

УДК 533.9:621.373

КП

№ держреєстрації 0117U002253

Інв. №

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет  
(СумДУ)  
40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2  
тел. (0542) 687-776 факс(0542) 33-40-49

ЗАТВЕРДЖУЮ  
Проректор з наукової роботи  
д-р фіз.-мат. наук, професор

\_\_\_\_\_ А.М. Чорноус

ЗВІТ  
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

МУЛЬТИГАРМОНІЧНІ ПЛАЗМОВО-ПУЧКОВІ ТА ДВОПОТОКОВІ  
СУПЕРГЕТЕРОДИННІ ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З ГВИНТОВИМИ  
ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ  
(проміжний)

Начальник НДЧ  
канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Д. І. Курбатов

Керівник НДР  
д-р фіз.-мат. наук, професор

О. В. Лисенко

2017

Рукопис завершено 25 грудня 2017 року  
Результати цієї роботи розглянуто науковою радою СумДУ, протокол №4 від  
28.12.2017

## СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, гол. наук. співроб.

д-р фіз.-мат. наук.,

зав. каф. ПМтаМСС

\_\_\_\_\_

(підпис)

(25.12.17)

О. В. Лисенко  
(вступ, висновки)

наук. співроб.

доцент, канд. фіз.-мат. наук

\_\_\_\_\_

(підпис)

(25.12.17)

В. В. Коваль  
(розділ 1)

наук. співроб.

доцент, канд. фіз.-мат. наук

\_\_\_\_\_

(підпис)

(25.12.17)

М. Ю. Ромбовський  
(розділ 3)

наук. співроб.

асистент, канд. фіз.-мат. наук

\_\_\_\_\_

(підпис)

(25.12.17)

Г. А. Олексієнко  
(реферат,  
розділ 2)

мол. наук. співроб.

аспірант

\_\_\_\_\_

(підпис)

(25.12.17)

Ю. Ю. Волк  
(підрозділ 1.2,  
підрозділ 1.4)

інженер

студент

\_\_\_\_\_

(підпис)

(25.12.17)

Д. В. Волк  
(підрозділ 2.2)

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 65 с., 11 рис., 52 джерел.

### ГВИНТОВІ ЕЛЕКТРОННІ ПУЧКИ, ПЛАЗМОВО-ПУЧКОВА НЕСТІЙКІСТЬ, ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ, ХВИЛІ ПРОСТОРОВОГО ЗАРЯДУ

Об'єкт дослідження – фізичні процеси вимушеного випромінювання електромагнітних хвиль сильнострумовими релятивістськими електронними пучками.

Предмет дослідження – закономірності формування потужних електромагнітних хвиль із широким частотним спектром у міліметровому-інфрачервоному діапазоні супергетеродинними лазерами на вільних електронах (СЛВЕ) з гвинтовими релятивістськими електронними пучками (РЕП), з'ясування впливу множинних трихвильових параметричних взаємодії на процеси вимушеного випромінювання електромагнітних полів.

Мета роботи – встановлення основних фізичних закономірностей, що пов'язані з формуванням у мультигармонічних двопотокових та плазмово-пучкових СЛВЕ з гвинтовими РЕП потужного електромагнітного випромінювання з широким частотним спектром в міліметровому-інфрачервоному діапазонах довжин хвиль.

Методи дослідження – в якості базового методу теоретичного аналізу мультигармонічних взаємодій у досліджуваних СЛВЕ використовувався метод усереднених характеристик. Також використовувалися метод повільно змінних амплітуд та стандартні чисельні та чисельно-аналітичні методи.

Проведено модернізацію методу усереднених характеристик стосовно до завдань динаміки мультигармонічних електромагнітних хвиль у плазмово-пучкових СЛВЕ з гвинтовими РЕП. Побудовані мультигармонічні нелінійні теорії плазмово-пучкових СЛВЕ із двома типами накачок та гвинтовими РЕП. Проведено аналіз рівнів і механізмів насичення для різних режимів роботи. Визначено найбільш ефективні режими роботи. Вивчено вплив параметрів гвинтового РЕП та повздовжнього фокусуєчого магнітного поля на підсилювальні характеристики плазмово-пучкового СЛВЕ.

## ЗМІСТ

Список умовних позначень .....	5
Вступ.....	6
1 Особливості застосування методу усереднених характеристик у плазмо-пучкових супергетеродинах лазерів на вільних електронах з гвинтовими електронними пучками .....	8
1.1 Модель, вихідні рівняння .....	8
1.2 Модернізований метод усереднених характеристик .....	12
1.3 Висновки .....	27
2 Модель плазмо-пучкового супергетеродина ЛВЕ доплертрона типу з гвинтовим РЕП .....	28
2.1 Модель.....	28
2.2 Система кубічно-нелінійних вкорочених рівнянь для комплексних амплітуд хвиль.....	31
2.3 Аналіз динаміки хвиль у слабосигнальному наближенні .....	36
2.4 Висновки .....	45
3 Аналіз формування хвилі просторового заряду з широким мультигармонічним спектром у двопотоковому електронному релятивістському пучку методом частинка в комірці (PIC) .....	28
3.1 Модель.....	47
3.2 Аналіз.....	48
3.3 Висновки .....	55
Перелік джерел посилання .....	58

**СПИСОК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ**

ХПЗ	– хвиля просторового заряду;
ЛВЕ	– лазер на вільних електронах;
мм-субмм	– міліметровий-субміліметровий;
РЕП	– релятивіський електронний пучок;
НВЧ	– надвисока частота;
СЛВЕ	– супергетеродинний лазер на вільних електронах;
$c.c.$	– комплексно-спряжена величина (complex conjugate);
$c$	– швидкість світла;
$e$	– заряд електрона;
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	– орти осей $X, Y, Z$ відповідно;
$i$	– уявна одиниця;
$m_e$	– маса електрона;
$\gamma$	– релятивіський фактор;
$\omega_H$	– циклотрона частота

## ВСТУП

Серед приладів релятивістської надвисокочастотної електроніки одними з найбільш перспективних із практичної та цікавих із теоретичної точок зору є лазери на вільних електронах (ЛВЕ) [1-4]. Це обумовлено тим, що ці прилади здатні генерувати, підсилювати потужне когерентне електромагнітне випромінювання в широкому діапазоні довжин хвиль від міліметрового до рентгенівського [5-13]. Серед різних типів ЛВЕ необхідно виділити СЛВЕ [14-33], що характеризуються високими підсилювальними властивостями. Ці властивості пов'язані з тим, що СЛВЕ використовують додатковий механізм підсилення однієї з хвиль, які беруть участь у параметричному резонансі. Як додатковий механізм підсилення плазмово-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах використовують плазмово-пучкову нестійкість. Завдяки додатковому механізму підсилення за помірних вимог до параметрів плазмово-пучкові СЛВЕ є більш компактними, мають більші вихідні потужності, значення коефіцієнта підсилення та інше порівняно з традиційними ЛВЕ.

Актуальність теми: відомо, що використання гвинтових релятивістських електронних пучків (РЕП) у пристроях потужнострумової електроніки з поздовжнім магнітним полем у ряді випадків призводить до підвищення їх ефективності [34-37]. Тому можна припустити, що використання гвинтових релятивістських електронних пучків у плазмово-пучкових СЛВЕ дозволить одержати більш високі значення інкрементів зростання хвиль та інших параметрів порівняно з плазмово-пучковими СЛВЕ, що використовують прямолінійні електронні пучки.

Відзначимо, що у плазмово-пучкових СЛВЕ використовують хвилі просторового заряду (ХПЗ), які експоненціально зростають завдяки плазмово-пучковій нестійкості й характеризуються лінійною дисперсійною залежністю. Це приводить до того, що для великої кількості гармонік ХПЗ виконуються умови трихвильового параметричного резонансу, тобто мають місце множинні резонансні взаємодії. Відомо, що мультигармонічні взаємодії в плазмово-пучкових СЛВЕ із прямолінійними електронними пучками істотно впливають на динаміку хвиль. Тому

можна очікувати, що і в плазмово-пучкових СЛВЕ із гвинтовими електронними пучками множинні резонансні взаємодії також будуть мати істотний вплив на роботу пристрою [16-27]. Таким чином, вивчення мультигармонічних процесів у плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах із гвинтовими електронними пучками є завданням важливим та актуальним.

Основні результати даної науково-дослідної роботи подані в роботах [38—52].

# 1 ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК У ПЛАЗМО-ПУЧКОВИХ СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ ЛАЗЕРАХ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ

В даному розділі викладені особливості застосування методу усереднених характеристик при вирішенні задачі руху і неперервності в плазмо-пучкових супергетеродинах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками. Для опису множинних параметричних взаємодій гармонік хвиль з гвинтовими релятивістськими електронними пучками була проведена модернізація методу усереднених характеристик, в частині побудови схеми асимптотичного інтегрування.

## 1.1 Модель, вихідні рівняння

В роботі досліджується взаємодія електромагнітних хвиль в плазмо-пучкових супергетеродинах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками.

Узагальнена схема таких взаємодій представлена на рис. 1.1. Плазмове середовище 1, яке характеризується ленгмюрівською частотою  $\omega_p$ , знаходиться в поздовжньому фокусуєчому магнітному полі з індукцією  $B_0$ . В це середовище інжектується електронний пучок 2.

