

УДК 538.975:621.89.012:536.2(047.31)

УКПП

№ держреєстрації 0115U000692

Інв. №

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет (СумДУ)  
40007, м. Суми, вул. Р.-Корсакова, 2: тел. (0542) 33-41-08,  
факс (0542) 33-40-49

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

д-р фіз.-мат. наук, проф.

\_\_\_\_\_ А.М. Черноус

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

**НЕРІВНОВАЖНА ТЕРМОДИНАМІКА ФРАГМЕНТАЦІЇ МЕТАЛІВ І  
ТЕРТЯ ПРОСТОРОВО-НЕОДНОРІДНИХ МЕЖОВИХ МАСТИЛ МІЖ  
ПОВЕРХНЯМИ З НАНОРОЗМІРНИМИ НЕРІВНОСТЯМИ**

(остаточний)

Начальник НДЧ

канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Науковий керівник НДР

д-р фіз.-мат. наук, проф.

Д.І. Курбатов

О.В. Хоменко

Суми - 2017

Рукопис закінчено 29 грудня 2017 р.

Результати роботи розглянуто на засіданні наукової ради СумДУ, протокол  
від 2017.12.28 № 3

## СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, Головний науковий співробітник, д-р фіз.-мат. наук, професор (29.12.2017)	О. В. Хоменко (розд. 1, 2, 3)
Відповідальний виконавець, Лаборант, аспірант (29.12.2017)	Д. С. Трощенко (підрозд. 1.2, 2, 3.1)
Виконавці: Лаборант, канд. фіз.-мат. наук, доцент (29.12.2017)	Я. О. Ляшенко (підрозд. 1.1, 2.3)
Інженер, канд. фіз.-мат. наук, доцент (29.12.2017)	І. О. Князь (розд. 2)
Лаборант, канд. фіз.-мат. наук, асистент (29.12.2017)	А. М. Заскока (підрозд. 2.3)
Лаборант, канд. фіз.-мат. наук, доцент (29.12.2017)	О. В. Ющенко (підрозд. 3.3)

Лаборант,  
канд. пед. наук, асистент

(29.12.2017)

К. П. Хоменко  
(підрозд. 3.2)

Лаборант,  
студент

(29.12.2017)

М. О. Хоменко  
(підрозд. 1.3, 2.1, 3.2)

Лаборант,  
студент

(29.12.2017)

Д. В. Бойко  
(підрозд. 2.2)

Лаборант,  
студент

(29.12.2017)

М. В. Захаров  
(підрозд. 2.2, 3.3)

Лаборант,  
студент

(29.12.2017)

Д. М. Крекшин  
(підрозд. 3.3)

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 115 с., 33 рис., 145 джерел.

АДИТИВНИЙ ШУМ, В'ЯЗКОПРУЖНЕ СЕРЕДОВИЩЕ, ГРАНИЧНА СТРУКТУРА, ДИСЛОКАЦІЯ, ДЕФОРМАЦІЯ, МЕЖА ЗЕРНА, ПЕРЕРИВЧАСТИЙ РУХ, ПЛАВЛЕННЯ, ПРИЛИПАННЯ-КОВЗАННЯ, ТЕРТЯ, ФАЗОВИЙ ПЕРЕХІД, ФАЗОВА ДІАГРАМА, ФРАГМЕНТАЦІЯ.

Об'єкт дослідження — ультратонка плівка мастила, затиснута між двома атомарно-гладкими та шорсткими твердими поверхнями тертя, фрагментація металів або сплавів, метод ІПД та розм'якшення поверхні льоду при терті.

Мета роботи — побудова термодинамічних моделей, що описують плавлення ультратонкої плівки мастила, фрагментацію металів при ІПД, структурні та трибологічні процеси, які відбуваються на поверхні льоду при терті.

Методи дослідження — методи нерівноважної еволюційної термодинаміки, теорії фазових переходів та теорії пружності, мультифрактального флуктуаційного аналізу, фазової площини, обчислювальної математики.

На основі синергетичної моделі межового тертя, що описує фазові переходи в ультратонкій плівці мастила, вивчаються процеси тертя двох атомарно-гладких та шорстких поверхонь при наявності ультратонкого шару мастила між ними. У рамках нерівноважної еволюційної термодинаміки досліджується процес фрагментації металів при обробці методами ІПД. У наближенні двох-дефектної моделі з урахуванням дислокацій та меж зерен побудована фазова діаграма, що встановлює умови формування граничних структур різних типів. Досліджено вплив адитивних некорельованих шумів теплового й деформаційного полів на розм'якшення поверхні льоду при терті. Побудовано фазову діаграму з областями льоду та виявлено, що область тертя льоду обмежена порівняно низькими значеннями температури поверхонь тертя та інтенсивностей флуктуацій напружень і температури на поверхні льоду.

## ЗМІСТ

Вступ .....	7
1 Моделювання просторово-неоднорідних явищ в режимі межового тертя .....	13
1.1 Просторова неоднорідність основних параметрів синергетичної моделі межового тертя.....	13
1.1.1 Формулювання моделі . . . . .	13
1.1.2 Моделювання просторової неоднорідності основних параметрів . . . . .	17
1.2 Межове плавлення мастила між двома шорсткими поверхнями.....	25
1.2.1 Вільна енергія та фазова діаграма . . . . .	25
1.2.2 Кінетика плавлення мастила . . . . .	28
1.3 Вплив адитивних шумів на самоподібну поведінку зсувного плавлення.....	39
1.3.1 Постановка моделі та рівняння Фоккера-Планка . . . . .	39
1.3.2 Самоподібна поведінка . . . . .	44
1.3.3 Статистичний аналіз часових рядів . . . . .	47
2 Термодинаміка інтенсивної пластичної деформації (ІПД) і надпластичності .....	54
2.1 Підхід нерівноважної еволюційної термодинаміки.....	54
2.2 Фазова кінетика двохдефектної системи .....	57
2.2.1 Фазова діаграма та діаграма стійкості стаціонарних структур	57
2.2.2 Вплив часів релаксації на кінетику двохдефектної системи . .	64

2.3	Фазова діаграма з урахуванням впливу шуму .....	72
3	Стохастична модель розм'якшення поверхневого шару льоду при терті	81
3.1	Вплив шуму на розм'якшення поверхні льоду під час тертя .....	81
3.2	Фазові діаграми режимів тертя .....	85
3.2.1	Рівняння Ланжевена й Фоккера-Планка . . . . .	85
3.2.2	Фазові діаграми . . . . .	88
3.3	Часові ряди сили тертя .....	94
	Висновки .....	98
	Перелік джерел посилання .....	101

## ВСТУП

Останнім часом, з розвитком сучасної науки та техніки, дослідження режиму межового тертя має високе прикладне значення. Нанотрибологічні системи, в яких реалізується межовий режим, використовуються для побудови високоточного обладнання та приладів [1]. Останні дозволяють спостерігати за найскладнішими процесами, що відбуваються під час експлуатації в області контакту деталей [1–6]. Разом з тим з'ясовано, що багато низьковимірних систем зазнають плавлення під дією зсуву (“зсувне плавлення”). Такий вид плавлення часто спостерігається у колоїдних кристалах різного типу [7], при прослизанні по межах зерен у режимі інтенсивної пластичної деформації [8, 9], що може призводити до встановлення маловивченого режиму надпластичності. Спостережувані на бікрисналах ефекти [10] також багато в чому нагадують плавлення зміщенням. Зсувне плавлення одночасно з термодинамічним демонструють ультратонкі плівки мастильних матеріалів, що затиснуті між атомарно-гладкими твердими поверхнями [11–16].

Відомо, що звичайна термодинаміка втрачає свою силу при розгляді дуже малих об'ємів і систем. Тому, намагаючись встановити детальну термодинамічну рівновагу між двома нанозернами, класична термодинаміка працює все гірше і гірше при переході до дрібніших зерен. Нерівноважна еволюційна термодинаміка (НЕТ), навпаки, не прагне встановити детальну рівновагу між кожним нанозерном, і тому працює все краще і краще при переході до дрібніших зерен за рахунок того, що число елементів середовища в показному об'ємі зростає. Внаслідок того, що основні типи дефектів (дислокації, скупчення дислокацій, межі зерен і субзерен) важливих в процесах ІПД знаходяться в мезоскопічній області, в той же час цей підхід ще краще призначений для опису мікроскопічних дефектів, наприклад, вакансій, що і буде продемонстровано далі. Крім того, в деяких випадках (великих показних об'ємів) підхід

може описувати і дефекти макроскопічного рівня, наприклад, мікротріщини або мікропори.

Тертя льоду й снігу має велике значення в побуті, спорті, природі й промисловості [17, 18]. Кінетика тертя льоду визначається такими процесами, як адгезія, поверхнєве плавлення та плавлення під тиском, фрикційне нагрівання, повзучість й руйнування [18–21]. У відповідності з наведеним, ще не пояснено роль температури, або межі текучості льоду при його терті. Одні дослідники вважають точно встановленим наявність 12 фаз льоду, у той час як інші нараховують їх до 14. Звичайно, це не єдина речовина, що володіє поліморфізмом (згадаєте, наприклад, графіт і алмаз, що складаються із хімічно однакових атомів вуглецю), але кількість різних фаз льоду, які продовжують відкривати й по сьогоднішній день, вражає [22–25].

Незважаючи на те, що вивчення межового режиму має високе прикладне та фундаментальне значення, досі не існує єдиної теорії, що достеменно описує межове тертя. Зважаючи на складність процесів, що протікають при терті у зоні контакту, часто користуються феноменологічними моделями [16, 27–33]. Також для опису результатів експериментів активно застосовуються методи молекулярної динаміки [34–36]. Зокрема, у роботах [37, 38] запропонована синергетична модель, в якій плавлення мастильного шару проходить за рахунок механізмів термодинамічного і зсувного плавлення. У роботах Попова [16, 27] розроблена термодинамічна теорія межового тертя, заснована на теорії фазових переходів Ландау другого роду [39], де в якості параметра порядку обирається модуль зсуву мастильного матеріалу. Однак, у режимі межового тертя часто спостерігаються стрибкоподібні фазові перетворення першого роду [11, 29, 40], що призводять до встановлення переривчастого режиму руху [11, 40, 41]. У роботі [42] представлена модель пластичної деформації металів з урахуванням просторової неоднорідності, де для опису використовуються рівняння, що схожі за математичною структурою з використаними нами нижче, оскільки у роботі розглядається модель в'язкопружного сере-



довища [43], що враховує зсувне плавлення, результатом якого є наявність у мастилі великих пластичних деформацій. Крім того, останнім часом, великий інтерес викликає вивчення двошарових атомних структур (бішарів), оскільки подібні структури часто застосовуються у промислових і технологічних процесах. Так, у роботі [44] була запропонована модель, яка враховує основні фактори, що впливають на поведінку таких систем. Вона якісно описує експериментальні дані, що отримані за допомогою апарату поверхневих сил (SFA – Surface Forces Apparatus). У роботі [45] запропонована проста модель зсувного плавлення, яка може використовуватися для опису систем різних типів. Свій подальший розвиток зазначена робота отримала у [46], де при чисельному аналізі основних рівнянь досліджується відносний рух пари взаємодіючих атомарних шарів, а також розглядається введення адитивного шуму, однак, він введений насамперед для того, щоб система при будь-яких початкових умовах приходила до стаціонарного стану, і нічого не говориться про те, що шум може критичним чином впливати на характер поведінки системи.

Ряд питань, що стосуються інтенсивної пластичної деформації, на сьогодні не вирішений, а методи дослідження в основному зводяться до узагальнення експериментальних даних. Наприклад, теоретично не було передбачено можливість утворення декількох граничних структур. Не описано експериментально спостережуване формування фрактальних структур, температурні аспекти проблеми, вплив флуктуацій основних параметрів тощо. Теорія фрагментації дислокаційних структур Г.О. Малигіна, яка описує формування висококутових меж зерен при великих пластичних деформаціях, базується на механізмі деформації, в основу якого покладені уявлення про самоорганізацію дислокацій [63, 64]. Це декілька порушує ієрархічну послідовність подій, оскільки було б логічніше представити формування меж зерен в результаті самоорганізації комірчастих структур, а не елементарних дислокацій. Теорія диспергування матеріалу в процесі ІПД В.І. Копилова, В.М. Чувільдеєва базується на конкретному механізмі деформації, в основу якого покладені уяв-

лення про міжграничне прослизання і аномально високу дифузію по межах зерен [65, 66]. Крім того, в основу теорії покладені уявлення про вільний об'єм, запозичені з теорії аморфних матеріалів. У той самий час, експериментальними роботами В.О. Хоніка поставлено під серйозний сумнів той факт, що вільний об'єм можна використовувати як визначальний термодинамічний параметр для опису аморфних сплавів, принаймні, в тому класичному трактуванні, яке прийняте в переважній більшості робіт. Існує інженерна теорія Бейгельзімера Я.Ю. [69], яка виходить з простих механічних уявлень про процес деформації. Система кінетичних рівнянь конструюється на підставі узагальнення експериментальних результатів і закономірностей. В рамках цієї теорії, не удається пояснити багато важливих особливостей процесу ІПД, і, зокрема, вона не може описати формування “граничної” структури металів – мінімального середнього розміру зерна. Щоб описати фрагментацію зерен в теорію “руками” вводиться деякий притягувальний аттрактор, що примушує систему прямувати до стану з потрібним (заданим) розміром зерна. Нами було висунуто і розвинуто новий підхід нерівноважної еволюційної термодинаміки [70–76], який базується на комбінації техніки фазових перетворень Ландау у наближенні середнього поля, й положень класичної нерівноважної термодинаміки. За допомогою цього підходу вдалося попередньо описати еволюцію дефектів, а також отримати закони зміцнення металів в процесі ІПД, де в рамках єдиної кривої відображені закони Холла-Петча та лінійний закон зміцнення. Але вплив адитивних шумів на процес фрагментації ще не було системно досліджено.

Деякі дослідники широко розвивали ідею формування плівки води на поверхні льоду, тому що розуміння умов її утворення необхідно для практичного застосування. Ми стверджуємо, що поверхня льоду розм'якшується при терті в результаті спонтанної появи деформації зсуву, яка викликана зовнішнім надкритичним нагріванням [78, 80–82, 93]. Це перетворення описується рівнянням Кельвіна-Фойгта для в'язкопружного середовища, релаксацій-

ними рівняннями типу Ландау-Халатнікова для зсувних напружень і теплопровідності. Дослідження показують, що вищезгадані рівняння формально збігаються із синергетичною системою Лоренца [83, 84, 106], де параметр порядку зводиться до деформації зсуву, напруження діє як спряжене поле й температура відіграє роль керувального параметра. У найпростіших випадках зв'язок між напруженням й деформацією добре описується моделлю Кельвіна-Фойгта [85]. Вплив температури викликаний критичним збільшенням модулю зсуву при зменшенні температури: модуль рівний у воді нулю, і має ненульове значення для льоду.

У розділі 1, у випадку реалізації фазового переходу першого роду, що приводить до встановлення переривчастого режиму руху [54, 58], проведено узагальнення теорії [16, 27] та досліджується специфічна ситуація тертя атомарно-гладких поверхонь, яка широко вивчається експериментально [3, 4, 11, 40]. Представлений розділ розвинений з метою теоретичного вивчення особливостей режиму межового мастила при взаємному терті поверхонь, що мають нанорозмірні нерівності. Оскільки у технічних застосуваннях поверхні тертя практично завжди володіють нерівностями і неоднорідностями, запропонований підхід дозволяє розширити результати попередніх робіт [54, 58] на більш широкий клас реальних трибологічних систем.

У розділі 2 розвивається підхід нерівноважної еволюційної термодинаміки, що дозволяє якісно описати процес подрібнення кристалічної структури металу чи сплаву при ІПД. В якості основних дефектів розглядаються щільності меж зерен, дислокацій та ентропійна складова. В рамках адіабатичного наближення визначаються основні співвідношення, що дозволяють визначити формування стаціонарних субмікроструктур або нанокристалічних структур в залежності від ступеня механічного впливу при ІПД. Будується фазова діаграма режимів фрагментації металу або сплаву при ІПД. Використовуючи метод фазової площини, досліджуються фазові портрети динаміки системи та визначаються критичні умови для керуючих параметрів, що дозволяють

класифікувати тип і стійкість отриманих стаціонарних структур. Також враховується вплив адитивних шумів на характер поведінки системи. Окрім того, визначаються умови, при яких існує суміш зерен різного розміру. Будується фазова діаграма, де інтенсивність шуму температури і пружної компоненти деформації визначають області реалізації різних типів граничних структур.

Дослідження впливу адитивних некорельованих шумів теплового й деформаційного полів на розм'якшення поверхні льоду при терті представлено у розділі 3. Побудовано фазову діаграму з областями льоду, розм'якшеного льоду й неоднорідної поверхні льоду. Таким чином, розглянуті флуктуації приводять до складного переходу. Збільшення шуму температури плівки може зменшувати або збільшувати силу тертя залежно від початкових умов, збільшення шуму напруження викликає зростання області зм'якшення. Область тертя льоду обмежена порівняно низькими значеннями температури поверхонь тертя та інтенсивностей флуктуацій напружень і температури на поверхні льоду. З ростом інтенсивності шуму напружень відбувається плавлення плівки льоду навіть при низьких температурах поверхонь тертя. Таким чином, у штучно створеному середовищі представляється можливим впливати на поведінку під час тертя. Визначаються і порівнюються з експериментально отриманими часові ряди сили тертя для всіх режимів.

# 1 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВО-НЕОДНОРІДНИХ ЯВИЩ В РЕЖИМІ МЕЖОВОГО ТЕРТЯ

1.1 Просторова неоднорідність основних параметрів синергетичної моделі межового тертя

1.1.1 Формулювання моделі

Розглянемо дві гладкі поверхні, розділені шаром мастила товщиною  $h$ . Причому верхня рухається зі швидкістю  $V = V_0$ , а нижня спочиває ( $V = 0$ ). У такому разі для звичайних ньютонівських рідин у режимі гідродинамічного тертя виконується добре відомий закон Ньютона:

$$F = \eta A \frac{dV}{dy}, \quad (1.1)$$

де  $F$  – сила в'язкого тертя, за рахунок якої мастило з часом розігрівається і стає більш рідким,  $\eta$  – зсувна в'язкість мастила,  $A$  – площа контакту поверхонь через мастило,  $y$  – поперечна координата. Розглянемо випадок, у якому сили взаємодії молекул мастила з поверхнями тертя більші, ніж сили взаємодії молекул мастила одна з одною. Наприклад, така ситуація експериментально досліджується у роботі при розгляді межового тертя [6], де показано, що верхній та нижній мастильний шар адсорбуються на поверхнях тертя і рухаються з ними як єдине ціле. При цьому верхній шар мастильного матеріалу рухається зі швидкістю  $V_0$ , а нижній спочиває. У зазначеному випадку поле швидкостей приймає вигляд [59]

$$V = V_0 \frac{y}{h}, \quad (1.2)$$

де швидкість  $V$  лінійно зростає від нуля у нижньої нерухомої поверхні до максимального значення  $V_0$  у верхній. Проте ми розглядаємо більш складний випадок, коли мастило має неньютонівську в'язкість, тобто коефіцієнт  $\eta$  в (1.1) залежить як від температури  $T$ , так і від градієнта швидкості  $dV/dy$  [57]. У нашому випадку за рахунок тонкості мастильного шару градієнт швидкості може

бути записаний як [41]

$$\dot{\varepsilon} = \frac{V_0}{h}, \quad (1.3)$$

де  $\dot{\varepsilon}$  — швидкість деформації (див. рівняння (1.6) — (1.8)). Таким чином, ми приходимо до залежності

$$\eta = \eta(T, \dot{\varepsilon}). \quad (1.4)$$

Згідно з записаними далі основними рівняннями (1.6) — (1.8), це означає, що в'язкість мастила змінюється з часом так само, як і всі інші параметри. Тому введення до розгляду градієнтних доданків дозволяє вивчити часову еволюцію основних параметрів мастила по її товщині, що завжди має місце, у будь-якому експерименті. Однак зважаючи на ультратонкість мастильного шару на сьогоднішній день експериментально вимірюються лише його загальні усереднені характеристики [1]: в'язкість, в'язкі і пружні напруження, температури плавлення і затвердіння і т. д. Процеси, що відбуваються по товщині мастила у даний час вивчаються в основному за допомогою методів молекулярної динаміки [60, 61]. Наприклад, у [61] досліджується система, що складається з двох блоків товщиною 2 нм, між якими розміщене полімерне мастило завтовшки 3 нм. Подібні моделі дозволяють з'ясувати залежності динамічних параметрів мастильного матеріалу по товщині розглянутої системи. Оскільки за рахунок ультратонкості мастила прямі вимірювання розподілів параметрів по її товщині ускладнені, такі роботи є передбачуваними і несуть високе фундаментальне значення. У роботі [14] вивчається просторово неоднорідна система, але в рамках аналітичної моделі. Крім того, побудовані фазові діаграми та вивчено вплив товщини мастила на поведінку системи, а також на особливості встановлення переривчастого режиму руху. У [62] вивчається розподіл напружень по товщині мастильного шару при зсуві верхньої і нижньої поверхонь у протилежні сторони і показано, що напруження у нижній і верхній частинах системи мають різний знак. Такий же результат показує і наша робота. У роботі [62] в ході комп'ютерного експерименту можна виділити три етапи.

Спершу на нижню поверхню тертя наносився мастильний шар молекулярної товщини і очікувався час, за який встановлювався стаціонарний стан. Потім до верхньої та нижньої поверхонь тертя прикладалася сила, за рахунок якої вони починали контактувати через мастило. І на завершальній стадії здійснювався зсув поверхонь у взаємно протилежних напрямках, і одночасно вимірювалися динамічні параметри мастила, у тому числі і по її товщині. У роботі досліджено вплив на систему зовнішнього навантаження, швидкості відносного зсуву поверхонь, типу мастила, вивчена залежність кута повороту полімерних молекул від параметрів навантаження і т. д. У роботі [62] отримано переривчастий режим руху, який є однією з основних причин руйнування деталей у наномеханізмах. Показано, що під час реалізації переривчастого руху з часом змінюється товщина мастила, оскільки вона зазнає фазові переходи між кінетичними режимами тертя.

У запропонованому нами підході просторовим розподілом володіють не тільки напруження, які пропорційні відносній швидкості зсуву згідно до формули [41, 43]<sup>1</sup>

$$V = \sigma_v \frac{h}{\eta_{eff}}, \quad (1.5)$$

але і температура  $T$  і деформація  $\varepsilon$ , оскільки при зміні градієнта швидкості по товщині мастила (неньютонівська поведінка) буде змінюватися рівень дисипації механічної енергії, що приведе до нерівномірного розподілу температури, тобто по товщині мастило в одному місці може бути розплавленим, а в іншому – можуть проявлятися властивості твердого тіла. Молекулярно-динамічні моделі показують саме таку поведінку, наприклад коли виділений атомарний мастильний шар переміщується між сусідніми шарами без розупорядкування [6]. У так званих *stop-start* експериментах [94] характер неоднорідного розподілу температури по товщині мастила критичним чином впливає на поведінку системи, оскільки “більш нагріті” шари здатні залишатися рідиноподібними при

<sup>1</sup> Тут  $\eta_{eff}$  – ефективна в'язкість, яка для ультратонких шарів сильно відрізняється від в'язкості об'ємних мастил, що складаються з тих же речовин, тому для конкретної системи  $\eta_{eff}$  може бути знайдена тільки експериментально [57]. Величина  $\sigma_v$  у (1.5) – це в'язка компонента напружень.

затвердінні основного об'єму мастила, забезпечуючи більш тривалий режим ковзання. Оскільки ефективна в'язкість  $\eta_{eff}$  залежить від природи мастильного матеріалу, а також від типу використовуваних поверхонь, експерименти з різними мастилами можуть показувати абсолютно різну поведінку. Урахування неоднорідного розподілу температури по товщині мастильного матеріалу може частково описати ті або інші спостережувані особливості.

У роботі [43] досліджується синергетична модель межового тертя, побудована на основі трьох самоузгоджених диференціальних рівнянь для зсувної компоненти тензора напружень  $\sigma$ , що виникають у мастильному шарі, зсувної компоненти відносних деформацій  $\varepsilon$ , а також температури мастила  $T$ . Досліджується загальний просторово-неоднорідний випадок, опис якого стає можливим при модифікації вихідної системи рівнянь [43] за допомогою урахування відповідних градієнтних вкладів [42]:

$$\dot{\sigma} = D_{\sigma} \nabla^2 \sigma - \sigma + g\varepsilon, \quad (1.6)$$

$$\tau \dot{\varepsilon} = D_{\varepsilon} \nabla^2 \varepsilon - \varepsilon + (T - 1)\sigma, \quad (1.7)$$

$$\delta \dot{T} = D_T \nabla^2 T + (T_e - T) - \sigma\varepsilon + \sigma^2, \quad (1.8)$$

де величина  $T_e$  є температурою поверхонь тертя [43]. Тут також введені константа  $g < 1$ , яка чисельно дорівнює відношенню модуля зсуву мастила  $G$  до його характерного значення  $G_0$ , та параметри

$$\tau = \frac{\tau_{\varepsilon}}{\tau_{\sigma}}, \quad \delta = \frac{\tau_T}{\tau_{\sigma}}, \quad (1.9)$$

де  $\tau_{\sigma}$ ,  $\tau_{\varepsilon}$ ,  $\tau_T$  — часи релаксації напружень, деформації та температури.

У роботах [27, 43] показано, що нульові стаціонарні напруження  $\sigma_0$  відповідають твердоподібній структурі мастильного матеріалу, а при  $\sigma_0 \neq 0$  мастило плавиться з переходом до рідиноподібного стану. Однією з причин цього є те, що згідно до узагальненої для межового режиму діаграми Герсі-Штрибека [41, 43], із збільшенням в'язких напружень  $\sigma_v$  зростає відносна



швидкість зсуву поверхонь тертя  $V$  (1.5). Оскільки напруження  $\sigma$  представляють суму в'язкої та пружної компонент [43], а у шарі рідиноподібного мастила переважають в'язкі напруження, із зростанням  $\sigma$  зростає швидкість руху зсувних поверхонь, що відповідає кінетичному режиму ковзання і рідиноподібній структурі мастила. При значенні  $\sigma = 0$  поверхні тертя не рухаються, що відповідає їх "прилипанню" за рахунок затвердіння міжповерхневого мастильного шару. Представлені висновки підтверджуються як теоретично [27], так і експериментально [94].

### 1.1.2 Моделювання просторової неоднорідності основних параметрів

Нехай поверхні тертя атомарно-гладкі і не мають дефектів. Такі поверхні часто отримують відколом слюди вздовж атомарної площини [1]. Нехай мастило однорідне і складається з неполярних квазісферичних молекул (наприклад, молекул октаметилциклотетрасилоксана  $C_8H_{24}O_4Si_4$  [1]), які здатні утворювати твердоподібні упорядковані структури, що характеризуються наявністю далекого порядку чергування молекул. У цьому випадку уздовж площини поверхонь мастило можна вважати однорідним. У зв'язку з цим, далі розглядається неоднорідність тільки по товщині мастильного матеріалу (координата  $y$ ). Тому співвідношення (1.6) – (1.8) являють собою одновимірні диференціальні параболічні рівняння в частинних похідних. Їх можна легко розв'язати чисельно за допомогою застосування явної двошарової різницевої схеми [95]. При цьому вся, зацікавлена нами, просторово-часова область розбивається сіткою. Розрахунок проводиться від початкового моменту часу  $t = 0$  до  $t = t_N$ , а координата при цьому  $y \in [0, y_M]$ . Необхідні для розв'язання початкові і граничні умови слід вибирати з фізичного представлення завдання.

Індексом  $i$  будемо позначати координатні шари, а індексом  $j$  – часові. Тоді при використанні явної різницевої схеми координатні похідні апроксимуються наступним чином (для деформації  $\varepsilon$  і температури  $T$  аналогічно):

$$\nabla^2 \sigma \equiv \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = \frac{\sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j}{H^2}, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\sigma_i^{j+1} - \sigma_i^j}{\Delta}, \quad (1.11)$$

де  $\Delta = t_N/N$  – крок за часом,  $H = y_M/M$  – крок по координаті (відстань між вузлами сітки по вертикалі і горизонталі).

Остаточні розрахункові співвідношення приймають вигляд:

$$\sigma_i^{j+1} = \sigma_i^j + \frac{\Delta}{H^2} \left[ D_\sigma \left( \sigma_{i+1}^j - 2\sigma_i^j + \sigma_{i-1}^j \right) + H^2 \left( -\sigma_i^j + g\varepsilon_i^j \right) \right], \quad (1.12)$$

$$\varepsilon_i^{j+1} = \varepsilon_i^j + \frac{\Delta}{\tau H^2} \left[ D_\varepsilon \left( \varepsilon_{i+1}^j - 2\varepsilon_i^j + \varepsilon_{i-1}^j \right) + H^2 \left( -\varepsilon_i^j + \sigma_i^j T_i^j - \sigma_i^j \right) \right], \quad (1.13)$$

$$T_i^{j+1} = T_i^j + \frac{\Delta}{\delta H^2} \left[ D_T \left( T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j \right) + H^2 \left( T_e - T_i^j - \sigma_i^j \varepsilon_i^j + (\sigma_i^j)^2 \right) \right]. \quad (1.14)$$

Система рівнянь (1.12) – (1.14) має  $3N(M-1)$  рівнянь і дозволяє визначити  $\sigma_i^{j+1}$ ,  $\varepsilon_i^{j+1}$  та  $T_i^{j+1}$ , знаючи набір значень на попередньому часовому шарі  $\sigma_i^j$ ,  $\varepsilon_i^j$  и  $T_i^j$ . У додаток до (1.12) – (1.14) необхідний набір початкових умов у момент часу  $t = 0$ , які дають  $3(M+1)$  рівнянь, а також граничні умови, що дають  $6N$  рівнянь. Таким чином, загальна кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих  $3(M+1)(N+1)$ .

При русі поверхонь тертя відповідно до рівнянь (1.6) – (1.8) в однорідному випадку ( $\nabla^2 \equiv 0$ ) встановлюються стаціонарні значення напружень  $\sigma_0$ , деформації  $\varepsilon_0$  та температури  $T_0$  [43]:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{gT_e - (g+1)}{1-g}}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{g}, \quad T_0 = T_e. \quad (1.15)$$

Розглянемо два найбільш поширені випадки. У першому з них верхня

поверхня також рухається зі швидкістю  $V$ , а нижня з такою ж швидкістю рухається в протилежному напрямку. При цьому напруження, деформація і температура у верхній поверхні будуть рівні  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  і  $T_0$  відповідно. Значення температури біля межі нижньої поверхні також буде дорівнює  $T_0$ , оскільки згідно (1.15)  $T_0 = T_e$ , а  $T_e$  є температурою поверхонь тертя, яка є термостатом (зовнішнім середовищем) [43], тобто їх температура у процесі передачі тепла від мастила, що розігріте за рахунок виконаної роботи, не змінюється. З огляду симетрії розглянутої задачі напруження і деформація поблизу нижньої поверхні будуть рівні  $-\sigma_0$  і  $-\varepsilon_0$  відповідно. Тому виберемо початкові умови параметрів за товщиною мастила згідно до співвідношення

$$\sigma_i^0 = -\sigma_0 + \frac{2i\sigma_0}{M}, \quad \varepsilon_i^0 = -\varepsilon_0 + \frac{2i\varepsilon_0}{M}, \quad T_i^0 = T_0, \quad i = 0, 1, \dots, M. \quad (1.16)$$

Граничні умови запишуться наступним чином<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_0^j &= -\sigma_0, & \sigma_M^j &= \sigma_0, & \varepsilon_0^j &= -\varepsilon_0, & \varepsilon_M^j &= \varepsilon_0, \\ T_0^j &= T_M^j = T_0, & j &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.17)$$

У випадку, коли нижня поверхня жорстко закріплена і не рухається, а з фіксованою швидкістю рухається тільки верхня, напруження, деформація і температура у верхній поверхні будуть також дорівнювати  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  та  $T_0$ , а поблизу нижньої буде виконуватися рівність  $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$ , оскільки за рахунок взаємодії атомів поверхні з атомами мастильного матеріалу нижній шар “прилипає” до поверхні [6]. Температура мастила у нижньої межі вибирається, як і раніше, рівною  $T_0$ . У цьому випадку початкові умови можна представити у вигляді

$$\sigma_i^0 = \frac{i\sigma_0}{M}, \quad \varepsilon_i^0 = \frac{i\varepsilon_0}{M}, \quad T_i^0 = T_0, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (1.18)$$

<sup>2</sup>У (1.17) індекс  $j$  змінюється від 1, оскільки співвідношення (1.16) і так вже задають граничні умови на нульовому часовому шарі при  $j = 0$ . Легко перекопати у тому, що якщо в (1.17)  $j$  відраховувати від нуля, то помилки не буде, оскільки у цьому випадку співвідношення (1.16) і (1.17) продублюють на нульовому часовому шарі одні і ті ж значення.

а граничні

$$\begin{aligned}\sigma_0^j &= 0, & \sigma_M^j &= \sigma_0, & \varepsilon_0^j &= 0, & \varepsilon_M^j &= \varepsilon_0, \\ T_0^j &= T_M^j = T_0, & j &= 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (1.19)$$

Виміряємо координату  $y$  в одиницях товщини мастила  $h$ , тоді рівню нижньої поверхні відповідає значення  $y_0 = 0$ , а у верхньої  $y_M = 1$ .

Тепер система рівнянь є замкнутою і може бути розв'язана чисельно.

