

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

С. В. Соколов

ОПТИМАЛЬНІ ТА АДАПТИВНІ СИСТЕМИ

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми
Сумський державний університет
2018

УДК 519.45(075.8)
С81

Рецензенти:

Г. К. Чепурних – доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту прикладної фізики НАН України (м. Суми);

І. Л. Лебединський – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри електроенергетики Сумського державного університету

*Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як навчальний посібник
(протокол № 1 від 14 вересня 2017 року)*

Соколов С. В.

С81 Оптимальні та адаптивні системи : навчальний посібник / С. В. Соколов. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – 221 с.

ISBN 978-966-657-725-5

У навчальному посібнику викладена теорія оптимальних та адаптивних систем для студентів денної та заочної форм навчання за напрямом підготовки «Системна інженерія». Наведені основні методи і приклади розв'язування типових задач, питання самоконтролю та приклади завдань для самостійної роботи студента, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу з однойменної навчальної дисципліни, та інший довідковий матеріал.

ISBN 978-966-657-725-5

© Соколов С. В., 2018

© Сумський державний університет, 2018

ЗМІСТ

	С.	
Перелік умовних скорочень	6	
ВСТУП	7	
РОЗДІЛ 1. ОПТИМАЛЬНІ СИСТЕМИ		
ТЕМА 1. КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКА		
ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЯК ОБ'ЄКТІВ		
КЕРУВАННЯ	9	
ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ОБ'ЄКТІВ		
КЕРУВАННЯ	13	
2.1. Аналіз технологічного об'єкта керування	13	
2.2. Рівняння системи в нормальній формі Коші	14	
2.3. Способи переходу від диференціальних рівнянь до рівнянь стану	14	
Приклади розв'язування задач до теми 2	22	
ТЕМА 3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ТИПИ ЗАДАЧ		
КЕРУВАННЯ	28	
3.1. Мета та завдання керування	28	
3.2. Критерії якості	30	
3.3. Керованість, досяжність, спостережуваність	31	
3.4. Класифікація задач оптимального керування	32	
3.5. Приклади задач оптимального керування	33	
ТЕМА 4. МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ		38
4.1. Основи варіаційного числення	38	
4.2. Рівняння Ейлера	41	
4.3. Умови Лежандра	43	
4.4. Рівняння Ейлера – Пуассона	46	
4.5. Задачі з рухомими кінцями	47	
4.6. Екстремалі зі зламами	49	
4.7. Задачі на умовний екстремум	51	
4.8. Метод невизначених множників Лагранжа	52	
4.9. Розв'язування задач оптимального керування варіаційними методами	53	
Приклади розв'язування задач до теми 4	56	
ТЕМА 5. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ		71

5.1. Принцип оптимальності	71
5.2. Застосування методу динамічного програмування для одновимірної дискретної задачі.....	74
5.3. Метод динамічного програмування в неперервній задачі. Рівняння Беллмана	80
Приклад розв'язування задачі до теми 5	84
ТЕМА 6. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА	92
6.1. Модифікований вектор стану	92
6.2. Умова оптимальності.....	93
6.3. Система спряжених рівнянь.....	98
6.4. Дискретний принцип максимуму	99
Приклад розв'язання задачі до теми 6.....	102
ТЕМА 7. ЗАДАЧА ПРО МАКСИМАЛЬНУ ШВИДКОДІЮ	105
7.1. Визначення задачі про максимальну швидкодію ...	105
7.2. Динамічне програмування в задачі про максимальну швидкодію	106
7.3. Оптимальне керування об'єктом другого порядку..	110
7.4. Принцип максимуму в задачі про максимальну швидкодію	114
ТЕМА 8. ЗАДАЧА АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ	120
8.1. Постановлення задачі	120
8.2. Синтез регуляторів за жорстко заданої структури .	124
8.3. Синтез регуляторів методом варіаційного числення.....	127
8.4. Аналітичне конструювання регуляторів методом динамічного програмування.....	133
8.5. Аналітичне конструювання регуляторів за принципом максимуму.....	137
Приклади розв'язування задач до теми 8.....	142

РОЗДІЛ 2. АДАПТИВНІ СИСТЕМИ

ТЕМА 9. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ СИНТЕЗУ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ	151
9.1. Класифікація адаптивних систем	151

9.2. Схеми адаптивних систем	153
ТЕМА 10. АНАЛІТИЧНІ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ	156
10.1. Самоналагоджувальні системи з еталонною моделлю	156
10.2. Самоналагоджувальні системи із моделлю, що налагоджується.....	160
10.3. Системи з пасивною адаптацією	166
ТЕМА 11. АНАЛІТИЧНІ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНІ СИСТЕМИ ІЗ ОПТИМІЗАЦІЄЮ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ	169
11.1. Аналітичні самоналагоджувальні системи із налагодженням за зовнішнім впливом.....	169
11.2. Аналітичні самоналагоджувальні системи із налагодженням за характеристиками об'єкта керування	174
Приклади розв'язування задач до теми 11	181
ТЕМА 12. ПРИНЦИПИ ПРОЕКТУВАННЯ ПОШУКОВИХ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНИХ СИСТЕМИ СНС ІЗ ОПТИМІЗАЦІЄЮ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ	188
12.1. Градієнтні методи пошуку екстремуму	188
12.2. Методи визначення градієнта	193
12.3. Пошукові самоналагоджувальні системи із оптимізацією якості керування.....	198
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ.....	203
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	214
Додаток А.....	215
Додаток Б.....	217

Перелік умовних скорочень

АКР – аналітичне конструювання регуляторів.
АС – адаптивна система.
АСКТП – автоматизована система керування технологічним процесом.
АХ – аналізатор характеристик.
ГБШ – генератор білого шуму.
ЗЗ – зворотний зв'язок.
КЕ – керувальний елемент.
КП – керувальний пристрій.
ЛС – ланцюг самоналагоджування.
М – модель.
ОІХ – обчислювач імпульсної характеристики.
ОК – об'єкт керування.
ОП – обчислювач помилок.
П – програматор.
ПА – пристрій адаптації.
САК – система автоматичного керування.
СД – синхронний детектор.
СНС – самоналагоджувальна система.
ТЕО – техніко-економічне обґрунтування.
ТП – технологічний процес.
Ф – фільтр.

ВСТУП

Метою дисципліни Оптимальні та адаптивні системи є ознайомлення студентів із принципами та математичними методами розв'язування задач з оптимального та адаптивного керування системами, а також набуттям навичок з аналізу та синтезу таких систем.

Предметом навчальної дисципліни є комплекс методів та математичних моделей оптимізації систем керування технологічними процесами.

Як впливає з назви дисципліни «Оптимальні та адаптивні системи», у навчальному посібнику розглядається теорія проектування оптимальних та адаптивних систем. Отже, теоретичний матеріал цієї дисципліни зручно викладати, поділивши його на дві частини:

- оптимальні системи;
- адаптивні системи.

У широкому розумінні слово «оптимальний» означає найкращий (щодо деякого критерію ефективності). Критеріями оптимальності, за допомогою яких здійснюється вибір, можуть бути якість динаміки процесів керування, надійність системи, її вага і габарити, вартість, енергоспоживання та ін., або сукупність цих критеріїв із деякими ваговими коефіцієнтами.

Для знаходження оптимального керування використовують математичний апарат варіаційного числення, принцип максимуму Л. С. Понтрягіна та метод динамічного програмування теорії оптимального керування. Ці теорії є фундаментом для побудови оптимальних систем.

Проектування систем автоматичного керування за невизначених параметрів об'єкта завжди було однією з центральних проблем теорії автоматичного керування. У цьому разі виникає необхідність створення регуляторів, параметри яких змінюються так, щоб точність і якість системи залишалися незмінними. Системи з такими регуляторами називають адаптивними. У теорії адаптивних систем розглядають різні типи адаптивних систем та принципи їх побудови.

Окрім знань, одержаних під час вивчення дисципліни з теорії оптимізації систем керування, побудови адаптивних систем та методів розв'язування класичних задач теорії оптимального та адаптивного керування, студент повинен практично вміти розв'язувати задачі теорії оптимального та адаптивного керування, синтезувати адаптивні системи та системи керування з оптимальними параметрами.

Тому важливим завданням вивчення дисципліни є набуття практичних навичок із розв'язування задач із теорії оптимального та адаптивного керування.

У цьому навчальному посібнику на початку кожної теми достатньо детально викладені теоретичні основи, а потім наведені приклади задач із цієї теорії та їх досконале розв'язування. Крім набуття практичних навичок розв'язування задач, такий підхід дозволяє краще засвоїти теоретичний матеріал. У кінці навчального посібника наведені приклади задач для самостійного розв'язування студентами.

РОЗДІЛ 1

ОПТИМАЛЬНІ СИСТЕМИ

ТЕМА 1. КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЯК ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

Технологічний процес (ТП) – це первинна ланка створення матеріальних цінностей. У технологічних процесах відбувається перетворення або перенесення матеріалів, енергії та інформації. Внаслідок проходження технологічного процесу одержують вихідний продукт, що відрізняється від початкової сировини.

Залежно від способу перетворення або перенесення матеріалу, енергії та інформації технологічні процеси поділяють на такі групи:

1) безперервні технологічні процеси (безперервні потоки з безперервним функціонуванням об'єктів: газова, хімічна, нафтохімічна промисловості, металургія, енергетика і т. п.);

2) безперервно-дискретні технологічні процеси (перервані потоки, процеси в обмежений час: виплавлення сталі, полімеризація, вулканізація);

3) дискретні технологічні процеси (одноразове проходження процесу: виготовлення деталей).

При поданні технологічного процесу як об'єкта керування необхідно:

1) вивчити технологічну схему процесу;

2) розбити технологічний процес на підсистеми, пов'язані матеріальними потоками;

3) наближено оцінити статистичні параметри матеріальних потоків для побудови математичної моделі.

При розробленні автоматизованої системи керування технологічним процесом (АСКТП) ставиться завдання – одержати економічний ефект від упровадження системи керування. Розроблення техніко-економічного обґрунтування (ТЕО) пов'язане з вирішенням різних завдань: технологічних, технічних, організаційних. При цьому ТЕО визначають

кількісним оцінюванням рівня економічної ефективності, тобто економічного критерію керування. За критерій можуть бути вибрані такі показники:

- збільшення обсягу виробництва, спричинене покращенням використання обладнання та підвищенням випуску річної продукції;

- зменшення витрат сировини, матеріалів, палива, енергії на виробництво одиниці продукції внаслідок зниження матеріало- та енергоємності виробництва;

- підвищення продуктивності праці – збільшення кількості продукції за одиницю часу з розрахунку на одного працюючого;

- поліпшення якості продукції, тобто випуск продукції вищого гатунку за рахунок кращого функціонування систем керування.

Основним інтегральним показником економічної ефективності є річний економічний ефект, який одержують за рахунок зниження собівартості продукції та призводить до приросту прибутку.

У процесі розроблення ТЕО необхідно оцінити коефіцієнт ефективності одноразових вкладень на створення АСКТП, що дорівнює економії від АСКТП на 1 гривню вкладень. Також важливим економічним параметром є термін окупності вкладень на АСКТП – період часу відшкодування цих вкладень за рахунок річної економії від АСКТП.

За своєю природою всі технологічні процеси відрізняються один від одного. Щоб подати технологічний процес як об'єкт керування незалежно від його природи, необхідно абстрагуватися від фізичних, хімічних або технологічних особливостей відповідного об'єкта шляхом переходу до загальних принципів і методів подання об'єктів у теорії керування.

Для застосування загальних методів теорії керування технологічний процес розглядають як багатовимірний об'єкт, схема якого наведена на рис. 1.1.

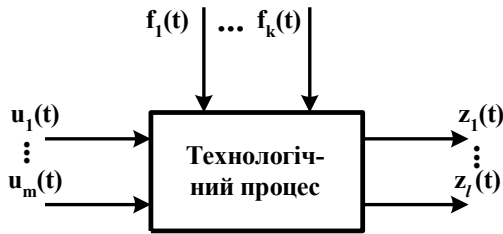


Рисунок 1.1 – Схема технологічного процесу як об'єкта керування: $u(t)$ – вхідні параметри (параметри сировини і теплоносія: витрата сировини, тиск, температура, хімічний склад, концентрація тощо); $f(t)$ – збурення (температура та вологість довкілля, наявність домішок у вихідній сировині і т. п.), які поділяються на вимірювальні та невимірювальні; $z(t)$ – вихідні (змінні) параметри

До вихідних параметрів $z(t)$ належать:

- параметри вихідного продукту (хімічний склад, розміри, концентрація, кількість);
- режимні параметри об'єкта (температура та тиск продукту на виході);
- техніко-економічні показники (продуктивність, собівартість, витрати сировини).

Систему автоматичного керування (САК) або АСКТП можна умовно уявити такою, що складається з трьох частин: об'єкта керування (ОК), керувального пристрою (КП) та програматора (П) (рис. 1.2). Об'єкт керування – це будь-який технічний пристрій на виході, процесом якого потрібно керувати (технологічна установка). Керувальний пристрій – це всі елементи керування (регулятори).

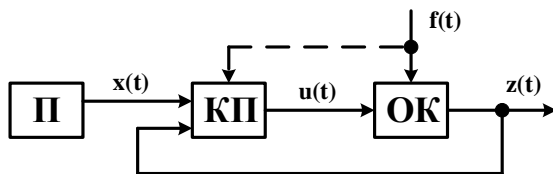


Рисунок 1.2 – Система автоматичного керування

Принцип роботи САК такий: на вхід системи керування подається задавальний вплив $x(t)$ (наприклад, із програматора), що визначає бажаний характер керованого процесу $z(t)$. На ОК також діють збурення $f(t)$. На підставі вхідних параметрів $x(t)$, вихідного $z(t)$ і з урахуванням збурень $f(t)$ КП формує керувальний вплив $u(t)$ для одержання на виході ОК вихідного продукту $z(t)$ із бажаними параметрами.

При створенні САК неможливо врахувати всі вхідні змінні об'єкта керування, що впливають на хід технологічного процесу. Тому в системах керування розраховують лише основні вхідні змінні ОК $u(t)$, що визначають хід процесу, а інші змінні належать до неконтрольованих збурень $f(t)$.

Запитання для самоперевірки

1. Яке призначення технологічного процесу у створенні матеріальних цінностей? Що є його результатом?
2. Як класифікують технологічні процеси?
3. Яке завдання ставлять при розробленні АСКТП? Які економічні критерії можна вибирати при розробленні ТЕО?
4. Що являє собою технологічний процес як об'єкт керування? Охарактеризуйте кожен параметр.
5. Як вибирають вихідні параметри об'єкта керування?

ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ОБ'ЄКТІВ КЕРУВАННЯ

2.1. Аналіз технологічного об'єкта керування

Для аналізу та синтезу САК необхідно мати математичну модель, яка полягає у встановленні ряду співвідношень ОК, тобто знайти сигнал на виході ОК $z(t)$ при кожному вхідному впливі $u(t)$. У загальному випадку ОК є багатовимірним (рис. 2.1), тобто має m вхідних впливів, k зовнішніх збурень та l керованих параметрів (процесів).

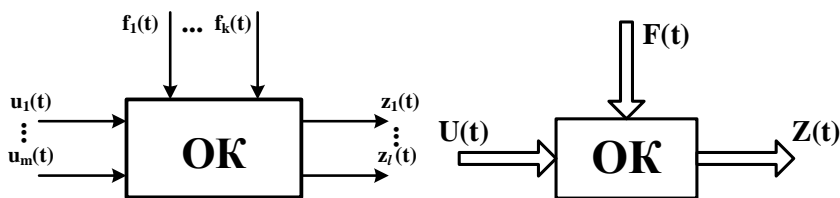


Рисунок 2.1 – Подання ОК за багатовимірний об'єкт

Математичний запис фізичних законів здебільшого являє собою систему нелінійних диференціальних рівнянь, що зв'язують вхідні та вихідні параметри та їх похідні (наприклад, рівняння теплопровідності, рівняння масоперенесення та ін.).

Ця система може бути записана у вигляді

$$\varphi_i \left[z_i(t), \dot{z}_i(t), \dots, z_i^{(n_i)}(t); u_1(t), \dot{u}_1(t), \dots, u_1^{(m_1)}(t); u_2(t), \dot{u}_2(t), \dots, u_2^{(m_2)}(t); \dots, u_m(t), \dot{u}_m(t), \dots, u_m^{(m_m)}(t); f_1(t), \dot{f}_1(t), \dots, f_1^{(k_1)}(t); f_2(t), \dot{f}_2(t), \dots, f_2^{(k_2)}(t); \dots, f_k(t), \dot{f}_k(t), \dots, f_k^{(k_k)}(t) \right] = 0, \quad (2.1)$$

де $i = 1, 2, \dots, l$.

При $l = 1$ об'єкт називається *одновимірним*.

Але таку систему рівнянь (2.1) не застосовують у теорії оптимальних і адаптивних систем. Найчастіше в теорії оптимальних і адаптивних систем використовують запис системи диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші.

2.2. Рівняння системи в нормальній формі Коші

У теорії автоматичного керування (ТАК) систему зі складних нелінійних диференціальних рівнянь високих порядків прийнято перетворювати на систему диференціальних рівнянь першого порядку. Із (2.1) бачимо, що система описується l диференціальними рівняннями n_i -го порядку. Їх можна подати у вигляді системи з $n = \sum_i n_i$ диференціальних рівнянь першого порядку, кожне з яких розв'язано відносно похідної. Для цього вводять n нових змінних y_1, y_2, \dots, y_n , які підбирають так, щоб систему (2.1) можна було подати у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{y}_j(t) = \varphi_j \left[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); \right. \\ \left. f_1(t), f_2(t), \dots, f_k(t) \right], \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таку систему диференціальних рівнянь першого порядку (2.2) називають системою рівнянь у нормальній формі Коші. Тоді вихідні параметри ОК

$$z_i = \Theta(y_1, y_2, \dots, y_n; u_1, u_2, \dots, u_m; f_1, f_2, \dots, f_k). \quad (2.3)$$

Рівняння (2.2) та (2.3) називають рівняннями стану.

2.3. Способи переходу від диференціальних рівнянь до рівнянь стану

Перехід від системи рівнянь у формі (2.1) до рівнянь стану (2.2)–(2.3) може бути здійснений різними шляхами. Одній і тій самій вихідній системі рівнянь може відповідати кілька систем у формі Коші залежно від способу визначення змінних стану. Розглянемо найбільш поширені підходи.

Спосіб 1. Нехай об'єкт керування описують лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами, які можна подати у вигляді

$$\sum_{i=0}^n a_i z^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^n b_i u^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^n c_i f^{(i)}(t), \quad (2.3)$$

де $a_i, b_i, c_i = \text{const}$; $i = \overline{0, n}$.

Запишемо диференціал за допомогою s -оператора Лапласа за нульових початкових умов, взявши $\frac{d}{dt} = s$.

Тоді рівняння (2.3) в операторній формі набере вигляду

$$A(s)z(t) = B(s)u(t) + C(s)f(t), \quad (2.4)$$

де $A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i$; $B(s) = \sum_{i=0}^n b_i s^i$; $C(s) = \sum_{i=0}^n c_i s^i$.

Визначимо $z(t)$ з формули (2.4):

$$z(t) = \frac{B(s)}{A(s)}u(t) + \frac{C(s)}{A(s)}f(t), \quad (2.4)$$

де $\frac{B(s)}{A(s)}$ та $\frac{C(s)}{A(s)}$ називають операторами об'єкта за

керуванням та збуренням відповідно.

Розкладемо оператори об'єкта на елементарні доданки:

$$\frac{B(s)}{A(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{(s - s_i)}, \quad \frac{C(s)}{A(s)} = h_0 + \sum_{i=1}^n \frac{h_i}{(s - s_i)}, \quad (2.5)$$

де s_i – корені характеристичного рівняння

$$A(s) = 0, \quad (2.6)$$

$$d_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B(s)}{A(s)}, \quad h_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{C(s)}{A(s)},$$

$$d_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \frac{B(s)}{A(s)}, \quad h_i = \lim_{s \rightarrow s_i} (s - s_i) \frac{C(s)}{A(s)}. \quad (2.7)$$

З урахуванням (2.5) рівняння (2.4) можна записати у вигляді

$$z(t) = d_0 u(t) + h_0 f(t) + \sum_{i=1}^n \frac{[d_i u(t) + h_i f(t)]}{(s - s_i)}. \quad (2.8)$$

Уведемо змінні стану:

$$y_i(t) = \frac{[d_i u(t) + h_i f(t)]}{(s - s_i)}. \quad (2.8)'$$

Тоді рівняння (2.2) можна записати так:

$$\dot{y}_i(t) = s_i y_i(t) + d_i u(t) + h_i f(t), \quad (2.9)$$

а рівняння (2.8) набере вигляду

$$z(t) = d_0 u(t) + h_0 f(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t). \quad (2.10)$$

Рівняння (2.9) і (2.10) називають рівняннями стану лінійного стаціонарного об'єкта.

Рівняння стану (2.9) і (2.10) зручно переписати у матрично-векторній формі:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{Y}}(t) &= S \vec{Y}(t) + \vec{D} u(t) + \vec{H} f(t), \\ z(t) &= \vec{E}^T \vec{Y}(t) + d_0 u(t) + h_0 f(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

де $\vec{Y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$;

$$\vec{D} = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T;$$

$$\vec{H} = [h_1, h_2, \dots, h_n]^T;$$

T – символ транспонування;

$S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ – діагональна матриця, елементи головної діагоналі якої дорівнюють кореням характеристичного рівняння (2.6), а решта елементів – нулі;

$$\vec{E} = [1, 1, \dots, 1]^T \text{ – } n\text{-вимірний вектор.}$$

Недоліком цього способу є необхідність розв'язання характеристичного рівняння (2.6), що ускладнюється за великих значень полінома. Цей недолік можна усунути, використовуючи спосіб 2.

Спосіб 2 можна використовувати, якщо диференціальні рівняння (2.1) також є лінійними зі сталими коефіцієнтами.

Для простоти припустимо, що збурення відсутні, тобто $f = 0$. Уведемо вектор $\vec{Y}(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T$, компоненти якого визначаються так: $y_1 = a_n z - b_n u$, $y_2 = y_1 + a_{n-1} z - b_{n-1} u$, ..., $y_n = y_{n-1} + a_1 z - b_1 u$.

Тоді рівняння стану (2.9) і (2.10) можна записати у вигляді

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A\vec{Y}(t) + \vec{B}u(t), \quad z(t) = \vec{C}^T \vec{Y}(t) + du(t), \quad (2.12)$$

де A – квадратична n -вимірна матриця;

\vec{B} і \vec{C} – n -вимірні вектори;

$$A = \frac{1}{a_n} \begin{vmatrix} -a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & a_n & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & 0 & a_n \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{B} = \frac{1}{a_n} \begin{vmatrix} a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n \\ a_n b_{n-2} - a_{n-2} b_n \\ \dots \\ a_n b_0 - a_0 b_n \end{vmatrix};$$

$$\vec{C}^T = \left[\frac{1}{a_n}, 0, 0, \dots, 0 \right]^T; \quad d = \frac{b_n}{a_n}.$$

Спосіб 3 застосовують, якщо диференціальний оператор $B(s)$ має порядок, менший за $A(s)$, тобто $m < n$ (похідна z має порядок, більший за похідну u).

Нехай збурення відсутні, тобто $f = 0$. Тоді рівняння (2.4) можна переписати у вигляді

$$\frac{z(t)}{B(s)} = \frac{u(t)}{A(s)} = y_1.$$

Бачимо, що

$$z(t) = B(s)y_1, \quad u(t) = A(s)y_1, \quad (2.13)$$

де $B(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m$;

$$A(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^j = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n.$$

З урахуванням цього одержимо, що

$$\begin{aligned} z &= (b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_m s^m) \cdot y_1, \\ u &= (a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n) \cdot y_1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Уведемо змінні стану

$$\begin{aligned} y_2 &= \dot{y}_1 = s y_1; \quad y_3 = \dot{y}_2 = s y_2 = s^2 y_1, \\ y_{i+1} &= \dot{y}_i = s y_i; \quad y_n = \dot{y}_{n-1} = s y_{n-1}, \\ \dot{y}_n &= s^n y_1 = \frac{1}{a_n} (u - a_0 y_1 - a_1 y_2 - \dots - a_{n-1} y_n). \end{aligned}$$

З урахуванням цих змінних вираз (2.14) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} z &= b_0 y_1 + b_1 s y_1 + b_2 s^2 y_1 + \dots + b_{m-1} s^{m-1} y_1 + b_m s^m y_1 = \\ &= b_0 y_1 + b_1 y_2 + \dots + b_m y_{m+1}, \\ u &= a_0 y_1 + a_1 s y_1 + a_2 s^2 y_1 + \dots + a_n s^n y_1 = \\ &= a_0 y_1 + a_1 y_2 + a_2 y_3 + \dots + a_{n-1} y_n + a_n \dot{y}_n. \end{aligned} \quad (2.14)'$$

У матричних позначеннях рівняння стану набирає вигляду

$$\dot{\vec{Y}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \cdot \vec{Y}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t),$$

$$z(t) = [b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0] \cdot \vec{Y}(t),$$

$$\text{де } \vec{Y}(t) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T.$$

Спосіб 4. Часто властивості ОК змінюються з часом. Якщо об'єкт лінійний, то нестационарність проявляється залежністю коефіцієнтів від часу.

Нехай збурення відсутні ($f = 0$). Тоді рівняння (2.1) можна записати у такому вигляді (див. (2.3)):

$$\sum_{i=0}^n a_i^{(i)}(t) z(t) = \sum_{i=0}^n b_i^{(i)}(t) u(t). \quad (2.15)$$

За аналогією зі способом 1 рівняння стану (2.11) можна подати так:

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A(t)\vec{Y}(t) + \vec{B}(t)u(t); \quad z(t) = \vec{C}^T\vec{Y}(t) + d(t)u(t), \quad (2.16)$$

$$\text{де } A(t) = \begin{bmatrix} (-1)^n a_{n-1}^*(t) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (-1)^{n-1} a_{n-2}^*(t) & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^2 a_1^*(t) & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-1) a_0^*(t) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.17)$$

$$\vec{B}(t) = \begin{bmatrix} (-1)^{2n} b_n^*(t) a_{n-1}^*(t) + (-1)^{n-1} b_{n-1}^*(t) \\ (-1)^{2n-1} b_n^*(t) a_{n-2}^*(t) + (-1)^{n-2} b_{n-2}^*(t) \\ \dots \\ (-1)^{n+1} b_n^*(t) a_0^*(t) + (-1)^0 b_0^*(t) \end{bmatrix};$$

$$d(t) = (-1)^n b_n^*(t).$$

У свою чергу,

$$a_i^*(t) = \sum_{k=i}^n (-1)^k \frac{k!}{(k-i)!i!} s^{k-i} \left[\frac{a_k(t)}{a_n(t)} \right],$$

$$b_i^*(t) = \sum_{k=i}^n (-1)^k \frac{k!}{(k-i)!i!} s^{k-i} \left[\frac{b_k(t)}{a_n(t)} \right]. \quad (2.18)$$

Спосіб 5 може використовуватися, якщо нелінійні рівняння не містять похідної від керувального впливу $u(t)$.

Нехай збурення $f(t)$ відсутні й об'єкт описують рівнянням

$$\varphi \left[z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(n)}(t); u(t) \right] = 0, \quad (2.19)$$

яке можна розв'язати щодо $z^{(n)}(t)$. Тоді

$$z^{(n)}(t) = \psi \left[z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(n-1)}(t); u(t) \right]. \quad (2.20)$$

Уведемо змінні стану:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= z(t), \\ y_2(t) &= \dot{y}_1(t) = \dot{z}(t), \\ y_3(t) &= \dot{y}_2(t) = \ddot{z}(t), \\ &\dots \\ y_n(t) &= \dot{y}_{n-1}(t) = z^{(n-1)}(t), \\ \dot{y}_n(t) &= z^{(n)}(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Із урахуванням уведених змінних стану y_1, y_2, \dots, y_n рівняння (2.20) набере такого вигляду:

$$\dot{y}_n(t) = \psi \left[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t); u(t) \right]. \quad (2.22)$$

Рівняння (2.21) і (2.22) є рівняннями стану для випадку (2.19).

Рівняння стану у векторній формі можна записати так:

$$\dot{\vec{Y}}(t) = \vec{\Psi} \left[\vec{Y}(t), u(t) \right]; \quad z(t) = \vec{C}^T \vec{Y}(t), \quad (2.23)$$

$$\text{де } \vec{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Спосіб 6. Розглянуті методи одержання рівнянь стану можуть бути застосовані й до багатовимірних об'єктів, для яких

$\vec{U}(t)$ є m -вимірним вектором керувань із компонентами u_1, u_2, \dots, u_m .

Для багатовимірних об'єктів, як і для одновимірних об'єктів, рівняння стану записують у вигляді

$$\dot{\vec{Y}}(t) = \vec{\Psi}[\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t], \quad \vec{Z}(t) = \vec{\Phi}[\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t], \quad (2.24)$$

де $\vec{Z}(t)$ – l -вимірний вектор керованих процесів із компонентами z_1, z_2, \dots, z_l ;

$\vec{Y}(t)$ – n -вимірний вектор стану з компонентами y_1, y_2, \dots, y_n .

Явна залежність функцій $\vec{\Psi}(t)$ та $\vec{\Phi}(t)$ від часу t свідчить про те, що до об'єкта, крім керувального впливу $\vec{U}(t)$, застосовано й зовнішній вплив $\vec{F}(t)$ (див. рис. 2.1).

Об'єкти, у яких у рівняннях стану є явна залежність від часу t , називають *неавтономними*. Якщо в рівняннях стану немає явної залежності від часу t , то такі об'єкти називаються *автономними*.

Спосіб 7. Методи опису неперервних об'єктів прийнятні й для дискретних об'єктів, які описують не диференціальними, а різницевиими рівняннями, що зв'язують один з одним вихідні та вхідні процеси в різні дискретні моменти часу. Для одновимірного дискретного об'єкта різницеві рівняння можна записати у формі

$$\varphi(z_k, z_{k+1}, \dots, z_{k+n}; u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+m}; f_k, f_{k+1}, \dots, f_{k+q}) = 0,$$

де $z_k = z(t_k)$.

Це рівняння можна замінити на n різницевих рівнянь першого порядку.

В наслідок цього математичний опис багатовимірного дискретного об'єкта у векторній формі зводиться до системи рівнянь стану, аналогічних рівнянням (2.24):

$$\vec{Y}_{k+1} = \vec{\Psi}(\vec{Y}_k, \vec{U}_k, t_k), \quad \vec{Z}_k = \vec{\Phi}(\vec{Y}_k, \vec{U}_k, t_k). \quad (2.25)$$

Приклади розв'язування задач до теми 2

Приклад 2.1. Використовуючи метод розкладання на елементарні дробі, одержати рівняння стану, якщо об'єкт керування описаний рівнянням

$$2\ddot{z}(t) + 10\dot{z}(t) + 12z(t) = 2\ddot{u}(t) + u(t).$$

Розв'язання. Оскільки $\ddot{z}(t)$ є похідною другого порядку, то згідно з (2.3) $n=2$, $a_2=2$, $a_1=10$, $a_0=12$, $b_2=2$, $b_1=0$, $b_0=1$.

Запишемо характеристичне рівняння (2.6):

$$2s^2 + 10s + 12 = 0.$$

Визначимо корені цього рівняння.

$$s^2 + 5s + 6 = 0,$$

$$D = 25 - 24 = 1;$$

$$s_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = -2; -3.$$

Знайдемо оператори об'єкта за керуванням та збуренням:

$$d_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{B}{A} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2s^2 + 1}{2s^2 + 10s + 12} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{s^2}}{2 + \frac{10}{s} + \frac{12}{s^2}} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$d_1 = \lim_{s \rightarrow -2} (s + 2) \frac{2s^2 + 1}{2(s + 2)(s + 3)} = \frac{8 + 1}{2(-2 + 3)} = \frac{9}{2}.$$

Тоді рівняння стану (2.9), (2.10) наберуть вигляду

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -2y_1(t) + \frac{9}{2}u(t), \\ \dot{y}_2(t) = -3y_2(t) - \frac{19}{2}u(t), \\ z(t) = y_1(t) + y_2(t) + u(t). \end{cases}$$

Перевірка. Із цих рівнянь можна знайти змінні стану:

$$y_1(t) = \frac{9}{2(s+2)} u(t), \quad y_2(t) = -\frac{19}{2(s+3)} u(t),$$

звідси
$$z(t) = \left[\frac{9}{2(s+2)} - \frac{19}{2(s+3)} + 1 \right] u(t),$$

$$z(t) = \frac{9(s+3) - 19(s+2) + 2(s+2)(s+3)}{2(s+2)(s+3)} u(t),$$

$$\left[2s^2 + 10s + 12 \right] z(t) = \left[2s^2 + 1 \right] u(t).$$

Приклад 2.2. Одержати рівняння стану, не розв'язуючи характеристичне рівняння, якщо об'єкт керування описаний рівнянням $2\ddot{z}(t) + 10\dot{z}(t) + 12z(t) = 2\ddot{u}(t) + u(t)$.

Розв'язання. Оскільки $\ddot{z}(t)$ є похідною другого порядку, то згідно з (2.3) $n=2$, $a_2=2$, $a_1=10$, $a_0=12$, $b_2=2$, $b_1=0$, $b_0=1$.

Складемо матрицю A та вектори \vec{B} та \vec{C} :

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -12 & 0 \end{vmatrix}; \quad \vec{B} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -20 \\ -22 \end{vmatrix}; \quad \vec{C} = \begin{vmatrix} 0,5 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad d = \frac{2}{2} = 1.$$

Тоді згідно з (2.12) рівняння стану у векторній формі наберуть вигляду

$$\begin{vmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 10 \\ 11 \end{vmatrix} u(t),$$

або в скалярній формі

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -5y_1(t) + y_2(t) - 10u(t), \\ \dot{y}_2(t) = -6y_1(t) - 11u(t), \\ z(t) = \frac{1}{2} y_1(t) + u(t). \end{cases}$$

Перевірка. Знайдемо змінну стану $y_1(t)$ із системи рівнянь:

$$\begin{cases} sy_1(t) = -5y_1(t) + y_2(t) - 10u(t), \\ sy_2(t) = -6y_1(t) - 11u(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2 + 5s)y_1(t) = sy_2(t) - 10su(t), \\ sy_2(t) = -6y_1(t) - 11u(t). \end{cases}$$

$$(s^2 + 5s)y_1(t) = -6y_1(t) - 11u(t) - 10su(t),$$

$$y_1(t) = -\frac{(10s + 11)}{(s^2 + 5s + 6)}u(t).$$

$$z(t) = \left[-\frac{(10s + 11)}{2(s^2 + 5s + 6)} + 1 \right] u(t) = \frac{2s^2 + 1}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t),$$

$$\left[2s^2 + 10s + 12 \right] z(t) = \left[2s^2 + 1 \right] u(t).$$

Приклад 2.3. Одержати рівняння стану, якщо об'єкт керування описаний рівнянням $2\ddot{z}(t) + 10\dot{z}(t) + 12z(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$.

Розв'язання. Оскільки $\ddot{z}(t)$ є похідною другого порядку, то згідно з (2.3) $n=2$, $a_2=2$, $a_1=10$, $a_0=12$, $b_1=2$, $b_0=1$.

Запишемо рівняння стану:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{12}{2} & -\frac{10}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t),$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

або в розгорненій формі

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = -6y_1(t) - 5y_2(t) + 0,5u(t), \\ z(t) = y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases}$$

Перевірка. Знайдемо змінні стану $y_1(t)$ та $y_2(t)$:

$$\begin{cases} sy_1(t) = y_2(t), \\ sy_2(t) = -6y_1(t) - 5y_2(t) + 0,5u(t); \\ \begin{cases} sy_1(t) = y_2(t), \\ s^2y_1(t) + 5sy_1(t) + 6y_1(t) = 0,5u(t). \end{cases} \end{cases}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t), \quad y_2(t) = \frac{s}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t).$$

Тоді $z(t) = \frac{(2s + 1)}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t)$,

$$[2s^2 + 10s + 12] z(t) = [2s + 1] u(t).$$

Приклад 2.4. Одержати рівняння стану, якщо об'єкт керування описаний рівнянням $2\ddot{z}(t) + 10\dot{z}(t) + 12z(t) = u(t)$.

Розв'язання. Виразимо з вихідного рівняння похідну найвищого порядку $\ddot{z}(t)$:

$$\ddot{z}(t) = -5\dot{z}(t) - 6z(t) + 0,5u(t).$$

Уведемо змінні стану $y_1(t)$ та $y_2(t)$ згідно з (2.21):

$$y_1(t) = z(t),$$

$$y_2(t) = \dot{y}_1(t) = \dot{z}(t),$$

$$\dot{y}_2(t) = \ddot{z}(t) = -5\dot{z}(t) - 6z(t) + 0,5u(t).$$

У наслідок цього одержимо систему рівнянь стану:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = -5y_2(t) - 6y_1(t) + 0,5u(t), \\ z(t) = y_1(t). \end{cases}$$

Перевірка. Знайдемо змінні стану $y_1(t)$ та $y_2(t)$;

$$\begin{cases} sy_1(t) = y_2(t), \\ sy_2(t) = -6y_1(t) - 5y_2(t) + 0,5u(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} sy_1(t) = y_2(t), \\ s^2y_1(t) + 5sy_1(t) + 6y_1(t) = 0,5u(t). \end{cases}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t), \quad y_2(t) = \frac{s}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t).$$

$$\text{Тоді } z(t) = y_1(t) = \frac{1}{2(s^2 + 5s + 6)} u(t),$$

$$[2s^2 + 10s + 12] z(t) = u(t).$$

Запитання для самоперевірки

1. Що являє собою математична модель?
2. Як записують фізичні закони проходження технологічного процесу?
3. Які рівняння називають рівняннями стану, яким чином їх можна одержати?
4. У чому полягає методика переходу до рівнянь стану з використанням характеристичного рівняння, якщо об'єкт керування описаний лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами (спосіб 1)?
5. Як перейти до рівнянь стану, не розв'язуючи характеристичне рівняння, якщо об'єкт керування описаний лінійними диференціальними рівняннями зі сталими коефіцієнтами (спосіб 2)?
6. Яка методика переходу до рівнянь стану при $m < n$ (спосіб 3)?
7. У чому полягає методика переходу до рівнянь стану, якщо властивості об'єкта керування змінюються з часом (спосіб 4)?
8. Яким чином можна перейти до рівнянь стану, якщо немає похідної від керувального впливу (спосіб 5)?

9. Які особливості переходу до рівнянь стану для багатовимірних (спосіб 6)?

10. Якими рівняннями описують дискретні об'єкти (спосіб 7)?

ТЕМА 3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ТИПИ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ

3.1. Мета та завдання керування

Нехай у початковий момент часу t_0 початок вектора стану $\vec{Y}(t_0)$ знаходиться в точці O , а кінець – у точці M_0 (рис. 3.1). За час $t=T$ об'єкт повинен перейти в точку N_T . Позначимо ці точки у фазовому просторі (просторі станів) – системі координат, на осях якої відкладені координати вектора стану y_1, y_2, \dots, y_n (наприклад, для тривимірного простору $y_1 = s, y_2 = v, y_3 = a$).

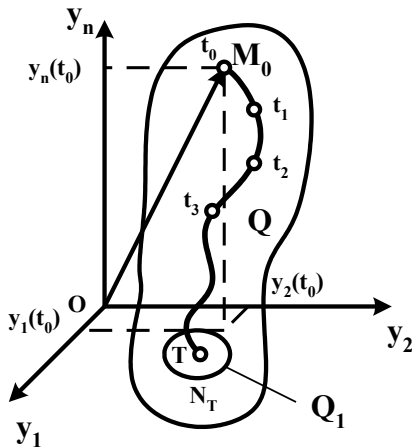


Рисунок 3.1 – Траєкторія руху об'єкта у фазовому просторі

Якщо в кожен момент часу t відкласти у фазовому просторі точку, що відповідає вектору $\vec{Y}(\vec{U}(t), \vec{F}(t), t)$, то одержимо траєкторію руху об'єкта.

Траєкторією руху об'єкта називають слід, що залишає вектор стану у фазовому просторі з плином часу.

Унаслідок конструктивних, міцнісних, енергетичних та інших особливостей керувальний вплив не може перевищувати якусь величину c , тобто

$$|u_i(t)| \leq c_i, \quad (3.1)$$

де $c_i = \text{const}$; $i = \overline{1, m}$.

Область можливих значень керувальних впливів $\Omega(\vec{U})$ називають *областю допустимих керувань*. Керування, що подають на вхід ОК, повинні належати області допустимих керувань, скорочено

$$\vec{U}(t) \in \Omega(\vec{U}). \quad (3.2)$$

Аналогічно, компоненти вектора стану $\vec{Y}(t)$ у загальному випадку також повинні відповідати певним обмеженням. Деяка область Q у просторі станів, за межі якої не повинен виходити вектор стану $\vec{Y}(t)$, називають *областю допустимих станів*, скорочено

$$\vec{Y}(t) \in Q(\vec{Y}). \quad (3.3)$$

В області допустимих станів Q можна виділити підобласть Q_1 , у межах якої з деяких причин значення вектора стану в кінцевий момент часу $t = T$ буде бажаним (див. рис. 3.1).

Мета керування – перевести об'єкт із початкового стану $\vec{Y}(t_0)$ у кінцевий $\vec{Y}(T)$, що належить підобласті (Q_1) бажаних значень вектора стану, яка знаходиться в області допустимих станів Q . При цьому кінцевий час T може бути невідомим. Для досягнення мети керування на вхід ОК необхідно подати відповідне керування.

Завдання керування – у області допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$ підібрати таке керування, за якого буде реалізована мета

керування, тобто знайти таке допустиме керування $\vec{U}(t) \in \Omega(\vec{U})$ на часовому відрізку $[t_0, T]$, за якого рівняння стану ОК у кінцевий момент часу T за заданого початкового стану $\vec{Y}(t_0)$ мають розв'язок, що перебуває в області бажаних значень Q_1 .

3.2. Критерії якості

Як правило, завдання керування має велику кількість розв'язків. Однак до системи керування часто ставлять ряд вимог, не описаних у задачі керування (наприклад, швидше за все, з найменшими витратами і т. д.). Для оцінювання ступеня відповідності системи вимогам, що ставлять, уводять числові показники, які характеризують якість керування.

Якість керування можна описати двома способами:

1) у формі сукупності показників якості (час, витрати, площа і т. п.);

2) у формі деякого узагальненого показника (час досягнення мети, значення максимальної помилки, безвідмовність роботи, продуктивність, собівартість і т. д. – для кожного випадку свій).

Найчастіше узагальнений показник якості керування J можна подати у вигляді функціонала

$$J = \int_{t_0}^T G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), \vec{F}(t), \vec{X}(t), t) dt, \quad (3.4)$$

де G – функція, що визначає конкретний фізичний зміст показника якості J .

Тоді завдання оптимального керування може бути сформульоване так: при переведенні об'єкта керування з початкового стану $\vec{Y}(t_0)$ у кінцевий $\vec{Y}(T)$, залишаючись в області допустимих станів $Q(\vec{Y})$ на всьому часовому відрізку $t \in [t_0, T]$, знайти в області допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$ таке

керування $\vec{U}(t)$, за якого показник J досягає екстремального (оптимального) значення, тобто

$$J = \text{extremum}. \quad (3.5)$$

Умову (3.5) називають *критерієм оптимальності*.

Керування, що реалізує критерій оптимальності, називають оптимальним; систему рівнянь, яка з позиції критерію оптимальності є найкращою, називають оптимальною.

3.3. Керованість, досяжність, спостережуваність

Нехай на керування $\vec{U}(t)$ не накладені обмеження (3.1). Тоді об'єкт називають керованим, якщо можна підібрати таке керування $\vec{U}(t)$, за допомогою якого об'єкт буде переведений із початкового стану $\vec{Y}(t_0)$ у кінцевий $\vec{Y}(T)$ за кінцевий час $T - t_0$. Іншими словами, вектор керування $\vec{U}(t)$ повинен впливати на всі компоненти вектора стану $\vec{Y}(t)$.

Якщо на вектор керування $\vec{U}(t)$ накласти обмеження, наприклад (3.1), то повністю керований об'єкт може стати некерованим. Таким чином, поняття керованості відповідає на питання: чи можливе існування оптимального керування для даного об'єкта при конкретних обмеженнях і початкових станах. Відповідні дослідження проводять із використанням поняття досяжності.

Кінцевий стан $\vec{Y}(T)$ є досяжним із вихідного стану $\vec{Y}(t_0)$, якщо знайдеться таке керування $\vec{U}(t)$ з області допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$, за якого об'єкт за кінцевий час $T - t_0$ буде переведений із початкового стану $\vec{Y}(t_0)$ у кінцевий стан $\vec{Y}(T)$. Сукупність досяжних станів $\vec{Y}(t)$ утворює область досяжних

станів Γ_T у момент часу T із вихідного стану $\vec{Y}(t_0)$ стосовно області допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$.

Задача оптимального керування має сенс, якщо кінцевий стан об'єкта $\vec{Y}(t)$ належить області допустимих станів Q . У більшості технічних завдань кінцевий стан $\vec{Y}(T)$ є досяжним, а об'єкт – керованим.

Раніше ми вважали, що початковий стан відомий $\vec{Y}(t_0)$. Але на практиці не завжди вектор стану $\vec{Y}(t)$ можна виміряти (зазвичай вимірюється $\vec{U}(t)$ та $\vec{Z}(t)$). Тому, спостерігаючи за вихідними $\vec{Z}(t)$ і вхідними $\vec{U}(t)$ параметрами об'єкта керування впродовж часу $[t_0, T]$, можна визначити початковий стан об'єкта $\vec{Y}(t_0)$.

Спостережуваністю називають можливість відновлювати початковий стан об'єкта $\vec{Y}(t_0)$ за спостереженнями за виходом $\vec{Z}(t)$ і входом $\vec{U}(t)$ упродовж кінцевого відрізка часу $[t_0, T]$. Стан $\vec{Y}(t_0)$ називають *спостережуваним*, якщо за заданого керування $\vec{U}(t)$ існує такий кінцевий проміжок часу $T - t_0$, на якому, знаючи вхід $\vec{U}(t)$ і вихід $\vec{Z}(t)$ об'єкта керування на цьому проміжку, можна визначити початковий стан $\vec{Y}(t_0)$.