Вектор швидкості електронів пучка  $\mathbf{v}_b$  спрямований під кутом  $\beta$  по відношенню до вектора індукції фокусуєчого магнітного поля  $\mathbf{B}_0$  (рис. 1.1), так що  $\operatorname{tg}\beta = v_{b\perp} / v_{bz}$ , де  $v_{b\perp} = \sqrt{v_{bx}^2 + v_{by}^2}$  і  $v_{bz}$  — поперечна і поздовжня компоненти швидкості електронів пучка. Ленгмюрівська частота електронного пучка  $\omega_b$ ,  $\omega_b \ll \omega_p$ . Під дією поздовжнього магнітного поля електрони плазмо-пучкової



системи обертаються з частотою  $\omega_H = B_0 e / m_e c$ . Вважаємо, що  $\omega_H \ll \omega_p$ . Відзначимо, що в залежності від типу накачування плазмо-пучкові СЛВЕ бувають двох типів: доплертронний (накачування у вигляді потужної низькочастотної електромагнітної хвилі) і Н-убітронний (накачування у вигляді періодичного реверсивного магнітного поля).

Система накачування 3 (рис. 1.1) характеризується частотою  $\omega_{2,1}$  і хвильовим числом  $k_{2,1}$ . Також на вхід системи подається слабка високочастотна циркулярно-поляризована електромагнітна хвиля сигналу з частотою  $\omega_{1,1}$  і хвильовим числом  $k_{1,1}$ . В результаті параметрично-резонансної взаємодії між хвилями сигналу і накачування в плазмі збуджується хвиля просторового заряду, яка характеризується частотою  $\omega_{3,1}$  і хвильовим числом  $k_{3,1}$ .

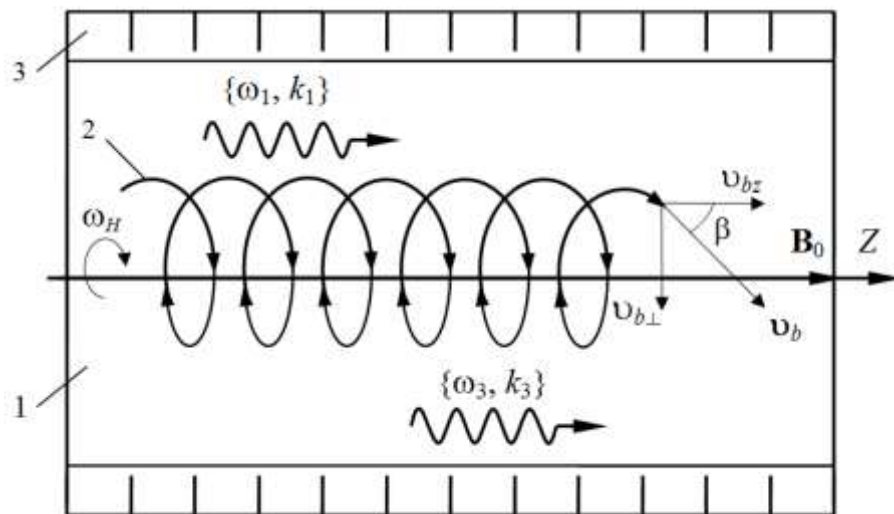


Рисунок 1.1 — Узагальнена схема взаємодії хвиль в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з гвинтовим релятивістським електронним пучком

Умова параметричного резонансу між хвилями сигналу, накачування і ХПЗ в плазмо-пучковій системі має наступний вигляд:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1} - \omega_{2,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (1.1)$$

При використанні гвинтового релятивістського електронного пучка в плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ мають місце коливання на релятивістській циклотронній частоті  $\omega_H/\bar{\gamma}_b$ . Тому, в системі виникають додаткові резонансні умови, які маю такий вигляд

$$\begin{aligned}\omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b) - (\omega_{2,1} \pm \omega_H/\bar{\gamma}_b), \\ \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b) - (\omega_{2,1} \pm 2\omega_H/\bar{\gamma}_b), \dots\end{aligned}\quad (1.2)$$

У супергетеродинних лазерах на вільних електронах має місце ефект супергетеродинного підсилення. Суть його полягає у використанні додаткового механізму посилення однієї з трьох хвиль, які беруть участь в параметричному резонансі. У досліджуваному приладі в якості додаткового механізму виступає посилення хвилі ХПЗ за рахунок плазмо-пучкової нестійкості [1-15]. Сам трихвильовий параметричний резонанс, по суті, зводиться лише до перенесення додаткового посилення з хвилі просторового заряду на електромагнітну хвилю сигналу. Через те, що інкременти зростання плазмо-пучкової нестійкості є високими [1-15], коефіцієнт посилення електромагнітної хвилі виявляється також досить великим. Тому параметри системи необхідно вибирати таким чином, що б в досліджуваній системі хвиля просторового заряду зростала за рахунок плазмо-пучкової нестійкості, а інкремент зростання першої гармоніки ХПЗ за рахунок плазмо-пучкової нестійкості був максимальним.

Також, відзначимо, що однією з особливостей плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ є те, що хвиля просторового заряду, зростаюча за рахунок плазмо-пучкової нестійкості, характеризується квазілінійною дисперсійною залежністю [4, 16-18]:

$$k_{3,m} \approx \omega_{3,m} / v_{bz} \quad (1.3)$$

де індекс «*m*» — номер гармоніки;

$k_{3,m}$  — хвильове число  $m$ -ої гармоніки;

$\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m$  — частота  $m$ -ої гармоніки.

У зв'язку з цим частоти і хвильові числа  $m$ -х гармонік пропорційні номеру гармоніки  $m$ . Тому між гармоніками хвилі просторового заряду виникає безліч трихвильових параметричних резонансів, умови яких мають вигляд

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (1.4)$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm \omega_H / \bar{\gamma}_b) + (\omega_{3,m_3} \mp \omega_H / \bar{\gamma}_b),$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm 2\omega_H / \bar{\gamma}_b) + (\omega_{3,m_3} \mp 2\omega_H / \bar{\gamma}_b) \quad (1.5)$$

де  $m_1, m_2, m_3$  — номери гармонік хвилі просторового заряду. Такі трихвильові взаємодії призводять до збудження вищих гармонік ХПЗ. Враховуючи (1.3), рівняння (1.4)–(1.5) зводяться до загальної мультигармонічної умови

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (1.6)$$

Зауважимо, що номери гармонік, є цілими числами. Тому умова (1.6) може бути виконано багатьма способами, наприклад,  $4 = 2 + 2$ ,  $3 = 4 - 1$  і так далі.

Для опису динаміки хвиль в плазмо-пучкових СЛВЕ з гвинтовими РЕП з урахуванням множинних параметричних взаємодій в якості вихідних будемо використовувати релятивістське квазігідродинамічне рівняння [16, 19-21]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \left( \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{v} \right\} \mathbf{v}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{v}_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \mathbf{E})}{c^2} \right\} - \frac{v_{T,\alpha}^2}{3} \left\{ \frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial n_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\gamma_\alpha^2}{2c^2} \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha^2}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (1.7)$$

рівняння неперервності

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha)}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (1.8)$$

і рівняння Максвелла в диференціальній формі

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 e n_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \sum_{\alpha=1}^2 e n_\alpha, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.9)$$

де  $e = -|e|$  — заряд електрона;

$m_e$  — маса спокою електрона;

$\nu$  — частота зіткнення частинок;

$n_\alpha$  — концентрація  $\alpha$ -го сорту частинок;

$\gamma_\alpha = (1 - \mathbf{v}_\alpha^2 / c^2)^{-1/2}$  — релятивістський фактор  $\alpha$ -го сорту частинок;

$c$  — швидкість світла в вакуумі;

$\mathbf{v}_\alpha$  — вектор швидкості відповідного сорту частинок;

$\mathbf{r}$  — радіус-вектор;

$\mathbf{E}$  — напруженість електричного поля;

$\mathbf{B}$  — індукція магнітного поля.

## 1.2 Модернізований метод усереднених характеристик

Для пошуку самоузгодженого рішення квазігідродинамічного рівняння (1.7), рівняння неперервності (1.8) і рівнянь Максвелла (1.9) в досліджуваних системах, необхідно розбити задачу формально на три незалежних етапи:

1) пошук рішень задачі руху частинок плазми і гвинтового РЕП в заданих електромагнітних полях;

2) знаходження розв'язку задачі для концентрації електронів пучка і плазми, вважаючи, що швидкості і електромагнітні поля відомі;

3) рішення задачі збудження електромагнітних полів, враховуючи, що швидкості і концентрації частинок відомі функції.

Задачі руху і неперервності будемо вирішувати за допомогою методу усереднених характеристик [36, 39], задачу збудження електромагнітних полів - за допомогою методу повільно змінних амплітуд. Зростання хвиль в досліджуваних плазмо-пучкових системах будемо описувати в рамках часової задачі. При розгляді такої модельної задачі вважається, що амплітуди і фази хвиль є функціями тільки часу. При цьому враховуємо, що початкові умови однакові в будь-якій точці простору. Розглянемо особливості застосування методу усереднених характеристик для вирішення задач руху і неперервності в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з гвинтовими електронними пучками при врахуванні множинних параметричних резонансів вищих гармонік хвиль.

