 3\,МеВ$ удвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0{,}178\,м$.

ПРИКЛАД 5.4

Точкове радіоактивне джерело ^{60}Co міститься в центрі свинцевого сферичного контейнера з товщиною стінок $x = 1\,см$ та зовнішнім радіусом $R = 20\,см$. Визначити максимальну активність джерела, яке можна зберігати у контейнері, якщо допустима густина потоку γ-фотонів на виході з контейнера $I_{доп} = 8 \cdot 10^6\,с^{-1}\,м^{-2}$. Прийняти, що під час кожного акту розпаду ^{60}Co випромінюється $n = 2$ фотони, середня енергія кожного з яких $\langle W \rangle = 1{,}25\,МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{1/2} - ?$

$x = 1\,см = 0{,}01\,м,$
$R = 20\,см = 0{,}2\,м,$
$I_{доп} = 8 \cdot 10^6\,с^{-1}\,м^{-2},$
$n = 2,$
$\langle W \rangle = 1{,}25\,МеВ$

Активність радіоактивного джерела пов'язана з потоком випромінювання γ-фотонів співвідношенням $\Phi = An$, де n – кількість γ-фотонів, що випромінюються при одному розпаді, звідси

$$A = \Phi / n. \tag{1}$$

Густина потоку на відстані R від точкового джерела випромінювання дорівнює

$$I_0 = \Phi / \left(4\pi R^2\right). \tag{2}$$

Після проходження випромінювання через свинцеву стінку контейнера густина потоку зменшиться відповідно до співвідношення

$$I = I_0 e^{-\mu x} \Rightarrow I_0 = I e^{\mu x}. \tag{3}$$

Підставимо I_0 у формулу (2)

$$Ie^{\mu x} = \Phi\Big/\left(4\pi R^2\right) \Rightarrow \Phi = 4\pi R^2 Ie^{\mu x}. \tag{4}$$

Підставимо (4) у вираз (1) та одержимо

$$A = \frac{4\pi R^2 Ie^{\mu x}}{n}.$$

Якщо в одержаному співвідношенні взяти $I = I_{доп}$, то активність буде дорівнювати максимальній активності джерела $A = A_{\max}$, яке можна зберігати в контейнері:

$$A_{\max} = \frac{4\pi R^2 I_{доп} e^{\mu x}}{n}. \tag{5}$$

За графіком на рис. 5.1 визначаємо, що лінійний коефіцієнт ослаблення для γ-фотонів з енергією $\langle W \rangle = 1,25\,MeB$ дорівнює $\mu = 0,64\,см^{-1} = 64\,м^{-1}$. Виразимо всі величини у співвідношенні (5) в одиницях СІ, виконаємо розрахунки та одержимо

$$A_{\max} = \frac{4\cdot\pi\cdot 0,2^2\cdot 8\cdot 10^6 e^{64\cdot 0,01}}{2} = 3,81\cdot 10^6\left(Бк\right) = 3,81\left(МБк\right).$$

Відповідь: $A_{\max} = 3,81МБк$.

ПРИКЛАД 5.5

Космічне випромінювання на рівні моря на екваторі утворює в повітрі об'ємом $V = 1 см^3$ у середньому $N = 24$ пар іонів за час $t_1 = 10 с$. Визначити дозу опромінення, отриману людиною впродовж 1 року. Скільки рентген отримає людина за цей час?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\breve{D}_E - ?\ D(P) - ?$

$V = 1 см^3 = 10^{-6}\, м^3,$
$t_1 = 10 с,$
$N = 24,$
$t_2 = 1 р = 365 \cdot 24 \cdot 3600 с$

Дозу опромінення, отриману людиною, можна визначити за формулою

$$D = \breve{D}_E\, t_2\,, \qquad (1)$$

де $\breve{D}_E$ – потужність дози опромінення.

Потужність дози визначається співвідношенням

$$\breve{D}_E = \frac{qm}{t_1},$$

де q – заряд іонів одного знака утворених випромінюванням за час t_1 у повітрі, маса якого m.

Масу повітря визначимо як добуток густини ρ повітря на його об'єм V:

$$m = \rho V\,,$$

де $\rho = 1,29\, кг/м^3$ – густина повітря за нормальних умов.

Заряд усіх іонів одного знака дорівнює добутку елементарного заряду $|e|$ на кількість іонів N:

$$q = |e| N\,.$$

Тоді з урахуванням вищевикладеного формула (1) набере вигляду

$$D = \frac{q}{mt_1} t_2 = \frac{|e| N t_2}{\rho V t_1}\,. \qquad (2)$$

Підставимо числові значення фізичних величин 1 (2) та одержимо

$$D=\frac{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 24\cdot 365\cdot 24\cdot 3600}{1,29\cdot 10^{-6}\cdot 10}=9,41\cdot 10^{-6}\ Кл/кг\,.$$

Визначимо дозу опромінення в рентгенах, виходячи з визначення рентгена:

1Р відповідає дозі опромінення, при якій в 1м^3 сухого повітря за нормальних умов утворюється $2,08\cdot 10^{15}$ пар іонів.

Визначимо, скільки пар іонів n утворюється в 1м^3 сухого повітря за нормальних умов при отриманій дозі опромінення $D=9,41\cdot 10^{-6}\ Кл/кг$

$$n=\frac{N}{Vt_1}t\,.$$

Тоді доза опромінення в рентгенах дорівнює

$$D(P)=\frac{N}{2,08\cdot 10^{15}Vt_1}t\,.$$

За допомогою обчислень визначимо

$$D(P)=\frac{24}{2,08\cdot 10^{15}\cdot 10^{-6}\cdot 10}365\cdot 24\cdot 3600=3,6\cdot 10^{-2}\,(P)=36\,(мкP).$$

Відповідь: $D=9,41\cdot 10^{-6}\ Кл/кг$; $D(P)=36\,мкP$.

ПРИКЛАД 5. 6

Іонний струм у циклотроні під час роботи з α-частинками $I = 15\,мкА$. У скільки разів такий циклотрон продуктивніший за $m = 1г$ радію $^{226}_{88}Ra$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n_2/n_1 - ?$

$m = 1г = 10^{-3}\,кг,$

$I = 15\,мкА = 1,5\cdot10^{-5}\,А,$

$q_\alpha = 3,2\cdot10^{-19}\,Кл,$

$T_{1/2} = 1,62{\cdot}10^3\,р = 5,11{\cdot}10^{10}\,с$

Знайдемо, яку кількість α-частинок випромінює за 1 секунду $m = 1г$ радію. Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Якщо проміжок часу $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для визначення кількості атомів, які розпалися, можна використовувати наближену формулу

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

Кількість атомів, яка міститься в радіоактивному ізотопі, дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

де m – маса ізотопу; M – його молярна маса; N_A – стала Авогадро.

Період піврозпаду пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Тоді кількість α-частинок випромінює за 1 секунду m радію, що дорівнює

$$n_1 = \Delta N \approx \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{M} N_A \Delta t.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та проведемо розрахунки:

$$n_1 = \frac{\ln 2}{5,11{\cdot}10^{10}} \cdot \frac{10^{-3}}{226\cdot10^{-3}} 6,02{\cdot}10^{23}\cdot 1 = 3,61\cdot10^{10}\left(c^{-1}\right).$$

Струм $I = 15\,мкА$ відповідає потоку α-частинок $n_2 = I/q_\alpha$

$$n_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-5} / 3{,}2 \cdot 10^{-19} = 4{,}7 \cdot 10^{13} \left(c^{-1} \right).$$

Таким чином, цей циклотрон продуктивніший за $m = 1г$ радію в

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{4{,}7 \cdot 10^{13}}{3{,}7 \cdot 10^{10}} = 1270 \text{ разів.}$$

Відповідь: $n_2/n_1 = 1270$.

ПРИКЛАД 5. 7

Електрон і позитрон, утворені фотоном з енергією $W = 5{,}7\,MeB$, рухаються в камері Вільсона, що міститься в магнітному полі, за траєкторіями з радіусом кривизни $R = 3\,см$. Визначити магнітну індукцію B поля.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

$n_2/n_1 - ?$
$W = 5{,}7\,MeB = 9{,}12 \cdot 10^{-13}$ *Дж*; $R = 3\,см = 0{,}03\,м$

Кінетична енергія електрона (позитрона) дорівнює $W_K = 0{,}5\left(W - W_0\right)$, де W_0 – енергія спокою електрона. Енергія спокою електрона дорівнює $W_0 = 0{,}511\,MeB$.

На електрон (позитрон) у магнітному полі діє сила Лоренца, модуль якої дорівнює

$$qB\text{v} = \frac{m\text{v}^2}{R} \Rightarrow B = \frac{m\text{v}}{qR} \Rightarrow B = \frac{p}{qR}. \qquad (1)$$

Згідно з теорією відносності імпульс частинки $p = m\text{v}$ пов'язаний з її кінетичною енергією співвідношенням

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K + 2m_0c^2\right)}, \qquad (2)$$

де m_0 – маса спокою частинки.