3.4. Класифікація задач оптимального керування

У загальному випадку задачі оптимального керування можна поділити на два великі класи:

- задачі оптимального програмного керування;
- задачі синтезу оптимального керування.

Якщо оптимальне керування $\vec{U}(t)$ залежить лише від часу t , то такі задачі називають задачами оптимального програмного керування (для розімкненої системи без зворотного зв'язку). Для замкнених систем (із каналом зворотного зв'язку й компенсацією збурень) оптимальне керування залежить від векторів стану $\vec{Y}(t)$, задавального впливу $\vec{X}(t)$ та збурення $\vec{F}(t)$, тобто $\vec{U}(\vec{Y}(t), \vec{X}(t), \vec{F}(t), t)$. Такі задачі називаються задачами синтезу оптимального керування.

За обмеженням на стан ОК і час керування задачі поділяють на такі:

1) задачі з фіксованим часом T (лише кінцевий час T є відомою фіксованою величиною);

2) задачі з вільним правим кінцем. Тут фіксують кінцевий момент часу T , а обмеження на кінцеве положення вектора стану $\vec{Y}(T)$ знімають;

3) задачі без обмеження на змінні стану всього вектора $\vec{Y}(t)$ (обмеження (3.3) знімають, і змінні стану $\vec{Y}(t)$ належать усьому простору стану; кінцевий час може бути будь-яким);

4) задачі із закріпленим правим кінцем траєкторії. У цих випадках підмножина бажаних значень Q_1 являє собою єдину точку, в яку повинен потрапити вектор $\vec{Y}(t)$ у кінцевий момент часу $t = T$. В іншому випадку (якщо Q_1 – підобласть простору станів, а не єдина точка) використовують термін «задача з рухомим правим кінцем».

3.5. Приклади задач оптимального керування

1. Задача про мінімальну тривалість перехідного процесу

В електронних колах за наявності комутаційних пристроїв і ємнісних або індукційних елементів виникають перехідні процеси, часову залежність яких можна зобразити за допомогою графіка, поданого на рис. 3.2.

Для стабільної роботи електронних схем перехідні процеси в основному є небажаними, і тому прагнуть до зменшення тривалості перехідних процесів. Сформулюємо задачу оптимального керування для цього випадку.

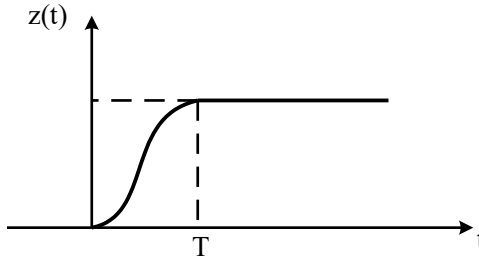


Рисунок 3.2 – Графік перехідного процесу

Нехай є система керування, структура якої подана на рис. 1.2. Об'єкт керування в початковий момент часу перебуває в нульовому стані ($\vec{Y}(t_0) = 0$). На вхід системи подається задавальне збурення у формі одиничної ступінчастої функції $x(t) = 1(t)$. Необхідно знайти таке керування $\bar{u}(\vec{Y}(t), x(t))$, за якого перехід вектора стану $\vec{Y}(t)$ із початкового стану $\vec{Y}(t_0)$ у кінцевий стан $\vec{Y}(T)$ з урахуванням обмеження (3.1) займе мінімальний час.

У цьому випадку критерій оптимальності записують у вигляді

$$J = T = \int_0^T dt = \min_{u(\vec{Y}, x) \in \Omega(u)} .$$

Широкий клас задач оптимального керування, у яких необхідно знайти мінімальний час будь-якого процесу, називають *задачами про максимальну швидкодю*.

2. Задача про максимальну точність відтворення

При серійному виробництві виробів необхідно, щоб вони якомога більш точно відповідали зразку. Однак різні зовнішні випадкові фактори є причиною виникнення відхилень від зразка. Клас задач оптимального керування, що дозволяють визначити режими виробництва виробів із найменшим відхиленням від зразків, називають *задачами про максимальну точність відтворення*. Сформулюємо таку задачу.

Нехай на КП подається збурення $x(t)$, яке відтворюється на виході ОК, тобто $z(t) = x(t)$. На ОК діє випадкове збурення, $f(t)$, імовірні властивості якого відомі. Таке збурення $f(t)$ призведе до відхилення вихідної змінної $z(t)$ від заданої величини $x(t)$ на похибку $\varepsilon_f(t)$, тобто $z(t) = x(t) + \varepsilon_f(t)$. Необхідно підібрати таку імпульсну характеристику $k(t)$ КП, щоб середньоквадратична похибка $\varepsilon_f(t)$ вихідного сигналу $z(t)$, викликана збуренням $f(t)$, була б мінімальною.

Критерій оптимальності для такої задачі можна записати так:

$$J = M \left\{ \varepsilon_f^2(t) \right\} = \min_{k(t)} .$$

3. *Задачу про оптимізацію кінцевого стану* розглянемо на прикладі ракети. Нехай ракета масою m із запасом палива M підіймається на висоту h , витрачаючи паливо із секундною витратою μ . Враховуючи прискорення вільного падіння $g = f(h)$, силу лобового опору $D = f(h, v)$ і коефіцієнт пропорційності між тягою двигуна і витратою палива c , підібрати таку секундну витрату палива μ , щоб ракета за кінцевий час T (невідоме) підіймалася на максимальну висоту h_{\max} .

Позначимо висоту $h = y_1$, швидкість польоту $v = y_2$, масу $m + M = y_3$.

Тоді $\dot{y}_1 = y_2 \left(\frac{dh}{dt} = v \right)$.

Згідно з другим законом Ньютона прискорення

$$a = \frac{F}{m + M} = \frac{F_{\text{тяги}}}{m + M} - \frac{F_{\text{опору}}}{m + M} - g.$$

Запишемо цей вираз із урахуванням умови задачі:

$$a = \frac{1}{m + M} (c + v) \mu - \frac{D(h, v)}{m + M} - g(h).$$

Замінімо фізичні величини змінними стану:

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{y_3} (c + y_2) \mu - \frac{D(y_1, y_2)}{y_3} - g(y_1),$$

$$\dot{y}_3 = -\mu.$$

Критерій оптимальності можна записати у вигляді

$$J = y_1(T) = \max_{\mu(t)}$$

за таких додаткових обмежень:

$$\int_0^T \mu(t) dt = M, \quad \mu(t) \leq \mu_m, \quad y_2(T) = 0, \quad y_3(T) = m.$$

Тоді задачу оптимізації кінцевого стану можна сформулювати так: в області допустимих керувань $\mu(t) \leq \mu_{\max}$ знайти таке керування $\bar{\mu}(t)$, щоб одна із змінних стану (наприклад, висота $h = y_1$) у кінцевий момент часу T набувала максимального значення. Задачі такого типу називають *термінальними*.

4. Задача про мінімальні витрати палива

Інакше попередню задачу можна сформулювати так: знайти таку витрату палива $\mu(t)$ при обмеженні $\mu(t) \leq \mu_{\max}$, за якої кількість палива, витрачена на піднімання на висоту h , виявилася б мінімальною, тобто

$$J = \int_0^T \mu(t) dt = \min_{\mu(t)}.$$

5. Задача про мінімальні енергетичні витрати

Нехай під дією керування $u(t)$ об'єкт переміщується з початкового в кінцевий стан і описується рівняннями стану $\dot{y}_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = u$. Необхідно знайти таке збурення $\bar{u}(t)$, щоб енергетичні витрати на переміщення об'єкта за час T були б мінімальними.

Критерій оптимальності в цьому випадку має вигляд

$$J = \int_0^T u^2(t) dt = \min_{u(t)}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Який простір називають фазовим? Що являє собою траєкторія руху об'єкта?

2. Яким чином можна пояснити поняття: область допустимих керувань, область допустимих станів, область бажаних станів?

3. Мета та завдання керування.

4. Яка причина введення поняття показника якості? У яких формах він може використовуватися?

5. Як формулюється задача оптимального керування з урахуванням показника якості? Яка умова використовується для критерію оптимальності?

6. Як можна пояснити поняття «керіваність», «досяжність», «спостережуваність»?

7. Як класифікують задачі оптимального керування?

8. Які приклади задач оптимального керування наведені в навчальному посібнику? Як визначається критерій оптимальності в кожному випадку?

ТЕМА 4. МЕТОДИ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.1. Основи варіаційного числення

Варіаційне числення – розділ математики, що займається пошуками функцій, на яких деякі величини досягають максимуму або мінімуму. Якщо за кожною функцією $u(t)$ можна зіставити число J , то J є функціоналом функції $u(t)$, тобто, $J(u(t))$. Іншими словами, функціонал є функцією, у якому аргумент є функцією.

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення.

Нехай заданий функціонал із відомими межами інтегрування t_0 та T :

$$J = \int_{t_0}^T G[t, u(t), \dot{u}(t)] dt. \quad (4.1)$$

Якщо функція G однозначна і неперервна разом із своїми одиничними похідними до другого порядку, а функція $u(t)$ однозначна і неперервна разом із похідними першого порядку, то такі функції називають *гладкими*. Позначимо гладкі функції $\Omega_1(u)$.

Якщо задані значення функції $u(t)$ у початковій $u(t_0)$ та у кінцевій $u(T)$ точках і сама функція $u(t)$ є гладкою ($u(t) \in \Omega_1(u)$), то таку функцію називають *допустимою*.

Тоді задача *варіаційного числення* формулюється так: серед допустимих функцій $u(t) \in \Omega_1(u)$ знайти таку функцію, на якій функціонал J (4.1) досягає найменшого значення. Математично цю умову можна записати в такій формі:

$$J = \min_{u(t) \in \Omega_1(u)}. \quad (4.2)$$

Функціонал $J(u(t))$ досягає на кривій $u_1(t)$ мінімуму, якщо його значення на будь-якій іншій кривій $u_2(t)$, близькій до цієї кривої $u_1(t)$, не менше за $u_1(t)$, тобто

$$\Delta J = J(u_2(t)) - J(u_1(t)) \geq 0.$$

Часто під час розв'язуванні задач, описаних диференціальними рівняннями, одержуємо кілька близьких функцій, але лише одна з них буде оптимальною (найкращою). Тому розглянемо поняття *близькості*.

Дві функції $u_1(t)$ та $u_2(t)$ називають близькими в сенсі близькості нульового порядку (рис. 4.1), якщо максимальне значення модуля різниці функцій мале:

$$\max |u_1(t) - u_2(t)| \leq \alpha,$$

де α – досить мале число.

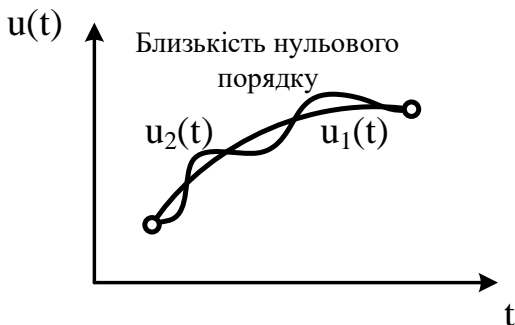


Рисунок 4.1 – Близькість функцій нульового порядку (сильний мінімум)

Дві функції $u_1(t)$ та $u_2(t)$ називають близькими в сенсі близькості першого порядку (рис. 4.2), якщо мале не лише максимальне значення модуля різниці функцій, а й максимальне значення модуля різниці перших похідних цих функцій, тобто

$$\max |u_1(t) - u_2(t)| \leq \alpha_1, \quad \max |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)| \leq \alpha_2.$$

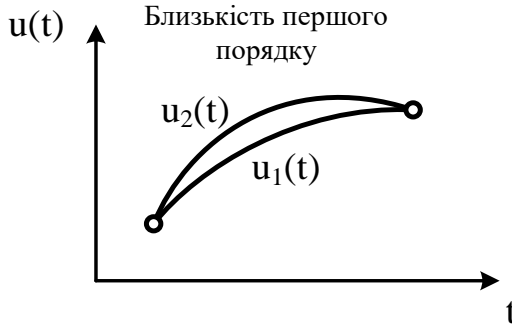


Рисунок 4.2 – Близькість функцій першого порядку (слабкий мінімум)

Аналогічні визначення можна дати і для близькості функцій більш високих порядків (для другого, ..., k -го порядків).

Для функціонала J (4.1) необхідно порівнювати допустимі функції щодо близькості першого порядку, оскільки $G[u(t), \dot{u}(t), t]$ є функцією від першої похідної з керування $u(t)$.

Якщо функціонал $J(u(t))$ досягає на кривій $u_1(t)$ мінімуму відносно кривих, близьких до $u_1(t)$ щодо нульового порядку, то такий мінімум називають *сильним*. У цьому випадку мінімальну функцію вибирають серед багатьох близьких кривих, для яких виконується лише одна умова $\max |u_1(t) - u_2(t)| \leq \alpha$.

Якщо функціонал $J(u(t))$ досягає на кривій $u_1(t)$ мінімуму відносно кривих, близьких до $u_1(t)$ щодо близькості першого порядку, то такий мінімум називають *слабким*. Тут мінімальну функцію вибирають серед небагатьох кривих, для яких виконується й умова $\max |u_1(t) - u_2(t)| \leq \alpha_1$, і умова $\max |\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)| \leq \alpha_2$. Отже, умова сильного мінімуму входить

до умови слабкого мінімуму. Звідси випливає, що сильний мінімум є і слабким (але не навпаки).

У задачах ми будемо шукати лише слабкий мінімум.

4.2. Рівняння Ейлера

Повернемося до задачі варіаційного числення, тобто серед усіх близьких кривих $u(t)$ знайдемо таку функцію $\bar{u}(t)$, за якої виконується умова (4.2).

Припустимо, що функція, за якої виконується умова (4.2), відома. Позначимо її $\bar{u}(t)$. Нехай початки та кінці оптимальної $\bar{u}(t)$ і неоптимальної $u(t)$ кривих збігаються (див. рис. 4.2). Для кривих, близьких щодо першого порядку, криві відрізняються лише крутизною нахилу, тобто першими похідними. Тоді для неоптимальної кривої $u(t)$ можна записати, що

$$u(t) = \bar{u}(t) + \alpha \frac{du(t)}{d\alpha} = \bar{u}(t) + \alpha \eta(t),$$

де α – мале число;

$\eta(t) = \frac{du(t)}{d\alpha}$ – довільна гладка функція, що у початковий і кінцевий моменти часу дорівнює нулю ($\eta(t_0) = \eta(T) = 0$);

$\alpha \eta(t)$ – варіація функції $\bar{u}(t)$.

З урахуванням цього функціонал (4.1) можна записати у вигляді

$$J(\alpha) = \int_{t_0}^T G\left[t, \dot{\bar{u}}(t) + \alpha \dot{\eta}(t), \bar{u}(t) + \alpha \eta(t)\right] dt. \quad (4.3)$$

Необхідна умова оптимальності (екстремальності) функції $J(\alpha)$ – рівність нулю першої похідної за змінною α . Знайдемо $\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}$ і прирівняємо до нуля.

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^T \left(\frac{dG}{d\alpha} \right) dt = \left| G(u(t) = \bar{u}(t) + \alpha\eta(t), \right. \\ \left. \dot{u}(t) = \dot{\bar{u}}(t) + \alpha\dot{\eta}(t) \right) = \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial G}{\partial u} \frac{du}{d\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}}{d\alpha} \right) dt. \quad (4.3)$$

З урахуванням того, що $\frac{du}{d\alpha} = \eta$, $\frac{d\dot{u}}{d\alpha} = \dot{\eta}$, вираз (4.3) можна подати у вигляді

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial G}{\partial u} \eta(t) + \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \dot{\eta}(t) \right) dt.$$

Розглянемо другий доданок $\int_{t_0}^T \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \dot{\eta}(t) dt$.

Використаємо властивість інтегралів

$$\int_{t_0}^T adb = ab \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T bda. \quad (4.4)$$

Позначимо $\frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = a$. Тоді $\frac{d\eta}{dt} dt = db$. Знайдемо da та b у

(4.4). Для цього продиференціюємо a за часом t : $\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = \frac{da}{dt}$.

Звідси випливає, що $da = \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} dt$. Оскільки $\dot{\eta}(t) dt = db$, то $\eta = b$.

Тоді другий доданок можна записати так:

$$\int_{t_0}^T \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \dot{\eta}(t) dt = \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \eta(t) \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \eta(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} dt.$$

Оскільки множник $\eta(t) \Big|_{t_0}^T = \eta(T) - \eta(t_0) = 0 - 0 = 0$

за умовою, то одержимо

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial G}{\partial u} \eta(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \eta(t) \right) dt = \int_{t_0}^T \eta(t) \left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right) dt = 0. \quad (4.5)$$

Скористаємося лемою Лагранжа: якщо для кожної безперервної функції $\eta(t)$ та $f(t)$ інтеграл $\int_{t_0}^T f(t)\eta(t)dt$ тотожно дорівнює нулю за всіх $t \in [t_0, T]$, то $\eta(t) = 0$ або $f(t) = 0$. За умовою $\eta(t) \neq 0$, тоді $f(t) = 0$.

З урахуванням цього можна записати, що

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = 0. \quad (4.6)$$

Одержане рівняння (4.6) називають *рівнянням Ейлера*.

Оскільки $G[u(t), \dot{u}(t), t]$, то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \frac{du}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \frac{d\dot{u}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}}.$$

Тоді рівняння Ейлера в розгорнутій формі набере вигляду

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u} \partial u} \dot{u} - \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \ddot{u} = 0. \quad (4.7)$$

Таким чином, розв'язавши рівняння Ейлера (диференціальне рівняння другого порядку) із використанням двох граничних умов, можна знайти оптимальне керування $\bar{u}(t)$, за якого $J = \min$. Таку функцію $\bar{u}(t)$ називають *екстремаллю*.

4.3. Умови Лежандра

Умова екстремальності (4.6) є необхідною, але недостатньою умовою для знаходження оптимального керування, оскільки $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ не лише для екстремальних значень функціонала $J = \min$ або $J = \max$, а й для точок перегину (рис. 4.3).

Для того щоб функціонал набував мінімального значення, необхідно, щоб виконувалася умова $\frac{d^2 J}{d\alpha^2} \geq 0$, для максимального значення J – умова $\frac{d^2 J}{d\alpha^2} \leq 0$.

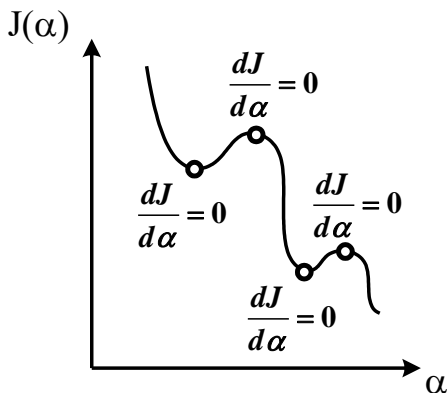


Рисунок 4.3 – Точки перегину

Знайдемо $\frac{d^2 J}{d\alpha^2}$.

Ураховуючи, що функціонал J задають виразом (4.3), можна записати

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = \int_{t_0}^T \frac{d^2}{d\alpha^2} G(t, \bar{u}(t) + \alpha\eta, \dot{u}(t) + \alpha\dot{\eta}(t)) dt = \int_{t_0}^T \frac{d^2 G}{d\alpha^2} dt.$$

$$\text{Оскільки } \frac{d^2 G}{d\alpha^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \eta \dot{\eta} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \dot{\eta}^2,$$

$$\text{то } \frac{d^2 J}{d\alpha^2} = \int_{t_0}^T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \eta \dot{\eta} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \dot{\eta}^2 \right) dt.$$

$$\text{Знайдемо середній доданок } \int_{t_0}^T 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \eta \dot{\eta} dt.$$

Скористаємося властивостями інтегралів (4.4):

$$\int_{t_0}^T adb = ab \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T bda .$$

Позначимо $\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} = a$, $2\eta \dot{\eta} dt = db$.

Тоді $\frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}}$, $da = \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} dt$, $b = \eta^2$.

У результаті одержимо, що

$$\int_{t_0}^T 2 \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \eta \dot{\eta} dt = \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \eta^2(t) \Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T \eta^2 \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} dt .$$

З урахуванням того, що $\eta(t_0) = \eta(T) = 0$, одержимо

$$\frac{d^2 J}{d\alpha^2} = \int_{t_0}^T \left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \right) \eta^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \dot{\eta}^2 \right] dt . \quad (4.8)$$

Проаналізуємо одержаний вираз (4.8) для мінімального значення функціонала (тобто при $\frac{d^2 J}{d\alpha^2} \geq 0$).

Оскільки перший доданок у виразі (4.8) $\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \right) \eta^2 = \eta^2 \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right) = 0$, згідно з рівнянням

Ейлера (4.6), то $\frac{d^2 J}{d\alpha^2} \geq 0$ при

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \geq 0 . \quad (4.9)$$

Одержану умову мінімальності функціонала J (4.9) називають *необхідною умовою Лежандра*, яка формулюється так: для досягнення на деякій екстремалі мінімуму функціонала J необхідно, щоб у всіх точках цієї екстремалі виконувалася умова (4.9); для досягнення максимуму – умова

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \leq 0 . \quad (4.10)$$

За умови $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = 0$ екстремаль має злами.

Таким чином, рівняння Ейлера (4.6) та умови Лежандра (4.9), (4.10) є необхідними умовами для екстремуму функціонала.

Крім необхідних умов, існують і *достатні умови екстремальності* функції:

1) функція $u(t)$ повинна задовольняти рівняння Ейлера (4.6), тобто повинна бути екстремаллю;

2) на екстремалі $u(t)$ повинні виконуватися умови Лежандра (4.9), (4.10);

3) рівняння Якобі

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial \dot{u}} \right) y - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \dot{y} \right) = 0$$

повинне мати розв'язок $y(t)$, що задовольняє умову $y(t_0) = 0$ і не перетворюється на нуль у жодній точці при $t_0 < t \leq T$.

4.4. Рівняння Ейлера – Пуассона

Раніше розглянуту методику розв'язування задач варіаційного числення використовували, якщо підінтегральна функція $u(t)$ містила похідні лише першого порядку, тобто $G(t, u(t), \dot{u}(t))$. Аналогічну методику розв'язування задач можна застосовувати й для узагальненого випадку, коли підінтегральна функція $u(t)$ містить похідні вищих порядків.

У цьому випадку функціонал (4.1) можна переписати у вигляді

$$J = \int_{t_0}^T G \left[t, u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), \dots, u^{(n)}(t) \right] dt. \quad (4.11)$$

Для однозначності розв'язання скористаємося граничними умовами:

$$u(t_0) = u_0, \dot{u}(t_0) = \dot{u}_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = u_0^{(n-1)}, \quad (4.12)$$

$$u(T) = u_1, \dot{u}(T) = \dot{u}_1, \dots, u^{(n-1)}(T) = u_1^{(n-1)}.$$

За вище наведеною методикою (4.3)–(4.6) можна одержати рівняння Ейлера для функціонала з похідними вищих порядків:

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial G}{\partial \ddot{u}} - \frac{d^3}{dt^3} \frac{\partial G}{\partial \overset{\cdot\cdot\cdot}{u}} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial G}{\partial u^{(n)}} = 0. \quad (4.13)$$

Рівняння (4.13) називають *рівнянням Ейлера – Пуассона*.

При розв’язуванні рівняння Ейлера – Пуассона (4.13) одержимо $2n$ (для t_0 та T) сталих інтегрування, які знаходять з граничних умов (4.12).

Аналогічно, умови Лежандра (4.9) та (4.10) у цьому випадку наберуть вигляду:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial u^{(n)}} \geq 0 \text{ – для досягнення функціоналом } J \text{ мінімуму,}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial u^{(n)}} \leq 0 \text{ – для досягнення функціоналом } J \text{ максимуму.}$$

4.5. Задачі з рухомими кінцями

Раніше ми вважали, що точки t_0 , T , $u(t_0)$ та $u(T)$ задані (див. визначення допустимої функції). Але у ряді випадків вони можуть бути невідомими. Тоді розглянемо методику розв’язування задач, до яких необхідно підібрати таку функцію

$\bar{u}(t)$, щоб функціонал $J = \int_{t_0}^T G[t, u(t), \dot{u}(t)] dt$ набував

найменшого значення.

Для знаходження п’яти невідомих величин t_0 , T , $u(t_0)$, $u(T)$ та $u(t)$ необхідні п’ять рівнянь.

Функцію $\bar{u}(t)$ можна знайти з рівняння Ейлера (4.6):

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = 0. \quad (4.14)$$

Чотири інші невідомі можна знайти з рівності нулю перших похідних:

– для знаходження $u(t_0)$ використовують умову

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t_0} = 0; \quad (4.15)$$

– для знаходження $u(T)$ – умову

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=T} = 0; \quad (4.16)$$

– для знаходження t_0 – умову

$$\left[G - \dot{u} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t_0} = 0; \quad (4.17)$$

– для знаходження T – умову

$$\left[G - \dot{u} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=T} = 0. \quad (4.18)$$

Умови (4.15)–(4.18) називають умовами *трансверсальності*.

Методика знаходження $\bar{u}(t)$, t_0 , T , $u(t_0)$ та $u(T)$ така: розв'язавши рівняння (4.14), одержуємо функцію $\bar{u}(t)$ із сталими інтегрування c_1 та c_2 . Підставляючи одержану функцію $\bar{u}(t)$ в умови трансверсальності (4.15)–(4.18), знаходимо сталі інтегрування c_1 , c_2 та t_0 , T .

У низці задач потрібно знайти оптимальне керування $\bar{u}(t)$, припускаючи, що початок і кінець розв'язку лежать на деяких заданих кривих, тобто

$$\bar{u}(t_0) = \varphi_1(t_0), \quad \bar{u}(T) = \varphi_2(T), \quad (4.19)$$

де $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ – відомі функції, а t_0 , T – невідомі величини.

Тоді для мінімізації функціонала J необхідно знайти лише $\bar{u}(t)$, t_0 та T , оскільки сталі інтегрування c_1 та c_2 задані умовою (4.19). Таким чином, для знаходження трьох невідомих $\bar{u}(t)$, t_0 та T необхідно розв'язати систему з трьох рівнянь. Запишемо їх.

Оптимальне керування $\bar{u}(t)$ можна визначити з рівняння Ейлера (4.14):

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Для знаходження t_0 та T скористаємося умовами трансверсальності (4.17) та (4.18), записаними з урахуванням (4.19) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \left[G - \left(\dot{u} - \frac{d\varphi_1}{dt} \right) \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t_0} &= 0, \\ \left[G - \left(\dot{u} - \frac{d\varphi_2}{dt} \right) \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=T} &= 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.6. Екстремалі зі зламами

Як зазначалося раніше (див. п. 4.3), якщо $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \geq 0$, то функціонал J набуває мінімального значення; якщо $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} \leq 0$ – функціонал J набуває максимального значення; якщо $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = 0$, то екстремаль має злам, тобто є кусково-гладкою функцією.

Знайти екстремаль кусково-гладкої функції, розв'язуючи рівняння Ейлера, не можна, оскільки рівняння Ейлера виводилося у припущенні гладкості екстремалей. Тому роблять так. Нехай функціонал (4.1) $J = \int_{t_0}^T G[t, u(t), \dot{u}(t)] dt$ і граничні

точки t_0 , T , $u(t_0)$, $u(T)$ задані. Припустимо, що на відрізку $[t_0, T]$ у невідомій точці t^* спостерігається єдиний злам функції $u(t)$ (рис. 4.4).

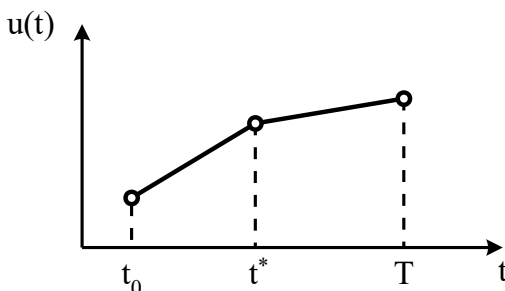


Рисунок 4.4 – Екстремаль зі зломом

Розіб'ємо відрізок $[t_0, T]$ на два відрізки: $[t_0, t^*]$ та $[t^*, T]$.

Тоді функціонал J можна подати у вигляді суми

$$J = \int_{t_0}^{t^*} G dt + \int_{t^*}^T G dt .$$

Подальше розв'язування задачі аналогічне розв'язуванню задач із рухомими кінцями (див. (4.14)–(4.18)), але за умови, що ці вирази однакові для точок як ліворуч, так і праворуч від зламу t^* . Запишемо рівняння Ейлера та умови трансверсальності для задачі зі зламами екстремалі:

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = 0 ,$$

$$\left[\frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t^*-0} = \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t^*+0} , \quad (4.21)$$

$$\left[G - \dot{u} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t^*-0} = \left[G - \dot{u} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} \right]_{t=t^*+0} . \quad (4.22)$$

Співвідношення (4.21) і (4.22) називають умовами Вейерштраса – Ерדмана. Їх використовують для визначення

сталих інтегрування при розв'язуванні рівняння Ейлера. Для знаходження точки зламу використовують умову безперервності екстремалі в цій точці: $\bar{u}(t^* - 0) = \bar{u}(t^* + 0)$.

4.7. Задачі на умовний екстремум

Якщо у варіаційних задачах функціонал J залежить від декількох невідомих функцій $u_1(t)$ та $u_2(t)$, пов'язаних між собою деякими співвідношеннями (рівняннями зв'язку), то такі задачі називають задачами на *умовний екстремум*.

Розглянемо функціонал J (4.1), залежний від m гладких функцій $u_i(t) \in \Omega_1(u)$:

$$J = \int_{t_0}^T G[t; u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_m(t)] dt. \quad (4.23)$$

Нехай задані граничні умови $u_i(t_0)$, $u_i(T)$ та рівняння зв'язків між змінними.

Рівняння зв'язків між змінними $u_i(t)$ можуть бути задані в одній із трьох форм:

1) алгебраїчній

$$\varphi_j(t, u_1, u_2, \dots, u_m) = 0; \quad (4.24)$$

2) диференціальній

$$\varphi_j(t, u_1, u_2, \dots, u_m; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_m) = 0; \quad (4.25)$$

3) інтегральній

$$\int_{t_0}^T \varphi_j(t, u_1, u_2, \dots, u_m; \dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_m) dt = const, \quad (4.26)$$

де $j = \overline{1, s}$, $s < m$;

s – кількість обмежень.

Тоді *варіаційну задачу* формулюємо так: у класі гладких функцій $\Omega_1(u)$, які проходять через задані граничні точки функцій $u_i(t_0)$ та $u_i(T)$, $i = \overline{1, m}$, знайти такі функції $u_i(t)$, за

яких функціонал J (4.23) досягає мінімуму при задоволенні рівнянь зв'язків. Якщо обмеження (рівняння зв'язку) задані в алгебраїчній формі (4.24), то задачу називають *геодезичною*, у диференціальній формі (4.25) – *загальною задачею Лагранжа*, в інтегральній формі (4.26) – *ізопериметричною*. Найбільш загальною є загальна задача Лагранжа, а решта може бути одержана як окремий випадок задачі Лагранжа.

4.8. Метод невизначених множників Лагранжа

При розв'язанні задач на умовний екстремум зазвичай використовують метод невизначених множників Лагранжа. У цьому разі замість функціонала J (4.23), у якому немає явних зв'язків між змінними, вводять допоміжний функціонал J^* :

$$J^* = \int_{t_0}^T \left[G + \sum_{j=1}^s \lambda_j(t) \varphi_j \right] dt = \int_{t_0}^T G^* dt, \quad (4.27)$$

$$\text{де } G^* = G + \sum_{j=1}^s \lambda_j(t) \varphi_j ;$$

$\lambda_j(t)$ – невизначені множники Лагранжа;

s – кількість рівнянь зв'язку;

φ_j – визначається рівняннями (4.24)–(4.26).

Далі за методикою, викладеною у попередніх пунктах (див. пп. 4.2, 4.5), знаходимо функції $\bar{u}_i(t)$, за яких функціонал J^* набуває екстремального значення. При цьому функціонал J^* досліджуємо на безумовний екстремум.

Аналогічно (4.6) рівняння Ейлера записують у вигляді

$$\frac{\partial G^*}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{u}_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.28)$$

З урахуванням того, що $G(u_i, \dot{u}_i)$, $i = \overline{1, m}$ та $G(\lambda_j(t))$, $j = \overline{1, s}$, маємо замкнену систему з $m + s$ рівнянь для

знаходження m невідомих функцій $u_i(t)$ та s невідомих множників Лагранжа $\lambda_j(t)$.

4.9. Розв'язування задач оптимального керування варіаційними методами

Як зазначалося раніше (див. п. 2.2), для опису об'єкта керування використовують рівняння стану (2.2).

Перепишемо рівняння (2.2) у такій формі:

$$\dot{y}_i(t) - \varphi_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u(t)) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.29)$$

Нехай задані початковий і кінцевий стани об'єкта $y_i(t_0)$ та $y_i(T)$. Тоді критерій оптимальності можна записати у такому вигляді:

$$J = \int_{t_0}^T G(y_1, y_2, \dots, y_n, u) dt. \quad (4.30)$$

Необхідно в області допустимих керувань $u(t) \in \Omega(u)$ знайти таке керування $\bar{u}(t)$, за якого критерій оптимальності J досягає найменшого значення при переході об'єкта із заданого початкового стану $y_i(t_0)$ у заданий кінцевий стан $y_i(T)$ по траєкторії, що знаходиться в області допустимих станів ($y_i(t) \in Q$).

У цьому випадку рівняння об'єкта (2.2) можна розглядати як рівняння зв'язків. Із рівнянь (2.2) бачимо, що вони задані у диференціальній формі, що відповідає (4.25).

Таким чином, для мінімізації функціонала J (4.30) необхідно спочатку знайти змінні $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_n(t)$, $u(t)$.

Використовуючи метод невизначених множників Лагранжа, складемо допоміжний функціонал

$$J^* = \int_{t_0}^T \left[G + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \left(\frac{dy_j}{dt} - \varphi_j \right) \right] dt = \int_{t_0}^T G^* dt. \quad (4.31)$$

Тут невідомими є змінні $u(t)$, $y_j(t)$, $\lambda_j(t)$ при $j = \overline{1, n}$. Для їх знаходження необхідна система $2n + 1$ рівнянь. За таку систему можна використовувати n рівнянь стану (4.29), n рівнянь Ейлера для станів $y_j(t)$ (4.28) і рівність нулю першої

часткової похідної $\frac{\partial G^*}{\partial u} = 0$, тобто

$$\begin{cases} \frac{\partial G^*}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial G^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{y}_j} = 0, \\ \dot{y}_j - \varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = 0. \end{cases} \quad j = \overline{1, n} \quad (4.32)$$

Із урахуванням того що

$$G^* = G + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \left(\frac{dy_j}{dt} - \varphi_j \right), \quad (4.33)$$

систему (4.32) можна записати так:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial u} - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial y_j}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial y_j} - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial y_j}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{y}_j} - \\ - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \left(\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \dot{y}_j} \right) + \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial \dot{y}_j} = 0, \\ \dot{y}_j - \varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

У першому рівнянні (4.34) третій доданок дорівнює нулю, оскільки y_j не залежить від u .

Проаналізуємо складові у другому рівнянні (4.34).

Третій доданок дорівнює нулю, оскільки

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y_j}{\partial y_j} \right) = \frac{d}{dt} (1) = 0.$$

Четвертий доданок дорівнює нулю, оскільки згідно з (4.30), $G(y_j, u)$ і не залежить від \dot{y}_j .

Шостий доданок дорівнює нулю, оскільки згідно з (4.29) $\varphi(y_j, u)$ і не залежить від \dot{y}_j .

З урахуванням цього система (4.34) набере вигляду

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial u} - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial y_j} - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_j} - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) = 0, \\ \dot{y}_j - \varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = 0. \end{cases}$$

Для встановлення зв'язку третього рівняння з невизначеними множниками Лагранжа знайдемо часткову похідну від G^* (4.33) за $\lambda(t)$:

$$\frac{\partial G^*}{\partial \lambda_j} = \frac{\partial G}{\partial \lambda_j} + \sum_{j=1}^s \frac{\partial \lambda_j}{\partial \lambda_j} \left(\frac{dy_j}{dt} - \varphi_j \right) = \dot{y}_j - \varphi_j.$$

Унаслідок цього одержимо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial u} - \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial y_j} - \sum_{j=1}^n \left[\lambda_j(t) \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_j} - \dot{\lambda}_j(t) \right] = 0, \\ \frac{\partial G^*}{\partial \lambda_j} = \dot{y}_j - \varphi_j(y_1, y_2, \dots, y_n, u) = 0. \end{cases} \quad (4.35)$$

Однак не всі задачі можна розв'язати за допомогою варіаційного числення. Наприклад, якщо накладаються

обмеження на область допустимих керувань, тобто $u(t) \in \Omega(u)$ (див. (3.1)), то навіть якщо оптимальне керування і не виходить за цю область, а знаходиться на її межі, то це керування $\bar{u}(t)$ не можна знайти, розв'язуючи рівняння Ейлера, тому що ми припускали, що $u(t) = \bar{u}(t) + \alpha\eta(t)$.

Таким чином, методи варіаційного числення для розв'язання задач оптимального керування можна застосовувати, якщо функція G у складі функціонала J є двічі диференційованою, а керування $\bar{u}(t)$ та змінні стану $y(t)$ не досягають обмежень.

Якщо ці умови не виконуються, то для розв'язування задач оптимального керування використовують інші спеціальні методи.

Приклади розв'язування задач до теми 4

Приклад 4.1. Методом варіаційного числення дослідити на екстремум функціонал $J = \int_1^2 (\dot{u}^2 - 2ut) dt$ за граничних умов $u(1) = 0$, $u(2) = -1$. Перевірити за допомогою умови Лежандра, максимуму чи мінімуму набирає функціонал за одержаної екстремалі.

Розв'язання. Запишемо рівняння Ейлера (4.6) та підставимо в нього підінтегральну функцію $G[u(t), \dot{u}(t), t] = \dot{u}^2 - 2ut$.

$$\text{Одержимо } -2t - \frac{d}{dt} 2\dot{u} = 0, \text{ або } \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = -t.$$

Для визначення екстремалі з рівняння Ейлера проінтегруємо двічі за часом обидві частини:

$$d^2u = -tdt^2, \quad du = -\frac{t^2}{2} dt + C_1 dt, \quad \bar{u}(t) = -\frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 знайдемо з граничних умов:

$$\begin{cases} -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \\ -\frac{2^3}{6} + 2C_1 + C_2 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \\ \frac{7}{6} - C_1 = 1. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$.

Таким чином, одержуємо вираз для екстремалі:

$$\bar{u}(t) = -\frac{t^3}{6} + \frac{1}{6}t = \frac{t}{6}(1 - t^2).$$

Перевіримо на умову Лежандра: $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = 2 > 0$.

Отже, функціонал J на екстремалі $\bar{u}(t)$ досягає мінімального значення.

Приклад 4.2. Методом варіаційного числення дослідити на екстремум функціонал $J = \int_1^3 (3t - u)udt$ за граничних умов $u(1) = 1$, $u(3) = 4$.

Розв'язання. Запишемо рівняння Ейлера (4.6) та підставимо в нього підінтегральну функцію $G[u(t), \dot{u}(t), t] = 3ut - u^2$.

Одержимо $3t - 2u = 0$.

Звідси випливає, що $\bar{u} = \frac{3}{2}t$.

Перевіряємо одержану екстремаль $\bar{u}(t)$ на граничні умови.

$1 \neq \frac{3}{2}$ та $3 \neq 6$.

Ця екстремаль $\bar{u}(t)$ не проходить через задані граничні точки, і варіаційна задача розв'язку не має. Якщо б граничні умови були задані у формі $u(1) = \frac{3}{2}$, $u(3) = \frac{9}{2}$, то екстремаль

$\bar{u}(t)$ проходила б через ці точки і пряма $\bar{u} = \frac{3}{2}t$ була б розв'язком задачі.

Приклад 4.3. Методом варіаційного числення дослідити на екстремум функціонал $J = \int_1^2 (\dot{u} + t^2 \dot{u}^2) dt$ за граничних умов $u(1) = 1, u(2) = 2$. Перевірити за допомогою умови Лежандра, максимуму чи мінімуму набирає функціонал за одержаної екстремалі.

Розв'язання. Запишемо рівняння Ейлера (4.6) та підставимо в нього підінтегральну функцію $G[u(t), \dot{u}(t), t] = \dot{u} + t^2 \dot{u}^2$.

$$\text{Одержимо } -\frac{d}{dt}(1 + 2t^2 \dot{u}) = 0.$$

Проінтегруємо за часом t : $1 + 2t^2 \dot{u} = C$.

Звідси випливає, що

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{C-1}{2t^2} = \frac{C_1}{t^2},$$

$$\text{де } C_1 = \frac{C-1}{2}.$$

Проінтегрувавши за часом, одержимо вираз для екстремалі

$$\bar{u} = -\frac{C_1}{t} + C_2.$$

Сталі інтегрування C_1 та C_2 знайдемо з граничних умов:

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = 1, \\ -\frac{C_1}{2} + C_2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -C_1 + C_2 = 1, \\ \frac{C_1}{2} = 1. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $C_1 = 2, C_2 = 3$.

Таким чином, одержуємо вираз для екстремалі:

$$\bar{u}(t) = -\frac{2}{t} + 3.$$

Перевіримо на умову Лежандра: $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = 2t^2 > 0$, оскільки час керування $t = [1, 2]$ є додатним.

Отже, функціонал J на екстремалі $\bar{u}(t)$ досягає мінімального значення.

Приклад 4.4. Методом варіаційного числення дослідити на екстремум функціонал $J = \int_0^1 (2t^2 u - \dot{u}^2) dt$ за граничних умов $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 1$, $u(1) = 0$, $\dot{u}(1) = 0$. Перевірити за допомогою умови Лежандра, максимуму чи мінімуму набирає функціонал за одержаної екстремалі.

Розв'язання. У випадку, що розглядається, $n = 2$ і рівняння Ейлера – Пуассона (4.13) має вигляд

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial G}{\partial \ddot{u}} = 0.$$

Підставимо в нього підінтегральну функцію $G[u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), t] = 2t^2 u - \dot{u}^2$.

$$\text{Одержимо } 2t^2 - 2 \frac{d^2 \ddot{u}}{dt^2} = 0, \text{ або } \frac{d^2 \ddot{u}}{dt^2} = \frac{d^4 u}{dt^4} = t^2.$$

Для визначення екстремалі з цього рівняння проінтегруємо чотири рази за часом обидві частини:

$$\frac{d^3 u}{dt^3} = \frac{t^3}{3} + C_1, \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{t^4}{12} + C_1 t + C_2,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{t^5}{60} + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3,$$

$$\bar{u} = \frac{t^6}{360} + \frac{C_1}{6} t^3 + \frac{C_2}{2} t^2 + C_3 t + C_4.$$

$$\dot{\bar{u}} = \frac{t^5}{60} + C_1 \frac{t^2}{2} + C_2 t + C_3.$$

Сталі інтегрування C_1, C_2, C_3 та C_4 знайдемо з граничних умов.

$$\begin{cases} C_4 = 0, \\ C_3 = 1, \\ \frac{1}{360} + \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} + 1 = 0, \\ \frac{1}{60} + \frac{C_1}{2} + C_2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Із системи двох останніх рівнянь визначимо C_1 та C_2 .

$$\begin{cases} 1 + 60C_1 + 180C_2 + 360 = 0, \\ 1 + 30C_1 + 60C_2 + 60 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 60C_1 + 180C_2 + 361 = 0, \\ 90C_1 + 180C_2 + 183 = 0; \end{cases} \quad | \times 3$$

$$\begin{cases} 60C_1 + 180C_2 + 361 = 0, \\ 30C_1 = 178; \end{cases} \quad \begin{cases} 356 + 180C_2 + 361 = 0, \\ C_1 = \frac{89}{15}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2 = -\frac{717}{180}, \\ C_1 = \frac{89}{15}. \end{cases}$$

Таким чином, одержимо вираз для екстремалі:

$$\bar{u}(t) = \frac{t^6}{360} + \frac{89}{90}t^3 - \frac{717}{360}t^2 + t = \frac{t}{360}(t^5 + 356t^2 - 717t + 360).$$

Перевіримо на умову Лежандра: $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = -2 < 0$.

Отже, функціонал J на екстремалі $\bar{u}(t)$ досягає максимального значення.

Приклад 4.5. Знайти найменшу відстань між параболою $u = t^2$ та прямою $u = t - 5$. Довжина кривої, що з'єднує точки

$(t_0, u(t_0))$ та $(T, u(T))$ у площині t, u , визначається виразом

$$J = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + \dot{u}^2} dt.$$

Розв'язання. Це задача з рухомими кінцями, якщо початок та кінець розв'язку лежать на заданих кривих. Один кінець екстремалі пересувається по кривій $u = t^2$, другий – по прямій $u = t - 5$. Отже, $\varphi_1(t) = t^2$, $\varphi_2(t) = t - 5$ (див. (4.19)).

Для визначення екстремалі $\bar{u}(t)$ запишемо і розв'яжемо рівняння Ейлера (4.6):

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = 0,$$

де $G = \sqrt{1 + \dot{u}^2}$.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \sqrt{1 + \dot{u}^2}}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Проінтегруємо обидві частини за часом t : $\frac{\partial \sqrt{1 + \dot{u}^2}}{\partial \dot{u}} = C$.

Частинна похідна

$$\frac{\partial \sqrt{1 + \dot{u}^2}}{\partial \dot{u}} = \left((1 + \dot{u}^2)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{2\dot{u}}{2} (1 + \dot{u}^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{1 + \dot{u}^2}} = C.$$

Звідси знаходимо вираз для екстремалі $\bar{u}(t)$.

$$\dot{u}^2 = C^2 \dot{u}^2 + C^2 \text{ або } \dot{u}^2 (1 - C^2) = C^2.$$

$$\dot{u} = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} = C_1 = \frac{d\bar{u}}{dt}.$$

Тоді екстремаль $\bar{u} = C_1 t + C_2$.

Для визначення C_1 та C_2 скористаємося граничними умовами $\bar{u}(t_0) = t_0^2$ та $\bar{u}(T) = T - 5$. У наслідок цього запишемо два рівняння: $C_1 t_0 + C_2 = t_0^2$, $C_1 T + C_2 = T - 5$.