Виберемо для розв'язання крок часової сітки  $\Delta = 10^{-6}$ , а крок по координаті  $H = 0.01$ . Таким чином, координата ділиться на  $M = 100$  частин. На рис. 1.1 і рис. 1.2 показано результати розв'язання зазначених рівнянь. Причому рис. 1.1 відповідає зсуву поверхонь тертя у протилежних напрямках (використовуються початкові умови (1.16) і граничні (1.17)), а рис. 1.2 відповідає ситуації, коли зсувається тільки верхня поверхня тертя, а нижня спочиває (відповідно початкові умови (1.18) і граничні (1.19)). На обох рисунках приведена часова еволюція просторових розподілів напружень  $\sigma$ , деформацій  $\varepsilon$ , а також температури мастила  $T$ . Криві наведені для 4-х послідовних моментів часу. Штрихові прямі на рис. 1.1 і рис. 1.2 представляють початкові умови, тобто описують просторові розподіли величин у момент часу  $t = 0$ . Тому чим далі від штрихової лінії знаходиться крива на рисунку, тим більш пізнішому моменту часу вона відповідає. Криві на обох рисунках відповідають часам на 2000 часовому шарі, 10000, 80000 і 1000000. При урахуванні кроку інтегрування за часом  $\Delta = 10^{-6}$  дає значення  $t = 0.002, 0.01, 0.08, 1.0$ . Остання крива, отримана для моменту часу  $t = 1.0$ , на обох рисунках з подальшим плином часу не змінює вигляд, тобто представляє сталі стаціонарні значення розподілів відповідних величин по товщині мастила.

Як видно із рис. 1.1, рис. 1.2, і вставок на них, напруження з плином часу змінюється повільніше, ніж деформація і температура. Це пов'язано з тим, що час релаксації напружень вибрано у 10 разів більшим, ніж часи релаксації

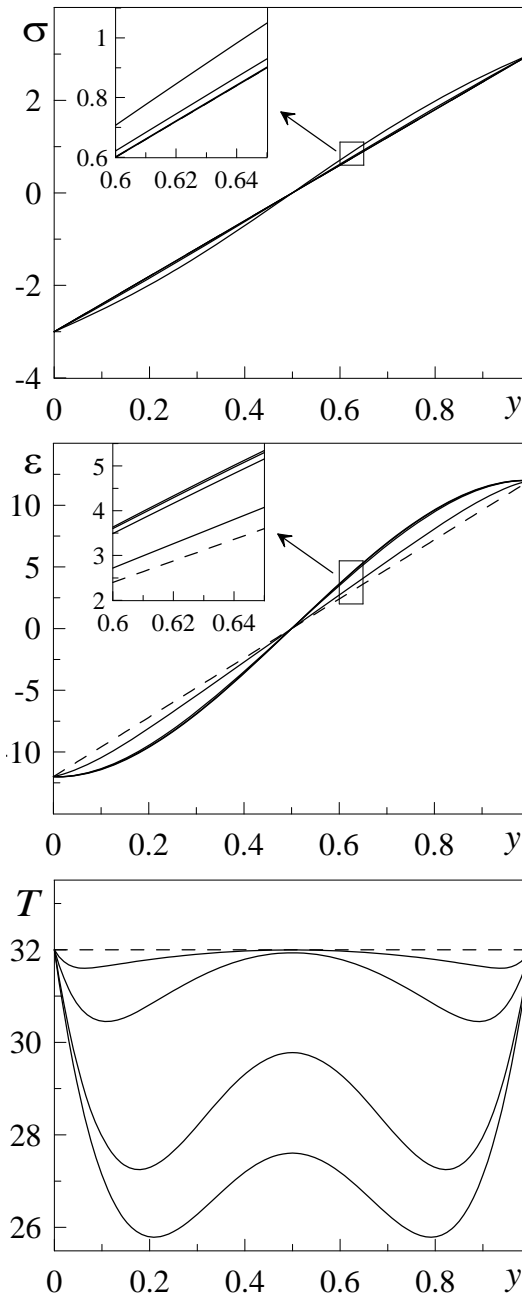


Рисунок 1.1 – Профілі напружень  $\sigma$ , деформацій  $\varepsilon$  та температури  $T$ , отримані у результаті чисельного розв’язку рівнянь (1.12)–(1.14) з параметрами  $g = 0.25$ ,  $T_e = 32$ ,  $\tau = \delta = 0.1$ ,  $D_\varepsilon = 0.45$ ,  $D_\sigma = D_T = 0.05$  при початкових і граничних умовах (1.16) і (1.17). Штриховою лінією показано початкові умови (1.16). Рисунок відповідає зсуву поверхонь тертя з однаковими швидкостями у протилежних напрямках.

двох інших параметрів. У цьому випадку виконується синергетичний принцип підпорядкування, коли зміни деформації  $\varepsilon$  і температури  $T$  слідують за зміною напруження (параметр порядку).<sup>3</sup>

Зазначимо, що на рис. 1.1 криві, симетричні відносно серединного ша-

<sup>3</sup>У такому випадку часто використовується адіабатичне наближення  $\tau\dot{\varepsilon}, \delta\dot{T} \approx 0$ , яке дозволяє записати рівняння Ландау-Халатнікова, і при його інтегруванні знайти явний вигляд синергетичного потенціалу, що є аналогом вільної енергії у термодинаміці, або потенційної енергії у механіці [96].

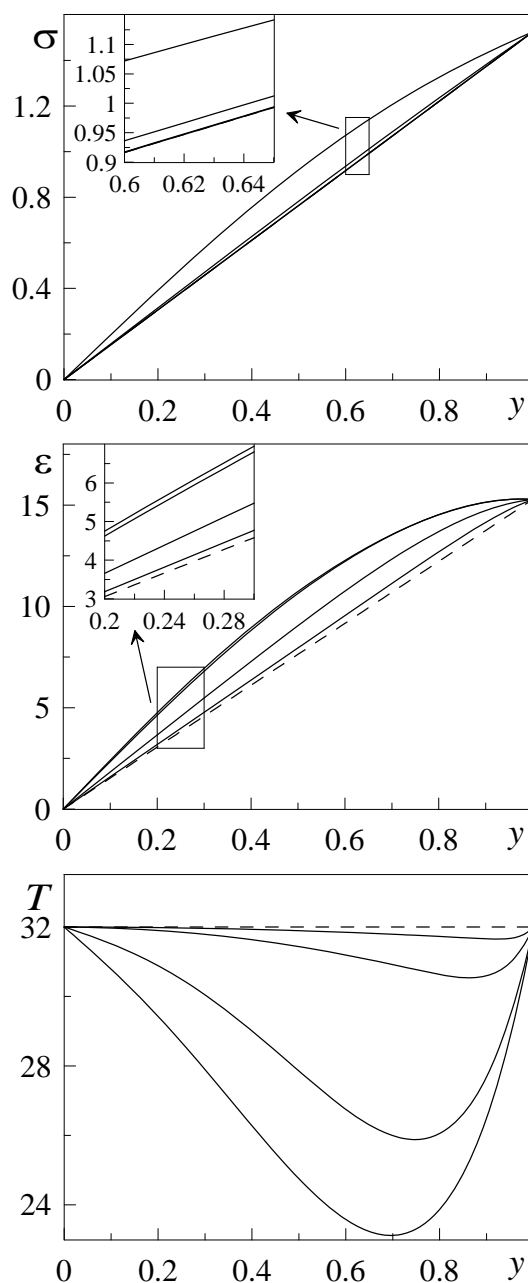


Рисунок 1.2 – Профілі напружень  $\sigma$ , деформацій  $\varepsilon$  та температури  $T$ , отримані у результаті чисельного розв’язку рівнянь (1.12) – (1.14) з параметрами рис. 1.1 і  $g = 0.1$ , при початкових і граничних умовах (1.18) і (1.19). Штриховою лінією показано початкові умови (1.18). Рисунок відповідає ситуації, коли нижня поверхня спочиває, а верхня зсувається з фіксованою швидкістю.

ру мастила, в області якого напруження і деформації дорівнюють нулю. Це відбувається за рахунок того, що поверхні, які труться, рухаються в протилежних напрямках з однаковими швидкостями. При цьому, згідно залежності  $T(y)$ , якщо рухатися від центру мастильного шару у напрямку до будь-якої з поверхонь (в перпендикулярному до них напрямі), температура  $T$  спочатку зменшується, а потім знову починає збільшуватися, доки у поверхонь не прий-

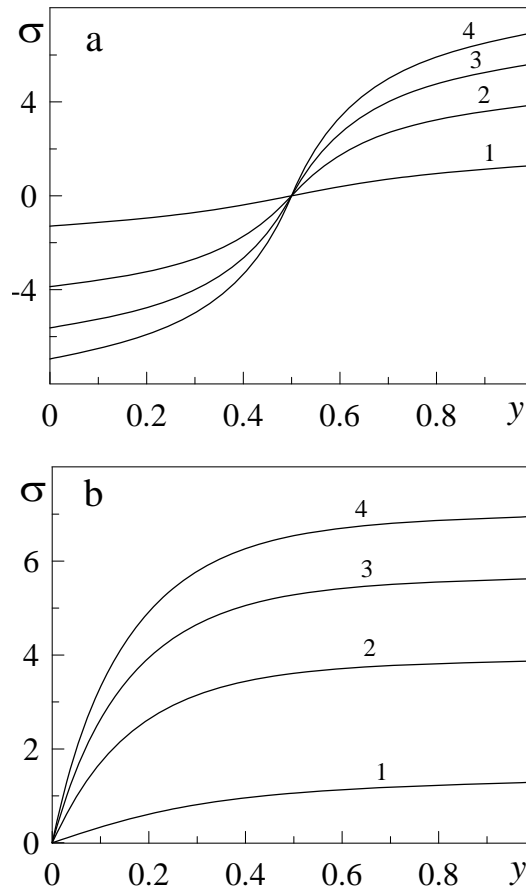


Рисунок 1.3 – Стационарні профілі напружень  $\sigma(y)$ , отримані при параметрах рис. 1.1 та  $D_\varepsilon = D_T = 0$ ,  $D_\sigma = 0.05$ . Криві 1 – 4 відповідають температурам  $T_e = 10, 50, 100, 150$  відповідно; а) початкові і граничні умови (1.16) та (1.17), зсув поверхонь з однаковими швидкостями у протилежних напрямках; б) початкові і граничні умови (1.18) та (1.19), нижня поверхня спочиває, а верхня зсувається з фіксованою швидкістю.

ме значення  $T_e$ . Залежності на рис. 1.2 фактично повторюють праву частину залежностей, представлених на рис. 1.1 при  $y > 0.5$ , тобто розподіли, які спостерігаються на рис. 1.1 вище центру системи. Це цілком зрозуміло, оскільки у випадку, який представлений на рис. 1.2, нижня поверхня спочиває, і біля неї реалізуються значення  $\sigma = \varepsilon = 0$ , так само як і в серединному шарі мастила на рис. 1.1. Рис. 1.1 і 1.2 при різному наборі параметрів  $D_\sigma$ ,  $D_\varepsilon$  і  $D_T$  можуть показувати різну поведінку. Це зокрема означає, що вигляд кривої навантаження  $\sigma(\varepsilon)$  [97] змінюється по товщині мастильного матеріалу, тобто мастило по товщині може показувати як режим пластичного течії (ковзання), так і гуківську ділянку залежності  $\sigma(\varepsilon)$ . Під час експерименту зазвичай вимірюються усереднені характеристики, що як правило не дозволяють провести такий аналіз [1].

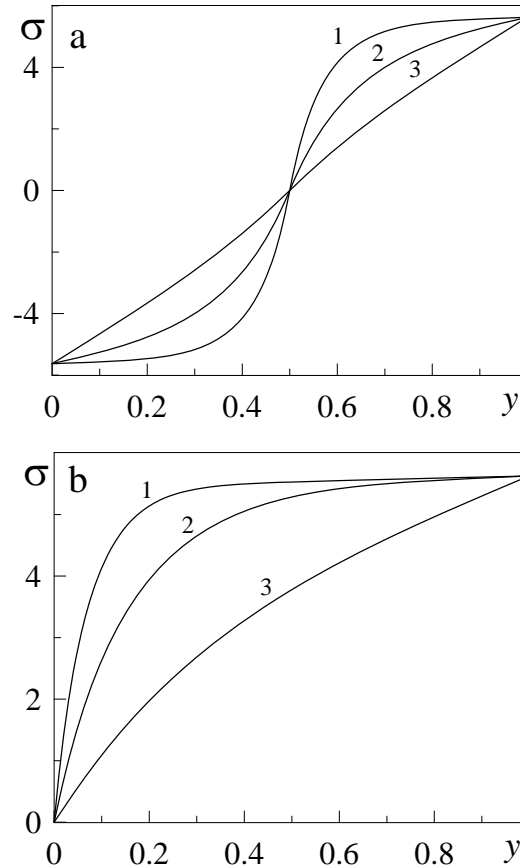


Рисунок 1.4 – Стационарні профілі напружень  $\sigma(y)$ , отримані при параметрах рис. 1.1 та  $D_\varepsilon = D_T = 0$ ,  $T_e = 100$ . Криві 1–3 відповідають величинам  $D_\sigma = 0.01, 0.05, 0.5$  відповідно; а) початкові і граничні умови (1.16) та (1.17), зсув поверхонь з однаковими швидкостями в протилежних напрямках; б) початкові і граничні умови (1.18) та (1.19), нижня поверхня спочиває, а верхня зсувається з фіксованою швидкістю.

Рисунки 1.1 і 1.2 показують часову еволюцію основних параметрів. Значимо, що в залежності від початкових умов характер еволюції може бути дуже різним, але при фіксованих параметрах у результаті установлюються стаціонарні розподіли величин  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $T$  за товщиною мастильного матеріалу. У результаті саме вони і визначають режим тертя. На рис. 1.3 наведено стаціонарні розподіли напружень за товщиною мастила при різних температурах поверхонь  $T_e$ . Рисунок демонструє той факт, що зі зростанням температури зростає відносна швидкість руху поверхонь, оскільки в'язкість мастила зменшується і вона стає більш рідкою (згідно (1.5) напруження визначають відносну швидкість поверхонь  $V$ ). Також з рисунка слідує, що чим нижче температура  $T_e$ , тим більша товщина прилеглої до верхньої зсувної поверхні мастила



має однакову швидкість. Це відбувається за рахунок того, що із зменшенням температури  $T_e$  збільшується в'язкість мастильного матеріалу, за рахунок чого також зменшується швидкість зсуву поверхонь  $V$ .

На рис. 1.4 показано вплив на режим тертя коефіцієнта  $D_\sigma$  при  $D_\varepsilon = D_T = 0$ . У цьому випадку встановлюються такі ж залежності, як і на попередніх рисунках. Однак варто відзначити, що при збільшенні  $D_\sigma$  (крива 3) розподіл напружень за товщиною знаходиться поруч з прямою лінією, що відповідає початковим умовам. Тобто із збільшенням коефіцієнта  $D_\sigma$  мастило набуває ньютонівських властивостей, оскільки реалізується залежність  $V(y)$ , що наближається зі зростанням  $D_\sigma$  до вигляду (1.2). На рис. 1.4 добре видно, що при зменшенні коефіцієнта  $D_\sigma$  в'язкість стає неньютонівською і верхній шар мастила твердне, оскільки зі збільшенням  $D_\sigma$  зростає товщина поверхневого шару, який рухається зі швидкістю, рівною швидкості верхній поверхні  $V_0$ . Таким чином, варіація  $D_\sigma$  дозволяє враховувати тип мастила, змінюючи її в'язкісні характеристики.

## 1.2 Межове плавлення мастила між двома шорсткими поверхнями

### 1.2.1 Вільна енергія та фазова діаграма

У одновимірному випадку вираз для щільності вільної енергії мастильного шару між двома твердими поверхнями може бути представлено у вигляді [16, 27, 54, 58]:

$$f = \alpha(T - T_c)\varphi^2 + \frac{a}{2}\varphi^2\varepsilon_{el}^2 - \frac{b}{3}\varphi^3 + \frac{c}{4}\varphi^4, \quad (1.20)$$

де  $T$  – температура мастила,  $T_c$  – критична температура,  $\varepsilon_{el}$  – зсувна компонента пружної деформації,  $\alpha, a, b, c$  – додатні постійні. Параметр порядку  $\varphi$  представляє амплітуду періодичної частини мікроскопічної функції щільності середовища [16, 27]. Таким чином, рідиноподібна фаза мастила харак-

теризується стаціонарним значенням  $\varphi_0 = 0$ , тоді як у твердоподібній фазі встановлюється нульове значення  $\varphi_0 > 0$ . Розкладання (1.20), на відміну від робіт [16,27], відповідає моделі фазового переходу першого роду [39,54,58,98].

Оскільки параметр  $\varphi$  є модуляцією щільності, далі будемо розглядати діапазон  $\varphi \geq 0$ . Аналізуючи вираз (1.20), можна виділити критичні температури плавлення  $T_{c0}$  і затвердіння  $T_c^0$  мастила, причому  $T_{c0} > T_c^0$  на постійну величину, що залежить тільки від констант розкладання [54, 58]:

$$T_{c0} = T_c - \frac{a}{2\alpha}\varepsilon_{el}^2 + \frac{b^2}{8\alpha c}, \quad (1.21)$$

$$T_c^0 = T_c - \frac{a}{2\alpha}\varepsilon_{el}^2. \quad (1.22)$$

У діапазоні температур  $T_c^0 < T < T_{c0}$  на залежності  $\varphi_0(T, \varepsilon_{el})$  реалізується область гістерезису, характерна для фазових переходів першого роду [54, 58]. Відзначимо, що при плавленні параметр порядку стрибкоподібно змінюється від стаціонарного значення  $\varphi_0 = 0.5bc^{-1}$  до нуля, у той час як при затвердінні стаціонарне значення  $\varphi$  зростає від нуля до величини  $\varphi_0 = bc^{-1}$  [54, 58].

При терті поверхонь у мастильному шарі з'являються пружні напруження  $\sigma_{el}$ , які визнаються як похідна від вільної енергії  $f$  (1.20) за деформацією  $\varepsilon_{el}$ :

$$\sigma_{el} = \mu\varepsilon_{el}, \quad (1.23)$$

$$\mu = a\varphi^2, \quad (1.24)$$

де модуль зсуву мастила  $\mu$  підноситься до квадрату параметра порядку з точністю до постійного множника  $a$  [16,27,54,58]. Сила тертя, яка чинить опір руху поверхонь, визначається згідно до формули [29, 54, 58, 99]:

$$F = \left[ \sigma_{el} + k \operatorname{sgn}(V) \left( \frac{|V|}{h} \right)^{\gamma+1} \right] A, \quad (1.25)$$

де  $A$  – площа контакту поверхонь тертя,  $h$  – товщина мастильного шару, а феноменологічні параметри  $k, \gamma$  задають тип мастильного матеріалу [41, 57]. Зо-

крема, значення  $\gamma < 0$  відповідає неньютонівському псевдопластичному мастилу. Другий доданок у дужках у виразі (1.25) являє в'язкі напруження, що існують тільки при русі поверхонь з відносною швидкістю  $V \neq 0$ . У формулі (1.25) сила тертя пропорційна площі контакту  $A$  і не залежить від навантаження на поверхні. Це пов'язано з тим, що розглядаються специфічні умови тертя двох нанорозмірних поверхонь, розділених шаром простого неполярного мастила. Причому між поверхнями при русі підтримується фіксована відстань. У цьому випадку площа реального контакту через мастило близька до площі поверхонь незалежно від прикладеного тиску, що дозволяє використовувати формулу (1.25). При цьому таке поняття, як коефіцієнт тертя, втрачає сенс [100].

У роботах [29, 54, 55, 58] показано, що під час руху поверхонь тертя з відносною швидкістю  $V$  у мастильному шарі виникають стаціонарні пружні деформації

$$\varepsilon_{el}^0 = \frac{V\tau_\varepsilon}{h}, \quad (1.26)$$

де  $\tau_\varepsilon$  – максвелівський час релаксації внутрішніх напружень [27]. При значенні  $\tau_\varepsilon \ll 1$  вираз (1.26) з достатньою точністю може бути використаний для визначення поточного значення деформації  $\varepsilon_{el}$ . З урахуванням (1.26) із виразів для критичних температур (1.21) і (1.22) легко отримати аналогічні вирази для визначення критичних швидкостей [54, 58]:

$$V_{c0} = \frac{h}{\tau_\varepsilon} \sqrt{\frac{2\alpha(T_c - T)}{a} + \frac{b^2}{4ac}}, \quad (1.27)$$

$$V_c^0 = \frac{h}{\tau_\varepsilon} \sqrt{\frac{2\alpha(T_c - T)}{a}}. \quad (1.28)$$

На рис. 1.5 показана фазова діаграма станів мастила. Вона представляє залежність швидкостей  $V_{c0}$  і  $V_c^0$  від температури  $T$ . Вище кривої  $V_{c0}$  мастило рідиноподібне (потенціал  $f(\varphi)$  має єдиний мінімум при  $\varphi = 0$ ) і реалізується режим рідинного тертя  $SF$ . У області  $V < V_c^0$  мастило має твердоподібну струк-

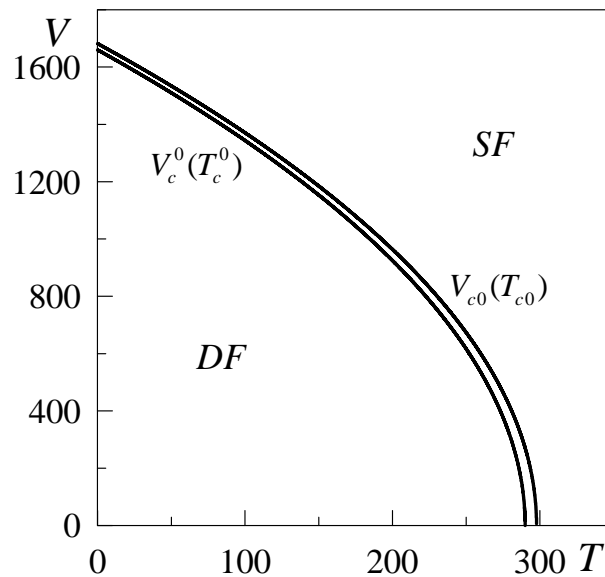


Рисунок 1.5 – Фазова діаграма з областями рідиноподібного ( $SF$ ) та твердоподібного ( $DF$ ) мастила при параметрах  $\alpha = 0.95 \text{ Дж}\cdot\text{К}^{-1}/\text{м}^3$ ,  $T_c = 290 \text{ К}$ ,  $a = 2 \cdot 10^{12} \text{ Па}$ ,  $b = 230 \text{ Дж}/\text{м}^3$ ,  $c = 900 \text{ Дж}/\text{м}^3$ ,  $h = 10^{-9} \text{ м}$ ,  $\tau_\varepsilon = 10^{-8} \text{ с}$ .

туру, що відповідає єдиному мінімуму потенціалу при  $\varphi > 0$ . Між кривими на рисунку потенціал  $f(\varphi)$  у додатній області  $\varphi$  володіє нульовим та ненульовим мінімумами, які розділені максимумом. Таким чином, у цій проміжній області стан мастильного матеріалу залежить від початкових умов. Рисунок 1.5 можна також інтерпретувати як залежності критичних температур  $T_{c0}$  (1.21) і  $T_c^0$  (1.22) від швидкості зсуву  $V$ .

## 1.2.2 Кінетика плавлення мастила

На рис. 1.6 представлена схема типової трибологічної системи [11, 27, 40], поведінка якої в рамках запропонованої моделі досліджувалася нами раніше [58]. Основна відмінність представлених досліджень полягає у тому, що раніше вивчалась поведінка атомарно-гладких поверхонь тертя у той час як дана робота спрямована на вивчення процесів межового тертя поверхонь, що мають рельєф. Система, приведена на рис. 1.6, складається з пружини з

жорсткістю  $K$ , верхнього блоку масою  $M$ , що ковзає по нижній поверхні, відокремленої від нього шаром мастила товщиною  $h$ , яка далі у кожній точці поверхонь має своє конкретне значення, котре змінюється під час руху. Вільний кінець пружини приводиться в рух з фіксованою швидкістю  $V_0$ . При ковзанні блоку по поверхні між ними виникає сила тертя  $F$ , яка визначається згідно з формулою (1.25).

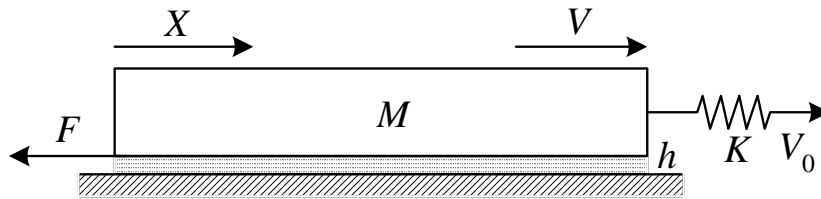


Рисунок 1.6 – Схема трибологічної системи.

Запишемо рівняння руху верхнього блоку з координатою  $X$  у вигляді [11, 27, 58]:

$$M\ddot{X} = K(V_0t - X) - F, \quad (1.29)$$

де вираз у дужках представляє розтягнення пружини  $\Delta X$ , а  $t$  – час руху її вільного кінця. Додатково до (1.29) необхідно записати кінетичне рівняння типу Ландау-Халатнікова [58, 101]:

$$\dot{\varphi} = -\delta \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (1.30)$$

яке в явному вигляді набуває форми

$$\dot{\varphi} = -\delta (2\alpha(T - T_c)\varphi + a\varphi\varepsilon_{el}^2 - b\varphi^2 + c\varphi^3) + \xi(t). \quad (1.31)$$

У (1.31) введено кінетичний коефіцієнт  $\delta$ , а також додатковий стохастичний доданок  $\xi(t)$ , який представляє малі адитивні флуктуації, які необхідно враховувати із-за особливостей подальшого чисельного розрахунку [54, 58]. У найпростішому випадку процес  $\xi(t)$  представляється білим шумом з моментами

$$\langle \xi(t) \rangle = 0; \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = 2D\delta(t - t'), \quad (1.32)$$

де інтенсивність стохастичного джерела  $D$  скрізь приймається рівною  $10^{-25} \text{ с}^{-1}$ .

На рис. 1.7 показаний зовнішній вигляд поверхонь тертя, які згенеровані за допомогою використання відомого пагорбного алгоритму (Hill Algorithm). Зазначений алгоритм являється ітераційним і полягає у наступному. Спершу створюється двовимірний масив розміром  $N \times N$  і заповнюється нульовими значеннями. Значення елемента масиву — це висота  $z$  точки поверхні, індекси елемента — цілочислові координати точки  $(x, y)$ . Таким чином, маємо площину. Потім випадковим чином вибираються координати  $(x_r, y_r)$ , причому вони можуть вибиратися і за межами масиву (поверхні). На цьому ж етапі генерується ще одна випадкова величина — радіус пагорба  $r$ . Діапазон випадкових величин  $r$  істотно впливає на остаточний вигляд поверхні. Далі для всіх елементів масиву (точок поверхні)  $(x, y)$  розраховується значення висот  $z$  згідно до формули

$$z = r^2 - (x - x_r)^2 - (y - y_r)^2. \quad (1.33)$$

У разі  $z(x, y) > 0$  висота  $z$  додається до значення відповідного елемента масиву. Далі знову генерується випадкова точка  $(x_r, y_r)$ , випадковий радіус  $r$ , і описані дії повторюються. Нехай процедура повторюється  $n$  разів. Зазначимо, що величина  $n$  істотно впливає на характер отриманої поверхні. Після закінчення описаної процедури проводиться масштабування висот поверхні  $z$  від 0 до 1, і отримана поверхня “спускається” до нульового рівня. Це легко здійснити, якщо всі висоти  $z(x, y)$  перерахувати згідно до співвідношення

$$z = \frac{z - z_{min}}{z_{max} - z_{min}}, \quad (1.34)$$

де  $z_{min}$ ,  $z_{max}$  — мінімальне та максимальне значення  $z$  у масиві до масштабування. На рис. 1.7 показані отримані таким чином поверхні. Верхня поверхня (ліворуч) у площині  $xy$  має  $200 \times 200$  точок, нижня (праворуч) —  $400 \times 200$ . Випадкова величина радіуса  $r$  для обох поверхонь вибиралася у діапазоні

від 0 до 50. Кількість ітерацій для верхньої поверхні  $n = 1000$ , для нижньої  $n = 2000$ , оскільки її площа є у два рази більшою. Координати  $x_r, y_r$  при генеруванні обох поверхонь вибиралися згідно визначеного діапазону масиву, тобто для верхньої поверхні обидві координати вибиралися у межах від 0 до 199, а для нижньої —  $y \in [0, 199], x \in [0, 399]$ . Після формування таким чином поверхонь кожне значення  $z$  було піднесене до квадрату, що дозволило “притиснути” краї поверхонь до низу, а виступи зробити більш високими, у порівнянні з загальною картиною.

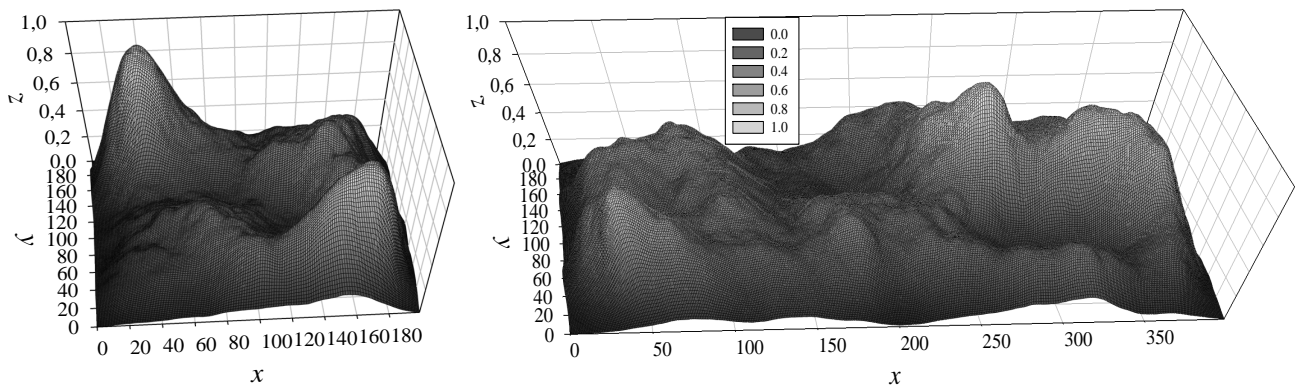


Рисунок 1.7 — Зовнішній вигляд верхньої (ліворуч) та нижньої (праворуч) поверхонь тертя, отриманих за допомогою застосування пагорбного алгоритму (Hill Algorithm).

Після того, як поверхні отримані, їх необхідно підготувати для поставленої задачі. Оскільки верхня поверхня буде ковзати по нижній, всі її точки слід дзеркально відобразити щодо площини  $xy$  вниз, тобто всі елементи масиву верхньої поверхні перераховуються згідно з співвідношенням  $z = 1 - z$ . Далі, щоб уникнути перетину площин (значення висот верхньої і нижньої поверхонь знаходяться в діапазоні від 0 до 1), при кожній фіксованій координаті  $y$  для верхньої поверхні знаходиться мінімальне значення висоти  $z_{min}$ , а для нижньої — максимальне  $z_{max}$  і визначається величина  $\Delta z = z_{min} - z_{max}$ . Таким чином, отримуємо 200 значень  $\Delta z$  для всіх наявних осей  $y$ . З цих значень вибирається мінімальне  $\Delta z_{min}$ , і верхня поверхня згідно до заміни її елементів  $z = z - \Delta z_{min}$  приводиться у дотикання з нижньою під час руху. Тепер поверхні при переміщенні не будуть перекриватися, проте в деяких точках (принаймні в одній) дотикаються. Далі кожен елемент обох масивів поверхонь до-

множується на величину  $l = 10^{-9}$  м, після чого верхня поверхня “піднімається” на 0.5 нм згідно до заміни  $z = z + 0.5 \cdot 10^{-9}$  м. Виберемо лінійний розмір сторін верхньої квадратної поверхні  $L = 1.2 \cdot 10^{-5}$  м, тоді її площа становить  $A = L^2 = 0.144 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>, а відстань між точками по осях  $x$  і  $y$  на обох поверхнях буде дорівнювати

$$S_{x,y} = \frac{L}{200} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м.} \quad (1.35)$$

У результаті маємо дві нанорозмірні поверхні необхідних розмірів з однаковими властивостями.

На рис. 1.8 показано масштабування поверхні у вигляді карти висот, де координати  $x$  і  $y$  є не номерами точок, як на рис. 1.7, а просторові координати у мікрометрах, де за початок відліку взято лівий нижній кут. На малюнку на легенді відтінками сірого виділені значення висот поверхонь у нанометрах. Оскільки при підготовці верхньої поверхні вона була інвертована, виступи на ній тепер відповідають меншим значенням  $z$ . Тому для того, щоб на рис. 1.8 на обох поверхнях виступам відповідали світлі ділянки, значення висот на лівій поверхні збільшуються від світлого до темного, а на правій – навпаки.

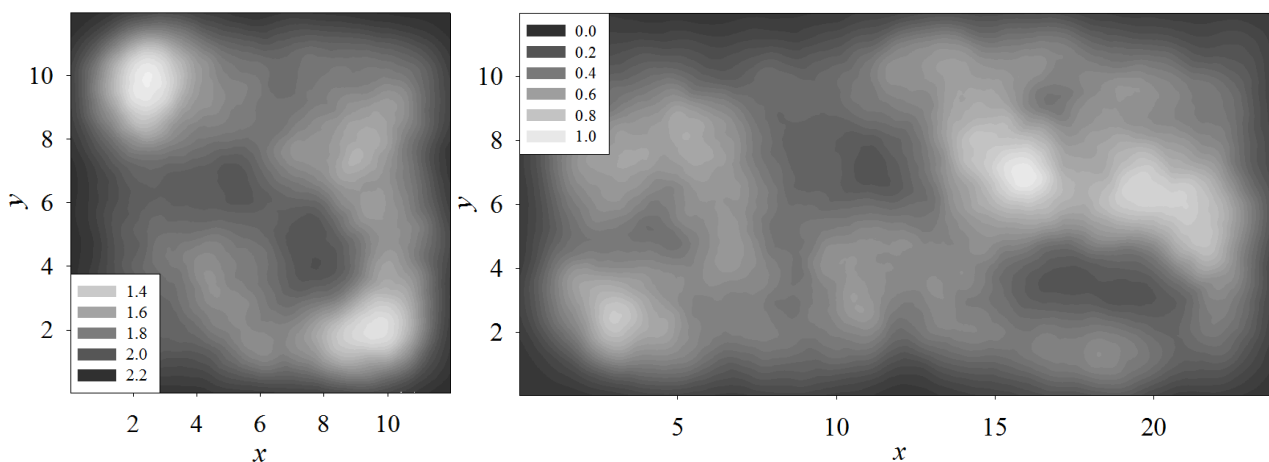


Рисунок 1.8 – Карта висот верхньої (ліворуч) та нижньої (праворуч) поверхонь тертя після масштабування. Координати  $x$  і  $y$  приведені у мкм, висоти на легендах – у нм.