Підставимо вираз (2) у співвідношення (1) та одержимо вираз для індукції магнітного поля, що діє на частинки в камері Вільсона:

$$B=\frac{1}{qcR}\sqrt{W_K\left(W_K+2m_0c^2\right)}\Rightarrow\frac{1}{qcR}\sqrt{0,5\left(W-W_0\right)\left(0,5\left(W-W_0\right)+2m_0c^2\right)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$B=\frac{1}{1,6\cdot10^{-19}\cdot3\cdot10^{8}\cdot3\cdot10^{-2}}\times$$

$$\times\sqrt{0,5\cdot1,6\cdot10^{-13}\left(5,7-0,511\right)\left(0,5\cdot1,6\cdot10^{-13}\left(5,7-0,511\right)+1,022\cdot1,6\cdot10^{-13}\right)}=$$

$$=\frac{1,6\cdot10^{-13}}{1,6\cdot10^{-19}\cdot9\cdot10^{6}}\cdot\sqrt{0,5\left(5,7-0,511\right)\left(0,5\left(5,7-0,511\right)+1,022\right)}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\sqrt{2,59\left(2,59+1,022\right)}=0,34\ (Тл).$$

Відповідь: $B=0,34\ Тл$.

ПРИКЛАД 5. 8

Позитрон та електрон анігілюють з утворенням двох фотонів. Визначити: а) енергію кожного з утворених фотонів за умови, що кінетична енергія електрона та позитрона до їх зіткнення дорівнювала нулю; б) довжину хвилі цих фотонів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega-?$
$m_e=9,1\cdot10^{-31}\ кг$

Запишемо реакцію, яка відбулася:

$$e_{-1}^{0}+e_{1}^{0}\rightarrow2\gamma.$$

Енергія γ-квантів, що утворилися, згідно з формулою Ейнштейна для зв'язку маси та енергії дорівнює

$$2W_ф=2m_ec^2\ \Rightarrow\ W_ф=m_ec^2,$$

де m_e – маса спокою електрона (позитрона); c – швидкість світла у вакуумі.

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та визначимо енергію фотона:

$$W_\phi = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 8{,}19 \cdot 10^{-14}\left(Дж\right) = -0{,}51\left(МеВ\right).$$

Із формули для енергії фотона визначимо його довжину хвилі

$$W_\phi = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{W_\phi},$$

де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ Дж/с$ – стала Планка.

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та виконаємо обчислення:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{8{,}19 \cdot 10^{-14}} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\left(м\right).$$

Відповідь: а) енергія кожного фотона – $W_\phi = 0{,}51 МеВ$; б) $\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ м$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

ПОГЛИНАННЯ

5.1 Пластина товщиною $d = 1 см$ послаблює інтенсивність γ-випромінювання удвічі. У скільки разів зменшиться інтенсивність цього випромінювання при проходженні через 10 пластин?

Відповідь: $I_0/I_{10} = 1\,027$.

5.2 На алюмінієвий екран падає пучок γ-променів, довжина хвилі яких $\lambda = 1,24\ пм$. Визначити товщину шару половинного послаблення γ-випромінювання в алюмінії.

Відповідь: $d_{1/2} = 4,34\ см$.

5.3 Визначити, як зміниться інтенсивність вузького пучка γ-променів у разі їх проходження через екран, що містить дві плити: алюмінієву товщиною $d_1 = 10 см$ та залізну товщиною $d_2 = 5 см$. Коефіцієнт лінійного послаблення алюмінію $\mu_1 = 0,1 см^{-1}$, а заліза – $\mu_2 = 0,3 см^{-1}$.

Відповідь: $I_0/I_2 = 12,2$.

5.4 Чому дорівнює енергія γ-променів, якщо у разі проходження через шар бетону товщиною $d = 14,6\ см$ інтенсивність випромінювання послаблюється у чотири рази.

Відповідь: $W = 2\ МеВ$.

5.5 Визначити товщину шару заліза, що зменшує у 100 разів інтенсивність рентгенівського випромінювання молібдену $(\lambda = 71\ пм)$. Масовий коефіцієнт поглинання заліза для цього випромінювання дорівнює $k = 39,1 см^2/г$.

Відповідь: $d_{Fe} = 0,15 мм$.

5.6 Визначити товщину шару свинцю, що зменшує у 100 разів інтенсивність рентгенівського випромінювання молібдену $(\lambda = 71\ пм)$. Масовий коефіцієнт поглинання для цього випромінювання дорівнює $k = 130\ см^2/г$.

Відповідь: $d_{Pb} = 0,03 мм$.

5.7 Визначити товщину шару чавуну, що зменшує у 50 разів інтенсивність рентгенівського випромінювання $(\lambda = 124{,}3\,пм)$.

Відповідь: $d = 9{,}5\,см$.

5.8 Розрахувати товщину захисного шару чавуну, що послаблює інтенсивність випромінювання з енергією $W = 4\,МеВ$ у п'ять разів.

Відповідь: $d = 7\,см$.

5.9 У скільки разів зменшиться інтенсивність рентгенівських променів із довжиною хвилі $\lambda = 20\,пм$ під час проходження шару заліза товщиною $d = 0{,}15\,мм$? Масовий коефіцієнт поглинання заліза для цієї довжини хвилі дорівнює $k = 1{,}1\,м^2/кг$.

Відповідь: у 3,7 раза.

5.10 Визначити товщину шару заліза, що зменшує інтенсивність рентгенівських променів удвічі, в умовах попередньої задачі.

Відповідь: $d = 0{,}08\,мм$.

5.11 Розрахувати товщину шару свинцю, що послаблює інтенсивність випромінювання з енергією $W = 8\,МеВ$ у десять разів.

Відповідь: $d = 4{,}45\,см$.

5.12 Визначити лінійний і масовий коефіцієнти поглинання води для рентгенівських променів, енергія яких дорівнює $W = 1\,МеВ$, якщо шар води товщиною $d = 10{,}2\,см$ удвічі послаблює це випромінювання. Для якої довжини хвиль одержані ці коефіцієнти?

Відповідь: $\mu = 6{,}7\,м^{-1}$; $k = 6{,}7 \cdot 10^{-3}\,м^2/кг$; $\lambda = 1{,}24\ пм$.

5.13 Визначити лінійний і масовий коефіцієнти поглинання алюмінію для рентгенівських променів, енергія яких дорівнює $W = 1\,МеВ$, якщо шар алюмінію товщиною $d = 4{,}5\ см$ удвічі послаблює це випромінювання. Для якої довжини хвиль одержані ці коефіцієнти?

Відповідь: $\mu = 16\,м^{-1}$; $k = 6{,}2 \cdot 10^{-3}\,м^2/кг$; $\lambda = 1{,}24\ пм$.

5.14 Визначити лінійний і масовий коефіцієнти поглинання заліза для рентгенівських променів, енергія яких дорівнює $W = 1 MeB$, якщо шар заліза товщиною $d = 1,56\ см$ удвічі послаблює це випромінювання. Для якої довжини хвиль одержані ці коефіцієнти?

Відповідь: $\mu = 44\, м^{-1}$; $k = 5,6 \cdot 10^{-3}\ м^2/кг$; $\lambda = 1,24\ пм$.

5.15 Визначити лінійний і масовий коефіцієнти поглинання свинцю для рентгенівських променів, енергія яких дорівнює $W = 1 MeB$, якщо шар свинцю товщиною $d = 0,87 см$ удвічі послаблює це випромінювання. Для якої довжини хвиль одержані ці коефіцієнти?

Відповідь: $\mu = 77\, м^{-1}$; $k = 6,8 \cdot 10^{-3}\ м^2/кг$; $\lambda = 1,24\ пм$.

5.16 Скільки шарів половинного ослаблення необхідно для зменшення інтенсивності рентгенівських променів у 80 разів?

Відповідь: $N = 6,35$.

5.17 Визначити товщину шару алюмінію, який удвічі зменшує інтенсивність рентгенівських променів, якщо відомо, що масовий коефіцієнт поглинання алюмінію для цих рентгенівських променів дорівнює $k = 5,3 м^2/кг$.

Відповідь: $d = 0,5 мм$.

5.18 Як зміниться ступінь послаблення γ-випромінювання після проходження через свинцевий екран товщиною $d = 1\ см$, якщо довжини хвиль цих променів дорівнюють $\lambda_1 = 0,41\ пм$ та $\lambda_2 = 0,82\ пм$?

Відповідь: $I_1/I_2 = 1,12$.

5.19 Визначити товщину шару половинного ослаблення $d_{1/2}$ паралельного пучка γ-випромінювання для води, якщо лінійний коефіцієнт поглинання води для цього випромінювання дорівнює $\mu = 0,047 см^{-1}$.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,147 м$.

5.20 Визначити кількість N шарів половинного ослаблення, що зменшують інтенсивність I вузького пучка гамма-випромінювання у 100 разів.