Для знаходження t_0 та T скористаємося умовами трансверсальності (2.10) та (2.11).

$$\sqrt{1+C_1^2} - (C_1 - 2t_0) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0, \quad \sqrt{1+C_1^2} - (C_1 - 1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0.$$

Унаслідок цього для знаходження чотирьох невідомих C_1 , C_2 , t_0 і T запишемо систему з чотирьох рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 t_0 + C_2 = t_0^2, \\ C_1 T + C_2 = T - 5, \\ \sqrt{1+C_1^2} - \frac{(C_1 - 2t_0)C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0, \\ \sqrt{1+C_1^2} - \frac{(C_1 - 1)C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0. \end{cases}$$

Із четвертого рівняння не складно знайти C_1 :

$$1 + C_1^2 - (C_1 - 1)C_1 = 0, \quad 1 + C_1^2 - C_1^2 + C_1 = 0, \quad C_1 = -1.$$

Із третього рівняння визначимо t_0 :

$$\sqrt{1+1} - \frac{(-1 - 2t_0) \cdot (-1)}{\sqrt{1+1}} = 0, \quad 2 - 1 - 2t_0 = 0, \quad t_0 = 0,5.$$

Із першого рівняння знайдемо C_2 :

$$(-1) \cdot 0,5 + C_2 = 0,25, \quad C_2 = 0,75.$$

Із другого рівняння вирахуємо T :

$$(-1) \cdot T + 0,75 = T - 5, \quad T = 2,875.$$

Тоді екстремаль описуємо рівнянням $\bar{u}(t) = -t + 0,75$, а найменша відстань між параболою $u = t^2$ і прямою $u = t - 5$

$$\begin{aligned} \text{буде такою: } J &= \int_{0,5}^{2,875} \sqrt{1+C_1^2} dt = \sqrt{1+1} \int_{0,5}^{2,875} dt = \\ &= \sqrt{2} \cdot (2,875 - 0,5) = \sqrt{2} \cdot 2,375 \approx 3,36. \end{aligned}$$

Приклад 4.6. Нехай екстремаль функціонала $J = \int_{-1}^{+1} \dot{u}^2 (1-u)^2 dt$ з граничними умовами $u(-1)=0$ та $u(1)=1$ має один злам. Знайти цю екстремаль $\bar{u}(t)$.

Розв'язання. Перевіримо екстремаль на наявність зламу за формулою $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = 0$. З умови задачі випливає, що $G = \dot{u}^2 (1-u)^2$.

Продиференціюємо G двічі за змінною \dot{u} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} &= \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(2\dot{u} \cdot (1-u)^2 - \dot{u}^2 \cdot 2(1-u) \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(2\dot{u}^3 - 4\dot{u}^2 + 2\dot{u} + 2\dot{u}^3 - 2\dot{u}^2 \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(4\dot{u}^3 - 6\dot{u}^2 + 2\dot{u} \right) = 2(6\dot{u}^2 - 6\dot{u} + 1) = 0. \end{aligned}$$

Визначимо, чи існує \dot{u} , за якої $\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{u}^2} = 0$. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$6\dot{u}^2 - 6\dot{u} + 1 = 0.$$

$$D = 36 - 24 = 12.$$

$$\dot{u}_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6} \approx 0,79; 0,21.$$

Отже, екстремаль $\bar{u}(t)$ може мати злам.

Позначимо точку зламу через t^* ($-1 < t^* < 1$). Розіб'ємо відрізок $[-1, 1]$ на два відрізки: $[-1, t^*]$ та $[t^*, 1]$.

Із рівняння Ейлера (4.6) визначимо вираз для екстремалі кожної з областей: $-1 \leq t \leq t^*$ та $t^* \leq t \leq 1$.

Розглянемо область $-1 \leq t \leq t^*$.

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(\dot{u}^2 (1-u)^2 \right) = 0.$$

Проінтегруємо обидві частини за часом t :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(\dot{u}^2 (1 - \dot{u})^2 \right) = C.$$

$$\begin{aligned} \text{Частинна похідна } \frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(\dot{u}^2 (1 - \dot{u})^2 \right) &= 2\dot{u}(1 - \dot{u})^2 - 2\dot{u}^2(1 - \dot{u}) = \\ &= 2\dot{u}^3 - 4\dot{u}^2 + 2\dot{u} - 2\dot{u}^2 + 2\dot{u}^3 = 4\dot{u}^3 - 6\dot{u}^2 + 2\dot{u} = C. \end{aligned}$$

Оскільки за будь-яких значень \dot{u} рівняння дорівнює константі, отже, $\dot{u} = C_1$.

Звідси вираз для екстремалі $\bar{u}(t)$ набирає вигляду

$$\bar{u}(t) = C_1 t + C_2.$$

Аналогічний вираз для екстремалі можна одержати і для області $t^* \leq t \leq 1$.

$$\bar{u} = C_3 t + C_4; \dot{u} = C_3.$$

Сталі інтегрування C_1 , C_2 , C_3 та C_4 можна знайти з граничних умов та умов Вейерштрасса – Ердмана (4.21) і (4.22). Запишемо їх.

$$-C_1 + C_2 = 0, C_3 + C_4 = 1.$$

$$\text{Оскільки } \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} = 2\dot{u} - 6\dot{u}^2 + 4\dot{u}^3 = 2\dot{u}(1 - 3\dot{u} + 2\dot{u}^2),$$

$$\begin{aligned} \text{а } G - \dot{u} \frac{\partial G}{\partial \dot{u}} &= \dot{u}^2 (1 - \dot{u})^2 - 2\dot{u}^2 (1 - 3\dot{u} + 2\dot{u}^2) = \\ &= \dot{u}^2 \cdot (1 - 2\dot{u} + \dot{u}^2 - 2 + 6\dot{u} - 4\dot{u}^2) = \dot{u}^2 \cdot (-1 + 4\dot{u} - 3\dot{u}^2), \end{aligned}$$

то умови Вейерштрасса – Ердмана запишемо у вигляді

$$\begin{cases} \left[2\dot{u} \cdot (1 - 3\dot{u} + 2\dot{u}^2) \right]_{t=t^*-0} = \left[2\dot{u} \cdot (1 - 3\dot{u} + 2\dot{u}^2) \right]_{t=t^*+0}, \\ \left[\dot{u}^2 \cdot (-1 + 4\dot{u} - 3\dot{u}^2) \right]_{t=t^*-0} = \left[\dot{u}^2 \cdot (-1 + 4\dot{u} - 3\dot{u}^2) \right]_{t=t^*+0}. \end{cases}$$

Ураховуючи, що $\dot{u} = C_1$ для області $-1 \leq t \leq t^*$ та $\dot{u} = C_3$ для області $t^* \leq t \leq 1$, умови Вейерштрасса – Ердмана можна переписати так:

$$\begin{cases} 2C_1 \cdot (1 - 3C_1 + 2C_1^2) = 2C_3 \cdot (1 - 3C_3 + 2C_3^2), \\ C_1^2 \cdot (-1 + 4C_1 - 3C_1^2) = C_3^2 \cdot (-1 + 4C_3 - 3C_3^2). \end{cases}$$

Ці умови зручно виразити через корені многочлена. Для цього знайдемо корені рівнянь у круглих дужках:

$$\begin{aligned} 2C_1^2 - 3C_1 + 1 &= 0, & 3C_1^2 - 4C_1 + 1 &= 0, \\ D &= 9 - 8 = 1, & D &= 16 - 12 = 4, \\ C_1 &= \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} = 1; \frac{1}{2}. & C_1 &= \frac{4}{6} \pm \frac{2}{6} = 1; \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Отже, умови Вейерштрасса – Ердмана запишемо у вигляді

$$\begin{cases} C_1 \cdot (C_1 - 1) \cdot \left(C_1 - \frac{1}{2}\right) = C_3 \cdot (C_3 - 1) \cdot \left(C_3 - \frac{1}{2}\right), \\ C_1^2 \cdot (C_1 - 1) \cdot \left(C_1 - \frac{1}{3}\right) = C_3^2 \cdot (C_3 - 1) \cdot \left(C_3 - \frac{1}{3}\right). \end{cases}$$

Одночасно ці умови виконуються в таких випадках:

- 1) за будь-яких $C_1 = C_3$;
- 2) при $C_1 = 1, C_3 = 0$;
- 3) при $C_1 = 0, C_3 = 1$.

У першому випадку екстремалі на ділянках $-1 \leq t \leq t^*$ та $t^* \leq t \leq 1$ є паралельними лініями. Загальна екстремаль у точці t^* буде мати розрив першого роду (рис. 4.5 а), і порушується припущення про безперервність екстремалі.

Якщо $C_1 = 1, C_3 = 0$, то з граничних умов випливає, що $C_2 = 1, C_4 = 1$. Тоді екстремалі запишемо у формі $\bar{u} = t + 1$ для ділянки $-1 \leq t \leq t^*$ і $\bar{u} = 1$ – для ділянки $t^* \leq t \leq 1$. Для визначення точки зламу t^* використовується умова безперервності екстремалі в цій точці: $t^* + 1 = 1$, звідси точка зламу $t^* = 0$. Зобразимо графік такої екстремалі (рис. 4.5 б).

Якщо $C_1 = 0, C_3 = 1$, то з граничних умов випливає, що $C_2 = 0, C_4 = 0$. Тоді екстремалі запишемо у формі $\bar{u} = 0$ для ділянки $-1 \leq t \leq t^*$ і $\bar{u} = t$ – для ділянки $t^* \leq t \leq 1$. Для

знаходження точки зламу t^* використаємо умову безперервності екстремалі в цій точці: $t^* = 0$. Зобразимо графік такої екстремалі (рис. 4.5 в).

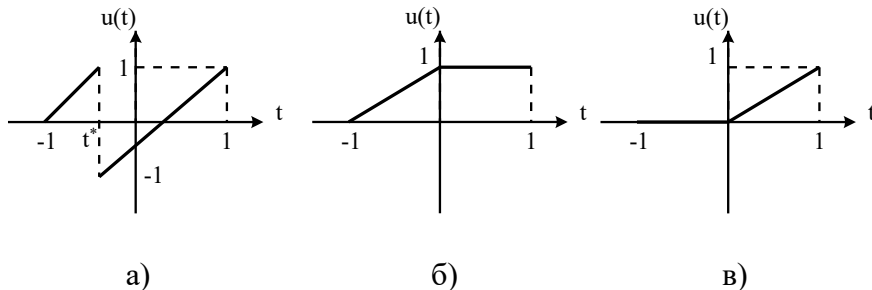


Рисунок 4.5 – Екстремалі функціонала J :

а) при $C_1 = C_3$;

б) при $C_1 = 1, C_3 = 0$;

в) при $C_1 = 0, C_3 = 1$

Таким чином, умови задачі задовольняють два випадки:

- 1) $\bar{u} = t + 1$ для ділянки $-1 \leq t \leq 0$ та $\bar{u} = 1$ для ділянки $0 \leq t \leq 1$;
- 2) $\bar{u} = 0$ для ділянки $-1 \leq t \leq 0$ та $\bar{u} = t$ для ділянки $0 \leq t \leq 1$.

Приклад 4.7. Нехай об'єкт керування описують рівнянням $p^2 y(t) = u(t)$ і задані граничні умови $y(t_0), y(T), \dot{y}(t_0), \dot{y}(T)$ ($t_0 = 0$). Якість системи описують функціоналом $J = \int_{t_0}^T u^2(t) dt$.

Необхідно знайти керування $\bar{u}(t)$, що мінімізує функціонал J і переводить об'єкт із початкового стану у кінцевий.

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язувати двома способами:

1) із переходом до рівнянь стану у формі Коші;

2) без переходу до рівнянь стану у формі Коші.

Спосіб 1. Надамо рівнянням об'єкта форми Коші. Для цього запишемо рівняння стану у формі (4.29): $\ddot{y}(t) - u(t) = 0$.

Уведемо змінні стану $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}_1$, $\dot{y}_2 = u$. Тут бачимо, що $\dot{y}_1 = \varphi_1 = y_2$, $\dot{y}_2 = \varphi_2 = u$.

Складемо допоміжний функціонал (4.31):

$$J^* = \int_{t_0}^T \left[u^2(t) + \lambda_1(t) \cdot (\dot{y}_1(t) - y_2(t)) + \lambda_2(t) \cdot (\dot{y}_2(t) - u(t)) \right] dt.$$

Звідси випливає, що підінтегральна функція $G^* = u^2(t) + \lambda_1(t) \cdot (\dot{y}_1(t) - y_2(t)) + \lambda_2(t) \cdot (\dot{y}_2(t) - u(t))$.

Для визначення оптимального керування $\bar{u}(t)$ та уведених змінних $y_1(t)$, $y_2(t)$, $\lambda_1(t)$ і $\lambda_2(t)$ розв'яжемо систему (4.32).

$$\begin{cases} 2u(t) - \lambda_2(t) = 0, \\ -\frac{d}{dt} \lambda_1(t) = 0, \\ -\lambda_1(t) - \frac{d}{dt} \lambda_2(t) = 0, \\ \dot{y}_1(t) - y_2(t) = 0, \\ \dot{y}_2(t) - u(t) = 0. \end{cases}$$

Із другого рівняння випливає, що $\lambda_1(t) = C_1 = \text{const}$.

Із третього рівняння можна знайти множник $\lambda_2(t)$.

$$\frac{d}{dt} \lambda_2(t) = -C_1, \text{ звідси } \lambda_2(t) = -C_1 t + C_2.$$

Із першого рівняння можна знайти оптимальне керування

$$u(t) = -\frac{C_1}{2} t + \frac{C_2}{2}.$$

Із п'ятого рівняння визначимо змінну стану $y_2(t)$:
 $\dot{y}_2(t) = u(t) = -\frac{C_1}{2}t + \frac{C_2}{2}$, звідси $y_2(t) = -\frac{C_1}{4}t^2 + \frac{C_2}{2}t + C_3$.

Із четвертого рівняння знайдемо $y_1(t)$:
 $y_1(t) = -\frac{C_1}{12}t^3 + \frac{C_2}{4}t^2 + C_3t + C_4$.

Сталі інтегрування C_1 , C_2 , C_3 та C_4 можна знайти з граничних умов.

При $t = t_0 = 0$ $C_4 = y(t_0)$, $C_3 = \dot{y}(t_0)$.

При $t = T$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = -C_1 \frac{T^3}{12} + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ \dot{y}(T) = -C_1 \frac{T^2}{4} + C_2 \frac{T}{2} + \dot{y}(t_0); \quad \left| \times \frac{T}{2} \right. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = -C_1 \frac{T^3}{12} + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ y(T) - \frac{T}{2} \dot{y}(T) = -C_1 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) \cdot T^3 + T \dot{y}(t_0) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) + y(t_0); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = -C_1 \frac{T^3}{12} + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ C_1 \frac{T^3}{24} = -\frac{T}{2} \cdot (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + (y(T) - y(t_0)); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = T \dot{y}(t_0) + T \dot{y}(T) + 2y(t_0) - 2y(T) + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ C_1 = -\frac{12}{T^2} \cdot (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + \frac{24}{T^3} \cdot (y(T) - y(t_0)); \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 3(y(T) - y(t_0)) - T(2\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) = C_2 \frac{T^2}{4}, \\ C_1 = -\frac{12}{T^2}(\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + \frac{24}{T^3}(y(T) - y(t_0)); \\ C_2 = \frac{12}{T^2}(y(T) - y(t_0)) - \frac{4}{T}(\dot{y}(T) + 2\dot{y}(t_0)), \\ C_1 = -\frac{12}{T^2}(\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + \frac{24}{T^3}(y(T) - y(t_0)). \end{cases}$$

Отже, оптимальне керування

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) = \frac{6}{T^2} \left[\frac{2}{T}(y(t_0) - y(T)) + (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) \right] t - \\ - \frac{2}{T} \left[\frac{3}{T}(y(t_0) - y(T)) + (2\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) \right]. \end{aligned}$$

Спосіб 2. Складемо допоміжний функціонал (4.31):

$$J^* = \int_{t_0}^T [u^2(t) + \lambda(t)(\ddot{y}(t) - u(t))] dt.$$

Тут бачимо, що підінтегральна функція $G^* = u^2(t) + \lambda(t)(\ddot{y}(t) - u(t))$.

Для визначення оптимального керування $\bar{u}(t)$ та змінних $y(t)$ і $\lambda(t)$ розв'яжемо систему (4.32). Однак, оскільки змінна стану $y(t)$ в рівнянні стану є похідною другого порядку, рівняння Ейлера в (4.32) необхідно замінити рівнянням Ейлера – Пуассона, записане у формі

$$\frac{\partial G^*}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial G^*}{\partial \dot{y}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial G^*}{\partial \ddot{y}} = 0.$$

З урахуванням цього система рівнянь (4.32) набере вигляду

$$\begin{cases} 2u(t) - \lambda(t) = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \lambda(t) = 0, \\ \ddot{y}(t) - u(t) = 0. \end{cases}$$

Проінтегруємо двічі друге рівняння системи:

$$\frac{d}{dt} \lambda(t) = C_1, \quad \lambda(t) = C_1 t + C_2.$$

Із першого рівняння можна знайти оптимальне керування:

$$u(t) = \frac{C_1}{2} t + \frac{C_2}{2}.$$

Із третього рівняння визначимо змінну стану $y(t)$:

$$\ddot{y}(t) = u(t) = \frac{C_1}{2} t + \frac{C_2}{2}, \quad \text{звідси} \quad \dot{y}(t) = \frac{C_1}{4} t^2 + \frac{C_2}{2} t + C_3, \quad \text{а}$$

$$y(t) = \frac{C_1}{12} t^3 + \frac{C_2}{4} t^2 + \frac{C_3}{2} t + C_4.$$

Сталі інтегрування C_1 , C_2 , C_3 та C_4 можна знайти з граничних умов.

$$\text{При } t = t_0 = 0 \quad C_4 = y(t_0), \quad C_3 = \dot{y}(t_0).$$

При $t = T$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = C_1 \frac{T^3}{12} + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ \dot{y}(T) = C_1 \frac{T^2}{4} + C_2 \frac{T}{2} + \dot{y}(t_0); \end{array} \right. \quad \left| \times \frac{T}{2} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = C_1 \frac{T^3}{12} + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ y(T) - \frac{T}{2} \dot{y}(T) = C_1 \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8} \right) \cdot T^3 + T \dot{y}(t_0) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \right) + y(t_0); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = C_1 \frac{T^3}{12} + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ C_1 \frac{T^3}{24} = \frac{T}{2} (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + (y(t_0) - y(T)); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(T) = T \ddot{y}(t_0) + T \ddot{y}(T) + 2y(t_0) - 2y(T) + C_2 \frac{T^2}{4} + T \dot{y}(t_0) + y(t_0), \\ C_1 = \frac{12}{T^2} (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + \frac{24}{T^3} (y(t_0) - y(T)); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(y(T) - y(t_0)) - T(2\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) = C_2 \frac{T^2}{4}, \\ C_1 = \frac{12}{T^2} (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + \frac{24}{T^3} (y(t_0) - y(T)); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 = \frac{12}{T^2} (y(T) - y(t_0)) - \frac{4}{T} (\dot{y}(T) + 2\dot{y}(t_0)), \\ C_1 = \frac{12}{T^2} (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) + \frac{24}{T^3} (y(t_0) - y(T)). \end{array} \right.$$

Отже, оптимальне керування

$$\bar{u}(t) = \frac{6}{T^2} \left[\frac{2}{T} (y(t_0) - y(T)) + (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) \right] t - \frac{2}{T} \left[\frac{3}{T} (y(t_0) - y(T)) + (2\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) \right],$$

що тотожно збігається з виразом для оптимального керування, одержаним першим способом.

Запитання для самоперевірки

1. Що вивчає варіаційне числення? Яку функцію називають функціоналом? Яке завдання варіаційного числення?
2. Які умови близькості нульового та першого порядків, слабкого та сильного мінімумів?
3. Яким чином виводиться рівняння Ейлера в звичайному та розгорнутому виглядах?

4. Як одержати умову Лежандра? Яке її призначення?
5. Які достатні умови екстремуму?
6. В якому випадку застосовується рівняння Ейлера – Пуассона? Який його вигляд? Який вигляд мають умови Лежандра у цьому випадку?
7. Яка методика розв'язання задач із рухомими кінцями, які умови для їх розв'язання використовують? Яка відмінність розв'язання, якщо рух кінців описується заданими функціями?
8. У чому полягає особливість задач на умовний екстремум? Які форми можуть мати рівняння зв'язків? Як формулюється задача на умовний екстремум?
9. У чому полягає метод невизначених множників Лагранжа? Яка методика розв'язання задач при використанні цього методу?
10. Яка методика розв'язання задач оптимального керування варіаційними методами? Як виводять рівняння для знаходження $\bar{u}(t)$, $y_j(t)$ та $\lambda_j(t)$?
11. Які обмеження методу варіаційного числення?

ТЕМА 5. МЕТОД ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Принцип оптимальності

Оснoву методу динамічного програмування розробив американський математик Р. Беллман. Цей метод властивий для розв'язання будь-яких задач оптимального керування. Основою методу є такий *принцип оптимальності*: будь-яка кінцева ділянка оптимальної траєкторії, що залишилася, сама по собі є також оптимальною.

Іншими словами, незалежно від того, яким шляхом у момент часу t' функція $Y(t')$ досягла оптимального значення (рис. 5.1), її подальшим рухом буде ділянка 2 оптимальної траєкторії, тобто оптимальне керування в будь-який момент часу не залежить від передісторії систем і визначається лише станом системи в цей момент часу та метою керування.

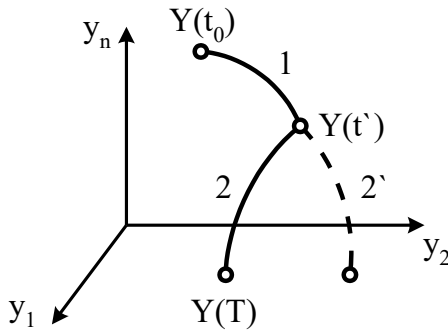


Рисунок 5.1 – Оптимальна 1–2 та неоптимальна 1–2' траєкторії руху

Як приклад Беллман викладає стратегію бігуна на дальню дистанцію: для того щоб пробігти дистанцію за мінімальний час, необхідно так розподілити свої сили, щоб кінцеву ділянку, що залишилася, пробігти за мінімальний час. Якщо ставити завдання пробігти кожену ділянку за мінімальний час, то не виключено, що фінішувати бігунові не доведеться.

5.2. Застосування методу динамічного програмування для одновимірної дискретної задачі

Спочатку метод динамічного програмування був розроблений для дискретних систем. Як зазначалося раніше (див. п. 2.3), дискретні об'єкти керування описуються не диференціальними, а різницевими рівняннями стану:

$$\vec{Y}_{k+1} = \vec{Y}_k + \vec{\Psi}(\vec{Y}_k, \vec{U}_k), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Для одновимірного об'єкта

$$y_{k+1} = y_k + \psi(y_k, u_k), \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad (5.1)$$

де $y_k = y(t_k)$, $u_k = u(t_k)$.

Для дискретного об'єкта критерій оптимальності має вигляд

$$J_N = \sum_{k=0}^N G(u_k, y_k). \quad (5.2)$$

Розглянемо задачу із закріпленим лівим кінцем, для якої задано початковий стан y_0 та область допустимих керувань $\Omega(u)$. Необхідно знайти таку послідовність керувань u_0, u_1, \dots, u_N , за яких критерій оптимальності J (5.2) досягне мінімального значення.

Розв'язання задачі починають із правого кінця.

Припустимо, що всі керування u_0, u_1, \dots, u_{N-1} знайдені, а за формулою (5.1) знайдені змінні стану y_1, \dots, y_N (y_0 задано за умовою). Необхідно знайти лише u_N .

Оскільки критерій оптимальності (5.2)

$$J = G(u_0, y_0) + G(u_1, y_1) + \dots + G(u_N, y_N) = \min_{u_N \in \Omega(u)} \text{ і нам невідомо}$$

лише u_N , то згідно з принципом оптимальності (див. п. 5.1) кінцева ділянка оптимальної траєкторії також є оптимальною. Математично це можна записати у вигляді такого виразу:

$$J_N = G(u_N, y_N) = \min_{u_N \in \Omega(u)}. \quad (5.3)$$

Тепер задача полягає в знаходженні оптимального керування \bar{u}_N ($u_N \in \Omega(u)$), за якого виконується умова (5.3). Причому оптимальне керування \bar{u}_N буде залежати від стану y_N (який стан, таке буде й керування), тобто

$$\bar{u}_N = \bar{u}_N(y_N). \quad (5.4)$$

Позначимо через S_N мінімальне значення критерію J_N , що досягається за оптимального керування $\bar{u}_N(y_N)$, тобто

$$S_N = S_N(y_N) = \min_{u_N \in \Omega(u)} J_N. \quad (5.5)$$

Для того щоб знайти оптимальне керування \bar{u}_N , необхідно взяти часткову похідну від J_N за u_N і прирівняти до нуля $\left(\frac{\partial J_N}{\partial u_N} = 0\right)$. Однак часто оптимальне керування \bar{u}_N виявляється за межами області допустимих керувань $\Omega(u)$. Для того щоб знайти оптимальне керування \bar{u}_N із області $\Omega(u)$ (хай не саме оптимальне з усіх керувань u , але оптимальне з області $\Omega(u)$), використовуються числові методи за допомогою ЕОМ.

Розв'язання задачі можна розбити на три етапи.

Етап 1. В області допустимих керувань $\Omega(u)$ при $t = t_N$ проводимо горизонтальний відрізок від її початку до кінця (рис. 5.2). Розбиваємо його на $(M - 1)$ ділянок із кроком δ . Тоді керування u_N може набувати лише дискретних значень $u_N^{(1)}$, $u_N^{(2)}$, ..., $u_N^{(M)}$. Крок δ вибирають досить малим, щоб точність розрахунків була високою.

Аналогічно розбивається й діапазон допустимих станів $Q(y)$ на $(R - 1)$ відрізків із кроком Δ при $t = t_N$ (рис. 5.3).

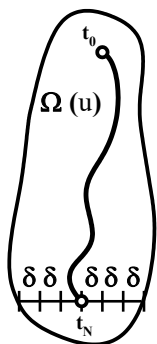


Рисунок 5.2 – Розбиття області допустимих керувань $\Omega(u)$ на $(M - 1)$ відрізків із кроком δ

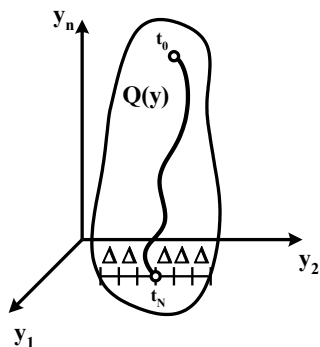


Рисунок 5.3 – Розбиття області допустимих станів $Q(y)$ на $(R - 1)$ відрізків із кроком Δ

Далі шукають критерій оптимальності J_N (5.3) у точці $t = t_N$ спочатку для першого значення змінної стану $y_N^{(1)}$ горизонтального відрізка області допустимих станів Q . Для цього при фіксованому $y_N^{(1)}$, підставляючи різні u_N , обчислюють послідовність $J_N(u_N^{(1)}, y_N^{(1)})$, $J_N(u_N^{(2)}, y_N^{(1)})$, ..., $J_N(u_N^{(M)}, y_N^{(1)})$. Із цієї послідовності J_N визначають мінімальне значення й позначають його $S_N(y_N^{(1)})$ (див. (5.5)), а керування – $\bar{u}_N(y_N^{(1)})$ (див. (5.4)).

Таким чином, у пам'яті ЕОМ залишаються три величини: $(y_N^{(1)})$, $\bar{u}_N(y_N^{(1)})$, $S_N(y_N^{(1)})$.

Далі беремо значення змінної стану $y_N^{(2)}$ в точці $t = t_N$ і виконуємо такі самі дії. Усі операції повторюємо до останньої точки $y_N^{(R)}$ горизонтального відрізка області допустимих станів Q . Уналідок цього в пам'яті машини зберігаються значення

змінних стану $y_N^{(1)}, y_N^{(2)}, \dots, y_N^{(R)}$ та відповідних їм оптимальних керувань $\bar{u}_N(y_N^{(i)}), i = \overline{1, R}$ у точці $t = t_N$.

Етап 2. Наступним етапом є знаходження оптимальних керувань $\bar{u}_{N-1} = \bar{u}(t_{N-1})$ для попередньої $t = t_{N-1}$ точки. У цій точці критерій оптимальності J_{N-1} буде залежати не лише від значень u_{N-1} та y_{N-1} , а й від u_N та y_N , а саме:

$$J_{N-1} = G(u_{N-1}, y_{N-1}) + G(u_N, y_N) = \min_{u_{N-1}, u_N \in \Omega(u)}. \quad (5.6)$$

Мінімальне значення другого доданка $S_N = S_N(y_N) = \min_{u_N \in \Omega(u)} J_N = \min_{u_N \in \Omega(u)} G(u_N, y_N)$ вже було знайдене на попередньому етапі. Тоді умову (5.6) можна переписати у такій формі:

$$J_{N-1} = G(u_{N-1}, y_{N-1}) + S_N(y_N) = \min_{u_{N-1} \in \Omega(u)}. \quad (5.7)$$

Із (5.7) бачимо, що критерій якості J_{N-1} не залежить від керування u_N в точці $t = t_N$, але залежить від змінної стану y_N . Для зняття цієї залежності можна скористатися різницеvim рівнянням (5.1), записаним у вигляді

$$y_N = y_{N-1} + \psi(y_{N-1}, u_{N-1}). \quad (5.8)$$

Отже, критерій (5.7) можна переписати так:

$$J_{N-1} = G(u_{N-1}, y_{N-1}) + S_N(y_{N-1} + \psi(y_{N-1}, u_{N-1})) = \min_{u_{N-1} \in \Omega(u)}. \quad (5.9)$$

Аналогічно (5.4) оптимальне керування в точці $t = t_{N-1}$ позначимо

$$\bar{u}_{N-1} = \bar{u}_{N-1}(y_{N-1}). \quad (5.10)$$

Тоді мінімальне значення критерію J_{N-1} у точці $t = t_{N-1}$ аналогічно (5.5) позначимо $S_{N-1}(y_{N-1})$. З урахуванням уведених позначень вираз для $S_{N-1}(y_{N-1})$ набере вигляду

$$S_{N-1}(y_{N-1}) = \min_{u_{N-1} \in \Omega(u)} J_{N-1} = \min_{u_{N-1} \in \Omega(u)} \left\{ G(u_{N-1}, y_{N-1}) + S_N(y_{N-1} + \psi(y_{N-1}, u_{N-1})) \right\}. \quad (5.11)$$

Із виразу (5.11) бачимо, що мінімальне значення критерію J_{N-1} в точці $t = t_{N-1}$ залежить лише від u_{N-1} та y_{N-1} .

У цьому випадку, при $t = t_{N-1}$, як і в точці $t = t_N$, область допустимих керувань $\Omega(u)$ розбиваємо на $(M-1)$ відрізків, а область допустимих станів $Q(y)$ – на $(R-1)$ відрізків, на кінцях яких позначають точки $u_{N-1}^{(1)}, u_{N-1}^{(2)}, \dots, u_{N-1}^{(M)}$ та $y_{N-1}^{(1)}, y_{N-1}^{(2)}, \dots, y_{N-1}^{(R)}$ відповідно.

На підставі формули (5.8) знаходимо $y_N^{(j)}$ при $y_{N-1}^{(i)}$ та кожному $u_{N-1}^{(j)}$, тобто

$$y_N^{(j)} = y_{N-1}^{(i)} + \psi(y_{N-1}^{(i)}, u_{N-1}^{(j)}), \quad j = \overline{1, M}.$$

Розраховане значення $y_N^{(j)}$ округляють до найближчого y_N , одержаного на першому етапі, та з пам'яті машини витягають величину $S_N(y_N^{(j)})$, що відповідає $y_N^{(j)}$.

Унаслідок цього при $y_{N-1}^{(i)}$ та різних $u_{N-1}^{(j)}, y_N^{(j)}$ формується система

$$J_{N-1} = G(u_{N-1}^{(j)}, y_{N-1}^{(i)}) + S_N(y_N^{(j)}), \quad j = \overline{1, M}.$$

Записавши M виразів при $y_{N-1}^{(i)}$, шукаємо мінімальне J_{N-1} , що позначається $S_{N-1}(y_{N-1}^{(i)})$. У пам'ять машини записується $y_{N-1}^{(i)}, \bar{u}_{N-1}(y_{N-1}^{(i)}), S_N(y_{N-1}^{(i)})$.

Потім дії повторюємо при $y_{N-1}^{(2)}, \dots, y_{N-1}^{(R)}$.

Унаслідок цього в пам'яті машини будуть записані стани $y_{N-1}^{(1)}, y_{N-1}^{(2)}, \dots, y_{N-1}^{(R)}$; оптимальні керування $\bar{u}_{N-1}(y_{N-1}^{(i)})$ та

мінімальні значення критерію якості $S_{N-1}(y_{N-1}^{(i)})$, $i = \overline{1, R}$. При цьому інформацію про мінімальні значення критерію якості $S_N(y_N^{(j)})$ у точці $t = t_N$ із пам'яті машини можна видалити.

Аналогічні операції проводять для змінних стану y_{N-2} тощо.

Дійшовши до k -го кроку, вираз (5.11) набере такого вигляду:

$$S_{N-k}(y_{N-k}) = \min_{u_{N-k} \in \Omega(u)} \left\{ G(u_{N-k}, y_{N-k}) + S_{N-k+1}(y_{N-k} + \psi(y_{N-k}, u_{N-k})) \right\}. \quad (5.12)$$

Оптимальне керування аналогічно (5.10) можна записати так:

$$\bar{u}_{N-k} = \bar{u}_{N-k}(y_{N-k}). \quad (5.13)$$

Надаючи k зростаючих значень, дійдемо до $k = N$.

Для цього випадку

$$S_0(y_0) = \min_{u_0 \in \Omega(u)} \left\{ G(u_0, y_0) + S_1(y_0 + \psi(y_0, u_0)) \right\}. \quad (5.14)$$

Як і у випадку (5.10), з (5.14) знаходимо оптимальне керування $\bar{u}_0(y_0)$ та величину $S_0(y_0)$ як функції від заданого стану об'єкта y_0 . Цю операцію виконують аналогічно операції, описаній для точки $t = t_{N-1}$, лише змінна y_0 набуде одного значення, а керування u_0 – M значень: $u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \dots, u_0^{(M)}$.

Етап 3. Знаючи y_0 й визначивши оптимальне керування $\bar{u}_0(y_0)$, за формулою (5.1) розраховують y_1 . Зі змінних стану $y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \dots, y_1^{(R)}$, що зберігаються в пам'яті машини, вибирають найближчу до змінної y_1 , розрахованої за формулою (5.1). У пам'яті машини для кожної змінної $y_1^{(j)}$ зберігається відповідне їй оптимальне керування $\bar{u}_1^{(j)}$, тобто, знаючи y_1 , знаходимо \bar{u}_1 .

За формулою (5.1) обчислюємо змінну y_2 . Далі всі операції повторюються до y_N . Унаслідок цього знаходимо всю послідовність оптимальних керувань $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N$.

Метод динамічного програмування в дискретному варіанті не є засобом аналітичного розв'язання задачі, але легко реалізується за допомогою ЕОМ. Особливість методу: чим більше обмежень і менш вузька область допустимих керувань, тим менше обчислень потрібно виконати.

Цей метод може бути застосований і для багатовимірних об'єктів, але тоді кількість обчислень збільшується. Ця обставина відома під назвою «прокляття розмірності».

5.3. Метод динамічного програмування в неперервній задачі. Рівняння Беллмана

Розглянемо застосування методу динамічного програмування для неперервної задачі.

Припустимо, що оптимальне керування $\bar{U}(t)$ знайдене і йому відповідає траєкторія руху об'єкта $\vec{Y}(t)$. Виберемо на оптимальній траєкторії дві точки, що відповідають моментам часу t та $t + \Delta t$ (рис. 5.4), де Δt – мала величина.

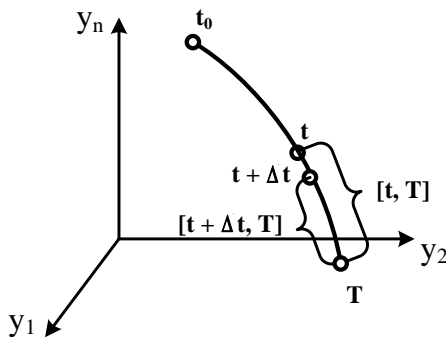


Рисунок 5.4 – Оптимальна траєкторія руху об'єкта

Тоді згідно з принципом оптимальності ділянки оптимальної траєкторії від t до T і від $t + \Delta t$ до T будуть оптимальними. Як і у випадку дискретної задачі, позначимо мінімальне значення функціонала $J = \int_{t_0}^T G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt$ цих ділянок через $S(\bar{Y}(t), t)$ та $S(\bar{Y}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ відповідно:

$$S(\bar{Y}(t), t) = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} J = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \int_t^T G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt, \quad (5.15)$$

$$S(\bar{Y}(t + \Delta t), t + \Delta t) = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \int_{t + \Delta t}^T G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt. \quad (5.16)$$

Визначимо, наскільки змінюється мінімальне значення функціонала при переході від точки t до $t + \Delta t$. Для цього від (5.15) віднімемо (5.16):

$$\begin{aligned} & S(\bar{Y}(t), t) - S(\bar{Y}(t + \Delta t), t + \Delta t) = \\ & = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ \int_t^T G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt - \int_{t + \Delta t}^T G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt \right\}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} S(\bar{Y}(t), t) = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ \int_t^{t + \Delta t} G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt + \right. \\ \left. + S(\bar{Y}(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\}. \quad (5.17) \end{aligned}$$

З урахуванням того, що Δt мале, підінтегральна функція $G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t)$ на малому відрізку $[t, t + \Delta t]$ мало змінюється і її можна вважати сталою з якоюсь похибкою $o_1(t)$. Математично це можна записати таким виразом:

$$\int_t^{t + \Delta t} G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt \approx G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) \Delta t + o_1(t), \quad (5.18)$$

де $o_1(t)$ – мала величина порівняно з Δt .

Тепер розглянемо другий доданок у (5.17). Розвинемо функцію $S(\vec{Y}(t + \Delta t), t + \Delta t)$ у ряд Тейлора з урахуванням того, що S залежить як від вектора стану \vec{Y} , так і від часу t :

$$S(\vec{Y}(t + \Delta t), t + \Delta t) \approx S(\vec{Y}(t), t) + \frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \Delta \vec{Y} + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + o_2(t), \quad (5.19)$$

де $\Delta \vec{Y} \approx \frac{d\vec{Y}}{dt} \Delta t + o_3(t)$ – розвинення $\Delta \vec{Y}$ у ряд Тейлора;

$o_2(t)$ та $o_3(t)$ – сукупність наступних членів ряду Тейлора.

Підставивши (5.18) та (5.19) у (5.17), одержимо

$$S(\vec{Y}(t), t) = \min_{\vec{U} \in \Omega(\vec{U})} \left\{ G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), t) \Delta t + S(\vec{Y}(t), t) + \frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \frac{d\vec{Y}}{dt} \Delta t + \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t + o_1(t) + o_2(t) + o_3(t) \right\}.$$

Скоротимо обидві частини на $S(\vec{Y}(t), t)$ і поділимо вираз, що залишився, на Δt :

$$0 = \min_{\vec{U} \in \Omega(\vec{U})} \left\{ G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), t) + \frac{\partial S}{\partial \vec{Y}} \frac{d\vec{Y}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{o_1(t) + o_2(t) + o_3(t)}{\Delta t} \right\}. \quad (5.20)$$

Проаналізуємо одержане рівняння (5.20). Оскільки $(o_1(t) + o_2(t) + o_3(t)) \cdot \Delta t$, то ним можна знехтувати порівняно з іншими доданками. Похідна $\frac{\partial S}{\partial t}$, як і функція $S(\vec{Y}(t), t)$, не залежить від керування \vec{U} і може бути винесена за фігурні дужки. Нагадаємо, що згідно з (2.23) одержимо

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \dot{\vec{Y}}(t) = \vec{\Psi}[\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t].$$

Після виконання всіх зазначених операцій рівняння (5.20) перепишемо так:

$$-\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial t} = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) + \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}} \bar{\Psi}(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) \right\}. \quad (5.21)$$

Одержане рівняння (5.21) називають *рівнянням Беллмана* у векторній формі.

У скалярній формі рівняння Беллмана має вигляд

$$-\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial t} = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial y_j} \psi_j(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) \right\}. \quad (5.22)$$

Рівняння Беллмана є диференціальним рівнянням у часткових похідних. Методика визначення оптимального керування \bar{U} за допомогою рівняння Беллмана зводиться до таких процедур.

1. З умови мінімуму виразу у фігурних дужках (5.21) знаходимо оптимальне керування \bar{U} як функція \bar{Y} , S , t , тобто у формі $\bar{U}(\bar{Y}(t), S(\bar{Y}(t), t), t)$.

2. Знайдене керування \bar{U} підставляємо у вираз у фігурних дужках, що призведе до нової форми рівняння, яка не містить керування \bar{U} :

$$G(\bar{Y}(t), t) + \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}} \bar{\Psi}(\bar{Y}(t), t) = -\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial t}. \quad (5.23)$$

Це рівняння називають *рівнянням типу Гамільтона – Якобі*.

3. При розв'язанні рівняння Гамільтона – Якобі (5.23) із урахуванням граничної умови $S(\vec{Y}(T), T) = 0$ визначаємо функція $S(\vec{Y}(t), t)$. Способи розв'язання рівняння Гамільтона-Якобі в кожній задачі свої.

4. Визначивши функцію $S(\vec{Y}(t), t)$, підставляємо її у вираз для оптимального керування $\bar{U}(\vec{Y}(t), S(\vec{Y}(t), t), t)$, одержаного в пункті 1.

Унаслідок цього одержимо вираз для оптимального керування $\bar{U}(\vec{Y}(t), t)$ як функцію стану $\vec{Y}(t)$ та часу t . Це й буде кінцевий розв'язок задачі.

Одержане рівняння Беллмана (5.22) застосовують до неавтономних (зі зворотним зв'язком) систем, тому що в ньому є залежність від часу t .

Для автономних систем за відсутності явної залежності функції S від часу t $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ і рівняння Беллмана набере вигляду

$$0 = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ G(\bar{U}(t), \vec{Y}(t)) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial S(\vec{Y}(t))}{\partial y_j} \psi_j(\bar{U}(t), \vec{Y}(t)) \right\}, \quad (5.24)$$

а методика обчислень спроститься.

Приклад розв'язування задачі до теми 5

Нехай система має структуру, що відповідає рис. 5.5. На вхід системи подається задавальний сигнал $x(t) = x_0 = const$. Об'єкт керування описують рівняннями стану $z(t) = y_1(t)$, $\dot{y}_1(t) = u(t)$. На керування та стан обмежень не накладаємо. Критерій якості має вигляд $J = \int_0^T \left[(x_0 - y_1(t))^2 + \rho u^2(t) \right] dt$, $\rho = const > 0$.

Методом динамічного програмування знайти керування $\bar{u}(t)$, за якого критерій J досягає мінімального значення.

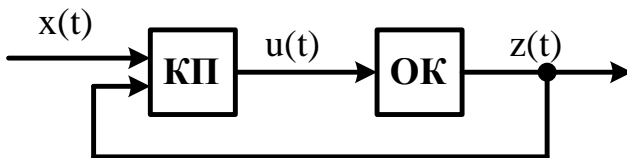


Рисунок 5.5 – Структурна схема системи

Розв'язання. Розв'язувати задачу будемо згідно з методикою, наведеною у темі 3.

1. Складемо рівняння Беллмана (5.22) і знайдемо оптимальне керування \bar{u} як функцію \bar{Y} , S , t .

Із критерію якості бачимо, що $G = (x_0 - y_1(t))^2 + \rho u^2(t)$. Тоді рівняння Беллмана набере вигляду

$$\min_u \left\{ (x_0 - y_1)^2 + \rho u^2 + \frac{\partial S}{\partial y_1} u \right\} = - \frac{\partial S(y_1, t)}{\partial t}.$$

Оптимальне керування $\bar{u}(y_1(t), S(y_1(t), t), t)$ можна знайти, продиференціювавши рівняння Беллмана за керуванням u та прирівнявши його до нуля. Одержимо $2\rho u + \frac{\partial S}{\partial y_1} = 0$.

$$\text{Звідси } \bar{u} = - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial S}{\partial y_1}.$$

2. Знайдене керування $\bar{u}(y_1(t), S(y_1(t), t), t)$ підставляємо у вираз у фігурних дужках, що приводить до рівняння Гамільтона – Якобі (5.23):

$$(x_0 - y_1)^2 + \frac{\rho}{4\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 \frac{1}{2\rho} = - \frac{\partial S}{\partial t},$$

$$(x_0 - y_1)^2 - \frac{1}{4\rho} \left(\frac{\partial S}{\partial y_1} \right)^2 = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

3. Визначимо функцію $S(y_1(t), t)$, розв'язавши рівняння Гамільтона – Якобі (5.23) з урахуванням граничної умови $S(y_1(T), T) = 0$.

Подамо функцію $S(y_1(t), t)$ у вигляді квадратного полінома $S = k_1(t) + k_2(t)y_1 + k_3(t)y_1^2$ з поки що невідомими коефіцієнтами $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$. Знайдемо їх. Для цього підставимо поліном S до рівняння Гамільтона – Якобі (5.23).

Оскільки $\frac{\partial S}{\partial t} = \dot{k}_1 + \dot{k}_2 y_1 + \dot{k}_3 y_1^2$, а $\frac{\partial S}{\partial y_1} = k_2 + 2k_3 y_1$, тоді рівняння Гамільтона-Якобі запишемо так:

$$x_0^2 - 2x_0 y_1 + y_1^2 - \frac{(k_2 + 2k_3 y_1)^2}{4\rho} = -(\dot{k}_1 + \dot{k}_2 y_1 + \dot{k}_3 y_1^2),$$

$$\left(x_0^2 - \frac{k_2^2}{4\rho} + \dot{k}_1 \right) + y_1 \left(-2x_0 - \frac{4k_2 k_3}{4\rho} + \dot{k}_2 \right) + y_1^2 \left(1 - \frac{k_3^2}{\rho} + \dot{k}_3 \right) = 0.$$

Це рівняння виконується за будь-яких y_1 , якщо вирази у дужках дорівнюють нулю.