Розглянемо кінетику системи, показаної на рис. 1.6, де в ролі верхньої та нижньої поверхонь тертя виступають поверхні, що показані на рис. 1.8. Для цього необхідно чисельно розв’язувати систему диференціальних рівнянь



(1.29), (1.31) з урахуванням визначень (1.23), (1.24), (1.25), (1.26), (1.32). Оскільки область контакту містить  $200 \times 200 = 40000$  доменів, на кожному кроці чисельного інтегрування для всіх доменів окремо визначаються величини  $h[i][j]$ ,  $\varepsilon_{el}[i][j]$ ,  $\varphi[i][j]$ ,  $\sigma_{el}[i][j]$ ,  $F[i][j]$ , де  $i$  – цілочисловий індекс точки поверхні по осі  $X$ , а  $j$  – індекс, що відповідає осі  $Y$  (обидва індекси змінюються від 0 до 199). При цьому вважаємо, що температура мастила  $T$  постійна для всіх доменів, що відповідає випадку ультратонкого мастила, коли надлишкове тепло, що виникає під час руху у зоні контакту, швидко передається поверхням тертя (термостату або навколишньому середовищу). Зазначимо, що у процесі руху верхньої поверхні величини  $h[i][j]$  будуть змінюватися, оскільки ці висоти являють собою відстань між відповідними точками верхньої та нижньої поверхонь, що труться. Для врахування цього факту вводиться цілочислова змінна

$$s = \text{integer} \left( \frac{X}{S_{x,y}} \right), \quad (1.36)$$

яка описує зсув верхньої поверхні відносно нижньої. Тут  $X$  – координата верхнього поверхні, що треться, на початку руху при  $t = 0$  дорівнює нулю, а  $S_{x,y}$  (1.35) – відстань між точками поверхні по осі  $X$ . Тоді  $h[i][j]$  легко визначити як

$$h[i][j] = \text{top}[i][j] - \text{bottom}[i + s][j], \quad (1.37)$$

де  $\text{top}[200][200]$  – масив, що містить шкалу висот верхньої поверхні,  $\text{bottom}[400][200]$  – масив висот нижньої. З виразу (1.37) видно, що зсув верхньої поверхні проводиться у напрямку осі  $X$ , тому як координати  $Y$  (індекс  $j$ ) для обох поверхонь у процесі руху не змінюються. При чисельному розв'язку рівняння руху (1.29) будемо на кожному часовому кроці для всіх доменів окремо чисельно розв'язувати диференційне рівняння (1.31), визначаючи поточні значення величин параметра порядку  $\varphi[i][j]$ , які залежать від попередніх значень масиву  $\varphi[i][j]$ . На початку руху ( $t = 0$ ) всім елементам масиву  $\varphi[i][j]$  присвоюється значення  $\varphi_0 = 0.5$ , тобто спочатку мастило однорідне у просторі

і знаходиться у твердоподібному стані. Далі, знаючи значення параметра порядку для всіх доменів, внесок у силу тертя від кожного з них розраховується за модифікованою формуло (1.25):

$$F[i][j] = \left[ \sigma_{el}[i][j] + k \operatorname{sgn}(V) \left( \frac{|V|}{h[i][j]} \right)^{\gamma+1} \right] \frac{L^2}{N^2}, \quad (1.38)$$

де  $A = L^2 = 0.144 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2$  – раніше введена площа області контакту,  $N^2$  – загальна кількість доменів. Після розрахунку значень (1.38) діюча сила тертя визначається як сума всіх елементів масиву (всього  $N^2 = 40000$ ) і це значення використовується для розв’язання кінетичного рівняння (1.29). При цьому розраховуються нові значення  $X$ ,  $V$ ,  $\Delta X$ , і процедура повторюється знову. У рівнянні (1.38) швидкість  $V$  не має індексів, оскільки верхня поверхня є абсолютно жорсткою і рухається як єдине ціле.

Для чисельного інтегрування описаних рівнянь використовується ітераційний метод Ейлера [54, 58] з кроком по часу  $\Delta t = 10^{-7}$  с. Ітераційна процедура продовжується до тих пір, доки значення цілочислової змінної зсуву  $s$  (1.36) не стане рівним 200, тобто поки верхня поверхня не дійде до кінця нижньої. При вибраних параметрах для цього потрібно більше ніж  $9 \cdot 10^7$  ітерацій, на кожній ітерації необхідно розраховувати  $N^2 = 40000$  значень масивів  $h[i][j]$ ,  $\varepsilon_{el}[i][j]$ ,  $\varphi[i][j]$ ,  $\sigma_{el}[i][j]$ , і в підсумку  $F[i][j]$ , що суттєво сповільнює чисельний розрахунок, роблячи його нездійсненним на сучасному персональному комп’ютері. Однак, оскільки у рамках запропонованого підходу домени не взаємодіють один з одним, значення масивів на кожному кроці також розраховуються незалежно. Це дозволяє для обчислень значень застосувати розроблену компанією NVIDIA у 2007 році паралельну архітектуру CUDA [102], яка використовується для виконання неграфічних обчислень на універсальних графічних процесорах (GPU) відеокарт компанії NVIDIA. Оскільки рівняння руху (1.29) після обчислення значення повної сили тертя  $F$  як суми елементів (1.38) розраховується на центральному процесорі (CPU), його частота та-

кож істотно впливає на час чисельного розрахунку. Нами використовувалася система на основі центрального процесора Intel Core 2 Quad Q9400, що працює на частоті 2.66 GHz і відеокарта Palit GeForce GTX 570 Sonic 1280MB, яка має 480 універсальних процесорів, кожен з яких працює на частоті 1.4 GHz. При цьому час виконання програми (розрахунку залежностей, наведених на рис. 1.9) склав 5 годин 32 хвилини.

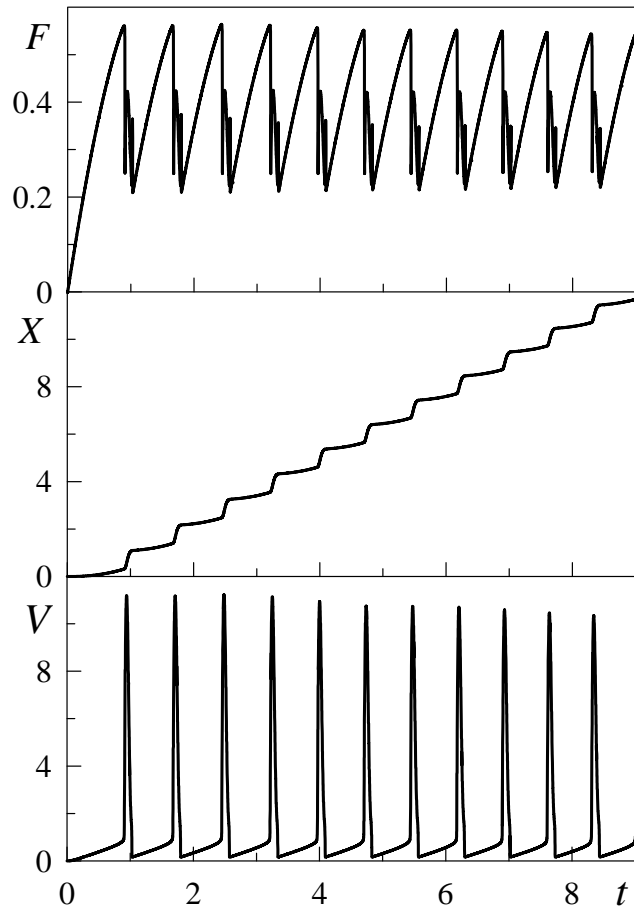


Рисунок 1.9 – Залежності сили тертя  $F$  (мН), координати верхнього блоку  $X$  (мкм) і його швидкості  $V$  (мкм/с) від часу  $t$  (с) при параметрах рис. 1.5 і  $k = 1.5 \cdot 10^5$  Па $\cdot$ с $^{1/3}$ ,  $\gamma = -2/3$ ,  $\delta = 100$  Дж $^{-1}$  $\cdot$ м $^3$ /с,  $K = 600$  Н/м,  $M = 0.5$  кг,  $T = 200$  К,  $V_0 = 1400$  нм/с.

Отримані у результаті розв’язку зазначених рівнянь залежності показані на рис. 1.9. При вибраній температурі  $T$  у стані спокою ( $\varepsilon_{el} = 0$ ) мастило твердоподібне. У момент часу  $t = 0$  вільний кінець пружини починає рівномірний рух зі швидкістю  $V_0 = 1.4$  мкм/с. На початковому етапі змінна  $s$ , що описує зрушення, приймає нульове значення, тому зі зростанням швидкості  $V$  для всіх доменів зростають компоненти сили тертя (1.38). За рахунок зростання швид-

кості також збільшуються значення пружних деформацій  $\varepsilon_{el}[i][j]$ , що приводить до зростання пружних компонент напруження  $\sigma_{el}[i][j]$ . Оскільки спочатку швидкість  $V$  істотно менше значення  $V_0$ , пружина розтягується, і розтягнення  $\Delta X$  збільшується. З плином часу збільшується координата  $X$ , встановлюється ненульове значення  $s$  (1.36), і відбувається перерахунок  $h[i][j]$ . Це приводить до порушення періодичності, що особливо видно на залежності  $V(t)$ . Для кожного домену виконання умови плавлення  $V > V_{c0}$  буде відбуватися у різні моменти часу, оскільки критична швидкість  $V_{c0}$  (1.27) пропорційна відстані між “площинами” поверхонь  $h[i][j]$ , яку обмежують відповідні домени. Тому у кожний момент часу мастило в одних місцях поверхні твердоподібне, а в інших рідиноподібне. Однак, як видно з рисунку, існують моменти часу, коли швидкість руху  $V$  багатократно збільшується. Ця ситуація відповідає повному плавленню мастильного матеріалу, оскільки при багаторазовому збільшенні  $V$  для всіх доменів виконується умова  $V > V_{c0}$ . При плавленні напруження  $\sigma_{el}[i][j]$  приймають нульові значення, за рахунок чого і зростає швидкість проковзування верхнього блоку  $V$ , оскільки пружні складові сил тертя  $F[i][j]$  стають рівними нулю. При цьому блок швидко переміщується на велику відстань, про що свідчить збільшення кута нахилу залежності  $X(t)$  до осі абсцис після плавлення. Оскільки тепер блок рухається зі швидкістю  $V$ , яка істотно перевищує швидкість руху вільного кінця пружини  $V_0$ , пружина стискається, зменшується розтягнення  $\Delta X$ , а разом з ним і пружна сила  $K\Delta X$ , що приводить до руху. Умова  $V < V_c^0$  знову ж для всіх доменів відбувається у різний час, тому при затвердінні формується неоднорідна доменна структура. Варто відзначити, що хоча представлені на рис. 1.9 залежності не є строго періодичними, вони близькі до періодичного вигляду, що також підтверджують дослідження поведінки взаємодіючих шорстких поверхонь при їх взаємному переміщенні з урахуванням пружності [103]. Зазначимо, що переривчастий режим руху *stick – slip*, що показаний на рис. 1.9, спостерігався Боуденом і Тейбором більше 50 років тому [104] при проведенні експериментів для визначення впливу молекулярної

ваги полімерів на коефіцієнт тертя.

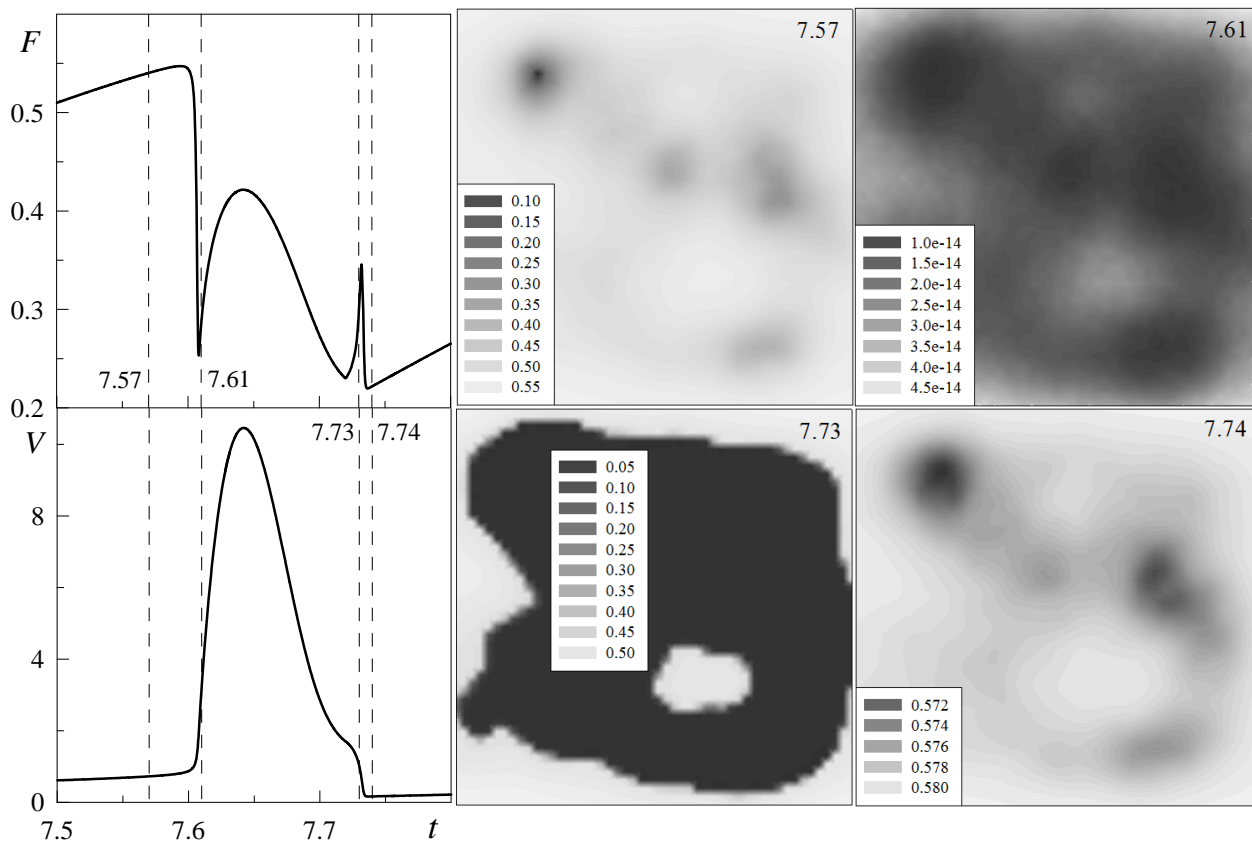


Рисунок 1.10 – Залежності  $F(t)$  і  $V(t)$ , наведені на рис. 1.9 на відрізку часу  $t \in [7.5, 7.8]$  (с) і розподіл значень параметра порядку  $\varphi(x, y)$  по площі контакту поверхностей для чотирьох обраних моментів часу  $t = 7.57, 7.61, 7.73, 7.74$  (с).

Розглянемо більш докладно перехід між кінетичним режимом ковзання і сухим тертям. На рис. 1.10 наведено залежності сили тертя  $F$  і швидкості ковзання  $V$  від часу, показані на рис. 1.9, однак для обмеженого проміжку часу. На рисунку обрані чотири моменти часу, для яких наведені розподіли значень параметра порядку  $\varphi$  по площі ковзання. Координати  $x$  і  $y$  на цих рисунках відповідають значенням, які представлені на рис. 1.8 для верхньої поверхні, що тереться. Координати  $X$  точок поверхонь верхнього блоку тертя можуть бути розраховані як

$$X = x + sS_{x,y}, \quad (1.39)$$

де змінна зсуву  $s$  (1.36) для 4-х збільшуваних на рис. 1.10 моментів часу приймають значення 161, 162, 174, 174. Проаналізуємо отримані дані. Як видно на залежності  $F(t)$ , у момент часу  $t = 7.57$  с в системі реалізується режим су-

хого тертя, що характеризується високим значенням сили тертя і малою величиною швидкості зсуву  $V$ . На відповідному просторовому розподілі  $\varphi(x, y)$  видно, що параметр порядку практично скрізь приймає значення  $\varphi > 0$ , однак присутні темні ділянки, де мастило близьке до рідиноподібного стану. Оскільки кількість доменів з твердоподібним мастилом значно перевищує кількість доменів з рідиноподібною структурою, встановлюється режим сухого тертя. Момент часу  $t = 7.61$  с відповідає режиму ковзання, оскільки сила тертя  $F$  різко зменшується, а швидкість зсуву  $V$  зростає. Якщо подивитися на відповідну залежність  $\varphi(x, y)$ , то видно, що по всій площині контакту реалізуються значення  $\varphi \sim 10^{-14}$ , що відповідає рівню обраної інтенсивності білого шуму  $D$  (1.32). Таким чином, всі домени перебувають у розплавленому стані. У наступний розглянутий момент часу  $t = 7.73$  с відбувається збільшення сили тертя  $F$ , а також зниження швидкості  $V$  (на залежності  $V(t)$  при зростанні  $F$  в околі обраного часу спостерігається перегин). Таким чином, система переходить у режим сухого тертя. Однак, як видно з відповідного рисунка  $\varphi(x, y)$ , не всі домени при цьому мають твердоподібну структуру. Рідиноподібну структуру у даний момент часу має більша кількість доменів (темні ділянки залежності). І після повного затвердіння ( $t = 7.74$  с) всі домени характеризуються значенням  $\varphi > 0$ , однак на відповідній залежності  $\varphi(x, y)$  є більш темні ділянки, для яких модуль зсуву приймає найменше значення. Зазначимо, що залежності  $\varphi(x, y)$  для останніх двох моментів часу характеризуються однаковими величинами  $s = 174$ . Таким чином, їх принципова відмінність викликана не зміною набору значень  $h[i][j]$ , а релаксаційними процесами у мастильному матеріалі. Якщо ж параметр  $s$  при русі довгий час залишається постійним, то картина  $\varphi(x, y)$  повністю визначається набором  $h[i][j]$  при інших фіксованих параметрах. Це відбувається за рахунок того, що при обраному значенні кінетичного коефіцієнта  $\delta$  відбувається швидка релаксація параметра порядку  $\varphi$  до сталого значення, що визначається величиною  $h$ . Однак, у нанотрибологічних системах, у порівнянні з об'ємними мастилами, часи релаксації можуть

відрізнятися на порядки величин в залежності від створених умов, тому варіюванням значення  $\delta$  при необхідності можна домогтися якісного опису різних ефектів, що спостерігаються експериментально, таких, наприклад, як ефекти пам'яті, коли час релаксації напружень багатократно перевищує час спостереження процесів під час експерименту [11]. Зазначимо, що залежність сили тертя від часу, що представлена на рис. 1.10, має особливості (два максимуми після плавлення), які докладно описані раніше у роботі [58].

### 1.3 Вплив адитивних шумів на самоподібну поведінку зсувного плавлення

#### 1.3.1 Постановка моделі та рівняння Фоккера-Планка

Загальний вираз для густини вільної енергії системи, що зазнає зсувне плавлення, в однорідному випадку може бути записано у вигляді [46]

$$F(\rho, \theta) = \frac{a_1 \rho^2}{2} - \frac{b_1 \rho^3}{3} + \frac{c_1 \rho^4}{4} + \frac{\alpha \rho^2}{2} \left( \frac{a_2 \theta^2}{2} - \frac{b_2 \theta^3}{3} + \frac{c_2 \theta^4}{4} \right), \quad (1.40)$$

де параметр порядку  $\rho$  має значення інтенсивності брегівських рефлексів. Параметр  $\theta$  описує відхилення, що виникають під час руху частинок, тобто фактично являє деформацію шарів. Для твердоподібного стану при малих або нульових відхиленнях  $\theta = 0$ . Також у твердоподібній фазі, коли ми маємо упорядкування,  $\rho > 0$ . Коли ж система зазнає плавлення зміщенням, навпаки, встановлюється стаціонарне значення  $\rho = 0$ . Відзначимо, що у роботі [46] енергія (1.40) записана, ґрунтуючись на результатах моделювання броунівської динаміки багаточастинкової моделі. Аналізуючи отримані результати, автори [46] обирають параметри у потенціалі (1.40):  $a_1 = 0.85$ ,  $b_1 = 5.8$ ,  $c_1 = 8.0$ ,  $a_2 = 1.3644$ ,  $b_2 = 8.7105$ ,  $c_2 = 13.674$ . Надалі ми також будемо використовувати ці значення. Зазначимо, що параметр зв'язку  $\alpha$  не є константою, і його вплив на поведінку системи також досліджується у роботі [46].

Використовуючи енергію (1.40), запишемо систему еволюційних рівнянь типу Ландау-Халатнікова [46]:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\gamma_{\rho}} \frac{\partial F(\rho, \theta)}{\partial \rho} + \xi_{\rho}(t), \quad (1.41)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\gamma_{\theta}} \frac{\partial F(\rho, \theta)}{\partial \theta} + \Omega + \xi_{\theta}(t), \quad (1.42)$$

де білий шум  $\xi_q(t)$  має моменти

$$\langle \xi_q(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_q(t) \xi_q(t + \tau) \rangle = 2D_q \delta(\tau), \quad (1.43)$$

де  $q = \rho, \theta$  і введені інтенсивності шуму  $D_q$ , причому шуми  $\xi_{\rho}(t)$  і  $\xi_{\theta}(t)$  не корелюють між собою.

У рівнянні (1.42) введено параметр  $\Omega$ , який задає ефект відносного руху поверхонь. Основна ідея введення цього параметра у тому [46], що при відсутності сил і шумів останнє рівняння перетворюється у співвідношення  $\dot{\theta} = \Omega$ . Це нагадує використовуваний нами раніше при описі зсувного плавлення в ультратонких мастильних шарах вираз  $\dot{\varepsilon} = V/h$  (співвідношення (1.26) у розділі 2), де  $\varepsilon$  – повна деформація у шарі,  $V$  – відносна швидкість зсуву поверхонь,  $h$  – товщина шару мастила. Таким чином, параметр  $\Omega$  задає швидкість руху взаємодіючих шарів.

Відзначимо, що у випадку  $\Omega = 0$  система описується вільної енергією (1.40). Ситуація  $\Omega \neq 0$ , згідно до структури рівнянь (1.41) та (1.42), відповідає енергії

$$F'(\rho, \theta) = F(\rho, \theta) - \theta \Omega \gamma_{\theta}, \quad (1.44)$$

що відрізняється від початкового виразу наявністю останнього доданку. Таким чином, рух у системі змінює стаціонарні стани [46]. Далі будемо використовувати узагальнений вираз (1.44).

На рис. 1.11 показана тривимірна залежність  $F'(\rho, \theta)$ . У від'ємній області параметрів  $\rho$  і  $\theta$  потенціал (1.44) зростає, а величина швидкості  $\Omega$  визна-



чає нахил прямої  $F'(\theta)$  при  $\rho = 0$ . Відповідно до вигляду потенціалу, наведеного на рис. 1.11, за відсутності шуму при стаціонарному значенні  $\rho = 0$  параметр  $\theta$  буде монотонно збільшуватися з часом. Однак при наявності шуму цього не відбувається, а реалізуються постійні переходи між двома (або більше) точками, що притягуються. Одній із цих точок відповідає мінімум при  $\rho \neq 0$ , що показаний на рис. 1.11. У роботі [46] чисельно досліджено вплив інтенсивності шуму, а також параметрів  $\alpha$  і  $\Omega$  на поведінку системи. Запишемо аналітичні вирази, що дозволяють проводити такий аналіз.

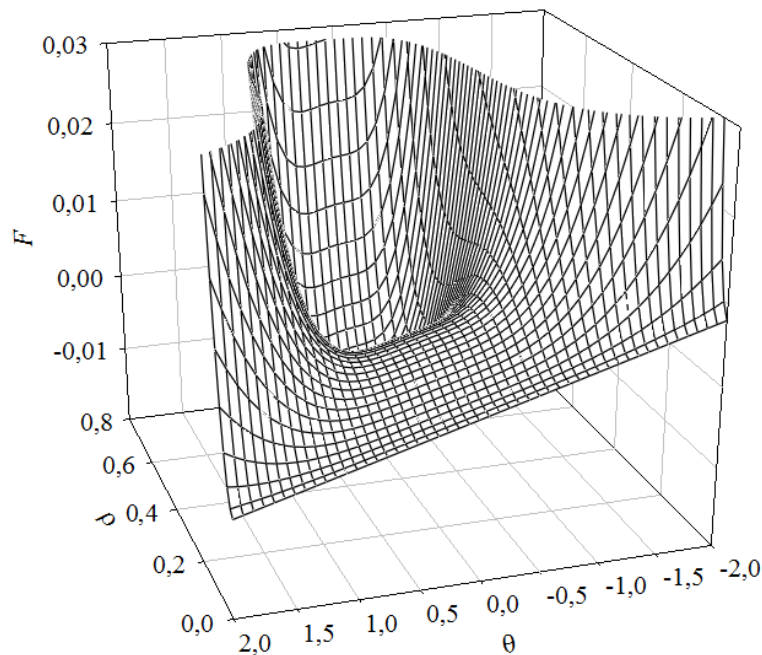


Рисунок 1.11 – Вільна енергія  $F'(\rho, \theta)$  (1.44) при параметрах  $\alpha = 0.17$ ,  $\Omega = 0.08$ ,  $\gamma_\theta = 0.05$ .

Для загального розгляду наведемо рівняння Фоккера-Планка (РФП). Системі рівнянь (1.41) і (1.42) може бути поставлено у відповідність двовимірне рівняння виду [105, 106]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{1}{\gamma_\rho} \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \rho} P(\rho, \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\gamma_\theta} \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \theta} P(\rho, \theta) \right] + \\ & + D_\rho \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} P(\rho, \theta) + D_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(\rho, \theta). \end{aligned} \quad (1.45)$$

У роботі [46] чисельно розглядається випадок, коли часи релаксації  $\gamma_\rho = \gamma_\theta = \gamma$  та інтенсивності шумів  $D_\rho = D_\theta = D$  є тотожними величинами. У цьому

випадку рівняння (1.45) може бути переписано у спрощеному вигляді:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial P(\rho, \theta)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \rho} P(\rho, \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial F'(\rho, \theta)}{\partial \theta} P(\rho, \theta) \right] + \\ &+ \gamma D \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} P(\rho, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(\rho, \theta) \right). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Тепер обидва коефіцієнти дрейфу в точності представляють похідні від потенціалу (1.44). У стаціонарному випадку  $\partial P(\rho, \theta)/\partial t = 0$  розв'язок рівняння (1.46) добре відомий і дає щільність імовірності виду [105, 106]:

$$P(\rho, \theta) = C \exp \left\{ -\frac{F'(\rho, \theta)}{\gamma D} \right\}, \quad (1.47)$$

де  $C$  – нормуюча постійна, а  $F'(\rho, \theta)$ , як і раніше, визначається виразом (1.44). Нагадаємо, що коефіцієнт  $\gamma$  входить також і до співвідношення для енергії  $F'(\rho, \theta)$  (1.44). Вигляд розподілу (1.47) без урахування значення нормуючої константи  $C$  показаний на рис. 1.12. З рисунка видно, що зі зростанням інтенсивності шуму  $D$  збільшується імовірність переходів між твердоподібним і рідиноподібним станами. У роботі [46] такі переходи докладно досліджуються чисельно при різних значеннях  $\Omega$  та  $\alpha$ , тому зупинимося на одному наборі вже обраних значень.

Для чисельного розв'язку рівнянь (1.41), (1.42) достатньо скористатися методом Ейлера [58]. При цьому рівнянням відповідає наступна ітераційна процедура [58]:

$$\rho_{i+1} = \rho_i - \frac{\Delta t}{\gamma_\rho} (a_1 \rho_i - b_1 \rho_i^2 + c_1 \rho_i^3 + \alpha \rho_i V(\theta_i)) + \sqrt{\Delta t} W_{\rho_i}, \quad (1.48)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \frac{\alpha \rho_i^2 \Delta t}{2\gamma_\theta} (a_2 \theta_i - b_2 \theta_i^2 + c_2 \theta_i^3) + \Delta t \Omega + \sqrt{\Delta t} W_{\theta_i}, \quad (1.49)$$

де потенціал  $V(\theta_i)$  задається виразом у дужках енергії (1.40). Випадкові сили  $W_q$  визначаються згідно до стандартної процедури [143]

$$W_q = \sqrt{2D_q} \sqrt{-2 \ln r_{q1}} \cos(2\pi r_{q2}), \quad r_{qi} \in (0; 1], \quad (1.50)$$

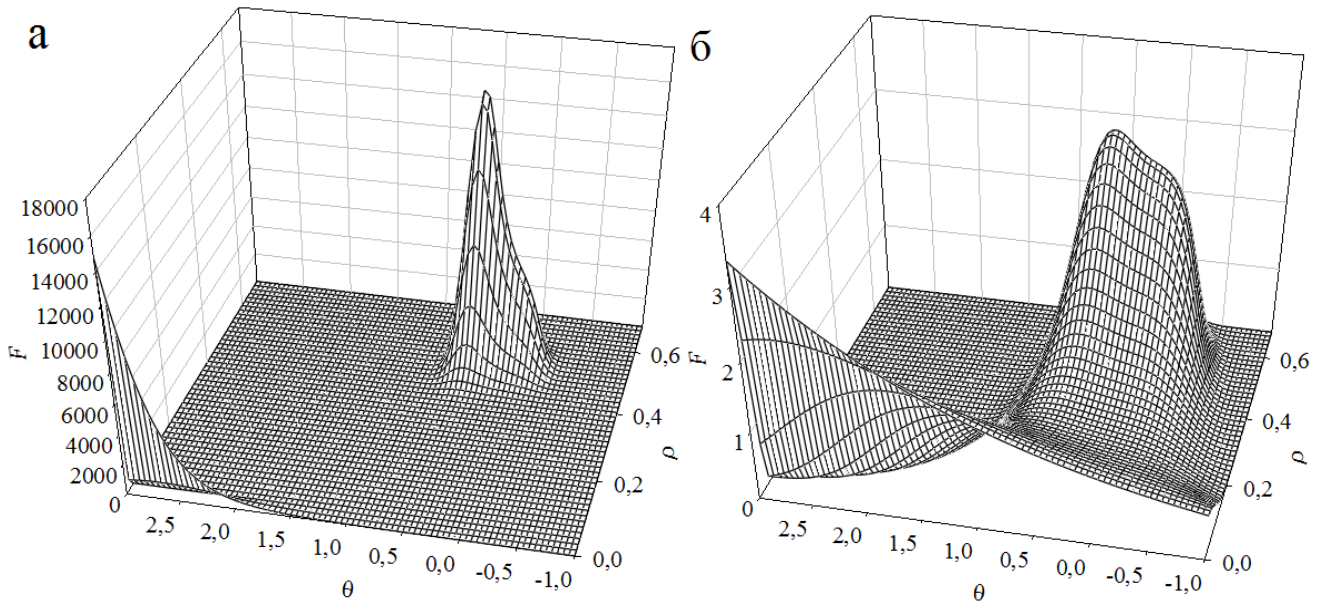


Рисунок 1.12 – Ненормований розподіл (1.47) при параметрах рис. 1.11 при значеннях інтенсивності шуму: а)  $D = 0.025$ ; б)  $D = 0.2$ .

а псевдовипадкові числа  $r_{q1}, r_{q2}$  характеризуються рівномірним розподілом.

На рис. 1.13 і рис. 1.14 показані часові траєкторії  $\rho(t), \theta(t)$ , що отримані при чисельному розв'язанні системи рівнянь (1.48) і (1.49).<sup>4</sup> При обраних параметрах згідно до рисунків відбуваються постійні спонтанні переходи між рідиноподібним ( $\rho = 0$ ) та твердоподібним ( $\rho \neq 0$ ) станами. Однак, на рис. 1.13 імовірність переходів між впорядкованим і невпорядкованим станами менше, оскільки він побудований при меншому значенні інтенсивності шуму  $D$ . У правих частинах рисунків приведено чисельно визначені одновимірні щільності імовірностей  $P_\rho(\rho)$  і  $P_\theta(\theta)$ . Відповідні часові ряди для знаходження щільності імовірностей розраховувалися на інтервалі часу  $t \in [0; 10^6]$  з кроком  $\Delta t = 10^{-3}$ , тобто кожен ряд мав  $10^9$  точок. Цим і пояснюється гладкий вигляд залежностей  $P_\rho(\rho)$  і  $P_\theta(\theta)$ , які також підпорядковуються одновимірним умовам нормування:

$$\int_0^{+\infty} P_\rho(\rho) d\rho = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_\theta(\theta) d\theta = 1, \quad (1.51)$$

де інтенсивність брегівських рефлексів  $\rho$  вимірюється від нуля. Останні умови також були враховані чисельно. Таким чином, площі під кривими імовірностей

<sup>4</sup>На рисунках наведені абсолютні значення параметра  $\rho$ , оскільки область  $\rho < 0$  не має фізичного значення.

на рис. 1.13 і рис. 1.14 дорівнюють одиниці. Зазначимо, що форма кривих для одновимірних щільностей імовірностей на рисунках підтверджує вигляд двовимірної поверхні, показаної на рис. 1.12. У роботі [46] проведено детальний аналіз описаної ситуації, де ґрунтуючись на вигляді одновимірної щільності імовірності  $P_\rho$  чисельно розраховуються фазові діаграми з наявністю областей кристалізації, рідиноподібної поведінки, а також області, у якій відбуваються спонтанні переходи між зазначеними станами (*stick-slip* режим). Тому вивчення даного питання не є метою представленої роботи. Зосередимо увагу на випадку, коли інтенсивність одного із шумів багаторазово перевищує інтенсивність іншого і покажемо, що у цьому випадку встановлюється самоподібна поведінка твердоподібної системи [50].