Відповідь: $N = 6,6$.

5.21 Розрахувати товщину захисного водяного шару, що послаблює інтенсивність випромінювання з енергією $W = 1,5 MeB$ у п'ять разів.

Відповідь: $d = 27,3 см$.

5.22 Визначити для бетону товщину шару половинного ослаблення вузького пучка гамма-випромінювання з енергією фотонів $W_{ф} = 0,6\,МеВ$.

Відповідь: $d_{1/2} = 3,85\ см$.

5.23 Розрахувати товщину захисного бетонного шару, що послаблює інтенсивність випромінювання з енергією $W = 3\,МеВ$ у дванадцять разів.

Відповідь: $d = 33,13\ см$.

5.24 Свинцева плита зменшує інтенсивність вузького пучка гамма-випромінювання $\left(W_{ф} = 3,5\,МеВ\right)$ у 25 разів. У скільки разів зменшить інтенсивність цього пучка бетонна плита такої самої товщини?

Відповідь: в 1,79 раза.

5.25 На яку глибину у воду потрібно занурити джерело вузького пучка гамма-випромінювання $\left(W_{ф} = 1,5\,МеВ\right)$, щоб інтенсивність променів, які виходять із води, зменшилася в 1 000 разів?

Відповідь: $h = 1,17\,м$.

5.26 На поверхню води падає гамма-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,307\,пм$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшиться втричі?

Відповідь: $d = 3,24\ см$.

5.27 Який шлях повинен пройти гамма-випромінювання в повітрі $\left(W_{ф} = 2\,МеВ\right)$, щоб його інтенсивність зменшилася вдвічі?

Відповідь: $d = 12\,м$.

5.28 Інтенсивність вузького пучка гамма-випромінювання після проходження через шар свинцю товщиною $d = 4\,см$ зменшилася у 8 разів. Визначити енергію гамма-променів.

Відповідь: $W_{ф} = 2\,МеВ$ або $W_{ф} = 6,2\,МеВ$.

5.29 Інтенсивність вузького пучка гамма-випромінювання після проходження через шар свинцю товщиною $d = 4\,см$ зменшилася у 8 разів. Визначити товщину шару половинного ослаблення.

Відповідь: $d_{1/2} = 1,33\ см$.

5.30 Через свинець проходить вузький пучок гамма-випромінювання. При якому значенні енергії гамма-фотонів товщина шару половинного ослаблення буде максимальною? Визначити максимальну товщину шару половинного ослаблення для свинцю.

Відповідь: $W_ф = 3,6\, МеВ$; $\left(d_{1/2}\right)_{\max} = 1,57\, см$.

5.31 Вузький пучок гамма-випромінювання $\left(W_ф = 2,4\, МеВ\right)$ проходить через бетонну плиту товщиною $d_1 = 4\, м$. Якою повинна бути товщина d_2 плити з чавуну, щоб так само зменшити інтенсивність даного пучка гамма-випромінювання? При розв'язуванні задачі скористатися таблицею 10.1.

Відповідь: $d_2 = 28,6\ см$.

5.32 При збільшенні товщини свинцевої пластинки на $\Delta d = 2\, мм$ інтенсивність вузького пучка моноенергетичного рентгенівського випромінювання зменшилася у $I_1/I_2 = 8,4$ раза. Знайти за допомогою таблиці 10.1 енергію фотонів.

Відповідь: $W_ф = 0,2\, МеВ$.

5.33 Якої товщини повинна бути алюмінієва пластинка d_{Al}, щоб вона зменшувала інтенсивність вузького пучка рентгенівського випромінювання з енергією $W_ф = 0,2\, МеВ$ так само, як і свинцева пластинка товщиною $d_{Pb} = 1\, мм$?

Відповідь: $d_{Al} = 3,2\, см$.

5.34 Ступені ослаблення вузьких пучків рентгенівського випромінювання з енергіями фотонів $W_{ф1} = 0,2\, МеВ$ та $W_{ф2} = 0,4\, МеВ$ під час проходження свинцевої пластинки відрізняються в чотири рази. Визначити товщину пластинки і ступінь ослаблення пучка з енергією $W_{ф1} = 0,2\, МеВ$.

Відповідь: $d = 1,7\, мм$; $I_0/I = 6$.

5.35 Визначити товщину шару половинного ослаблення вузького пучка рентгенівського випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 6,2\, пм$ для свинцю, води і повітря.

Відповідь: $d_{Pb} = 6,5 \cdot 10^{-4}\ м$; $d_{H_2O} = 5,1 \cdot 10^{-2}\ м$; $d_{пов} = 44\ м$.

5.36 Знайти лінійний коефіцієнт поглинання γ-квантів з енергією $W_{\phi} = 3 MeB$ у воді та свинці, якщо відстані, на яких потік цих квантів зменшується в 10 разів, дорівнюють відповідно $l_1 = 0,58\, м$, $l_2 = 4,9 \cdot 10^{-2}\, м$.

Відповідь: $\mu_{H_2O} = 3,97\, м^{-1}$; $\mu_{Pb} = 46,94\, м^{-1}$.

5.37 Скільки шарів половинного ослаблення міститься в пластинці, що ослаблює вузький пучок рентгенівського випромінювання в 1 000 разів?

Відповідь: $d/d_{1/2} \approx 10$.

5.38 Чавунна плита зменшує інтенсивність вузького пучка гамма–випромінювання $\left(W_{\phi} = 2,8 MeB\right)$ у 10 разів. У скільки разів зменшить інтенсивність цього пучка свинцева плита такої самої товщини?

Відповідь: у 59 разів.

5.39 На поверхню води падає гамма-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414\, пм$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшиться вдвічі?

Відповідь: $d_{1/2} = 0,231\, м$.

5.40 Точкове радіоактивне джерело ^{60}Co міститься в центрі свинцевого сферичного контейнера з товщиною стінок $x = 1 см$ та зовнішнім радіусом $R = 20 см$. Визначити максимальну активність $A_{\max}$ джерела, яке можна зберігати в контейнері, якщо допустима густина потоку γ-фотонів на виході з контейнера $I_{доп} = 8 \cdot 10^6\, с^{-1} \cdot м^{-2}$. Прийняти, що під час кожного акту розпаду ^{60}Co випромінюється $n = 2$ фотони, середня енергія кожного з яких $\langle W \rangle = 1,25 MeB$.

Відповідь: $A_{\max} = 3,81\, MБк$.

ЕЛЕМЕНТИ ДОЗИМЕТРІЇ

5.41 Визначити дозу поглинання при поглинанні γ-випромінювання ^{60}Co (енергія кванта $\varepsilon = 1{,}3\,МеВ$) в об'ємі, маса якого $m = 70\,кг$, впродовж однієї доби. Активність поглинутого випромінювання $A = 100\,мКи$.

Відповідь: $D_П = 0{,}6\,Гр$.

5.42 Яка частка усіх молекул повітря за нормальних умов іонізується рентгенівським випромінюванням при експозиційній дозі $D_E = 258\,мкКл/кг$. Чому дорівнює ця доза в рентгенах?

Відповідь: $\omega = 7{,}73 \cdot 10^{-11}$; $D_E = 1Р$.

5.43 Повітря за нормальних умов опромінюється γ-випромінюванням. Визначити, яку енергію W поглинає повітря масою $m = 5г$ при експозиційній дозі опромінення $D_E = 258\,мкКл/кг$. Знайти дозу поглинання для повітря за умови, що енергія γ-квантів дорівнює $\varepsilon = 6{,}8\,еВ$.

Відповідь: $W = 8{,}77\,мкДж$; $D_П = 1{,}75\,мГр$.

5.44 Об'єм іонізаційної камери кишенькового дозиметра дорівнює $V = 1см^3$, електроємність $C = 2\,пФ$. Камера містить повітря за нормальних умов. Початковий потенціал дозиметра $(\varphi_1 = 150\,В)$ під дією випромінювання зменшився до $\varphi_2 = 110\,В$. Визначити експозиційну дозу опромінення.

Відповідь: $D_E = 62\,мкКл/кг$.

5.45 Потужність експозиційної дози джерела γ-випромінювання з енергією фотонів $\varepsilon = 2\,МеВ$ дорівнює $\breve{D}_E = 0{,}86\,мкА/кг$. Визначити експозиційну, поглинуту та біологічну дози такого випромінювання впродовж 1 доби. Чому дорівнює біологічна доза α-, β-випромінювання, а також потоку теплових нейтронів із такою самою експозиційною дозою?

Відповідь: $D_E = 740\,мКл/кг$; $D_П = 0{,}148 \cdot 10^5\,Гр$; $D_Б = 287\,БеР$;
$D_{Б,\alpha} = 5740\,БеР$; $D_{Б,\beta} = 287\,БеР$; $D_{Б,n} = 1435\,БеР$.