З урахуванням цього запишемо систему трьох рівнянь, з яких можна знайти введені коефіцієнти $k_1(t)$, $k_2(t)$, $k_3(t)$.

$$\begin{cases} x_0^2 - \frac{k_2^2}{4\rho} + \dot{k}_1 = 0, \\ -2x_0 - \frac{k_2 k_3}{\rho} + \dot{k}_2 = 0, \\ 1 - \frac{k_3^2}{\rho} + \dot{k}_3 = 0. \end{cases}$$

Для того щоб розв'язок шукати не за граничних, а за початкових умов, уведемо нові змінні: $\mu = T - t$, $K_1(\mu) = k_1(t)$, $K_2(\mu) = k_2(t)$, $K_3(\mu) = k_3(t)$.

Отже, $\dot{K}_1(\mu) = -\dot{k}_1(t)$, $\dot{K}_2(\mu) = -\dot{k}_2(t)$, $\dot{K}_3(\mu) = -\dot{k}_3(t)$.

З урахуванням нових змінних система рівнянь набере такого вигляду:

$$\begin{cases} \dot{K}_1 = x_0^2 - \frac{K_2^2}{4\rho}, \\ \dot{K}_2 = -\frac{K_2 K_3}{\rho} - 2x_0, \\ \dot{K}_3 = 1 - \frac{K_3^2}{\rho}. \end{cases}$$

Із третього рівняння системи методом відокремлення змінних можна знайти коефіцієнт K_3 . Для цього третє рівняння

перепишемо у вигляді $\frac{dK_3}{d\mu} = \left(1 - \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right) \left(1 + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)$.

Використовуючи метод відокремлення змінних, запишемо

$$\frac{dK_3}{\left(1 - \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right) \left(1 + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} = d\mu.$$

Проінтегруємо обидві частини:

$$\int \frac{1}{\left(1 - \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right) \left(1 + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} dK_3 = \int d\mu.$$

Інтеграл правої частини зручно взяти, спростивши підінтегральну функцію методом розкладання на елементарні дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(1 - \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)\left(1 + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} &= \frac{A}{\left(1 - \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} + \frac{B}{\left(1 + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} = \\ &= \frac{A + A \frac{K_3}{\sqrt{\rho}} + B - B \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}}{1 - \frac{K_3^2}{\rho}} = \frac{A + B + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}(A - B)}{1 - \frac{K_3^2}{\rho}}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти A та B знаходимо із системи $\begin{cases} A + B = 1, \\ A - B = 0. \end{cases}$

Звідси бачимо, що $A = B = \frac{1}{2}$. Тоді можна записати, що

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} dK_3 + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(1 + \frac{K_3}{\sqrt{\rho}}\right)} dK_3 = \int d\mu,$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{2} \int \frac{dK_3}{\sqrt{\rho} - K_3} + \frac{\sqrt{\rho}}{2} \int \frac{dK_3}{\sqrt{\rho} + K_3} = \mu,$$

$$-\frac{\sqrt{\rho}}{2} \ln(\sqrt{\rho} - K_3) + \frac{\sqrt{\rho}}{2} \ln(\sqrt{\rho} + K_3) = \mu,$$

$$\frac{\sqrt{\rho}}{2} \ln \frac{(\sqrt{\rho} + K_3)}{(\sqrt{\rho} - K_3)} = \mu, \quad \frac{(\sqrt{\rho} + K_3)}{(\sqrt{\rho} - K_3)} = e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}},$$

$$K_3 + \sqrt{\rho} = \sqrt{\rho} e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}} - K_3 e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}}, \quad K_3 \left(e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}} + 1 \right) = \sqrt{\rho} \left(e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}} - 1 \right).$$

$$\text{Звідси } K_3 = \sqrt{\rho} \frac{\left(e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}} - 1 \right)}{\left(e^{\frac{2\mu}{\sqrt{\rho}}} + 1 \right)} = \sqrt{\rho} \operatorname{th} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right).$$

$$\text{Отже, } k_3 = \sqrt{\rho} \operatorname{th} \left(\frac{T-t}{\sqrt{\rho}} \right).$$

Із другого рівняння можна визначити коефіцієнт K_2 , підставивши в нього одержаний вираз для K_3 :

$$\dot{K}_2 = -\frac{K_2}{\sqrt{\rho}} \operatorname{th} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) - 2x_0, \quad \frac{dK_2}{d\mu} = -2x_0 - \frac{K_2}{\sqrt{\rho}} \frac{\operatorname{sh} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right)},$$

$$\sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) dK_2 = -2x_0 \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) d\mu - K_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) d\mu,$$

$$K_2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) d\mu + \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) dK_2 = -2x_0 \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) d\mu.$$

У цьому рівнянні бачимо, що в правій частині знаходимо повний диференціал функції $K_2 \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right)$.

$$\text{Отже, } d \left(K_2 \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) \right) = -2x_0 \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) d\mu.$$

Проінтегрувавши обидві частини, одержимо:

$$K_2 \sqrt{\rho} \operatorname{ch} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) = -2x_0 \rho \operatorname{sh} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right), \quad K_2 = -2x_0 \sqrt{\rho} \operatorname{th} \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right).$$

$$\text{Тоді } k_2 = -2x_0 \sqrt{\rho} \operatorname{th} \left(\frac{T-t}{\sqrt{\rho}} \right).$$

Із першого рівняння знайдемо K_1 :

$$\dot{K}_1 = x_0^2 - x_0^2 \frac{4\rho}{4\rho} \operatorname{th}^2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) \text{ або } \frac{dK_1}{d\mu} = x_0^2 \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}} \right) \right),$$

$$dK_1 = x_0^2 \left(\frac{ch^2\left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\right) - sh^2\left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\right)}{ch^2\left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\right)} \right) d\mu.$$

Використовуючи властивість гіперболічних функцій $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$, запишемо

$$dK_1 = x_0^2 \frac{d\mu}{ch^2\left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\right)}.$$

Проінтегрувавши цей вираз, одержимо $K_1 = x_0^2 \sqrt{\rho} th\left(\frac{\mu}{\sqrt{\rho}}\right)$,

що відповідає $k_1 = x_0^2 \sqrt{\rho} th\left(\frac{T-t}{\sqrt{\rho}}\right)$.

Отже, функція $S(y_1(t), t)$ набере вигляду

$$S(y_1(t), t) = (x_0^2 - 2x_0 y_1 + y_1^2) \sqrt{\rho} th\left(\frac{T-t}{\sqrt{\rho}}\right),$$

а
$$\frac{\partial S(y_1(t), t)}{\partial y_1} = (-2x_0 + 2y_1) \sqrt{\rho} th\left(\frac{T-t}{\sqrt{\rho}}\right).$$

Оптимальне керування
$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} (x_0 - y_1) th\left(\frac{T-t}{\sqrt{\rho}}\right).$$

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає принцип оптимальності при динамічному програмуванні?

2. Яка методика розв'язування задач із закріпленим лівим кінцем методом динамічного програмування в дискретній задачі?

3. У чому полягає перший етап розв'язування задач із закріпленим лівим кінцем методом динамічного програмування в дискретній задачі?

4. Як визначаються оптимальні керування в дискретній задачі методом динамічного програмування у кожній із точок траєкторії руху (етап 2)?

5. Який вершальний етап розв'язування задач із закріпленим лівим кінцем методом динамічного програмування в дискретній задачі?

6. Як одержати рівняння Беллмана в неперервній задачі?

7. Яка методика визначення оптимального керування в неперервній задачі за допомогою рівняння Беллмана?

ТЕМА 6. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ ПОНТРЯГІНА

6.1. Модифікований вектор стану

Принцип максимуму Понтрягіна є одним із основних методів розв'язання задач оптимального керування із закріпленням лівим та вільним правим кінцями і фіксованим часом керування T . Розглянемо сутність методу.

Нехай об'єкт керування описується векторним диференціальним рівнянням

$$\frac{d\vec{Y}}{dt} = \vec{\Psi}[\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t] \quad (6.1)$$

і задані початковий стан об'єкта керування $\vec{Y}(t_0)$, область допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$ і критерій якості

$$J = \int_{t_0}^T G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), t) dt. \quad (6.2)$$

Необхідно в області допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$ знайти таке керування $\vec{U}(t)$, за якого функціонал J на відрізку часу $t \in [t_0, T]$ досягає мінімального значення, тобто виконується умова

$$J = \min_{\vec{U}(t) \in \Omega_1(\vec{U})}.$$

Для розв'язування задачі введемо дві додаткові змінні:

1) змінну $y_{n+1}(t)$, обумовлену рівнянням

$$\frac{dy_{n+1}(t)}{dt} = \psi_{n+1} = 1, \quad (6.3)$$

з якого випливає, що $y_{n+1}(t) = \int dt = t$;

2) змінну $y_0(t)$, що підпорядковується рівнянню

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = \psi_0 = G(\vec{U}, \vec{Y}, t) = G(\vec{U}, \vec{Y}, y_{n+1}). \quad (6.4)$$

Із (6.4) бачимо, що $y_0(t) = \int_{t_0}^t G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), t) dt$. При $t = T$

$$y_0(T) = \int_{t_0}^T G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), t) dt = J. \quad (6.5)$$

Із урахуванням нових змінних $y_{n+1}(t)$ та $y_0(t)$ введемо $(n+2)$ -вимірний модифікований вектор стану

$$\tilde{Y}(t) = (y_0(t), y_1(t), \dots, y_n(t), y_{n+1}(t))^T \quad (6.6)$$

і $(n+2)$ -вимірний вектор – функцію

$$\tilde{\Psi} = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \psi_{n+1})^T. \quad (6.7)$$

Тоді рівняння стану (6.1) набере вигляду

$$\frac{d\tilde{Y}}{dt} = \tilde{\Psi} \left[\tilde{Y}(t), \vec{U}(t) \right], \quad (6.8)$$

а початкова умова при $t_0 = 0$

$$\tilde{Y}(t_0) = (0, y_1(0), \dots, y_n(0), 0)^T. \quad (6.9)$$

Отже, задачу оптимального керування можна сформулювати так: в області допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$ знайти таке керування, за якого траєкторія руху об'єкта пройде через початкову точку, а нульовий компонент вектора стану y_0 в момент $t = T$ набуде найменшого значення, тобто

$$y_0(T) = \min_{\vec{U}(t) \in \Omega(\vec{U})} y_0(T), \quad t \in [t_0, T], \quad t_0, T = \text{const}. \quad (6.10)$$

6.2. Умова оптимальності

Для простоти розглянемо випадок одновимірного керування. Уявимо, що оптимальне керування $\bar{u}(t)$ при початкових умовах (6.9) відомо. Нехай до часу $t = \tau - \varepsilon$ неоптимальне $u(t)$ та оптимальне $\bar{u}(t)$ керування збігаються

(рис. 6.1), а на відріжку часу $[\tau - \varepsilon, \tau]$ вони відрізняються на величину δu , тобто

$$u(t) = \bar{u}(t) + \delta u.$$

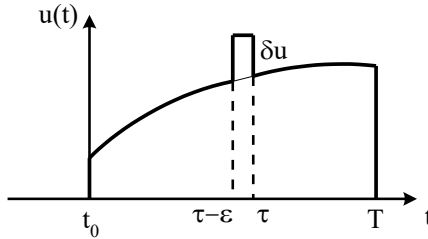


Рисунок 6.1 – Відмінність оптимального $\bar{u}(t)$ і неоптимального $u(t)$ керувань на відріжку часу $[\tau - \varepsilon, \tau]$ на величину δu

Далі на відріжку $[\tau, T]$ неоптимальне й оптимальне керування знову збігаються. Нехай відрізок ε є нескінченно малим. Тепер розглянемо траєкторію руху об'єкта за оптимального та неоптимального керуваннях (рис. 6.2).

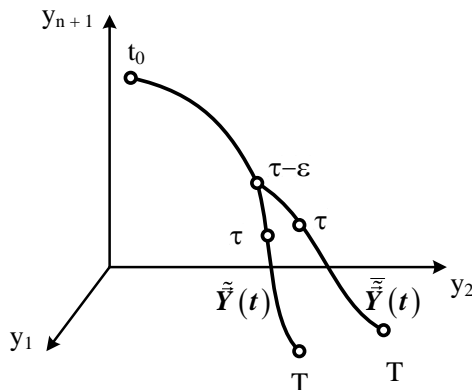


Рисунок 6.2 – Траєкторії руху об'єкта за оптимального та неоптимального керуваннях

Як бачимо з рис. 6.2, до точки $\tau - \varepsilon$ оптимальна $\bar{Y}(t)$ та неоптимальна $\tilde{Y}(t)$ траєкторії руху збігаються. Відмінність у керуванні на відрізку $[\tau - \varepsilon, \tau]$ спричинює відмінність оптимальної $\bar{Y}(t)$ та неоптимальної $\tilde{Y}(t)$ траєкторій руху при $t \geq \tau - \varepsilon$.

Позначимо відхилення вектора стану $\tilde{Y}(t)$ від оптимального вектора $\bar{Y}(t)$ через $\delta\tilde{Y}(t)$:

$$\delta\tilde{Y}(t) = \tilde{Y}(t) - \bar{Y}(t), \quad (6.11)$$

$$\text{де } \delta\tilde{Y}(t) = (\delta y_0(t), \delta y_1(t), \dots, \delta y_n(t), \delta y_{n+1}(t))^T.$$

На нескінченно малому відрізку $\tau - \varepsilon \leq t \leq \tau$ траєкторію можна вважати лінійною внаслідок малості ε . Тоді при $t = \tau$ відхилення $\delta\tilde{Y}(t)$ можна записати використовуючи розвинення в ряд Маклорена:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{Y}(\tau) &= \varepsilon \left[\frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} - \frac{d\bar{Y}(t)}{dt} \right]_{t=\tau} = \\ &= \varepsilon \left[\tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t)) - \bar{\Psi}(\bar{Y}(t), \bar{u}(t)) \right]_{t=\tau}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Оскільки $y_0(T) = J = \min_{u \in \Omega(u)}$ є критерієм якості, то відхилення від критерію якості також повинне бути мінімальним, тобто

$$\delta y_0(T) = y_0(T) - \bar{y}_0(T) = \min_{u(\tau) \in \Omega(u)}. \quad (6.13)$$

Умову (6.13) можна переписати так:

$$-\delta y_0(T) = \max_{u(\tau) \in \Omega(u)}. \quad (6.14)$$

Якщо ввести $(n + 2)$ -вимірний вектор

$$\vec{P}(T) = (-1, 0, 0, \dots, 0)^T, \quad (6.15)$$

то умова (6.14) набере вигляду

$$\vec{P}^T(T) \delta \tilde{Y}(T) = \max_{u(\tau) \in \Omega(u)}. \quad (6.16)$$

Для довільних $t \in [\tau, T]$ можна підібрати такий вектор $\vec{P}(t)$, щоб виконувалася умова

$$\vec{P}^T(t) \delta \tilde{Y}(t) = \vec{P}^T(T) \delta \tilde{Y}(T). \quad (6.17)$$

Оскільки $t \in [\tau, T]$, то при $t = \tau$ можна записати, що

$$\vec{P}^T(\tau) \delta \tilde{Y}(\tau) = \max_{u(\tau) \in \Omega(u)}. \quad (6.18)$$

Підставивши (6.12) у вираз (6.18), одержимо

$$\vec{P}^T(\tau) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(\tau), u(\tau)) - \vec{P}^T(\tau) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(\tau), \bar{u}(\tau)) = \max_{u(\tau) \in \Omega(u)}. \quad (6.19)$$

Тут ε не залежить від u , тому його можна скоротити.

Якщо τ може бути вибрана на будь-якій ділянці $[t_0, T]$, то τ можна замінити на t . Тоді вираз (6.19) набере вигляду

$$\vec{P}^T(t) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t)) - \vec{P}^T(t) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u(t) \in \Omega(u)}.$$

Оскільки другий доданок відповідає оптимальному керуванню $\bar{u}(t)$ і не залежить від неоптимального керування $u(t)$, тобто є постійним при кожному $u(t)$, щоб виконувалася умова максимуму, необхідно, щоб максимальним був перший доданок. Отже,

$$\vec{P}^T(t) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t)) = \max_{u(t) \in \Omega(u)}. \quad (6.20)$$

Зазвичай добуток $\vec{P}^T(t) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t))$ записують як аргумент якоїсь функції, наприклад H :

$$H(\vec{P}^T(t), \tilde{Y}(t), u(t)) = \vec{P}^T(t) \tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} p_i(t) \psi_i \left(\tilde{Y}(t), u(t) \right), \quad (6.21)$$

де p_i, ψ_i – компоненти векторів \vec{P} та $\tilde{\Psi}$.

Функцію H називають функцією Гамільтона або гамільтоніаном.

Отже, принцип максимуму Понтрягіна формулюють так: для того щоб у задачі з закріпленим лівим кінцем траєкторії $\vec{Y}(t_0)$, вільним правим кінцем траєкторії $\vec{Y}(T)$ та фіксованим часом керування $T - t_0$ керування $u(t)$ було оптимальним, необхідне існування такої безперервної ненульової векторної функції $\vec{P}(t)$, щоб за будь-яких $t \in [t_0, T]$ функція H , що являє скалярний добуток вектора швидкості руху точки $\tilde{\Psi}$ $\left(\tilde{\Psi} = \frac{d\vec{Y}}{dt} - \text{швидкість} \right)$ на вектор $\vec{P}(t)$, досягала максимуму

за керуванням $u(t)$, тобто необхідно, щоб виконувалася умова

$$H \left(\vec{P}(t), \tilde{Y}(t), u(t) \right) = \max_{u(t) \in \Omega(u)} \quad (6.22)$$

і в кінцевий момент часу T мало місце співвідношення $\vec{P}(T) = (-1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Оптимальне керування $\bar{u}(t)$ одержано для розімкненої системи. Для переходу до замкненої системи необхідно, щоб оптимальне керування $\bar{u}(t)$ залежало лише від $\tilde{Y}(t)$, тобто $\bar{u}(\tilde{Y}(t))$. Для багатовимірного керування замість скаляра $\bar{u}(t)$ використовується вектор $\bar{U}(t)$.

6.3. Система спряжених рівнянь

При виведенні принципу максимуму був уведений вектор $\vec{P}(t)$, який ще не був визначений. Для його знаходження вираз (6.17) продиференціюємо за часом t і прирівняємо до нуля:

$$\delta\tilde{Y}(t) \frac{d\vec{P}^r(t)}{dt} + \vec{P}^r(t) \frac{d(\delta\tilde{Y}(t))}{dt} = 0. \quad (6.23)$$

Спростимо (6.23). Для цього розвинемо другий доданок (6.23) у ряд Тейлора*:

$$\frac{d}{dt}(\delta\tilde{Y}(t)) = \frac{\partial}{\partial\tilde{Y}} \frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} \delta\tilde{Y}(t) = \frac{\partial\tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t))}{\partial\tilde{Y}(t)} \delta\tilde{Y}(t). \quad (6.24)$$

З урахуванням (6.24) вираз (6.23) набере вигляду

$$\delta\tilde{Y}(t) \left[\frac{d\vec{P}^r(t)}{dt} + \vec{P}^r(t) \frac{\partial\tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t))}{\partial\tilde{Y}(t)} \right] = 0.$$

Оскільки $\delta\tilde{Y}(t) \neq 0$, то

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = - \left[\frac{\partial\tilde{\Psi}(\tilde{Y}(t), u(t))}{\partial\tilde{Y}(t)} \right]^T \vec{P}(t), \quad (6.25)$$

або в скалярній формі

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = - \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial\psi_j(\tilde{Y}(t), u(t))}{\partial y_i} p_j(t), \quad (6.26)$$

де $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Систему (6.25), (6.26) називають *спряженою* щодо системи рівнянь об'єкта (6.8).

*Розвинення в ряд Тейлора наведене в додатку А.

Із виразу (6.26) можна знайти компоненти p_i , використовуючи рівняння стану (6.8) $\left(\frac{d\tilde{Y}}{dt} = \tilde{\Psi}[\tilde{Y}(t), \bar{U}(t), t] \right)$, вираз для функції Гамільтона (6.22) та граничну умову $\bar{P}(T) = (-1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Із виразів (6.25) та (6.21) бачимо, що

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = - \left[\frac{\partial(\tilde{\Psi} \cdot \bar{P})}{\partial \tilde{Y}} \right]^T = - \left[\frac{\partial H(\bar{P}, \tilde{Y}, u)}{\partial \tilde{Y}} \right]^T,$$

а із (6.8) та (6.22) випливає, що

$$\frac{d\tilde{Y}(t)}{dt} = \tilde{\Psi}(\tilde{Y}, u, t) = \left[\frac{\partial H(\bar{P}, \tilde{Y}, u)}{\partial \bar{P}} \right]^T,$$

або в скалярній формі

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \frac{\partial H(\bar{P}, \tilde{Y}, u)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i(t)}{dt} = - \frac{\partial H(\bar{P}, \tilde{Y}, u)}{\partial y_i}, \quad (6.27)$$

де $i = 0, 1, \dots, n+1$.

Співвідношення (6.27) називають *канонічними рівняннями Гамільтона*.

6.4. Дискретний принцип максимуму

Принцип максимуму Понтрягіна може бути використаний для пошуку оптимального керування й дискретних об'єктів. Розглянемо задачу оптимізації для автономного об'єкта (без явної залежності від часу t) із фіксованим часом, одновимірним керуванням u та вільним правим кінцем траєкторії.

Нехай об'єкт керування описують системою нелінійних різницевих рівнянь:

$$y_i(k+1) = \psi_i(\vec{Y}(k), u(k)); \quad i = \overline{1, n}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.28)$$

де $\vec{Y}(k) = \vec{Y}(t_k) = [y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k)]^T$ – вектор стану;

$u(k) = u(t_k)$; ψ_i – диференціальна функція.

Також припустимо, що задані початковий стан об'єкта \vec{Y}_0 та обмеження на керування $\Omega(u)$. Показник якості

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} G(\vec{Y}(k), u(k)). \quad (6.29)$$

Необхідно знайти таку послідовність керувань $\bar{u}(0)$, $\bar{u}(1)$, ..., $\bar{u}(N-1)$, що належать області допустимих керувань $\Omega(u)$, за яких показник якості J (6.29) досягає мінімального значення, а траєкторія руху об'єкта керування проходить через задану початкову точку \vec{Y}_0 .

Як і у випадку неперервної задачі, введемо нову змінну $y_0(k)$, що задовольняє рівняння

$$y_0(k+1) = y_0(k) + G(\vec{Y}(k), u(k)) = \psi_0(y_0(k), \vec{Y}(k), u(k)) \quad (6.30)$$

за нульової початкової умови $y_0(0) = 0$.

Із (6.30) бачимо, що при $k=0$ $y_0(1) = G(\vec{Y}(0), u(0))$;

$$\begin{aligned} \text{при } k=1 \quad y_0(2) &= y_0(1) + G(\vec{Y}(1), u(1)) = G(\vec{Y}(0), u(0)) + \\ &+ G(\vec{Y}(1), u(1)) = \sum_{k=0}^1 G(\vec{Y}(k), u(k)); \end{aligned}$$

$$\text{при } k=N-1 \quad y_0(N) = \sum_{k=0}^{N-1} G(\vec{Y}(k), u(k)) = J.$$

Тому задача зводиться до мінімізації значення компоненти $y_0(N)$ модифікованого вектора стану об'єкта

$$\vec{\tilde{Y}}(k) = [y_0(k), y_1(k), \dots, y_n(k)]^T.$$

Для знаходження оптимального керування $\bar{u}(k)$ складається функція Гамільтона

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{Y}(k), \bar{P}(k+1), u(k)\right) &= \bar{P}^T(k+1) \cdot \tilde{\Psi}\left(\tilde{Y}(k), u(k)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n p_i(k+1) \cdot \psi_i\left(\tilde{Y}(k), u(k)\right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

і система спряжених рівнянь у векторній формі

$$\bar{P}(k) = \left[\frac{\partial \tilde{\Psi}\left(\tilde{Y}(k), u(k)\right)}{\partial \tilde{Y}(k)} \right]^T \cdot \bar{P}(k+1), \quad (6.32)$$

або в скалярній формі

$$p_i(k) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial \psi_j\left(\tilde{Y}(k), u(k)\right)}{\partial y_i} \cdot p_i(k+1), \quad i = \overline{0, n} \quad (6.33)$$

за граничних умов $\bar{P}(N) = (-1, 0, 0, \dots, 0)^T$.

Керування $\bar{u}(k)$ буде оптимальним, якщо функція Гамільтона H набуває максимального значення:

$$H\left(\tilde{Y}(k), \bar{P}(k+1), \bar{u}(k)\right) = \max_{u(k) \in \Omega(u)} H\left(\tilde{Y}(k), \bar{P}(k+1), u(k)\right), \quad (6.34)$$

де вектор $\bar{P}(k+1)$ знаходять із рівняння (6.32) за граничної умови $\bar{P}(N) = (-1, 0, 0, \dots, 0)^T$;

вектор $\tilde{Y}(k)$ знаходять з (6.28) та (6.30) за $u(k) = \bar{u}(k)$ та заданої початкової умови $\tilde{Y}(0) = (0, \bar{Y}^T(0))^T$;

функцію Гамільтона H визначають відповідно до (6.31).

Співвідношення (6.34) є необхідною умовою мінімуму функціонала J .

Розрахунок оптимальних дискретних керувань $\bar{u}(k)$ відповідно до принципу максимуму найчастіше здійснюють з

використанням ЕОМ і рідко є аналітично розв'язуваною задачею.

Приклад розв'язування задачі до теми 6

Нехай об'єкт керування описують рівнянням $p^2 y(t) = u(t)$ і задані граничні умови $y(t_0)$, $y(T)$, $\dot{y}(t_0)$, $\dot{y}(T)$ ($t_0 = 0$).

Якість системи задають функціоналом $J = \int_{t_0}^T u^2(t) dt$.

Необхідно знайти керування $\bar{u}(t)$, яке мінімізує функціонал J і переводить об'єкт із початкового стану в кінцевий.

Розв'язання. Відповідно до принципу максимуму Понтрягіна вводимо модифікований вектор стану $\tilde{Y}(t) = (y_0(t), y_1(t), y_2(t))^T$, компоненти $y_1(t)$, $y_2(t)$ якого визначають із рівняння стану, а компонента $y_0(t)$ – відповідно до формули (6.4). Змінну $y_{n+1}(t) = t$ (6.3) не використовуємо, оскільки в рівнянні об'єкта керування і в критерії якості немає явної залежності від часу t :

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = \dot{y}_0(t) = u^2(t) = \psi_0, \quad \dot{y}_1(t) = y_2(t) = \psi_1, \quad \dot{y}_2(t) = u(t) = \psi_2.$$

На підставі (6.21) складаємо гамільтоніан

$$H = p_0 \psi_0 + p_1 \psi_1 + p_2 \psi_2 = p_0 u^2 + p_1 y_2 + p_2 u.$$

Знайдемо оптимальне керування \bar{u} з умови максимуму H (6.22).

Для цього візьмемо частинну похідну від гамільтоніана H за керуванням u та прирівняємо до нуля, тобто знайдемо

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

$$2\bar{u} p_0 + p_2 = 0, \quad \text{звідси } \bar{u} = -\frac{p_2}{2p_0}.$$

Знайдемо p_0 та p_2 . Для цього на підставі (6.27) складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = -\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} p_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_0} p_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_0} p_2\right), \\ \dot{p}_1 = -\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_1} p_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} p_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} p_2\right), \\ \dot{p}_2 = -\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y_2} p_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_2} p_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} p_2\right). \end{cases}$$

Оскільки компоненти вектор-функції $\psi_0 = u^2(t)$, $\psi_1 = y_2(t)$ та $\psi_2 = u(t)$ не залежать від змінних стану y_0 та y_1 , то їх частинні похідні дорівнюватимуть нулю. Не дорівнює нулю лише другий доданок третього рівняння. З урахуванням цього систему можна переписати так:

$$\begin{cases} \dot{p}_0 = 0, \\ \dot{p}_1 = 0, \\ \dot{p}_2 = -p_1. \end{cases}$$

Звідси одержимо, що $p_0 = C_0$, $p_1 = C_1$, $p_2 = -C_1 t + C_2$. Із граничної умови $\vec{P}(T) = (-1, 0, 0, \dots, 0)^T$ випливає, що константа $C_0 = -1$, а оптимальне керування $\bar{u} = \frac{-C_1 t + C_2}{2}$.

Сталі інтегрування C_1 і C_2 можна знайти із граничних умов: $y(t_0)$, $y(T)$, $\dot{y}(t_0)$, $\dot{y}(T)$ ($t_0 = 0$). Для цього оптимальне керування $\bar{u} = \frac{-C_1 t + C_2}{2}$ підставляємо у рівняння об'єкта $\dot{y}_1(t) = y_2(t)$, $\dot{y}_2(t) = u(t)$ і знаходимо змінні стану y_1 та y_2 .

$$\dot{y}_2(t) = \frac{-C_1 t + C_2}{2},$$

$$y_2(t) = -\frac{C_1 t^2}{4} + \frac{C_2 t}{2} + C_3 = \dot{y}_1(t),$$

$$y_1(t) = -\frac{C_1 t^3}{12} + \frac{C_2 t^2}{4} + C_3 t + C_4.$$

Сталі інтегрування C_1 , C_2 , C_3 та C_4 можна знайти із граничних умов. Вираз для цих констант цілком збігається з результатами прикладу 4.7.

Отже, одержимо, що оптимальне керування

$$\bar{u}(t) = \frac{6}{T^2} \left[\frac{2}{T} (y(t_0) - y(T)) + (\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) \right] \cdot t - \frac{2}{T} \left[\frac{3}{T} (y(t_0) - y(T)) + (2\dot{y}(t_0) + \dot{y}(T)) \right].$$

Запитання для самоперевірки

1. Які змінні ввів Понтрягін для розв'язування задач оптимального керування і як формулюється задача оптимального керування, враховуючи їх?

2. Як одержують функцію Гамільтона в принципі максимуму Понтрягіна?

3. Яким чином можна одержати систему спряжених рівнянь? Для чого їх використовують?

4. Як використовують принцип максимуму Понтрягіна для розв'язування дискретних задач? Опишіть методику знаходження оптимальних керувань.

ТЕМА 7. ЗАДАЧА ПРО МАКСИМАЛЬНУ ШВИДКОДІЮ

7.1. Визначення задачі про максимальну швидкодію

Теорія оптимального керування спочатку розвивалася як теорія оптимальної швидкодії, і лише в другій половині 50-х років XIX століття було зроблене узагальнення про інші класи задач.

Сформулюємо задачу про максимальну швидкодію.

Нехай об'єкт керування описують рівнянням стану

$$\frac{d}{dt} \vec{Y}(t) = \vec{\Psi}(\vec{Y}(t), \vec{U}(t)) \quad (7.1)$$

і задані область допустимих керувань $\Omega(\vec{U})$ та бажаний вектор стану системи $\vec{Y}_6(t)$. Припустимо, що в початковий момент часу t_0 дійсний вектор стану $\vec{Y}(t_0)$ відрізняється від бажаного вектора $\vec{Y}_6(t_0)$, але через час T вони будуть збігатися (див. рис. 7.1).

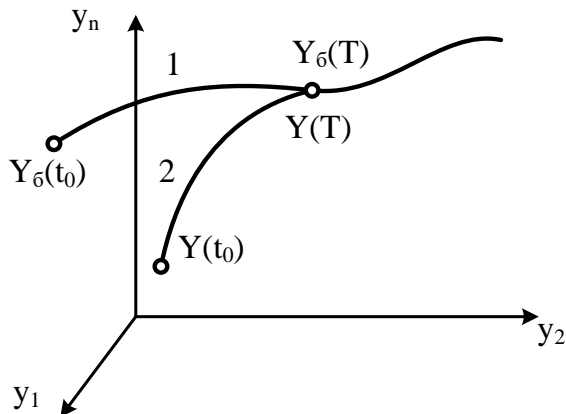


Рисунок 7.1 – Траєкторії руху об'єкта:
1 – бажана; 2 – реальна

Необхідно в області допустимих керувань $\Omega(\bar{U})$ підібрати таке керування $\bar{U}(\bar{Y}(t))$, за якого об'єкт за мінімальний час T буде переведений із початкового стану $\bar{Y}(t_0)$ у точку зіткнення з бажаною траєкторією $\bar{Y}_\sigma(T)$, тобто повинна виконуватися умова

$$T = \min_{\bar{U}(\bar{Y}) \in \Omega(\bar{U})} . \quad (7.2)$$

Часто в задачах про максимальну швидкодію вводять вектор $\bar{\varepsilon}(t) = \bar{Y}_\sigma(t) - \bar{Y}(t)$. Тоді задача про максимальну швидкодію зводиться до знаходження такого допустимого керування, за якого об'єкт за мінімальний час T буде переведений із початкового стану $\bar{\varepsilon}(t_0)$ у початок координат простору $\bar{\varepsilon}(T) = 0$.

Якщо вектор $\bar{Y}_\sigma(t) = 0$, то задача про максимальну швидкодію зводиться до пошуку такого керування, за допомогою якого об'єкт за мінімальний час T переводиться із заданого початкового в заданий кінцевий стан.

Для простоти будемо розглядати лише лінійні об'єкти.

7.2. Динамічне програмування в задачі про максимальну швидкодію

Задачу про максимальну швидкодію можна подати як задачу із закріпленим правим кінцем траєкторії ($\bar{Y}_\sigma(t)$ задане), нефіксованим часом T і критерієм оптимальності

$$J = \int_{t_0}^T dt = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} . \quad (7.3)$$

При порівнянні критеріїв (6.2) $\left(J = \int_{t_0}^T G(\bar{U}(t), \bar{Y}(t), t) dt \right)$

та (7.3) бачимо, що для задачі про максимальну швидкодію $G=1$. Якщо в рівнянні Беллмана (5.21)

$\left(-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ G + \frac{\partial S}{\partial \bar{Y}} \bar{\Psi} \right\}\right)$ припустити, що $G=1$, $\frac{\partial S}{\partial t}=0$, а S

замінити на T , то одержимо рівняння Беллмана в задачі про максимальну швидкодію:

$$\min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ \frac{\partial T(\bar{Y}(t))}{\partial \bar{Y}} \bar{\Psi}(\bar{U}(t), \bar{Y}(t)) \right\} = -1 \quad (7.4)$$

або в скалярній формі

$$\min_{\bar{U} \in \Omega(\bar{U})} \left\{ \sum_{i=1}^n \psi_i(\bar{U}(t), \bar{Y}(t)) \frac{\partial T(\bar{Y}(t))}{\partial y_i} \right\} = -1, \quad (7.5)$$

де $T(\bar{Y})$ – неперервна функція, що має неперервні часткові похідні за змінною y_i .

Розглянемо методику визначення оптимального керування методом динамічного програмування в задачі про максимальну швидкодію. Як і у випадку динамічного програмування (див. п. 5.3), із умови мінімуму виразу у фігурних дужках знаходять оптимальне керування $\bar{U}(T, \bar{Y}(t))$. Потім, підставивши

одержане оптимальне керування \bar{U} у рівняння Беллмана (7.5), одержимо диференціальне рівняння першого порядку в часткових похідних типу Гамільтона – Якобі для задачі про максимальну швидкодію (див. методику визначення оптимального керування за допомогою рівняння Беллмана, п. 5.3). З урахуванням граничної умови $T(\bar{Y}=0)=0$ знаходимо

$T = T(\bar{Y}(t))$ і, підставивши його у вираз для оптимального керування $\bar{U}(T, \bar{Y}(t))$, одержимо шукане оптимальне керування $\bar{U}(\bar{Y}(t))$.

Частіше для розв’язування таких задач використовують числові методи, реалізовані за допомогою ЕОМ.

Для простоти розглянемо задачу про максимальну швидкість для лінійного об'єкта, описуваного рівнянням стану

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k, \quad i = \overline{1, n} \quad (7.6)$$

або у векторній формі

$$\frac{d\vec{Y}(t)}{dt} = A\vec{Y}(t) + B\vec{U}(t), \quad (7.7)$$

де A – матриця $n \times n$ з елементами a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$;

B – матриця $n \times m$ з елементами b_{ik} , $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$.

Область допустимих керувань найчастіше задається системою нерівностей

$$|u_k| \leq C_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7.8)$$

де $C_k = const$.

Із урахуванням того, що $\bar{\Psi}(\vec{Y}(t), \vec{U}(t)) = \frac{d\vec{Y}(t)}{dt} = A\vec{Y}(t) + B\vec{U}(t)$, рівняння Беллмана (7.4) для лінійного об'єкта набере вигляду

$$\min_{\vec{u} \in \Omega(\vec{u})} \left\{ \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial \vec{Y}} (A\vec{Y}(t) + B\vec{U}(t)) \right\} = -1.$$

Оскільки перший доданок $A\vec{Y}$ не залежить від \vec{U} , то його можна винести за знак операції мінімізації, що приведе до рівняння

$$\frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial \vec{Y}} A\vec{Y}(t) + \min_{\vec{u} \in \Omega(\vec{u})} \left\{ \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial \vec{Y}} B\vec{U}(t) \right\} = -1, \quad (7.9)$$

або в скалярній формі

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial y_i} +$$

$$+ \min_{u_1, u_2, \dots, u_m \in \Omega(\bar{U})} \left\{ \sum_{k=1}^m u_k \sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\bar{Y}(t))}{\partial y_i} \right\} = -1. \quad (7.10)$$

Щоб доданок у фігурних дужках був мінімальним, необхідно, щоб він був від'ємним і набував найбільшого значення за модулем. Ця умова виконується, якщо в (7.8) припустити, що $|u_k| = C_k$. Щоб при від'ємному множнику

$$\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\bar{Y})}{\partial y_i} \text{ вираз у фігурних дужках (7.10) був від'ємним,}$$

необхідно, щоб u_k було додатним або навпаки. Враховуючи це, можна записати, що

$$\bar{u}_k = -C_k \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\bar{Y})}{\partial y_i} \right\}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7.11)$$

де $\operatorname{sign}\{x\} = 1$ при $x > 0$, $\operatorname{sign}\{x\} = -1$ при $x < 0$ *

Із (7.11) випливає, що оптимальні керування $\bar{u}_k(t)$ в задачі про максимальну швидкодію є кусково-сталими функціями, що набувають дискретних значень: або C_k , або $-C_k$, залежно від

$$\text{множника } \sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\bar{Y})}{\partial y_i} \text{ (рис. 7.2).}$$

Ураховавши, що $x \cdot \operatorname{sign}\{x\} = |x|$ і підставивши оптимальне керування $\bar{u}_k(t)$ (7.11) у рівняння Беллмана (7.10), одержимо

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \frac{\partial T(\bar{Y}(t))}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^m -C_k \left\{ \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\bar{Y})}{\partial y_i} \right\} \sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\bar{Y}(t))}{\partial y_i} \right\} = -1,$$

*Властивості функції сигнум наведені в додатку А.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^m C_k \left| \sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_i} \right| = -1. \quad (7.12)$$

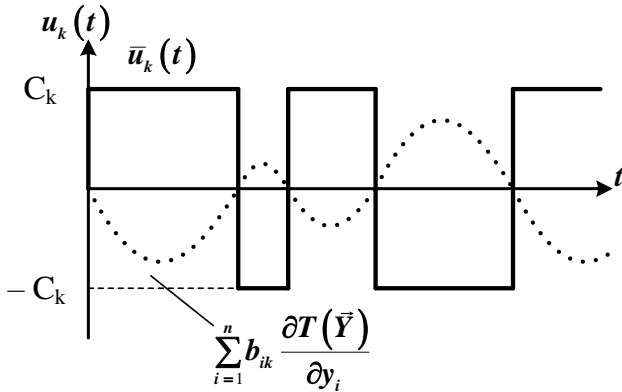


Рисунок 7.2 – Графік зміни оптимального керування $\bar{u}_k(t)$ в задачі про максимальну швидкодю

Розв'язавши рівняння (7.12), можна знайти T , і підставивши його в (7.11), визначаємо оптимальне керування $\bar{u}_k(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $k = \overline{1, m}$.

7.3. Оптимальне керування об'єктом другого порядку

Як приклад розглянемо задачу керування одновимірним об'єктом другого порядку. Нехай об'єкт керування описується рівняннями стану:

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = u(t), \quad |u| \leq C. \quad (7.13)$$

При порівнянні (7.13) з (7.6) бачимо, що $n = 2$, $a_{11} = a_{21} = a_{22} = 0$, $a_{12} = 1$, $b_{11} = b_{12} = 0$, $b_{21} = b_{22} = 1$.

Підставивши коефіцієнти a і b в (7.11) та (7.12), одержимо вираз для оптимального керування

$$\bar{u} = -C \operatorname{sign} \left\{ \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_2} \right\} \quad (7.14)$$

і рівняння Гамільтона – Якобі

$$y_2 \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial y_1} - C \left| \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_2} \right| = -1. \quad (7.15)$$

Із (7.14) випливає, що оптимальне керування може набувати одного із двох значень: або $\bar{u} = -C$, або $\bar{u} = +C$. Тоді рівняння (7.15) можна подати у вигляді двох рівнянь:

$$y_2 \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial y_1} - C \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_2} = -1 \text{ при } \bar{u} = -C \text{ та } \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_2} > 0, \quad (7.16)$$

$$y_2 \frac{\partial T(\vec{Y}(t))}{\partial y_1} + C \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_2} = -1 \text{ при } \bar{u} = +C \text{ та } \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_2} < 0. \quad (7.17)$$

Виберемо $C = 1$ (одиничний імпульс на рис. 7.2).

Розв'язками рівнянь (7.16) та (7.17) відповідно за граничних умов (7.13) є функції*

$$T(\vec{Y}) = 2\sqrt{0,5y_2^2 + y_1 + y_2}, \quad T(\vec{Y}) = 2\sqrt{0,5y_2^2 - y_1 - y_2}. \quad (7.18)$$

Підставивши одержані вирази (7.18) в (7.14), одержимо вираз для оптимального керування.

Кожне із співвідношень (7.18) окремо не є розв'язком рівняння Гамільтона – Якобі (7.15). Однак у фазовому просторі зі змінними y_1 і y_2 існують області значень цих змінних, у кожній з яких один вираз (7.18) буде розв'язком рівняння (7.15). Знайдемо ці області. Для цього підставимо одержаний у (7.18) час $T(\vec{Y})$ у рівняння Гамільтона – Якобі (7.15):

$$y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(2\sqrt{0,5y_2^2 - y_1 - y_2} \right) - \left| \frac{\partial}{\partial y_2} \left(2\sqrt{0,5y_2^2 - y_1 - y_2} \right) \right| = -1,$$

*Докладне розв'язання рівнянь (7.16), (7.17) наведено в додатку Б.

$$\begin{aligned}
y_2 \cdot 2 \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} (-1) - \left| 2 \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} 0,5 \cdot 2y_2 - 1 \right| &= -1, \\
\left(-\frac{y_2}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} + 1 \right) - \left| \frac{y_2}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} - 1 \right| &= 0, \\
\left(\frac{y_2}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} - 1 \right) + \left| \frac{y_2}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} - 1 \right| &= 0. \quad (7.19)
\end{aligned}$$

Оскільки другий доданок у (7.19) завжди ≥ 0 , то перший доданок повинен бути ≤ 0 , тобто

$$\frac{y_2}{\sqrt{0,5y_2^2 - y_1}} - 1 \leq 0, \text{ або } y_2 \leq \sqrt{0,5y_2^2 - y_1}. \quad (7.20)$$

Розглянемо цю умову у двох випадках: коли $y_2 > 0$ та $y_2 < 0$.

У випадку $y_2 > 0$ зведемо (7.20) у квадрат:

$$y_2^2 \leq 0,5y_2^2 - y_1, \text{ або } y_1 + 0,5y_2^2 \leq 0. \quad (7.21)$$

У випадку $y_2 < 0$ умова (7.20) виконується, якщо вираз під коренем невід'ємний, тобто

$$0,5y_2^2 - y_1 \geq 0, \text{ або } y_1 - 0,5y_2^2 \leq 0. \quad (7.22)$$

Порівнюючи (7.21) з (7.22), можна записати, що

$$y_1 + 0,5y_2^2 \text{sign}\{y_2\} \leq 0. \quad (7.23)$$

Вираз (7.23) одержано, якщо $\bar{u} = +1$.

При y_1 та y_2 , які не задовольняють (7.23), $\bar{u} = -1$. Отже, $\bar{u} = -1$, якщо

$$y_1 + 0,5y_2^2 \text{sign}\{y_2\} \geq 0. \quad (7.24)$$

Із (7.23), (7.24) бачимо, що межа розподілу між областями $\bar{u} = -1$ та $\bar{u} = +1$ описується співвідношенням

$$y_1 + 0,5y_2^2 \text{sign}\{y_2\} = 0 \quad (7.25)$$

і називається лінією перемикання.

Нерівності (7.23) і (7.24) формують кінцевий алгоритм роботи оптимальної за швидкістю замкненої системи: вимірюють величини y_1 і y_2 , обчислюють функцію $y_1 + 0,5y_2^2 \text{sign}\{y_2\}$. Якщо вона додатна, то беруть $\bar{u} = -1$, якщо від'ємна $-\bar{u} = +1$.

Тоді вираз для оптимального керування можна записати у вигляді

$$\bar{u}(\bar{Y}) = -\text{sign}\{y_1 + 0,5y_2^2 \text{sign}\{y_2\}\}. \quad (7.26)$$

Зобразимо структурну схему оптимальної системи керування об'єктом другого порядку (рис. 7.3). Для цього використовуємо рівняння стану (7.13) і вираз для оптимального керування (7.26). Обладнанням, що реалізує функцію сигнума (sign), є релейний елемент (PE).

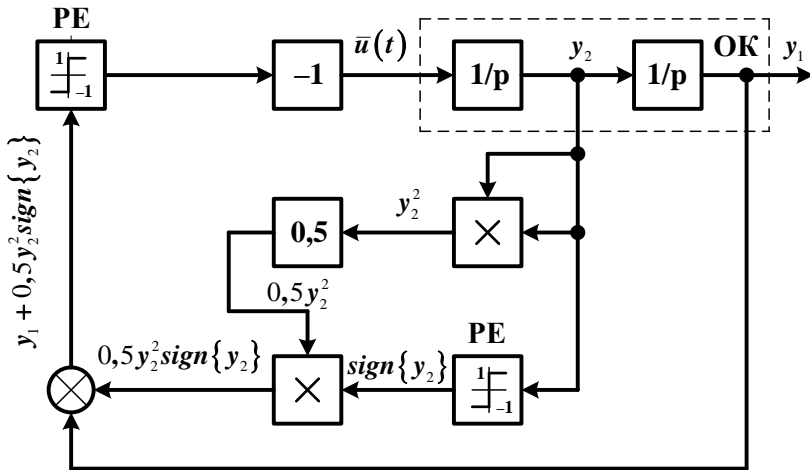


Рисунок 7.3 – Структурна схема оптимальної системи керування об'єктом другого порядку

7.4. Принцип максимуму в задачі про максимальну швидкодiю

Як і у випадку динамічного програмування, для простоти розглянемо задачу про максимальну швидкодiю для лінійного об'єкта, описуваного рівнянням стану:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Y}(t)}{dt} &= A\vec{Y}(t) + B\vec{U}(t), \\ \psi_i &= \frac{dy_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k(t). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Через стаціонарність (лінійність) рівняння (7.27) змінну y_{n+1} із властивостями (6.3) можна не вводити. Немає також причин для введення змінної y_0 із властивостями (6.4), тому що в задачі про максимальну швидкодiю $G=1$ і не залежить від керування \vec{U} .