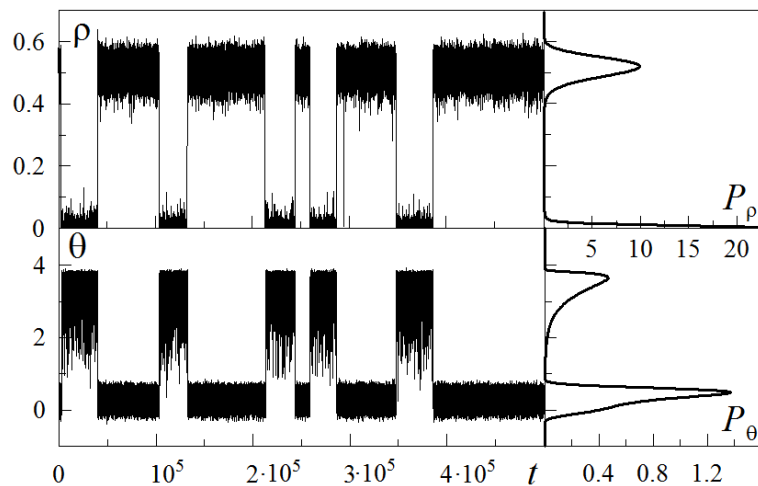


Рисунок 1.13 – Часові залежності абсолютного значення параметра порядку  $\rho$ , величини  $\theta$ , а також їх щільностей імовірностей  $P_\rho(\rho)$ ,  $P_\theta(\theta)$  при параметрах рис. 1.11 і  $\gamma_\rho = \gamma_\theta = 0.05$ ,  $D_\rho = D_\theta = 0.025$ .

### 1.3.2 Самоподібна поведінка

Для з'ясування поведінки системи у загальному випадку (коли часи релаксації і інтенсивності шумів мають різні значення) можна розв'язати загальне рівняння Фоккера-Планка (1.45). Однак зазначене рівняння є рівнянням другого порядку в частинних похідних, що в деякій мірі ускладнює ситуа-

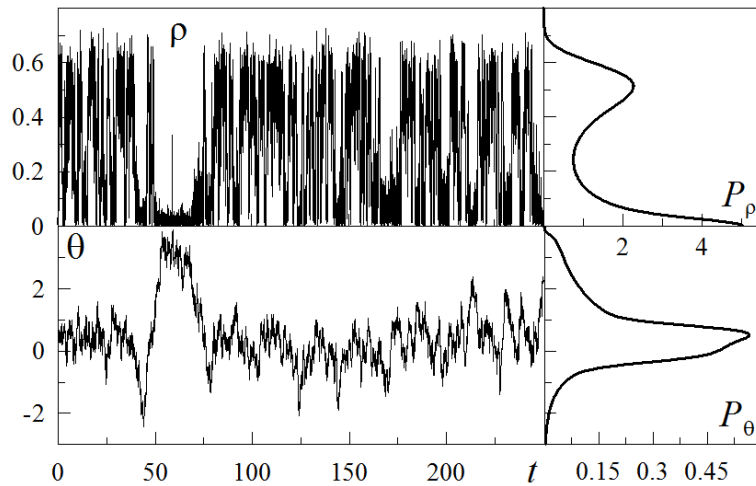


Рисунок 1.14 – Відповідні до рис. 1.13 залежності, але при  $D_\rho = D_\theta = 0.2$ .

цію. Тим більше, нас не цікавить розподіл імовірності процесу на початковому етапі, а інтерес представляє тільки стаціонарний вигляд розподілу. Це дозволяє замінити розв’язок відповідного РФП (1.45) чисельним аналізом вихідної системи (процедура (1.48), (1.49)). У роботі [50] проводиться аналітичний аналіз з визначенням областей існування різних самоподібних режимів, однак рівняння (1.48), (1.49) мають більш складну структуру, що ускладнює такий аналіз. Тому обмежимося у рамках даного розділу чисельним моделюванням.

На рис. 1.15 показана розрахована ненормована щільність імовірності  $P_\rho(\rho)$  для різних співвідношень між величинами інтенсивностей шумів, причому для всіх кривих значення  $D_\theta$  не змінюється.<sup>5</sup> З рисунка можна зробити висновок, що величина інтенсивності шуму  $D_\rho$  критичним чином впливає на поведінку системи. Наприклад, криві 1 і 2 показують поведінку системи у двофазній області, оскільки реалізуються два максимуми імовірності. Причому для кривої 1 максимум більш виражений при  $\rho = 0$ , а крива 2 відповідає випадку, коли система більше часу знаходиться у твердоподібному стані ( $\rho \neq 0$ ). Зі зменшенням інтенсивності шуму  $D_\rho$  (криві 3–8) двофазна область зникає,

<sup>5</sup>При розрахунку кривих відповідні часові ряди розраховувались на часовому інтервалі  $t \in [0; 2 \cdot 10^7]$  з кроком  $\Delta t = 10^{-3}$ . Таким чином, кожний часовий ряд мав  $2 \cdot 10^{10}$  точок. Після цього проводився підрахунок кількості влучень значень ряду в той чи інший інтервал  $\rho$ . На заключному рис. 1.15 кожна крива побудована на  $2 \cdot 10^5$  точках, тобто була обрана така кількість інтервалів на осі  $\rho$  від значення  $10^{-5}$  до 3. Розраховані значення  $\rho$  на заданому інтервалі не піднімались вище значення 3. Після цього кількість влучень у кожний інтервал ділилось на загальну кількість точок у рядові, таким чином криві “спускалися” донизу.

оскільки реалізується лише нульовий максимум  $P_\rho(\rho)$ . Причому лінійна ділянка імовірності при невеликих  $\rho$  при пониженні інтенсивності шуму  $D_\rho$  зменшується (криві 3–5). Для кривих 6–8 вже виконується умова

$$D_\theta \gg D_\rho, \quad (1.52)$$

яка у нашому випадку в області малих значень параметра порядку  $\rho$  приводить до самоподібного вигляду щільності розподілу [50]. Справа в тому, що у випадку (1.52) в області малих  $\rho$  функція розподілу стає однорідною [50, 113]:

$$P_\rho(\rho) \sim \rho^{-a} \quad (1.53)$$

і відповідає самоподібній системі, для якої відсутній характерний масштаб параметра  $\rho$  ( $a < 1$  – показник розподілу, який визначає нахил розподілу на лінійній ділянці) [108]. Зазначимо, що режиму самоорганізованої критичності (СОК) відповідає значення  $a = 1.5$ . У випадку, показаному на рис. 1.15, значення  $a \approx 1$ .

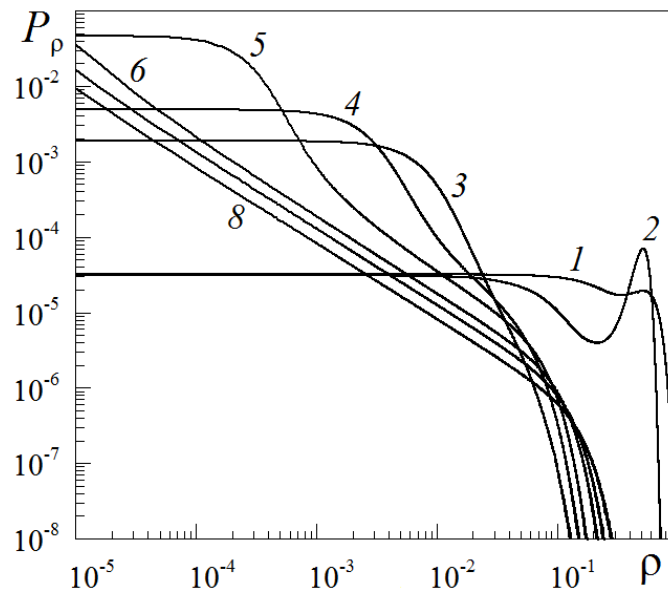


Рисунок 1.15 – Щільність імовірності  $P_\rho(\rho)$ , розрахована при  $D_\theta = 10^{-2}$ . Криві 1–8 відповідають значенням  $D_\rho = 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$ . Крива 7 розташована між кривими 6 та 8, цифрою на рисунку не позначена.

На рис. 1.16 показані часові ряди  $\rho(t)$ , що відповідають параметрам кри-

вих 8 і 6 на рис. 1.15. Залежності приведені у логарифмічному масштабі, для кращого визначення діапазону значень параметра порядку, де встановлюється самоподібна поведінка (різкі збільшення значень параметра порядку видно як на малих, так і на великих масштабах). Залежності на рис. 1.16а відповідає менша інтенсивність шуму  $D_\rho$ , що приводить до самоподібної поведінки на більшому діапазоні масштабів, що видно із залежності. Рис. 1.16б, для якого функція розподілу згідно рис. 1.15 у деякому інтервалі  $\rho$  також є самоподібною, демонструє зміну параметра  $\rho$  на меншому діапазоні масштабів. Часові ряди при однакових інтенсивностях шуму наведені на рис. 1.14 і рис. 1.15, для яких самоподібна поведінка не спостерігається. Таким чином, степеневий вигляд функції розподілу  $P_\rho(\rho)$  обмежений і мінімальним значенням параметра  $\rho$ , яке зменшується при зменшенні величини  $D_\rho$ .

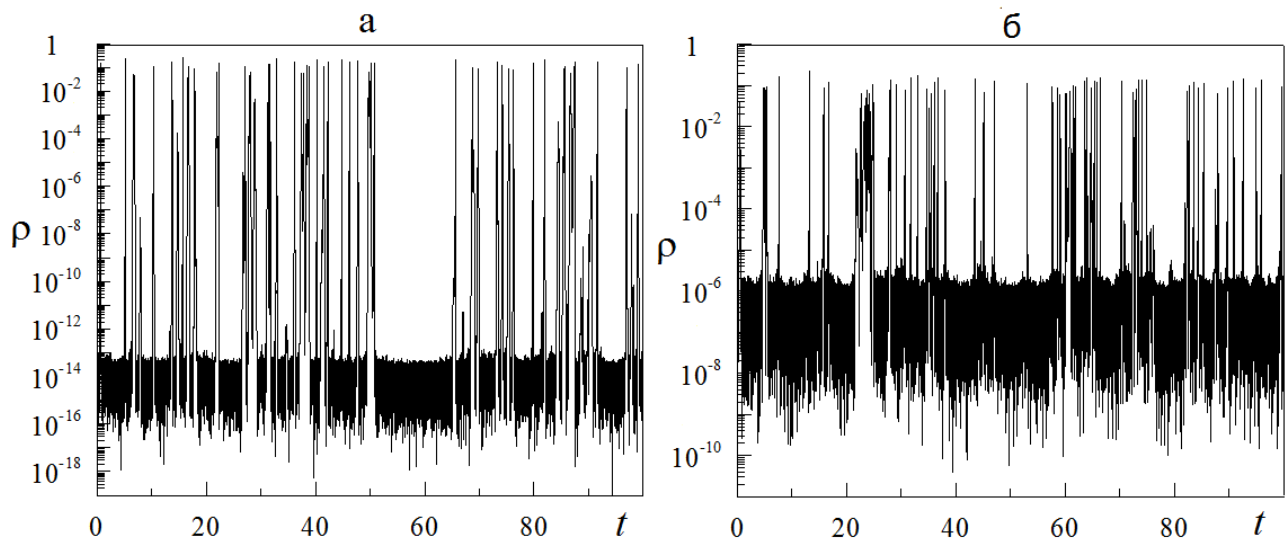


Рисунок 1.16 – Часові залежності  $\rho(t)$ , що відповідають параметрам рис. 1.15: а –  $D_\rho = 10^{-25}$ ; б –  $D_\rho = 10^{-10}$ .

### 1.3.3 Статистичний аналіз часових рядів

Як було зазначено у попередньому розділі, характерною особливістю часових залежностей параметра порядку, отриманих для значень інтенсивностей шуму  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (криві 3–8 на рис. 1.15), є

наявність у обмеженому діапазоні степеневому вигляду функції щільності розподілу, і, як наслідок, самоподібна структура ряду. Слід зазначити, що розраховані у попередньому розділі статистичні параметри не дають повної інформації про поведінку ряду, зокрема про його передбачуваність. Так, при розрахунку стандартних статистичних параметрів для самоподібних рядів не враховується відсутність характерного масштабу у різні моменти часу. Дана особливість може бути врахована в рамках так званого *скейлінгового* аналізу. Однією із можливих методик розгляду локальних властивостей часових залежностей є метод мультифрактального флуктуаційного аналізу [109], що дозволяє дослідити часові ряди різної природи [110, 111].

Алгоритм зазначеного методу зводиться до наступних кроків (оригінальний опис приведено у роботі [109]). Спочатку, для розглянутого ряду  $x(k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  виділяється флуктуаційний профіль

$$y(i) = \sum_{k=1}^i [x(k) - \bar{x}], \quad (1.54)$$

відрахований від середньої величини  $\bar{x}$ . Потім отримані значення  $y(i)$  розподіляються по непересічним сегментам довжини  $s$ , число яких дорівнює цілому значенню  $N_s = [N/s]$ . Так як довжина ряду  $N$  не завжди кратна обраній шкалі  $s$ , то у загальному випадку остання частина містить число точок менше, ніж  $s$ . Для врахування цього залишку слід повторити процедуру поділу на сегменти, починаючи з протилежного кінця ряду. У результаті повне число сегментів, що володіють довжиною  $s$ , складе  $2N_s$ .

Оскільки зміна випадкової величини  $y(i)$  відбувається поблизу значення  $y_\nu(i) \neq 0$ , обумовленого певною тенденцією (трендом) еволюції ряду, то далі слід знайти локальний тренд  $y_\nu(i)$  для кожного із  $2N_s$  сегментів. При цьому найпростіше використовувати метод найменших квадратів, представляючи тренд  $y_\nu(i)$  поліномом, степінь якого вибирається таким чином, щоб забезпечити інтерполяцію з помилкою, що не перевищує задану межу. Наступним ета-



пом є визначення дисперсії

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[(\nu - 1)s + i] - y_\nu(i)\}^2, \quad (1.55)$$

для сегментів  $\nu = 1, \dots, N_s$ , що слідуєть у прямому напрямку, і відповідне значення

$$F^2(\nu, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[N - (\nu - N_s)s + i] - y_\nu(i)\}^2, \quad (1.56)$$

для зворотної послідовності  $\nu = N_s + 1, \dots, 2N_s$ .

На наступному кроці проводиться узагальнення дисперсії

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} [F^2(\nu, s)]^{q/2} \right\}^{1/q} \quad (1.57)$$

шляхом піднесення виразів (1.55), (1.56) до степені  $q$  і подальшим усередненням за всіма сегментами. Оскільки при  $q = 0$  рівність (1.57) містить невизначеність, то замість нього слід використовувати межовий вираз

$$F_0(s) = \exp \frac{1}{4N_s} \sum_{\nu=1}^{2N_s} \ln[F^2(\nu, s)]. \quad (1.58)$$

Змінюючи часову шкалу  $s$  при фіксованому показнику  $q$ , знаходимо залежність  $F_q(s)$ , представляючи її у подвійних логарифмічних координатах. Якщо досліджуваний ряд зводиться до самоподібної множини, що проявляє далекодючі кореляції, то флуктуаційна функція  $F_q(s)$  представляється степеневою залежністю

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (1.59)$$

з узагальненим показником Херста  $h(q)$ , величина якого визначається параметром  $q$ . Із визначень (1.57), (1.59) випливає, що при  $q = 2$  цей показник зводиться до класичного показника Херста  $H$ . Для часових рядів, які відповідають монофрактальній множині, флуктуаційна функція  $F^2(\nu, s)$  однакова для всіх сегментів  $\nu$ , і узагальнений показник Херста  $h(q) = H$  не залежить від па-

раметра деформації  $q$ . Для мультифрактальних рядів при додатних  $q$  основний внесок у функцію  $F_q(s)$  дають сегменти  $\nu$ , що проявляють великі відхилення  $F^2(\nu, s)$ , а при від'ємних  $q$  домінують сегменти з малими значеннями дисперсії  $F^2(\nu, s)$ . У результаті можна зробити висновок, що при від'ємних значеннях  $q$  узагальнений показник Херста  $h(q)$  описує сегменти, які проявляють малі флуктуації, а при додатних — великі [109, 112].

При реалізації викладеного алгоритму слід мати на увазі, що із зростанням розміру сегментів до  $s > N/4$ , функція  $F_q(s)$  втрачає статистичну інформативність зважаючи на малість числа  $N_s < 4$  сегментів, що використовуються при усередненні. Таким чином, проведення вказаної процедури передбачає виняток, з одного боку, великих сегментів ( $s > N/4$ ), а з іншого — малих ( $s < 10$ ).

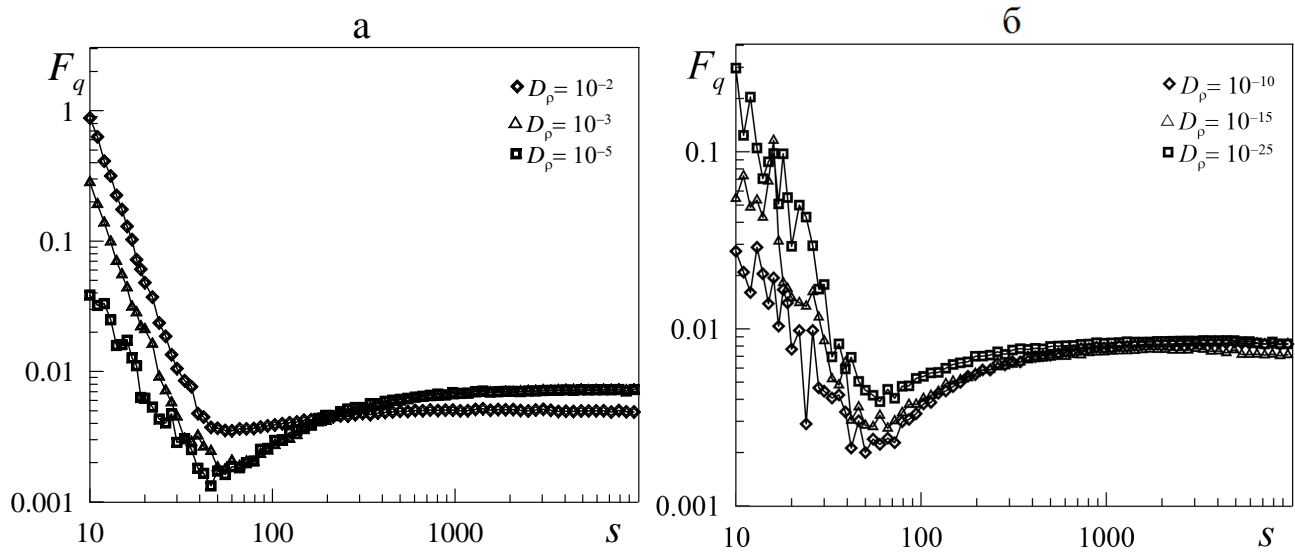


Рисунок 1.17 — Залежність (1.59), побудована у подвійних логарифмічних осях при показнику деформації  $q = 2$  для рядів із значенням  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}$  (а) і  $D_\rho = 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (б).

Стандартне подання скейлінгових властивостей часового ряду передбачає перехід від показника Херста  $h(q)$  до масового показника  $\tau(q)$  і спектральної функції  $f(\alpha)$ , які є основними характеристиками мультифракталів [109, 112]:

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad (1.60)$$

$$f(\alpha) = \alpha q(\alpha) - \tau(q(\alpha)). \quad (1.61)$$

Тут значення  $q(\alpha)$  визначається умовою  $\tau'(q) = \alpha$ , де штрих означає диференціювання за аргументом. При  $|q| \gg 1$  залежність  $\tau(q)$  має лінійно зростаючий вигляд з криволінійною ділянкою поблизу  $q = 0$ , який забезпечує уповільнення зростання масового показника  $\tau$  зі збільшенням параметра деформації  $q$ . Спектральна функція  $f(\alpha)$  визначає набір монофракталів з розмірностями  $\alpha$ , які формують досліджувану множину: при цьому відносна кількість монофракталів з даними  $\alpha$ , які потрапляють до сегментів з розміром  $l$ , що покривають цю множину, задається співвідношенням  $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$ . Згідно з цим визначенням, ширина спектра  $f(\alpha)$  буде тим більше, чим сильніше виражені мультифрактальні властивості. Так, для монофракталу спектральна функція  $f(\alpha)$  має  $\delta$ -подібну форму, що виділяє єдине значення фрактальної розмірності  $\alpha$  [112].

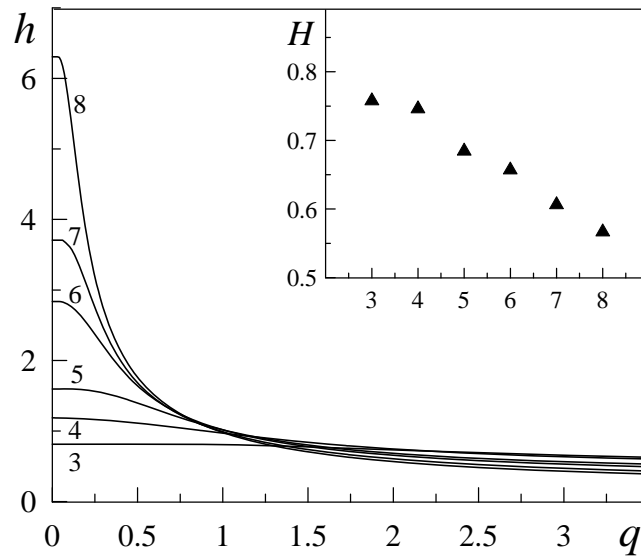


Рисунок 1.18 — Узагальнений показник Херста  $h(q)$  для рядів з інтенсивністю шуму  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (криві 3–8 відповідно), а також зміна класичного показника Херста  $H$  для зазначених кривих.

На рис. 1.17 представлений типовий вид залежності (1.59) для рядів з інтенсивностями шумів  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  при показнику деформації  $q = 2$ . Як видно з рисунка, залежність (1.59), побудована у подвійних логарифмічних осях, має яскраво виражену лінійну ділянку при

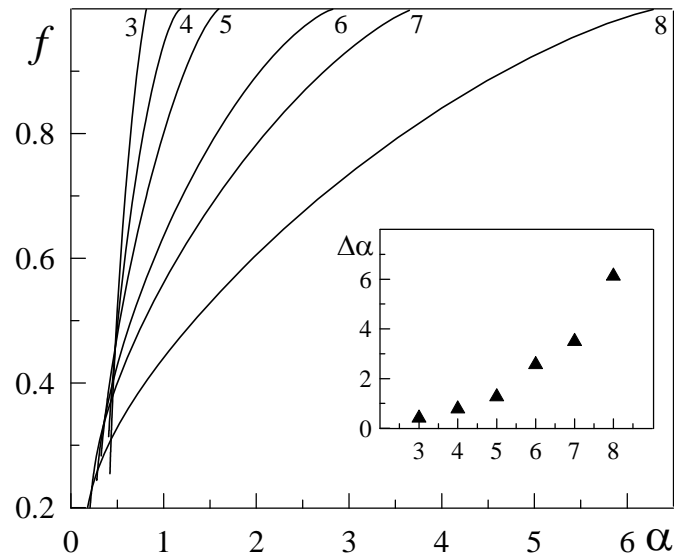


Рисунок 1.19 — Спектральна функція  $f(\alpha)$  для рядів з інтенсивністю шуму  $D_\rho = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-10}, 10^{-15}, 10^{-25}$  (криві 3–8 відповідно), а також ширина розкиду мультифрактального спектра  $\Delta\alpha$ .

значеннях масштабу  $50 < s < 500$ , і отже, може бути використана для обчислення параметра  $h(q)$ . Лінійна інтерполяція рівності (1.59), що розрахована для досліджуваних рядів, у рамках зазначеного інтервалу зміни масштабу  $s$  при значеннях параметра деформації  $0 \leq q \leq 3.5$  приводить до залежностей  $h(q)$ , представлених на рис. 1.18, де на додатковій панелі також приведена залежність класичного показника Херста  $H$  від номера (інтенсивності шуму) відповідного ряду. Для досліджуваних рядів так само була розрахована спектральна функція  $f(\alpha)$  з використанням рівностей (1.60) і (1.61). Результати проведених розрахунків представлені на рис. 1.19. З наведених на рис. 1.18 і 1.19 залежностей випливає, що зменшення інтенсивності шуму  $D_\rho$  приводить до істотного ускладнення динаміки часових залежностей параметра порядку, що проявляється у збільшенні ширини розкиду значень узагальненого показника Херста  $h(q)$  і функції мультифрактального спектра (1.61). Виходячи з фізичного змісту функції  $f(\alpha)$ , зростання розкиду значень  $\Delta\alpha$  обумовлено тим, що в сегментах часового ряду довжини  $s$ , зростає число підмножин (так званих монофракталів)  $N(\alpha)$ , з показником Гельдера  $\alpha$ . Дана ситуація може означати, що в системі зростає кількість статистично різних сценаріїв розвитку. Крім того, значення показника Херста  $H$  із зменшенням  $D_\rho$  наближається

до значення  $H \approx 0.5$ , яке, як відомо, відповідає абсолютно випадковій послідовності [112], таким чином, ускладнення структури часових рядів робить їх подальшу поведінку непередбачуваною. Цій ситуації відповідає наявність екстремально великих розкидів значень параметра порядку, що показано на рис. 1.16.

## 2 ТЕРМОДИНАМІКА ІНТЕНСИВНОЇ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ (ІПД) І НАДПЛАСТИЧНОСТІ

### 2.1 Підхід нерівноважної еволюційної термодинаміки

На основі базового енергетичного потенціалу для густини внутрішньої енергії (див. явний вигляд в роботах [70, 74–76]), який дозволяє описати перебіг сильно нерівноважних процесів при фрагментації металів або сплавів під час ІПД [70, 71], еволюційні рівняння визначаються наступним співвідношенням:

$$\tau_{h_m} \frac{\partial h_m}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial h_m}, \quad (2.1)$$

де  $\tau_{h_m}$  — часи релаксації відповідних дефектних підструктур, які задають інерційні властивості системи;  $h_m$  — щільність дефектів  $m$ -го типу;  $\bar{u}$  — ефективна внутрішня енергія [70, 71], яка в даному випадку визначається співвідношенням

$$\bar{u} = u - \sum_{m=g,D} \varphi_m^{st} h_m, \quad (2.2)$$

де  $\varphi_m^{st}$  — енергія дефекту  $m$ -типу у стаціонарному стані. У такому формулюванні стаціонарні стани будуть визначатися максимумами ефективної внутрішньої енергії. Рівняння (2.1) описує передемпфовану і детерміністичну динаміку для незбережних і однорідних параметрів порядку [70]. Перетворення (2.2) можна розуміти, як аналог перетворення Лежандра у рівноважній термодинаміці. Складові під знаком суми являють собою в такому випадку пов'язану дефектами енергію, а ефективна внутрішня енергія  $\bar{u}$  є аналогом вільної енергії, яка також володіє екстремальними властивостями.

У наближенні дводефектної моделі з урахуванням щільності меж зерен (МЗ) і дислокацій, які безпосередньо визначають міру фрагментації твердих тіл і формування високих фізико-механічних властивостей [114–117], рівнян-

ня (2.1) приймають явний вигляд [71]:

$$\tau_{h_D} \frac{\partial h_D}{\partial t} = \varphi_{0D} - \varphi_{1D} h_D + \varphi_{gD} h_g, \quad (2.3)$$

$$\tau_{h_g} \frac{\partial h_g}{\partial t} = \varphi_{0g} - \varphi_{1g} h_g + \varphi_{2g} h_g^2 - \varphi_{3g} h_g^3 + \varphi_{gD} h_D. \quad (2.4)$$

Оскільки стаціонарні значення  $\varphi_m^{st}$  входять до комбінації з лінійним по щільності дефектів внеском (див. вид співвідношення для щільності внутрішньої енергії в роботах [70, 71, 74–76]), то без збитку для спільності його можна об'єднати з відповідним коефіцієнтом  $\varphi_{0m} = \varphi_{0m} - \varphi_m^{st}$ .

При цьому параметри  $\varphi_{km}$  ( $k = 0, 1$ ) задаються рівняннями:

$$\varphi_{0m} = \varphi_{0m}^* + g_m \varepsilon_{ii}^e + \left( \frac{1}{2} \bar{M}_m (\varepsilon_{ii}^e)^2 + 2 \bar{\mu}_m I_2 \right), \quad (2.5)$$

$$\varphi_{1m} = \varphi_{1m}^* + 2e_m \varepsilon_{ii}^e, \quad (2.6)$$

де  $M = \lambda + 2\mu$  – модуль одностороннього стиснення матеріалу;  $\varepsilon_{ii}^e$ ,  $I_2 \equiv (-\varepsilon_{ii}^e \varepsilon_{jj}^e + \varepsilon_{ij}^e \varepsilon_{ji}^e)/2$  – перший і другий інваріанти тензора пружних деформацій; додатна константа  $g_m$  відповідає за генерацію дефектів при розтягуванні  $\varepsilon_{ii}^e > 0$ , або за їх анігіляцію при стисненні  $\varepsilon_{ii}^e < 0$ ;  $\bar{M}_m$ ,  $\bar{\mu}_m$  – пружні постійні, обумовлені існуванням дефектів;  $e_m$  – висловлює процес анігіляції дефектів при додатному значенні  $\varepsilon_{ii}^e > 0$ , а при від'ємному  $\varepsilon_{ii}^e < 0$  – мається на увазі генерація;  $\tau_{h_m}$  – характерні часи релаксації параметрів порядку. Значення індексів  $m = g$  відносяться до меж зерен, а  $m = D$  – до дислокацій.

Тут повна деформація представлена у вигляді суми

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.7)$$

оборотної  $\varepsilon_{ij}^e$  (пружної) і незворотної  $\varepsilon_{ij}^p$  (пластичної або залишкової) складових [118, 119].

Оскільки енергія системи не повинна залежати від вибору системи координат, то вона виражається через інваріанти тензора деформацій. Перший

інваріант  $\varepsilon_{ii}^e$ , з фізичної точки зору, це об'ємна пружна деформація або відносна зміна об'єму, обумовлена пружними напруженнями. У представлених розрахунках в основному прийнято  $\varepsilon_{ii}^e < 0$ , так як при ІПД реалізується процес стиснення деформованого матеріалу (протитиск). Також передбачається, що другий інваріант  $I_2$  визначає рівень пружних зсувних деформацій (або характеризує відносну зміну кута між відповідними осями деформування) і є головним чинником, однаково відповідальним за генерацію дефектів, як при розтягуванні, так і при стисканні.

В рамках даної теорії значення пластичних (накопичених) деформацій  $\varepsilon_{ij}^p$  не представлені у явному вигляді. Відомо, що при постійній швидкості деформування накопичена пластична деформація пропорційна часу, а при змінній швидкості деформування монотонно залежить від нього. Тому в механіці прийнято замість часу використовувати накопичену деформацію (мертвий час). У представленій тут теорії час використовується в явній формі, а пластична деформація присутня неявно, у формі щільності дефектів (див. виведення узагальненого співвідношення Гіббса в [70]). Тепловий канал дисипації на даній стадії вивчення проблеми не враховується.

Для чисельного аналізу прийнятий наступний феноменологічний набір коефіцієнтів [70–73]:

$$\begin{aligned} \varphi_{0g}^* &= 0.4 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}, \quad g_g = 12 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}, \quad \bar{M}_g = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}, \quad \varphi_{3D} = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^5, \\ \bar{\mu}_g &= 3 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}, \quad \varphi_{1g}^* = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1}, \quad e_g = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1}, \\ \varphi_{2g} &= 5.6 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}, \quad \varphi_{3g} = 3 \cdot 10^{-20} \text{ Дж} \cdot \text{м}, \quad \varphi_{0D}^* = 5 \cdot 10^{-9} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1}, \\ g_D &= 2 \cdot 10^{-8} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \bar{M}_D = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1}, \quad \bar{\mu}_D = 1.65 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1}, \\ \varphi_{1D}^* &= 10^{-24} \text{ Дж} \cdot \text{м}, \quad e_D = 6 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{м}, \quad \varphi_{gD} = 10^{-16} \text{ Дж}, \quad \varphi_{2D} = 0 \text{ Дж} \cdot \text{м}^3, \\ \tau_{h_D} &= 1/\gamma_D = 3^{-1} \cdot 10^{-25} \text{ Дж} \cdot \text{м} \cdot \text{с}, \quad \tau_{h_g} = 1/\gamma_g = 10^{-6} \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}. \end{aligned}$$

Вибір феноменологічних сталих здійснюється відповідно до спостережуваних під час ІПД закономірностей [114–116, 120, 121], у результаті яких у



матеріалі формуються стаціонарні субмікрокристалічні (СМК) або нанокристалічні (НК) структури. Стаціонарні значення для щільності МЗ спостерігаються при значеннях  $h_g^{st1} = 10^4 \text{ м}^{-1}$  і  $h_g^{st2} = 10^7 \text{ м}^{-1}$ , яким відповідають середні розміри зерен 100 мкм і 100 нм. При цьому, щільність дислокацій в СМК і НК структурах досягає рівноважних значень при  $h_D^{st} = 10^{14} - 10^{15} \text{ м}^{-2}$  [115, 121]. Техніка підбору основних значень для параметрів теорії представлена в роботах [70, 71, 73].