5.46 Космічне випромінювання на рівні моря на екваторі утворює у $V = 1см^3$ повітря в середньому $N = 24$ пар іонів за час $t_1 = 10\,с$. Визначити дозу опромінення, отриману людиною впродовж 1 року. Скільки рентген отримає людина за цей час?

Відповідь: $D = 9,41 \cdot 10^{-6}\ Кл/кг$; $D(P) = 36\ мкР$.

5.47 Повітря в деякому об'ємі опромінюється рентгенівськими променями. Доза опромінювання дорівнює $D(P) = 4,5\,P$. Визначити, яка частка атомів, що містяться в даному об'ємі, буде іонізована цим випромінюванням?

Відповідь: $N_1/N = 3,5 \cdot 10^{-10}$.

5.48 Рентгенівська трубка створює на деякій відстані потужність дози опромінення $\breve{D}_E = 2,58 \cdot 10^{-5}\ А/кг$. Яка кількість пар іонів за одну секунду створює ця трубка в одному грамі повітря на даній відстані?

Відповідь: $N = 1,6 \cdot 10^{11}$ пар іонів.

5.49 Повітря, що перебуває за нормальних умов в іонізаційній камері об'ємом $V = 6\,см^3$, опромінюється рентгенівськими променями. Потужність дози рентгенівського випромінювання дорівнює $\breve{D}_E = 0,48\,мР/год$. Визначити іонізаційний струм насичення $I_н$.

Відповідь: $I_н = 2,7 \cdot 10^{-16}\ А$.

5.50 Під впливом космічних променів у повітрі об'ємом $V = 1\ см^3$ на рівні моря утворюється в середньому $N = 120$ пар іонів за час $t = 1\ хв$. Визначити експозиційну дозу випромінювання, яку отримує людина впродовж однієї доби. Скільки рентген отримає людина за цей час?

Відповідь: $D = 2,14 \cdot 10^{-8}\ Кл/кг$; $D(P) = 82,9\ мкР$.

5.51 Потужність експозиційної дози з енергією фотонів $W = 2\,МеВ$ дорівнює $\breve{D}_E = 0,86\,мкА/кг$. Визначити товщину d свинцевого екрана, що зменшує потужність експозиційної дози до рівня гранично допустимої $\breve{D}_{ЕГ} = 0,86\ нА/кг$.

Під час розв'язування задачі скористатися графіком на рис.5.1.

Відповідь: $d = 13\,см$.

5.52 На відстані $l = 10\,см$ від точкового джерела γ-випромінювання потужність експозиційної дози дорівнює $\breve{D}_E = 0,86\,мкА/кг$. На якій найменшій відстані від джерела впродовж $t = 6\ год$ експозиційна доза не перевищить гранично допустиму $D_E = 5,16\,мкКл/кг$? Поглинанням γ-променів у повітрі знехтувати.

Відповідь: $s = 6\,м$.

5.53 Потужність експозиційної дози γ-випромінювання на відстані $l = 40\,см$ від точкового джерела дорівнює $\breve{D}_E = 4,30\ мкА/кг$. Визначити час, упродовж якого можна перебувати на відстані $s = 6\,м$ від радіоактивного джерела, якщо гранично допустима доза опромінення дорівнює $D_E = 5,16\,мкКл/кг$. Поглинанням γ-променів у повітрі знехтувати.

Відповідь: $t = 264\,с$.

ЕЛЕМЕНТАРНІ ЧАСТИНКИ

5.54 Нейтрон та антинейтрон анігілюють, утворюючи два фотони. Визначити енергію кожного з фотонів, які виникли. Прийняти, що початкова енергія частинок була нехтовно малою.

Відповідь: $W = 939,48\,МеВ$.

5.55 K^0-мезон розпадається на два заряджених π-мезони. Маса кожного з π-мезонів, що утворилися, в 1,77 раза більша за його масу спокою. Вважаючи, що спочатку K^0-мезон не рухався, і його маса спокою дорівнює $965m_e$, де m_e – маса спокою електрона, знайти: а) масу спокою π-мезонів, які утворилися; б) швидкість π-мезонів на момент їх утворення. Написати схему розпаду.

Відповідь: а) $m = 273m_e$; б) $\mathrm{v} = 2,48 \cdot 10^8\ м/с$.

5.56 Відомо, що розпад нейтрального каона відбувається за схемою $K^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Вважаючи, що спочатку K^0-мезон не рухався і його маса спокою дорівнює $974m_e$, де m_e – маса спокою електрона, знайти масу спокою π-мезонів, які утворилися, якщо маса кожного з π-мезонів, що утворилися, в 1,783 раза більша за його масу спокою.

Відповідь: $m = 273,1m_e$.

5.57 K^+-мезон розпадається (в стані спокою) на два π-мезони. Вважаючи, що маса спокою K^+-мезона дорівнює $966,2m_e$, де m_e – маса спокою електрона, визначити енергію кожного з π-мезонів, що утворилися. Різницею мас спокою зарядженого і нейтрального піонів знехтувати. Написати схему розпаду.

Відповідь: $W = 247,5\,МеВ$.

5.58 Позитрон та електрон анігілюють з утворенням двох фотонів. Визначити: а) енергію кожного з утворених фотонів за умови, що кінетична енергія електрона та позитрона до їх зіткнення дорівнювала нулю; б) довжину хвилі цих фотонів.

Відповідь: а) енергія кожного фотона $W_ф = 0,51 MeB$; б) $\lambda = 2,4 \cdot 10^{-12}\ м$.

5.59 У процесі здійснення реакції $\gamma \rightarrow {}_{-1}^{0}e + {}_{+1}^{0}e$ енергія фотона дорівнювала $W_ф = 2,02 MeB$. Визначити повну кінетичну енергію позитрона та електрона на момент їх виникнення.

Відповідь: $W_K = 1 MeB$.

5.60 Чому дорівнює мінімальна частота випромінювання, яке здатне викликати «народження» пари електрон – позитрон? Чому дорівнює енергія кванта цього випромінювання?

Відповідь: $\nu = 2,47 \cdot 10^{20}\ c^{-1}$; $W = 1,02 MeB$.

5.61 При зіткненні високоенергетичного позитивно зарядженого мюона та електрона утворюються два нейтрино. Записати цю реакцію і пояснити, який тип нейтрино утворюється.

Відповідь: $\mu^{+} + {}_{-1}^{0}e \rightarrow {}_{0}^{0}\nu_e + {}_{0}^{0}\nu_\mu$.

5.62 При захопленні протоном негативно зарядженого мюона утворюються нейтрон та ще одна частинка. Записати цю реакцію. Яка це частинка.

Відповідь: $\mu^{-} + {}_{1}^{1}p \rightarrow {}_{0}^{1}n + {}_{0}^{0}\nu_\mu$.

5.63 π^0-мезон у стані спокою розпадається на два γ-кванти. Визначити енергія кожного з утворених γ-квантів за умови, що маса спокою піона дорівнює $m = 264,1 m_e$.

Відповідь: $W = 67,64 MeB$.

5.64 При зіткненні нейтрона та антинейтрона відбувається їх анігіляція, внаслідок цього утворюються два γ-кванти, а енергія частинок переходить у енергію γ-квантів. 1 Визначити енергію кожного з утворених γ-квантів. 2 Яку енергію можна отримати від анігіляції $m = 1\ г$ нейтронів та $m = 1\ г$ антинейтронів? Прийняти, що кінетична енергія нейтрона та антинейтрона до їх зіткнення є нехтовно малою.

Відповідь: $W_\gamma = 942 MeB$; $W = 1,8 \cdot 10^{14}\ Дж$.

5.65 Записати схему розпаду антинейтрона.

Відповідь: ${}_0^1\tilde{n} \to {}_{-1}^{1}\tilde{p} + {}_{+1}^{0}e + {}_0^0\nu_e$.

5.66 Визначити власний час життя нестабільної частинки, якщо ширина рівня її власної енергії дорівнює:

1) $\Delta W = 100\ кеВ$; 2) $\Delta W = 1\ МеВ$; 3) $\Delta W = 100\ МеВ$.

Відповідь: 1) $\tau \approx 7 \cdot 10^{-20}\ с$; 2) $\tau \approx 7 \cdot 10^{-22}\ с$; 3) $\tau \approx 7 \cdot 10^{-24}\ с$.

5.67 Переріз взаємодії нейтрино з речовиною приблизно $\sigma \approx 10^{-44}\ см$. Оцінити середню довжину $\langle \lambda \rangle$ вільного пробігу нейтрино. Прийняти, що концентрація атомів у речовині дорівнює $n \approx 10^{-22}\ см^{-3}$. Порівняти це значення з радіусом сонячної системи $R \sim 10^{10}\ км$.

Відповідь: $\langle \lambda \rangle \approx 10^{17}\ км$; $\langle \lambda \rangle \approx R \cdot 10^{7}$.

5.68 Побудувати кваркову схему: 1) нейтрона та антинейтрона; 2) протона і антипротона; 3) нейтрального каона.