При розв'язку задачі руху використовувати релятивістське квазігідродинамічне рівняння (1.7). Розв'язок рівняння (1.7) будемо шукати у рамках адіабатичного наближення, при якому початкові значення амплітуди поля приймаються рівними нулю при  $t \rightarrow -\infty$ . У цьому випадку амплітуда поля повільно зростає за експоненціальним законом. Таким чином, часовий інтервал зростання амплітуди поля відрізняється від інших тимчасових інтервалів процесів, які протікають в досліджуваних системах.

Отже, відповідно до методу усереднених характеристик [22] здійснюємо перехід від рівняння в частинних похідних (1.7) до його характеристик, рівнянням в повних похідних

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha \gamma_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] - \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha) \mathbf{v}_\alpha}{c^2} \right) \\ \frac{d\gamma_\alpha}{dt} &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_\alpha)}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Запишемо систему (1.10) через проекції векторів на вісі  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а також доповнимо її рівняннями для швидких фаз. Вважаємо, що з часом  $t$  амплітуди хвиль змінюються повільно. Для опису такої залежності введемо повільний час,  $\tau = t/\xi$  де  $\xi$  — великий параметр завдання, який має наступний вигляд

$$\xi \sim \left| \frac{d\psi}{dt} \right| / \left| \frac{dx}{dt} \right| \gg 1.$$

$\psi$  — швидка фаза;

$x$  — повільна змінна.

В результаті отримуємо систему рівнянь у стандартному вигляді [22, 23]:

$$\frac{d\upsilon_{\alpha x}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_x + \frac{1}{c} (\upsilon_{\alpha y} B_z - \upsilon_{\alpha z} B_y) - \frac{\upsilon_{\alpha x}}{c^2} (\upsilon_{\alpha x} E_x + \upsilon_{\alpha y} E_y + \upsilon_{\alpha z} E_z) \right], \quad (1.11)$$

$$\frac{d\upsilon_{\alpha y}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_y - \frac{1}{c} (\upsilon_{\alpha x} B_z - \upsilon_{\alpha z} B_x) - \frac{\upsilon_{\alpha y}}{c^2} (\upsilon_{\alpha x} E_x + \upsilon_{\alpha y} E_y + \upsilon_{\alpha z} E_z) \right], \quad (1.12)$$

$$\frac{d\upsilon_{\alpha z}}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_z + \frac{1}{c} (\upsilon_{\alpha x} B_y - \upsilon_{\alpha y} B_x) - \frac{\upsilon_{\alpha z}}{c^2} (\upsilon_{\alpha x} E_x + \upsilon_{\alpha y} E_y + \upsilon_{\alpha z} E_z) \right], \quad (1.13)$$

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dt} = \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} [E_x \upsilon_{\alpha x} + E_y \upsilon_{\alpha y} + E_z \upsilon_{\alpha z}], \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi}, \quad (1.14)$$

$$\frac{dp_{1,\alpha}}{dt} = \omega_1 - k_1 \upsilon_{\alpha z} \equiv \Omega_{1,\alpha}, \quad \frac{dp_{2,\alpha}}{dt} = \omega_2 - k_2 \upsilon_{\alpha z} \equiv \Omega_{2,\alpha}, \quad (1.15)$$

$$\frac{dp_{3,\alpha,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} \upsilon_{\alpha z} \equiv \Omega_{3,\alpha,m} \quad (1.16)$$

де  $E_x, E_y, E_z$  — компоненти вектора напруженості електричного поля;

$B_x, B_y, B_z$  — компоненти вектора індукції магнітного поля;  $p_{1,\alpha} = \omega_1 t - k_1 z$  — фаза електромагнітної хвилі сигналу;

$p_{2,\alpha} = \omega_2 t - k_2 z$  — фаза накачки;

$p_{3,\alpha,m} = \omega_{3,m} t - k_{3,m} z$  — фаза електронної хвилі просторового заряду  $m$ -ої гармоніки;

Рівняння (1.11)–(1.14) описують зміни повільних змінних, (1.15)–(1.16) — швидких.

У зв'язку з використанням гвинтових релятивістських електронних пучків в плазмо-пучкових СЛІВЕ необхідно враховувати, що при не нульовому куті вльоту  $\beta$  електронів пучка, відносно поздовжнього фокусу чого магнітного поля, електрони в незбуреному стані рухаються по колах в поперечній площині з циклотронною частотою  $\omega_H$ . У зв'язку з цим в просторі швидкостей здійснюють перехід від прямокутної декартової системи координат  $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z})$  до циліндричної  $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha\perp}, p_{\alpha 0}, v_{\alpha z})$ , відповідна заміна записується у стандартному вигляді:

$$v_{\alpha x} = v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0}, \quad v_{\alpha y} = v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0}. \quad (1.17)$$

де  $p_{\alpha 0}$  — обертальна фаза  $\alpha$ -го сорту частинок;

$v_{\alpha\perp}$  — поперечна швидкість.

З урахуванням даної заміни рівняння руху (1.11)–(1.14) записуються у виді

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\alpha\perp}}{dt} = & \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ \cos p_{\alpha 0} \left( E_x - \frac{v_{\alpha z}}{c} B_y \right) + \sin p_{\alpha 0} \left( E_y + \frac{v_{\alpha z}}{c} B_x \right) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\alpha\perp}}{c^2} (E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z}) \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\alpha z}}{dt} = & \frac{e}{m_e \gamma_\alpha} \left[ E_z + \frac{v_{\alpha\perp}}{c} (B_y \cos p_{\alpha 0} - B_x \sin p_{\alpha 0}) - \right. \\ & \left. - \frac{v_{\alpha z}}{c^2} (E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z}) \right], \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\frac{d\gamma_\alpha}{dt} = \frac{e}{m_e c^2} [E_x v_{\alpha\perp} \cos p_{\alpha 0} + E_y v_{\alpha\perp} \sin p_{\alpha 0} + E_z v_{\alpha z}], \quad (1.20)$$

$$\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{\omega_H}{\gamma_\alpha} + \frac{e}{m_e \gamma_\alpha v_{\alpha\perp}} \left[ \cos p_{\alpha 0} \left( E_y + \frac{v_{\alpha z}}{c} B_x \right) - \sin p_{\alpha 0} \left( E_x - \frac{v_{\alpha z}}{c} B_y \right) \right] \equiv \Omega_{0\alpha}. \quad (1.21)$$

При використанні асимптотичних схем переходять до усереднених і осциляторним компонентів. Таким чином, заміну (1.17) записують в наступному вигляді

$$v_{\alpha x} = (\bar{v}_{\alpha\perp} + \tilde{v}_{\alpha\perp}) \cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}), \quad v_{\alpha y} = (\bar{v}_{\alpha\perp} + \tilde{v}_{\alpha\perp}) \sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}). \quad (1.22)$$

де

$$\bar{p}_{\alpha 0} = - \int_0^t \frac{eB_0}{cm_e \bar{\gamma}_\alpha} dt'$$

— незбурена фаза обертання електронів в поздовжньому магнітному полі;

$$\bar{v}_{\alpha\perp} = \sqrt{(1 - 1/\bar{\gamma}_\alpha^2)} \cdot \sin \beta \cdot c$$

— незбурена перпендикулярна складова вектора швидкості  $\alpha$ -го сорту пучка;

$\tilde{p}_{\alpha 0}$  — осциляторна складова фази обертання;

$\tilde{v}_{\alpha\perp}$  — осциляторна перпендикулярна компонента вектора швидкості пучка.

Пошук рішень системи (1.18)–(1.21) при використанні заміни (1.22) ускладнюється двома математичними проблемами. Перша проблема пов'язана з тим, що в рівнянні руху для фази  $p_{\alpha 0}$  (1.21) у знаменнику стоїть, перпендикулярна складова вектора швидкості  $v_{\alpha\perp}$ , а для плазми дана швидкість дорівнює нулю  $v_{p\perp} = 0$ . Таким чином, отримуємо ділення на нуль. Друга проблема обумовлена тим, що в заміні (1.22) аргумент функції  $\cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$  і  $\sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$  містить осциляторну періодичну функцію фази  $\tilde{p}_{\alpha 0}$ . Таким чином виникає необхідність розкладання цих функцій в ряд Фур'є-Бесселя. При цьому відзначимо, що необхідно рівняння Максвелла (1.9) розкласти в ряди Фур'є по гармонікам для отримання диференціальних рівнянь для комплексних амплітуд гармонік електромагнітних хвиль. Тому, щоб використовувати знайдені рішення системи (1.18)–(1.21) при знаходженні густини струму, які входять в рівняння Максвелла, необхідно провести



зворотний перехід від функцій Бесселя до гармонічних функцій. У досліджуваних системах одночасно бере участь у трихвильовій резонансній взаємодії велика кількість гармонік ХПЗ. Тому, прямі і зворотні перетворення в таких задачах стають досить незручними і громіздкими обчислювальними процедурами, які в свою чергу знижують ефективність обчислювального алгоритму. Отже, виникає питання про пошук більш оптимального алгоритму вирішення мультигармонічних задач в плазмо-пучкових СЛВЕ, які використовують гвинтові релятивістські електронні пучки.

Для вирішення вище викладених проблем пропонується ввести принципово іншу заміну змінних в порівнянні з (1.22), така заміна записується у вигляді

$$v_{\alpha x} = \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}, \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}, \quad (1.23)$$

де  $\tilde{v}_{\alpha x}$ ,  $\tilde{v}_{\alpha y}$  — осциляторні  $x$ - і  $y$ - компоненти вектора швидкості пучка і плазми.