## 2.2 Фазова кінетика двохдефектної системи

### 2.2.1 Фазова діаграма та діаграма стійкості стаціонарних структур

Застосовуючи адіабатичне наближення  $\tau_{h_g} \gg \tau_{h_D}$  [74–76], що визначає характер еволюції основних змінних  $h_m$  ( $m = g, D$ ) в рамках принципу підпорядкування, отримуємо рівняння Ландау-Халатнікова:

$$\tau_{h_g} \frac{\partial h_g}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial h_g}, \quad (2.8)$$

явний вигляд якого представляється співвідношенням

$$\tau_{h_g} \dot{h}_g = \varphi_{0g} + \varphi_{gD} \frac{\varphi_{0D}}{\varphi_{1D}} - \left( \varphi_{1g} - \frac{\varphi_{gD}^2}{\varphi_{1D}} \right) h_g + \varphi_{2g} h_g^2 - \varphi_{3g} h_g^3. \quad (2.9)$$

При цьому система характеризується термодинамічним потенціалом

$$V(h_g) = \int_0^{h_g} F(h'_g) dh'_g. \quad (2.10)$$

Підінтегральна функція у правій частині (2.10) визначає термодинамічну силу  $\partial V / \partial h_g \equiv F(h_g)$ , під впливом якої змінна  $h_g$  прагне до притягуючого аттрактору (стаціонарного значення).

У стаціонарному стані при  $\dot{h}_g = 0$  рівняння (2.8) може мати два стій-

ких стани, які відповідають максимумам термодинамічного потенціалу  $V(h_g)$ , і один нестійкий (тобто формується мінімум  $V(h_g)$ ). Однак, згідно з основною теоремою алгебри завжди буде реалізуватися хоча б один стаціонарний розв'язок (або гранична структура).

Відзначимо, що можливість встановлення різних стійких станів для одного типу дефектів визначається самим процесом деформації, в результаті якого здійснюються взаємодії на мікроскопічному рівні. Збільшення протяжності МЗ на початковій стадії є продуктивним механізмом дисипації енергії. Однак, після досягнення ультрадисперсної структури із середніми розмірами зерен близько 100 нм, активізуються процеси рекристалізації або коалесценції зерен [120–122], які спрямовані в протилежному напрямку зменшення щільності дефектів. У стаціонарному стані обидва ці процеси динамічно урівноважуються, ефективно переробляючи енергію, отриману від роботи зовнішніх сил, в тепло.

Провівши дослідження втрати стійкості стаціонарних станів термодинамічного потенціалу  $V(h_g)$ , визначені області формування різних граничних структур в залежності від значень першого та другого інваріантів  $\varepsilon_{ii}^e$ ,  $I_2$ , які представлені на рис. 2.1 (див. техніку побудови у роботах [74–76]).

Крива 1 на рис. 2.1 відображає критичний рівень реалізації першого максимуму термодинамічного потенціалу  $V(h_g)$ . Значення пружних деформацій, взяті нижче цієї кривої, приведуть до формування нульового невпорядкованого стаціонарного стану. Відповідно, розглядаючи пружні деформації вище цієї кривої формуються тільки ненульові впорядковані граничні структури. Збіжні лінії на рис. 2.1 визначають значення пружних деформацій, які формують критичні стаціонарні значення для щільності МЗ, що розділяють мінімум і ненульові максимуми термодинамічного потенціалу (див. вид залежності стаціонарних значень щільності МЗ  $h_{g0}$ ,  $h_g^m$  у роботі [76]). Відзначимо, що процес фрагментації починає реалізуватися тільки при досягненні пружними деформаціями деякої критичної величини, що відповідає межі текучості, що в резуль-

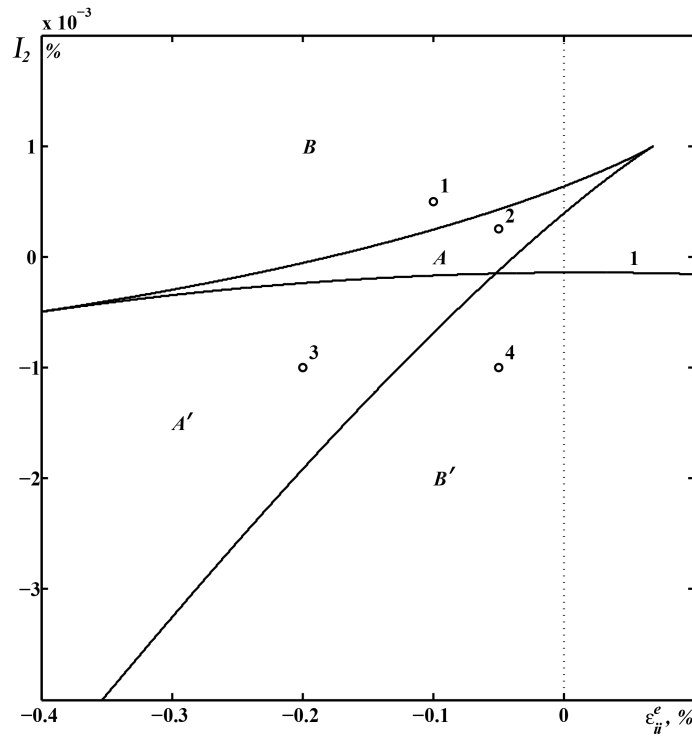


Рисунок 2.1 – Фазова діаграма режимів фрагментації [76].

таті приведе до утворення ненульових стаціонарних станів  $V(h_g)$ .

Відповідно рис. 2.1, фазова діаграма утворює чотири області фрагментації металевих зразків. В області  $A$  існують два ненульових максимуми термодинамічного потенціалу  $V(h_g)$  (див. поведінку  $V(h_g)$  у роботі [76]), і можливе співіснування двох граничних структур з великими зернами (перший максимум потенціалу) і більш дрібною СМК або НК структурою (другий максимум). Область  $A'$ , істотно відрізняється від області  $A$  тим, що перший максимум термодинамічного потенціалу взагалі має нульову щільність дефектів, при цьому зразок — майже монокристал. Єдиний нульовий стаціонарний стан  $V(h_g)$  (нульовий максимум), який відповідає реалізації монокристала або КЗПК, формується в області малих деформацій  $B'$ . При великих деформаціях в області  $B$  формуються одна гранична структура. Однак, важливо пам'ятати, що отримані розміри кристалітів є граничними лише для певних умов обробки, таких як швидкість деформування, температура і прикладений тиск, а також залежать від стану матеріалу до обробки (фаз речовини, хімічного складу, а також кількості структурних дефектів  $h_m$ , де  $m = g, D$ ).

Перехід між граничними структурами може реалізуватися безпосередньо під час ІПД [114, 117, 120, 122, 123]. Після зупинки процесу обробки структура матеріалу далі не еволюціонує, а залишається у тому стані, в якому вона перебувала на момент припинення обробки, так як для подальшої еволюції у будь-яку сторону, як мінімум необхідно пластичний плин. При цьому, може відбуватися деяка теплова релаксація, однак вона практично не зачіпає дефектну структуру, а тільки може лише трохи перерозподілити компонентний склад, розглядаючи сплави, або перерозподілити точкові дефекти. Система у цьому випадку прийде до теплової рівноваги, але в ряді випадків може залишатися у нерівноважному структурному стані.

Таким чином, отримана фазова діаграма (рис. 2.1) дозволяє у загальному вигляді зобразити можливі сценарії і режими поведінки системи еволюційних рівнянь, і може зіграти важливу роль з точки зору технічних застосувань запропонованої моделі.

Використовуючи метод фазової площини [124–127], проведемо дослідження дводефектної системи (2.3), (2.4). Розглянутий підхід дозволяє побудувати фазові портрети, класифікувати тип і визначити стійкість стаціонарних станів. Отримані фазові портрети на рис. 2.2 [128] містять нерухомі точки (стаціонарні стани), до яких прагнуть або віддаляються всі фазові траєкторії системи. Кількість особливих точок обумовлюється характером прикладеного навантаження під час ІПД обробки, і, в даному випадку, визначається згідно з фазовою діаграмою (ФД) на рис. 2.1. Так в областях  $(A, A')$  існують три нерухомі точки  $O, S$  і  $D$ , а в областях  $(B, B')$  — тільки одна  $D$  (або  $O$ ).

Досліджуючи за допомогою першого методу Ляпунова, стійкість стаціонарних розв'язків системи (2.3), (2.4), визначені показники Ляпунова  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2$ ), які виступають характеристикою руху динамічної системи у фазовій площині. Таким чином, загальний вираз для показників Ляпунова, який справедливий для будь-яких особливих точок системи (2.3), (2.4) обчислюється

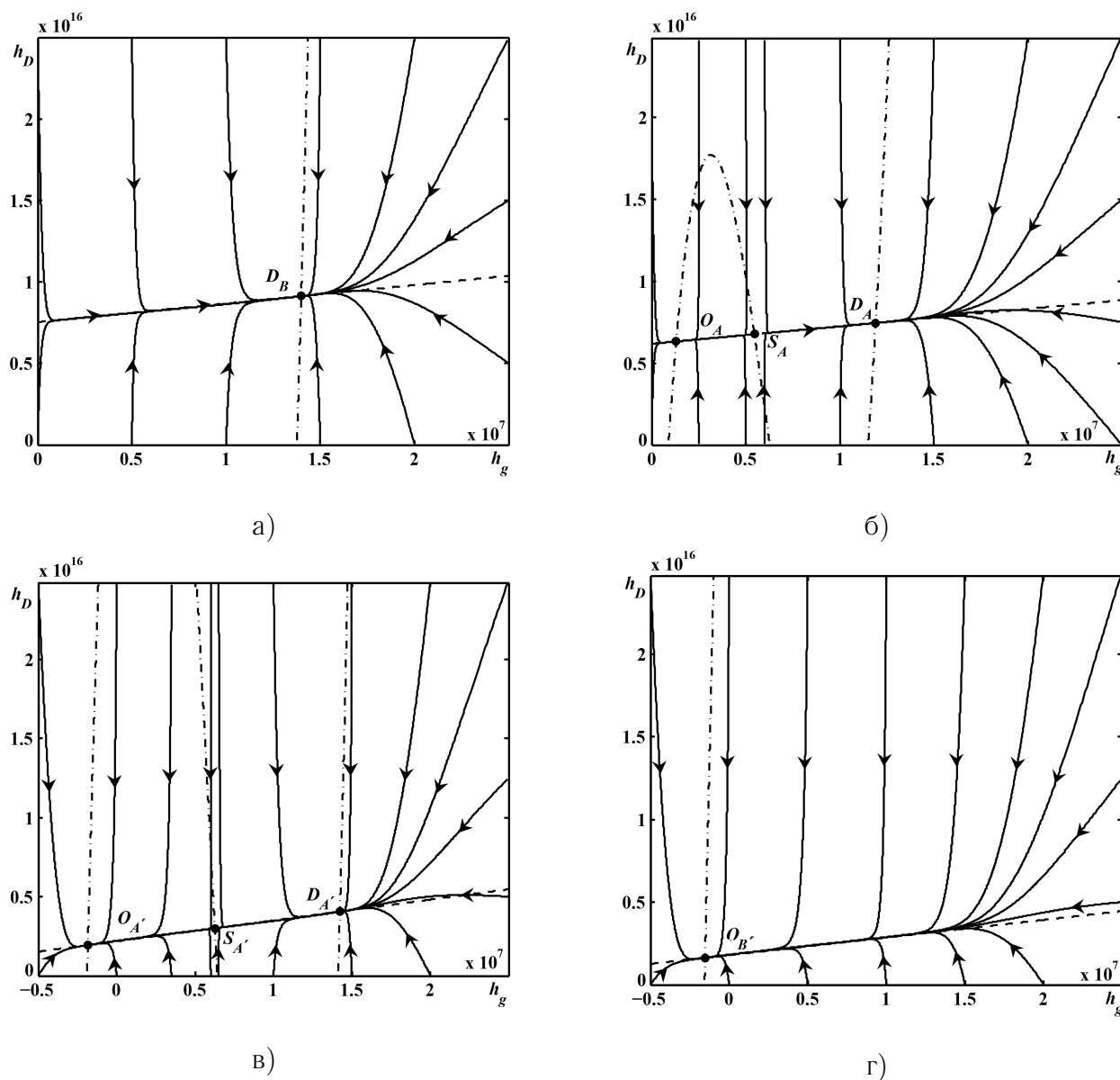


Рисунок 2.2 – Фазові портрети режимів фрагментації металів або сплавів у процесі ІПД. Залежності на малюнках а – г відповідають точкам 1 – 4 ФД (рис. 2.1), побудовані при значеннях  $\tau_{h_D} = 1/\gamma_D = 3^{-1} \cdot 10^{-25}$  [Дж · м · с],  $\tau_{h_g} = 1/\gamma_g = 10^{-6}$  [Дж · м<sup>-1</sup> · с] і часовому кроці  $dt = 6 \cdot 10^{-7}$  [с]. Тут і на подальших рисунках штрихпунктирні лінії відображають точки, в яких фазові траєкторії мають вертикальні дотичні, а штрихові — горизонтальні. Час  $t$  виміряно в секундах [128].

відповідно до співвідношення:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -B_\lambda \pm \sqrt{B_\lambda^2 - 4C_\lambda} \right), \quad (2.11)$$

де

$$B_\lambda = \tau_{h_D}^{-1} \varphi_{1D} + \tau_{h_g}^{-1} \left( \varphi_{1g} - 2\varphi_{2g} h_{gn}^{st} + 3\varphi_{3g} (h_{gn}^{st})^2 \right), \quad (2.12)$$

$$C_\lambda = \tau_{h_D}^{-1} \tau_{h_g}^{-1} \left( -\varphi_{gD}^2 + \varphi_{1D} \varphi_{1g} - 2\varphi_{1D} \varphi_{2g} h_{gn}^{st} + 3\varphi_{1D} \varphi_{3g} (h_{gn}^{st})^2 \right). \quad (2.13)$$

Оскільки, явний аналітичний вираз для координат особливих точок є достатньо складним, введено загальне позначення —  $(h_{Dn}^{st}, h_{gn}^{st})$ , де  $n = 1, \dots, 3$ .

Аналіз отриманих виразів (2.11) дозволяє класифікувати тип і визначити характер стійкості нерухомих точок  $O(h_{D1}^{st}, h_{g1}^{st})$ ,  $S(h_{D2}^{st}, h_{g2}^{st})$  і  $D(h_{D3}^{st}, h_{g3}^{st})$  (стаціонарних станів) системи (2.3), (2.4). Отже, відповідно до виду підкореневого виразу в (2.11) очевидно, що показники Ляпунова приймають тільки дійсні значення, оскільки при будь-якому ступені пружних деформацій  $\varepsilon_{ij}^e$  реалізуються додатні величини  $B_\lambda^2 - 4C_\lambda \geq 0$ . Тому всі особливі точки двохдефектної системи (2.3), (2.4) можуть бути тільки двох типів: “вузол” або “сідло”. Визначення критичних умов для керуючих параметрів  $\varepsilon_{ii}^e$  і  $I_2$ , при яких вирази (2.11) змінюють свої значення, дозволяє однозначно встановити тип всіх точок.

На рисунку 2.3 в координатах  $h_g^{st} - \varepsilon_{ii}^e$  представлена діаграма, яка наочно демонструє отримані критичні вирази [128] для великого діапазону можливих граничних структур. Як видно, утворюються три області, при чому дві області  $N^{st}$  і  $N$  демонструють умови формування стійких і нестійких особливих точок (стаціонарних структур) типу “вузол”, а область  $S$  — відповідає реалізації “сідла”.

Суцільні криві на рис. 2.3 відображають межі формування стаціонарних структур, а штрихова лінія демонструє межу стійкості впорядкованих конфігурацій. У разі формування “вузла” для значень пружної об’ємної деформації, розташованих нижче штриховий кривої формуються нестійкі граничні структури. Однак, такі стаціонарні структури, згідно діаграмі (рис. 2.3), можливі лише при великих пружних нормальних деформаціях, які на практиці, при обробці ІПД металевих зразків, не реалізуються. Відповідно до визначення

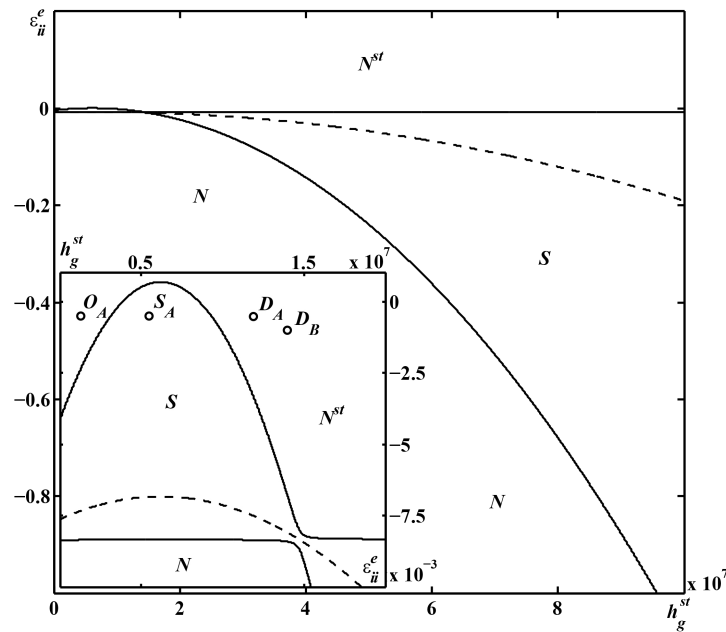


Рисунок 2.3 – Діаграма областей формування особливих точок (стаціонарних структур) різних типів. Об'ємна пружна деформація  $\varepsilon_{ii}^e$  приймає фактичні значення [128].

повної деформації (2.7), очевидно, що значення пружних деформацій можуть досягати набагато менших значень (0.2 – 0.8 %), у порівнянні з пластичними (20 – 40 %), однак, з появою пластичних складових, пружні — не зникають. Тільки у разі, коли  $\varepsilon_{ij}^p \gg \varepsilon_{ij}^e$  (зазвичай при  $\varepsilon_{ij} > 1\%$  деформації вважаються істотними), значеннями пружних деформацій нехтують, що спостерігається при пластичній деформації в технологічних процесах і т.д. [119].

Таким чином, представлена на рис. 2.3 діаграма дозволяє підібрати оптимальні значення для пружних нормальних деформацій  $\varepsilon_{ii}^e$ , які сприяють найбільш ефективному формуванню рівномірно розподілених СМК або НК структур, що володіють високими концентраціями дефектів і стабільними фізико-механічними властивостями. Крім того, в залежності від сталих стаціонарних значень для щільності МЗ  $h_g^{st}$  при фіксованій величині пружних нормальних деформацій  $\varepsilon_{ii}^e = const$ , за допомогою діаграми легко визначається тип граничної структури і її стійкість, а також, способом варіації  $\varepsilon_{ii}^e$ , можна забезпечити формування стійких стаціонарних конфігурацій з необхідною щільністю дефектів.

Головна відмінність при порівнянні рис. 2.3 з ФД на рис. 2.1 полягає в

тому, що ФД визначає тільки кількість сформованих граничних структур (стаціонарних станів), а діаграма на рис. 2.3 — їх стійкість. Очевидно, що в рамках даної дводефектної системи (2.3), (2.4) реалізація стійких стаціонарних станів повністю визначається встановленим діапазоном пружних нормальних деформацій  $\varepsilon_{ii}^e$ , які, згідно з рис. 2.3, лежать в межах областей  $N^{st}$  и  $S$ . Відповідні значення пружних зсувних деформацій  $I_2$ , згідно рис. 2.1, визначають вже кількість стійких станів і дозволяють впливати на формування більш дрібної СМК або НК структури.

Таким чином, аналіз показників Ляпунова демонструє, що точки  $O(h_{D1}^{st}, h_{g1}^{st})$  і  $D(h_{D3}^{st}, h_{g3}^{st})$  в фазовій площині представляють стійкий “вузол”, а  $S(h_{D2}^{st}, h_{g2}^{st})$  є “сідлом”. При цьому, отримані діаграми дозволяють встановити оптимальні значення для першого і другого інваріантів  $\varepsilon_{ii}^e$  и  $I_2$ , на підставі яких можна сформулювати стаціонарну, рівномірно розподілену СМК або НК структуру з високими концентраціями дефектів.

### 2.2.2 Вплив часів релаксації на кінетику дводефектної системи

Дослідимо вплив часів релаксації основних нерівноважних змінних  $\tau_{h_m}$  ( $m = g, D$ ) на кінетику дводефектної системи [127]. Згідно з дослідженням стійких стаціонарних станів у попередньому підрозділі, очевидно, що в цілому різні співвідношення часів релаксації не приведуть до якісних (біфуркаційних) змін фазової кінетики, а лише сприяють прояву універсальної кінетичної поведінки [128].

На рис. 2.4 і рис. 2.6 представлені фазові портрети системи, які цілісно описують поведінку структурних дефектів під час ІПД при різних значеннях часів релаксації. Розглянуті випадки, згідно ФД на рис. 2.1, відповідають двом режимам фрагментації. Відповідно, рис. 2.4 побудований для великих деформацій з області  $B$  при нормальному  $\sigma_{ii}^e \approx -10^{-3} \mu$  [Па] і зсувному



$\sigma_{ij}^e \approx 2.2 \cdot 10^{-3} \mu$  [Па] пружних напруженнях (точка 1 на рис. 2.1)<sup>6</sup>, а рис. 2.6 відображає реакцію системи на пружні напруження  $\sigma_{ii}^e \approx -5 \cdot 10^{-4} \mu$  [Па] і  $\sigma_{ij}^e \approx 1.6 \cdot 10^{-3} \mu$  [Па] з області  $A$  (точка 2 на рис. 2.1). Штрихові і штрихпунктирні лінії на рис. 2.4 і рис. 2.6 визначають точки ізоклін, фазові траєкторії в яких матимуть горизонтальні і, відповідно, вертикальні дотичні. Ізокліни отримані в результаті обернення похідних у рівняннях (2.3) і (2.4) в нуль. Отже, штрихпунктирні криві відповідають параметрам теорії, при яких щільність МЗ  $h_g$  не змінюється, а штрихові лінії відповідають перманентному стану щільності дислокацій  $h_D$ . При цьому, в точках перетину цих ліній формуються стаціонарні стани системи, кількість та стійкість яких, як зазначалося раніше, визначається характером механічної обробки матеріалу, і реалізується відповідно до представлених на рис. 2.1 і 2.3 діаграм [76, 128].

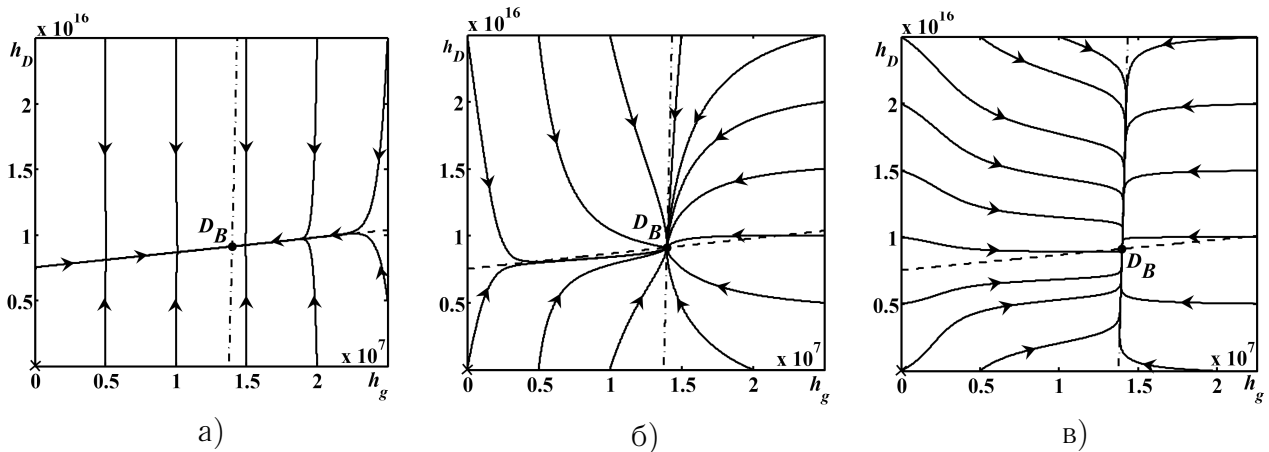


Рисунок 2.4 – Фазові портрети двохдефектної системи (2.3), (2.4) при пружних деформаціях  $\varepsilon_{ii}^e = -0.1$  [%],  $I_2 = 5 \cdot 10^{-4}$  [%] (точка 1 на рис. 2.1) і значеннях часів релаксації: (а)  $\tau_{h_g} > 10^{-1} \tau_{h_D}$ ; (б)  $10^{-1} \tau_{h_g} > \tau_{h_D}$ ; (в)  $10^{-2} \tau_{h_g} > \tau_{h_D}$ .

Інерційні властивості двохдефектної системи вивчаються в рамках наступних випадків, для яких відповідні часи релаксації приймають значення  $10^{-1} \tau_{h_D}$ ,  $10^{-1} \tau_{h_g}$  і  $10^{-2} \tau_{h_g}$ . У першому випадку розглядається фазова динаміка системи при прискоренні еволюції щільності дислокацій  $h_D$ , в двох наступних — прискоренні процесу фрагментації МЗ  $h_g$ . Відзначимо, що всі отримані раніше залежності (рис. 2.2) реалізуються при значеннях  $\tau_{h_D} = 1/\gamma_D =$

<sup>6</sup>Припускається, що зсувні деформації визначаються значеннями  $I_2$ ,  $\mu$  — це модуль зсуву для відповідного матеріалу.

$3^{-1} \cdot 10^{-25}$  Дж · м · с,  $\tau_{h_g} = 1/\gamma_g = 10^{-6}$  Дж · м<sup>-1</sup> · с, які, згідно з експериментальними даними, відображають природній хід еволюції структури матеріалу [70–73, 117, 129, 130]. На початкових стадіях обробки зазвичай відбувається швидке накопичення щільності дислокацій, які в подальшому рекомбінують і перерозподіляються по атомарним площинам, що в результаті приводить до формування пористої структури і подрібнення кристалітів за рахунок реалізації пластичної течії. Однак не можна виключати інші сценарії в еволюції структурних дефектів, тому дослідимо поведінку системи (2.3), (2.4) при відхиленні від цих величин.

В цілому, у динаміці нерівноважних змінних можна виділити два етапи: на першому відбувається миттєва релаксація системи до однієї з ліній ізоклін, що визначається в залежності від значень кінетичних коефіцієнтів  $\gamma_m$  ( $m = g, D$ ), а на другий — повільний рух уздовж цих кривих. Оскільки, на другій стадії рух здійснюється повільно, то можна вважати, що в будь-який момент часу виконується умова стаціонарності. Тому, в цьому випадку відбувається повільне упорядкування в кристалічній структурі оброблюваного матеріалу, що супроводжується динамічним урівноваженням всіх внутрішньо-протікаючих процесів пов'язаних як з генерацією, так і анігіляцією структурних дефектів.

Таким чином, фазовий портрет, представлений на рис. 2.4(а), відповідає випадку  $\tau_{h_g} > 10^{-1}\tau_{h_D}$ , який демонструє прискорення процесу утворення дислокацій і, відповідно, характеризується більш швидкою їх релаксацією до стаціонарного стану. Про це також свідчить поява лінійної ділянки, до якої згодом еволюціонують всі фазові траєкторії. На першому етапі щільність МЗ  $h_g$  навпаки, швидко зменшується вище лінійної ділянки, або збільшується, розглядаючи початкові наближення нижче від особливої лінії. Як видно, на другому етапі система перебуває тривалий час, оскільки особливий ділянка розташована дуже близько до лінії ізоклін (штрихова крива). У той же час, нерівноважні змінні в ході фрагментації металу при ІПД зазнають структурно-фазові

перетворення, оскільки супроводжуються різкими переходами від малих значень до великих. Згідно з рисунком, лінійна ділянка практично повністю накладається на штрихову криву, що відповідає стаціонарності  $h_D$ , тому очевидно, що при подальшому зменшенні параметра  $\tau_{h_D}$  особлива область буде подовжуватися уздовж цієї лінії (див. рис. 2.2), що на границі можна розглядати як адіабатичне наближення  $\tau_{h_g} \gg \tau_{h_D}$ . При цьому час релаксації системи до стійкого стану (особливої точки  $D_B$ ) повністю визначається еволюцією щільності МЗ  $h_g$ .

Відповідно часовій залежності, представленийій кривою 1 на рис. 2.5(а), видно, що конфігуративна точка здійснює швидкий рух по траєкторії, яка розташована за межами лінійної ділянки. При попаданні в особливу область рух істотно сповільнюється, при цьому, як зазначалося раніше, ефект уповільнення проявляється тим сильніше, чим більше зменшувати  $\tau_{h_D}$ . Зіставляючи часову залежність пройденого шляху кінетиці щільностей структурних дефектів [131], видно, що процес встановлення стаціонарного режиму при  $10^{-1}\tau_{h_D}$  сповільнюється приблизно в 10 разів.

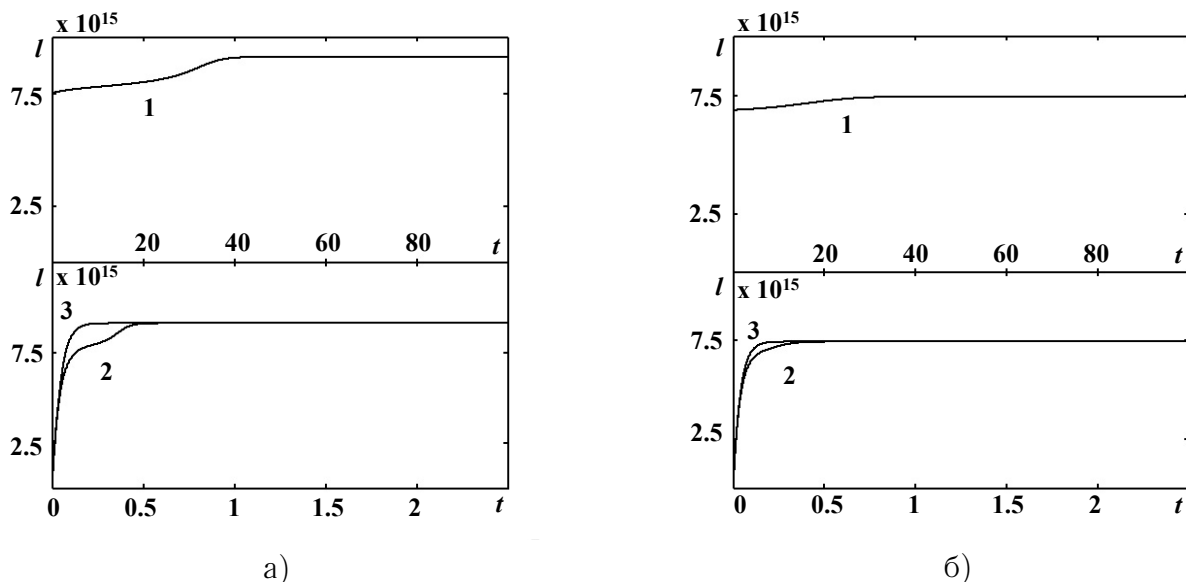


Рисунок 2.5 — Часові залежності пройденого конфігуративними точками шляхів  $l$  по фазовим траєкторіям: (а) крива 1 відповідає фазовому портрету на рис. 2.4(а), крива 2 — рис. 2.4(б) та крива 3 — рис. 2.4(в); (б) крива 1 відповідає випадку, представленою на рис. 2.6(а), крива 2 — рис. 2.6(б) і крива 3 — рис. 2.6(в). Початок шляху  $l$  позначено хрестиком на відповідних малюнках.

Рисунок 2.4(б) побудований для випадку, коли час релаксації щільності дефектів задається виразом  $10^{-1}\tau_{h_g} > \tau_{h_D}$ , який, у порівнянні з попереднім випадком, представляє уповільнення кінетики нерівноважного параметра  $h_D$  ( $\tau_{h_g} > 10\tau_{h_D}$ ) або прискорення формування впорядкованих станів у результаті швидкої релаксації щільності МЗ  $h_g$ . Як видно, у даному випадку особливі ділянки практично не формуються. Процес фрагментації протікає інтенсивно і система швидко еволюціонує до стійкого стаціонарного стану. Можна зробити висновок, що структурні дефекти надають взаємноінтенсифікаційну (підсилювальну) дію один на одного у процесі ІПД, що також може проявлятися під впливом і інших, неврахованих, типів дефектів під час фрагментації металу або сплаву і сприяти поясненню багатьох спостережуваних на практиці явищ [132].

Розглядаючи рух конфігуративної точки, шлях якої представлений кривою 2 на рис. 2.5(а), очевидно, що спочатку здійснюється швидкий рух по фазовій траєкторії, в результаті якого система відчуває інтенсивне енергетичне “насичення” за рахунок зростання внутрішньої енергії. Після досягнення деякого значення дефектності, процес істотно сповільнюється і в кристалічній структурі матеріалу здійснюється відносно повільне впорядкування. Однак при цьому, для встановлення стаціонарного режиму буде потрібно в кілька разів менше часу у порівнянні з еволюційними кривими в [131].

Фазовий портрет на рис. 2.4(в) відповідає випадку  $10^{-2}\tau_{h_g} > \tau_{h_D}$ . Тут, аналогічно рис. 2.4(а), виділено два етапи: відносно швидка релаксація до майже вертикальної лінійної ділянки, яка близька до штрихпунктирної лінії ізоклін, і подальший повільний рух уздовж неї, що також спостерігається в динаміці кривої 3 на рис. 2.5(а). Однак, особлива ділянка досягається вже в результаті відносно малих змін  $h_D$  і швидкої релаксації  $h_g$ , якщо початкові наближення розташовані правіше від штрихпунктирної кривої, або за рахунок інтенсивного зростання щільності МЗ при розташуванні  $h_{g0}(t = 0)$  зліва. При цьому, час, витрачений на формування стаціонарного стану, виявляється

меншим у порівнянні з протікаючим процесом згідно кривої 2 на рис. 2.5(а) і еволюцією системи при  $\tau_{h_g} > \tau_{h_D}$  [131]. Очевидно, що зменшення параметра  $\tau_{h_g} \rightarrow 0$  приведе до перманентності  $h_D$  на першій стадії реалізації процесу фрагментації і, надалі, до більш вираженої майже вертикальної лінійної ділянки, яка на границі повністю співпадає з лінією ізоклін, що можна розглядати як зворотне адіабатичне наближення  $\tau_{h_D} \gg \tau_{h_g}$ .