Відповідь: $n = udd$ і $\tilde{n} = \tilde{u}\tilde{d}\tilde{d}$; $p = uud$ і $\tilde{p} = \tilde{u}\tilde{u}\tilde{d}$; $\kappa^0 = d\tilde{s}$.

5.69 Які комбінації відомих у наш час кварків відтворюють властивості: 1) π^+-мезона; 2) π^--мезона; 3) Σ^0-гіперона.

Відповідь: 1) $\pi^+ = u\tilde{d}$; 2) $\pi^- = \tilde{u}d$; 3) $\Sigma^0 = uds$.

5.70 Охарактеризуйте основні властивості кварків (антикварків) – зарядові числа (електронне та баріонне), спін, дивність, колір, зачарованість та шарм.

5.71 До якої групи елементарних частинок належать: 1) мюон та нейтрино; 2) нейтрон; 3) фотон; 4) K^0-мезон?

5.72 До якої групи елементарних частинок належать: 1) Λ^0-гіперон; 2) протон; 3) тау-лептон; 4) π^0-мезон?

5.73 Виконання яких законів збереження необхідне для взаємного перетворення елементарних частинок? Виконання яких із цих законів є необхідним лише для сильної взаємодії?

5.74 Яка характеристика елементарних частинок покладена в основу поділу адронів на мезони та баріони?

5.75 Визначити, які з наведених процесів заборонені законом збереження дивності: 1) $p+\pi^- \to \Lambda^0 + K^0$; 2) $p+\pi^- \to K^- + \Sigma^+$; 3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$; 4) $p+\pi^- \to K^- + K^+ + n$. Чому?

Відповідь: 1) дозволений; 2) заборонений; 3) заборонений; 4) дозволений.

5.76 Мезон космічних променів має енергію $W = 3\,ГеВ$. Енергія спокою мезона $W_0 = 100\,МеВ$. Яку відстань l в атмосфері може пройти мезон? Власний час життя мезона $\tau_0 = 2\,мкс$.

Відповідь: $l = 18\,км$.

5.77 Кінетична енергія мезона космічних променів дорівнює $W = 7m_0c^2$, де m_0 – маса спокою мезона. У скільки разів час власного життя мезона менший часу від життя за лабораторним годинником?

Відповідь: $\tau_0/\tau = 8$.

5.78 Електрон і позитрон утворюються фотоном з енергією $W = 2,62\,МеВ$. Чому дорівнювала на момент утворення повна кінетична енергія позитрона та електрона?

Відповідь: $W_e + W_p = 1,6\,МеВ$.

5.79 Електрон і позитрон утворені фотоном з енергією $W = 5,7\,МеВ$. Чому дорівнювала на момент утворення повна кінетична енергія позитрона та електрона?

Відповідь: $W_e + W_p = 4,68\ МеВ$.

5.80 Електрон і позитрон, утворені фотоном з енергією $W = 5,7\,МеВ$, рухаються в камері Вільсона, розміщеній у магнітному полі, за траєкторіями з радіусом кривизни $R = 3\,см$. Визначити магнітну індукцію B поля.

Відповідь: $B = 0,34\,Тл$.

5.81 Нерухомий нейтральний π-мезон при розпаді перетворюється на два фотони. Визначити енергію $W_ф$ кожного фотона. Маса спокою π-мезона $m_{0\pi} = 264,2\,m_e$, де m_e – маса спокою електрона.

Відповідь: $W_ф = 67,67\,МеВ$.

5.82 У ядерній фізиці прийнято кількість заряджених частинок, що бомбардують мішень, характеризувати загальним зарядом, вираженим у мікроампер-годинах $(мкА \cdot год)$. Якій кількості заряджених частинок відповідає загальний заряд $q = 1 мкА \cdot год$? Задачу розв'язати для: а) електронів; б) α-частинок.

Відповідь $N_e = 2,2 \cdot 10^{16}$; $N_e = 1,1 \cdot 10^{16}$.

5.83 При пружному центральному стиканні нейтрона з нерухомим ядром речовини-сповільнювача кінетична енергія нейтрона зменшується в 1,4 раза. Визначити масу $m_я$ ядер речовини-сповільнювача.

Відповідь: $m_я = 12 а.о.м.$ (графіт).

5.84 Для отримання повільних нейтронів їх пропускають через речовини, що містять водень (наприклад, парафін). Яку найбільшу частку своєї кінетичної енергії $\Delta W_K / W_K$ нейтрон масою m_0 може передати : а) протону (маса $m_p = m_0$); б) ядру атома свинцю (маса $m_{Pb} = 207 m_0$)? Найбільша частка переданої енергії відповідає пружному центральному зіткненню.

Відповідь: а) $\Delta W_K / W_K \approx 100\,\%$; б) $\Delta W_K / W_K = 1,9\,\%$, тобто в шарі свинцю нейтрони гальмуються значно повільніше, ніж у шарі речовини, яка містить водень.

5.85 Нейтрон з енергією $W_0 = 4,6 MeB$ унаслідок зіткнень із протонами уповільнюється. Після скількох зіткнень N його енергія зменшилася до $W = 0,23 MeB$? Нейтрон відхиляється при кожному зіткненні в середньому на кут $\varphi = 45^0$.

Відповідь: $N = 24$.

ПРИСКОРЮВАЧІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ЧАСТИНОК

5.86 Вивести формулу, що пов’язує магнітну індукцію поля циклотрона та частоту прикладеної до дуантів напруги для дейтронів, протонів та α-частинок. Магнітна індукція поля $B = 1,26\,Тл$.

Відповідь: $\nu = qB/2\pi m$; $\nu_1 = 9,7\,МГц$; $\nu_2 = 19,4\,МГц$; $\nu_3 = 9,7\,МГц$.

5.87 Максимальний радіус кривизни траєкторії частинок у циклотроні $R = 35\,см$, частота прикладеної до дуантів напруги $\nu = 13,8\,МГц$. Визначити індукцію магнітного поля, необхідного для синхронної роботи циклотрона, і максимальну енергію протонів, що вилітають.

Відповідь: $B = 0,9\,Тл$, $W = 4,8\,МеВ$.

5.88 Максимальний радіус кривизни траєкторії частинок у циклотроні $R = 35\,см$, частота прикладеної до дуантів напруги $\nu = 13,8\,МГц$. Визначити індукцію магнітного поля, необхідного для синхронної роботи циклотрона, і максимальну енергію дейтронів, що вилітають.

Відповідь: $B = 1,8\,Тл$, $W = 9,6\,МеВ$.

5.89 Максимальний радіус кривизни траєкторії частинок у циклотроні $R = 35\,см$, частота прикладеної до дуантів напруги $\nu = 13,8\,МГц$. Визначити індукцію магнітного поля, необхідного для синхронної роботи циклотрона, і максимальну енергію α-частинок, що вилітають.

Відповідь: $B = 1,8\,Тл$, $W = 19,2\,МеВ$.

5.90 Іонний струм у циклотроні під час роботи з α-частинками $I = 15\,мкА$. У скільки разів такий циклотрон продуктивніший за $m = 1\,г$ радію?

Відповідь: $n_2/n_1 = 1270$.

5.91 Максимальний радіус кривизни траєкторії α-частинок у циклотроні $R = 50\,см$. Індукція магнітного поля дорівнює $B = 1\,Тл$. Яку сталу різницю потенціалів повинні пройти протони, щоб набрати такого самого прискорення як у даному циклотроні?

Відповідь: $U = 12\,МВ$.

5.92 Циклотрон дає дейтрони з енергією $W = 7\,МеВ$. Індукція магнітного поля циклотрона дорівнює $B = 1,5\,Тл$. Визначити максимальний радіус кривизни R траєкторії дейтрона в циклотроні.

Відповідь: $R = 0,36\,м$.

5.93 Між дуантами циклотрона радіусом $R = 50 см$ прикладена змінна напруга $U = 75\ кВ$ із частотою $\nu = 10\ МГц$. Визначити магнітну індукцію поля циклотрона, швидкість та енергію дейтронів, що вилітають із циклотрона. Яку кількість обертів виконує заряджена частинка до того, як покине циклотрон? Задачу розв'язати для протонів та α-частинок.

***Вказівка**: При кожному оберті заряджена частинка двічі проходить відстань між дуантами, отже, двічі отримує додатковий імпульс. Це означає, що після n обертів заряджена частика набирає енергію, еквівалентну прискорювальному потенціалу $U' = 2nU$, де U – різниця потенціалів між пуантами. Звідси $n = U'/2U$.*

Відповідь: $B = 1{,}3 Тл$; $v = 3{,}13 \cdot 10^7\ м/с$; $W = 10{,}2 МеВ$; $n = 68$.

5.94 Між дуантами циклотрона радіусом $R = 50 см$ прикладена змінна напруга $U = 75\ кВ$ з частотою $\nu = 10\ МГц$. Визначити магнітну індукцію поля циклотрона, швидкість та енергію протонів, що вилітають із циклотрона. Яку кількість обертів виконує протон до того, як покине циклотрон?