В результаті використання заміни (1.23) проводити прямі і зворотні перетворення Фур'є-Бесселя стало непотрібно. Так як функції  $\cos p_{\alpha 0}$  і  $\sin p_{\alpha 0}$  не залежать від осциляторної компоненти фази обертання  $\tilde{p}_{\alpha 0}$ . Також, застосовуючи заміну (1.23) в мультигармонічних задачах плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими РЕП, можна використовувати систему рівнянь (1.11)–(1.14), але при цьому доповнивши її співвідношенням для фази, яка швидко обертається,  $p_{0\alpha}$ .

$$\frac{dp_{\alpha 0}}{dt} = -\frac{eB_0}{m_\alpha \gamma_\alpha} \equiv \Omega_{\alpha 0}. \quad (1.24)$$

Порівнюючи співвідношення (1.21) і (1.24) для фази обертання частинок  $\alpha$ -го сорту пучка бачимо, що останнє співвідношення набагато простіше. Також відзначимо, що в співвідношенні (1.24) на відміну від (1.21) немає доданка в якому перпендикулярна складова вектора швидкості  $v_{\alpha\perp}$  знаходиться в знаменнику. Тому проблеми з розподілом на нуль в цьому випадку немає.

Отже, для знаходження рішень системи (1.11)–(1.14) будемо використовувати метод усереднених характеристик [22, 23], а також заміну (1.23). Відповідно до цього методу запишемо для системи (1.11)–(1.14) вектор повільних змінних  $\mathbf{x}$ , вектор-функцію  $\mathbf{X}$ , вектор швидких фаз  $\boldsymbol{\psi}$  і вектор фазових швидкостей  $\boldsymbol{\Omega}$  в явному вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_{v_{\alpha x}}, x_{v_{\alpha y}}, x_{v_{\alpha z}}, x_{\gamma_{\alpha}}, x_{\tau}\} = \{v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z}, \gamma_{\alpha}, \tau\}, \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{X} &= \frac{1}{\xi} \{X_{v_{\alpha x}}, X_{v_{\alpha y}}, X_{v_{\alpha z}}, X_{\gamma_{\alpha}}, X_{\tau}\}, \\ \frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha x}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_{\alpha}}{\bar{\gamma}_{\alpha}} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_{\alpha}}{\bar{\gamma}_{\alpha}} \right)^2 \right) \left[ E_x - \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z}) B_y + \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) B_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\ \frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha y}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_{\alpha}}{\bar{\gamma}_{\alpha}} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_{\alpha}}{\bar{\gamma}_{\alpha}} \right)^2 \right) \left[ E_y - \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z}) B_x + \frac{1}{c} (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) B_0 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\ \frac{1}{\xi} X_{v_{\alpha z}} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_{\alpha}} \left( 1 - \frac{\tilde{\gamma}_{\alpha}}{\bar{\gamma}_{\alpha}} + \left( \frac{\tilde{\gamma}_{\alpha}}{\bar{\gamma}_{\alpha}} \right)^2 \right) \left[ E_z + \frac{1}{c} (B_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) - B_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y})) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})}{c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})) \right], \\ \frac{1}{\xi} X_{\gamma_{\alpha}} &= \frac{e}{m_e c^2} (E_x (\bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}) + E_y (\bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y}) + E_z (\bar{v}_{\alpha z} + \tilde{v}_{\alpha z})), \\ \frac{1}{\xi} X_{\tau} &= \frac{1}{\xi}, \quad \boldsymbol{\psi} = \{p_{1,p}, p_{2,p}, p_{3,p,1}, \dots, p_{3,p,N}, p_{0p}, p_{1,b}, p_{2,b}, p_{3,b,1}, \dots, p_{3,b,N}, p_{0b}\}, \\ \boldsymbol{\Omega} &= \{\Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{0p}, \Omega_{1,b}, \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{0b}\} \quad (1.25) \end{aligned}$$

Далі використовуємо описаний в [22, 23] алгоритм модернізованого методу усереднених характеристик для випадку декількох швидких фаз. Згідно з цим алгоритмом переходимо від неусереднених змінних до усереднених повільних

змінних. Для цього використовуємо модернізовану заміну Крилова-Боголюбова [22, 23, 24] і заміну (1.23) в якій осциляторні добавки залежать від неусередненого вектора швидких фаз  $\Psi$

$$\begin{aligned} v_{\alpha x} &= \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\ v_{\alpha z} &= \bar{v}_{\alpha z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad \gamma_{\alpha} = \bar{\gamma}_{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\gamma_{\alpha}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\ \tau &= \bar{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Зауважимо, що усереднені змінні задовольняють системі

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} \cos \bar{p}_{\alpha 0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} \sin \bar{p}_{\alpha 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{\gamma}_{\alpha}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\gamma_{\alpha}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{\tau}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

У рівняннях (1.26) шукана функція  $\mathbf{u}^{(n)}$  має вид [22, 24]

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \cdots \sum_{m_{\kappa}=-N}^{m_{\kappa}=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_{\kappa}}^{(n)}}{i(m_1 \Omega_1 + \dots + m_{\kappa} \Omega_{\kappa})} \exp(i(m_1 \psi_1 + \dots + m_{\kappa} \psi_{\kappa})). \quad (1.28)$$

Відзначимо, що випадки, коли знаменники в (1.28) обертаються в нуль

$$m_1 \Omega_1 + \dots + m_{\kappa} \Omega_{\kappa} = 0, \quad (1.29)$$

називають комбінаційними резонансами. Тому, не один з знаменників розв'язків (1.28) не повинен обертатися в нуль, іншими словами, осциляторна функція  $\mathbf{u}^{(n)}$  повинна визначатися тільки не резонансними компонентами  $\mathbf{g}^{(n)}$ .

На відміну від функції  $\mathbf{u}^{(n)}$  рішення для функції  $\mathbf{A}^{(n)}$  визначаються як резонансними компонентами так і середніми значеннями  $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$ . Тому рішення для функції  $\mathbf{A}^{(n)}$  має такий вигляд [22, 24]

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} \Big|_{m_1 \Omega_1 + \dots + m_\kappa \Omega_\kappa = 0}, \quad (1.30)$$

У наведених рішеннях (1.28) і (1.30) використовувалося наступне позначення

$$\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_\kappa}^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1 \Psi_1, \dots, m_\kappa \Psi_\kappa} = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^\kappa \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1 \Psi_1 + \dots + m_\kappa \Psi_\kappa)} d\Psi_1 \dots d\Psi_\kappa$$

Функції  $\mathbf{g}^{(n)}$  до третього наближення по  $1/\xi$  мають вигляд [22, 23]:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad (1.31)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right), \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} = \frac{1}{\xi^3} \left[ \sum_j \left( \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left( \frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \right]. \quad (1.33) \end{aligned}$$

При вирішенні завдання руху обмежимося кубічним наближенням по  $1/\xi$ . Враховуючи, що  $\cos p_{0\alpha} = (\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$  і  $\sin p_{0\alpha} = ((-i)\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$  знаходимо за допомогою функцій  $\mathbf{u}^{(n)}$  і  $\mathbf{A}^{(n)}$ , відповідно рішення рівнянь (1.28) і

(1.30). Співвідношення для осциляторної компоненти швидкості  $\tilde{v}_{\alpha x}^{(1)}$  в першому наближенні записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)} &= u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1)} e^{i m p_1} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2)} e^{i m p_2} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3)} e^{i m p_3} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 + p_0)} e^{i(m p_1 + p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 + p_0)} e^{i(m p_2 + p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} e^{i(m p_3 + p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 - p_0)} e^{i(m p_1 - p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 - p_0)} e^{i(m p_2 - p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} e^{i(m p_3 - p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 + 2 p_0)} e^{i(m p_1 + 2 p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 + 2 p_0)} e^{i(m p_2 + 2 p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + 2 p_0)} e^{i(m p_3 + 2 p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 - 2 p_0)} e^{i(m p_1 - 2 p_0)} + \\
&+ u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 - 2 p_0)} e^{i(m p_2 - 2 p_0)} + u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - 2 p_0)} e^{i(m p_3 - 2 p_0)} + c.c. \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\
&\times \left. \left( \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H, \alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} &= \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi + 2 p_0)} &= \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} + 2) \times \\
&\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1 + s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x, m}}^{(1)(p_\chi - 2 p_0)} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} - 2) \times \\
&\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1 - s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_1 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_2 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha x, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.$$

Аналогічно отримуємо вирази в першому наближенні для осциляторної складової швидкості  $\tilde{v}_{\alpha y}^{(1)}$

$$\begin{aligned} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)} &= u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 + p_0)} e^{i(mp_1 + p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 + p_0)} e^{i(mp_2 + p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} e^{i(mp_3 + p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 - p_0)} e^{i(mp_1 - p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 - p_0)} e^{i(mp_2 - p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} e^{i(mp_3 - p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 + 2p_0)} e^{i(mp_1 + 2p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 + 2p_0)} e^{i(mp_2 + 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 + 2p_0)} e^{i(mp_3 + 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 - 2p_0)} e^{i(mp_1 - 2p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 - 2p_0)} e^{i(mp_2 - 2p_0)} + u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 - 2p_0)} e^{i(mp_3 - 2p_0)} + c.c., \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi)} &= \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\ &\times \left. \left( \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H, \alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m}) + c.c. \right], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 + p_0)} = \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 - p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp} \bar{v}_{\alpha z}}{2c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \left( \frac{\omega_{H, \alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha, 3, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi + 2p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} + 2) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})(1 + s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_\chi - 2p_0)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \frac{\bar{v}_{\alpha \perp}^2}{8c^2} (i\omega_{H, \alpha} - 2) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi y, m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_1 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_2 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha y, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.$$