Таким чином, універсальність кінетичної поведінки двохдефектної системи проявляється як при наближенні до прямої  $\tau_{h_g} \gg \tau_{h_D}$ , так і до зворотної  $\tau_{h_D} \gg \tau_{h_g}$  адіабатики. У першому випадку, вихід на лінійну, майже горизонтальну, ділянку відбувається у результаті швидкої еволюції щільності дислокацій  $h_D$  при практично перманентному стані нерівноважного параметра  $h_g$  (рис. 2.4(а)), у другому спостерігається зворотна картина — значення щільності МЗ  $h_g$  змінюються дуже швидко, а щільність дислокацій незначною мірою (рис. 2.4(в)). У проміжній області (рис. 2.4(б)), універсальність практично не проявляється. Загалом, спостереджуваним особливим ділянками можна придати значення притягувальної множини, позначеної в роботі [133] як “русло великої річки”, що характерно для різних фізичних систем [134–136]. При цьому, універсальність кінетичної картини фазового переходу полягає у тому, що незалежно від початкових умов з наближенням до адіабатичної межі  $\tau_{h_D} \rightarrow 0$  (рис. 2.4(а)) або  $\tau_{h_g} \rightarrow 0$  (рис. 2.4(в)) система швидко еволюціонує до відповідної особливої ділянки, положення якої залежить тільки від способу механічної обробки і власне значень  $\varepsilon_{ii}^e$ ,  $I_2$ , і в подальшому повільно розвивається вздовж цих траєкторій.

На рис. 2.6 зображені фазові портрети для таких же співвідношень часів релаксації, що і рис. 2.4, однак при пружній деформації, що визначає можливість одночасного існування двох граничних структур. Тут, як говорилося раніше, реалізуються два стійких стаціонарних стани (точки  $O_A$  та  $D_A$ ), що відповідають впорядкованим фазам або максимумам термодинамічного потенціалу  $V(h_g)$ , і один нестійкий в особливій точці  $S_A$ , який відповідає неупо-

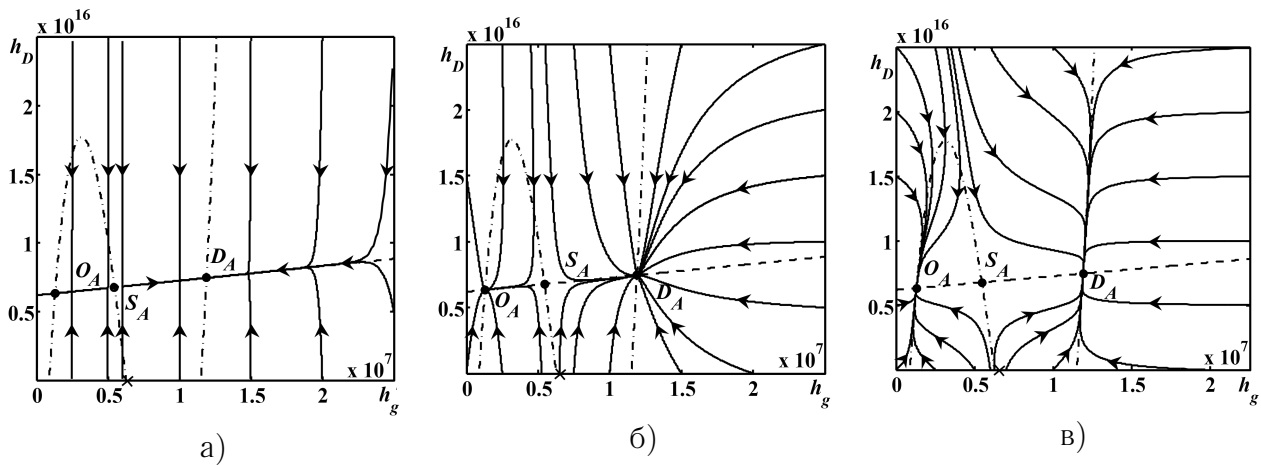


Рисунок 2.6 – Фазові портрети двохдефектної системи (2.3), (2.4) при пружних деформаціях  $\varepsilon_{ii}^e = -0.05$  [%],  $I_2 = 2.5 \cdot 10^{-4}$  [%] (точка 2 на рис. 2.1) і значеннях часів релаксації: (а)  $\tau_{h_g} > 10^{-1}\tau_{h_D}$ ; (б)  $10^{-1}\tau_{h_g} > \tau_{h_D}$ ; (в)  $10^{-2}\tau_{h_g} > \tau_{h_D}$ .

рядкованій фазі або мінімуму  $V(h_g)$ . Зауважимо, що в даному випадку, фазові портрети на рис. 2.6 відображають зміни, характерні для фазових переходів першого роду [134, 137]. Отже, в залежності від варіювання величини  $\tau_{h_m}$  ( $m = g, D$ ), формуються одночасно дві лінійних ділянки (визначені як “русло великої річки”), до яких згодом прагнуть все фазові траєкторії. Одночасне існування цих ділянок пояснюється природою штрихпунктирної кривої і характерними умовами для пружної деформації (значеннями  $\varepsilon_{ii}^e$  і  $I_2$ ), при яких стаціонарне кубічне рівняння має три розв’язки. Таким чином, очевидно, що на фазових портретах з’являється додаткова “репеллерна” ділянка, яка проходить через сідлову точку  $S_A$  (див. штрихпунктирну криву) і відображає перехід системи через енергетичну яму (див. вид термодинамічного потенціалу  $V(h_g)$  в [74–76]), що розділяє лінійні області. При цьому фазові траєкторії, за певних умов, огинають цю ділянку, віддаляючись з часом від лінії її розташування.

Застосовуючи необхідну умову існування екстремуму до рівняння ізоклін, фазові траєкторії в яких матимуть вертикальні дотичні (тобто до штрихпунктирної кривої), отримуємо вираз для точок перегину

$$h_g^{S1,2} = \frac{2\varphi_{2g} \pm \sqrt{4\varphi_{2g}^2 - 12\varphi_{3g} \left( \varphi_{1g} - \frac{\varphi_{gD}^2}{\varphi_{1D}} \right)}}{6\varphi_{3g}}, \quad (2.14)$$

що розділяють максимуми з мінімумом на стаціонарній кривій  $h_g$ , або точки позначаючі межі “репеллерної” ділянки, положення якої, також як і всієї штрихпунктирної кривої, визначається зовнішніми умовами (величиною  $\varepsilon_{ii}^e$  та  $I_2$ ).

При  $\tau_{h_g} > 10^{-1}\tau_{h_D}$  спостерігається поведінка системи, представлена на рис. 2.6(а). Тут, як і на рис. 2.4(а), фазові траєкторії швидко еволюціонують до лінійних ділянок, близьких до штрихової лінії ізоклін, при збереженні значень змінної  $h_g$ . Розглядаючи початкові наближення зліва від особливої точки  $S_A$ , оскільки ділянка “репеллера” при даному співвідношенні часів релаксації практично не проявляється, формується перша лінійна область, уздовж якої система повільно релаксує до стаціонарного стану  $O_A$ . Друга ділянка, що демонструє протяжну еволюцію системи до впорядкованої фази у точці  $D_A$ , реалізується при початкових умовах, розташованих праворуч від  $S_A$ . Однак, в залежності від розташування початкових умов відносно особливих ділянок, процес їх досягнення на першому етапі обробки матеріалу супроводжуватиметься як миттєвою генерацією, так і анігіляцією щільності дислокацій  $h_D$ . З наближенням до адіабатичної межі  $\tau_{h_D} \rightarrow 0$ , як і для випадку на рис. 2.4(а), спостерігається уповільнення реалізації стаціонарних режимів, що також можна виявити вивчаючи часову залежність пройденого шляху по фазовій траєкторії (крива 1 на рис. 2.5(б)).

Досліджуючи наближення до зворотної адіабатики  $\tau_{h_D} \gg \tau_{h_g}$ , якій відповідають випадки на рис. 2.6(б),(в), видно, що зі зменшенням параметра  $\tau_{h_g}$  в універсальній поведінці системи спостерігається плавний перехід від майже горизонтальних лінійних ділянок до більш вертикальних. При цьому, загальний час еволюції до стійких стаціонарних станів, на відміну від попереднього випадку на рис. 2.6(а), з наближенням до границі  $\tau_{h_g} \rightarrow 0$  зменшується, що також проявляється в еволюції кривих 2, 3 на рис. 2.5(б). Вивчаючи особливості фазової динаміки нерівноважних змінних на рис. 2.6(в), чітко спостерігається формування трьох особливих ділянок, дві з яких мають притягувальний ха-

ракти і визначаються як “русло великої річки”, а третя, яка розділяє майже вертикальні ділянки, має протилежну природу, більш відому як “репеллер”. Як бачимо, фазові траєкторії системи прагнуть уникнути перетинання з областю “репеллера”. Очевидно, що з подальшим зменшенням часу релаксації щільності МЗ  $\tau_{hg}$ , майже вертикальні ділянки будуть подовжуватися уздовж штрихпунктирної залежності, а на границі повністю співпадут з стаціонарною кривою.

Таким чином, універсальність фазової динаміки нерівноважних змінних спостерігається в основному з наближенням системи до адіабатичних границь, які задаються прямим  $\tau_{hg} \gg \tau_{hD}$  і зворотним  $\tau_{hD} \gg \tau_{hg}$  межами для будь-якого режиму фрагментації. Безумовно, з точки зору опису процесів, що спостерігаються і природи фрагментації металів або сплавів під час ІПД більш інформативно досліджувати точну кінетику двохдефектної системи (2.3), (2.4), проте розгляд граничних адіабатичних підходів грає не менш важливу роль, оскільки дозволяє отримати додаткові залежності, що визначають умови існування декількох граничних структур і дозволяють підібрати оптимальні значення для пружних деформацій, які сприяють найбільш ефективному формуванню впорядкованої СМК або НК структури з високими концентраціями дефектів і стабільними фізико-механічними властивостями. Тому важливо розуміти поведінку кристалічної структури матеріалу в граничних адіабатичних випадках.

### 2.3 Фазова діаграма з урахуванням впливу шуму

Здійснюючи повне перетворення Лежандра по обом видам зв'язаної енергії, отримуємо вираз для густини вільної енергії у вигляді [71]:

$$f = u - Ts - \varphi h. \quad (2.15)$$



Тут  $u$  – густина внутрішньої енергії,  $T$ ,  $s$  – температура та ентропія;  $\varphi$  и  $h$  – спряжена пара термодинамічних змінних – середня енергія дефекту та щільність дефектів.

Оскільки точний аналітичний вираз для вільної енергії не відомо, розглянемо спрощену модель, розклавши вільну енергію в ряд за її аргументами до кубічних внесків:

$$f(\varphi, T) = f_0 - h_0\varphi + \frac{1}{2}a\varphi^2 - \frac{1}{3}b\varphi^3 + \alpha\varphi\Delta T + \beta\varphi^2\Delta T - \gamma(\Delta T)^2. \quad (2.16)$$

При цьому коефіцієнти задаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} f_0 &= f'_0 + \frac{1}{2}\lambda(\varepsilon_{ii}^e)^2 + \mu(\varepsilon_{ij}^e)^2, \\ h_0 &= h'_0 - g\varepsilon_{ii}^e + \frac{1}{2}\bar{\lambda}(\varepsilon_{ii}^e)^2 + \bar{\mu}(\varepsilon_{ij}^e)^2, \\ a &= a' - 2e\varepsilon_{ii}^e, \quad \alpha = \alpha' + \alpha_g\varepsilon_{ii}^e, \end{aligned} \quad (2.17)$$

де  $\Delta T = T - T_0$ ,  $T_0$  – початкова температура, сталі  $h'_0$ ,  $a'$ ,  $b$  показують залежність вільної енергії квазірівноважної підсистеми від густина енергії меж зерен при відсутності зовнішніх впливів. Інші параметри описують зовнішні механічні, температурні або змішані впливи. Пружні напруження враховуються з точністю до квадратичних внесків через перші два інваріанта тензора деформацій  $\varepsilon_{ii}^e$ ,  $(\varepsilon_{ij}^e)^2 \equiv \varepsilon_{ij}^e\varepsilon_{ji}^e$ . Оскільки описується типовий для ПД процес стиснення деформованого об'єкта, покладається  $\varepsilon_{ii}^e < 0$ . У даному випадку припускається, що головним дефектом металу, є найбільший дефект структури – межа зерна, а решта дефектів можуть бути враховані значеннями параметрів теорії.

Фактично, всі добре відомі дислокаційні механізми пластичної деформації (див., наприклад, огляди по цій проблемі [63, 64]) беруть участь у формуванні нової межі зерна. Однак їх врахування здійснюється вибором ефективною сталої теорії  $h_0$ , яка являється ефективною щільністю дефектів більш глибоких структурних рівнів або джерело підвищення енергії меж зерен, тобто, ступеня їх нерівноважності (див. еволюційні рівняння (2.19)-(2.20)). Розпад

сильно нерівноважних меж приводить до їх розмноження, іншими словами, до подрібнення зерен.

Раніше був досліджений детерміністичний підхід, який дозволив описати існування граничної зернистої структури. Була також побудована фазова діаграма в координатах пружної частини першого та другого інваріанта тензора деформації, яка визначила області реалізації різних типів граничних структур. Досліджуємо тепер вплив адитивних шумів на формування областей фазового діаграми.

Запишемо еволюційні рівняння:

$$\tau_{\varphi}\dot{\varphi} = -\frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad \tau_T\dot{T} = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad (2.18)$$

де  $\tau_{\varphi}$  и  $\tau_T$  — часи релаксації відповідних величин, що характеризують інерційні властивості системи.

Продиференціював вільну енергію за температурою  $T$  і енергією дефекту  $\varphi$ , отримуємо двохпараметричну систему рівнянь для параметрів стану:

$$\tau_{\varphi}\dot{\varphi} = -h_0 + a\varphi - b\varphi^2 + \alpha\Delta T + 2\beta\varphi\Delta T + \sqrt{I_{\varphi}}\xi_1(t), \quad (2.19)$$

$$\tau_T\dot{T} = \alpha\varphi + \beta\varphi^2 - 2\gamma\Delta T + \sqrt{I_T}\xi_2(t). \quad (2.20)$$

Варто відмітити, що в вільній енергії (2.16), на відміну від [71], нами враховані два додаткових доданки. Перший із них дозволяє ввести від'ємний зворотний зв'язок між  $\varphi$  и  $T$  у рівнянні (2.19), другий необхідний для опису самоузгоджуваної поведінки  $\varphi$  и  $T$ . При введенні останнього доданку результуючий шум стає мультиплікативним (залежить від параметра  $\varphi$ ). При цьому він забезпечує не тільки переходи системи між мінімумами потенціалу, а й є причиною виникнення додаткових стаціонарних станів [138].

У праві частини рівнянь (2.19), (2.20) додані стохастичні складові, вони моделюють шуми із інтенсивностями  $I_{\varphi, T}$ , які виникають у наслідок впливу різних структурних неоднорідностей, включень, домішок, дефектів, теплових

флуктуацій і т.д. З точки зору параметра  $\varphi$  це означає, що в початковому стані в матеріалі одночасно є як великі, так і дрібні зерна (статичний шум або хаос), співвідношення між якими визначає конкурентну боротьбу і перекидання між різними структурними станами. Функції  $\xi_i(t)$  представляють  $\delta$  – корельовані стохастичні джерела (білий шум). Їх моменти визначаються наступним чином:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t), \xi_i(t') \rangle = 2\delta_{ij}\delta(t - t'). \quad (2.21)$$

Тут множник 2 обраний для того, щоб величина  $I(\varphi)$  (2.24) грала у відповідному рівнянні Фоккера-Планка роль коефіцієнта дифузії.

Використовуючи адіабатичне наближення  $\tau_\varphi \gg \tau_T$ , при якому еволюція температури  $T$  слідує за змінами параметра  $\varphi$ , отримуємо рівняння Ланжевена:

$$\tau_\varphi \dot{\varphi} = F(\varphi) + \sqrt{I(\varphi)}\xi(t), \quad (2.22)$$

де сила  $F$  задається співвідношенням:

$$F(\varphi) = h_0 - (a + \alpha^2/2\gamma)\varphi + (b - 3\beta\alpha/2\gamma)\varphi^2 - (\beta^2/\gamma)\varphi^3, \quad (2.23)$$

а ефективна інтенсивність шуму  $I$  виражається рівністю:

$$I(\varphi) = (\alpha + 2\beta\varphi)^2/(2\gamma)^2 I_T + I_\varphi, \quad (2.24)$$

яка впливає із властивості адитивності дисперсії гаусових випадкових величин [106].

Рівнянню (2.22) відповідає рівняння Фоккера-Планка в формі Іто [106, 138]:

$$\tau_\varphi \frac{\partial P(\varphi, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} [F(\varphi)P(\varphi, t)] + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} [I(\varphi)P(\varphi, t)], \quad (2.25)$$

З плином часу розподіл розв'язків рівняння (2.22) стає стаціонарним і його явний вигляд може бути знайдений з (2.25) при  $\partial P(\varphi, t)/\partial t = 0$ . У ре-

зультаті отримуємо відповідний стаціонарний розподіл

$$P(\varphi) = Z^{-1} \exp(-U(\varphi)), \quad (2.26)$$

який визначається нормуючою сталою  $Z$  та ефективним потенціалом:

$$U(\varphi) = \ln I(\varphi) - \int_0^\varphi \frac{F(\varphi')}{I(\varphi')} d\varphi'. \quad (2.27)$$

Досліджуючи стаціонарні стани густини енергії меж зерен  $\varphi$ , які задаються умовою існування екстремуму розподілу (2.26) (потенціалу (2.27)), виявлено, що стаціонарні стани, визначаючи режими фрагментації при ІПД, не залежать від інтенсивності шуму  $I_\varphi$ . Відзначимо, що максимуми ефективного потенціалу відповідають мінімумам функції розподілу, що відповідають нестійкому стану, а його мінімуми, відповідні максимумам функції розподілу – стійким.

На рисунку 2.7 показано розв'язки рівняння стаціонарних станів. Згідно з ними, при малих значеннях інтенсивності  $I_T$  існують три стаціонарні стани, два з яких відповідають мінімуму потенціалу  $U(\varphi)$  (суцільна і пунктирна крива), а один його максимуму (штрихпунктирна крива). Перший мінімум може досягатися при нульовому і ненульовому значеннях густини енергії меж зерен  $\varphi_0$  в залежності від значень  $(\varepsilon_{ij}^e)^2$ . Ненульові значення він приймає тільки у тому випадку, коли  $(\varepsilon_{ij}^e)^2$  більше деякої критичної величини. Це обумовлено тим, що при ІПД процес фрагментації може протікати, коли пружні деформації  $(\varepsilon_{ij}^e)$  і пов'язані з ними напруження  $\sigma_{ij}$  перевищують межу текучості. Стаціонарні стани у процесі ІПД досягаються тільки при виконанні цієї умови. Частина кривої може виявитися в нефізичній області уявних деформацій (крива 1). Другий мінімум завжди має ненульове значення. Менший із стаціонарних значень відповідає більшому розміру зерна (пунктирна крива на рис. 2.7), більший (суцільна) – меншому його розміру. Їх розділяє нестійкий стан (штрихпунктирна крива) при значенні густини енергії меж зерен  $\varphi^m$ , що

відповідає максимуму потенціалу. Слід зазначити, що нульовий мінімум відповідає крупнозернистому полікристалу, а на границі монокристалу. У випадку монокристала спочатку реалізується нульовий мінімум потенціалу, і тільки коли він стане ненульовим процес фрагментації починає протікати. Якщо зразок до ІПД вже має дрібнозернисту структуру (реалізується стан близький до ненульового мінімуму  $U(\varphi)$ ), то еволюція структури матеріалу до стаціонарних станів можлива навіть при малих значеннях  $(\varepsilon_{ij}^e)^2$ .

При збільшенні  $I_T$  залежність виходить з нефізичної області (крива 2), і при  $(\varepsilon_{ij}^e)^2 = 0$  зразок представляє собою монокристал (або крупнозернистий полікристал). Якщо підвищувати рівень деформації, то деякий час реалізується монокристал ( $\varphi_0 = 0$ ). При збільшенні  $(\varepsilon_{ij}^e)^2$  до значення, коли співіснують нульовий і ненульовий мінімуми потенціалу при недостатній інтенсивності шуму, який здійснює перекидання між мінімумами, процес фрагментації не може відбутися, тому що ці мінімуми розділені потенційним бар'єром (штрихпунктирна лінія). Потім нульовий мінімум стає ненульовим (пунктирна лінія), і відбувається безперервний процес фрагментації. При подальшому збільшенні деформації перший мінімум зникає разом з потенційним бар'єром, і система за механізмом фазового переходу першого роду різко переходить до стану, що описується другим мінімумом потенціалу (суцільна лінія). Даний перехід може здійснюватися і при наявності потенційного бар'єру за рахунок шуму, якщо його інтенсивність виявиться достатньою. При цьому відбувається різке зменшення розмірів зерен. Відомо, що при фазовому переході першого роду через наявність одночасно двох мінімумів термодинамічного потенціалу система може перебувати в двох метастабільних фазах [137]. Тут це означає співіснування граничних структур із різним розміром зерна.

Критичний вираз для другого інваріанту при  $\varphi = 0$  приймає вигляд:

$$(\varepsilon_{ij}^e)_c^2 = -\frac{1}{\mu} \left( h'_0 + g\varepsilon_{ii}^e + \bar{\lambda} (\varepsilon_{ii}^e)^2 / 2 - \alpha\beta I_T / \gamma^2 \right). \quad (2.28)$$

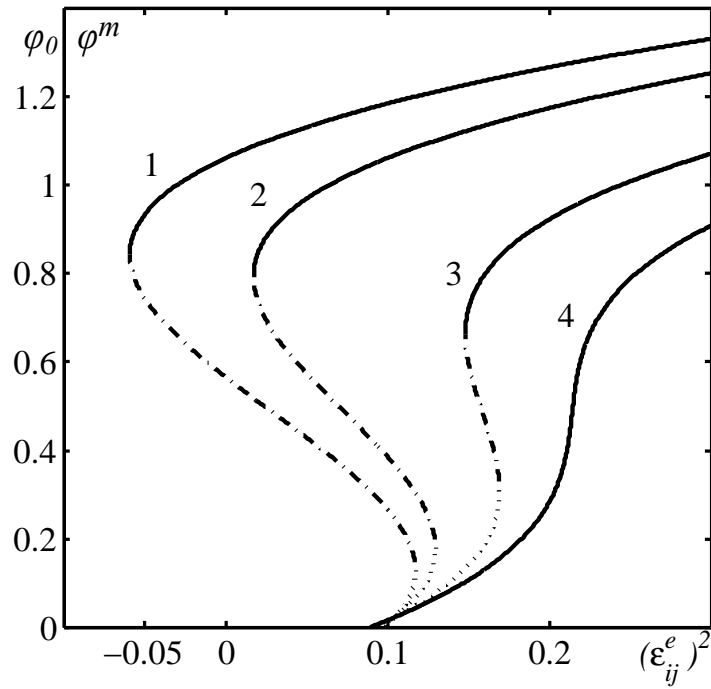


Рисунок 2.7 – Залежність стаціонарних значень густини енергії меж зерен  $\varphi_0$ ,  $\varphi^m$  від інваріанта  $(\epsilon_{ij}^e)^2$ . Криві 1-4 відповідають значенням  $I_T = 0.1, 0.22, 0.45, 0.6$ .

Співвідношення (2.28) представляє криву, нижче якої існує нульовий стаціонарний розв'язок рівняння (2.27), що відповідає мінімуму  $U(\varphi)$  в точці  $\varphi_0 = 0$ .

На рисунку 2.8 наведена фазова діаграма, де лінії відповідають межах втрати стійкості системи. Пряма 1, нижче якої можливий нульовий стаціонарний розв'язок, визначається виразом (2.28). При  $\varphi_0 = 0$  відсутній канал дисипації енергії, пов'язаний з утворенням дефектних структур, і система представляє собою монокристал, або структуру, близьку до нього. Точки 1-4 на фазовій діаграмі відповідають кривим потенціалу на рис. 2.9, який визначається мінімумами.

Область  $A$  відповідає реалізації двох ненульових мінімумів потенціалу  $U(\varphi)$  (крива 2 на рис. 2.9). Тут спостерігаються дві граничні структури з великим (перший мінімум потенціалу) і малими (другий мінімум) розмірами зерен.

Область діаграми  $A'$  подібна області  $A$ , але з тією відмінністю, що перший мінімум потенціалу тут нульовий (крива 1 рис. 2.9). Оскільки перша гра-

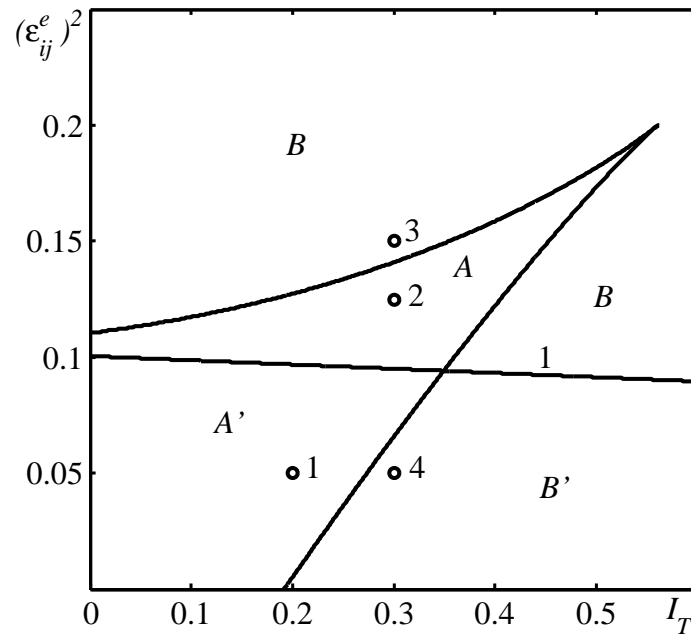


Рисунок 2.8 – Фазова діаграма системи з областями формування двох ( $A$ ,  $A'$ ) і однієї ( $B$ ,  $B'$ ) граничних структур.

нична структура формується при  $\varphi_0 = 0$ , вона представляє собою монокристал. У цій області малих деформацій у процесі ІПД фрагментація матеріалу може не реалізуватися. Однак, так як завжди позначається вплив шуму, який здійснює перехід системи між мінімумами потенціалу, тут скоріше будуть співіснувати дві граничні структури з різними розмірами зерен. Перша з них відповідає найбільшим монокристалічним зернам (нульовий мінімум потенціалу), друга – більш дрібним зернам.

В області великих деформацій  $B$ , відповідно до кривої 3, формується одна гранична структура, і розмір зерна тут мінімальний. При збільшенні  $(\varepsilon_{ii}^e)^2$  він буде зменшуватися, і на границі  $(\varepsilon_{ii}^e)^2 \rightarrow \infty$  оброблений зразок має аморфну структуру.

Єдиний нульовий мінімум  $U(\varphi)$  (крива 4 на рис. 2.9) реалізується в області малих деформацій  $B'$ . Тут система відповідає монокристалу, оскільки відсутній інший мінімум, в котрий у результаті дії шуму у процесі ІПД здійснюються переходи. Слід зазначити, що такі переходи можливі тільки безпосередньо під час ІПД. Завдяки їм, в областях  $A$ ,  $A'$  формуються дві граничні структури, що відповідає режиму, при якому має місце суміш зерен різного

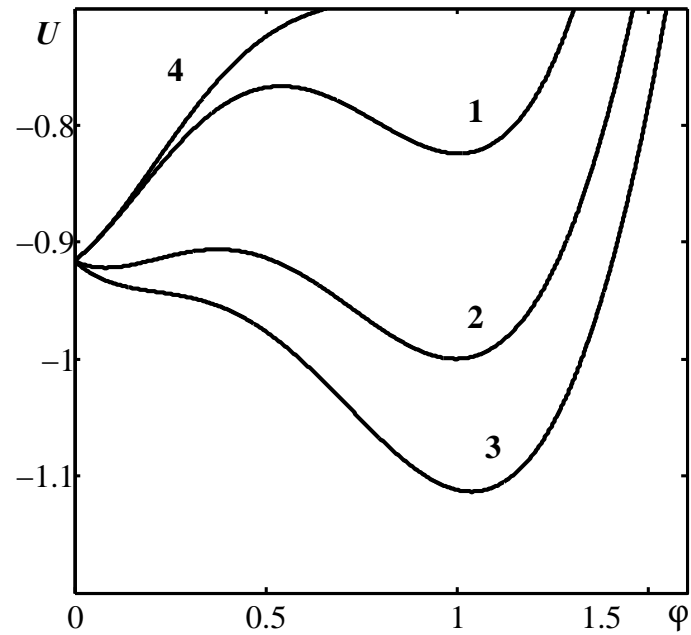


Рисунок 2.9 – Залежність ефективного потенціалу (2.27) від густини енергії меж зерен  $\varphi$  при  $I_\varphi = 0.4$ . Криві 1-4 відповідають значенням  $I_T = 0.2, 0.3, 0.3, 0.3$  та  $(\varepsilon_{ii}^e)^2 = 0.05, 0.125, 0.15, 0.05$ .

розміру. Коли процес ПД закінчений, слід вважати, що зразок сформований, і подальші переходи за рахунок шуму не здійснюються.



### 3 СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗМ'ЯКШЕННЯ ПОВЕРХНЕВОГО ШАРУ ЛЬОДУ ПРИ ТЕРТІ

#### 3.1 Вплив шуму на розм'якшення поверхні льоду під час тертя

Запропонована синергетична теорія плавлення ультратонкої плівки поверхні льоду в процесі тертя, відповідно до якої зсувна деформація відіграє роль параметра порядку, спряжене поле зводиться до зсувного напруження і температура представляє керувальний параметр. Введені адитивні шуми зазначених величин і побудовані фазові діаграми, де інтенсивності шумів і температура поверхонь тертя визначають області льоду, пом'якшеного льоду та їх суміші. На область пом'якшеного льоду, критичним чином впливають інтенсивності шумів напружень й температури. Продемонстровано, що збільшення інтенсивності шуму напружень приводить до плавлення плівки навіть при низьких температурах поверхонь тертя, і відповідне поведіння системи визначається флуктуаціями температури, а також з ростом інтенсивності шуму напружень зникає область тертя льоду.

Тому що ідеальної поверхні не існує в дійсності, опис неоднорідності дуже важливий, особливо, у випадку льоду та снігу. Дослідження [17] показує тертя “прилипання-ковзання” (stick-slip) для морського льоду для низької ковзної швидкості ( $V = 0.28$  см/с). Це продемонстровано фрикційним наросуванням (збільшенням коефіцієнта тертя) при сталому зсуві, що супроводжується періодами руху та швидкої релаксації напружень. Прісноводний гранульований лід та солоний стовбчастий лід демонструє неоднорідне тертя [19]. Відповідна часова залежність тертвової сили має пилкоподібну форму для всіх температур при швидкостях ковзання не менше ніж  $5 \cdot 10^{-5}$  м/с і для температури  $T = -3^\circ\text{C}$  на швидкостях менших чим  $10^{-5}$  м/с. Дослідження тертя льоду на льоді та альфа-міді по міді в діапазонах  $T = 173 - 263$  К та  $V = 10^{-6} - 10^{-3}$  м/с [20] показує, що коливання сили зсуву в залежності

від зсуву визначаються типом матеріалу, але не жорсткістю апарата. Ці результати підтверджені в [22–25, 78, 80–83, 93] для більш широких інтервалів температур і швидкостей поверхні льоду. Крім того, динаміка “прилипання-ковзання” є характерною для руху полімеру (поліметилметакрилату) на льоду при  $V = 0.1$  м/с й  $T = 13.5^\circ\text{C}$  [23]. Зазвичай вважається [24, 25, 78], що поверхнева шорсткість впливає на реальну площу контакту та, отже, змінює тертя. Крім того, важливо для нашого розгляду, що товщина розм’якшених льодових шарів зменшується між виступами льоду та збільшується в місцях западин випадковим чином [80–83, 93]. Тому відбувається неоднорідний розподіл теплових та пружних полів. Спостереження [83] показує, що внаслідок маленького розміру системи флуктуації розширюють розплавлену поверхню льоду. В цій роботі ми дотримуємося позиції, що вище згадані явища можуть бути описані через введення шуму деформацій, напруження й температури. Для пояснення цих процесів тут використовуються аналітичні та числові методи.

У роботах [18, 19, 84] лід поданий як в’язкопружне середовище з коефіцієнтом теплопровідності відмінним від нуля за допомогою реологічної моделі. Система кінетичних рівнянь описує взаємно скоординовану поведінку деформації  $\varepsilon$ , напружень  $\sigma$  та температури  $T$  у поверхневому льодовому шарі під час тертя. Відмінною особливістю даної роботи є те, що адитивні шуми зсувних компонент деформації й напруження і температури розглядаються у плівці на поверхні льоду. У рівняннях (3.2) – (3.4) введені інтенсивності шумів деформації, напруження й температури  $I_\varepsilon$ ,  $I_\sigma$  і  $I_T$ , які відповідно вимірюються в одиницях

$$(\varepsilon_s/\tau_\varepsilon)^2, \sigma_s^2, T_c^2. \quad (3.1)$$

Запишемо ці рівняння:

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = -\varepsilon + \sigma + \sqrt{I_\varepsilon} \xi_1(t), \quad (3.2)$$

$$\tau_\sigma \dot{\sigma} = -\sigma + g(T - 1)\varepsilon + \sqrt{I_\sigma} \xi_2(t), \quad (3.3)$$

$$\tau_T \dot{T} = (\tau_T Q - T) - \sigma\varepsilon + \sqrt{I_T} \xi_3(t). \quad (3.4)$$

Тут  $\tau_\sigma$  – час релаксації напруження,  $g = G_0/G_\varepsilon < 1$  – стала ( $G_0 \equiv G(T = 2T_c)$ ), температура термостата (в далі від поверхонь тертя)  $T_e = \tau_T Q$ , де  $Q$  є потоком тепла від навколишніх твердих тіл до поверхневого шару. Релаксаційна поведінка в'язкопружного льоду під час тертя описана рівнянням Кельвіна-Фойгта (3.2), що звичайно використовується в теорії тертя льоду [80–82]. Рівняння Ландау-Халатнікова для релаксації напруження (3.3) [80–84], враховує залежність модуля від безрозмірній температури  $G(T) = G_0(T - 1)$ . Функція  $\xi_i(t)$  є  $\delta$ -корельоване стохастичне джерело (білий шум) [106]. Його моменти визначаються як:

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = 2D \delta_{ij} \delta(t - t'), \quad (3.5)$$

де  $D$  є інтегралом кореляційної функції, що має сенс інтенсивності джерела. Твердий лід припускається аморфним (невпорядкованим). Тому ми досліджуємо розм'якшення льоду за схемою фазового переходу другого роду. Рівняння (3.4) є виразом до теплопровідності, що описує теплопередачу від навколишніх твердих тіл до поверхневого шару льоду, дисипативне нагрівання викликане в'язким напруженням, теплові джерела за рахунок дилатації та пружної енергії.