Запишемо принцип максимуму (6.22) через функцію Гамільтона (6.21) з урахуванням (7.27):

$$\begin{aligned} H = \vec{P}^T(t)\vec{\Psi}(\vec{Y}(t), \vec{U}(t)) &= \sum_{i,j=1}^n p_i(t)a_{ij}y_j(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_i(t)b_{ik}u_k(t) = \max_{-c_k \leq u_k \leq c_k} . \end{aligned} \quad (7.28)$$

Від керувань $u_k(t)$ залежить лише друга група доданків у складі (7.28), тоді принцип максимуму набере такої форми:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_i(t)b_{ik}u_k(t) = \max_{-c_k \leq u_k \leq c_k} . \quad (7.29)$$

Ця умова (7.29) повинна виконуватися для кожного керування $u_k(t)$, $k = \overline{1, m}$, унаслідок цього можна записати

$$u_k(t) \sum_{i=1}^n p_i(t)b_{ik} = \max_{-c_k \leq u_k \leq c_k} , \quad k = \overline{1, m}. \quad (7.30)$$

Умова (7.30) за існуванні обмежень на керування $|u_k(t)| \leq C_k$ виконується, якщо $u_k(t) = C_k$ при $\sum_{i=1}^n p_i(t)b_{ik} > 0$,

або $u_k(t) = -C_k$ при $\sum_{i=1}^n p_i(t)b_{ik} < 0$.

Звідси випливає, що

$$\bar{u}_k(t) = C_k \operatorname{sign} \left\{ \sum_{i=1}^n p_i(t)b_{ik} \right\}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (7.31)$$

Таким чином, у задачі про максимальну швидкодію у випадку застосування принципу максимуму, як і за динамічного програмування, оптимальне керування $\bar{u}_k(t)$ може набувати двох значень: C_k або $-C_k$ залежно від функції $\sum_{i=1}^n p_i(t)b_{ik}$

$\left(\sum_{i=1}^n b_{ik} \frac{\partial T(\vec{Y})}{\partial y_i} \right)$ – за динамічного програмування).

Як бачимо з (7.31), для знаходження конкретного керування необхідно знати компоненти $p_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ вектора $\vec{P}(t)$. З цією метою складають систему спряжених рівнянь (6.26) з урахуванням лінійності рівняння (7.27):

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} p_j(t) = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial (a_{ji} y_j)}{\partial y_i} p_j(t) = - \sum_{j=1}^n a_{ji} p_j(t), \quad (7.32)$$

$$j = \overline{1, n}.$$

Тут ураховано, що $\frac{\partial (b_{ik} u_k)}{\partial y_i} = 0$.

Таким чином, функцію $p_i(t)$ можна знайти із системи однорідних лінійних рівнянь, які не залежать від керування $u(t)$ та стану у об'єкта керування.

Однак, якщо не задають ні початкове $\vec{P}(0)$, ні кінцеве $\vec{P}(T)$ значення вектора $\vec{P}(t)$, таку систему розв'язати не можна. У цьому випадку початкове значення вектора $\vec{P}(0)$ вибирають довільно. Із (7.32) знаходять компоненти вектора $\vec{P}(t)$ і підставляють у вираз для оптимального керування $\bar{u}_k(t)$ (7.31). Після обчислення керування $\bar{U}(t)$ його підставляють у рівняння стану лінійного об'єкта (7.27), звідси знаходять вектор стану $\vec{Y}(t)$, обумовлений оптимальним керуванням $\bar{U}(t)$ і початковим станом $\vec{Y}(0)$.

Якщо можна підібрати таке T , за якого $\vec{Y}(T) = 0$, то початкове значення $\vec{P}(0)$ виявилось правильним, а знайдене керування $\bar{U}(t)$ – оптимальним. Якщо $\vec{Y}(T) \neq 0$, то вибирається інше початкове значення вектора $\vec{P}(0)$. Послідовний пошук оптимального керування здійснюють за допомогою ЕОМ.

У деяких випадках знайти оптимальне керування можна не розв'язуючи систему спряжених рівнянь (7.32).

У векторній формі рівняння (7.32) набере вигляду

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = -A^T \vec{P}(t). \quad (7.33)$$

У загальному випадку розв'язок рівняння (7.32) можна подати, використовуючи формулу Ейлера:

$$p_i(t) = C_{i1}e^{s_1t} + C_{i2}e^{s_2t} + \dots + C_{ij}e^{s_jt} = \sum_{j=1}^n C_{ij}e^{s_jt}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (7.34)$$

де C_{ij} – сталі інтегрування;

s_j – додатні корені характеристичного рівняння, визначені із системи спряжених рівнянь:

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = -A^T \vec{P}(t), \quad (7.35)$$

де $\vec{P}(t) = Ce^{st}$.

Після підставлення $\vec{P}(t) = Ce^{st}$ в (7.35) маємо $sCe^{st} + A^T Ce^{st} = 0$. Після скорочення на множник Ce^{st} одержимо характеристичне рівняння

$$|sE + A^T| = 0, \quad (7.36)$$

де E – одинична матриця;

s – комплексна змінна.

Визначивши корені характеристичного рівняння s_j та сталі інтегрування C_{ij} , можна одержати вираз для оптимального керування $\bar{u}_k(t)$:

$$\bar{u}_k(t) = C_k \operatorname{sign} \left\{ \sum_{j=1}^n d_{jk} e^{s_j t} \right\}, \quad k = \overline{1, m}, \quad (7.37)$$

де $d_{jk} = \sum_{i=1}^n C_{ij} b_{ik}$ – деяка константа.

Схематично зміну оптимального керування $\bar{u}_k(t)$ можна подати у вигляді графіка (рис. 7.4), як і у випадку динамічного програмування, лише тут моменти часу перемикання оптимального керування відповідають кореням характеристичного рівняння s_j .

Із рисунка 7.4 бачимо, що оптимальне керування $\bar{u}_k(t)$ є кусково-сталою функцією, що має на інтервалі керування не більше $(n-1)$ точок розриву, у яких воно переходить з однієї межі області допустимих керувань на іншу. Інакше кажучи, оптимальне керування $\bar{u}_k(t)$ має не більше ніж n інтервалів сталості, а кількість перемикань керування $\bar{u}_k(t)$ не перевищує $(n-1)$. Цю властивість називають теоремою про n інтервалів (доведена Фельдбаумом).

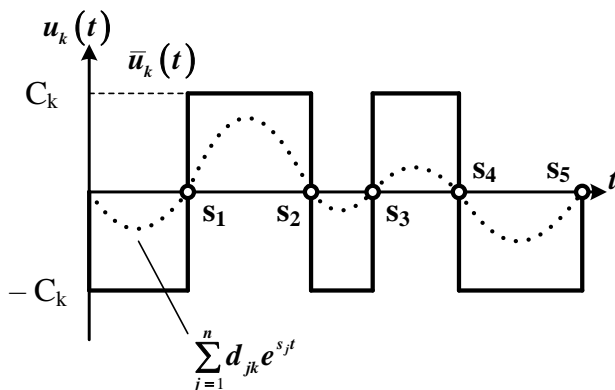


Рисунок 7.4 – Графік перемикання оптимального керування $\bar{u}_k(t)$

Теорема про n інтервалів: якщо кількість дійсних коренів характеристичного рівняння об'єкта дорівнює n , то кількість перемикань кожного з керувань $\bar{u}_1(t)$, $\bar{u}_2(t)$, ..., $\bar{u}_k(t)$ не перевищує $(n - 1)$.

Запитання для самоперевірки

1. Як формулюють задачу про максимальну швидкодію?
2. За яких умов можна застосовувати метод динамічного програмування в задачі про максимальну швидкодію?
3. Як одержати і який має вигляд вираз для оптимального керування при використанні методу динамічного програмування в задачі про максимальну швидкодію?
4. Яким чином одержують вираз для оптимального керування одновимірним об'єктом другого порядку в задачі про максимальну швидкодію методом динамічного програмування? Синтезувати схему.
5. У чому полягає методика визначення оптимального керування лінійного об'єкта для максимальної швидкодії за принципом максимуму?

6. Як визначити оптимальне керування в задачі про максимальну швидкість за принципом максимуму, не розв'язуючи систему спряжених рівнянь? Який вигляд має графік функції $\bar{u}_k(t)$?

7. Сформулюйте теорему про n інтервалів. Покажіть її застосування на графіку $\bar{u}_k(t)$.

ТЕМА 8. ЗАДАЧА АНАЛІТИЧНОГО КОНСТРУЮВАННЯ РЕГУЛЯТОРІВ

8.1. Постановлення задачі

Після визначення закону оптимального керування наступним кроком є вибір структури пристроїв керування та їх параметрів, тобто *синтез автоматичних систем*. При синтезі автоматичних систем може бути задана або не задана структура або деяка частина структури пристрою керування. Відповідно задача синтезу полягає у визначенні параметрів і структури пристроїв керування за необхідності. Спочатку синтез автоматичних систем здійснювали проектувальники без якихось загальних формальних правил на підставі досвіду й інженерної інтуїції. При цьому досить рідко вдавалося налаштувати автоматичні системи на оптимальний режим.

Уперше в СРСР єдині формальні правила для синтезу оптимальних автоматичних систем розробив А. М. Летов. Відповідний підхід названий аналітичним конструюванням регуляторів (АКР). За кордоном аналогічні основні роботи пов'язані з ім'ям Калмана.

Під *аналітичним конструюванням регуляторів* (АКР) розуміють проблему аналітичного знаходження алгоритму роботи пристрою керування замкненої системи, що забезпечує найкращу якість системи (на підставі загальних формальних правил) за рахунок визначення критерію якості, описуваного функціоналом, який фізично характеризує точність роботи системи й енергетичні витрати на керування.

Існує досить велика кількість задач АКР. Розглянемо деякі найбільш прості приклади.

Приклад 1. Нехай лінійний нестационарний об'єкт описується рівняннями стану

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A(t)\vec{Y}(t) + B(t)\vec{U}(t), \quad (8.1)$$

$$\vec{Z}(t) = C(t)\vec{Y}(t), \quad (8.2)$$

де A , B , C – матриці розмірами $n \times n$, $n \times m$ та $l \times n$ відповідно;

$\vec{Y}(t)$, $\vec{U}(t)$, $\vec{Z}(t)$ – n -, m - та l -вимірний вектори стану, керування та виходу відповідно.

Нехай задано бажаний вихідний вектор $\vec{Z}_o(t)$. Необхідно за мінімальних витрат на керування $\vec{U}(t)$ одержати реальний вихідний сигнал $\vec{Z}(t)$, близький до бажаного $\vec{Z}_o(t)$. Інакше кажучи, головними умовами в таких задачах є не лише збіг реальних вихідних параметрів $\vec{Z}(t)$ із бажаними $\vec{Z}_o(t)$, а й мінімальність витрат на керування.

Відхилення реальних вихідних параметрів $\vec{Z}(t)$ від бажаних $\vec{Z}_o(t)$ називають *помилкою керування* $\vec{\varepsilon}(t)$:

$$\vec{\varepsilon}(t) = \vec{Z}_o(t) - \vec{Z}(t).$$

Для якісної роботи проектованої системи необхідне виконання таких умов:

1) мінімальність помилки керування $\vec{\varepsilon}(T)$ у кінцевий момент часу $t = T$;

2) невеликі помилки керування $\vec{\varepsilon}(t)$ у процесі керування, $t_0 \leq t \leq T$;

3) мінімальні витрати енергії на керування (мінімальна вартість керування).

Частіше для опису якості роботи системи використовують узагальнений критерій, що враховує ці вимоги:

$$J = 0,5 \vec{\varepsilon}^T(T) F \vec{\varepsilon}(T) + 0,5 \int_{t_0}^T \left[\vec{\varepsilon}^T(t) Q(t) \vec{\varepsilon}(t) + \vec{U}^T(t) R(t) \vec{U}(t) \right] dt, \quad (8.3)$$

де F , $Q(t)$ – стала та нестационарна додатно напіввизначені $l \times l$ -матриці відповідно;

$R(t)$ – нестационарна додатно визначена $m \times m$ -матриця.

Нагадаємо, що матрицю називають *додатно напіввизначеною*, якщо вона симетрична ($L(t) = L^T(t)$) і за будь-якого ненульового вектора \vec{X} ($\vec{X} \neq 0$) виконується нерівність $\vec{X}^T L(t) \vec{X} \geq 0$. Якщо за тих самих умов виконується строга нерівність $\vec{X}^T L(t) \vec{X} > 0$, то матрицю $L(t)$ називають *додатно визначеною*.

Рекомендується вибирати матриці F , $Q(t)$ і $R(t)$ діагональними, з елементами, пропорційними максимально допустимим значенням величин $[y_i(T)]^2$, $[y_i(t)]^2$ та $[u_i(t)]^2$ відповідно. Тому АКР у цьому разі називають синтезом оптимальних систем керування за *квадратичним критерієм якості*.

Таким чином, задача АКР полягає в пошуку такого керування $\vec{U}(\vec{Y}(t))$ і відповідної йому траєкторії $\vec{Y}(t)$, за яких критерій якості J (8.3) досягає найменшого значення.

Таку задачу АКР називають *задачею спостереження*, тому що для неї необхідно, щоб реальний вихід $\vec{Z}(t)$ щонайкраще, з позиції критерію якості J (другий доданок у (8.3)), стежив за зміною бажаного вихідного сигналу $\vec{Z}_o(t)$.

Перевага задачі спостереження – висока точність спостереження поєднується з малими витратами на спостереження (третій доданок у (8.3)).

Приклад 2. Якщо в задачі спостереження $\vec{Z}_o(t) = 0$, то таку задачу називають *задачею про регулятор виходу*, а критерій якості (8.3) набере форми

$$J = 0,5 \vec{Z}^T(T) F \vec{Z}(T) +$$

$$+ 0,5 \int_{t_0}^T [\bar{Z}^T(t)Q(t)\bar{Z}(t) + \bar{U}^T(t)R(t)\bar{U}(t)] dt. \quad (8.4)$$

Метою задачі про регулятор виходу є втримання вихідних координат об'єкта $\bar{Z}(t)$ поблизу нуля. Якщо початкове відхилення вихідних координат $\bar{Z}(t_0)$ від нуля велике, то керувальний пристрій повинен наблизити його до нуля й надалі втримувати близько до нуля, не витрачаючи багато енергії на керування.

Приклад 3. У ряді випадків важливо близьким до нуля втримувати не сигнал на виході ОК, а всі компоненти вектора стану $\bar{Y}(t)$. Якщо $\bar{Y}_o(t) = 0$, то задачу називають *задачею про регулятор стану* $\bar{Y}(t)$.

Критерій якості для задачі про регулятор стану має вигляд

$$J = 0,5 \bar{Y}^T(T) F \bar{Y}(T) + 0,5 \int_{t_0}^T [\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) + \bar{U}^T(t)R(t)\bar{U}(t)] dt. \quad (8.5)$$

Опис такої задачі аналогічний опису задачі про регулятор виходу, необхідно лише замінити $\bar{Z}(t)$ на $\bar{Y}(t)$.

Приклад 4. Для стаціонарного лінійного об'єкта, який описується рівнянням стану

$$\dot{\bar{Y}}(t) = A\bar{Y}(t) + B\bar{U}(t), \quad (8.6)$$

критерій якості записують у вигляді

$$J = 0,5 \int_{t_0}^{\infty} [\bar{Y}^T(t)Q\bar{Y}(t) + \bar{U}^T(t)R\bar{U}(t)] dt, \quad (8.7)$$

де A , B , Q та R – незалежні від часу матриці.

При цьому на керування $\bar{U}(t)$ обмежень не накладено, а задається обмеження на кінцевий стан об'єкта у формі

$\lim_{x \rightarrow \infty} \vec{Y}(t) = 0$ (умова стійкості), еквівалентне асимптотичній стійкості проектованої системи.

Тоді задача зводиться до пошуку такого керування $\vec{U}(\vec{Y}(t))$, під дією якого критерій (8.7) досягне найменшого значення при виконанні умови асимптотичної стійкості.

Розглянуті приклади задач АКР можна поширити й на нелінійні об'єкти.

8.2. Синтез регуляторів за жорстко заданої структури

Як зазначалося вище (п. 8.1), при синтезі автоматичних систем проектувальник вибирає структуру та параметри пристроїв керування. Зупинимось на найбільш простому випадку синтезу, якщо структура вже вибрана, а необхідно лише підібрати її параметри.

Розглянемо одновимірний стаціонарний лінійний об'єкт, який описується рівняннями стану

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A\vec{Y}(t) + \vec{B}u(t), \quad z(t) = C^T\vec{Y}(t) \quad (8.8)$$

і включений у систему керування так, як показано на рис. 8.1.

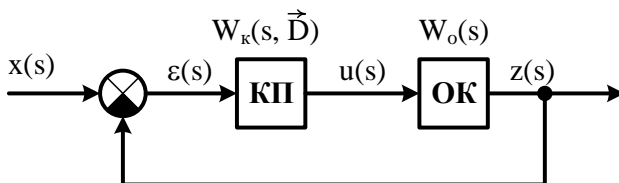


Рисунок 8.1 – Схема автоматичного керування одновимірним стаціонарним лінійним об'єктом

Нехай передавальна функція керувального пристрою (КП) $W_k(s, \vec{D})$ задана, де \vec{D} – вектор варіативних параметрів. Для стаціонарного одновимірного об'єкта квадратичний критерій якості (8.7) можна записати у вигляді

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt. \quad (8.9)$$

Необхідно підібрати так варіативні параметри \vec{D} , щоб виконувалася умова

$$J = \min_{\vec{D}}. \quad (8.10)$$

Визначимо складові $\varepsilon^2(t)$ та $u^2(t)$ критерію якості (8.9).

Із рисунка 8.1 бачимо, що сигнал неузгодженості (помилка регулювання)

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= x(s) - z(s) = x(s) - \varepsilon(s)W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s), \\ \varepsilon(s)(1 + W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s)) &= x(s), \\ \varepsilon(s) &= \frac{x(s)}{(1 + W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s))} = \frac{N_{\varepsilon}(s)}{M(s)}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Аналогічно знаходимо $u(s)$:

$$u(s) = \varepsilon(s)W_{\kappa}(s, \vec{D}) = \frac{x(s)W_{\kappa}(s, \vec{D})}{(1 + W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s))} = \frac{N_u(s)}{M(s)}. \quad (8.12)$$

Передавальну функцію об'єкта керування $W_o(s)$ можна визначити з рівнянь стану (8.8), записавши їх в операторній формі:

$$\begin{aligned} s\vec{Y}(s) &= A\vec{Y}(s) + \vec{B}u(s), \quad z(s) = C^T\vec{Y}(s). \\ (sE - A)\vec{Y}(s) &= \vec{B}u(s), \end{aligned}$$

де E – одинична матриця розмірності n ;

$\vec{Y}(s)$, $u(s)$ та $z(s)$ – відповідні зображення.

Тоді передавальна функція ОК набере вигляду

$$W_o(s) = \frac{z(s)}{u(s)} = \frac{C^T\vec{Y}(s)}{(sE - A)\vec{Y}(s)}\vec{B} = \frac{C^T\vec{B}}{sE - A}.$$

З урахуванням того, що в критерії якості (8.9) використовують функції часу t , то для переходу з операторної форми скористаємося зворотним перетворенням Лапласа:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{N_\varepsilon(s)}{M(s)} e^{st} ds,$$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} u(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{N_u(s)}{M(s)} e^{st} ds.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^\infty \varepsilon(t) \left[\int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) e^{st} ds \right] dt = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) \left[\int_0^\infty \varepsilon(t) e^{st} dt \right] ds. \end{aligned}$$

$$\text{Із прямого перетворення Лапласа } \int_0^\infty \varepsilon(t) e^{st} dt = \varepsilon(-s)$$

випливає, що

$$\int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \varepsilon(s) \varepsilon(-s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{N_\varepsilon(s) N_\varepsilon(-s)}{M(s) M(-s)} ds. \quad (8.13)$$

Вираз (8.13) називають *формулою Парсеваля*.

За аналогією

$$\int_0^\infty u^2(t) dt = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} u(s) u(-s) ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \frac{N_u(s) N_u(-s)}{M(s) M(-s)} ds. \quad (8.14)$$

Інтеграли (8.13), (8.14) обчислюють за допомогою методів теорії функцій комплексного змінного та виражають через коефіцієнти поліномів $N_\varepsilon(s)$, $N_u(s)$, $M(s)$ таким чином.

Подамо поліном $M(s)$ у вигляді

$$M(s) = m_0 s^p + m_1 s^{p-1} + \dots + m_p = \sum_{i=0}^p m_i s^{(p-i)},$$

а добуток $N_\varepsilon(s) N_\varepsilon(-s)$ у вигляді

$$N_\varepsilon(s) N_\varepsilon(-s) = g_0 s^{(2p-2)} + g_1 s^{(2p-4)} + \dots + g_{p-1} s^{(2p-2p)} =$$

$$= \sum_{i=0}^p g_i s^{2(p-(1+i))}.$$

Тоді інтеграл (8.13) можна обчислити за формулою

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt = \frac{(-1)^{p+1} \Delta'_\varepsilon}{2m_0 \Delta}, \quad (8.15)$$

$$\text{де } \Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{p1} & \delta_{p2} & \dots & \delta_{pp} \end{vmatrix}; \quad \delta_{qr} = m_{2q-r}, \quad m_q = 0 \quad - \text{ визначник } i$$

його елементи.

Визначник Δ'_ε впливає із визначника Δ заміною елементів першого стовпця величинами g_0, g_1, \dots, g_{p-1} .

Аналогічно обчислюють інтеграл (8.14).

Визначивши інтеграли (8.14) та (8.15), можна знайти критерій якості (8.9) як функцію від варіативних параметрів \vec{D} . З умови мінімальності (8.10) критерію J за відсутності обмежень на \vec{D} оптимальні параметри $\vec{\bar{D}}$ можна визначити з рівняння

$$\frac{\partial J(\vec{\bar{D}})}{\partial \vec{\bar{D}}} = 0.$$

8.3 Синтез регуляторів методом варіаційного числення

Розглянемо одновимірний стаціонарний об'єкт, описуваний рівняннями (8.8) і наведений у вигляді функціональної схеми рис. 8.2.

Нехай передавальна функція КП $W_\kappa(s, \vec{D})$ не задана. Необхідно знайти її так, щоб критерій якості (8.9) досягав мінімального значення, а система в цілому була фізично здійсненою (аналогічно стійкій). Для цього будемо вважати,

що передавальна функція $W_o(s)$ має нулі та полюси лише в лівій півплощині*.

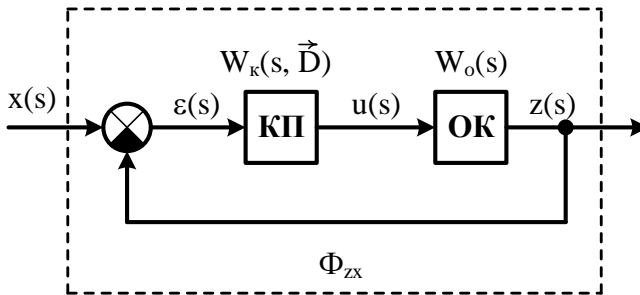


Рисунок 8.2 – Функціональна схема автоматичного керування одновимірним стаціонарним об’єктом

План розв’язання задачі такий: спочатку зв’яжемо критерій якості J з передавальною функцією $\Phi_{zx}(s)$ для замкненої системи в цілому; потім знайдемо таку фізично здійсненну функцію $\Phi_{zx}(s)$, на якій критерій J досягає мінімуму, після чого, скориставшись зв’язком між $\Phi_{zx}(s)$ та $W_k(s, \vec{D})$, $W_o(s)$, обчислимо шукану функцію $W_k(s, \vec{D})$.

*Будь-яку передавальну функцію можна подати у вигляді відношення поліномів
$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$
.

Якщо чисельник прирівняти до нуля та знайти корені полінома, то ці корені називають *полюсами*; якщо знайти корені для знаменника, то їх називають *нулями*. Щоб система була стійкою, необхідно, щоб полюси та нулі перебували в лівій півплощині. Знаючи полюси r_m та нулі s_n , передавальну функцію можна

записати у вигляді
$$W(s) = \frac{b_m (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_m)}{a_n (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}$$
.

Запишемо передавальну функцію $\Phi_{zx}(s)$ для замкненої системи. З урахуванням того, що $\Phi_{zx}(s) = \frac{z(s)}{x(s)}$,

$z(s) = \varepsilon(s)W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s)$ та $x(s) = \varepsilon(s)(1 + W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s))$ (8.11), передавальна функція $\Phi_{zx}(s)$ набере вигляду

$$\Phi_{zx}(s) = \frac{W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s)}{1 + W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s)}. \quad (8.16)$$

Із (8.16) визначимо шукану функцію $W_{\kappa}(s, \vec{D})$:

$$\Phi_{zx}(s) + \Phi_{zx}(s)W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s) = W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s),$$

$$\Phi_{zx}(s) = W_{\kappa}(s, \vec{D})W_o(s)(1 - \Phi_{zx}(s)).$$

Звідси

$$W_{\kappa}(s, \vec{D}) = \frac{\Phi_{zx}(s)}{W_o(s)(1 - \Phi_{zx}(s))}. \quad (8.17)$$

Із (8.17) бачимо, що для одержання кінцевого виразу передавальної функції пристрою керування $W_{\kappa}(s, \vec{D})$ необхідно знати лише передавальну функцію $\Phi_{zx}(s)$, за якої критерій якості J (8.9) набуває мінімального значення. Для цього знайдемо зв'язок між критерієм J та функцією $\Phi_{zx}(s)$.

Оскільки $J = 0,5 \int_0^{\infty} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt$, виразимо $\varepsilon(s)$, $u(s)$

через функцію $\Phi_{zx}(s)$ і, використовуючи формули Парсеваля (8.13), (8.14), запишемо вираз для критерію якості.

Підставивши $\Phi_{zx}(s)$ (8.16) та $W_{\kappa}(s)$ (8.17) у вираз (8.11), одержимо

$$\begin{aligned}\varepsilon(s) &= \frac{x(s)}{\left(1 + W_\kappa(s, \bar{D})W_o(s)\right)} = \frac{x(s)\Phi_{zx}(s)}{W_\kappa(s, \bar{D})W_o(s)} = \\ &= x(s)(1 - \Phi_{zx}(s));\end{aligned}\quad (8.18)$$

$$u(s) = \varepsilon(s)W_\kappa(s, \bar{D}) = \frac{x(s)(1 - \Phi_{zx}(s))\Phi_{zx}(s)}{W_o(s)(1 - \Phi_{zx}(s))} = \frac{x(s)\Phi_{zx}(s)}{W_o(s)}.$$

Використаємо формули Парсеваля (8.13), (8.14):

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \varepsilon(s)\varepsilon(-s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} x(s)x(-s)[1 - \Phi_{zx}(s)][1 - \Phi_{zx}(-s)] ds, \\ \int_0^\infty u^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} u(s)u(-s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{x(s)x(-s)\Phi_{zx}(s)\Phi_{zx}(-s)}{W_o(s)W_o(-s)} ds.\end{aligned}$$

З урахуванням цих виразів критерій J (8.9) набере вигляду

$$\begin{aligned}J &= 0,5 \int_0^\infty [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt = \frac{1}{4\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} x(s)x(-s) \times \\ &\times \left[q(1 - \Phi_{zx}(s))(1 - \Phi_{zx}(-s)) + r \frac{\Phi_{zx}(s)\Phi_{zx}(-s)}{W_o(s)W_o(-s)} \right] ds.\end{aligned}\quad (8.19)$$

Для мінімізації критерію якості J (8.19) візьмемо частинну похідну від підінтегральної функції (8.19) за змінною $\Phi_{zx}(s)$ і прирівняємо до нуля. Внаслідок цього одержуємо рівняння, подібне до рівняння Ейлера.

На підставі (8.19) можна сформулювати *теорему оптимізації*: для того щоб функціонал J (8.19) на функції $\Phi_{zx}(s)$, що задовольняє умови фізичного існування (полноси та нулі функції $\Phi_{zx}(s)$ перебувають у лівій півплощині), досягав

екстремального значення, необхідно та достатньо, щоб частинна похідна від підінтегральної функції (8.19) за $\Phi_{zx}(-s)$ мала лише праві полюси.

Продиференціювавши підінтегральну функцію (8.19) за $\Phi_{zx}(-s)$, одержимо

$$x(s)x(-s)\left[-q(1-\Phi_{zx}(s))+r\frac{\Phi_{zx}(s)}{W_o(s)W_o(-s)}\right]=\theta(-s), \quad (8.20)$$

де $\theta(-s)$ – деяка функція, що має праві полюси.

Для того щоб (8.20) виконувалося за будь-яких аргументів s , необхідно, щоб сума доданків ліворуч, які мають праві полюси, дорівнювала функції $\theta(-s)$, а сума доданків із лівими полюсами дорівнювала нулю. Розкладемо ліву частину (8.20) на доданки з лівими та правими полюсами:

$$\begin{aligned} \frac{x(s)x(-s)}{W_o(s)W_o(-s)}\left[-qW_o(s)W_o(-s)+qW_o(s)W_o(-s)\Phi_{zx}(s)+\right. \\ \left.+r\Phi_{zx}(s)\right]=\theta(-s), \\ \frac{x(s)}{W_o(s)}\left[\Phi_{zx}(s)\left[qW_o(s)W_o(-s)+r\right]-qW_o(s)W_o(-s)\right]= \\ =\frac{\theta(-s)W_o(-s)}{x(-s)}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Далі введемо нову функцію

$$\Psi(s)\Psi(-s)=qW_o(s)W_o(-s)+r, \quad (8.22)$$

де функція $\Psi(s)$ має ліві особливі точки (полюси та нулі), а $\Psi(-s)$ – праві особливі точки. Перехід (8.22) називають *факторизацією*.

Підставивши (8.22) в (8.21), одержимо

$$\frac{x(s)}{W_o(s)}\left[\Phi_{zx}(s)\Psi(s)\Psi(-s)-qW_o(s)W_o(-s)\right]=\frac{\theta(-s)W_o(-s)}{x(-s)},$$

$$\frac{x(s)\Phi_{zx}(s)\Psi(s)}{W_o(s)} - \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} = \frac{\theta(-s)W_o(-s)}{x(-s)\Psi(-s)}. \quad (8.23)$$

Із (8.23) бачимо, що перший доданок ліворуч має лише ліві особливі точки, доданок праворуч – лише праві особливі точки, а другий доданок ліворуч – і ліві, і праві особливі точки.

Подамо другий доданок ліворуч $\frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)}$ у формі

двох доданків, що мають лише ліві (зі знаком «+») та лише праві (зі знаком «-») особливі точки:

$$\frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} = \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_+ + \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_-. \quad (8.24)$$

Таку операцію називають *розщеплюванням*.

Після проведення операції розщеплюванням (8.24) вираз (8.23) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{x(s)\Phi_{zx}(s)\Psi(s)}{W_o(s)} - \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_+ - \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_- = \\ = \frac{\theta(-s)W_o(-s)}{x(-s)\Psi(-s)}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Оскільки функція праворуч має лише праві полюси, то рівність (8.25) справедлива, якщо сума доданків ліворуч, що має ліві полюси, дорівнює нулю. Таким чином,

$$\frac{x(s)\Phi_{zx}(s)\Psi(s)}{W_o(s)} - \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_+ = 0,$$

звідси впливає шуканий вираз для передавальної функції замкненої системи

$$\Phi_{zx}(s) = \frac{W_o(s)}{x(s)\Psi(s)} \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_+, \quad (8.26)$$

що має лише ліві полюси, тобто відповідає умові фізичної здійсненності системи.

Знаючи функцію $\Phi_{zx}(s)$, на підставі (8.17) одержимо вираз для шуканої передавальної функції пристрою керування $W_{\kappa}(s, \vec{D})$.

8.4. Аналітичне конструювання регуляторів методом динамічного програмування

Розглянемо розв'язування задач АКР методом динамічного програмування на прикладі задачі про регулятор стану.

Нехай лінійний нестационарний об'єкт описується рівнянням стану (8.1):

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A(t)\vec{Y}(t) + B(t)\vec{U}(t).$$

За критерій якості використовуємо (8.5):

$$J = 0,5\vec{Y}^T(T)F\vec{Y}(T) + 0,5\int_{t_0}^T [\vec{Y}^T(t)Q(t)\vec{Y}(t) + \vec{U}^T(t)R(t)\vec{U}(t)] dt.$$

За стандартною методикою (див. п. 5.3) записуємо рівняння Беллмана (5.21):

$$-\frac{\partial S(\vec{Y}(t), t)}{\partial t} = \min_{\vec{U} \in \Omega(\vec{U})} \left\{ G(\vec{U}(t), \vec{Y}(t), t) + \frac{\partial S(\vec{Y}(t), t)}{\partial \vec{Y}} \vec{\Psi}(\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t) \right\}.$$

Позначимо через S мінімальне значення критерію якості J :

$$S(\vec{Y}(t), t) = \min_{\vec{U}} \left\{ 0,5\vec{Y}^T(T)F\vec{Y}(T) + 0,5\int_t^T [\vec{Y}^T(t)Q(t)\vec{Y}(t) + \vec{U}^T(t)R(t)\vec{U}(t)] dt \right\} =$$

$$= \min_{\vec{U}} \left\{ 0,5 \vec{Y}^T(T) F \vec{Y}(T) + 0,5 \int_0^T G(\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t) dt \right\}, \quad (8.27)$$

$$\text{де } G(\vec{Y}(t), \vec{U}(t), t) = 0,5 \left[\vec{Y}^T(t) Q(t) \vec{Y}(t) + \vec{U}^T(t) R(t) \vec{U}(t) \right]$$

– підінтегральна функція.

Ураховуючи це, рівняння Беллмана набере вигляду

$$-\frac{\partial S(\vec{Y}(t), t)}{\partial t} = \min_{\vec{U}} \left\{ 0,5 \vec{Y}^T(t) Q(t) \vec{Y}(t) + 0,5 \vec{U}^T(t) \times \right. \\ \left. \times R(t) \vec{U}(t) + \frac{\partial S(\vec{Y}(t), t)}{\partial \vec{Y}} \left[A(t) \vec{Y}(t) + B(t) \vec{U}(t) \right] \right\}. \quad (8.28)$$

Подальша техніка пошуку оптимального керування для рівняння Беллмана у формі (8.28) повністю збігається з методикою (див. п. 5.3) для рівняння Беллмана (5.21).

1. На керування $\vec{U}(t)$ обмежень не накладено, тому оптимальне керування шукаємо з умови рівності нулю часткової похідної за $\vec{U}(t)$ від поданого у фігурних дужках рівняння (8.28):

$$\vec{U}^T(t) R(t) + \frac{\partial S(\vec{Y}(t), t)}{\partial \vec{Y}} B(t) = 0.$$

Звідси визначаємо, що

$$\vec{\bar{U}}(t) = -\frac{B^T(t)}{R(t)} \left[\frac{\partial S(\vec{Y}(t), t)}{\partial \vec{Y}} \right]^T. \quad (8.29)$$

2. Щоб знайти функцію $S(\vec{Y}(t), t)$, необхідно підставити $\vec{\bar{U}}(t)$ (8.29) у вираз у фігурних дужках рівняння Беллмана (8.28) й одержати рівняння типу Гамільтона – Якобі, що не залежить від керування $\vec{U}(t)$:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial t} &= 0,5\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) - 0,5\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}}B(t)\bar{U}(t) + \\
&+ \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}}B(t)\bar{U}(t) + \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}}A(t)\bar{Y}(t) = \\
&= 0,5\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) + 0,5\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}}B(t) \times \\
&\times \left(-\frac{B^T(t)}{R(t)} \left[\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}} \right]^T \right) + \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}}A(t)\bar{Y}(t).
\end{aligned}$$

Рівняння Гамільтона – Якобі набере вигляду

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial t} &= 0,5\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) - 0,5\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}} \times \\
&\times \frac{B(t)}{R(t)}B^T(t) \left[\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}} \right]^T + \frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}}A(t)\bar{Y}(t). \quad (8.30)
\end{aligned}$$

3. Виберемо граничні умови. Із (8.27) бачимо, що при $t = T$

$$S(\bar{Y}(T), T) = 0,5\bar{Y}^T(T)F\bar{Y}(T). \quad (8.31)$$

При $t \neq T$ введемо поки що невідому симетричну нестационарну $n \times n$ матрицю $K(t)$, за якої виконується рівність

$$S(\bar{Y}(t), t) = 0,5\bar{Y}^T(t)K(t)\bar{Y}(t), \quad (8.32)$$

причому $K(T) = F$.

Оскільки $\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial t} = 0,5\bar{Y}^T(t)\dot{K}(t)\bar{Y}(t)$, а $\frac{\partial S(\bar{Y}(t), t)}{\partial \bar{Y}} = \bar{Y}^T(t)K(t)$, то, підставивши (8.32) у рівняння Гамільтона – Якобі (8.30), одержимо

$$-0,5\bar{Y}^T(t)\dot{K}(t)\bar{Y}(t) = 0,5\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) - 0,5\bar{Y}^T(t)K(t) \times$$

$$\times \frac{B(t)}{R(t)} B^T(t) K(t) \bar{Y}(t) + \bar{Y}^T(t) K(t) A(t) \bar{Y}(t). \quad (8.33)$$

Надалі для простоти не будемо записувати залежність від часу t .

Оскільки $\bar{Y}^T K A \bar{Y} = 0, 5 \bar{Y}^T K A \bar{Y} + 0, 5 \bar{Y}^T K A^T \bar{Y}$, то рівняння (8.33) запишемо у формі

$$0, 5 \bar{Y}^T \bar{Y} \left(\dot{K} + Q - K \frac{B}{R} B^T K + K A + A^T K \right) = 0.$$

Ця умова виконується за будь-яких станів $\bar{Y}(t)$, якщо вираз у дужках дорівнює нулю, тобто

$$\dot{K} + Q - K \frac{B}{R} B^T K + K A + A^T K = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\dot{K} = -K A - A^T K + K \frac{B}{R} B^T K - Q. \quad (8.34)$$

Унаслідок цього одержали нелінійне квадратичне щодо матриці $K(t)$ диференціальне рівняння, назване *матричним рівнянням Ріккати*.

У працях Калмана доведено, що для стаціонарних об'єктів можна ввести матрицю $\lim_{T \rightarrow \infty} K(T) = \hat{K}$, де \hat{K} – стала симетрична додатно визначена матриця. Ця матриця визначається з рівняння Ріккати, у якому необхідно вважати $\dot{K}(t) = 0$. Тоді нелінійне матричне рівняння Ріккати набере вигляду

$$\hat{K} A + A^T \hat{K} - \hat{K} \frac{B}{R} B^T \hat{K} + Q = 0. \quad (8.35)$$

Рівняння Ріккати в основному розв'язується за допомогою ЕОМ, починаючи з $t = T$ і вважаючи, що $K(T) = F$. Для цього припускають, що

$$\dot{K}(t) \approx \frac{[K(t + \Delta t) - K(t)]}{\Delta t},$$

де Δt – малий приріст часу.

Це дозволяє подати рівняння Ріккати (8.34) у такій формі:

$$K(t + \Delta t) \approx K(t) + \Delta t \left\{ -K(t)A(t) - A^T(t)K(t) + \right. \\ \left. + K(t) \frac{B(t)}{R(t)} B^T(t)K(t) - Q(t) \right\}.$$

4. Знайшовши матрицю $K(t)$, можна за формулою (8.32) визначити $S(\bar{Y}(t), t)$ і потім, підставивши його у вираз (8.29), знаходимо оптимальне керування $\bar{U}(t)$.

8.5. Аналітичне конструювання регуляторів за принципом максимуму

Розглянемо розв'язування задачі АКР за допомогою принципу максимуму Понтрягіна. Нехай лінійний нестационарний об'єкт описується рівнянням стану (8.1):

$$\dot{\bar{Y}}(t) = A(t)\bar{Y}(t) + B(t)\bar{U}(t).$$

Необхідно визначити оптимальне керування, для якого критерій якості має вигляд (8.5):

$$J = 0,5\bar{Y}^T(T)F\bar{Y}(T) + 0,5 \int_{t_0}^T [\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) + \bar{U}^T(t)R(t)\bar{U}(t)] dt.$$

Згідно з методикою розв'язування задач за принципом максимуму (див. п. 6.1) введемо нову змінну

$$y_0(t) = 0,5\bar{Y}^T(t)F\bar{Y}(t) + \\ + 0,5 \int_{t_0}^t [\bar{Y}^T(t)Q(t)\bar{Y}(t) + \bar{U}^T(t)R(t)\bar{U}(t)] dt, \quad (8.36)$$

що задовольняє умову $y_0(T) = J$, та змінну $y_{n+1}(t) = t$,

обумовлену виразом (6.3): $\frac{dy_{n+1}(t)}{dt} = \Psi_{n+1} = 1$.

Відповідно до загальної ідеології методу пошук розв'язку починаємо зі складання функції Гамільтона (6.21) для модифікованого вектора стану $\tilde{Y}(t)$:

$$\begin{aligned} H\left(\tilde{P}^T(t), \tilde{Y}(t), \tilde{U}(t)\right) &= \tilde{P}^T(t) \tilde{\Psi}\left(\tilde{Y}(t), \tilde{U}(t)\right) = \\ &= p_0 \psi_0 + \tilde{P}^T(t) \tilde{\Psi}\left(\tilde{Y}(t), \tilde{U}(t)\right) + p_{n+1} \psi_{n+1}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\text{де } \tilde{P} = (p_0, p_1, \dots, p_{n+1})^T; \quad \tilde{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T.$$

Компоненти ψ_0 , $\tilde{\Psi}\left(\tilde{Y}(t), \tilde{U}(t)\right)$, ψ_{n+1} функції $\tilde{\Psi}\left(\tilde{Y}(t), \tilde{U}(t)\right)$ можна знайти з рівнянь (6.4), (8.1) та (6.3) відповідно.

Унаслідок підставлення (8.36) в (6.4) одержимо

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \frac{dy_0(t)}{dt} = 0,5\left(\dot{\tilde{Y}}^T(t) F \tilde{Y}(t) + \tilde{Y}^T(t) F \dot{\tilde{Y}}(t)\right) + \\ &+ 0,5\left(\tilde{Y}^T(t) Q(t) \tilde{Y}(t) + \tilde{U}^T(t) R(t) \tilde{U}(t)\right) = \\ &= 0,5\left(\dot{\tilde{Y}}^T(t) F \tilde{Y}(t) + \tilde{Y}^T(t) F \dot{\tilde{Y}}(t) + \right. \\ &\left. + \tilde{Y}^T(t) Q(t) \tilde{Y}(t) + \tilde{U}^T(t) R(t) \tilde{U}(t)\right) \end{aligned} \quad (8.38)$$

за умови, що

$$y_0(0) = 0,5 \tilde{Y}^T(0) F \tilde{Y}(0),$$

де $\tilde{Y}(0)$ – початковий стан об'єкта.

Для лінійного нестационарного об'єкта (8.1) $\dot{\tilde{Y}}(t) = A(t) \tilde{Y}(t) + B(t) \tilde{U}(t)$. Надалі для компактності не будемо записувати залежність від часу t . Тоді

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 0,5\left(\left(A \tilde{Y} + B \tilde{U}\right)^T F \tilde{Y} + \tilde{Y}^T F \left(A \tilde{Y} + B \tilde{U}\right) + \right. \\ &\left. + \tilde{Y}^T Q \tilde{Y} + \tilde{U}^T R \tilde{U}\right). \end{aligned} \quad (8.39)$$

З урахуванням (8.39) та (8.1) функцію Гамільтона (8.37) перепишемо так:

$$H = p_0 \cdot 0,5 \left((A\bar{Y} + B\bar{U})^T F\bar{Y} + \bar{Y}^T F (A\bar{Y} + B\bar{U}) + \bar{Y}^T Q\bar{Y} + \bar{U}^T R\bar{U} \right) + \bar{P}^T (A\bar{Y} + B\bar{U}) + p_{n+1}. \quad (8.40)$$

Оскільки на керування $\bar{U}(t)$ обмежень не накладено, то оптимальне керування знаходимо з умови $\frac{\partial H}{\partial \bar{U}} = 0$, яку можна записати в розгорненій формі:

$$p_0 (0,5B^T F\bar{Y} + 0,5B^T F\bar{Y} + R\bar{U}) + B^T \bar{P} = 0, \quad (8.41)$$

$$p_0 R\bar{U} = -B^T (p_0 F\bar{Y} + \bar{P}).$$

Звідси випливає, що

$$\bar{U} = -\frac{B^T}{p_0 R} (\bar{P} + p_0 F\bar{Y}) = -\frac{B^T}{R} \left(\frac{\bar{P}}{p_0} + F\bar{Y} \right). \quad (8.42)$$

Таким чином, для визначення оптимального керування \bar{U} необхідно знати змінні $p_0(t)$ та $\bar{P}(t)$. Як зазначалося в п. 6.3, компоненти вектора $\bar{P}(t)$ можна знайти із системи спряжених рівнянь (6.26):

$$\frac{d}{dt} p_i(t) = -\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} p_j(t).$$

$\dot{p}_0(t) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y_0} p_0 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial y_0} p_j - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y_0} p_{n+1} = 0$, оскільки ψ_0 , ψ_j та ψ_{n+1} згідно з (6.4), (6.1) та (6.3) не залежать від змінної y_0 , а є функцією від змінних $\bar{Y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\bar{U}(t)$ та t .

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y_i} p_0 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} p_j - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y_i} p_{n+1}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$\dot{p}_{n+1}(t) = -\frac{\partial \psi_0}{\partial y_{n+1}} p_0 - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial y_{n+1}} p_j - \frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y_{n+1}} p_{n+1}.$$

Із першого рівняння випливає, що $p_0(t) = \text{const}$.