Осциляторні складові швидкості  $\tilde{v}_{\alpha z}^{(1)}$  в першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)} &= u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\ &+ u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c., \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3)} = \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z, m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha, 3, m}} \exp(ip_{\alpha, 3, m}) + c.c. \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_\chi + p_0)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha \perp}}{2m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\ &\times \left. \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_\chi - p_0)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha \perp}}{2m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x, m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\ &\times \left. \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha, \chi, m}}{\omega_{\chi, m}} \right) \exp(ip_{\alpha, \chi, m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_1 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_2 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\nu_{\alpha z, m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0.$$

Осциляторні функції релятивістського фактора в першому наближенні  $\tilde{\gamma}_\alpha^{(1)}$  мають вигляд

$$\begin{aligned}
u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)} &= u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\
&+ u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\
&+ u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\
&+ u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\
&+ u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c., \\
\frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha z}}{m_e c^2} \sum_{m=1}^N \left[ \frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_\chi+p_0)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_\chi-p_0)} &= \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1-s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} - \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + \frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} &= \frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3\pm p_0)} = \\
= \frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_1\pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_2\pm 2p_0)} &= \frac{1}{\xi} u_{\gamma_{\alpha,m}}^{(1)(p_3\pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Далі запишемо для першого наближення функції  $\mathbf{A}^{(1)}$

$$A_{v_{\alpha x}}^{(1)} = 0, A_{v_{\alpha y}}^{(1)} = 0, A_{v_{\alpha z}}^{(1)} = 0, A_{\gamma_\alpha}^{(1)} = 0, A_\tau^{(1)} = 1.$$

Таким чином, використовуючи рішення (1.28) і (1.30), а також функції (1.31)–(1.33) отримуємо, аж до третього наближення по  $1/\xi$ , рішення для системи (1.26), а також для постійних складових (1.27). Відзначимо, що завдяки використанню



запропонованої заміни (1.23) (замість стандартної (1.22)) при вирішенні завдання руху загальний алгоритм знаходження швидкостей значно спростився.

Для вирішення задачі концентрації використовуємо рівняння неперервності (1.8). Запишемо його в компонентному вигляді

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha x})}{\partial x} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha y})}{\partial y} + \frac{\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha z})}{\partial z} = 0 \quad (1.34)$$

Розв'язок рівняння неперервності шукаємо аналогічно задачі руху. Перетворюємо рівняння неперервності (1.34) до стандартного виду [22], враховуючи, що  $\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha x})/\partial x = 0$  та  $\partial(n_\alpha \cdot v_{\alpha y})/\partial y = 0$ . Далі доповнюємо його рівняннями для швидких фаз (1.15)–(1.16), (1.24). При цьому вважаємо функції швидкостей (1.26) і повільно змінних амплітуд електромагнітних полів, вже відомими функціями. В результаті записуємо систему для задачі неперервності в стандартному вигляді

$$\frac{dn_\alpha}{dt} = -n_\alpha \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z}, \quad (1.35)$$

$$\frac{dp_{1,\alpha}}{dt} = \omega_1 - k_1 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{1,\alpha}, \quad \frac{dp_{2,\alpha}}{dt} = \omega_2 - k_2 v_{\alpha z} \equiv \Omega_{2,\alpha}, \quad (1.36)$$

$$\frac{dp_{3,\alpha,m}}{dt} = m\omega_{3,1} - k_{3,m} v_{\alpha z} \equiv \Omega_{3,\alpha,m}, \quad \frac{dp_{0,\alpha}}{dt} = \frac{eB_0}{m_\alpha c \gamma_\alpha} \equiv \Omega_{0,\alpha}.$$

Запишемо для системи (1.35)–(1.36) вектор повільних змінних  $\mathbf{x}$ , вектор-функцію  $\mathbf{X}$  і вектори швидких фаз  $\Psi$  в явному вигляді

$$\mathbf{x} = \{x_{n_\alpha}\} = \{n_\alpha\}, \quad \frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_{n_\alpha}\} = \left\{ -n_\alpha \frac{\partial v_{\alpha z}}{\partial z} \right\},$$

$$\Psi = \{p_{1,p}, p_{2,p}, p_{3,p,1}, \dots, p_{3,p,N}, p_{0,p}, p_{1,b}, p_{2,b}, p_{3,b,1}, \dots, p_{3,b,N}, p_{0,b}\}, \quad (1.37)$$

$$\Omega = \{\Omega_{1,p}, \Omega_{2,p}, \Omega_{3,p,1}, \dots, \Omega_{3,p,N}, \Omega_{0,p}, \Omega_{1,b}, \Omega_{2,b}, \Omega_{3,b,1}, \dots, \Omega_{3,b,N}, \Omega_{0,b}\}.$$

Далі використовуємо описаний в [22, 23] алгоритм модернізованого методу усереднених характеристик, для випадку багатьох швидких фаз, відповідно до якого здійснюємо перехід до усереднених змінним

$$n_\alpha = \bar{n}_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}_{n_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \quad (1.38)$$

Зауважимо, що усереднена змінна концентрації задовольняє співвідношенню

$$\frac{d\bar{n}_\alpha}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}_{n_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (1.39)$$

Використовуючи рішення (1.28) і (1.30) знаходимо осциляторні  $\mathbf{u}^{(n)}$  і постійні  $\mathbf{A}^{(n)}$  функції концентрації пучка і плазми  $n_\alpha$ . Функції  $\mathbf{u}^{(n)}$  і  $\mathbf{A}^{(n)}$  для першого наближення мають такий вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)} = & \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} e^{imp_1} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} e^{imp_2} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} e^{imp_3} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+p_0)} e^{i(mp_1+p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+p_0)} e^{i(mp_2+p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+p_0)} e^{i(mp_3+p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-p_0)} e^{i(mp_1-p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-p_0)} e^{i(mp_2-p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-p_0)} e^{i(mp_3-p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1+2p_0)} e^{i(mp_1+2p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2+2p_0)} e^{i(mp_2+2p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3+2p_0)} e^{i(mp_3+2p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1-2p_0)} e^{i(mp_1-2p_0)} + \\ & + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2-2p_0)} e^{i(mp_2-2p_0)} + \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3-2p_0)} e^{i(mp_3-2p_0)} + c.c., \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3)} = & \frac{e\bar{n}_\alpha}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[ \frac{k_{3,m} E_{3z,m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right], \\ \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_\chi+p_0)} = & \frac{e\bar{v}_{\alpha 1} \bar{n}_\alpha}{2m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{k_{\chi,m} E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1+s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \right. \\ & \left. \times \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m} + ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_{\chi}-p_0)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}\bar{n}_{\alpha}}{2m_e\bar{\gamma}_{\alpha}} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[ \frac{k_{\chi,m} E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1-s_{\chi})}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} - \Omega_{\alpha 0})} \times \right. \\ \left. \times \left( \left( 1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m} - ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3 \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_1 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_2 \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{n_{\alpha,m}}^{(1)(p_3 \pm 2p_0)} = 0,$$

$$\frac{1}{\xi} A_{n_{\alpha}}^{(1)} = 0, \quad A_{\tau}^{(1)} = 1.$$

Таким чином, завдяки заміні (1.23), рішенням (1.28)—(1.30) і функціям (1.31)—(1.33) знаходимо осциляторні  $\mathbf{u}^{(n)}$  і постійні  $\mathbf{A}^{(n)}$  функції рішень (1.38)—(1.39) з точністю до кубічних доданків по  $1/\xi$ .

### 1.3 Висновки

1. Проведена модернізація методу усереднених характеристик стосовно завдань динаміки мультигармонічних електромагнітних хвиль в плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими релятивістськими електронними пучками. Запропоновано нову заміну змінних, яка спрощує загальний алгоритм обчислення.

2. У плазмо-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими релятивістськими електронними пучками мають місце параметричні резонансні взаємодії хвиль різного типу, які необхідно враховувати при знаходженні власних електромагнітних полів хвиль. Для обліку таких резонансних взаємодій запропонована комбінаційна схема, яка добре адаптована для чисельного моделювання.

## 2 МОДЕЛЬ ПЛАЗМО-ПУЧКОВОГО СУПЕРГЕТЕРОДИННОГО ЛВЕ ДОПЛЕРТРОННОГО ТИПУ З ГВИНТОВИМ РЕП

В даному розділі побудована кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах доплертронного типу (накачка у вигляді низькочастотної електромагнітної хвилі) з гвинтовими релятивістськими електронними пучками. У приладах даного типу для посилення поздовжніх хвиль використовується плазмо-пучкова нестійкість, яка серед інших типів нестійкостей володіє вищими інкрементами зростання. Застосування гвинтових релятивістських електронних пучків в досліджуваному типі плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ, дозволяє підвищити інкремент плазмо-пучкової нестійкості в порівнянні з інкрементом в плазмо-пучкових СЛВЕ з прямолінійними РЕП. За рахунок збільшення інкременту зростання збільшується коефіцієнт посилення високочастотного електромагнітного сигналу.