Відповідь: $B = 0{,}65 Тл$; $v = 3{,}13 \cdot 10^7\ м/с$; $W = 5{,}1 МеВ$; $n = 34$.

5.95 Між дуантами циклотрона радіусом $R = 50 см$ прикладена змінна напруга $U = 75\ кВ$ з частотою $\nu = 10\ МГц$. Визначити магнітну індукцію поля циклотрона, швидкість та енергію α-частинок, що вилітають із циклотрона. Яку кількість обертів виконує α-частинка до того, як покине циклотрон?

Відповідь: $B = 1{,}3 Тл$; $v = 3{,}13 \cdot 10^7\ м/с$; $W = 20{,}4 МеВ$; $n = 68$.

5.96 До якої енергії можна прискорити α-частинки в циклотроні, якщо відносне збільшення маси частинки $\Delta m/m_0$ не повинне перевищувати 5%?

Відповідь: $W = 188\ МеВ$.

5.97 Енергія дейтронів, прискорених синхротроном, дорівнює $W = 200\ МеВ$. Визначити для цих дейтронів швидкість та відношення m/m_0, (де m – маса релятивістського дейтрона; m_0 – його маса спокою).

Відповідь: $v = 0{,}44c = 1{,}32 \cdot 10^8\ м/с$; $m/m_0 = 1{,}1$.

5.98 У фазотроні збільшення маси частинки при збільшенні її швидкості компенсується збільшенням періоду прискорювального поля. Частота напруги, що подається на дуанти фазотрона, змінювалася для кожного циклу прискорення від $\nu_0 = 25 МГц$ до $\nu = 18{,}9 МГц$. Визначити магнітну індукцію поля фазотрона та кінетичну енергію протонів, що вилітають із фазотрона.

Відповідь: $B = 1{,}62\ Тл$; $W = 300\ МеВ$.

5.99 Протони прискорюються у фазотроні до енергії $W = 660\ МеВ$, α-частинки – до енергії $W = 840 МеВ$. Для компенсації збільшення маси змінювався період прискорювального поля фазотрона. У скільки разів T/T_0 необхідно було змінити період прискорювального поля фазотрона (для кожного прискорювального циклу) під час роботи: а) з протонами; б) з α-частинками?

Відповідь: $T/T_0 = 1{,}7$; $T/T_0 = 1{,}9$.

5.100 На рівні моря густина потоку мезонів космічних променів дорівнює $n = 1 см^{-2} \cdot хв^{-1}$. Кожний мезон на 1 см шляху в повітрі за нормального атмосферного тиску створює 85 пар іонів. Визначити струм, що створюють мезони в циліндричній іонізаційній камері, радіус якої $R = 20\ см$ та висота $h = 30\ см$. Камера заповнена повітрям за тиску $p = 5 атм$. Камера зорієнтована вертикально. Прийняти, що іонізація створюється лише мезонами, які падають на камеру вертикально.

Відповідь: $I = 4{,}2 \cdot 10^{-14}\ A$.

5.101 Через лічильник Гейзера – Мюллера проходить $n = 10^8$ електронів за одне розрядження. Визначити середній струм, що проходить через лічильник, за умови, що за 1 хвилину відбувається 600 розряджень.

Відповідь: $I = 0{,}16 нA$.

Додаток А
(довідковий)

ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ

1 ФОРМУЛИ З АЛГЕБРИ

Розв’язок квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Таблиця А.1 – Багаточлени

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$
$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$	
$a^n-1=(a-1)\left(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+\ldots+a+1\right)$	

Таблиця А.2 – Логарифми

$a^x=b,\ a>0\Leftrightarrow\log_a b=x$	
$\log_a a=1$	$\log_a 1=0$
Якщо $x>0,\ y>0$, то $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;	
$\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y$	$\log_a\left(x^n\right)=n\log_a x$
$\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right)=\frac{1}{n}\log_a x,\ n\neq1$	

2 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Таблиця А.3 – Значення деяких тригонометричних функцій

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\mathrm{ctg}x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Таблиця А.4 – Основні властивості тригонометричних функцій

$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin(x+2\pi k) = \sin x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$	$\mathrm{tg}(x+\pi k) = \mathrm{tg}x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos(x+2\pi k) = \cos x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{ctg}(x+\pi k) = \mathrm{ctg}x,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Таблиця А.5 – Формули зведення

Функція	$90^\circ - x$	$180^\circ - x$	$270^\circ - x$	$-x$	$90^\circ - x$	$180^\circ - x$	$270^\circ - x$
	$\frac{\pi}{2} - x$	$\pi - x$	$\frac{3\pi}{2} - x$		$\frac{\pi}{2} + x$	$\pi + x$	$\frac{3\pi}{2} + x$
$\sin\alpha$	$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$
$\cos\alpha$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}x$	$-\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}x$	$-\mathrm{tg}x$	$-\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}x$	$-\mathrm{ctg}x$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}x$	$-\mathrm{ctg}x$	$\mathrm{tg}x$	$-\mathrm{ctg}x$	$-\mathrm{tg}x$	$\mathrm{ctg}x$	$-\mathrm{tg}x$

Таблиця А.6 – Тотожні перетворення тригонометричних виразів

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\mathrm{tg}x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
$\mathrm{ctg}x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	$\mathrm{tg}x \cdot \mathrm{ctg}x = 1$
$1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \mathrm{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$	$\mathrm{tg}2x = \dfrac{2\mathrm{tg}x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$	
$\mathrm{ctg}2x = \dfrac{\mathrm{ctg}^2 x - 1}{2\mathrm{ctg}x}$	$\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{2}$
$\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{2}$	$\mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
$\mathrm{ctg}^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$	
$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$	$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$
$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$	$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
$\mathrm{tg}(x + y) = \dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}$	$\mathrm{tg}(x - y) = \dfrac{\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y}{1 + \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y}$
$\sin x + \sin y = 2\sin\dfrac{x + y}{2} \cdot \cos\dfrac{x - y}{2}$	$\sin x - \sin y = 2\cos\dfrac{x + y}{2} \cdot \sin\dfrac{x - y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x + y}{2} \cdot \cos\dfrac{x - y}{2}$	$\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x + y}{2} \cdot \sin\dfrac{x - y}{2}$
$\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$	$\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}y = \dfrac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$
$\mathrm{ctg}x + \mathrm{ctg}y = \dfrac{\sin(x + y)}{\sin x \cdot \sin y}$	$\mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}y = \dfrac{\sin(x - y)}{\sin x \cdot \sin y}$
$\sin x \cdot \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) - \cos(x + y)\right]$	
$\cos x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x - y) + \cos(x + y)\right]$	
$\sin x \cdot \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x - y) + \sin(x + y)\right]$	

Продовження табл. А.6

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$	$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
$\mathrm{tg}3x = \dfrac{3\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3\mathrm{tg}^2 x}$	$\mathrm{ctg}3x = \dfrac{3\mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}^3 x}{1 - 3\mathrm{ctg}^2 x}$
$\sin x + \cos y = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)$	
$\sin x - \cos y = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$	$1 + \sin x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$
$1 - \sin x = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$	$1 + \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$

Таблиця А.7 – Деякі похідні від функцій

$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$
$\left(\dfrac{1}{x^n}\right)' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(e^x\right)' = e^x$
$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(u^{\mathrm{v}}\right)' = \mathrm{v}\, u^{\mathrm{v}-1}\left(u\right)' + u^{\mathrm{v}} \ln u\left(\mathrm{v}\right)$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$
$\left(\mathrm{tg}x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$	$\left(\mathrm{ctg}x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$

Таблиця А.8 – Деякі часто вживані інтеграли

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $(n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln\lvert a\rvert} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$ при $\lvert x\rvert < a$	
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$ при $\lvert x\rvert > a$	
$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$	$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}$
$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$	$\int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} a^{-2}$
$\int_0^\infty x^{1/2} e^{-ax} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-3/2}$	$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$
$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-ax} dx = \frac{3}{2}\sqrt{\pi} a^{-5/2}$	$\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$
$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,405$
$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$	$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$
$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 0,225$	$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 1,18$

Таблиця А.9 – Формули для наближених обчислень

Якщо $a \ll 1$, то в першому наближенні можна вважати:	
$\frac{1}{1 \pm a} = 1 \mp a$	$\frac{1}{\sqrt{1 \pm a}} = 1 \mp \frac{1}{2} a$
$(1 \pm a)^2 = 1 \mp 2a$	$e^a = 1 + a$
$\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{1}{2} a$	$\ln(1 + a) = a$
Якщо кут $\alpha < 5^0$ або $\alpha < 0{,}1\,рад$ задано у радіанах, то в першому наближенні можна вважати:	
$\sin\alpha = \mathrm{tg}\alpha = \alpha, \ \cos\alpha = 1$	