Використовуючи граничну умову (6.15) $p_0(T) = -1$, одержимо, що $p_0(t) = -1$. Оскільки $\psi_{n+1} = 1$, то $\frac{\partial \psi_{n+1}}{\partial y_i} = 0$, отже,

останній доданок у другому й третьому рівняннях теж дорівнює нулю. Враховуючи, що у виразі для оптимального керування (8.42), крім p_0 , є вектор \vec{P} з n компонентами, то для визначення компонентів p_i , $i = \overline{1, n}$ досить n рівнянь. Тоді систему спряжених рівнянь можна записати у вигляді

$$\dot{p}_i(t) = \frac{\partial \psi_0}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_j}{\partial y_i} p_j, \quad i = \overline{1, n}$$

або у векторній формі

$$\dot{\vec{P}}(t) = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \vec{Y}} \right)^T - \left(\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{Y}} \right)^T \vec{P}(t). \quad (8.43)$$

Знайдемо перший та другий доданки у (8.43) з урахуванням (8.39):

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \vec{Y}} \right)^T = A^T F \vec{Y} + F A \vec{Y} + F B \vec{U} + Q \vec{Y}.$$

Із (8.1) випливає, що $\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial \vec{Y}} = A$.

Тоді система спряжених рівнянь набере вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\vec{P}}(t) = & (A^T(t)F + FA(t) + Q(t))\vec{Y}(t) + \\ & + FB(t)\vec{U}(t) - A^T(t)\vec{P}(t), \end{aligned} \quad (8.44)$$

де $\vec{U} = \frac{B^T(t)}{R(t)}(\vec{P}(t) - F\vec{Y}(t))$, оскільки $p_0 = -1$.

Для лінійного об'єкта зв'язок між $\vec{P}(t)$ та $\vec{Y}(t)$ також повинен бути лінійним. Для цього введемо поки що невідому матрицю $K(t)$ і запишемо, що

$$\vec{P}(t) = K(t)\vec{Y}(t) + F\vec{Y}(t) = [K(t) + F]\vec{Y}(t). \quad (8.45)$$

З урахуванням (8.45) оптимальне керування $\vec{U} = \frac{B^T(t)}{R(t)} K(t)\vec{Y}(t)$, а систему (8.44) перепишемо у формі

$$\begin{aligned} \dot{K}(t)\vec{Y}(t) + \dot{\vec{Y}}(t)[K(t) + F] &= [A^T(t)F + A(t)F + Q(t)]\vec{Y}(t) - \\ &- A^T(t)[K(t) + F]\vec{Y}(t) + \frac{FB(t)B^T(t)}{R(t)}K(t)\vec{Y}(t), \end{aligned} \quad (8.46)$$

де $\dot{\vec{Y}}(t)$ можна визначити з рівняння стану (8.1):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{Y}}(t) &= A(t)\vec{Y}(t) + \frac{B(t)B^T(t)}{R(t)}K(t)\vec{Y}(t) = \\ &= \left(A(t) + \frac{B(t)B^T(t)}{R(t)}K(t) \right) \vec{Y}(t). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Унаслідок підставлення виразу (8.47) в (8.46) одержимо

$$\begin{aligned} &\left[\dot{K}(t) + [K(t) + F] \left(A(t) + \frac{B(t)B^T(t)}{R(t)}K(t) \right) \right] \vec{Y}(t) = \\ &= \left[A^T(t)F + A(t)F + Q(t) - A^T(t)[K(t) + F] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{FB(t)B^T(t)}{R(t)}K(t) \right] \vec{Y}(t). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{aligned} \dot{K} &= A^T F + AF + Q - A^T K - A^T F + \frac{BFB^T}{R} K - KA - \\ &- K \frac{BB^T}{R} K - FA - \frac{BFB^T}{R} K. \end{aligned}$$

Унаслідок цього одержимо, що

$$\dot{K} = -KA - KA^T - K \frac{BB^T}{R} K + Q. \quad (8.48)$$

Одержане рівняння (8.48) із точністю до знаків збігається з рівнянням Ріккати (8.34).

Оскільки для задачі з вільним правим кінцем траєкторії та фіксованим часом T $\vec{P}(T) = 0$, то згідно з (8.45) $\vec{P}(T) = \vec{Y}(t)[K(T) + F] = 0$ одержимо граничну умову

$$K(T) = -F. \quad (8.49)$$

Унаслідок цього вираз для оптимального керування набере вигляду

$$\vec{U} = \frac{B^T(t)}{R(t)} K(t) \vec{Y}(t),$$

де $K(t)$ визначається з рівняння Ріккати (8.48) при граничній умові (8.49).

Приклади розв'язування задач до теми 8

Приклад 8.1. Нехай задані передавальні функції керувального пристрою $W_\kappa(s) = \frac{k_\kappa T}{(Ts + 1)}$, об'єкта керування

$W_o(s) = \frac{k_o}{s}$, задавальний вплив $x(t) = 1(t)$ (рис. 8.1) та критерій

$$\text{якості } J = 0,5 \int_0^\infty [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt.$$

Визначити оптимальне значення параметра T .

Розв'язання. Використовуючи пряме перетворення Лапласа, запишемо $x(s) = \frac{1}{s}$.

Відповідно до (8.11) і (8.12) знайдемо вирази для сигналів неузгодженості $\varepsilon(s)$ та керування $u(s)$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(s) &= \frac{x(s)}{1 + W_\kappa(s, T) \cdot W_o(s)} = \frac{1}{s \left(1 + \frac{k_\kappa T}{Ts + 1} \cdot \frac{k_o}{s} \right)} = \\ &= \frac{1}{s \left(\frac{s(Ts + 1) + k_\kappa T k_o}{s(Ts + 1)} \right)} = \frac{(Ts + 1)}{Ts^2 + s + k_\kappa T k_o}, \\ u(s) &= \varepsilon(s) W_\kappa(s, T) = \frac{(Ts + 1)}{(Ts^2 + s + k_\kappa k_o T)} \cdot \frac{k_\kappa T}{(Ts + 1)} = \\ &= \frac{k_\kappa T}{(Ts^2 + s + k_\kappa k_o T)}.\end{aligned}$$

Отже, поліном (5.10) $M(s) = m_0 s^p + m_1 s^{p-1} + m_p =$
 $= Ts^2 + s + k_\kappa k_o T$, $p = 2$, $m_0 = T$, $m_1 = 1$, $m_2 = k_\kappa k_o T$, а поліном
(5.11) $N_\varepsilon(s) N_\varepsilon(-s) = 1 - (Ts)^2$, $g_0 = -T^2$, $g_1 = 1$.

Аналогічно для керування $u(s)$: поліном
 $N_u(s) N_u(-s) = (k_\kappa T)^2$, $g_0 = 0$, $g_1 = (k_\kappa T)^2$.

За допомогою (8.15) вираховуємо інтеграли
 $\int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt = \frac{(-1)^{p+1}}{2m_0} \frac{\Delta'_\varepsilon}{\Delta}$ та $\int_0^\infty u^2(t) dt = \frac{(-1)^{p+1}}{2m_0} \frac{\Delta'_u}{\Delta}$.

Знайдемо елементи визначника Δ :

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= m_{2-1} = m_1 = 1, \quad \delta_{12} = m_{2-2} = m_0 = T, \\ \delta_{21} &= m_{4-1} = m_3 = 0, \quad \delta_{22} = m_{4-2} = m_2 = k_\kappa k_o T.\end{aligned}$$

$$\text{Тоді визначники } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & T \\ 0 & k_\kappa k_o T \end{vmatrix} = k_\kappa k_o T,$$

$$\Delta'_\varepsilon = \begin{vmatrix} -T^2 & T \\ 1 & k_\kappa k_o T \end{vmatrix} = -T(k_\kappa k_o T^2 + 1), \quad \Delta'_u = \begin{vmatrix} 0 & T \\ k_\kappa^2 T^2 & k_\kappa k_o T \end{vmatrix} = -k_\kappa^2 T^3.$$

$$\text{Отже, } \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt = \frac{(k_\kappa k_o T^2 + 1)T}{2T \cdot k_\kappa k_o T} = \frac{1 + k_\kappa k_o T^2}{2k_\kappa k_o T},$$

$$\int_0^{\infty} u^2(t) dt = \frac{k_{\kappa}^2 T^3}{2T \cdot k_{\kappa} k_o T} = \frac{k_{\kappa} T}{2k_o}.$$

Визначивши інтеграли від сигналів неузгодженості $\varepsilon(s)$ та керування $u(s)$, запишемо вираз для критерію якості:

$$\begin{aligned} J(T) &= 0,5 \left[q \frac{1 + k_{\kappa} k_o T^2}{2k_{\kappa} k_o T} + r \frac{k_{\kappa} T}{2k_o} \right] = \\ &= \frac{1}{4k_o} \left[(rk_{\kappa} + qk_o)T + \frac{q}{k_{\kappa} T} \right]. \end{aligned}$$

Для знаходження оптимального значення параметра T візьмемо частинну похідну від підінтегральної функції критерію J за змінною T та прирівняємо до нуля:

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T} = \frac{1}{4k_o} \left[rk_{\kappa} + qk_o - \frac{q}{k_{\kappa} T^2} \right] = 0.$$

Звідси випливає, що $\bar{T} = \sqrt{\frac{q}{k_{\kappa} (rk_{\kappa} + qk_o)}}$.

Приклад 8.2. Нехай об'єкт керування описують передавальною функцією $W_o(s) = \frac{k_o}{s}$, задавальний вплив – $x(t) = 1(t)$.

Методом варіаційного числення визначити передавальну функцію керувального пристрою $W_{\kappa}(s)$, за якого критерій якості $J = 0,5 \int_0^{\infty} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt$ набуває мінімального значення.

Розв'язання. Передавальною функцією керувального пристрою можна записати у вигляді (8.17):

$$W_{\kappa}(s) = \frac{\Phi_{zx}(s)}{W_o(s)(1 - \Phi_{zx}(s))}.$$

Передавальну функцію замкненої системи $\Phi_{zx}(s)$ можна визначити з (8.26):

$$\Phi_{zx}(s) = \frac{W_o(s)}{x(s)\Psi(s)} \left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_+$$

Для визначення функції Ψ виконаємо операцію факторизації (8.22):

$$\begin{aligned} q \frac{k_o}{s} \left(\frac{k_o}{-s} \right) + r &= \frac{(\sqrt{qk_o})^2 - (\sqrt{rs})^2}{s(-s)} = \\ &= \left(\frac{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}}{s} \right) \left(\frac{\sqrt{qk_o} + \sqrt{r}(-s)}{-s} \right) = \Psi(s)\Psi(-s). \end{aligned}$$

$$\text{Звідси бачимо, що } \Psi(s) = \frac{\sqrt{qk_o} + \sqrt{rs}}{s}.$$

Використовуючи пряме перетворення Лапласа, можна записати, що $x(s) = \frac{1}{s}$.

Із виразу у фігурних дужках $\frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)}$ знайдемо

доданок, який має лише ліві полюси. Для цього скористаємося методом розкладення на елементарні дроби:

$$\begin{aligned} \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} &= \frac{qk_o(-s)}{s(-s)(k_o\sqrt{q} + (-s)\sqrt{r})} = \frac{qk_o}{s(k_o\sqrt{q} + (-s)\sqrt{r})} = \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{(k_o\sqrt{q} + (-s)\sqrt{r})} = \frac{Ak_o\sqrt{q} + s(B - A\sqrt{r})}{s(k_o\sqrt{q} + (-s)\sqrt{r})}. \end{aligned}$$

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} B - A\sqrt{r} = 0, \\ Ak_o\sqrt{q} = qk_o; \end{cases} \quad \begin{cases} B = \sqrt{qr}, \\ A = \sqrt{q}. \end{cases}$$

$$\text{Отже, } \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} = \frac{\sqrt{q}}{s} + \frac{\sqrt{qr}}{(k_o\sqrt{q} + (-s)\sqrt{r})}.$$

З останнього виразу бачимо, що перший доданок має лише ліві полюси, другий – праві полюси, тобто

$$\left\{ \frac{qx(s)W_o(-s)}{\Psi(-s)} \right\}_+ = \frac{\sqrt{q}}{s}.$$

$$\text{Тоді } \Phi_{zx}(s) = \frac{k_o\sqrt{q}}{(k_o\sqrt{q} + s\sqrt{r})},$$

$$\text{а } W_x(s) = \frac{\sqrt{qs}}{(\sqrt{q}k_o + \sqrt{r}s - \sqrt{q}k_o)} = \frac{\sqrt{qs}}{\sqrt{rs}} = \sqrt{\frac{q}{r}}.$$

Приклад 8.3. Нехай об'єкт керування описують рівнянням $\ddot{z} + a\dot{z} = bu$.

Методом динамічного програмування розрахувати оптимальне керування \bar{u} та синтезувати керувальний пристрій,

за якого критерій якості $J = \int_0^{\infty} \left(\sum_i q_i y_i^2 + \sum_k r_k u_k^2 \right) dt$ буде

досягати мінімального значення.

Розв'язання. Запишемо рівняння об'єкта у формі Коші, використовуючи спосіб 5, описаний у темі 2:

$$y_1 = z, \quad \dot{y}_1 = y_2 = \dot{z}, \quad \dot{y}_2 = \ddot{z} = -ay_2 + bu.$$

Перейдемо до матрично-векторної форми запису.

Згідно з (8.1) $a_{11} = a_{21} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = -a$, $b_{11} = 0$, $b_{21} = b$.

Тоді рівняння стану в матричній формі запишемо так:

$$\dot{\vec{Y}}(t) = A\vec{Y}(t) + \vec{B}u(t), \text{ або } \begin{vmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} u.$$

З урахуванням уведених змінних стану y_1 та y_2 критерій якості набере вигляду $J = \int_0^{\infty} (q_1 y_1^2 + q_2 y_2^2 + r u^2) dt$. Звідси бачимо,

що $q_{11} = q_1$, $q_{12} = q_{21} = 0$, $q_{22} = q_2$, оскільки Q є діагональною матрицею. Отже, $J = \int_0^{\infty} \left(\begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \end{vmatrix} + ru \right) dt$.

Згідно з (8.32) уводимо симетричну нестационарну $n \times n$ -матрицю $K(t) = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix}$, компоненти якої визначаються з рівняння Ріккати (8.35):

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^T K + Q = 0.$$

Запишемо це рівняння в матричній формі:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{r} \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} 0 & k_{11} - a \cdot k_{12} \\ 0 & k_{21} - a \cdot k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k_{11} - a \cdot k_{21} & k_{12} - a \cdot k_{22} \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{r} \begin{vmatrix} b \cdot k_{12} \\ b \cdot k_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & b \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки матриця $K(t)$ є симетричною, то $k_{12} = k_{21}$.

Отже, одержимо, що

$$\begin{vmatrix} 0 & k_{11} - a \cdot k_{12} \\ 0 & k_{21} - a \cdot k_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k_{11} - a \cdot k_{21} & k_{12} - a \cdot k_{22} \end{vmatrix} - \\ - \frac{b^2}{r} \begin{vmatrix} k_{12}^2 & k_{12} k_{22} \\ k_{12} k_{22} & k_{22}^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Це рівняння виконується, якщо кожний елемент сумарної матриці у лівій частині рівняння Ріккати дорівнює нулю, тобто

$$\begin{aligned}
& 0 + 0 - \frac{b^2}{r} k_{12}^2 + q_1 = 0, \\
& (k_{11} - ak_{12}) + 0 - \frac{b^2}{r} k_{12} k_{22} + 0 = 0, \\
& 0 + (k_{11} - ak_{12}) + 0 - \frac{b^2}{r} k_{12} k_{22} + 0 = 0, \\
& (k_{12} - ak_{22}) + (k_{12} - ak_{22}) - \frac{b^2}{r} k_{22}^2 + q_2 = 0.
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} 0 + 0 - \frac{b^2}{r} k_{12}^2 + q_1 = 0, \\ (k_{11} - ak_{12}) + 0 - \frac{b^2}{r} k_{12} k_{22} + 0 = 0, \\ 0 + (k_{11} - ak_{12}) + 0 - \frac{b^2}{r} k_{12} k_{22} + 0 = 0, \end{aligned}} \right\} \text{однакові}$$

Компоненти матриці $K(t)$ можна знайти із системи трьох рівнянь із трьома невідомими k_{11} , $k_{12} = k_{21}$ та k_{22} .

$$\begin{cases}
q_1 - \frac{b^2}{r} k_{12}^2 = 0, \\
k_{11} - ak_{12} - \frac{b^2}{r} k_{12} k_{22} = 0, \\
k_{12} - ak_{22} + k_{12} - ak_{22} - \frac{b^2}{r} k_{22}^2 + q_2 = 0; \\
k_{12} = \frac{\sqrt{q_1 r}}{b}, \\
k_{11} = k_{12} \left(a + \frac{b^2}{r} k_{22} \right), \\
k_{22}^2 + \frac{2ar}{b^2} k_{22} - \frac{r}{b^2} (2k_{12} + q_2) = 0.
\end{cases}$$

Із третього рівняння можна знайти компоненту k_{22} , розв'язавши квадратне рівняння:

$$\begin{aligned}
& k_{22}^2 + \frac{2ar}{b^2} k_{22} - \left(\frac{2r\sqrt{q_1 r}}{b^3} + \frac{q_2 r}{b^2} \right) = 0, \\
& D = \left(\frac{2ar}{b^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{2r\sqrt{q_1 r}}{b^3} + \frac{q_2 r}{b^2} \right),
\end{aligned}$$

$$k_{22} = -\frac{a r}{b^2} \pm \sqrt{\left(\frac{a r}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{2r\sqrt{q_1 r}}{b^3} + \frac{q_2 r}{b^2}\right)}.$$

Система буде стійкою, якщо $k_{22} > 0$.

$$k_{22} = -\frac{a r}{b^2} + \frac{\sqrt{r}}{b} \sqrt{a^2 r + \frac{2}{b} \sqrt{q_1 r} + q_2}.$$

Із другого рівняння системи знайдемо компоненту k_{11} :

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\sqrt{q_1 r}}{b} \left(a - a + \frac{b^2 \sqrt{r}}{r b} \sqrt{a^2 r + \frac{2}{b} \sqrt{q_1 r} + q_2} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{q_1 r} b^2}{b^2 r} \sqrt{a^2 r + \frac{2}{b} \sqrt{q_1 r} + q_2} = \sqrt{q_1} \sqrt{a^2 r + \frac{2}{b} \sqrt{q_1 r} + q_2}. \end{aligned}$$

Знаючи задані за умовою задачі коефіцієнти a , b , q_1 , q_2 та r , не складно підрахувати значення компонент k_{11} , k_{12} , k_{22} . Підставивши їх значення у вираз для оптимального керування (5.26), одержимо

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{B^T}{R} K(t) \vec{Y}(t) = -\frac{1}{r} \begin{vmatrix} 0 & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{r} \begin{vmatrix} b k_{12} \\ b k_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \end{vmatrix} = -\frac{b}{r} (k_{12} y_1 + k_{22} y_2). \end{aligned}$$

Отже, $\bar{u}(y_1, y_2) = -\frac{b}{r} (k_{12} y_1 + k_{22} y_2)$.

Зобразимо структурну схему (рис. 8.3):

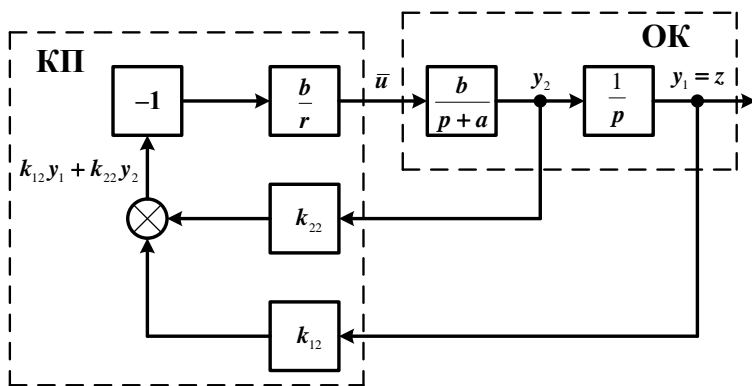


Рисунок 8.3 – Структурна схема системи керування

Запитання для самоперевірки

1. Що таке синтез автоматичних систем, АКР?
2. Постановлення задачі АКР і критерій якості для лінійних нестационарних об'єктів у задачі спостереження.
3. Які особливості задач АКР і критеріїв якості для лінійних нестационарних об'єктів у задачах про регулятори виходу та стану?
4. У чому полягає задача АКР для лінійного стаціонарного об'єкта? Як визначається критерій якості в цьому разі?
5. Яка методика синтезу регуляторів за жорстко заданою структурою? Як одержують формулу Парсевалія?
6. Як здійснюється синтез регуляторів методами варіаційного числення? Сформулюйте теорему оптимізації. Що таке операції факторизації та розщеплення?
7. Яке застосування методу динамічного програмування для АКР? Як можна одержати рівняння Ріккаті?
8. Яким чином можна одержати рівняння Ріккаті та вираз для оптимального керування при АКР, використовуючи принцип максимуму?

РОЗДІЛ 2 АДАПТИВНІ СИСТЕМИ

ТЕМА 9. ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ СИНТЕЗУ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ

Для синтезу оптимальних систем необхідно мати певні відомості про об'єкт керування й умови роботи системи. Але в багатьох реальних ситуаціях або немає початкових відомостей про властивості ОК та зовнішні впливи, або вони змінюються в процесі функціонування. У цьому разі система повинна автоматично заповнювати відсутню інформацію та у міру її надходження сама змінювати структуру та параметри КП так, щоб показник якості досягав екстремального значення або відповідав заданим обмеженням. Системи, які за зміни властивостей ОК та зовнішніх впливів пристосовуються до нових умов за рахунок зміни структури та параметрів КП або деякої його частини так, щоб показник якості щоразу досягав екстремального значення, або перебував у заданому діапазоні, називають *адаптивними*.

Процес зміни структури та параметрів КП, що здійснюється на підставі інформації про властивості ОК та зовнішні впливи для досягнення оптимального стану системи за початкової невизначеності та змінних умов роботи, називають *адаптацією*.

Якщо в адаптивній системі (АС) невідома лише початкова інформація про властивості ОК та зовнішні впливи, а після їх визначення структура й параметри КП не змінюються, то таку адаптацію називають *однократною*. Якщо корекція КП здійснюється щоразу за зміни властивостей ОК і зовнішніх впливів, то таку адаптацію називають *багаторазовою*.

9.1. Класифікація адаптивних систем

Класифікація адаптивних систем може бути різною залежно від ознак, покладених в її основу.

1. *За зміною структури та параметрів КП* адаптивні системи поділяють на:

- самоналагоджувальні системи (СНС) – адаптація відбувається лише за рахунок зміни параметрів КП;
- самоорганізовані системи – адаптація досягається за рахунок зміни структури КП.

Найпоширенішими є самоналагоджувальні системи (СНС). Зазвичай для опису якості СНС вводять показник якості самоналагоджування.

2. *За вимогами, що ставляться до якості керування*, СНС поділяють на:

- СНС зі стабілізацією якості;
- СНС з оптимізацією якості.

У першому випадку СНС підтримують незмінним заданий рівень якості при зміні властивостей ОК та зовнішніх впливів; у другому випадку показник якості повинен досягати оптимального значення за всіх можливих умов роботи системи.

3. *За способом визначення варіативних параметрів КП* СНС поділяють на:

- аналітичні;
- пошукові.

В аналітичних СНС значення параметрів розраховують на підставі аналітичного аналізу умов, за яких показник якості набуде оптимального або незмінного значення.

У пошукових СНС за рахунок пробних впливів, які подаються на вхід системи, викликають відхилення параметрів КП, після цього вимірюють зміну показника якості самоналагоджування. Змінюючи параметри КП, домагаються, щоб показник якості самоналагоджування або був сталим (за стабілізації якості), або набував оптимального значення (за оптимізації якості).

За одночасного використання пошукових і аналітичних СНС їх називають комбінованими.

4. *За способом самоналагоджування* СНС поділяють на:

- СНС із самоналагоджуванням за зовнішніми впливами;
- СНС із самоналагоджуванням за характеристиками ОК.

У першому випадку налагоджування відбувається за змінних зовнішніх впливів і незмінних параметрів ОК, у другому – за змінних параметрів ОК і незмінних зовнішніх впливів.

9.2. Схеми адаптивних систем

Узагальнену схему адаптації (рис. 9.1) можна умовно зобразити у вигляді дворівневої конструкції, нижній рівень якої являє основну систему керування (КП + ОК), а верхній рівень – пристрій адаптації (ПА), що є сукупністю пристроїв, використовуваних для цілеспрямованої зміни властивостей основної системи відповідно до сформульованих цілей адаптації.

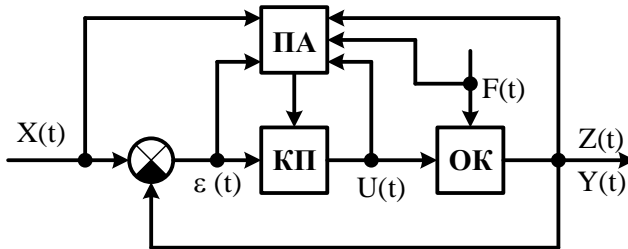


Рисунок 9.1 – Узагальнена схема адаптації

Розглянемо принцип роботи адаптивної системи. Пристрій адаптації (ПА), одержуючи необхідну інформацію про корисний сигнал $X(t)$, зовнішній вплив $F(t)$, стан системи $Y(t)$ та сигнали керування на вході ОК $U(t)$, аналізує її та, порівнявши з вимогами до показника якості, виробляє сигнал, під дією якого змінюються структура та параметри (або лише параметри) КП так, щоб критерій якості відповідав вимогам.

Структура АС проектується на підставі одного із двох підходів:

- 1) прямого (безідентифікаційного);
- 2) ідентифікаційного.

При прямому підході (рис. 9.2 а) у складі ідеального КП передбачена група варіативних параметрів, що дозволяють адаптуватися системі за зміни властивостей ОК і зовнішніх впливів. При цьому аналізуються не вхідний сигнал $X(t)$ та зовнішній вплив $F(t)$, а результат їх впливу на ОК, тобто вихідні стани системи $Y(t)$, $Z(t)$ та помилка регулювання $\varepsilon(t)$. ПА реагує на відхилення вихідних параметрів від заданих (не аналізуючи вхідних $X(t)$ та $F(t)$), змінюючи варіативні параметри КП за зміни властивостей ОК та зовнішніх впливів так, щоб показник якості був або незмінним (для СНС зі стабілізацією якості), або набував оптимального значення (для СНС з оптимізацією якості). У цій схемі адаптації властивості ОК та зовнішні впливи не визначаються. Реалізація безідентифікаційного підходу приводить до адаптивних систем з еталонною моделлю.

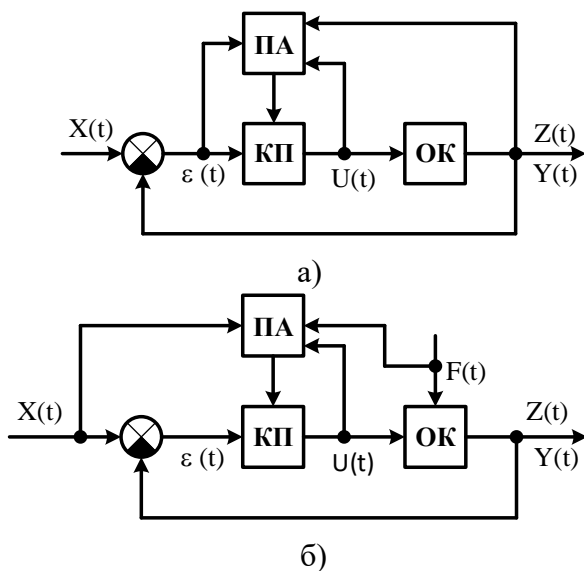


Рисунок 9.2 – Схеми адаптації за різних підходів:
 а) за безідентифікаційного підходу;
 б) за ідентифікаційного підходу

За ідентифікаційного підходу (рис. 9.2 б) визначають параметри та характеристики корисного сигналу $X(t)$ та зовнішнього впливу $F(t)$. За певним алгоритмом пристрій адаптації аналізує ці параметри та вираховує оптимальні значення параметрів керувального пристрою, після чого ПА змінює реальні параметри КП, щоб вони дорівнювали оптимальним значенням. Реалізація ідентифікаційного підходу приводить до адаптивних систем із налагоджувальною моделлю.

Запитання для самоперевірки

1. Які системи називають адаптивними? Які їх особливості? Що називають однократною та багаторазовою адаптаціями?
2. Як класифікують адаптивні системи? Чим вони відрізняються?
3. Які існують підходи та схеми адаптивних систем?

ТЕМА 10. АНАЛІТИЧНІ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНІ СИСТЕМИ ЗІ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ

10.1. Самоналагоджувальна система з еталонною моделлю

Застосування моделі в СНС дозволяє спростити структуру СНС. Залежно від призначення моделі СНС поділяють на два великі класи:

- СНС з еталонною моделлю;
- СНС із налагоджувальною моделлю.

Якщо вплив зовнішнього середовища на характеристики об'єкта відомий, а параметри КП змінюються за попередньо одержаними законами, то використовують СНС з еталонною моделлю. У цьому випадку модель є заданим еталоном бажаних властивостей реальної системи, який не змінюється, якщо діапазон зміни параметрів впливу незначний. У протилежному разі еталонна модель перебудовується, і для певного діапазону зміна параметрів залишається незмінною. При використанні еталонної моделі один з одним порівнюють не параметри та характеристики контуру КП + ОК, а вихідні сигнали основного контуру системи та моделі.

У другому випадку модель спочатку визначає реальні характеристики системи, тобто ідентифікує систему керування, і порівнює з відомими параметрами моделі бажаної розімкнутої системи, налаштовуючись на характеристики реальної системи, а потім стабілізує або оптимізує властивості реальної системи, якщо вони змінюються в процесі подальшого функціонування системи.

Схема СНС із моделлю-еталоном, що відображає бажані властивості замкненої системи керування, зображена на рис. 10.1.

Принцип роботи СНС з еталонною моделлю: сигнал неузгодженості $\varepsilon(t)$ подається на вхід моделі М та на вхід ланцюжка КП + ОК. На виході ОК сигнал $z(t)$ порівнюється з

вихідним сигналом моделі $z_M(t)$. Якщо вони не збігаються, то виробляється сигнал відхилення $g(t)$, який, впливаючи на ланцюг самоналагоджування (ЛС), змінює параметри КП доти, доки вихідні сигнали моделі $z_M(t)$ та об'єкта керування $z(t)$ збіжаться.

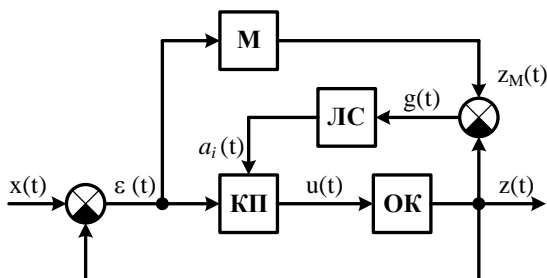


Рисунок 10.1 – Схема СНС з еталонною моделлю:

М – модель;

ЛС – ланцюг самоналагоджування

Найбільш важливим етапом синтезу СНС з еталонною моделлю є розроблення алгоритму ЛС, щоб сигнал відхилення $g(t)$ був обмеженим і згодом прямував до нуля, що є ознакою стійкості СНС.

Найбільш універсальним для оцінювання стійкості СНС є прямий метод Ляпунова: якщо система керування описується сукупністю рівнянь у відхиленнях у формі Коші $\dot{g}_i = \varphi_i(g_1, g_2, \dots, g_n, t)$, $i = \overline{1, n}$, і можна підібрати таку знаковизначену функцію Ляпунова $V(g_1, g_2, \dots, g_n)$, від якої повна похідна в часі $\frac{dV}{dt}$ в деякій області Q є знакопостійною функцією протилежного знака функції $V(g_i(t))$, то функції $g_1(t)$, $g_2(t)$, ..., $g_n(t)$ будуть обмеженими, а система – асимптотично стійкою.

Розглянемо застосування прямого методу Ляпунова для синтезу СНС другого порядку.

Нехай у розімкненому стані (без моделі) реальна система керування описується рівнянням

$$\ddot{z}(t) + c_1 \dot{z}(t) + c_2 z(t) = k_o(t) a(t) \varepsilon(t), \quad (10.1)$$

де c_1 та c_2 – незмінні параметри ОК;

$k_o(t)$ – коефіцієнт підсилення ОК, що змінюється з часом;

$a(t)$ – коефіцієнт підсилення керувального пристрою, який є його варіативним параметром КП.

Нехай рівняння моделі має аналогічний вигляд

$$\ddot{z}_M(t) + c_1 \dot{z}_M(t) + c_2 z_M(t) = k_M \varepsilon(t). \quad (10.2)$$

Необхідно знайти такий процес зміни коефіцієнтів $a(t)$, який призведе до усунення неузгодженості $g(t)$ між вихідними сигналами ОК $z(t)$ та моделі $z_M(t)$ й забезпечить асимптотичну стійкість. Синтезуємо таку СНС.

Якщо $g(t) = z_M(t) - z(t)$, то віднімемо (10.1) від (10.2) і одержимо

$$\ddot{g}(t) + c_1 \dot{g}(t) + c_2 g(t) = [k_M - k_o(t) a(t)] \varepsilon(t) = b(t) \varepsilon(t), \quad (10.3)$$

де $b(t) = k_M - k_o(t) a(t)$.

Запишемо (10.3) у формі Коші, позначивши $g(t) = g_1(t)$; $\dot{g}_1(t) = g_2(t)$.

Тоді рівняння (10.3) можна переписати у вигляді

$$\dot{g}_2(t) + c_1 g_2(t) + c_2 g_1(t) = b(t) \varepsilon(t),$$

$$\text{або } \dot{g}_2(t) = -c_1 g_2(t) - c_2 g_1(t) + b(t) \varepsilon(t). \quad (10.4)$$

Уведемо функцію Ляпунова V у формі квадратичної додатно визначеної функції змінних $g_1(t)$, $g_2(t)$ і коефіцієнта $b(t)$:

$$V = c_2 g_1^2(t) + g_2^2(t) + b^2(t). \quad (10.5)$$

Знайдемо повну похідну за часом t від функції V :

$$\frac{dV}{dt} = c_2 2g_1(t) \frac{dg_1(t)}{dt} + 2g_2(t) \frac{dg_2(t)}{dt} + 2b(t) \frac{db(t)}{dt}. \quad (10.6)$$

З урахуванням (10.4) вираз (10.6) можна записати так:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2 \left[c_2 g_1(t) g_2(t) + g_2(t) (-c_1 g_2(t) - c_2 g_1(t) + \right. \\ &\quad \left. + b(t) \varepsilon(t)) + b(t) \dot{b}(t) \right] = 2 \left[c_2 g_1(t) g_2(t) - c_1 g_2^2(t) - \right. \\ &\quad \left. - c_2 g_2(t) g_1(t) + g_2(t) b(t) \varepsilon(t) + b(t) \dot{b}(t) \right] = \\ &= 2 \left[-c_1 g_2^2(t) + b(t) (g_2(t) \varepsilon(t) + \dot{b}(t)) \right]. \end{aligned} \quad (10.7)$$

Щоб похідна $\frac{dV}{dt}$ була від'ємно визначеною, необхідно, щоб $c_1 > 0$, а $b(t) (g_2(t) \varepsilon(t) + \dot{b}(t)) = 0$ за будь-яких $b(t)$ та $\varepsilon(t)$. Звідси випливає, що

$$\dot{b}(t) = -g_2(t) \varepsilon(t). \quad (10.8)$$

При $k_o(t)$, що змінюється повільно (система самоналагоджується швидше, ніж змінюються властивості ОК), можна записати, що

$$k_o(t) = k_o + \Delta k_o(t), \quad (10.9)$$

де $k_o = const$ – відоме номінальне значення коефіцієнта підсилення ОК;

$\Delta k_o(t)$ – складова, що повільно змінюється.

Підставивши в (10.8) вирази $b(t) = k_M - k_o(t) a(t)$ та (10.9), одержимо

$$-\frac{d}{dt} \left[a(t) (k_o + \Delta k_o(t)) \right] = -g_2(t) \varepsilon(t). \quad (10.10)$$

Якщо $\Delta k_o(t) < k_o$, то другим доданком у лівій частині (10.10) можна знехтувати. Тоді $-\dot{a}(t) k_o = -g_2(t) \varepsilon(t)$, або

$$\dot{a}(t) = \frac{1}{k_o} g_2(t) \varepsilon(t).$$

Звідси впливає вираз для варіативного параметра КП:

$$a(t) = \frac{1}{k_o} \int_0^t g_2(t) \varepsilon(t) dt. \quad (10.11)$$

Зобразимо структурну схему СНС другого порядку з моделлю (рис. 10.2).

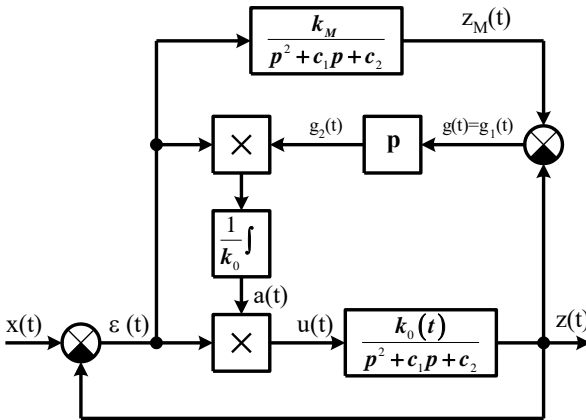


Рисунок 10.2 – Структурна схема СНС другого порядку з моделлю

10.2. Самоналагоджувальна система із моделлю, що налагоджується

Зараз розглянемо СНС із моделлю, що налагоджується. У цьому випадку на модель, як і на систему керування, подається пробний сигнал або синусоїдальний (при стабілізації АЧХ), або імпульсний (наприклад, із генератора білого шуму).

Зупинимося на *СНС зі стабілізацією АЧХ*, застосовуваною при відносно повільній зміні властивостей ОК порівняно з часом перерегулювання. У такій СНС на кожний змінний параметр ОК виділяється своя частота.

Нехай кількість змінних параметрів ОК дорівнює m . Для налагодження моделі (М) на вхід системи (рис. 10.3), крім основного сигналу x , що змінюється повільно, подається пробний сигнал $x_{пр}$ (частіше синусоїда), що містить увесь спектр частот. Зміну кожного параметра моделі (амплітуди кожної частоти) під впливом пробного сигналу порівнюють зі зміною параметрів системи керування. На підставі результатів порівняння змінюють параметри УП.

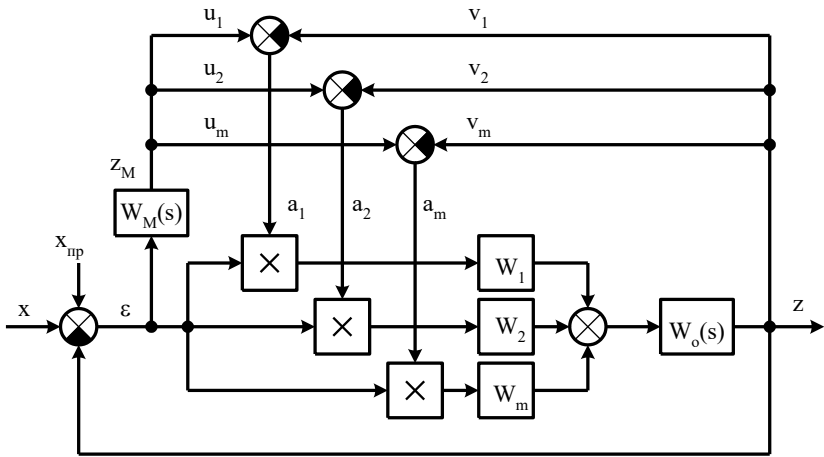


Рисунок 10.3 – Схема СНС зі стабілізацією АЧХ

Система буде стабілізованою, якщо для кожної частоти ω різниця між вихідними сигналами моделі u_m і системи керування v_m дорівнює нулю, тобто $u_m - v_m = 0$. Ця умова виконується, якщо передавальні функції моделі $W_M(s)$ і системи керування збігаються. Математично це можна записати так:

$$W_M(s) = W_o(s) \sum_{i=1}^m a_i W_i(s). \quad (10.12)$$

Умова (10.2) повинна виконуватися лише для резонансних (що відповідають змінним параметрам ОК) частот ω_ν , тобто

$$\left| W_o(j\omega_\nu) \sum_{i=1}^m a_i W_i(j\omega_\nu) \right| = |W_M(j\omega_\nu)|, \quad \nu = \overline{1, m}. \quad (10.13)$$

Для виділення сигналу резонансної частоти ω_ν використовують вузькосмугові фільтри Φ_1, \dots, Φ_m . Із виразу (10.13) бачимо, що

$$a_i = \pm \frac{|W_M(j\omega_\nu)|}{|W_o(j\omega_\nu)| |W_i(j\omega_\nu)|}. \quad (10.14)$$

Для вибору лише додатних значень коефіцієнтів a_i використовують детектори (діоди). Для підтримання a_i незмінними за відсутності неузгодженості між моделлю u_m і проектованою системою v_m ставляться інтегратори.

Ураховуючи це, повну схему СНС зображено на рис. 10.4.

Як бачимо зі схеми на рис. 10.4,

$$a_i = \gamma \int (|u_\nu| - |v_\nu|) dt.$$

Знайдемо $|u_\nu|$ і $|v_\nu|$. Згідно з рис. 10.4

$$|u_\nu| = |\varepsilon_\nu| |\Phi_\nu(j\omega_\nu)| |W_M(j\omega_\nu)|, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad (10.15)$$

$$|v_\nu| = |\varepsilon_\nu| \left| \sum_{i=1}^m a_i W_i(j\omega_\nu) \right| |W_o(j\omega_\nu)| |\Phi_\nu(j\omega_\nu)|. \quad (10.16)$$

Тоді

$$\dot{a}_i = \gamma \cdot |\varepsilon_\nu| |\Phi_\nu(j\omega_\nu)| \left(|W_M(j\omega_\nu)| - \sum_{i=1}^m a_i |W_i(j\omega_\nu)| |W_o(j\omega_\nu)| \right). \quad (10.17)$$

Оскільки передавальна функція $W_i(j\omega_\nu) = 0$ при $i \neq \nu$, то одержимо m незалежних рівнянь першого порядку для m змінних параметрів ОК:

$$\begin{aligned} \dot{a}_\nu + a_\nu \gamma |W_\nu(j\omega_\nu)| |W_o(j\omega_\nu)| |\varepsilon_\nu| |\Phi_\nu(j\omega_\nu)| &= \\ &= \gamma |\varepsilon_\nu| |\Phi_\nu(j\omega_\nu)| |W_M(j\omega_\nu)|. \end{aligned} \quad (10.18)$$

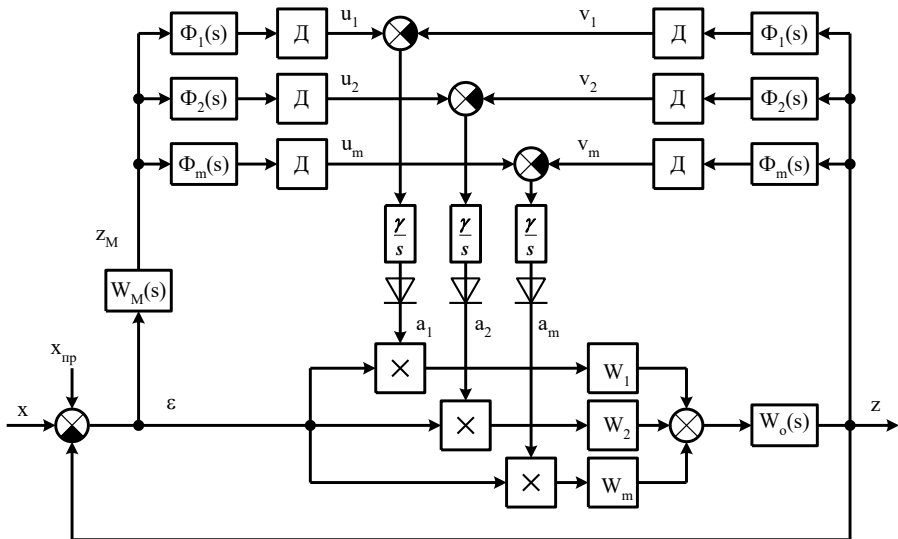


Рисунок 10.4 – Функціональна схема СНС зі стабілізацією АЧХ: Φ_1, \dots, Φ_m – фільтри, налагоджені на частоту, що відповідає змінним параметрам ОК; a_1, a_2, \dots, a_m – варіативні параметри КП (помножувачі); \mathcal{D} – детектори (випрямлячі), що виділяють сталу складову;

$$\frac{\gamma}{s} - \text{інтегровальний ланцюг}$$

Таким чином, одержане рівняння (10.18) для СНС зі стабілізацією АЧХ описує зміну варіативних параметрів a_m залежно від сигналу неузгодженості ε .

За імпульсивної (швидкої) зміни властивостей ОК використовують *СНС зі стабілізацією імпульсної характеристики*.

Як і у випадку СНС зі стабілізацією АЧХ, при стабілізації імпульсної характеристики на вхід моделі та на вхід проектованої системи подається імпульсний сигнал. На виходах

моделі та проектованої системи їх сигнали зіставляють, унаслідок чого змінюються параметри КП доти, доки не буде досягнута відповідність між реальною імпульсною характеристикою проектованої системи та характеристикою моделі.

Як пробний імпульсний сигнал найчастіше використовують сигнал у формі білого шуму (випадковий процес).

Зв'язок між вхідним $x(t)$ та вихідним $z(t)$ сигналами за імпульсного впливу (білого шуму) описується за допомогою кореляційної функції

$$k(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-\tau)z(t)dt. \quad (10.19)$$

Щоб практично вимірювати функцію $k(\tau)$ за значень її аргументу $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_m$, необхідно на ці величини затримати процес $x(t)$ відносно $z(t)$, а потім провести інтегрування (10.19), але з межами від 0 до T та віднормувати діленням на T . Для затримання $x(t)$ відносно $z(t)$ використовують лінії затримки, що реалізують функцію $W_i(s) = \exp(-\tau_i s)$. Ураховуючи це, схему СНС зі стабілізацією імпульсної характеристики можна зобразити у вигляді, поданому на рис. 10.5.