### 2.1 Модель

Модель плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах доплертронного типу з гвинтовим РЕП представлена на рис. 2.1.

В якості моделі досліджуваного приладу розглядаємо плазмове середовище 1 з ленгмюрівською частотою  $\omega_p$ , через яке проходить електронний пучок 2, який характеризується ленгмюрівською частотою  $\omega_b$ . Розглядаємо випадок, коли  $\omega_b \ll \omega_p$ .

Досліджувана система знаходиться в поздовжньому фокусуєчому магнітному полі з індукцією  $B_0$ , яка спрямована уздовж вісі системи  $Z$  (рис. 2.1). Вважаємо, що циклотронна частота  $\omega_H$  обертання електронів в подовжньому магнітному полі набагато менше плазмової частоти  $\omega_H \ll \omega_p$ . Вектор швидкості електронів гвинтового релятивістського пучка  $\mathbf{v}_b$  спрямований під кутом  $\beta$  по відношенню до вісі  $Z$ , так що  $\text{tg}\beta = v_{b\perp} / v_{bz}$ , де  $v_{b\perp}$  і  $v_{bz}$  – його поперечна і поздовжня компоненти.

В якості накачки використовуємо інтенсивну циркулярно-поляризовану низкочастотну електромагнітну хвилю з частотою  $\omega_{2,1}$  і хвильовим числом  $k_{2,1}$ , яка поширюється вздовж вісі системи  $Z$  назустріч електронному пучку. Частота хвилі накачки менше циклотронної частоти:  $\omega_{2,1} \ll \omega_H$ . На вхід системи також подається слабка високочастотна циркулярно-поляризована електромагнітна хвиля сигналу, яка характеризується частотою  $\omega_{1,1}$  і хвильовим числом  $k_{1,1}$ .

Завдяки параметрично-резонансному зв'язку між взаємодіючими хвилями, в досліджуваному приладі збуджується хвиля просторового заряду з частотою  $\omega_{3,1}$  і хвильовим числом  $k_{3,1}$ . Умова такого параметричного резонансу має вигляд:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1} - \omega_{2,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (2.1)$$

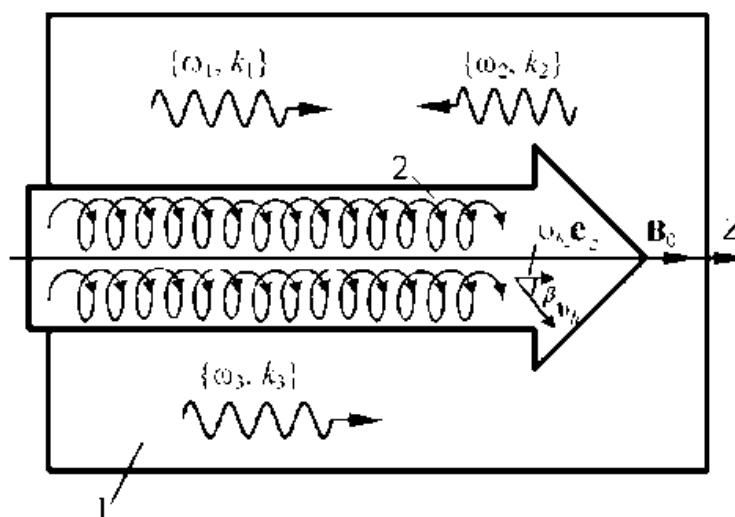


Рисунок 2.1 — Схема плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ доплертронного типу з гвинтовим РЕП

Завдяки параметрично-резонансному зв'язку між взаємодіючими хвилями, в досліджуваному приладі збуджується хвиля просторового заряду з частотою  $\omega_{3,1}$  і хвильовим числом  $k_{3,1}$ . Умова такого параметричного резонансу має вигляд:

$$\omega_{3,1} = \omega_{1,1} - \omega_{2,1}, \quad k_{3,1} = k_{1,1} + k_{2,1}. \quad (2.2)$$

При цьому врахуємо, що в другій умови співвідношення (2.2) хвильове число накачки має значення  $k_{2,1} = -|k_{2,1}|$ .

В результаті використання гвинтового релятивістського електронного пучка в досліджуваному плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ збуджуються коливання на циклотронній частоті та її гармоніках. Тому, в системі мають місце додаткові трихвильові параметричні резонанси. Умови, таких резонансів мають вигляд

$$\begin{aligned}\omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm \omega_H/\gamma_b) - (\omega_{2,1} \pm \omega_H/\gamma_b), \\ \omega_{3,1} &= (\omega_{1,1} \pm 2\omega_H/\gamma_b) - (\omega_{2,1} \pm 2\omega_H/\gamma_b), \dots\end{aligned}\quad (2.3)$$

Особливість досліджуваного плазмо-пучкового СЛВЕ є те, що тут хвиля просторового заряду, яка зростає за рахунок плазмо-пучкової нестійкості характеризується квазілінійним законом дисперсії. Тому частоти і хвильові числа  $m$ -х гармонік ХПЗ пропорційні номеру гармоніки  $m$ :  $\omega_{3,m} = \omega_{3,1} \cdot m$ ,  $k_{3,m} \approx k_{3,1} \cdot m$ . Це призводить до того, що гармоніки ХПЗ взаємодіють одна з одною через механізм трихвильового параметричного резонансу. Позначивши номери гармонік як  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ , запишемо умови трихвильових параметричних резонансів в плазмо-пучковому СЛВЕ з гвинтовим РЕП і доплертронною накачкою для вищих гармонік ХПЗ у вигляді

$$\omega_{3,m_1} = \omega_{3,m_2} + \omega_{3,m_3}, \quad k_{3,m_1} = k_{3,m_2} + k_{3,m_3}, \quad (2.4)$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm \omega_H/\gamma_b) + (\omega_{3,m_3} \mp \omega_H/\gamma_b),$$

$$\omega_{3,m_1} = (\omega_{3,m_2} \pm 2\omega_H/\gamma_b) + (\omega_{3,m_3} \mp 2\omega_H/\gamma_b), \dots \quad (2.5)$$

Зі співвідношень (2.4)–(2.5) можемо записати загальну умову множинних параметричних взаємодій у вигляді

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (2.6)$$

Зауважимо, що номери гармонік, є цілими числами. Тому умова (2.6) може бути виконано багатьма способами, наприклад,  $4 = 3 + 1$ ,  $3 = 6 - 3$  і так далі. Такі трихвильові взаємодії призводять до генерації та посилення вищих гармонік ХПЗ. Тому даний ефект необхідно враховувати при аналізі нелінійної динаміки хвиль в плазмо-пучковому СЛВЕ доплертронного типу з гвинтовим РЕП.

## 2.2 Система кубічно-нелінійних вкорочених рівнянь для комплексних амплітуд хвиль

Електричні  $\mathbf{E}$  і магнітні  $\mathbf{B}$  компоненти електромагнітних полів хвиль сигналу (індекс 1) і накачки (індекс 2) в досліджуваному плазмо-пучковому СЛВЕ записуємо в монохроматичному вигляді

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (E_{1x}\mathbf{e}_x + E_{1y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c., \quad \mathbf{E}_2 = (E_{2x}\mathbf{e}_x + E_{2y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c., \\ \mathbf{B}_1 &= (B_{1x}\mathbf{e}_x + B_{1y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)} + c.c., \quad \mathbf{B}_2 = (B_{2x}\mathbf{e}_x + B_{2y}\mathbf{e}_y)e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c.. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Як вже говорилося вище, в досліджуваному плазмо-пучковому СЛВЕ має місце ефект збудження вищих гармонік ХПЗ. Тому напруженість електричного поля хвилі ХПЗ має мультигармонічний характер

$$\mathbf{E}_3 = \sum_{m=1}^N (E_{3z,m} e^{i(m\omega_{3,1}t - k_{3,m}z)} + c.c.) \mathbf{e}_z, \quad (2.8)$$

де  $N$  — кількість гармонік ХПЗ, які враховуються при вирішенні задачі.

Таким чином, електричні і магнітні поля в робочому об'ємі плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ доплертронного типу з гвинтовим релятивістським електронним пучком мають вигляд

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_0. \quad (2.9)$$

Відзначимо, що амплітуди електричних і магнітних полів повільно змінюються з часом  $t$ . Розглядаємо випадок, коли розкидом електронів за швидкостями, а також їх зіткненнями можна знехтувати. В якості вихідних рівнянь використовуємо релятивістське квазігідродінамічне рівняння (1.7), рівняння неперервності (1.8) і рівняння Максвелла (1.9). Рішення задачі руху (1.26) і неперервності (1.38) були отримані раніше. Для вирішення задачі про розвиток електромагнітних полів використовуємо метод повільно змінних амплітуд.