Рівняння (3.2) – (3.4) формально збігаються з синергетичною системою Лоренца, де деформація діє як параметр порядку, а спряжене поле зводиться до сколюючого напруження, і температура є керувальним параметром. Як відомо, ця система може використовуватись для опису термодинамічних фазових та кінетичних переходів [84, 106].

У роботах [18, 19, 84] розм'якшення поверхні льоду було представлено як результат появи зсувної компоненти деформації, викликаній нагріванням поверхонь вище критичного значення  $T_{c0} = 1 + g^{-1}$ . Таким чином, вивчення переходу відбувається за механізмом термодинамічного та зсувного плавлення.

Початковою причиною цього процесу самоорганізації є додатний зворотній зв'язок  $T$  і  $\varepsilon$  із  $\sigma$  у (3.3), викликаний температурною залежністю модуля зсуву, що може приводити до його зникнення. З іншого боку, від'ємний зворотній зв'язок  $\sigma$  і  $\varepsilon$  із  $T$  у (3.4) забезпечує стабільність системи, тому він відіграє ключову роль.

Ми розглядаємо випадок перетворення поверхні льоду в тіло з великою щільністю дефектів, що нагадує сильно в'язку рідину, що має модуль зсуву або напруження течії або велику в'язкість [22, 24, 78]. Коли  $\varepsilon = 0$  лід не розм'якшений, ситуація з  $\varepsilon \neq 0$  відповідає розм'якшенню [84]. Звичайний твердий стан льоду відповідає деформації  $\varepsilon = 0$ , тому що рівняння Кельвіна-Фойгта (3.2), що містить в'язке напруження, не розглядається в цьому випадку. Рівняння (3.3) зводиться до закону Дебая, що описує швидку релаксацію зсувних напружень протягом мікроскопічного часу  $\tau_\sigma \approx a/c \sim 10^{-12}$  с, де  $a \sim 1$  нм – стала решітки або міжмолекулярна відстань і  $c \sim 10^3$  м/с – швидкість звуку [17, 20].

Відповідно рівняння теплопровідності (3.4) приймає форму найпростішого виразу для температурної релаксації, що не має додатків, які представляють дисипативне нагрівання й дилатацію в'язкої рідини. При ненульовому значенні  $\varepsilon$  рівняння (3.2) – (3.4) описують вищезгадані властивості розм'якшеного льоду. Сила тертя зменшується з ростом температури внаслідок зменшення бар'єра енергії для молекулярних стрибків. Крім того, повна сила тертя зменшується із ростом швидкості між поверхнями контакту  $V = l\partial\varepsilon/\partial t$ , оскільки останнє збільшує фрикційний розігрів та відповідно товщину розм'якшеної плівки [84].

В роботі буде показано, що збільшення інтенсивності шуму напруження викликає розм'якшення льоду навіть при маленькій фоновій льодовій температурі, при цьому температурний шум впливає критично. Отримано фазові діаграми з областями розм'якшення, формування неоднорідної тонкої поверхневої плівки, що складається із швидко флюктуючих областей льоду й

розм'якшеного льоду, та звичайного тертя поверхні льоду. Вони будуються в декількох площинах:

- 1) інтенсивність шуму температури – температура поверхонь тертя;
- 2) інтенсивність шуму напруження, що сколює – температура поверхонь тертя;
- 3) інтенсивність шуму зсувного напруження – шуму температури.

## 3.2 Фазові діаграми режимів тертя

### 3.2.1 Рівняння Ланжевена й Фоккера-Планка

Розглянемо основні рівняння для дослідження впливу адитивних неко-рельованих шумів зсувних компонент деформації та напруження  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  і температури  $T$  [86]. Мінімальний час релаксації деформації  $\tau_\varepsilon$  визначається часом переорієнтації молекул води в точці замерзання прісної води  $2 \times 10^{-5}$  с та  $\tau_\varepsilon$  зростає на декілька порядків величини при високих навантаженнях [87]. Експерименти, проведені на льоді [17, 19], демонструють, що час релаксації напруження  $\tau_\sigma$  становить приблизно  $10^{-12}$  с. Тому, що товщина розм'якшеної плівки льоду дорівнює приблизно декільком молекулярним діаметрам релаксація температури до значення  $T_e$  відбувається на протязі часу  $\tau_T \ll \tau_\varepsilon$ . Тоді за допомогою синергетичного принципу підпорядкування [82]  $\tau_\varepsilon \gg \tau_\sigma$ ,  $\tau_T$ , рівняння (3.3) і (3.4) набирають вид:

$$\sigma(t) = \bar{\sigma} + \tilde{\sigma}\xi_4(t), \quad T(t) = \bar{T} + \tilde{T}\xi_5(t); \quad (3.6)$$

$$\bar{\sigma} \equiv g\varepsilon (T_e - 1) d(\varepsilon), \quad \tilde{\sigma} \equiv \sqrt{I_\sigma + I_T(g\varepsilon)^2} d(\varepsilon),$$

$$\bar{T} \equiv 1 + (T_e - 1) d(\varepsilon), \quad \tilde{T} \equiv \sqrt{I_T + \varepsilon^2 I_\sigma} d(\varepsilon),$$

$$d(\varepsilon) \equiv (1 + g\varepsilon^2)^{-1}. \quad (3.7)$$

Детерміновані компоненти збігаються з отриманими в [19, 82, 88], тоді як флуктуаційні отримані на основі властивості адитивності варіацій незалежних гаусових випадкових величин [106]. Таким чином, спочатку адитивні шуми напруження  $\sigma$  й температури  $T$  перетворюються до мультиплікативної форми в адіабатичному наближенні. Рівняння (3.2), (3.6) і (3.7) приводять до рівняння Ланжевена:

$$\tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} = f(\varepsilon) + \sqrt{I(\varepsilon)} \xi(t), \quad f \equiv -\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}, \quad (3.8)$$

де сила  $f$  отримана із синергетичного потенціалу [82, 88]

$$V = \frac{1}{2} [\varepsilon^2 + (1 - T_e) \ln(1 + g\varepsilon^2)], \quad (3.9)$$

ефективна інтенсивність шуму

$$I(\varepsilon) \equiv I_\varepsilon + [I_\sigma + I_T(g\varepsilon)^2] d^2(\varepsilon) \quad (3.10)$$

впливає із властивості адитивності варіацій шумів. Безпосередня підстановка (3.6) і (3.7) в (3.2) дає стохастичну добавку

$$\left[ I_\varepsilon^{1/2} + \left( I_\sigma^{1/2} + I_T^{1/2} g\varepsilon \right) d(\varepsilon) \right] \xi(t). \quad (3.11)$$

квадрат амплітуди якої відрізняється від ефективної інтенсивності шуму (3.10). Крім того, безпосередньо за допомогою адіабатичного наближення у формулах (3.3) і (3.4) ми одержуємо наступні флуктуаційні доданки в (3.6) (замість виразу (3.7)):  $\tilde{\sigma} \equiv \left( I_\sigma^{1/2} + I_T^{1/2} g\varepsilon \right) d(\varepsilon)$ ,  $\tilde{T} \equiv \left( I_T^{1/2} - \varepsilon I_\sigma^{1/2} \right) d(\varepsilon)$ . Останній доданок не має фізичного змісту оскільки ефективний шум температури  $\tilde{T}$  дорівнює нулю при деформації  $\varepsilon = \sqrt{I_T/I_\sigma}$ . Формально, це викликано тим, що звичайні методи не можуть бути застосовані до аналізу рівняння Ланжевена [106].

Присутність стохастичної сили  $\sqrt{I(\varepsilon)} \xi(t)$  в рівнянні Ланжевена (3.8) означає, що воно представляє стохастичне диференціальне рівняння (СДР). Тому що розв'язок СДР унікальні, тільки їхні статистичні властивості можуть

бути досліджені. Відповідно до цього в подальшому буде розглядатися тільки розподіл ймовірностей розв'язків  $P(\varepsilon)$  за значеннями деформації  $\varepsilon$ . У загальному випадку множина форм рівнянь Фоккера-Планка (РФП) може відповідати рівнянню Ланжевена (3.8). Раніше форми Іто та Стратоновича [106] РФП використалися для опису межового тертя. Далі ми базуємося на інтерпретації Стратоновича, тому що вона дозволяє врахувати автоматично ефекти пам'яті наявні в зм'якшеній плівці льоду через її маленьку товщину приблизно 1 – 100 нм [84, 89–93, 139]. Тут для нової фізичної системи показано, що числення Стратоновича не приводить до якісних змін результату в порівнянні з більш простою інтерпретацією Іто. Запишемо відповідне РФП (S-форма):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\varepsilon, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} [f(\varepsilon)P(\varepsilon, t)] \\ &+ D \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ \sqrt{I(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sqrt{I(\varepsilon)} P(\varepsilon, t) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

З часом розподіл розв'язків (3.8) стає стаціонарним, і його явна форма може бути визначена із (3.12) при  $\partial P(\varepsilon, t)/\partial t = 0$ :

$$P(\varepsilon) = Z^{-1} \exp\{-U(\varepsilon)\}, \quad (3.13)$$

де  $Z$  – стала нормування [137].

Ефективний потенціал:

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{2} \ln I(\varepsilon) - \frac{1}{D} \int_0^\varepsilon \frac{f(\varepsilon')}{I(\varepsilon')} d\varepsilon', \quad f \equiv -\frac{\partial V}{\partial \varepsilon}, \quad (3.14)$$

зв'язаний із синергетичним потенціалом  $V$  (3.9) і інтенсивністю шуму  $I(\varepsilon)$  (3.10). Оскільки явний аналітичний вираз для  $U(\varepsilon)$  виявляється громіздким, ми його не наводимо.

Точки екстремумів функції розподілу  $P(\varepsilon)$  визначаються виразом

$$\begin{aligned} x^3 + g(1 - T_e)x^2 - Dg^2 I_T x + 2Dg(gI_T - I_\sigma) &= 0, \\ x &\equiv 1 + g\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

що впливає з рівності  $dU/d\varepsilon = dI/d\varepsilon - 2f/D = 0$ . Подальший аналіз ґрунтується на дослідженні екстремумів функції розподілу, тобто обчисленні фазової діаграми й стаціонарних станів за допомогою підходу Стратоновича. Такий підхід погоджується з основними результатами, отриманими для ультратонкої плівки мастила в рамках інтерпретації Стратоновича та Іто.

Згідно з (3.16) положення максимумів не залежать від інтенсивності шуму  $I_\varepsilon$  деформації  $\varepsilon$ , але вони фіксуються значеннями температури поверхонь тертя  $T_e$ , постійної  $g = G_0/G_\varepsilon$ , інтенсивності джерела  $D$  і інтенсивностей  $I_\sigma$  та  $I_T$  флуктуацій напруження  $\sigma$  і поверхневої температури льоду  $T$ . Тому беручи для спрощення ефективного потенціалу  $I_\varepsilon = 0$ , отримаємо з формул (3.9), (3.10) і (3.14):

$$\begin{aligned} U(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \ln \left[ d^2(\varepsilon) \left( I_\sigma + (g\varepsilon)^2 I_T \right) \right] + \frac{1}{2gDI_T} \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} g\varepsilon^2 (2 + g\varepsilon^2) + [i - g(1 - T_e)] \right. \\ &\times \left. (i \ln |i + 1 + g\varepsilon^2| - i \ln |i + 1| - g\varepsilon^2) \right\}, \quad i \equiv \frac{I_\sigma}{I_T} - 1. \end{aligned} \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Фазові діаграми

Фазові діаграми для фіксованих інтенсивностей  $I_\sigma$  і  $I_T$  зображені на рис. 3.1(а) і (б). Лінії 1' та 2' визначають пороги втрати стабільності системи, тобто, границі областей, що відповідають різним формам функції розподілу



ймовірності (3.13). Згідно з формулою (3.16) нижче прямої лінії 1', що визначається рівністю

$$T^c = 1 + g^{-1} + D(gI_T - 2I_\sigma), \quad (3.17)$$

функція розподілу (3.13) завжди має максимум при  $\varepsilon = 0$ , і лід може не розм'якшуватись, а вище за (3.17) цей максимум не існує. Таким чином, критична температура  $T^c$  (3.17) зростає при збільшенні інтенсивності шуму температури та зменшується з ростом шуму напруження, що сколює. Три області які зображені на фазових діаграмах відповідають різним режимам тертя. Обидва рисунки є площинними перетинами трьохвмірної фазової діаграми в координатах  $T_e - I_\sigma - I_T$ . Тому, далі проаналізовані точки 1 – 3 підібрані на перетинах пересічних площин, таким чином, щоб вони відповідали ідентичним параметрам системи.

На рис. 3.2.2 зображено розподіли ймовірностей (3.13) відповідні точкам на рис. 3.1. У точці 1 нижче кривої 2', де розподіл ймовірностей (3.13) має максимум тільки при  $\varepsilon_0 = 0$ , відбувається звичайне тертя льоду ( $I$ ), що характерно для нерозм'якшеної поверхні льоду. Між лініями 1' й 2' (точка 2) розподіл ймовірностей (3.13) має максимуми при нульовий та відмінній від нуля деформації  $\varepsilon_0$ , і спостерігається двофазна область зменшеного тертя з переходами між двома динамічними станами протягом стаціонарного ковзання. Це так званий, режим переміжності зм'якшення поверхні льоду, де з'являється суміш фаз льоду й розм'якшеного льоду ( $SI$ ). Точка 3 розташована вище лінії 1', де розподіл імовірності (3.13) має максимум при  $\varepsilon_0 \neq 0$  та поверхня льоду розм'якшується ( $S$ ). Тепер, розглянемо умови для стабільності коренів  $\varepsilon_\pm$  (3.16) у простому випадку  $I_\sigma = 0$ . Розв'язки рівняння (3.16)

$$\begin{aligned} \varepsilon_\pm^2 &= 2^{-1/2} g^{-1} [g(T_e - 1) - 3 \\ &\pm \sqrt{(g(T_e - 1) + 7)(g(T_e - 1) - 1)}]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

одержано на лінії, що визначається виразом (3.17), після усунення кореня  $\varepsilon^2 =$

0. При  $T_e < T_c^0 = 1 + (4/3)g^{-1}$  корені  $\varepsilon_{\pm}^2$  комплексні, для  $T_e = T_c^0$  значення  $\varepsilon_{-}^2$  стає нульовим, у діапазоні  $T_e > T_c^0$  значення  $\varepsilon_{-}^2$  комплексні, а  $\varepsilon_{+}^2$  дійсні, що означає розм'якшення плівки льоду. Якщо рівність (3.17) задоволено, корінь  $\varepsilon = 0$  відповідає максимуму функції розподілу (3.13) при  $T_e < T_c^0$ , тоді як при  $T_e > T_c^0$  цей розв'язок є мінімумом, і корені  $\pm\varepsilon_{+} \neq 0$  відповідають симетричним максимумам.

Дорівнюємо дискримінант (3.16) до нуля і одержуємо рівняння:

$$I_T = 0, (DI_T)^2 + DI_T \left[ 4^{-1} (1 - T_e)^2 - 9g^{-1} (1 - T_e) - 27g^{-2} \right] - 2g^{-1} (1 - T_e)^3 = 0. \quad (3.19)$$

Останнє має розв'язки:

$$2DI_T = 9g^{-1} (1 - T_e + 3g^{-1}) - 4^{-1} (1 - T_e)^2 \pm \left\{ \left[ 9g^{-1} (1 - T_e + 3g^{-1}) - 4^{-1} (1 - T_e)^2 \right]^2 + 8g^{-1} (1 - T_e)^3 \right\}^{1/2}. \quad (3.20)$$

Вони дають колоколоподібну лінію  $T_e(I_T)$ , що перетинає вісь абсцис у точці:

$$I_T = \frac{1}{2D} \left\{ 9g^{-1} (1 + 3g^{-1}) - 4^{-1} + \left[ (9g^{-1} (1 + 3g^{-1}) - 4^{-1})^2 + 8g^{-1} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.21)$$

і вісь ординати в точці  $T_e = 1$ . Криві (3.20) з'єднуються і формують максимум  $C$  за умови, що вираз під квадратним коренем дорівнює нулю. Видно, що лінія (3.17) торкається кривої (3.20) у трикричній точці  $T$ :

$$T_e = T_c^0 = 1 + \frac{4}{3}g^{-1}, \quad I_T = \frac{g^{-2}}{3D}. \quad (3.22)$$

Ця точка пов'язана з дійсними розв'язками  $\pm\varepsilon_{+} \neq 0$  (3.18) рівняння (3.16), що

визначають розм'якшену поверхню льоду.

Розглянемо більше загальний випадок двох мультиплікативних шумів  $I_\sigma, I_T \neq 0$ . Умова екстремуму розподілу ймовірності (3.13) представлена рівністю  $\varepsilon = 0$  і рівнянням (3.16). Його аналіз показує, що лінія існування нульового розв'язку визначається співвідношенням (3.17). На жаль, координати трикритичної точки  $T$  занадто громіздкі, щоб їх навести. Але можна описати основні особливості. Зокрема для  $I_\sigma < (1 + g^{-1})/(2D)$  поведінка подібно простому випадку  $I_\sigma = 0$  (див. рис. 3.1). При  $I_\sigma > (1 + g^{-1})/(2D)$  розм'якшення льоду, може відбутися навіть для маленьких значень температури термостата  $T_e$  й інтенсивності шуму температури поверхні льоду  $I_T$ . Трикритична точка потрапляє на вісь  $I_T$  при

$$I_\sigma = gI_T + \frac{1}{Dg} \left\{ \frac{g^3}{6} \left( \frac{2}{9} + DI_T \right) - \left[ \left( \frac{g^3}{6} \left( \frac{2}{9} + DI_T \right) \right)^2 + \frac{g^6}{27} (DI_T)^2 \left( \frac{1}{4} + DI_T \right) \right]^{1/2} \right\}, \quad (3.23)$$

де  $DI_T = (2DI_\sigma - 1 - g^{-1})/g$ . Коли інтенсивність шуму  $I_\sigma$  перевищує критичне значення  $I_{\sigma C}$ , що визначається (3.23) при

$$I_{TC} = \frac{1}{3D} \left[ \frac{(6 + g)^2}{g^2} - 1 \right], \quad (3.24)$$

стабільна область льоду зникає (див. рис. 3.1(б)).

Дослідження адитивних флуктуацій  $\varepsilon, \sigma$  і  $T$  демонструє, що стохастичний ефект є малим для зсувної компоненти деформації та значним як для відповідної компоненти напруження, так і для температури плівки льоду. Область розм'якшення льоду обмежена співвідношенням для інтенсивності шуму

$$DI_T = (2DgI_\sigma - 1 - g)/g^2, \quad (3.25)$$

отриманим з (3.16) при  $x = 1 (\varepsilon = 0)$  і  $T_e = 0$ . Відповідно до (3.25), коли температурний шум відсутній, розм'якшення льоду відбувається, якщо інтен-

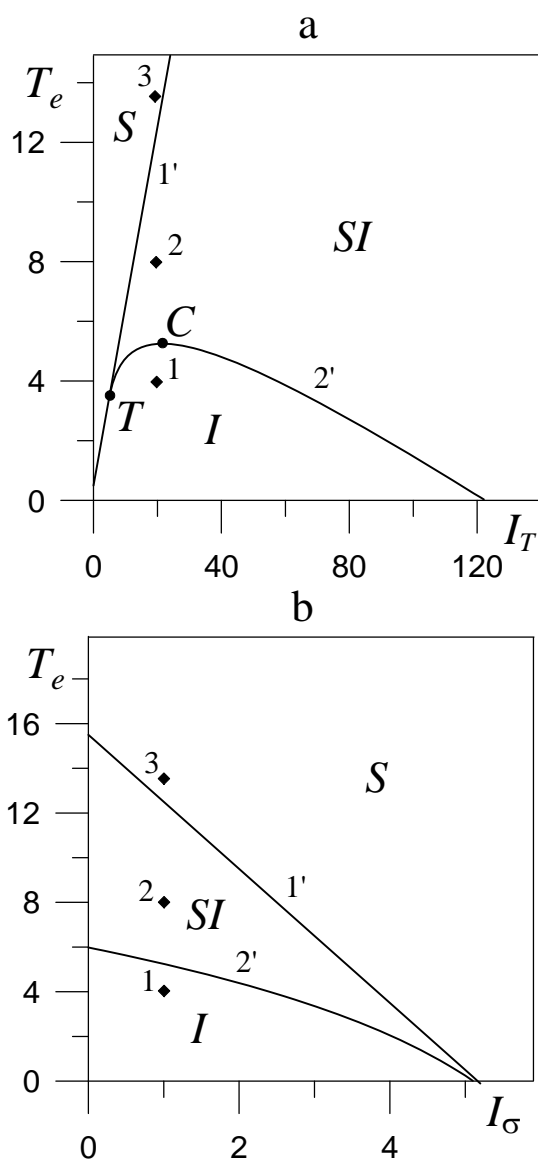


Рисунок 3.1 – Фазова діаграма при  $g = 0.4$ ,  $D = 1.5$  з областями розм'якшеного льоду ( $S$ ), льоду ( $I$ ), розм'якшеного і не розм'якшеного льоду ( $SI$ ) ( $T$  – трикритична точка,  $C$  – критична точка): (а)  $I_\sigma = 1$ ; (б)  $I_T = 20$ .

сивність флуктуацій напруження, що сколює, перевищує значення (точка  $O$  на рис. 3.3)

$$I_{\sigma O} = (1 + g) / (2Dg). \quad (3.26)$$

Зростання флуктуацій зсувного напруження та температури викликає розм'якшення льоду, коли їхня інтенсивність нижче лінії (3.25). Область неоднорідного тертя виникає з подальшим ростом цих інтенсивностей вище зна-

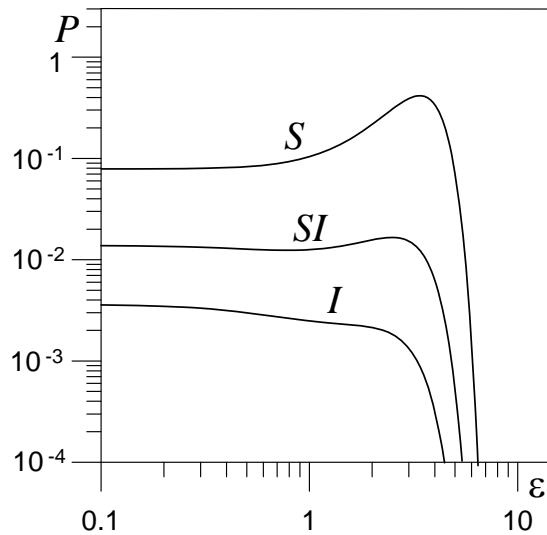


Рисунок 3.2 – Розподіл (3.13) при  $I_\varepsilon = 0, I_\sigma = 1, I_T = 20$  і режимах, показаних точками на рис. 3.1: 1 –  $T_e = 4(I)$ ; 2 –  $T_e = 8(SI)$ ; 3 –  $T_e = 13.5(S)$ .

чень у трикритичній точці  $T$  на рис. 3.3.

$$I_{\sigma 1} = \frac{4+3g}{2Dg}, \quad I_{T1} = \frac{3+2g}{Dg^2}. \quad (3.27)$$

Така переміжна поведінка відбувається в області вище прямої лінії (3.25) і поза кривої, що фіксується (3.23). Якщо інтенсивність шуму напруження, що сколює, перевищує значення  $I_{\sigma C}$ , визначене (3.23) з температурним шумом  $I_{TC}$  (3.24) (точка  $C$  на рис. 3.3), область тертя звичайного льоду зникає повністю. Точка, де крива (3.23) перетинає вісь ординат визначається рівністю

$$DI_{T2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{9}{g} \left( \frac{3}{g} + 1 \right) - \frac{1}{4} \right] + \left\{ \frac{1}{4} \left[ \frac{9}{g} \left( \frac{3}{g} + 1 \right) - \frac{1}{4} \right]^2 + \frac{2}{g} \right\}^{1/2}. \quad (3.28)$$

Вище цієї точки не спостерігається тертя звичайного льоду. Фазова діаграма на рис. 3.3 показує досить нетривіальну поведінку, особливо, в області  $I_{\sigma 1} \leq I_\sigma \leq I_{\sigma C}$ .

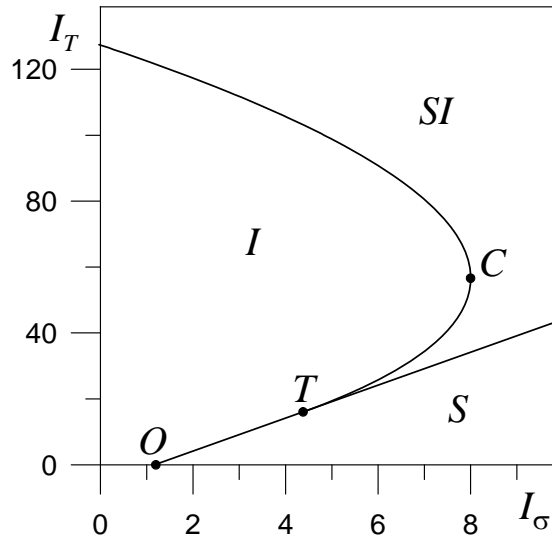


Рисунок 3.3 – Фазова діаграма при  $g = 0.4$ ,  $D = 1.5$ ,  $T_e = 0$  і  $I_\sigma$ ,  $I_T \neq 0$ .

### 3.3 Часові ряди сили тертя

Множення (3.8) на  $dt$  приводить до диференціального рівняння Ланжевена:

$$d\varepsilon = f(\varepsilon)dt + \sqrt{I(\varepsilon)}dW(t), \quad (3.29)$$

де час  $t$  вимірюється в одиницях часу релаксації деформації  $\tau_\varepsilon$ ,  $dW(t) = W(t+dt) - W(t) \equiv \xi(t)dt$  – вінерівський процес з властивостями [141]:

$$\langle dW(t) \rangle = 0; \quad \langle (dW(t))^2 \rangle = 2Ddt. \quad (3.30)$$

Метод Ейлера і ітераційна процедура [84, 90, 140] використовується для чисельного розв'язання рівняння (3.29). Перетворивши стохастичне диференціальне рівняння (СДР) Стратоновича (3.29) на еквівалент СДР Іто та взявши до уваги (3.30), отримаємо [141, 142]:

$$d\varepsilon = \left[ f(\varepsilon) + D\sqrt{I(\varepsilon)}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sqrt{I(\varepsilon)} \right] dt + \sqrt{I(\varepsilon)}dW(t). \quad (3.31)$$

З визначення дискретного аналога диференціала стохастичної сили

$dW(t) \equiv \sqrt{\Delta t}W_i$ , (3.8) та (3.10) ітераційна процедура розв'язання рівняння (3.31) виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + & \left( f(\varepsilon_i) + \frac{Dg\varepsilon_i[gI_T(1 - g\varepsilon_i^2) - 2I_\sigma]}{(1 + g\varepsilon_i^2)^3} \right) \Delta t \\ & + \sqrt{I(\varepsilon_i)\Delta t}W_i. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Розв'язання рівняння виконується в інтервалі часу  $t \in [0, T_m]$ . Для числа ітерацій  $N$  (числа точок часового ряду) інкримент часу дорівнює  $\Delta t = T_m/N$ . Сила  $W_i$  має наступні властивості (див. (3.20)):

$$\langle W_i \rangle = 0, \quad \langle W_i W_{i'} \rangle = 0, \quad \langle W_i^2 \rangle \rightarrow 2D. \quad (3.33)$$

Випадкова сила описується моделлю Бокса-Мюллера [143]:

$$W_i = \sqrt{\mu^2} \sqrt{-2 \ln r_1} \cos(2\pi r_2), \quad r_n \in (0, 1], \quad (3.34)$$

де  $\mu^2 = 2D$  – дисперсія і  $W_i$  випадкове число, яке визначається за (3.33). Псевдовипадкові числа  $r_1, r_2$  рівномірно розподілені і повторюються через певні проміжки часу. Оскільки ефективний потенціал (3.14) має мінімуми при додатних і від'ємних значеннях деформації  $\varepsilon$ , флуктуації можуть привести до переходів між станами, визначеними цими мінімумами. Від'ємна область  $\varepsilon < 0$  виключається з аналізу оскільки розглядається рух верхньої поверхні в одному напрямку. Таким чином, розглядається в подальшому  $|\varepsilon|(t)$ .

З одного боку, площа контакту в досліді з тертя полімеру (полі (метил метакрилат) (ПММА)), гуми і сталі по льоду [25] і полікристалічного прісного та солоного льоду по собі [17–19] приблизно дорівнює  $A \approx 10^{-6} - 10^{-1} \text{ м}^2$  [23, 139, 144]. З іншого боку, припустимо, що модуль зсуву поверхні льоду визначається значенням границі текучості  $G_\varepsilon \approx 0.1 - 10 \text{ МПа}$  [23]. Тому, використовуючи формулу для сили тертя  $F(t) = AG_\varepsilon |\varepsilon|(t)$ , можна підрахувати типові реалізації  $F(t)$  для визначених режимів на рис. 3.4.

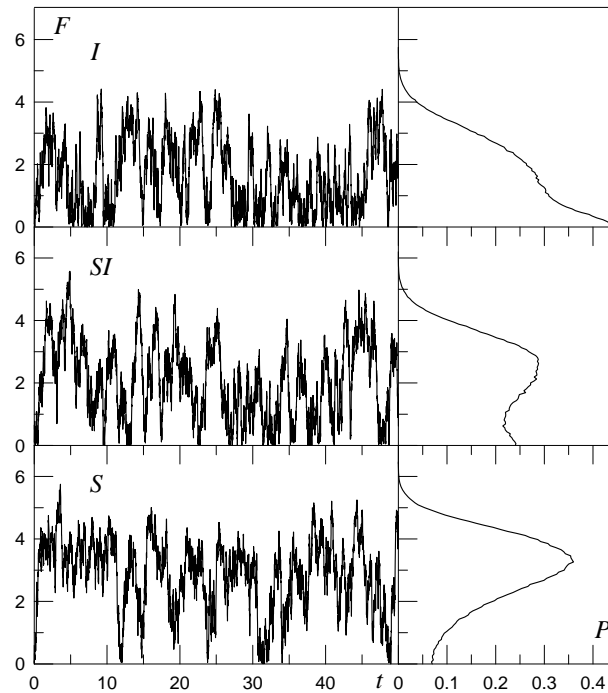


Рисунок 3.4 – Часові ряди сили тертя  $F(t)$  (в умовних одиницях) знаходяться чисельно за рівнянням (3.32) при  $N = 5 \cdot 10^3$ ,  $T_m = 50$ ,  $dt = 0.01$ . Показані режими відповідають точкам на фазовій діаграмі (рис. 3.1).

Ці залежності відповідають експериментально дослідженим в роботах [23, 139, 144] у випадку, коли час релаксації деформації  $\tau_\epsilon$  знаходиться в інтервалі 0.1 – 5 с. Часові ряди різних режимів встановлюють різні режими тертя відповідно до розподілів ймовірностей  $P$ , як це зображено у правій частині рис. 3.4. При величині сили тертя близької до нуля, реалізується режим тертя льоду ( $I$ ). Випадкові переходи між нульовими і ненульовими величинами сили тертя  $F$  трапляються при режимі прилипання - ковзання (stick-slip regime ( $SI$ )). Видно, що нижня залежність відповідає розм'якшеному режиму льоду ( $S$ ), оскільки завжди  $F > 0$ . При цьому, відповідно, великі значення сили тертя обумовлені внеском в'язкості. Часові залежності легко відрізнити, оскільки їх побудовано на основі фазових діаграм в осях  $T_e - I_T$ , і  $F(t)$  отримано при різних величинах температури блоку  $T_e$ . При високій температурі  $T_e$  поверхня льоду повністю розм'якшується, при низькій  $T_e$  поверхня в твердому стані.

Аналіз за допомогою швидкого перетворення Фур'є [143] часових рядів



режиму прилипання-ковзання ( $SI$ ) (рис. 3.4) дає спектр коливань сили тертя, зображений на рис. 3.5. Розглядані часові ряди  $F(t)$  побудовані відповідно до (3.32) при  $N = 10^4$ ,  $T = 100$ ,  $dt = 0.01$ . В спектрі потужність сигналу зменшується з ростом частоти. Лінія апроксимації спектру  $S_p(\nu) \propto 1/\nu^{0.85}$  має спадний вигляд з частотою, що суперечить властивості білого шуму  $S_p(\nu) = const$ . Отже, в моделі присутні різні кореляції часу. Для всіх режимів тертя спектри мають спільну форму  $S_p(\nu) \propto 1/\nu^{0.85}$ . Тому, в загальному випадку застосування рівняння (3.8) приводе до переходу білого шуму, який характеризує більшість фізичних систем, у корельовані флуктуації. Експериментальне дослідження, що виявило схожу поведінку, описано в [145].