Таблиця А.10 – Множники і префікси для утворення десятикратних та часткових одиниць

Префікс				Префікс			
Множник	Назва	Позначення		Множник	Назва	Позначення	
		укр.	міжнар.			укр.	міжнар.
10^{18}	екса	Е	E	10^{-1}	деци	д	d
10^{15}	пета	П	P	10^{-2}	санти	с	c
10^{12}	тера	Т	T	10^{-3}	мілі	м	m
10^{9}	гіга	Г	G	10^{-6}	мікро	мк	m
10^{6}	мега	М	M	10^{-9}	нано	н	n
10^{3}	кіло	кг	k	10^{-12}	піко	п	p
10^{2}	гекто	г	h	10^{-15}	фемто	ф	f
10^{1}	дека	да	da	10^{-18}	атто	а	a

Додаток Б
(довідковий)

Таблиця Б.1 – Похідні одиниці СІ, які використовують в електриці та оптиці

Величина	Похідна одиниця			
Назва	Назва	Позначення		Примітка
		укр.	міжнар.	
Площа	квадратний метр	$м^2$	m^2	
Об’єм	кубічний метр	$м^3$	m^3	
Швидкість	метр за секунду	$м/с$	m/s	
Прискорення	метр на секунду в квадраті	$м/с^2$	m/s^2	
Частота	Герц	$Гц$	Hz	$Гц = с^{-1}$
Частота обертання	секунда в мінус першому ступені	$с^{-1}$	s^{-1}	
Кутова швидкість	радіан за секунду	$рад/с$	rad/s	
Кутове прискорення	радіан на секунду в квадраті	$рад/с^2$	rad/s^2	
Густина	кілограм на кубічний метр	$кг/м^3$	kg/m^3	

Таблиця Б.2 – Фундаментальні фізичні константи

Гравітаційна стала	$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ $м^3/(кг\cdot с^2)$
Швидкість світла у вакуумі	$c = 2{,}9979\cdot10^8$ $м/с$
Стала Планка	$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ $Дж\cdot с$
Стала Планка – Дірака	$\hbar = h/2\pi = 1{,}05\cdot10^{-34}$ $Дж\cdot с$
Нормальне прискорення вільного падіння	$g = 9{,}81 м/с$
Універсальна молярна газова стала	$R = 8{,}31$ $Дж/(моль\cdot К)$
Стала Авогадро	$N_a = 6{,}02\cdot10^{23}$ $моль^{-1}$
Стала Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ $Дж/К$
Стандартний об'єм (об'єм одного моля газу)	$V_0 = 22{,}4\cdot10^{-3}$ $м^3/моль$
Елементарний заряд	$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ $Кл$
Питомий заряд електрона	$e/m_e = 1{,}7588\cdot10^{11}$ $Кл/кг$
Електрична стала	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ $Ф/м$
Магнітна стала	$\mu_0 = 4\cdot10^{-7}$ $Гн/м$
Стала Фарадея	$F = 9{,}65\cdot10^4$ $Кл/моль$
Стала Стефана – Больцмана	$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ $Вт/(м^2К^4)$
Стала в законі зміщення Віна	$b = 2{,}9\cdot10^{-3}$ $м\cdot К$
Стала Рідберга	$R = 1{,}10\cdot10^7$ $м^{-1}$ $R' = 2{,}07\cdot10^{-18}$ $м^{-1}$
Енергія іонізації атома водню	$W_i = 2{,}18\cdot10^{-18}$ $Дж$ $(13{,}6$ $еВ)$
Енергія спокою електрона	$W_0 = 8{,}16\cdot10^{-14}$ $Дж = 0{,}511$ $МеВ$
Комптонівська довжина хвилі електрона	$\lambda_C = 2{,}43\cdot10^{-12}$ $м$
Магнетон Бора	$\mu_Б = 9{,}27\cdot10^{-24}$ $Дж/Тл$
Борівський радіус	$a = 5{,}29\cdot10^{-11}$ $м$
Уніфікована атомна одиниця маси	1 а. о. м. $= 1{,}66\cdot10^{-27}$ $кг$
Коефіцієнт пропорційності між енергією та масою	$c^2 = 9{,}00\cdot10^{16}$ $Дж/кг$; $c^2 = 9{,}31 МеВ/а.о.м.$

Таблиця Б.3 – Позасистемні одиниці, які використовують у фізиці та астрономії

Назва величини	Позасистемні одиниці			
	Назва	Позначення		Значення в одиницях СІ
		укр.	міжнародне	
Довжина	астрономічна одиниця	а. о.	–	$1{,}49\,600 \cdot 10^{11}$м
	світловий рік	св. рік	$l.y.$	$9{,}4\,605 \cdot 10^{15}$м
	парсек	пк	pc	$3{,}0\,857 \cdot 10^{16}$м
Оптична сила	діоптрія	дптр	–	1м$^{-1}$
Маса	атомна одиниця маси	а. о. м.	u	$1{,}66\,057 \cdot 10^{-27}$кг
Площа	барн	б	b	10^{-28}м^2
Енергія	електрон-вольт	eB	eV	$1{,}60\,219 \cdot 10^{-19}$Дж
Площа земельних ділянок	гектар	га	ha	10^4м^2
Об’єм	літр	л	l	10^{-3}м^3
Плоский кут	градус	$...^o$	$...^o$	$\pi/180$ рад
	хвилина	$...'$	$...'$	$\pi/10\,800$ рад
	секунда	$...''$	$...''$	$\pi/648\,000$ рад
Час	хвилина	хв	min	60 с
	година	год	h	3 600 с
	доба	доба	d	86 400 с
	тиждень	тиж.	–	604 800 с
	місяць	міс.	–	$2{,}592 \cdot 10^6$с
	рік	рік	–	$3{,}11 \cdot 10^7$с
Маса	тонна	т	t	10^3кг
Температура Цельсія, різниця температур	градус Цельсія	^oC	^oC	Температура Цельсія $t = T - 273{,}15$, де T – термодинамічна температура. За розміром градус Цельсія дорівнює Кельвіну

Таблиця Б.4 – Деякі астрономічні величини

Радіус Землі	$6{,}37 \cdot 10^{6}$ *м*
Маса Землі	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ *кг*
Радіус Місяця	$1{,}74 \cdot 10^{6}$ *м*
Маса Місяця	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ *кг*
Радіус Сонця	$6{,}95 \cdot 10^{8}$ *м*
Маса Сонця	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ *кг*
Відстань від центра Землі до центра Місяця	$3{,}84 \cdot 10^{8}$ *м*
Відстань від центра Землі до центра Сонця	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ *м*

Таблиця Б.5 – Густини деяких твердих тіл

Тверде тіло	Густина ρ, кг/м^3	Тверде тіло	Густина ρ, кг/м^3
Алюміній	2 690	Молібден	10 200
Барій	3 500	Нікель	8 500
Ванадій	6 020	Ніхром	8 400
Вісмут	9 800	Олово	7 980
Вольфрам	19 300	Платина	21 400
Залізо (сталь)	7 870	Свинець	11 340
Золото	1 930	Срібло	10 500
Кам'яна сіль	2 200	Тантал	16 600
Кобальт	8 900	Тітан	4 540
Константан	8 900	Уран	19 100
Лід	920	Фарфор	2 300
Літій	530	Хром	7 190
Латунь	8 550	Цезій	1 870
Марганець	7 400	Цинк	7 130
Мідь	8 960	Чавун сірий	7 250

Таблиця Б.6 – Межа К-серії рентгенівських променів для різних матеріалів антикатода

Речовина	***Довжина хвилі*** λ, *нм*
Вольфрам	1,78
Золото	1,53
Мідь	13,8
Платина	1,58
Срібло	4,84

Таблиця Б.7 – Маси та енергії спокою деяких частинок

	Маса спокою		Енергія спокою W_0	
	m_0, кг	m_0, а. о. м	Дж	МеВ
Електрон	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	0,00 055	$8{,}19 \cdot 10^{-14}$	0,511
Протон	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$	1,00 728	$1{,}50 \cdot 10^{-10}$	938
Нейтрон	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$	1,00 867	$1{,}51 \cdot 10^{-10}$	939
Дейтрон	$3{,}35 \cdot 10^{-27}$	2,01 355	$3{,}00 \cdot 10^{-10}$	1 876
α-частинка	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$	4,00 149	$5{,}96 \cdot 10^{-10}$	3 733

Таблиця Б.8 – Маси нейтральних атомів (а. о. м.)