Запишемо систему (1.9) через проекції векторів на вісі  $x$ ,  $y$ ,  $z$  при цьому враховуємо, що в досліджуваній моделі швидкості, концентрації і електромагнітні поля залежать тільки від поздовжньої координати  $z$  і часу  $t$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ -\frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 (e_\alpha n_\alpha v_{\alpha x}), \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 (e_\alpha n_\alpha v_{\alpha y}) \quad (2.10) \\ 0 &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^2 (e_\alpha n_\alpha v_{\alpha z}). \end{aligned}$$

Тут і далі індекс  $\alpha$  приймає значення  $b$  і  $p$  (індексом  $b$  характеризуємо параметри пучка, індексом  $p$  — параметри плазми).

Далі підставимо рішення швидкостей (1.26) і концентрації (1.38) в систему (2.10). При цьому враховуємо, що вирази для швидкості і концентрацій парціальних пучків отримані модернізованим методом усереднених характеристик, і мають вигляд рядів по малому параметру  $1/\xi$ . Тому їх необхідно розкласти в ряди по гармонікам швидких фаз. В результаті аналітичних перетворень отримуємо в кубічному наближенні для комплексних амплітуд перших гармонік  $x$ - і  $y$ - компонент напруженості електричного поля сигналу ( $E_{1x}$ ,  $E_{1y}$ ),  $x$ - і  $y$ - компонент напруженості



електричного поля накачки  $(E_{2x}, E_{2y})$  і  $m$ -х гармонік напруженості електричного поля ХПЗ  $(E_{3z,m})$  систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
K_2 \frac{d^2 E_{1x}}{dt^2} + K_1 \frac{dE_{1x}}{dt} &= K_3 E_{3z} E_{2x} + F_{1x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
K_2 \frac{d^2 E_{1y}}{dt^2} + K_1 \frac{dE_{1y}}{dt} &= K_3 \eta_1 \eta_2 E_{3z} E_{2y} + F_{1y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
M_2 \frac{d^2 E_{2x}}{dt^2} + M_1 \frac{dE_{2x}}{dt} &= M_3 E_{3z}^* E_{1x} + F_{2x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \quad (2.11) \\
M_2 \frac{d^2 E_{2y}}{dt^2} + M_1 \frac{dE_{2y}}{dt} &= M_3 \eta_1 \eta_2 E_{3z}^* E_{1y} + F_{2y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \\
C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dt^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dt} + D_{3m} E_{3z,m} &= C_{3,m} (E_{1x} E_{2x}^* + E_{1y} E_{2y}^*) + \\
+ C_4 \left\langle \int E_z \left( \int E_z dp_3 \right) dp_3 \right\rangle_{p_{3,m}} + C_5 \left\langle \left( \int E_z dp_3 \right)^2 \right\rangle_{p_{3,m}} &+ F_{3z,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha).
\end{aligned}$$

Із системи (2.11) випливає, що для досліджуваного плазмо-пучкового СЛВЕ власними є циркулярно-поляризовані електромагнітні хвилі, зв'язок амплітуд полів яких має наступний вигляд

$$\eta_\chi = E_{\chi y} / (iE_{\chi x}) = \pm 1, \quad (2.12)$$

де  $\eta_\chi$  — знакова функція, яка характеризує напрямок обертання вектора напруженості електричного поля циркулярно-поляризованих хвиль сигналу  $\chi = 1$  і накачки  $\chi = 2$ .

В системі (2.11)

$$K_1 = \frac{\partial D_1}{\partial(i\omega_1)}; \quad K_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_1}{\partial(i\omega_1)^2}; \quad M_1 = \frac{\partial D_2}{\partial(i\omega_2)}; \quad M_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_2}{\partial(i\omega_2)^2};$$

$$C_{1,m} = \frac{\partial D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)}; \quad C_{2,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial(im\omega_3)^2};$$

де  $D_1 = D(\omega_1, k_1)$ ,  $D_2 = D(\omega_2, k_2)$  — дисперсійні функції поперечних циркулярно-поляризованих електромагнітних хвиль сигналу  $(\omega_1, k_1)$  і накачки  $(\omega_2, k_2)$ , відповідно

$$D(\omega_\chi, k_\chi) = \frac{i}{c\omega_\chi} \left\{ k_\chi^2 c^2 - \omega_\chi^2 + \sum_\alpha^{b,p} \left[ \frac{\omega_\alpha^2}{\bar{\gamma}_\alpha (\Omega_{\alpha\chi} + \eta_\chi \omega_{H,\alpha})^2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \Omega_{\alpha\chi} (\Omega_{\alpha\chi} + \eta_\chi \omega_{H,\alpha}) - \frac{\bar{v}_{\alpha\perp}^2}{2c^2} (\omega_\chi^2 - k_\chi^2 c^2) \right) \right] \right\}; \quad (2.13)$$

$D_{3,m} = D(m\omega_3, k_{3,m})$  — дисперсійна функція  $m$ -х гармонік ХПЗ

$$D_{3,m} = \frac{-im\omega_3}{c} \left( 1 - \sum_\alpha^{b,p} \frac{\omega_\alpha^2 (1 - \bar{v}_{\alpha z}^2 / c^2)}{(m\omega_3 - k_{3,m} \bar{v}_{\alpha z})^2 \bar{\gamma}_\alpha} \right); \quad (2.14)$$

$K_3$ ,  $M_3$ ,  $C_{3,m}$  — коефіцієнти диференціальних рівнянь, які характеризують параметрично-резонансну взаємодію хвиль в досліджуваній системі, залежать від частот, хвильових чисел і параметрів досліджуваної системи;

$$F_{1x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_\alpha^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha x}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_1};$$

$$F_{1y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_\alpha^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha y}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha y}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha y}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_1};$$

$$F_{2x}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_\alpha^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha x}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha x}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha x}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_2};$$

$$F_{2y}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_\alpha^{p,b} \frac{1}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha y}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha y}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha y}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} \right) \right\rangle_{p_2};$$

$$F_{3z,m}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha) = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{\alpha} \frac{p, b}{\xi^3} \left( \bar{n}_\alpha u_{v_{\alpha z}}^{(3)} + u_{n_\alpha}^{(1)} u_{v_{\alpha z}}^{(2)} + u_{n_\alpha}^{(2)} u_{v_{\alpha z}}^{(1)} + u_{n_\alpha}^{(3)} \bar{v}_{\alpha z} \right) \right\rangle_{p_{3,m}}$$

— функції, що враховують кубічно-нелінійні доданки відповідних рівнянь; де функції  $u_{n_\alpha}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{n_\alpha}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{n_\alpha}^{(3)}/\xi^3$  визначають осциляторні складові концентрації електронів пучка і плазми в першому, другому і третьому наближенні;  $u_{v_{\alpha x}}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{v_{\alpha x}}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{v_{\alpha x}}^{(3)}/\xi^3$ ,  $u_{v_{\alpha y}}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{v_{\alpha y}}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{v_{\alpha y}}^{(3)}/\xi^3$ ,  $u_{v_{\alpha z}}^{(1)}/\xi$ ,  $u_{v_{\alpha z}}^{(2)}/\xi^2$ ,  $u_{v_{\alpha z}}^{(3)}/\xi^3$  — осциляторні компоненти, відповідно першого, другого і третього наближень швидкостей електронів пучка і плазми;

$$\langle \dots \rangle_{p_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \exp(ip_1)) dp_1, \quad \langle \dots \rangle_{p_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \exp(ip_2)) dp_2,$$

$$\langle \dots \rangle_{p_{3,m}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \exp(-ip_{3,m})) dp_{3,1}.$$

В результаті того, що коефіцієнти системи (2.11) залежать від постійних складових швидкостей  $\bar{v}_{\alpha\perp}$ ,  $\bar{v}_{\alpha z}$  і концентрацій  $\bar{n}_\alpha$  парціальних пучків, систему рівнянь (2.11) необхідно доповнити диференціальними рівняннями для постійних

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{\perp\alpha}}{dt} &= V_{\perp\alpha}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\perp\alpha}, \bar{v}_{z\alpha}, \bar{n}_\alpha), \quad \frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} = V_{\alpha z}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\alpha\perp}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha), \\ \frac{d\bar{n}_\alpha}{dt} &= N_\alpha(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_{\alpha\perp}, \bar{v}_{\alpha z}, \bar{n}_\alpha) \end{aligned} \quad (2.15)$$

де

$$V_{\alpha\perp} = \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} A_{v_{\alpha\perp}}^{(3)}, \quad V_{\alpha z} = \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} A_{v_{\alpha z}}^{(3)}, \quad N_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{p,b}{\xi^3} A_{n_{\alpha}}^{(3)}$$

— функції, що враховують кубічно нелінійні доданки, які залежать від хвильових чисел, частот, амплітуд полів, постійних складових швидкостей і концентрацій електронів пучка і плазми.

Система укорочених диференціальних рівнянь (2.11) і співвідношення (2.15) описують кубічно-нелінійну динаміку хвиль в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ доплертронного типу з неосьовою інжекцією електронного пучка при обліку множинних параметричних резонансів ХПЗ. Чисельний аналіз даної системи дозволяє визначити механізми і рівні насичення досліджуваного приладу в режимі максимального підсилення при різних кутах вльоту РЕП.