Опис схеми: на вхід проектованої системи й обчислювача імпульсної характеристики (ОІХ) подається пробний сигнал із генератора білого шуму (ГБШ). В ОІХ здійснюють багатоканальне затримання пробного сигналу на величину τ_i , перемножування $x_{np}(t - \tau_i)$ із вихідним процесом системи $z(t)$ й інтегрування відповідних добутків для обчислення дискретних значень $k(\tau_i)$ імпульсної характеристики замкненої системи $k(\tau)$.

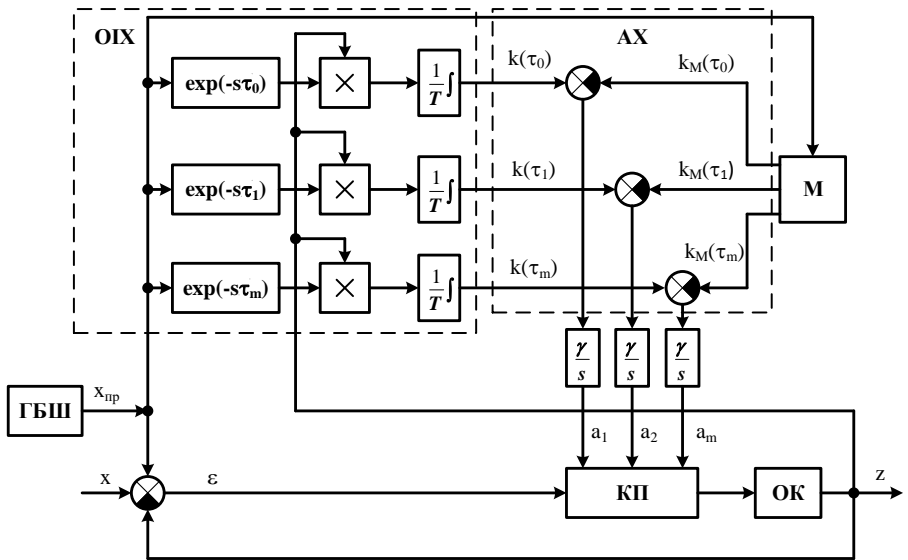


Рисунок 10.5 – Схема СНС зі стабілізацією імпульсної характеристики:
 ОІХ – обчислювач імпульсної характеристики;
 АХ – аналізатор характеристик;
 ГБШ – генератор білого шуму

В аналізаторі характеристик АХ ці значення $k(\tau_i)$ порівнюються з аналогічними значеннями імпульсної характеристики моделі $k_M(\tau_i)$. Результати зіставлення інтегруються пристроями $\frac{\gamma}{s}$, виходи яких є варіативними параметрами КП. Зміна параметрів КП буде відбуватися доти, доки вихідні сигнали АХ не перетворяться на нуль, тобто поки реальна імпульсна характеристика не збіжиться з імпульсною характеристикою моделі.

Необхідно відзначити, що в моделі також наявний аналогічний ОІХ (на схемі не показано). Крім того, в АХ не обов'язково повинні зіставлятися імпульсні характеристики системи та моделі. В АХ може обчислюватися деякий критерій

якості, що залежить від $k(t)$, і порівнюватися з еталонним значенням.

10.3. Системи з пасивною адаптацією

Адаптивні системи застосовуються, якщо діапазон зміни властивостей ОК та зовнішніх впливів наслише великий, що показник якості виходить за межі заданих обмежень.

З іншого боку, будь-яка неадаптивна система з від'ємним зворотним зв'язком (33) унаслідок закладеного в неї принципу керування за відхиленням здатна нейтралізувати зміну зовнішніх впливів і характеристик ОК, але в невеликому діапазоні. Якщо розширити цей діапазон, то можна нейтралізувати значні зміни зовнішніх впливів і характеристик ОК, тобто можна одержати неадаптивну систему, що має властивості адаптивних систем без спеціального використання принципів адаптації.

Розширення подібних функціональних можливостей неадаптивних систем можна виконати за рахунок:

- великих коефіцієнтів підсилення розімкнених систем;
- автоколивальних режимів;
- систем зі змінною структурою.

Такі системи називають *системами з пасивною адаптацією*.

Як приклад розглянемо замкнену систему з великим коефіцієнтом підсилення в розімкненому стані.

Нехай замкнена система складається з КП із передавальною функцією $W_k(s)$ та ОК із передавальною функцією $W_o(s)$. Уведемо додатковий від'ємний зворотний зв'язок із коефіцієнтом передачі $W_{33}(s)$ (рис. 10.6).

Визначаємо передавальну функцію всієї системи $\Phi_{zx}(s)$:

$$z(s) = \varepsilon_2(s)W_y(s)W_o(s), \quad \varepsilon_2(s) = \varepsilon_1(s) - W_{33}(s)z(s).$$

$$\text{Тоді } \varepsilon_2(s) = x(s) - z(s)(1 + W_{33}(s)),$$

$$z(s) = x(s)W_k(s)W_o(s) - z(s)W_k(s)W_o(s)(1 + W_{зз}(s)),$$

$$z(s)[1 + W_k(s)W_o(s)(1 + W_{зз}(s))] = x(s)W_k(s)W_o(s).$$

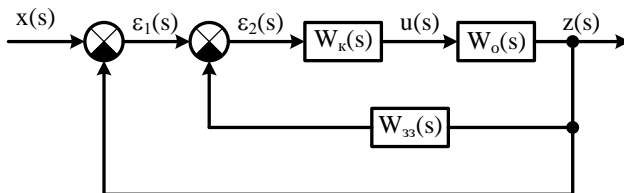


Рисунок 10.6 – Схема автоматизації з двома від’ємними зворотними зв’язками

Унаслідок цього одержимо вираз для передавальної функції системи:

$$\Phi_{zx}(s) = \frac{z(s)}{x(s)} = \frac{W_k(s)W_o(s)}{1 + W_k(s)W_o(s)(1 + W_{зз}(s))}. \quad (10.20)$$

Щоб усунути вплив передавальної функції об’єкта керування $W_o(s)$ на передавальну функцію $\Phi_{zx}(s)$, виберемо передавальну функцію КП $W_k(s)$ із великим передавальним коефіцієнтом:

$$W_k(s) = k_\kappa \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (10.21)$$

де $A(s)$ та $B(s)$ – поліноми;

k_κ – передавальний коефіцієнт $k_\kappa \rightarrow \infty$.

Тоді передавальну функцію $\Phi_{zx}(s)$ (10.20) можна привести до вигляду

$$\Phi_{zx}(s) = \frac{1}{\frac{1}{W_y(s)W_o(s)} + (1 + W_{зз}(s))} \approx \frac{1}{1 + W_{зз}(s)}. \quad (10.22)$$

Звідси випливає, що передавальна функція замкненої системи $\Phi_{zx}(s)$ не залежить від властивостей ОК, а визначається лише властивостями пристроїв додаткового від'ємного зворотного зв'язку $W_{zz}(s)$.

Однак необмежене збільшення коефіцієнта підсилення розімкненої системи призводить до нестійкості замкненої системи. Щоб система була стійкою, необхідно, щоб сума порядків (n_i) полінома в знаменнику (10.21) $(A(s))$ не перевищувала суму порядків (m_i) полінома в чисельнику $(B(s))$ на два, тобто щоб виконувалася умова

$$(n_0 + n_1) - (m_0 + m_1) \leq 2, \quad n_2 \geq m_2. \quad (10.23)$$

Таким чином, стабілізувати передавальну функцію замкненої системи $\Phi_{zx}(s)$ можна за рахунок необмеженого збільшення коефіцієнта підсилення k лише при додержанні умови стійкості системи (10.23).

Запитання для самоперевірки

1. Як класифікуються СНС із моделлю? Яким чином можна синтезувати СНС зі стабілізацією якості керування з еталонною моделлю, використовуючи метод Ляпунова?
2. Які особливості СНС із налагоджувальною моделлю?
3. Які принципи та схеми використовують при синтезі СНС зі стабілізацією АЧХ?
4. Яка методика синтезу СНС зі стабілізацією імпульсної характеристики?
5. У яких випадках неадаптивні системи виявляють властивості адаптивних систем? Наведіть приклад.

ТЕМА 11. АНАЛІТИЧНІ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНІ СИСТЕМИ З ОПТИМІЗАЦІЄЮ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ

11.1. Аналітичні самоналагоджувальні системи з налагодженням за зовнішнім впливом

На відміну від СНС зі стабілізацією якості керування СНС з оптимізацією якості повинні постійно визначати та підтримувати оптимальними значення критерію якості при властивостях ОК та зовнішніх впливах, що змінюються. Якщо б зміни властивостей ОК та зовнішніх впливів не відбувалося, то досить було б один раз розрахувати оптимальні параметри та структуру КП, використовуючи принцип оптимального керування. При побудові СНС цей етап називають етапом *первинної оптимізації системи*. При зміні властивостей ОК та зовнішніх впливів параметри КП вже не будуть оптимальними в нових умовах, і необхідно знову переналагоджати параметри КП, тобто необхідно здійснювати самоналагодження системи. Етап самоналагодження системи називають *етапом вторинної оптимізації системи*. Оскільки етап первинної оптимізації в досить повному обсязі розглянено при проектуванні систем оптимального керування, то зупинимося на другому етапі.

Аналітичні СНС із налагодженням за зовнішнім впливом повинні виконувати дві основні функції:

- 1) визначати й аналізувати зміни зовнішніх впливів;
- 2) розробляти алгоритми оптимізації системи за критерієм самоналагоджування (вторинної оптимізації) при зміні зовнішніх впливів. Тому в аналітичні СНС із налагодженням за зовнішнім впливом входить аналізатор сигналів (АС) та керувальний елемент (КЕ).

Як зазначалося раніше (див. п. 9.2), залежно від того, який параметр аналізується (корисний сигнал і впливи або результат їх впливу), схеми аналітичних СНС поділяються на схеми СНС з ідентифікаційним (розімкненим циклом самоналагодження) та

безідентифікаційним (замкненим циклом самоналагодження) підходами (рис. 11.1).

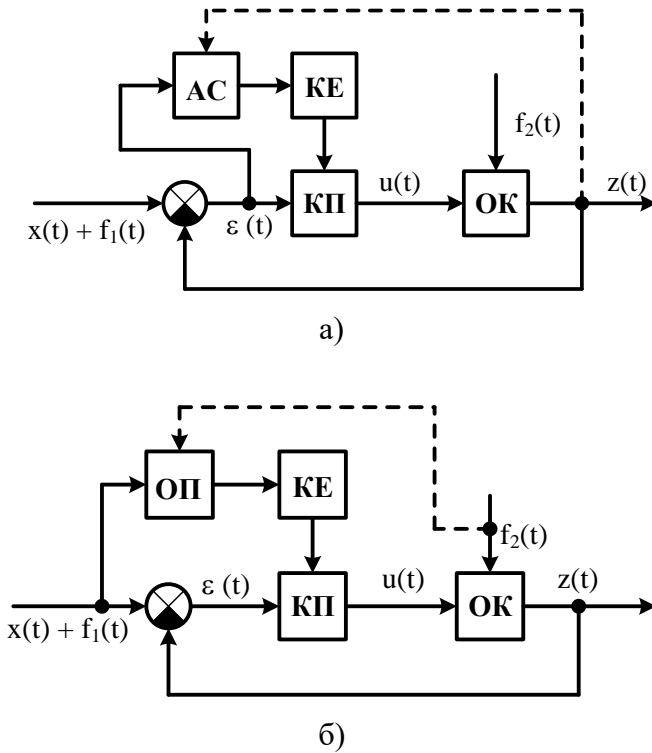


Рисунок 11.1 – Схеми аналітичних СНС:

- а) з ідентифікаційним підходом;
 - б) із безідентифікаційним підходом,
- де АС – аналізатор сигналів;
 ОП – обчислювач помилок;
 KE – керувальний елемент

При ідентифікаційному підході за допомогою АС оцінюються параметри й імовірнісні характеристики корисного сигналу $x(t)$ та збурювань $f_1(t)$ і $f_2(t)$. Керувальний елемент за результатами аналізу АС розраховує та встановлює

оптимальні параметри КП. При цьому вихідний сигнал $z(t)$ не подається на пристрій адаптації (АС + КЕ) (рис. 11.1 а). Таку схему називають схемою з розімкненим циклом самоналагодження.

Якщо вихідний сигнал $z(t)$ подається на ПА (рис. 11.1 б), то таку схему називають схемою із замкненим циклом самоналагодження. У цьому випадку в обчислювачі помилок (ОП) аналізуються наслідки впливу корисного сигналу й збурювань, тобто $\varepsilon(t)$ та $z(t)$, і виробляється сигнал, пропорційний відхиленню параметрів КП від оптимальних значень. КЕ, впливаючи на КП, зводить ці відхилення до мінімуму.

Ці два підходи є частковими випадками схем розімкненого та замкненого циклів самоналагодження відповідно.

Як приклад розглянемо методику визначення оптимальних параметрів КП аналітичної СНС з оптимізацією якості керування з налагодженням за зовнішніми впливами при розімкненій схемі самоналагодження (за ідентифікаційного підходу) (див. рис. 11.1 а).

У цьому випадку загальноприйнято критерій якості самоналагодження визначати за формулою

$$J(t) = \varepsilon_d^2(t) + \lambda(t) \bar{\varepsilon}_e^2(t), \quad (11.1)$$

де $\varepsilon_d(t)$ – динамічна помилка, обумовлена неточністю відтворення системою корисного сигналу $x(t)$ (наприклад, перехідні процеси);

$\varepsilon_e(t)$ – випадкова складова помилки, викликана зовнішніми збурюваннями $f_1(t)$ та $f_2(t)$;

$\bar{\varepsilon}_e^2(t)$ – дисперсія випадкової складової помилки в момент часу t ;

$\lambda(t)$ – коефіцієнт, що регулює вагу обох помилок.

Позначимо варіативні параметри КП, що є аргументами критерію якості самоналагодження J , через вектор $\vec{A}(t)$.

Динамічна помилка $\varepsilon_D(t)$ визначається за формулою

$$\varepsilon_D(t) = c_0 x(t) + c_1 \dot{x}(t) + c_2 \ddot{x}(t) + \dots + c_\nu x^{(\nu)}(t), \quad (11.2)$$

де ν – порядок полінома, що використовується при апроксимації вхідного сигналу $x(t)$.

Коефіцієнти помилок c_0, c_1, \dots, c_ν визначаються за формулою

$$c_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial^i}{\partial s^i} \Phi_{\varepsilon x}(s, t) \right]_{s=0}. \quad (11.3)$$

Отже, $c_0 = [\Phi_{\varepsilon x}(s, t)]_{s=0}$, $c_1 = \left[\frac{\partial}{\partial s} \Phi_{\varepsilon x}(s, t) \right]_{s=0}$.

Тепер визначимо $\bar{\varepsilon}_e^2(t)$. Для цього запишемо передавальні функції основного контуру, зображеного на рис. 11.2.

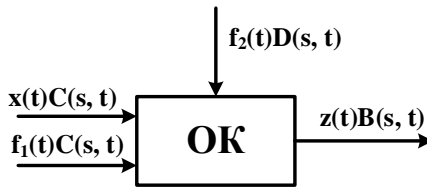


Рисунок 11.2 – Структура основного контуру системи

Із рисунка 11.2 бачимо, що рівняння, яке описує об’єкт керування, можна подати в операторній формі

$$B(s, t)z(t) = C(s, t)[x(t) + f_1(t)] + D(s, t)f_2(t), \quad (11.4)$$

де $B(s, t)$, $C(s, t)$, $D(s, t)$ – деякі оператори.

Тоді передавальні функції:

$$\Phi_{x z}(s, t) = \frac{z(t)}{x(t)} = \frac{C(s, t)}{B(s, t)}, \quad \Phi_{f_2 z}(s, t) = \frac{z(t)}{f_2(t)} = \frac{D(s, t)}{B(s, t)},$$

$$\Phi_{z_1}(s, t) = \frac{z(t)}{f_1(t)} = \frac{C(s, t)}{B(s, t)}.$$

Уведемо змінну $\varepsilon(t) = x(t) - z(t)$. З урахуванням цього, передавальні функції помилки щодо зовнішніх впливів наберуть вигляду

$$\Phi_{\varepsilon x}(s, t) = \Phi_{xx}(s, t) - \Phi_{zx}(s, t) = 1 - \Phi_{zx}(s, t),$$

$$\Phi_{\varepsilon f_1}(s, t) = \Phi_{xf_1}(s, t) - \Phi_{zf_1}(s, t) = -\Phi_{zf_1}(s, t),$$

$$\Phi_{\varepsilon f_2}(s, t) = \Phi_{xf_2}(s, t) - \Phi_{zf_2}(s, t) = -\Phi_{zf_2}(s, t).$$

Дисперсія випадкової складової помилки $\bar{\varepsilon}_\varepsilon^2(t)$ визначається за формулою

$$\bar{\varepsilon}_\varepsilon^2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[|\Phi_{\varepsilon f_1}(j\omega)|^2 S_{f_1}(\omega) + |\Phi_{\varepsilon f_2}(j\omega)|^2 S_{f_2}(\omega) \right] d\omega, \quad (11.5)$$

де $S_{f_1}(\omega)$ та $S_{f_2}(\omega)$ – спектральні щільності процесів $f_1(t)$ і $f_2(t)$ відповідно; $j\omega = s$.

Інтеграл (11.5) зручно обчислити, використовуючи формулу (8.15):

$$\int_0^\infty \Phi^2(s) ds = \frac{(-1)^{p+1} \Delta'}{2m_0 \Delta}.$$

Підставивши вирази (11.2) та (11.5) у вираз для критерію якості самоналагодження J (11.1), встановлюється в явній формі залежність критерію J від вектора параметрів $\vec{A}(t)$. Після оцінювання блоком АС характеристик впливів визначаються оптимальні значення варіативних параметрів $\vec{A}(t)$ із умови рівності нулю часткової похідної від J за $\vec{A}(t)$, тобто

$$\frac{\partial J(\vec{A})}{\partial \vec{A}} = 0.$$

11.2. Аналітичні самоналагоджувальні системи із налагодженням за характеристиками об'єкта керування

В аналітичних СНС налагодження системи автоматизації на оптимальний режим можна здійснити або за рахунок зміни параметрів у прямому ланцюзі системи, або за рахунок зміни параметрів у зворотному ланцюзі системи. Розглянемо ці два випадки.

1. Зміна параметрів у прямому ланцюзі системи

В аналітичних СНС із налагодженням за характеристиками ОК найбільш часто застосовується принцип самоналагодження з еталонною моделлю (див. п. 10.1). Варіативні параметри в СНС з еталонною моделлю при стабілізації якості були визначені раніше (формула (10.11)).

Визначимо варіативні параметри СНС з еталонною моделлю при оптимізації якості. Виберемо структуру такої СНС (рис. 11.3), аналогічну структурі СНС зі стабілізацією якості (див. рис. 10.1).

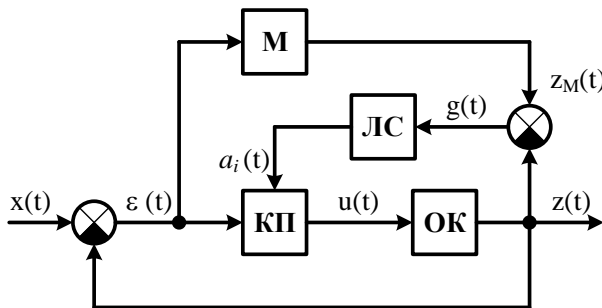


Рисунок 11.3 – Структура СНС з еталонною моделлю при оптимізації якості керування:
 $a_i(t)$ – варіативні параметри

За оптимального налагодження системи сигнал неузгодженості $g(t) \rightarrow 0$. Якість самоналагодження буде

залежати від сигналу неузгодженості $g(t)$, тобто критерій вторинної оптимізації J є функцією $g(t)$. Існує досить багато варіантів визначення залежності $J(g)$. Найчастіше цю залежність записують в одній із форм:

$$J = \int_0^{\infty} g(t) dt, \quad J = \int_0^{\infty} t |g(t)| dt, \quad J = \int_0^{\infty} g^2(t) dt,$$

$$J = \int_0^{\infty} g^2(t) dt, \quad J = \int_0^t g^2(\tau) e^{\alpha(t-\tau)} d\tau. \quad (11.6)$$

Для визначення варіативних параметрів скористаємося градієнтним методом (див. п. 12.1), згідно з яким швидкість зміни параметрів $a_i(t)$ пропорційна градієнту від критерію якості самоналагодження $J(g)$, тобто

$$\frac{da_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial J}{\partial a_i}, \quad (11.7)$$

де $\gamma_i = \text{const} > 0$ – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки критерій J є функцією від сигналу неузгодженості $g(t)$, який визначається виразом $g(t) = z_M(t) - z(t)$, а вихід моделі $z_M(t)$ не залежить від варіативних параметрів $a_i(t)$, то можна записати, що

$$\frac{da_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial g}{\partial a_i} = \gamma_i \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial z}{\partial a_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.8)$$

Співмножник $\frac{\partial J}{\partial g}$ у виразі (11.8) при заданому критерії

$$J(g) \text{ (11.6) є відомим (наприклад, при } J = \int_0^{\infty} g^2(t) dt \text{) } \frac{\partial J}{\partial g} = 2g(t).$$

Для визначення співмножника $\frac{\partial z}{\partial a_i}$ скористаємося

передавальною функцією системи Φ_{zx} . Для цього виразимо $z(t)$ через передавальну функцію системи Φ_{zx} :

$$z(t) = \Phi_{zx} x(t).$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = \frac{\partial}{\partial a_i} (\Phi_{zx} x(t)), \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.9)$$

Визначимо передавальну функцію системи Φ_{zx} для основного контуру (рис. 11.4) СНС, зображеного на рис. 11.3.

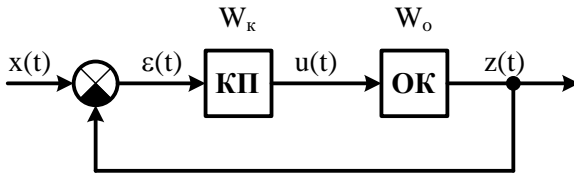


Рисунок 11.4 – Основний контур СНС з еталонною моделлю

Як було показано в п. 8.3, передавальну функцію системи, наданої на рис. 11.4, можна записати у вигляді (8.16):

$$\Phi_{zx}(s, \vec{A}(t), \vec{B}(t)) = \frac{W_{\kappa}(s, \vec{A}(t)) W_{\circ}(s, \vec{B}(t))}{1 + W_{\kappa}(s, \vec{A}(t)) W_{\circ}(s, \vec{B}(t))}, \quad (11.10)$$

де $\vec{A}(t)$ – вектор налагоджувальних параметрів КП;

$\vec{B}(t)$ – сукупність неконтрольованих параметрів ОК.

Оскільки $x(t)$ не залежить від налагоджувальних параметрів КП $a_i(t)$, то знайдемо похідну $\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i}$,

використовуючи властивість диференціювання $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i} &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left(\frac{W_\kappa(s, \vec{A}(t)) W_o(s, \vec{B}(t))}{1 + W_\kappa(s, \vec{A}(t)) W_o(s, \vec{B}(t))} \right) = \\
&= \frac{\frac{\partial W_\kappa(s, \vec{A}(t))}{\partial a_i} W_o(s, \vec{B}(t)) [1 + W_\kappa(s, \vec{A}(t)) W_o(s, \vec{B}(t))]}{\left[1 + W_\kappa(s, \vec{A}(t)) W_o(s, \vec{B}(t)) \right]^2} - \\
&\quad - \frac{\frac{\partial W_\kappa(s, \vec{A}(t))}{\partial a_i} W_o^2(s, \vec{B}(t)) W_\kappa(s, \vec{A}(t))}{\left[1 + W_\kappa(s, \vec{A}(t)) W_o(s, \vec{B}(t)) \right]^2} = \\
&= \frac{\frac{\partial W_\kappa(s, \vec{A}(t))}{\partial a_i} W_o(s, \vec{B}(t))}{\left[1 + W_\kappa(s, \vec{A}(t)) W_o(s, \vec{B}(t)) \right]^2} = \\
&= \frac{\frac{\partial W_\kappa(s, \vec{A}(t))}{\partial a_i} \Phi_{zx}^2}{W_o(s, \vec{B}(t)) W_\kappa^2(s, \vec{A}(t))}.
\end{aligned}$$

Виключимо передавальну функцію ОК $W_o(s, \vec{B}(t))$ з останнього виразу. Для цього знайдемо її з (11.10):

$$W_o = \frac{\Phi_{zx}}{W_\kappa(1 - \Phi_{zx})}.$$

Тоді

$$\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i} = \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{\Phi_{zx}^2 W_\kappa (1 - \Phi_{zx})}{\Phi_{zx} W_\kappa^2} = \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{\Phi_{zx} (1 - \Phi_{zx})}{W_\kappa}. \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{(1 - \Phi_{zx})}{W_\kappa} \Phi_{zx} z = \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{(1 - \Phi_{zx})}{W_\kappa} z. \quad (11.12)$$

З урахуванням (11.12) вираз (11.8) набере вигляду

$$\frac{da_i}{dt} = \gamma_i \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{(1 - \Phi_{zx})}{W_\kappa} z. \quad (11.13)$$

Метою самоналагоджування є наближення передавальної функції реальної системи Φ_{zx} до передавальної функції моделі Φ_M , тобто повинна виконуватися умова $\Phi_{zx} = \Phi_M$.

Із рівняння (11.13) можна знайти вираз для компонентів $a_i(t)$ вектора налагоджувальних параметрів $\vec{A}(t)$ КП, продиференціювавши (11.13) за часом t .

Унаслідок цього одержуємо

$$\begin{aligned} a_i(t) &= \gamma_i \int \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{(1 - \Phi_M)}{W_\kappa} z dt = \\ &= \gamma_i \frac{1}{p} \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \frac{(1 - \Phi_M)}{W_\kappa} z, \end{aligned} \quad (11.14)$$

де $\frac{1}{p}$ – оператор інтегрування.

З урахуванням (11.14) структурна схема одного каналу обчислювача в складі ланцюга самоналагоджування набере вигляду, зображеного на рис. 11.5.

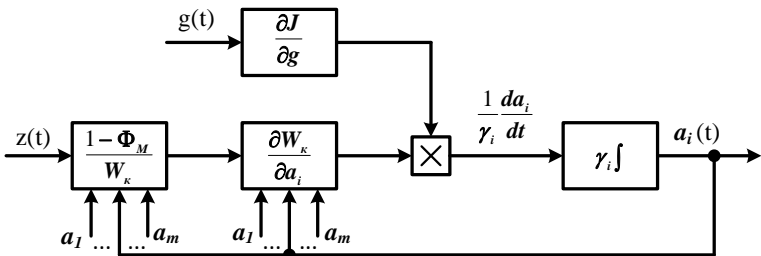


Рисунок 11.5 – Структурна схема одного каналу ЛС у СНС з оптимізацією якості

Разом буде m таких взаємозалежних каналів, тому що кожний із них використовує інформацію про параметри, обумовлені іншими каналами.

2. *Зміна параметрів у ланцюзі зворотного зв'язку (33) системи.*

У ряді випадків для компенсації параметрів ОК, що змінюються, використовують обладнання, розміщене в ланцюзі ЗЗ системи (рис. 11.6).

Як і в попередньому випадку, для визначення варіативних параметрів $a_i(t)$ скористаємося градієнтним методом, згідно з яким

$$\frac{da_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial J}{\partial a_i} = \gamma_i \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial z}{\partial a_i}, \quad (11.15)$$

де $g(t) = z_M(t) - z(t)$.

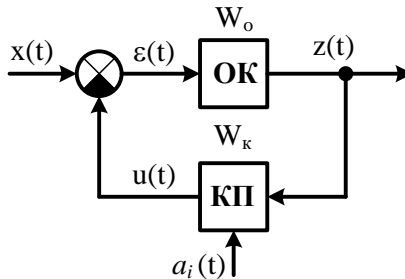


Рисунок 11.6 – Схема СНС із керувальним пристроєм у ланцюзі зворотного зв'язку

Оскільки співмножник $\frac{\partial J}{\partial g}$ можна визначити з виразу для критерію вторинної оптимізації J (11.6), то зупинимося на визначенні співмножника $\frac{\partial z}{\partial a_i}$.

Із рисунка 11.6 бачимо, що $z(t) = \Phi_{zx}x(t)$.

Ураховуючи, що $x(t)$ не залежить від варіативних параметрів $a_i(t)$, можна записати

$$\frac{\partial z}{\partial a_i} = x(t) \frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (11.16)$$

Визначимо передавальну функцію системи Φ_{zx} :

$$\varepsilon(t) = x(t) - z(t)W_\kappa = \frac{z(t)}{W_o},$$

звідси випливає, що

$$z(t) = \frac{W_o}{1 + W_\kappa W_o} x(t).$$

З урахуванням цього система (рис. 11.6) буде описуватися передавальною функцією

$$\Phi_{zx}(s, \vec{A}(t), \vec{B}(t)) = \frac{W_o(s, \vec{B}(t))}{1 + W_\kappa(s, \vec{A}(t))W_o(s, \vec{B}(t))}. \quad (11.17)$$

Знайдемо похідну $\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i}$:

$$\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i} = -\frac{\frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} W_o^2}{(1 + W_\kappa W_o)^2}. \quad (11.18)$$

Виразимо передавальну функцію ОК W_o через передавальну функцію системи Φ_{zx} .

Із (11.17) бачимо, що

$$W_o = \frac{\Phi_{zx}}{1 - \Phi_{zx} W_\kappa}. \quad (11.19)$$

Після підставлення (11.19) у (11.18) одержуємо

$$\frac{\partial \Phi_{zx}}{\partial a_i} = -\frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \Phi_{zx}^2.$$

З урахуванням виконаних перетворень вираз (11.15) набере такого вигляду:

$$\frac{da_i}{dt} = -\gamma_i \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \Phi_{zx} z, \quad (11.20)$$

де $z(t) = \Phi_{zx} x(t)$.

Із міркувань, наведених для випадку зміни параметрів у прямому ланцюзі, припустимо, що $\Phi_{zx} = \Phi_M$. Тоді з (11.20)

одержимо вираз для компонентів $a_i(t)$ вектора налагоджувальних параметрів КП $\vec{A}(t)$:

$$a_i(t) = -\gamma_i \int \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \Phi_M z(t) dt = -\gamma_i \frac{1}{p} \frac{\partial J}{\partial g} \frac{\partial W_\kappa}{\partial a_i} \Phi_M z(t), \quad (11.21)$$

де $\frac{1}{p}$ – оператор інтегрування.

Приклади розв'язування задач до теми 11

Приклад 11.1. Нехай система в розімкненому стані описується передавальною функцією $W(s) = k \frac{(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)}$, де T – стала часу керувального пристрою. На вхід системи подається корисний сигнал $x(t)$, який апроксимується поліномом другого порядку. Для простоти припустимо, що завада $f_2(t) = 0$. Завада $f_1(t)$ – випадковий процес типу білого шуму з відомою спектральною щільністю $S_{f_1}(\omega) = N = const$. Внесок у критерій якості самоналагодження J помилок $\varepsilon_{\bar{A}}(t)$ і $\varepsilon_c(t)$ однаковий, тобто в (11.1) $\lambda(t) = 1$.

Необхідно знайти закон зміни $T(t)$, щоб за всіх параметрів вхідного сигналу $x(t)$ система була оптимальною в сенсі критерію (11.1) $J(t) = \varepsilon_d^2(t) + \bar{\varepsilon}_c^2(t)$.

Розв'язання. Визначимо вираз для критерію (11.1). Спочатку знайдемо перший доданок критерію за формулою (11.2): $\varepsilon_d(t) = c_0 x(t) + c_1 \dot{x}(t) + c_2 \ddot{x}(t)$.

$$\text{Оскільки } c_0 = \left[\Phi_{\varepsilon x}(s, t) \right]_{s=0}, \quad c_1 = \left[\frac{\partial}{\partial s} \Phi_{\varepsilon x}(s, t) \right]_{s=0},$$

$c_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \Phi_{\varepsilon x}(s, t) \right]_{s=0}$, знайдемо вираз для передавальної функції $\Phi_{\varepsilon x}(s, t)$.

Передавальна функція $\Phi_{zx}(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)}$, а передавальна функція помилки відносно вхідного сигналу

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon x}(s) &= 1 - \Phi_{zx}(s) = \frac{1+W(s) - W(s)}{1+W(s)} = \\ &= \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{1+k \frac{(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)}}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} c_0 &= \left. \frac{1}{1 + \frac{k\tau}{Ts + 1} + \frac{k}{s(Ts + 1)}} \right|_{s=0} = \frac{1}{1 + k\tau + \frac{k}{0}} = \frac{1}{1 + k\tau + \infty} = 0, \\ c_1 &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + k \frac{(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)}} \right) \Bigg|_{s=0} = - \left(1 + k \frac{(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)} \right)^{-2} \times \\ &\times \left(\frac{k\tau s(Ts + 1) - (2Ts + 1)k(\tau s + 1)}{s^2(Ts + 1)^2} \right) \Bigg|_{s=0} = - \left(\frac{s(Ts + 1) + k(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)} \right)^{-2} \times \\ &\times \left(\frac{kT\tau s^2 + k\tau s - 2kTs^2\tau - 2kTs - k\tau s - k}{s^2(Ts + 1)^2} \right) \Bigg|_{s=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{k\tau Ts^2 - 2kTs - k}{s^2 (Ts + 1)^2} \right)^{-2} \left(\frac{s^2 (Ts + 1)^2}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^2} \right) \Bigg|_{s=0} = \\
&= \frac{k(\tau Ts^2 + 2Ts + 1)}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^2} \Bigg|_{s=0} = \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}, \\
c_2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \Phi_{\varepsilon x}(s) \right) \Bigg|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(k \frac{(\tau Ts^2 + 2Ts + 1)}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^2} \right) \Bigg|_{s=0} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{(2k\tau Ts + 2kT)(Ts^2 + s + k\tau s + k)^2}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^4} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(Ts^2 + s + k\tau s + k)(2Ts + k\tau + 1)k(\tau Ts^2 + 2Ts + 1)}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^4} \right) \Bigg|_{s=0} = \\
&= k \left(\frac{(\tau Ts + T)(Ts^2 + s + k\tau s + k) - (2Ts + k\tau + 1)(\tau Ts^2 + 2Ts + 1)}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^3} \right) \Bigg|_{s=0} = \\
&= k \frac{\tau T^2 s^3 + \tau Ts^2 + k\tau^2 Ts^2 + k\tau Ts + T^2 s^2 + Ts + k\tau Ts + kT}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^3} - \\
&- k \frac{2\tau T^2 s^3 + 4T^2 s^2 + 2Ts + k\tau^2 Ts^2 + 2k\tau Ts + k\tau + \tau Ts^2 + 2Ts + 1}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^3} \Bigg|_{s=0} = \\
&= k \frac{-\tau T^2 s^3 - 3T^2 s^2 - 3Ts - k\tau + kT - 1}{(Ts^2 + s + k\tau s + k)^3} \Bigg|_{s=0} = \\
&= \frac{k^2(T - \tau) - k}{k^3} = \frac{(T - \tau)}{k} - \frac{1}{k^2} \approx \frac{(T - \tau)}{k} \text{ при } k \gg 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \varepsilon_{\mathcal{L}}(t) = \frac{1}{k} \dot{x}(t) + \frac{(T - \tau)}{k} \ddot{x}(t),$$

$$\text{а } \varepsilon_{\mathcal{L}}^2(t) = \frac{1}{k^2} (\dot{x}(t) + (T - \tau) \ddot{x}(t))^2.$$

Другий доданок критерію (11.1) можна знайти за формулою (11.5):

$$\bar{\varepsilon}_c^2(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left| \Phi_{\varepsilon_{f_1}}(j\omega) \right|^2 S_{f_1}(\omega) \right] d\omega.$$

Множник $S_{f_1}(\omega) = N = \text{const}$ можна винести з-під інтеграла. Передавальна функція

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon_{f_1}}(s, t) &= -\Phi_{z_{f_1}}(s, t) = -\Phi_{z_x}(s, t) = -\frac{1}{1 + \frac{1}{W(s)}} = \\ &= -\frac{1}{1 + \frac{s(Ts + 1)}{k(\tau s + 1)}} = -\frac{k(\tau s + 1)}{k(\tau s + 1) + s(Ts + 1)} = -\frac{k\tau s + k}{Ts^2 + (k\tau + 1)s + k}. \end{aligned}$$

$$\text{Тоді } \bar{\varepsilon}_c^2(t) = \frac{N}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{k\tau s + k}{Ts^2 + (k\tau + 1)s + k} \right)^2 ds.$$

Цей інтеграл зручно розрахувати за формулою (8.15). У нашому випадку поліноми $M(s) = Ts^2 + (k\tau + 1)s + k$,

$$N(s)N(-s) = k^2(1 - \tau s)(1 + \tau s) = k^2(1 - \tau^2 s^2) = -\tau^2 k^2 s^2 + k^2.$$

Звідси бачимо, що $m_0 = T$, $m_1 = (k\tau + 1)$, $m_2 = k$, $g_0 = -k^2\tau^2$, $g_1 = k^2$, а елементи визначника $\delta_{11} = m_1 = k\tau + 1$, $\delta_{12} = m_0 = T$, $\delta_{21} = m_3 = 0$, $\delta_{22} = m_2 = k$.

Складемо визначники Δ та Δ'_ε :

$$\Delta = \begin{vmatrix} k\tau + 1 & T \\ 0 & k \end{vmatrix} = k(k\tau + 1),$$

$$\Delta'_\varepsilon = \begin{vmatrix} -k^2\tau^2 & T \\ k^2 & k \end{vmatrix} = -k^3\tau^2 - k^2T = -k^2(k\tau^2 + T).$$

$$\text{Отже, } \int_0^\infty |\Phi_{\varepsilon f_1}|^2 ds = \frac{-1}{2T} \cdot \frac{-k^2(k\tau^2 + T)}{k(k\tau + 1)} = \frac{k(k\tau^2 + T)}{2T(k\tau + 1)},$$

$$\text{а } \bar{\varepsilon}_c^2(t) = \frac{Nk(k\tau^2 + T)}{2\pi T(k\tau + 1)}.$$

Таким чином, критерій якості буде мати вигляд

$$J(T) = \frac{(\dot{x}(t) + (T - \tau)\ddot{x}(t))^2}{k^2} + \frac{Nk(k\tau^2 + T)}{2\pi T(k\tau + 1)}.$$

Оптимальне значення сталої часу T знаходимо з умови

$$\frac{\partial J(T)}{\partial T} = 0. \text{ Оскільки } J(T) = \frac{\dot{x}^2(t)}{k^2} + 2(T - \tau) \frac{\dot{x}(t)\ddot{x}(t)}{k^2} + (T - \tau)^2 \frac{\ddot{x}^2(t)}{k^2} + \frac{Nk^2\tau^2}{2\pi T(k\tau + 1)} + \frac{Nk}{2\pi(k\tau + 1)},$$

$$\text{то } \frac{\partial J(T)}{\partial T} = \frac{2\dot{x}(t)\ddot{x}(t)}{k^2} + \frac{2\ddot{x}^2(t)}{k^2}T - \frac{2\ddot{x}^2(t)\tau}{k^2} - \frac{Nk^2\tau^2}{2\pi T^2(k\tau + 1)} = 0,$$

$$\frac{2\ddot{x}^2(t)}{k^2}T^3 + \frac{2\ddot{x}(t)(\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\tau)}{k^2}T^2 - \frac{Nk^2\tau^2}{2\pi(k\tau + 1)} = 0.$$

Це рівняння можна надати у вигляді стандартного кубічного рівняння $b_0T^3 + b_1T^2 + b_2T + b_3 = 0$ з коефіцієнтами

$$b_0 = \frac{2\ddot{x}^2(t)}{k^2}, \quad b_1 = \frac{2\ddot{x}(t)(\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\tau)}{k^2}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{Nk^2\tau^2}{2\pi(k\tau + 1)}.$$

Розв'язуючи кубічне рівняння числовим методом за стандартною методикою з використанням ЕОМ, знаходимо оптимальне значення \bar{T} .

Приклад 11.2. Нехай об'єкт керування та керувальний пристрій описуються передавальними функціями $W_o(p) = \frac{1}{p+b(t)}$ та $W_k(p) = a(t)$ відповідно,

де $b(t)$ – параметр, що змінюється з часом, об'єкта керування;

$a(t)$ – варіативний параметр керувального пристрою.

Критерій оптимальності визначається виразом $J = g^2(t)$. Керувальний пристрій знаходиться в ланцюзі зворотного зв'язку (рис. 11.6).

Спроектувати СНС з оптимізацією якості.

Розв'язання. Запишемо оператор системи згідно з формулою (11.17):

$$\Phi_{zx} = \frac{1}{p+b(t)} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p+b(t)+a(t)}{p+b(t)}\right)} = \frac{1}{p+b(t)+a(t)}.$$

Припустимо, що передавальні функції реальної системи та моделі однакові між собою: $\Phi_{zx} = \Phi_M$. Тоді передавальну

функцію моделі можна подати у вигляді $\Phi_M = \frac{1}{(p+b_0+a_0)}$,

де a_0, b_0 – бажані параметри.

Згідно з (11.21) варіативний параметр керувального пристрою $a(t) = -\gamma \int \frac{\partial J}{\partial g} \cdot \frac{\partial W_k}{\partial a} \Phi_M z(t) dt$. У нашому випадку

$$\frac{\partial J}{\partial g} = 2g(t), \quad \frac{\partial W_k}{\partial a} = 1.$$

$$\text{Тоді } a(t) = -\gamma \int \frac{2g(t)}{(p+b_0+a_0)} z(t) dt.$$

Зобразимо схему такої СНС (рис. 11.7).

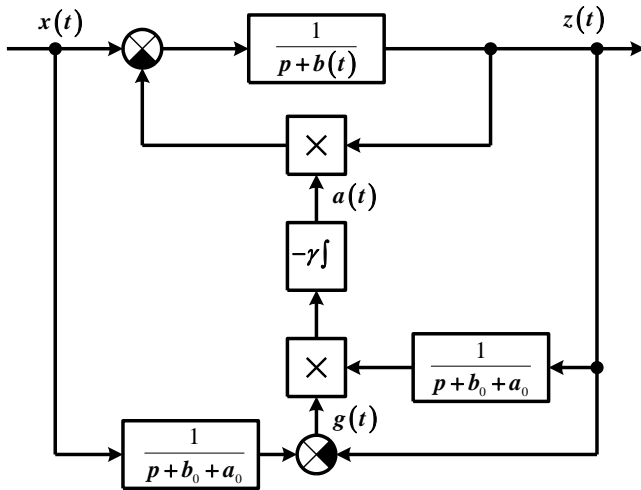


Рисунок 11.7 – Структурна схема СНС з керувальним пристроєм у ланцюзі зворотного зв'язку

Запитання для самоперевірки

1. Які етапи оптимізації та функції аналітичних СНС із налагодженням за зовнішнім впливом? Чим відрізняються схеми з розімкненим і замкненим циклами самоналагодження?

2. Яка методика визначення оптимальних параметрів аналітичних СНС із налагодженням за зовнішнім впливом при ідентифікаційному підході?

3. Яким чином налагоджується система автоматизації на оптимальний режим аналітичними СНС? Яка форма залежності критерію вторинної оптимізації J від сигналу неузгодженості $g(t)$ використовується при проектуванні аналітичних СНС?

4. Як одержати вираз для варіативних параметрів $a_i(t)$ при розміщенні КП у прямому ланцюзі та у ланцюзі зворотного зв'язку системи?

ТЕМА 12. ПРИНЦИПИ ПРОЕКТУВАННЯ ПОШУКОВИХ САМОНАЛАГОДЖУВАЛЬНИХ СИСТЕМ З ОПТИМІЗАЦІЄЮ ЯКОСТІ КЕРУВАННЯ

У пошукових СНС для оптимізації критерію якості використовують спеціальні пошукові сигнали, що дозволяють визначити напрямок зміни контрольованих параметрів, що відповідає наближенню до екстремуму критерію якості. Основними операціями, що виконують пошукові СНС із оптимізацією якості керування, є визначення градієнта критерію якості та рух до екстремуму відповідно до градієнта.

12.1. Градієнтні методи пошуку екстремуму

Із математики випливає, що для визначення оптимального (екстремального) керування необхідно знайти часткову похідну від критерію оптимальності за його змінними та прирівняти до нуля.

Нехай критерій оптимальності J є функцією m змінних a_1, a_2, \dots, a_m вектора $\vec{A} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$. Більш лаконічно можна записати, що $J(a_1, a_2, \dots, a_m) = J(\vec{A})$.

Тоді умова екстремуму набере вигляду

$$\text{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}) = \left(\frac{\partial J}{\partial a_1}, \frac{\partial J}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial a_m} \right)^T = 0. \quad (12.1)$$

Методи пошуку екстремуму, що ґрунтуються на визначенні градієнта функції J , називають *градієнтними*.

Пошук екстремуму градієнтними методами містить два етапи:

- 1) визначення градієнта;
- 2) рух до екстремуму відповідно до інформації про градієнт.

Розглянемо спочатку методи руху до екстремуму в припущенні, що градієнт обчислений за кожного \vec{A} .

Загальна форма організації руху до екстремуму градієнтними методами зводиться до такої зміни вектора \vec{A} , за якого швидкість зміни параметрів вектора \vec{A} пов'язана із градієнтом функції J співвідношенням

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = B(\vec{A}) \underset{\vec{A}}{\text{grad}} J(\vec{A}), \quad (12.2)$$

де $B(\vec{A})$ – деяка квадратична m -матриця, що залежить від параметрів вектора \vec{A} .

Залежно від вигляду матриці $B(\vec{A})$ існує кілька алгоритмів руху до екстремуму.

Алгоритм 1 – *метод градієнта*.

Це один із найпоширеніших методів градієнтного пошуку екстремуму. Він застосовується, якщо швидкість зміни вектора \vec{A} пропорційна градієнту від критерію якості:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \gamma \underset{\vec{A}}{\text{grad}} J(\vec{A}), \quad (12.3)$$

де γ – деякий сталий коефіцієнт, який за пошуку максимуму $\gamma > 0$, за пошуку мінімуму $\gamma < 0$.