Елемент		Ізотоп	Маса
Водень	1	^{1}H	1,00 783
		^{2}H	2,01 410
		^{3}H	3,01 605
Гелій	2	^{3}He	3,01 603
		^{4}He	4,00 260
Літій	3	^{6}Li	6,01 513
		^{7}Li	7,01 601
Берилій	4	^{7}Be	7,01 169
		^{8}Be	8,00 531
		^{9}Be	9,01 219
		^{10}Be	10,01 354
Бор	5	^{9}B	9,01 333
		^{10}B	10,01 294
		^{11}B	11,00 931
Вуглець	6	^{10}C	10,00 168
		^{12}C	12,00 000
		^{13}C	13,00 335
		^{14}C	14,00 307
Азот	7	^{13}N	13,00 574
		^{14}N	14,00 307
		^{15}N	15,00 011
Кисень	8	^{16}O	15,99 491
		^{17}O	16,99 913
		^{18}O	17,99 916
Фтор	9	^{19}F	18,99 840
Натрій	11	^{22}Na	21,99 444
		^{23}Na	22,98 977
Магній	12	^{23}Mg	22,99 414
		^{24}Mg	23,98 504
		^{27}Mg	26,98 436
Алюміній	13	^{27}Al	26,98 135
		^{30}Al	29,99 817
Кремній	14	^{27}Si	26,81 535
		^{30}Si	29,98 325
		^{31}Si	30,97 535
Фосфор	15	^{31}P	30,97 376
		^{33}P	32,97 174
Сірка	16	^{33}S	32,97 146
Калій	19	^{41}K	40,96 184
Кальцій	20	^{40}Ca	39,97 542
		^{44}Ca	43,95 549
		^{48}Ca	47,95 236
Залізо	26	^{56}Fe	55,94 700
Кобальт	27	^{56}Co	55,95 769
Мідь	29	^{63}Cu	62,94 962
		^{64}Cu	63,5 400
Срібло	47	^{108}Ag	107,869
Кадмій	48	^{113}Cd	112,94 206
Вольфрам	74	^{184}W	183,8 500
Ртуть	80	^{200}Hg	200,02 800
Свинець	82	^{206}Pb	205,97 446
Полоній	84	^{210}Po	209,98 297
Радій	88	^{226}Ra	226,0 254
Торій	90	^{232}Th	232,038
Уран	92	^{235}U	235,11 750
		^{238}U	238,12 376

Таблиця Б.9 – Періоди піврозпаду деяких радіоактивних ізотопів

Ізотоп	Позначення	Період піврозпаду $T_{1/2}$
Тритій	${}^{3}_{1}H$	12,323 року
Актиній	${}^{225}_{89}Ac$	10 діб
Алюміній	${}^{26}_{13}Al$	$7{,}4\cdot10^{5}$ років
Іридій	${}^{192}_{77}Ir$	75 діб
Йод	${}^{131}_{53}I$	8,4 доби
Кобальт	${}^{60}_{27}Co$	5,3 року
Калій 40	${}^{40}_{19}K$	$1{,}28\cdot10^{9}$ років
Магній	${}^{27}_{12}Mg$	10 хвилин
Вуглець	${}^{11}C$ ${}^{14}C$	20 хвилин 5 730 років
Натрій	${}^{22}_{11}Na$ ${}^{24}_{11}Na$	2,6 року 15 годин
Радій	${}^{219}_{88}Ra$ ${}^{226}_{88}Ra$	10^{-3} с $1{,}62\cdot10^{3}$ років
Радон	${}^{222}_{86}Rn$	3,83 доби
Криптон 85	${}^{85}_{36}Kr$	10,8 років
Стронцій	${}^{90}_{38}Sr$	27 років
Торій	${}^{229}_{90}Th$ ${}^{234}_{92}U$ ${}^{235}_{92}U$	$7\cdot10^{3}$ років $2{,}5\cdot10^{5}$ років $7{,}1\cdot10^{8}$ років
Уран	${}^{238}_{92}U$	$4{,}5\cdot10^{9}$ років
Фосфор	${}^{32}_{15}P$	14,3 доби

Таблиця Б.10 – Деякі відомості про елементарні частинки з часом життя більшим за $10^{-20}c$

Назва частинки				Символ: частинка	Символ: анти-частинка	Маса в електронних масах	Електричний заряд у зарядах електрона	Час життя, с
Фотон				γ	γ	0	0	Стабільний
Лептони			Нейтрино електронне	ν_e	$\tilde{\nu}_e$	0	0	Стабільне
Лептони			Нейтрино мюонне	ν_μ	$\tilde{\nu}_\mu$	0	0	Стабільне
Лептони			Тау-нейтрино	ν_τ	$\tilde{\nu}_\tau$	0	0	Стабільне
Лептони			Електрон	e^-	e^+	1	–1	Стабільний
Лептони			Мюон	μ^-	μ^+	207	–1	$2,2\cdot10^{-6}$
Лептони			Тау-лептон	τ^-	τ^+	3 492	–1	$1,46\cdot10^{-12}$
Адрони	Мезони		Пі-мезони (піони)	π^0 π^+	π^0 π^-	264,1 273,1	0 1	$1,83\cdot10^{-16}$ $2,6\cdot10^{-8}$
Адрони	Мезони		Ка-мезони (каони)	K^+ K^0	K^- K^0	966,4 974,1	1 0	$1,2\cdot10^{-8}$
Адрони	Мезони		Ета-нуль-мезон	η^0	η^0	1 074	0	$2,4\cdot10^{-19}$
Адрони	Баріони	Нуклони	Протон Нейтрон	p n	$\tilde{p}$ $\tilde{n}$	1 836,1 2 327,6	0 1	Стабільний 10^3
Адрони	Баріони	Гіперони	Лямбда-гіперон	Λ^0	$\tilde{\Lambda}^0$	2 183,1	0	$2,63\cdot10^{-10}$
Адрони	Баріони	Гіперони	Сигма-гіперон	Σ^+ Σ^0 Σ^-	$\tilde{\Sigma}^+$ $\tilde{\Sigma}^0$ $\tilde{\Sigma}^-$	2 327,6 2 333,6 2 343,1	1 –1 0	$8\cdot10^{-11}$ $5,8\cdot10^{-30}$ $1,48\cdot10^{-10}$
Адрони	Баріони	Гіперони	Ксі-гіперон	Ξ^0 Ξ^-	$\tilde{\Xi}^0$ $\tilde{\Xi}^-$	2 572,8 2 586,6	0 –1	$2,9\cdot10^{-10}$ $1,64\cdot10^{-10}$
Адрони	Баріони	Гіперони	Омега мінус гіперон	Ω	$\tilde{\Omega}$	3 273	–1	$8,2\cdot10^{-11}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Жухарев А. С. Задачи повышенной сложности в курсе общей физики : учебное пособие / А. С. Жухарев, А. Н. Матвеев, В. К. Петерсон. – Москва : Эдиториал УРСС, 2001. – 192 с.

2. Оптика и атомная физика : учебное пособие по решению задач по физике / И. А. Анищенко, А. А. Задерновский, М. М. Зверев и др. – Москва : Моск. гос. ин-т радиотехники, электроники и автоматики, 2002. – 67 с.

3. Васильев А. Э. Физика. Оптика : учебное пособие / А. Э. Васильев. – Санкт-Петербург : Издательство СПбГТУ, 1999. – 50 с.

4. Гладской В. М. Сборник задач с решениями : пособие для втузов / В. М. Гладской, П. И. Самойленко. – Москва : Дрофа, 2004. – 288 с.

5. Трофимова Т. И. Сборник задач по курсу физики с решениями : учебное пособие для вузов / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. – Москва : Высш. шк., 1999. – 591 с.

6. Задачи по общей физике / В. Е. Бенучкин, Д. А. Заикин, А. С. Кингсеп и др. – Москва : Физматлит, 2001. – 336 с.

7. Гаркуша І. П. Збірник задач з фізики / І. П. Гаркуша, В. П. Курінний, М. Ш. Певзнер. – Київ : Вища школа, 1995.

8. Новодворская Е. М. Сборник задач по физике с решениями для втузов / Е. М. Новодворская, Э. М. Дмитриев. – Москва : ООО Издательство «Мир и образование», 2005. – 368 с.

9. Чертов А. Г. Задачник по физике : учебное пособие для студентов втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – Москва : Высшая школа, 1988. – 527 с.

10. Ильичева Е. Н. Методика решения задач оптики / Е. Н. Ильичева, Ю. А. Кудеяров, А. Н. Матвеев ; под ред. А. Н. Матвеева. – Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 72 с.

11. Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике : учебное пособие / И. В. Савельев. – Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 288 с.

12. Иродов И. Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике : учебное пособие для вузов / И. Е. Иродов. – Москва : Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.

13. Ігнатенко В. М. Посібник до практичних занять з фізики / В. М. Ігнатенко, В. Ф. Нефедченко, А. С. Опанасюк. – Суми : СумДУ, 2008. – Ч. 3. – 198 с.

Навчальне видання

Ігнатенко Вікторія Михайлівна,
Нефедченко Василь Федорович

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З КВАНТОВОЇ ТА ЯДЕРНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки В. В. Коваля
Редактор С. М. Симоненко
Комп’ютерне верстання В. М. Ігнатенко

Формат 60х84/8. Ум. друк. арк. 26,04. Обл.-вид. арк. 17,45. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.