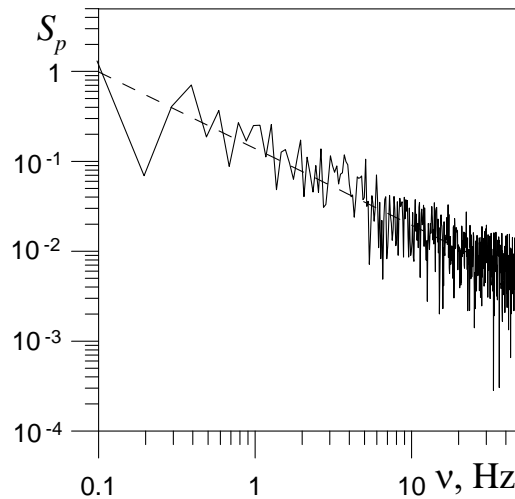


Рисунок 3.5 – Спектральна густина сили  $S_p(\nu)$  (в умовних одиницях) відповідає  $SI$  режиму, параметри вказані на рис. 3.4. Пунктирна лінія визначена за співвідношенням  $S_p(\nu) \propto 1/\nu^{0.85}$ .

## ВИСНОВКИ

У представленій роботі в рамках синергетичної моделі межового тертя, вивчалися процеси тертя двох атомарно-гладких та шорстких поверхонь при наявності ультратонкого шару мастила між ними. Врахована просторова неоднорідність напружень, деформації і температури мастильного шару дозволила описати нетривіальну неньютонівську поведінку ефективної зсувної в'язкості мастила. Розглянуті два випадки, що відрізняються врахуванням різних типів руху поверхонь тертя. Отримані просторові профілі напружень, деформації і температури у різні моменти часу. Розгляд поверхонь тертя з нанорозмірними нерівностями дозволив розширити та узагальнити отримані раніше результати для атомарно-гладких поверхонь. З'ясовано, що у процесі тертя нерівних поверхонь мастило по площині тертя представляє доменну структуру, де присутні рідиноподібні та твердоподібні ділянки, що робить різний внесок у загальну силу тертя. Вводячи до розгляду зовнішній адитивний шум з'ясовано його характер впливу на поведінку системи та показано, що із зростанням інтенсивності шуму збільшується імовірність переходів між твердоподібним та рідиноподібним станами. Показано, що в деякому обмеженому діапазоні функція щільності розподілу часових залежностей параметра порядку приймає степневий вигляд, тобто встановлюється самоподібна поведінка твердоподібної системи. За допомогою методу мультифрактального флуктуаційного аналізу, що дозволяє дослідити часові ряди різної природи, вдалося отримати інформацію про локальні властивості часових залежностей. Також з'ясовано умови, за яких система демонструє монофрактальну чи мультифрактальну поведінку, що характеризується спектром фрактальних розмірностей.

У рамках нерівноважної еволюційної термодинаміки, на основі двохдефектного наближення, вивчений процес фрагментації кристалічної структури при ІПД. В якості основних структурних дефектів обрані межі зерен (МЗ) і дислокації. Побудована фазова діаграма режимів фрагментації металу або

сплаву при ІПД. Використовуючи метод фазової площини, побудовані фазові портрети, які однозначно відображають поведінку системи відповідно до областей на ФД. Отримана діаграма, яка наочно демонструє області формування стійких стаціонарних станів. Вивчено вплив часів релаксації на фазову динаміку нерівноважних змінних системи. Показано, що з наближенням як до прямої  $\tau_{h_g} \gg \tau_{h_D}$ , так і до зворотної адіабатики  $\tau_{h_D} \gg \tau_{h_g}$  система демонструє універсальну кінетичну поведінку. Особливість такої поведінки проявляється у формуванні на фазових портретах відповідних майже лінійних ділянок, більш відомих як “русло великої річки”, до яких, незалежно від початкових умов, швидко еволюціонують всі фазові траєкторії. Розглядаючи однодефектну модель НЕТ, в розвиненні вільної енергії з урахуванням шуму, описані додаткові стійкі стани, які досягаються у процесі ІПД (ненульовий мінімум термодинамічного потенціалу вільної енергії). Цікавим є те, що крупнозернистий стан матеріалу (на границі монокристал) пов’язаний з нульовим мінімумом вільної енергії (нульовим максимумом внутрішньої енергії) і в контексті теорії його також можна розглядати як свого роду граничну структуру, яка буде рівноважною щодо звичайної пластичності.

Розм’якшення поверхні льоду представляється виникненням деформації зсуву, викликані критичним нагріванням льоду. Дослідження теплового й деформаційного флуктаційного впливу на поверхню льоду, дозволяє, побудувати фазову діаграму з областями її неоднорідності, льоду, а також його розм’якшеного стану. Таким чином, розглянуті флуктуації приводять до ускладнення переходу. Встановлено, що при збільшенні шуму температури плівки на поверхні льоду може спостерігатися зменшення або збільшення сили тертя залежно від початкових умов, але зі збільшенням шуму напруження область, що розм’якшується, тільки збільшується. Побудовано фазові діаграми з областями льоду, розм’якшеного льоду та їх суміші (переривчастого тертя). Виявлено, що область тертя льоду обмежена порівняно низькими значеннями температури блоку, що ковзає, та інтенсивностей флуктуацій напружень і

температури поверхні льоду. З ростом інтенсивності шуму напружень відбувається розм'якшення плівки льоду навіть при низьких температурах термостата. Часові ряди характеризують різні режими тертя відповідно до розподілу ймовірностей деформацій, при цьому величина сили тертя, що близька до нуля, відповідає режиму тертя звичайного льоду. Аналіз за допомогою швидкого перетворення Фур'є часових рядів в режимі прилипання-ковзання дає спектр коливань сили тертя, що означає їх кореляцію.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Israelachvili J. Adhesion forces between surfaces in liquids and condensable vapours // *Surface Science Reports*. – 1992. – Vol. 14, No 3. – P. 109-159.
2. Persson B. N. J. Sliding friction. Physical principles and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 2000. – 515 p.
3. Demirel A. L., Granick S. Transition from static to kinetic friction in a model lubricating system // *Journal of Chemical Physics*. – 1998. – Vol. 109, No 16. – P. 6889-6897.
4. Reiter G., Demirel A. L., Peanasky J. Stick to slip transition and adhesion of lubricated surfaces in moving contact // *Journal of Chemical Physics*. – 1994. – Vol. 101, No 3. – P. 2606-2615.
5. Ohnishi S., Kaneko D., Gong J. P., Osada Y., Stewart A. M., Yaminsky V. V. Influence of Cyclohexane Vapor on Stick-Slip Friction between Mica Surfaces // *Langmuir*. – 2007. – Vol. 23, No 13. – P. 7032-7038.
6. Yamada S. Dynamic Transitions in Molecularly Thin Liquid Films under Frictional Sliding // *Langmuir*. – 2008. – Vol. 24, No 4. – P. 1469-1475.
7. Ackerson B. J. and Clark N. A. Shear-Induced Melting // *Physical Review Letters*. – 1981. – Vol. 46, No 2. – P. 123.
8. Kaibyshev O. A. Superplasticity of Alloys, Intermetallides and Ceramics. – Berlin: Springer-Verlag, 1992. – 317 p.
9. Metlov L. S., Myshlyaev M. M., Khomenko A. V., and Lyashenko I. A. A model of grain boundary sliding during deformation // *Technical Physics Letters*. – 2012. – Vol. 38, No 11. – P. 972-974.
10. Gleiter H. The structure and properties of high-angle grain boundaries in metals // *Phys. Status Solidi*. – 1971. – Vol. 45, No 1. – P. 9-38.

11. Yoshizawa H., Israelachvili J. Fundamental mechanisms of interfacial friction. 2. Stick-slip friction of spherical and chain molecules // *Journal of Physical Chemistry*. – 1993. – Vol. 97, No 43. – P. 11300-11313.
12. Smith E. D., Robbins M. O., and Cieplak M. Friction on adsorbed monolayers // *Physical Review B*. – 1996. – Vol. 54, No 11. – P. 8252.
13. Carlson J. M. and Batista A. A. Constitutive relation for the friction between lubricated surfaces // *Physical Review E*. – 1996. – Vol. 53, No 4. – P. 4153.
14. Aranson I. S., Tsimring L. S., Vinokur V. M. Stick-slip and nuclear dynamics of ultrathin liquid films // *Physical Review B*. – 2002. – Vol. 65, No 12. – P. 125402 (7).
15. Popov V. L. Thermodynamics and kinetics of shear-induced melting of a thin layer of lubricant confined between solids // *Technical Physics*. – 2001. – Vol. 46, No 5. – P. 605-615.
16. Popov V. L. A theory of the transition from static to kinetic friction in boundary lubrication layers // *Solid State Commun.* – 2000. – Vol. 115, No 7. – P. 369-373.
17. Lishman B., Sammonds P., Feltham D., Wilchinsky A. The rate- and state-dependence of sea ice friction // In: *Proceedings of the 20th International Conference on Portand Ocean Engineering under Arctic Conditions*. – 2009. – Vol. 12. – P. POAC09-66.
18. Kennedy F.E., Schulson E.M., Jones D.E. The friction of ice on ice at low sliding velocities // *Philosophical Magazine A*. – 2000. – Vol. 80. – P. 1093-1110.
19. Schulson E.M., Fortt A.L. Friction of ice on ice // *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*. – 2012. – Vol. 117. – P. B12204.
20. Fortt A., Schulson E. The resistance to sliding along coulombic shear faults in ice // *Acta Materialia*. – 2007. – Vol. 55. – P. 2253-2264.
21. Fortt A.L., Schulson E.M. Frictional sliding across coulombic faults in first-year sea ice: A comparison with freshwater ice // *Journal of Geophysical*

- Research: Oceans. – 2011. – Vol. 116. – P. C11012.
22. Beeman M., Durham W.B., Kirby S.H. Friction of ice // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 1988. – Vol. 93. – P. 7625-7633.
  23. Blackford J.R., Skouvaklis G., Purser M., Koutsos V. Friction on ice: stick and slip // Faraday Discuss. – 2012. – Vol. 156. – P. 243–254.
  24. Kietzig A.M., Hatzikiriakos S.G., Englezos P. Physics of ice friction // Journal of Applied Physics. – 2010. – Vol. 107. – P. 081101.
  25. Kietzig A.M., Hatzikiriakos S.G., Englezos P. Ice friction: The effects of surface roughness, structure, and hydrophobicity // Journal of Applied Physics. – 2009. – V. 106. – P. 024303.
  26. Hardy W., Bircumshaw J. Bakerian Lecture. Boundary Lubrication. Plane Surfaces and the Limitations of Amontons Law // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1925. – Vol. 108, No 745. – P. 1-27.
  27. Попов В. Л. Термодинамика и кинетика плавления сдвигом тонкого слоя смазки, заключенного между твердыми телами // Журнал технической физики. – 2001. – Т. 71, № 5. – С. 100-110.
  28. Filippov A. E., Klafter J., Urbakh M. Friction through dynamical formation and rupture of molecular bonds // Physical Review Letters. – 2004. – Vol. 92, No 13. – P. 135503 (4).
  29. Ляшенко Я. А., Хоменко А. В., Метлов Л. С. Феноменологическая теория плавления тонкой пленки смазки между двумя атомарно-гладкими твердыми поверхностями // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80, № 8. – С. 120-126.
  30. Ляшенко Я. А., Хоменко А. В., Метлов Л. С. Нелинейная термодинамическая модель граничного трения // Трение и износ. – 2011. – Т. 32, № 2, – С. 113-123.
  31. Lyashenko I. A., Popov V. L. Impact of an elastic sphere with an elastic half space revisited: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // Scientific Reports. – 2015. – Vol. 5. – P. 8479 (5).

32. Ляшенко Я. А., Кузнецов В. П., Попов М., Попов В. Л., Горгоц В. Г. Динамическое моделирование спонтанных колебаний в процессе наноструктурирующего выглаживания // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т. 18, № 1. – С. 38-42.
33. Lyashenko I. A., Willert E., Popov V. L. Adhesive impact of an elastic sphere with an elastic half space: Numerical analysis based on the method of dimensionality reduction // Mechanics of Materials. – 2016. – Vol. 92. – P. 155-163.
34. Braun O. M., Naumovets A. G. Nanotribology: Microscopic mechanisms of friction // Surf. Sci. Rep. – 2006. – Vol. 60. – P. 79-158.
35. Sivebaek I.M., Samoilov V.N., Persson B.N.J. Velocity Dependence of Friction of Confined Hydrocarbons // Langmuir. – 2010. – Vol. 26, No 11. – P. 8721-8728.
36. Robbins M. O., Müser M. H. Computer Simulations of Friction, Lubrication and Wear (Electronic resource) // In Modern Tribology Handbook / Edited by V. Bhushan. – Boca Raton: CRC Press, 2001. – P. 717-765. – cond-mat/0001056.
37. Хоменко О. В., Ляшенко Я. О. Фазова динаміка тонкої плівки мастила між твердими поверхнями при деформаційному дефекті модуля зсуву // Журнал фізичних досліджень. – 2007. – Т. 11, № 3. – С. 268-278.
38. Хоменко О. В., Ляшенко Я. О., Борисюк В. М. Самоподібна фазова динаміка межового тертя // Український фізичний журнал. – 2009. – Т. 54, № 11. – С. 1142-1151.
39. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. – Москва: Наука, 1995. – 608 с.
40. Berman A. D., Ducker W. A., Israelachvili J.N. Origin and Characterization of Different Stick-Slip Friction Mechanisms // Langmuir. – 1996. – Vol. 12, No 19. – P. 4559-4563.
41. Luengo G., Israelachvili J., Granick S. Generalized effects in confined fluids:



- new friction map for boundary lubrication // *Wear*. – 1996. – Vol. 200, No 1-2. – P. 328-335.
42. Zuev L. B., Danilov V. I. A self-excited wave model of plastic deformation in solids // *Philosophical Magazine A*. – 1999. – Vol. 79, No 1. – P. 43-57.
43. Хоменко А. В., Ляшенко Я. А. Статистическая теория граничного трения атомарно-гладких твёрдых поверхностей при наличии смазочного слоя // *Успехи физических наук*. – 2012. – Т. 182, № 10. – С. 1081-1110.
44. Donaldson S., Lee T., Chmelka B., and Israelachvili J. General hydrophobic interaction potential for surfactant/lipid bilayers from direct force measurements between light-modulated bilayers // *PNAS*. – 2011. – Vol. 108, No 38. – P. 15699-15704.
45. Lahiri R. and Ramaswamy S. Shear-Induced Melting and Reentrance: A Model // *Physical Review Letters*. – 1994. – Vol. 73, No 7. – P. 1043.
46. Das M., Ananthakrishna G., and Ramaswamy S. Collective stochastic resonance in shear-induced melting of sliding bilayers // *Physical Review E*. – 2003. – Vol. 68, No 6. – P. 061402.
47. Ляшенко Я. А., Заскока А. Н. Учет универсальной зависимости вязкости граничной смазки от температуры и скорости деформаций при описании особенностей stop-start-экспериментов // *Журнал технической физики*. – 2015. – Т. 85, № 7. – С. 69-76.
48. Ляшенко Я. А., Манько Н. Н., Влияние деформационного дефекта модуля сдвига смазки на фазовую диаграмму режимов граничного трения // *Известия Высших учебных заведений. Физика*. – 2015. – Т. 58, № 5. – С. 102-108.
49. Lyashenko I. A., Manko N. N. Synergetic representation of stick-slip mode of boundary friction // *Journal of Friction and Wear*. – 2013. – Vol. 34, No 1. – P. 38-45.
50. Khomenko A. V., Lyashenko I. A., Borisyuk V. N. Multifractal analysis of stress time during ultrathin lubricant film melting // *Fluctuation and Noise*

- Letters. – 2010. – Vol. 9, No 1. – P. 19-35.
51. Ляшенко Я. А., Винниченко И. В. Прерывистый режим плавления граничной смазки между двумя жесткими поверхностями с наноразмерными неровностями // Журнал Технической Физики. – 2013. – Т. 83, Вып. 9. – С. 90-97.
52. Хоменко А. В., Трощенко Д. С., Бойко Д. В., Захаров М. В. Влияние внешнего периодического воздействия на кинетику фрагментации металлов при интенсивной пластической деформации // Журнал нано- и электронной физики. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 01039 (11).
53. Khomenko A. V., Troshchenko D. S., Metlov L. S. Thermodynamics and Kinetics of Solids Fragmentation at Severe Plastic Deformation // Condensed Matter Physics. – 2015. – Vol. 18, No 3. – P. 33004 (14).
54. Ляшенко Я. А. Трибологическая система в режиме граничного трения под периодическим внешним воздействием // Журнал Технической Физики. – 2011. – Т. 81, Вып. 6. – С. 125-132.
55. Ляшенко Я. А. Трибологические свойства режимов сухого, жидкостного и граничного трения // Журнал Технической Физики. – 2011. – Т. 81, Вып. 5. – С. 115-121.
56. Lyashenko I. A. Effect of the temperature dependence of the viscosity of pseudoplastic lubricants on the boundary friction regime // Technical Physics. – 2013. – Vol. 58, No 7. – P. 1016-1024.
57. Sivebaek I. M., Samoilov V. N., Persson B.N.J. Effective Viscosity of Confined Hydrocarbons // Physical Review Letters. – 2012. – Vol. 108, No 3. – P. 036102 (4).
58. Ляшенко Я. А. Фазовый переход первого рода между жидкоподобной и твердоподобной структурами граничной смазки // Журнал Технической Физики. – 2012. – Т. 82, Вып. 1. – С. 19-28.
59. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения: От нанотрибологии до динамики землетрясений. – Москва: Физматлит, 2013.

– 352 с.

60. Chandross M., Grest G. S., Stevens M. J. Friction between Alkylsilane Monolayers: Molecular Simulation of Ordered Monolayers // *Langmuir*. – 2002. – Vol. 18, No 22. – P. 8392-8399.
61. Dai L., Minn M., Satyanarayana N., Sinha S.K., Tan V. B. C. Identifying the Mechanisms of Polymer Friction through Molecular Dynamics Simulation // *Langmuir*. – 2011. – Vol. 27, No 24. – P. 14861-14867.
62. Ramin L., Jabbarzadeh A. Effect of Load on Structural and Frictional Properties of Alkanethiol Self-Assembled Monolayers on Gold: Some Odd–Even Effects // *Langmuir*. – 2012. – Vol. 28, No 9. – P. 4102-4112.
63. Малыгин Г. А. Самоорганизация дислокаций и локализация скольжения в пластически деформируемых кристаллах (обзор) // *ФТТ*. – 1995. – Т. 37, № 1. – С. 3–42.
64. Малыгин Г. А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов // *УФН*. – 1999. – Т. 169, № 9. – С. 979–1010.
65. Чувильдеев В. Н. Неравновесные границы зерен в металлах. Теория и эксперимент. – Москва: Физматлит, 2004. – 304 с.
66. Kopylov V. I., Chuvil'deev V. N. Severe Plastic Deformation: Towards Bulk Production of Nanostructured Materials. – New York: Nova Science Publishers, 2006. – 37–58 p.
67. Глезер А. М. О природе сверхвысокой пластической (мегапластической) деформации // *Известия РАН. Серия физическая*. – 2007. – Т. 71. – С. 1764–1773.
68. Глезер А. М., Метлов Л. С. Физика мегапластической (интенсивной) деформации твердых тел // *ФТТ*. – 2010. – Т. 52. – С. 1090–1097.
69. Бейгельзимер Я. Е., Варюхин В. Н., Орлов Д. В., Сынков С. Г. Винтовая экструзия – процесс накопления деформаций. – Донецк: ТЕАН, 2003. – 87 с.
70. Metlov L. S. Nonequilibrium dynamics of a two-defect system under severe

- load // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 90. – P. 022124 (8).
71. Метлов Л. С. Неравновесная эволюционная термодинамика и ее приложения. – Донецк: Ноулидж, 2014. – 176 с.
72. Метлов Л. С., Варюхин В. Н. Моделирование законов упрочнения при ИПД объемных твердых тел методами неравновесной эволюционной термодинамики. I. Зависимости от параметров задачи // ФТВД. – 2012. – Т. 20. – С. 7–21.
73. Метлов Л. С. Двухуровневая неравновесная эволюционная термодинамика ИПД // Вестник ДонГУ, Сер. А: Естественные науки. – 2009. – Т. 2. – С. 144–161.
74. Khomenko A. V., Troshchenko D. S., Metlov L. S. Thermodynamics and kinetics of solids fragmentation at severe plastic deformation // Condens. Matter Phys.– 2015. – Vol. 18. – P. 33004 (14).
75. Хоменко А. В., Трощенко Д. С., Бойко Д. В., Захаров М. В. Влияние внешнего периодического воздействия на кинетику фрагментации металлов при интенсивной пластической деформации // Ж. нано- электрон. физ. – 2015. – Т. 7. – С. 01039 (11).
76. Khomenko A. V., Troshchenko D. S., Khomenko K. P., Solonar I. O. Phase diagram of metals fragmentation modes at severe plastic deformation // Proceedings of the international conference nanomaterials : applications and properties. – 2016. – Vol. 5, No. 1. – P. 01PCSI07 (4).
77. Risken H. The Fokker-Planck Equation. – Berlin: Springer, 1989. – 485 p.
78. Ducret S., Zahouani H., Midol A., Lanteri P., Mathia T. Friction and abrasive wear of sliding on ice // Second International Conference on Erosive and Abrasive Wear. – 2005. – Vol. 258. – P. 26-31.
79. Baurle L., Kaempfer T.U., Szabo D., Spencer N.D. Sliding friction of polyethylene on snow and ice: Contact area and modeling // Cold Regions Science and Technology. – 2007. – Vol. 47. – P. 276-289.
80. Wiese K., Kessel T.M., Mundl R., Wies B. An analytical thermodynamic

- approach to friction of rubber on ice // *Tire Science and Technology*. – 2012. – Vol. 40. – P. 124-150.
81. Limmer D.T., Chandler D. Premelting, fluctuations, and coarse-graining of water-ice interfaces // *The Journal of Chemical Physics*. – 2014. – Vol. 141. – P. 18C505.
82. Khomenko A.V., Khomenko K.P., Falko V.V. Nonlinear model of ice surface softening during friction // *Condensed Matter Physics*. – 2016. – Vol. 19, No. 3. – P. 33002: 1-10.
83. Khomenko A.V., Yushchenko O.V. Solid-liquid transition of ultrathin lubricant film // *Phys Rev E*. – 2003. – Vol. 68. – P. 036110.
84. Khomenko A.V., Lyashenko I.A., Borisjuk V.N. Multifractal analysis of stress time series during ultrathin lubricant film melting // *Fluctuation and Noise Letters*. – 2010. – Vol. 9, No. 1. – P. 19 35.
85. Eirich, F. *Rheology*. New York: Academic Press, 1960. – 680 p.
86. Toropov E., Kharchenko D. Influence of noise on the nature of synergetic systems // *Russian Physics Journal*. – 1996. – Vol. 39, No. 4. – P. 355–361.
87. Eisenberg D.S., Kauzmann W. *The structure and properties of water*, 1 edn. – New York: Oxford University Press, 2005. – 310 p.
88. Khomenko A.V. Self-organization of adatom adsorption structure at interaction with tip of dynamic force microscope // *Condens. Matter Phys.* – 2014. – Vol. 17, No. 3. – P. 1–10.
89. Khomenko A., Lyashenko I. Stochastic theory of ultrathin lubricant film melting in the stick-slip regime // *Tech. Phys.* – 2005. – Vol. 50, No. 11. – P. 1408–1416.
90. Khomenko A., Lyashenko I. Melting of ultrathin lubricant film due to dissipative heating of friction surfaces // *Tech. Phys.* – 2007. – Vol. 52, No. 9. – P. 1239–1243.
91. Khomenko A.V. Noise influence on solid-liquid transition of ultrathin

- lubricant film // *Phys. Lett. A.* – 2004. – Vol. 329, No. 1-2. – P. 140–147.
92. Khomenko A.V., Lyashenko I.A. Statistical theory of the boundary friction of atomically flat solid surfaces in the presence of a lubricant layer // *Phys.-Usp.* – 2012. – Vol. 55, No. 10. – P. 1008–1034.
93. Baurle L., Kaempfer T.U., Szabo D., Spencer N.D. Sliding friction of polyethylene on snow and ice: Contact area and modeling // *Cold Regions Science and Technology.* – 2007. – Vol. 47, No. 3. – P. 276–289.
94. Yamada S. Nanotribology of Ethers: Effects of Molecular Asymmetry and Fluoroalkyl Chains // *Langmuir.* – 2005. – Vol. 21, No 19. – P. 8724-8732.
95. Ляшенко Я. А., Манько Н. Н. Учет пространственной неоднородности температуры в синергетической модели граничного трения // *Журнал нано- и электронной физики.* – 2013. – Т. 5, № 3. – С. 03040 (5).
96. Olemskoi A. I. Axiomatic theory of self-organizing system // *Physica A.* – 2002. – Vol. 310, No 1-2. – P. 223-233.
97. Погребняк А. Д., Братушка С. Н., Береснев В. М., Levintant-Zayonts N. Эффект памяти формы и сверхэластичность сплавов никелида титана, имплантированных высокими дозами ионов // *Успехи химии.* – 2013. – Т. 82, Вып. 12. – С. 1135-1159.
98. Попов В. Л. Термомеханическая модель кристаллических упругопластических сред // *Письма в ЖТФ.* – 1999. – Т. 25, Вып. 20. – С. 31-38.
99. Lyashenko I. A., Khomenko A. V., Metlov L. S. Thermodynamics and kinetics of boundary friction // *Tribology International.* – 2011. – Vol. 44. – P. 476-482.
100. Ахматов А. С. Молекулярная физика граничного трения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 472 с.
101. Ландау Л. Д., Халатников И. М. Об аномальном поглощении звука вблизи точек фазового перехода второго рода // *ДАН СССР.* – 1954. – Т. 96, № 3. – С. 469–472.
102. Сандерс Д., Кэндрот Э. Технология CUDA в примерах. Введение в про-

- граммирование графических процессоров: пер. с англ. Слинкина А. А., научный редактор Боресков А. В. — Москва: ДМК Пресс, 2011. — 232 с.
103. Tartaglino U., Samoilo V. N., Persson B. N. J. Role of surface roughness in superlubricity // *J. Phys.: Condens. Matter.* — 2006. — Vol. 18, No 17. — P. 4143-4160.
104. Bowden F. P., Tabor D. *The friction and lubrication of solids.* Oxford: The Clarendon Press, 1954. — 337 p.
105. Horsthemke W., Lefever R. *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology.* — New York: Springer-Verlag, 1984. — 318 p.
106. Risken H. *The Fokker-Planck Equation.* — Berlin: Springer, 1989. — 485 p.
107. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., and Flannery B. P. *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*, 2nd ed. — New York: Cambridge University Press, 1992. — 1020 p.
108. Amit D. J. *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena.* — New York: McGraw-Hill International Book Co., 1978. — 336 p.
109. Kantelhardt J. W., Zschiegner S. A., Koscielny-Bunde E., Havlin S., Bunde A., and Stanley H. E. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series // *Physica A.* — 2002. — Vol. 316. — P. 87–114.
110. Olemskoi A., Shuda I, and Borisyuk V. Generalization of multifractal theory within quantum calculus // *EPL (Europhysics Letters).* — 2010. — Vol. 89, No 5. — P. 50007.
111. Олемской А. И., Данильченко С. Н., Борисюк В. Н., Шуда И. А. Мультифрактальный анализ рентгеновских дифрактограмм сложных конденсированных сред // *Металлофизика и новейшие технологии.* — 2009. — Т. 31, № 6. — С. 777-789.
112. Feder J. *Fractals.* — New York: Plenum Press, 1988. — 283 p.
113. Олемской А. И. Теория стохастических систем с сингулярным мульти-

- пликативным шумом // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 168. – С. 287–321.
114. Malygin G. A. Kinetic mechanism of the formation of fragmented dislocation structures upon large plastic deformations // Phys. Solid State. – 2002. – Vol. 44, No. 11. – P. 1979–1986.
115. Mazilkin A. A., Straumal V. B., Protasova S. G., Kogtenkova O. A., Valiev R. Z. Structural changes in aluminum alloys upon severe plastic deformation // Phys. Solid State. – 2007. – Vol. 49, No. 5. – P. 824–82.
116. Валиев Р. З., Александров И. В. Объемные наноструктурные металлические материалы: получение, структура и свойства. – Москва: ИКЦ “Академкнига”, 2007. – 398 с.
117. Погребняк А. Д., Багдасарян А. А., Якущенко И. В., Береснев В. М. Структура и свойства высокоэнтропийных сплавов и нитридных покрытий на их основе // Успехи химии. – 2014. – Т. 83, №. 11. – С. 1027–1061.
118. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – Москва: Наука, 1969. – 420 с.
119. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Соппротивление материалов. – Москва: Наука, 1986. – 560 с.
120. Сергеев С. Н., Сафаров И. М., Корзников А. В., Галеев Р. М., Гладковский С. В., Бородин Е. М. Влияние всесторонней изотермическойковки на структуру и свойства низкоуглеродистой стали 12ГБА // Письма о материалах. – 2012. – Т. 2, №. 3. – С. 117–120.
121. Исламгалиев Р. К., Нестеров К. М., Валиев Р. З. Эволюция структуры меди при консолидации порошков методом интенсивной пластической деформации кручением // Вестник УГАТУ. – 2013. – Т. 17, №. 4. – С. 81–89.
122. Хлебникова Ю. В., Егорова Л. Ю., Пилюгин В. П., Суаридзе Т. Р., Пацелов А. М. Эволюция структуры монокристалла  $\alpha$ -титана при интенсивной пластической деформации кручением под давлением // ЖТФ. – 2015. –



- Т. 85. – С. 60–68.
123. Бродова И. Г. Эффективные способы измельчения структуры алюминиевых сплавов // Журнал СФУ. Техника и технологии. – 2015. – Т. 8, №. 4. – С. 519–530.
124. Хоменко О. В., Ляшенко Я. О. Фазова динаміка тонкої плівки мастила між твердими поверхнями при деформаційному дефекті модуля зсуву // Журнал фізичних досліджень. – 2007. – Т. 11. – С. 268–278.
125. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва: Наука, 1981. – 568 с.
126. Khomenko A. V., Lyashenko I. A. Statistical theory of the boundary friction of atomically flat solid surfaces in the presence of a lubricant layer // Phys-Usp. – 2012. – Vol. 55, No. 10. – P. 1008–1034.
127. Хоменко А. В., Ляшенко Я. А. Периодический прерывистый режим граничного трения // Журнал технической физики. – 2010. – Т. 80, №. 1. – С. 27–33.
128. Troshchenko D. S., Khomenko A. V. Modeling of the phase diagram and kinetics of materials fragmentation modes under severe plastic deformation // In Abstracts of 4th International Conference “Nanotechnologies” 24-27 October 2016. – 2016. – p. 208 (Tbilisi: GTU, 2016).
129. Yamashita A., Yamaguchi D., Horita Z., Langdon T. G. Influence of pressing temperature on microstructural development in equal-channel angular pressing // Materials Science and Engineering: A. – 2000. – Vol. 287, No. 1. – P. 100–106.
130. Соколенко В. И., Мац А. В., Мац В. А. Механические характеристики наноструктурированных циркония и цирконий-ниобиевых сплавов // ФТВД. – 2013. – Т. 23, №. 2. – С. 96–102.
131. Трощенко Д. С., Хоменко А. В. Modeling of the phase diagram and kinetics of materials fragmentation modes under severe plastic deformation // Материалы VIII Международной научно-инновационной молодежной конфе-

- ренции “Современные твердофазные технологии: теория, практика и инновационный менеджмент”. – 2016. – С. 365–367.
132. Pashynskaya E. G., Podrezov Yu. N., Stolyarov V. V., Zavdoveyev A. V., Tishchenko I. I. Intensified movement of defects during severe plastic deformation // *Materials Physics and Mechanics*. – 2012. – Vol. 1. – P. 26–33.
133. Зельцер А. С., Соболева Т. К., Филиппов А. Э. Автоблокировка зародышеобразования и универсальность кинетических явлений при фазовых переходах первого рода // *ЖЭТФ*. – 1995. – Т. 108, No. 1. – С. 356–372.
134. Олемской А. И., Хоменко А. В. Трехпараметрическая кинетика фазового перехода // *ЖЭТФ*. – 1996. – Т. 110, No. 6. – С. 2144–2167.
135. Olemskoi A. I., Khomenko A. V., Kharchenko D. O. Self-organized criticality within fractional lorenz scheme // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. – 2003. – Vol. 323. – P. 263–293.
136. Olemskoi A. I., Khomenko A. V. Synergetic theory for a jamming transition in traffic flow // *Phys. Rev. E*. – 2001. – Vol. 63. – P. 036116 (4).
137. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Course of theoretical physics, Vol.5: Statistical physics*. – London: Butterworth, 1999. – 564 p.
138. Хоменко А. В., Ляшенко Я. А. Плавление ультратонкой пленки смазки за счет диссипативного разогрева поверхностей трения // *ЖТФ*. – 2007. – Т. 77, No. 9. – С. 137–140.
139. Marmo B.A., Blackford J.R., Jeffree C.E. Ice friction, wear features and their dependence on sliding velocity and temperature // *Journal of Glaciology*. – 2005. – Vol. 51, No. 174. – P. 391–398.
140. Khomenko A.V., Lyashenko Y.A.: Periodic intermittent regime of a boundary flow // *Technical. Physics*. – 2010. – Vol. 55, No. 1. – P. 26–32.
141. Gardiner C.W. *Handbook of Stochastic Methods*, 2 edn. – Berlin: Springer, 1994. – 526 p.
142. Horstemke V., Lefever R.: *Noise-Induced Transitions*. – Berlin: Springer-

Verlag, 1984. –400 p.

143. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.: Numerical recipes in C: the art of scientific computing, 3 edn. – New York: Cambridge University Press, 2007. – 1256 p.
144. Klapproth C., Kessel T., Wiese K., Wies B. An advanced viscous model for rubber-ice-friction // Tribology International. – 2016. – Vol. 99. – P. 169–181.
145. Skokov V.N., Koverda V.N., Skripov V.P. A critical nonequilibrium phase transition and  $1/f$  noise in a current-carrying thin HTSC film-boiling nitrogen system // Cryogenics. – 1997. – Vol. 37, No 5. – P. 263–265.