У розгорненому вигляді алгоритм (12.3) можна записати так:

$$\frac{da_i}{dt} = \gamma \underset{a_i}{\text{grad}} J(\vec{A}) = \gamma \frac{\partial}{\partial a_i} J(\vec{A}), \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.4)$$

Порівнюючи (12.4) з (12.2), бачимо, що $B = \gamma E$, де E – одинична матриця.

Сутність методу градієнта: за заданими параметрами вектора \vec{A} знаходять градієнт $J(\vec{A})$. Потім кожному компоненту вектора \vec{A} змінюють зі швидкістю, пропорційною складовій градієнта за цією компонентою, і знову визначають градієнт $J(\vec{A})$. Операції повторюють, поки не виконається умова (12.1).

Схематично метод градієнта можна зобразити у вигляді рис. 12.1:

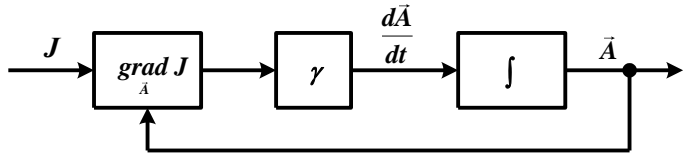


Рисунок 12.1 – Схема реалізації методу градієнта

За машинних способів пошуку екстремуму метод градієнта реалізується в дискретній формі. У цьому випадку параметри вектора \vec{A} змінюються стрибкоподібно:

$$\vec{A}_{n+1} = \vec{A}_n + \gamma \operatorname{grad} J(\vec{A}_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.5)$$

або в розгорнутому вигляді

$$a_{i(n+1)} = a_{i(n)} + \gamma \operatorname{grad} J(\vec{A}_n)_{a_i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.6)$$

Сутність алгоритму полягає у такому: задають деяке початкове значення \vec{A}_0 вектора \vec{A} ; у цій точці обчислюють градієнт $\operatorname{grad} J(\vec{A}_0)$, і кожна складова вектора \vec{A} одержує приріст, пропорційний частковій похідній функції J за цією складовою у точці \vec{A}_0 . За формулою (12.5) одержують наступну точку \vec{A}_1 . Далі ті самі дії виконують у точці \vec{A}_1 , одержуючи точку \vec{A}_2 і т. д.

Обчислення за принципом (12.5) тривають доти, доки за деякого значення $n = k$ не будуть виконані умови при пошуку максимуму або мінімуму відповідно:

$$J(\vec{A}_{k+1}) < J(\vec{A}_k), \quad (12.7)$$

$$J(\vec{A}_{k+1}) > J(\vec{A}_k). \quad (12.8)$$

За виконання умов (12.7) або (12.8) пошук припиняють, і оптимальному значенню вектора \vec{A}_k надається значення \vec{A}_k .

Коефіцієнт γ впливає на крок алгоритму: за малих значень γ збільшується кількість розрахунків, за великих значень γ алгоритм може виявитися розбіжним. Тому на практиці найчастіше використовують змінний коефіцієнт γ , що набуває на кожному кроці свого значення γ_n .

Алгоритм II – *метод найшвидшого спуску*.

Цей алгоритм відрізняється від методу градієнта лише тим, що вектор \vec{A} змінюється з постійною швидкістю, пропорційною лише градієнту в заданій початковій точці \vec{A}_0 , а не в кожній точці \vec{A} , як у методі градієнта:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \gamma \operatorname{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_0), \quad (12.9)$$

або в скалярній формі

$$\frac{da_i}{dt} = \gamma \frac{\partial}{\partial a_i} J(\vec{A}_0), \quad i = \overline{1, m}, \quad (12.10)$$

де $\gamma = \text{const}$.

На відміну від методу градієнта у методі найшвидшого спуску градієнт обчислюють лише в початковій точці \vec{A}_0 , а подальший рух відбувається в напрямку, обумовленому початковим значенням градієнта $\operatorname{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_0)$. Зміна вектора \vec{A} за правилом (12.9) відбувається доти, доки не буде одержана умова

$$\frac{dJ}{dt} = 0. \quad (12.11)$$

Якщо умова (12.11) виконується в точці \vec{A}_1 , то цим значенням \vec{A}_1 замінюють початкову точку \vec{A}_0 в (12.9) і процес пошуку повторюється, поки не буде одержана умова (12.1):

$$\operatorname{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_i) = 0. \quad (12.12)$$

Хоча метод найшвидшого спуску є багатоцикловим, (спочатку шукають точку \vec{A} , у якій виконується умова (12.11), а

потім умову (12.12)), але в межах одного циклу градієнт обчислюють лише один раз – на початку циклу.

У дискретній формі рух у межах циклу здійснюється покроково:

$$\vec{A}_{n+1} = \vec{A}_n + \gamma \operatorname{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_0), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (12.13)$$

Аналогічно методу градієнта цикл пошуку \vec{A}_n триває доти, доки не виконається одна з умов (12.7) або (12.8). При досягненні умов (12.7) або (12.8) точці \vec{A}_0 надається значення \vec{A}_k і цикл повторюється, але за іншого значення аргументу функції $J(\vec{A}_k)$, тобто

$$\vec{A}_{n+1} = \vec{A}_n + \gamma \operatorname{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_k), \quad n=k, k+1, k+2, \dots \quad (12.14)$$

Тут бачимо, що в кожному циклі буде свій крок, пропорційний $\operatorname{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_k)$.

Операцію повторюють, поки модуль різниці значень функції J у початковій і кінцевій точках чергового циклу не буде меншим від встановленої малої величини. Внаслідок цього одержимо екстремальне значення вектора $\vec{A} = \vec{A}_n$.

Алгоритм III – *узагальнений метод Ньютона*.

У багатьох практичних задачах швидше можна досягти екстремуму в (12.2), якщо за матрицю $B(\vec{A})$ використовувати від’ємну зворотну матрицю других похідних від функції J за \vec{A} :

$$B(\vec{A}) = - \left[\frac{d^2}{d\vec{A}^2} J(\vec{A}) \right]^{-1}. \quad (12.15)$$

У цьому випадку алгоритм руху до екстремуму називають *узагальненим методом Ньютона*, а матриця других похідних (12.15) – матрицею Гессе, або гессіаном.

Тоді алгоритм руху до екстремуму (12.2) набере вигляду

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = - \left[\frac{d^2}{d\vec{A}^2} J(\vec{A}) \right]^{-1} \text{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}), \quad (12.16)$$

або в дискретній формі

$$\vec{A}_{n+1} = \vec{A}_n - \left[\frac{d^2}{d\vec{A}^2} J(\vec{A}_n) \right]^{-1} \text{grad}_{\vec{A}} J(\vec{A}_n), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (12.17)$$

Сутність узагальненого методу Ньютона аналогічна методу градієнта, але за умови, що $B(\vec{A})$ не є константою.

Алгоритм IV – *метод Гауса – Зайделя*.

Складністю I–III алгоритмів є те, що екстремум шукають за аргументів функції J , що змінюються одночасно.

У методі Гауса – Зайделя спочатку визначаються екстремальні значення функції J , змінюючи лише аргумент a_1 , використовуючи метод градієнта, тобто формули (12.4) та (12.6) наберуть вигляду

$$\frac{da_i}{dt} = \gamma \frac{\partial}{\partial a_1} J(a_1, a_{20}, a_{30}, \dots, a_{m0}),$$

$$a_{1(n+1)} = a_{1(n)} + \gamma \frac{\partial}{\partial a_1} J(a_{1n}, a_{20}, a_{30}, \dots, a_{m0}), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Після визначення екстремального значення аргументу a_1 функції J , для якої виконуються умови (12.1) (за безперервного пошуку) або (12.7), (12.8) (за крокового пошуку), за такою самою методикою визначають екстремальне значення аргументу a_2 за незмінних a_1, a_3, \dots, a_m . Потім змінюють аргумент a_3 і т. д. послідовно до змінної a_m . Після цього весь цикл пошуку повторюють, знову починаючи з a_1 , і так доти, доки не будуть виконуватися умови (12.1) або (12.7), (12.8).

12.2. Методи визначення градієнта

У градієнтних методах необхідно визначати градієнт функції J . Якщо конкретний вигляд функції J відомий, то ці обчислення здійснюються аналітично, а потім результати

використовуються в структурі алгоритмів пошуку екстремумів. Однак у багатьох задачах функція J в явному вигляді невідома, але можна вимірювати її значення. У цих випадках для знаходження $\text{grad}_{\vec{A}} J$ використовується або метод чисельного диференціювання, або метод синхронного детектування.

Метод чисельного диференціювання використовується для визначення градієнта $\text{grad}_{\vec{A}} J$, якщо аналітичний вираз для J не заданий.

Нехай відоме значення функції $J(a_1, a_2, \dots, a_m)$ у деякій точці, а аналітичний вираз для J невідомий. Додамо до змінної a_1 приріст $\pm\delta a_1$ і виміряємо значення J у точках $J(a_1 - \delta a_1, a_2, \dots, a_m)$ та $J(a_1 + \delta a_1, a_2, \dots, a_m)$. Для знаходження часткової похідної від функції J за аргументом a_1 віднімемо із $J(a_1 + \delta a_1, a_2, \dots, a_m)$ значення $J(a_1 - \delta a_1, a_2, \dots, a_m)$ та поділимо на $2\delta a_1$:

$$\frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_1} \approx \frac{J(a_1 + \delta a_1, a_2, \dots, a_m) - J(a_1 - \delta a_1, a_2, \dots, a_m)}{2\delta a_1}. \quad (12.18)$$

Потім здійснюють аналогічні вимірювання й обчислення для інших a_2, a_3, \dots, a_m і знаходять компоненти $\frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_i}$ для всіх $i = \overline{1, m}$.

Метод синхронного детектування також використовують для визначення градієнта $\text{grad}_{\vec{A}} J$, якщо аналітичний вираз для J невідомий.

Нехай ϵ функція m змінних $J(a_1, a_2, \dots, a_m) = J(\vec{A})$. Додамо приросту кожному її аргументу $\delta a_i(t)$, $i = \overline{1, m}$. Внаслідок цього одержимо функцію

$$J(a_1 + \delta a_1(t), a_2 + \delta a_2(t), \dots, a_m + \delta a_m(t)).$$

Позначимо через v_i добуток цієї функції на приріст аргументу $\delta a_i(t)$:

$$v_i = J(a_1 + \delta a_1(t), a_2 + \delta a_2(t), \dots, a_m + \delta a_m(t)) \cdot \delta a_i(t), \quad (12.19)$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Розвинемо функцію

$J(a_1 + \delta a_1(t), a_2 + \delta a_2(t), \dots, a_m + \delta a_m(t))$ у ряд Тейлора:

$$J(a_1 + \delta a_1(t), a_2 + \delta a_2(t), \dots, a_m + \delta a_m(t)) \approx$$

$$\approx J(\vec{A}) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_j} \delta a_j(t) + \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^m \frac{\partial^2 J(\vec{A})}{\partial a_j \partial a_k} \delta a_j \delta a_k. \quad (12.20)$$

Підставимо розвинення в ряд Тейлора (12.20) у вираз (12.19). Одержимо:

$$v_i = J(\vec{A}) \delta a_i(t) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_j} \delta a_j(t) \delta a_i(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,j=1}^m \frac{\partial^2 J(\vec{A})}{\partial a_j \partial a_k} \delta a_j \delta a_k \delta a_i(t), \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.21)$$

Знайдемо середнє значення величини \bar{v}_i . Для цього процес $v_i(t)$ можна подати на обладнання, що виконує операцію усереднення, наприклад, фільтр Φ :

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \int_0^T v_i(t) dt, \quad (12.22)$$

де T – час усереднення.

Після підставлення (12.21) у (12.22) одержимо

$$\bar{v}_i = \frac{1}{T} \left[J(\vec{A}) \int_0^T \delta a_i(t) dt + \sum_{j=1}^m \frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_j} \int_0^T \delta a_j(t) \delta a_i(t) dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial^2 J(\vec{A})}{\partial a_j \partial a_k} \int_0^T \delta a_j(t) \delta a_k(t) \delta a_i(t) dt \right]. \quad (12.23)$$

За пошукові сигнали $\delta a_i(t)$ зазвичай вибирають синусоїдальний (гармонійний) сигнал вигляду

$$\delta a_i(t) = a \sin(\omega_i t) \quad (12.24)$$

із частотою $\omega_i = (2i + 1)\Omega$, де $\Omega = \text{const}$.

Визначимо перший доданок у (12.23), підставивши в нього (12.24):

$$\int_0^T \delta a_i(t) dt = a \int_0^T \sin(\omega_i t) dt = -a\omega_i (\cos 0 - \cos \omega_i T) = 0,$$

$$\text{де } T = \frac{2\pi}{\omega_i}.$$

Другий доданок* в (12.23):

$$\frac{1}{T} \int_0^T \delta a_j(t) \delta a_i(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j, \\ \frac{a^2}{2}, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (12.25)$$

$$\text{Третій доданок у (12.23) } \int_0^T \delta a_j(t) \delta a_k(t) \delta a_i(t) dt = 0 \quad (\text{через}$$

грозміздіксть обчислень доведення не наводиться).

Унаслідок цього одержимо, що при $i = j$

$$\bar{v}_i = \frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_i} \frac{a^2}{2}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (12.26)$$

Із виразу (12.26) бачимо, що компоненти градієнта $\frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_i}$

будуть пропорційними середньому значенню \bar{v}_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_i} &= \frac{2\bar{v}_i}{a^2} = \\ &= \frac{2}{a^2} \overline{J(a_1 + \delta a_1(t), a_2 + \delta a_2(t), \dots, a_m + \delta a_m(t)) \cdot \delta a_i(t)}. \end{aligned} \quad (12.27)$$

*Доведення виразу (12.25) наведено в додатку А

Обладнання, що множить $J(a_1 + \delta a_1(t), \dots, a_m + \delta a_m(t))$ на $\delta a_i(t)$ та усереднює їх добуток, називають *синхронним детектором* (СД).

Схема визначення градієнта $\frac{\partial J(\vec{A})}{\partial \vec{A}}$ методом синхронного детектування наведена на рис. 12.2.

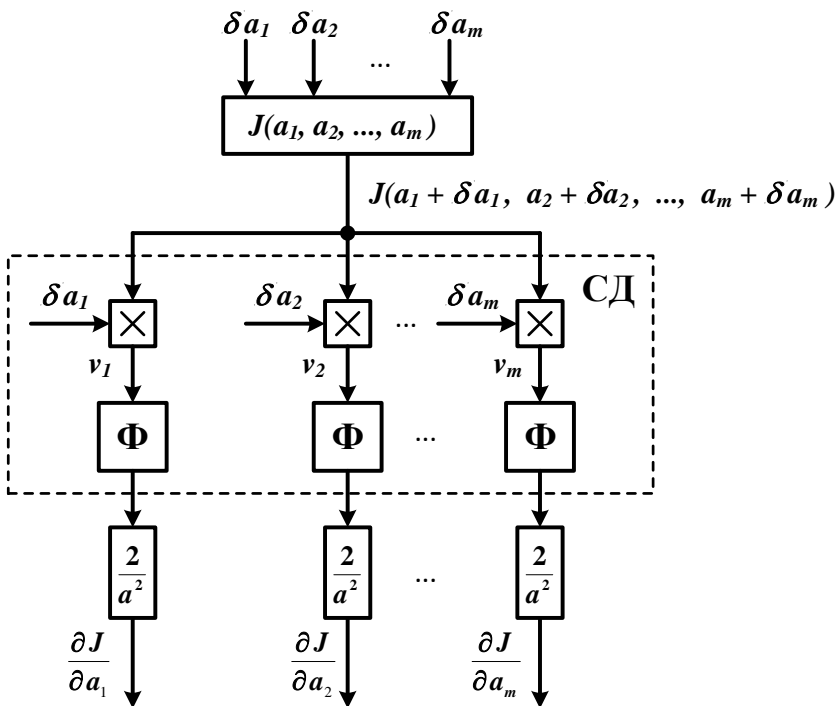


Рисунок 12.2 – Схема визначення градієнта методом синхронного детектування

12.3. Пошукові самоналагоджувальні системи із оптимізацією якості керування

Як зазначалося вище (п. 9.1), за способом налагодження СНС можна поділити на СНС із налагодженням за зовнішнім впливом та СНС із налагодженням за характеристиками ОК.

В обох випадках пошукові СНС спочатку визначають градієнт від критерію оптимальності, а потім за його значенням рухаються до екстремуму. Найчастіше в пошукових СНС для визначення градієнта використовують метод синхронного детектування, а для руху до екстремуму – метод градієнта.

1. Пошукові СНС із налагодженням за зовнішнім впливом

Такі СНС часто будують за замкненою схемою, аналогічною аналітичним СНС (див. рис. 1.11 б), але замість аналізу помилок $\varepsilon(t)$ мінімізують деякий критерій вторинної оптимізації $J(\varepsilon)$, що залежить від помилки $\varepsilon(t)$.

Нехай критерій вторинної оптимізації $J(\varepsilon)$ описується виразом

$$J(\varepsilon) = \int_0^t \varepsilon^2(\tau) e^{-\frac{(t-\tau)}{T}} d\tau. \quad (12.28)$$

Цей інтеграл відповідає інтегралу згортки. Для технічної його реалізації необхідно значення помилки $\varepsilon^2(\tau)$ піднести до квадрата і подати на вхід аперіодичної ланки першого порядку з

передавальною функцією $\frac{1}{Ts + 1}$. Відповідно до

вищевикладеного схему пошукової СНС із налагодженням за зовнішнім впливом можна зобразити у вигляді рис. 12.3.

Опис схеми: помилку $\varepsilon(t)$ вимірюють, підносять до квадрата і подають на вхід аперіодичної ланки $\frac{1}{Ts + 1}$, на виході якої одержують критерій вторинної оптимізації $J(\varepsilon)$. Із генератора гармонічних коливань на КП подають коливання, що

змінюють налагоджувальні параметри a_1, a_2, \dots, a_m на величини $\delta a_1, \delta a_2, \dots, \delta a_m$. Ці самі пошукові гармонічні коливання δa_i подаються й на помножувач синхронного детектора СД. За допомогою фільтрів Φ_i сигнал, що дорівнює добутку $J(a_1 + \delta a_1(t), a_2 + \delta a_2(t), \dots, a_m + \delta a_m(t))$ на $\delta a_i(t)$, усереднюють та множать на коефіцієнт $\frac{2}{a^2}$. За формулою (12.27) на виході фільтрів синхронних детекторів СД утворюються складові градієнта $\frac{\partial J(\vec{A})}{\partial a_i}$, які після інтеграторів $\frac{\gamma}{s}$ будуть варіативними параметрами a_i КП.

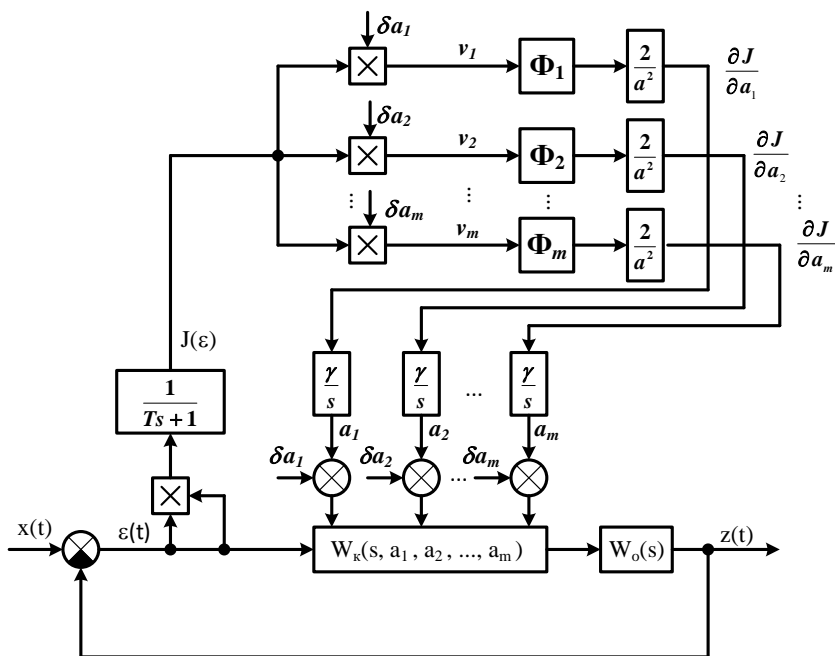


Рисунок 12.3 – Структурна схема пошукової СНС із налагодженням за зовнішнім впливом

2. Пошукові СНС із налагодженням за характеристиками ОК

У таких СНС часто використовують еталонну модель. У випадку еталонної моделі критерій вторинної оптимізації $J(g(t))$ є функцією від сигналу неузгодженості $g(t)$ між виходами моделі $z_M(t)$ та реальної системи $z(t)$.

Нехай $J(g) = g^2(t)$. Тоді схема пошукової СНС із налагодженням за характеристиками ОК може бути наведена у вигляді рис. 12.4.

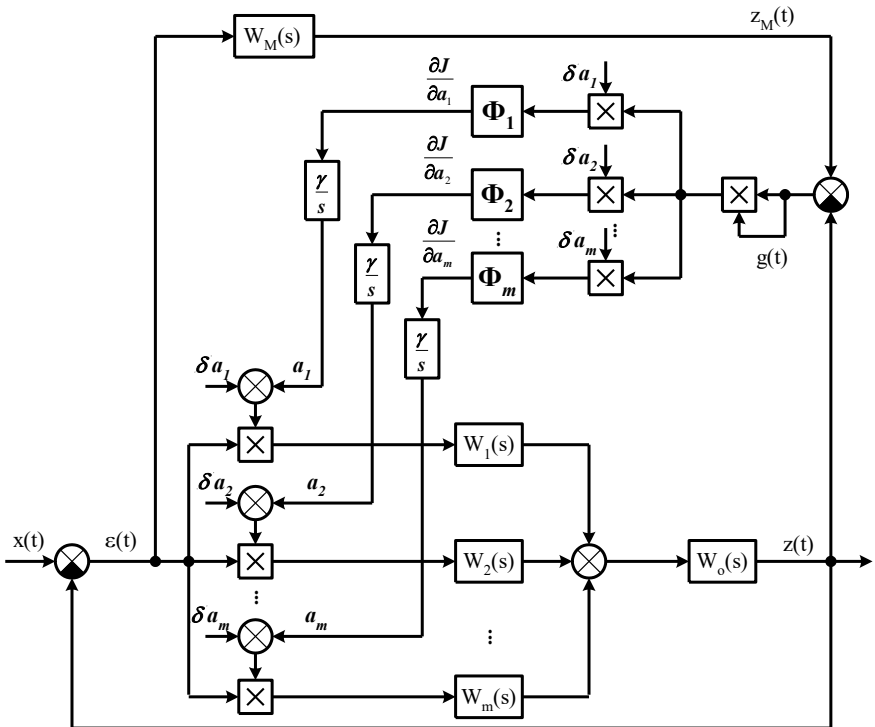


Рисунок 12.4 – Структурна схема пошукової СНС із налагодженням за характеристиками ОК

Опис схеми: на вхід моделі з передавальною функцією $W_M(s)$ подається сигнал помилки керування $\varepsilon(t)$. Різницю вихідних сигналів моделі та реальної системи $g(t)$ підносять до квадрата, тобто визначається критерій оптимальності (11.6) $J(g) = g^2(t)$. За допомогою синхронних детекторів СД, робота яких докладно описана в попередній схемі (рис. 12.3), визначаються компоненти градієнта $\frac{\partial J}{\partial a_i}$, використовуючи метод градієнта (12.4):

$$a_i = \gamma \int \underset{a_i}{grad} J(\vec{A}) dt = \frac{\gamma}{s} \underset{a_i}{grad} J(\vec{A}).$$

КП являє собою паралельне з'єднання m -ланцюгів, які містять коригувальні обладнання $W_i(s)$ та підсилювачі з передавальним налагоджувальним коефіцієнтом a_i .

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягають градієнтні методи пошуку екстремуму? Як здійснюється рух до екстремуму за допомогою методу градієнта?
2. Чим відрізняється метод найшвидшого спуску від методу градієнта?
3. Які особливості узагальненого методу Ньютона та методу Гауса – Зайделя?
4. У яких випадках використовують методи визначення градієнта? Опишіть метод чисельного диференціювання.
5. У чому полягає метод синхронного детектування? Яким чином одержують вираз для градієнта? Побудуйте структурну схему.
6. Який принцип побудови пошукових СНС з оптимізацією якості керування з налагодженням за зовнішнім впливом? Які

залежності критеріїв оптимізації використовують при проектуванні пошукових СНС?

7. Який принцип роботи схеми пошукової СНС з оптимізацією якості керування з налагодженням за характеристиками об'єкта керування?

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ

Задача 1. Використовуючи метод розкладання на елементарні дроби, одержати рівняння стану, якщо об'єкт керування описують рівнянням

$$a_2 \ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = b_2 \ddot{u}(t) + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t).$$

Варіант	a_2	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
1	1	-12	35	7	-12	16
2	1	-23	126	1	-4	0
3	1	3	2	1	-7	8
4	1	-25	150	1	0	25
5	1	-7	10	4	-7	12
6	1	-10	24	1	-5	16
7	1	-15	50	1	0	5
8	1	-12	35	4	-3	15
9	1	-6	8	1	0	2
10	1	4	-21	3	0	-1
11	1	-12	35	2	-7	12
12	1	-6	-16	1	0	1
13	1	3	-4	2	0	1
14	1	-7	12	2	-3	4
15	1	-9	16,25	1	0	4
16	1	-11	30	1	-6	11
17	1	-120	-625	4	-30	15
18	1	22	21	8	0	4
19	1	-16	28	1	-5	10
20	1	-11	10	1	-6	11

Задача 2. Одержати рівняння стану, не розв'язуючи характеристичне рівняння, якщо об'єкт керування описують рівнянням $a_2\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_0z(t) = b_2\ddot{u}(t) + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t)$.

Варіант	a_2	a_1	a_0	b_2	b_1	b_0
1	1	-5	6	1	3	1
2	1	-11	10	1	-6	11
3	10	-34	72	4	-12	12
4	8	3	6	8	0	10
5	2	8	22	2	0	1
6	4	16	1	20	7	20
7	8	16	1	12	8	1
8	2	4	1	8	2	1
9	1	-7	10	4	-7	12
10	1	-10	24	2	-5	16
11	5	20	1	10	5	3
12	2	14	16	2	0	1
13	1	-12	35	4	-3	15
14	4	8	2	13	4	2
15	1	4	-21	3	0	-1
16	4	20	-12	4	0	2
17	1	-12	35	2	-7	12
18	1	-6	-16	1	0	1
19	2	14	8	2	0	1
20	2	7	3	1	0	2

Задача 3. Одержати рівняння стану, якщо об'єкт керування описують рівнянням $a_2\ddot{z}(t) + a_1\dot{z}(t) + a_0z(t) = bu(t)$.

Варіант	a_2	a_1	a_0	b
1	14	20	5	2
2	2	8	22	2
3	2	14	16	2
4	4	10	2	1
5	20	14	16	2
6	3	2	7	3
7	1	-11	10	11
8	10	-34	72	12
9	8	3	6	10
10	2	8	22	1
11	4	16	1	20
12	8	16	1	1
13	2	4	1	1
14	1	-7	10	12
15	1	-10	24	16
16	5	20	1	3
17	2	14	16	1
18	1	-12	35	15
19	4	8	2	2
20	1	4	-21	-1

Задача 4. Методом варіаційного числення дослідити на екстремум функціонал J . Перевірити за допомогою умови Лежандра максимуму або мінімуму набирає функціонал за одержаної екстремалі.

Варіант	Критерій J	Граничні умови
1	2	3
1	$J = \int_1^4 (20\dot{u}^2 + 10ut^2) dt$	$u(1) = 10,$ $u(4) = -15$
2	$J = \int_1^4 (\dot{u}^2 - 4ut) dt$	$u(1) = 0, u(4) = -1$
3	$J = \int_0^4 (u^2 - 7ut^2) dt$	$u(0) = 0, u(4) = 56$
4	$J = \int_0^\pi (3\dot{u}^2 - u \sin t) dt$	$u(0) = 6, u(\pi) = 0$
5	$J = \int_1^4 (8\dot{u} + 4\dot{u}t + 10u^2t^2) dt$	$u(1) = 4, u(4) = 5$
6	$J = \int_1^7 (7\dot{u}^2 + ut) dt$	$u(1) = 3, u(7) = 5$
7	$J = \int_0^2 (2\dot{u}^2 + ue^{2t}) dt$	$u(0) = 4,$ $u(2) = \left(\frac{e}{2}\right)^4$
8	$J = \int_{-1}^2 (-5\dot{u}^4 + 20\dot{u}^2 + 5) dt$	$u(-1) = -1,$ $u(2) = 5$
9	$J = \int_1^3 (6\dot{u}^2 + 2ut) dt$	$u(1) = 4, u(3) = -8$
10	$J = \int_1^5 (4\dot{u}^2 + 4ut) dt$	$u(1) = 1, u(5) = 6$

1	2	3
11	$J = \int_1^3 (\dot{u}^2 + 2\dot{u}t) dt$	$u(1) = 1, u(3) = 1$
12	$J = \int_2^3 (2\dot{u}^2 + u(t+1)) dt$	$u(2) = -1, u(3) = 5$
13	$J = \int_0^6 (2\dot{u}^2 + 8u) dt$	$u(0) = 10,$ $u(6) = -2$
14	$J = \int_1^3 (6\ddot{u} + 9\dot{u}t + 3u^2t^2) dt$	$u(1) = 1,5, u(3) = \frac{1}{6}$
15	$J = \int_1^4 (4\dot{u}^2 + 8ut^3) dt$	$u(1) = 2, u(4) = -3$
16	$J = \int_1^4 (0,1\ddot{u}t + \dot{u}^2 + 10ut) dt$	$u(1) = 0, u(4) = -1$
17	$J = \int_1^3 (\dot{u}^2 + 8ut) dt$	$u(1) = 0, u(3) = 1$
18	$J = \int_1^3 (2\ddot{u} + 16\dot{u}^3 + 8ut) dt$	$u(1) = 8,$ $u(3) = -12$
19	$J = \int_2^4 (\ddot{u}t^2 + 2\dot{u}^2 - 4t) dt$	$u(2) = 1, u(4) = 2$
20	$J = \int_1^2 (4\ddot{u}t^3 + 5\dot{u}^2 - 3\cos t) dt$	$u(1) = 4, u(2) = 6$

Задача 5. Нехай екстремаль функціонала J має один злам. Знайти цю екстремаль $\bar{u}(t)$.

Варіант	Критерій J	Граничні умови
1	2	3
1	$J = \int_{-3}^4 (-2\dot{u}^4 + 12\dot{u}^2 - 18) dt$	$u(-3) = 2,$ $u(4) = 7$
2	$J = \int_{-2}^2 \left(-6\dot{u}^4 + 14\dot{u}^2 - \frac{49}{6} \right) dt$	$u(-2) = 1, u(2) = 4$
3	$J = \int_{-2}^1 (\dot{u}^2 - 2)^2 dt$	$u(-2) = 0, u(1) = 2$
4	$J = \int_{-2}^2 (-3\dot{u}^4 + 12\dot{u}^2 - 12) dt$	$u(-2) = 1, u(2) = 4$
5	$J = \int_{-2}^2 \left(-12\dot{u}^4 + 52\dot{u}^2 - \frac{169}{3} \right) dt$	$u(-6) = 4,$ $u(6) = 8$
6	$J = \int_0^2 \left(\dot{u}^4 - \dot{u}^2 + \frac{1}{4} \right) dt$	$u(0) = 2, u(6) = 5$
7	$J = \int_{-2}^2 (-3\dot{u}^4 + 6\dot{u}^2 - 3) dt$	$u(-2) = 1, u(2) = 4$
8	$J = \int_{-1}^1 (2\dot{u}^2 - 1)^2 dt$	$u(-1) = 1, u(1) = 2$
9	$J = \int_0^1 \left(3\dot{u}^4 - 3\dot{u}^2 + \frac{3}{4} \right) dt$	$u(0) = 3, u(2) = 4$
10	$J = \int_{-2}^0 \left(-12\dot{u}^4 + 2\dot{u}^2 - \frac{1}{12} \right) dt$	$u(-4) = 4,$ $u(0) = 5$
11	$J = \int_2^4 \left(-2\dot{u}^4 + 6\dot{u}^2 - \frac{9}{2} \right) dt$	$u(2) = 2, u(4) = 4$

1	2	3
12	$J = \int_0^6 \left(-3\dot{u}^4 + 7\dot{u}^2 - \frac{49}{12} \right) dt$	$u(0) = 1, u(6) = 4$
13	$J = \int_0^1 (\dot{u}^2 - 1)^2 dt$	$u(0) = 0, u(3) = 2$
14	$J = \int_{-3}^3 \left(-5\dot{u}^4 + \dot{u}^2 - \frac{1}{20} \right) dt$	$u(-3) = 2, u(3) = 3$
15	$J = \int_{-2}^2 (-2\dot{u}^4 + 18\dot{u}^2 - 24) dt$	$u(-2) = 0,$ $u(2) = 4$
16	$J = \int_{-2}^4 \left(\dot{u}^4 - 3\dot{u}^2 + \frac{9}{4} \right) dt$	$u(-2) = 2,$ $u(4) = 7$
17	$J = \int_{-4}^0 \left(4\dot{u}^4 - 9\dot{u}^2 + \left(\frac{9}{4} \right)^2 \right) dt$	$u(-4) = 2,$ $u(0) = 4$
18	$J = \int_{-1}^1 (\dot{u}^2 - 2)^2 dt$	$u(-1) = -2,$ $u(2) = 1$
19	$J = \int_{-3}^2 (-2\dot{u}^4 + \dot{u}^2) dt$	$u(-3) = 3,$ $u(2) = 4$
20	$J = \int_{-2}^6 (\dot{u}^4 - 8\dot{u}^2 + 16) dt$	$u(-2) = 4,$ $u(6) = 6$

Задача 6. Знайти найменшу відстань між кривою $\bar{u}(t_0) = \varphi_1(t_0)$ та прямою $\bar{u}(T) = \varphi_2(T)$. Довжина кривої, що з'єднує точки $(t_0, u(t_0))$ та $(T, u(T))$ в площині t, u , визначається критерієм J .

Варіант	Критерій J	$\varphi_1(t_0)$	$\varphi_2(T)$
1	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + 2\dot{u}^2} dt$	t^2	$t - 4$
2	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{4\dot{u} + 2} dt$	$3t^2$	$3t - 3$
3	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + \dot{u}^2} dt$	$2e^{2t}$	$t - 2$
4	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{1 + 4\dot{u}^2} dt$	t^2	$2t^2 + 4$
5	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{2 + \dot{u}^2} dt$	t^3	$t - 4$
6	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{3 + 6\dot{u}^2} dt$	$t^2 - 1$	$2t - 6$
7	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{\dot{u}^2 + 5} dt$	$\ln(t) - 4$	$t - 6$
8	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{2 + 3\dot{u}^2} dt$	t	$2t^2 - 1$
9	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{\dot{u}^2 + 2} dt$	t^3	$2 - t$
10	$J = \int_{t_0}^T \sqrt{4 + \dot{u}^2} dt$	t^2	$2t - 1$

Задача 7. Нехай задані передавальні функції керувального пристрою $W_{\kappa}(s)$, об'єкта керування $W_o(s)$, задавальний вплив $x(t)$ та критерій якості $J = 0,5 \int_0^{\infty} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt$. Визначити оптимальне значення параметра T .

Варіант	$x(t)$	$W_{\kappa}(s)$	$W_o(s)$
1	$2(t)$	$\frac{4k_{\kappa}T}{(Ts-2)}$	$\frac{k_o}{5s}$
2	$1(t)$	$\frac{k_{\kappa}}{(Ts-1)}$	$\frac{k_oT}{2s}$
3	$1(t)$	$\frac{k_{\kappa}T+1}{(4Ts+6)}$	$\frac{k_o}{2s}$
4	$2(t)$	$\frac{3k_{\kappa}T}{(Ts+2)}$	$\frac{4k_o+5}{s}$
5	$2(t)$	$\frac{5T}{(Ts+1)}$	$\frac{4}{s}$
6	$4(t)$	$\frac{8k_{\kappa}T}{(2Ts+3)}$	$\frac{5k_o}{s}$
7	$1(t)$	$\frac{k_{\kappa}T}{(T^2s-3)}$	$\frac{2k_o}{s}$
8	$1(t)$	$\frac{k_{\kappa}T}{(Ts+4)}$	$\frac{3k_o}{s}$
9	$1(t)$	$\frac{4k_{\kappa}T}{(T^2s+4)}$	$\frac{3k_o}{s}$
10	$13(t)$	$\frac{k_{\kappa}T}{(Ts-3)}$	$\frac{5k_o}{s}$

Задача 8. Нехай об'єкт керування описується передавальною функцією $W_o(s)$, задавальний вплив $x(t)$.

Методом варіаційного числення визначити передавальну функцію керувального пристрою $W_k(s)$, за якого критерій якості

$$J = 0,5 \int_0^{\infty} [q\varepsilon^2(t) + ru^2(t)] dt \text{ набуває мінімального значення.}$$

Варіант	$x(t)$	$W_o(s)$
1	2	3
1	$8(t)$	$\frac{5}{s}$
2	t^2	$\frac{10}{s}$
3	$1(t)$	$\frac{2k_o + 3}{s}$
4	$2(t)$	$\frac{4k_o + 5}{s}$
5	$4(t)$	$\frac{13k_o - 8}{s}$
6	$6(t)$	$\frac{5}{s}$
7	$4(t)$	$\frac{6}{s}$
8	$10(t)$	$\frac{13k_o - 8}{s}$
9	$2(t)$	$\frac{4}{s}$
10	$8(t)$	$\frac{3k_o + 3}{s}$

1	2	3
11	$1(t)$	$\frac{5k_o^3}{s}$
12	$1(t)$	$\frac{2k_o}{s}$
13	$7(t)$	$\frac{4k_o + 7}{s}$
14	$9(t)$	$\frac{5k_o}{7s}$
15	$3(t)$	$\frac{3}{s}$
16	t^3	$\frac{3}{s}$
17	$3(t)$	$\frac{2}{s}$
18	t^2	$\frac{3}{s}$
19	$5(t)$	$\frac{16k_o + 6}{s}$
20	$3(t)$	$\frac{2k_o}{s}$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Соколов С. В. Оптимальні та адаптивні системи : конспект лекцій / укладач С. В. Соколов. – Суми : Сумський державний університет, 2012. – 166 с.
2. Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни «Оптимальні та адаптивні системи» / укладач С. В. Соколов. – Суми : Сумський державний університет, 2012. – 98 с.
3. Чураков Е. П. Оптимальные и адаптивные системы : учебное пособие / Е. П. Чураков. – Москва : Энергоатомиздат, 1987. – 256 с.
4. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы : учебное пособие / А. Г. Александров. – Москва : Электронная книга, 2003. – 278 с.
5. Попович М. Г. Теорія автоматичного керування : підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук ; за ред. А. С. Мнищенко. – Київ : Либідь, 1997. – 544 с.

Додаток А
(довідковий)

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ В РЯД ТЕЙЛОРА

Функцію $f(x)$ в межах точки 0 можна розвинути в ряд Тейлора за формулою

$$f(x) \approx f(0) + \frac{\partial f(0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} + \dots$$

Тоді розвинення в ряд Тейлора для різниці функцій

$$f(\Delta x) = f(x) - f(0) = f(0) - f(0) + \frac{\partial f(0)}{\partial x} \frac{\Delta x}{1!} = \frac{\partial f(0)}{\partial x} \Delta x.$$

Якщо в (6.24) взяти $\Delta x = \delta \tilde{Y}$, $x = \tilde{Y}$, $f(0) = \frac{d\tilde{Y}}{dt}$ та

$f(\Delta x) = \frac{d}{dt}(\delta \tilde{Y})$, то

$$\frac{d}{dt}(\delta \tilde{Y}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \frac{d\tilde{Y}}{dt} \delta \tilde{Y}.$$

ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ СИГНУМ

Функція сигнум, що використовується в пп. 7.2–7.4, має такі властивості:

$$\text{sign}\{x\} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{sign}\{x\} \cdot |x| = x, \quad x \cdot \text{sign}\{x\} = |x|.$$

Продовження додатка А

ДОВЕДЕННЯ ВИРАЗУ (12.25)

При $i \neq j$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \delta a_j(t) \delta a_i(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) dt = \\ &= \frac{a^2}{T} \left[\int_0^T \cos(\omega_1 - \omega_2)t dt - \int_0^T \cos(\omega_1 + \omega_2)t dt \right] = \\ &= \frac{a^2}{T} \left[\int_0^T \cos 2\Omega t dt - \int_0^T \cos 8\Omega t dt \right] = \frac{a^2}{T} 2\Omega \sin 2\Omega t \Big|_0^T - \\ &- \frac{a^2}{T} 8\Omega \sin 8\Omega t \Big|_0^T = \frac{a^2}{T} 2\Omega (\sin 4\pi - 4 \sin 16\pi) = 0. \end{aligned}$$

При $i = j$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \delta a_j(t) \delta a_i(t) dt &= \frac{1}{T} \int_0^T a^2 \sin^2(\omega t) dt = \\ &= \frac{a^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{a^2}{2T} T - \frac{a^2}{2T} 2\omega \sin 2\omega t \Big|_0^T = \\ &= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2T} 2\omega \sin 4\pi = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Додаток Б
(довідковий)

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ГАМІЛЬТОНА –
ЯКОБІ (7.16), (7.17)**

Нехай об'єкт керування описують рівняннями стану (7.13):

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = u(t), \quad |u| \leq C, \quad (\text{Б.1})$$

де керування $u(t)$ може задовольняти два значення:
 $u(t) = \pm 1$.

Спочатку візьмемо $u(t) = 1$.

Поділивши одне рівняння на інше, виключаємо змінну t :

$$\frac{dy_1(t)}{dy_2(t)} = y_2(t). \quad (\text{Б.2})$$

Проінтегруємо (Б.2):

$$y_1(t) = \int y_2(t) dy_2 = \frac{y_2^2(t)}{2} + \gamma_1, \quad (\text{Б.3})$$

де γ_1 – стала інтегрування.

Таким чином, розв'язанню рівнянь стану (Б.1) відповідає сім'я парабол у фазовій площині $y_1 O y_2$, кожна з яких є фазовою траєкторією цієї системи (рис. Б.1).

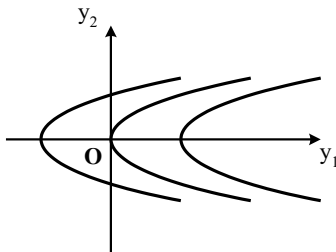


Рисунок Б.1 – Фазова траєкторія системи (Б.1) при $u(t) = 1$

Продовження додатка Б

Провівши аналогічні міркування при $u(t) = -1$, одержимо

$$y_1(t) = -\frac{y_2^2(t)}{2} + \gamma_2. \quad (\text{Б.4})$$

Припустимо, що оптимальний рух фазової точки починається із точки $M(y_1^M, y_2^M)$ у початок координат $O(0, 0)$ і відбувається спочатку за параболою із сім'ї (Б.4) при $u(t) = -1$ (рис. Б.2).

Оскільки точка $M(y_1^M, y_2^M)$ знаходиться на параболі, то для цієї точки можна записати, що

$$y_1^M = -\frac{(y_2^M)^2}{2} + \gamma_2,$$

а парабола, що проходить через точку $M(y_1^M, y_2^M)$, визначається рівнянням

$$y_1 = -\frac{1}{2} \left[y_2^2 - (y_2^M)^2 \right] + y_1^M. \quad (\text{Б.5})$$

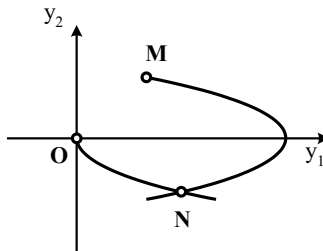


Рисунок Б.2 – Оптимальний рух фазової точки

Для того щоб фазова точка потрапила в точку $O(0, 0)$, припустимо, що після перетину параболи із сім'ї (Б.3) при $u(t) = 1$ подальший оптимальний рух відбувається по параболі

Продовження додатка Б

$$y_1(t) = \frac{y_2^2(t)}{2}, \quad (\text{Б.6})$$

яка проходить через початок координат.

Позначимо точку перетину парабол $N(y_1^N, y_2^N)$.

Визначимо ординату y_2^N точки N , підставивши (Б.6) в (Б.5):

$$\frac{(y_2^N)^2}{2} = -\frac{1}{2}[(y_2^N)^2 - (y_2^M)^2] + y_1^M, \quad y_2^N = \sqrt{\frac{1}{2}(y_2^M)^2 + y_1^M}.$$

Час руху фазової точки з M у N при $u(t) = -1$ можна визначити з рівняння

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -1,$$

після інтегрування якого одержимо $\int_{y_2^N}^{y_2^M} dy_2 = -\int_{t_N}^{t_M} dt$;

$$y_2^M - y_2^N = t_N - t_M.$$

Час руху фазової точки з N у початок координат O при $u(t) = 1$ можна визначити з рівняння

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = 1.$$

Звідси випливає, що $\int_{y_2^O}^{y_2^N} dy_2 = \int_{t_O}^{t_N} dt$; $y_2^N - 0 = t_N - t_O$.

Тоді повний час руху фазової точки

$$\begin{aligned} T = t_O - t_M &= (t_N - y_2^N) - (t_N - y_2^M + y_2^N) = -2y_2^N + y_2^M = \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2}(y_2^M)^2 + y_1^M} + y_2^M. \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Продовження додатка Б

Якщо рух починається спочатку по параболі із сім'ї (Б.3) при $u(t) = 1$, а потім триває по параболі (Б.4) при $u(t) = -1$, то, виконавши аналогічні операції, одержимо вираз

$$T = 2\sqrt{\frac{1}{2}(y_2^M)^2 - y_1^M - y_2^M}. \quad (\text{Б.8})$$

Як бачимо з виразів (Б.7) та (Б.8), час руху фазової точки в початок координат залежить лише від координат початкової точки. Оскільки за початкову точку може бути вибрана будь-яка точка фазової площини, обумовлена рівняннями стану (Б.1), то одержимо вираз (7.18).

Навчальне видання

Соколов Сергій Вікторович

**ОПТИМАЛЬНІ ТА АДАПТИВНІ
СИСТЕМИ**

Навчальний посібник

Художнє оформлення обкладинки О. С. Соколова
Редактор Н. З. Ключко
Комп'ютерне верстання С. В. Соколова

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 13,02. Обл.-вид. арк. 10,83. Тираж 300 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.