### 2.3 Аналіз динаміки хвиль у слабосигнальному наближенні

Проведемо аналіз можливих режимів трихвильової взаємодії між сигналом, накачки і ХПЗ в плазмо-пучковому СЛВЕ з доплертронною накачкою і гвинтовим релятивістським електронним пучком. Параметри досліджуваної системи представлені в табл.1. Щоб визначити частоти електромагнітних хвиль сигналу  $\omega_{1,1}$  і накачки  $\omega_{2,1}$ , а також їх хвильові числа  $k_{1,1}$  і  $k_{2,1}$  використовуємо умови параметричного резонансу (2.2)–(2.3), дисперсійне рівняння для електромагнітних хвиль сигналу  $D(\omega_1, k_1) = 0$  і накачки  $D(\omega_2, k_2) = 0$ , де відповідні дисперсійні функції  $D(\omega_{\chi}, k_{\chi}) = 0$  визначаються співвідношенням (2.13).

Хвильове число  $k_{3,1}$  і частоту  $\omega_{3,1}$  першої гармоніки ХПЗ вибираємо таким чином, щоб інкремент зростання ХПЗ був максимальним. Відомо, що цієї умові при куті вльоту пучка  $\beta = 0^\circ$  відповідає значення хвильового числа  $k_{3,1} = \omega_p / \bar{v}_{bz} = 38,52$  см [16]. Частота  $\omega_{3,1}$  (дійсна частина комплексної частоти  $\omega'_{3,1}$ ) визначається зі співвідношення (2.14)  $D_{3,1}(\omega_{3,1}, k_{3,1}) = 0$ . Знайденим значенням

хвильового числа  $k_{3,1}$  і частоти  $\omega_{3,1}$  відповідає точка  $O$  на дисперсійній кривій 3 (рис. 2.2).

Таблиця 1 — Параметри плазмо-пучкового СЛВЕ доплертронного типу з гвинтовим РЕП

Параметри	Значення
Ленгмюрівська частота пучка ( $\omega_b$ )	$2,0 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$
Релятивістський фактор пучка ( $\bar{\gamma}_b$ )	2,0
Ленгмюрівська частота плазми ( $\omega_p$ )	$1,0 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$
Індукція фокусуєчого магнітного поля ( $B_0$ )	0,28 Тл
Амплітуда першої гармоніки напруженості електричного поля хвилі накачки $E_{2,1} = \sqrt{ E_{2x,1} ^2 +  E_{2y,1} ^2}$	$6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$

Ці рішення також можна легко знайти графічно. На рис. 2.2 представлені дисперсійні криві для високочастотних електромагнітних хвиль сигналу (криві 1 та 2), низькочастотної електромагнітної хвилі накачки (крива 4) і ХПЗ (криві 3) для випадку, коли кут вльоту пучка по відношенню до поздовжнього магнітного поля дорівнює  $\beta = 0^\circ$ . Крива 1 відповідає правій циркулярно-поляризованій електромагнітній хвилі, якщо дивитися вздовж магнітного поля ( $\eta_1 = -1$ ), крива 2 — лівої циркулярно-поляризованій електромагнітній хвилі ( $\eta_1 = +1$ ). Крива 4 відповідає як правій циркулярно-поляризованій електромагнітній хвилі ( $\eta_1 = -1$ ), так і лівій циркулярно-поляризованій електромагнітній хвилі накачки ( $\eta_1 = +1$ ).

Для знаходження необхідних частот  $\omega_{1,1}$ ,  $\omega_{2,1}$ , і хвильових чисел  $k_{1,1}$ ,  $k_{2,1}$  хвиль сигналу і накачки, які беруть участь в параметричному резонансі на рис. 2.2 виконаємо паралельний перенос кривої 4 так, щоб точка  $O'$  перемістилася в точку  $O$ . В результаті крива 4 переміститься в положення 5. Тоді перетин кривої 5 з кривими 1 і 2 дасть шукані значення частот  $\omega_{1,1}$  і хвильових чисел  $k_{1,1}$  для високочастотної електромагнітної хвилі сигналу. Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  визначають необхідні частоти і

хвильові числа. Щоб визначити частоти  $\omega_{2,1}$  і хвильові числа  $k_{2,1}$  низькочастотної електромагнітної хвилі накачки необхідно спроектувати знайдені точки  $A, B, C$  і  $D$  на криву 4 в напрямку паралельного перенесення. Таким чином, точки  $A', B', C'$  і  $D'$  визначають відповідні частоти  $\omega_{2,1}$  і хвильові числа  $k_{2,1}$ . Отже, в плазмо-пучковому супергетеродинному лазері на вільних електронах доплертронного типу трихвильові параметричні взаємодії між хвилями сигналу, накачки і ХПЗ можливі в чотирьох різних режимах, які ми позначимо як  $A, B, C$  і  $D$ .

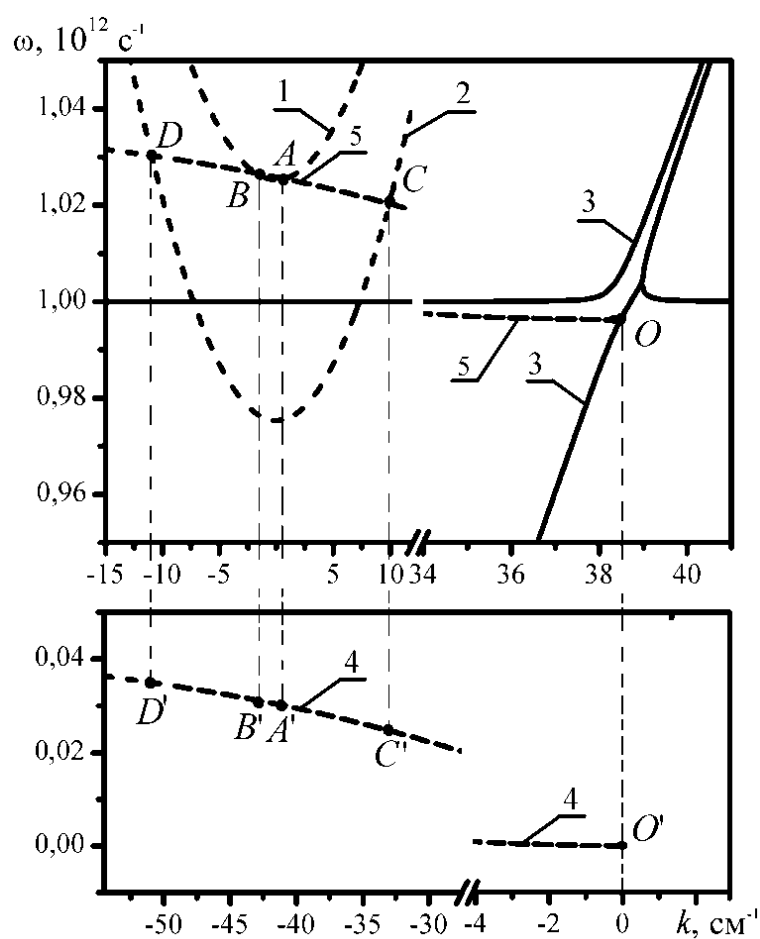


Рисунок 2.2 — Дисперсійні криві хвиль сигналу, накачки і ХПЗ в плазмо-пучковому СЛВЕ доплертронного типу

Проведемо аналіз рівнів і механізмів насичення в плазмо-пучковому СЛВЕ доплертронного типу з гвинтовим релятивістським електронним пучком. Для цього проаналізуємо систему кубічно-нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (2.11) і співвідношення (2.15) за допомогою стандартних чисельних методів. Для цього будемо використовувати стандартні чисельні методи. Параметри системи представлені в табл. 1.

Монохроматичний режим взаємодії. Проаналізуємо динаміку хвиль для різних режимів роботи (режими  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$  (рис. 2.2)) при куті вльоту РЕП  $\beta = 30^\circ$ . На рис. 2.3 представлені залежності амплітуд перших гармонік напруженості електричного поля хвилі сигналу  $E_1 = \sqrt{|E_{1x}|^2 + |E_{1y}|^2}$  від нормованого часу  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для чотирьох режимів роботи  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Як нормувальний множник  $\delta\omega_0$  для нормованого часу  $\tau$  взятий інкремент зростання плазмо-пучкової нестійкості при куті вльоту пучка  $\beta = 0^\circ$  [4,5,16]. Відзначимо, що розглядається випадок, коли енергія пучка, а значить і модуль його швидкості залишаються постійним. Тому при зміні кута вльоту  $\beta$  змінюється його поздовжня швидкість  $v_{bz}$ , а значить і інкремент зростання плазмо-пучкової нестійкості також змінюється. Тому для того щоб коректно порівнювати динаміку хвиль при різних кутах вльоту  $\beta$  і в різних режимах роботи в якості нормувального множника беремо один і той же множник: інкремент зростання плазмо-пучкової нестійкості при куті вльоту пучка  $\beta = 0^\circ$ .

На рис. 2.3 крива  $A$  відповідає режиму  $A$  (рис. 2.2), крива  $B$  — режиму взаємодії  $B$ , крива  $C$  — режиму взаємодії  $C$ , крива  $D$  — режиму взаємодії  $D$ . З рис. 2.3 випливає, що максимальний рівень напруженості електричного поля сигналу досягається в разі режиму  $D$ , хоча темп посилення амплітуди сигналу на початковому етапі взаємодії в цьому режимі менше, ніж в режимі  $C$ . При цьому слід зазначити, що для всіх режимів, представлених на рис. 2.3, інкремент плазмо-пучкової нестійкості має одне і те ж значення, так як кут вльоту ( $\beta = 30^\circ$ ) при розрахунках кривих рис. 2.3 не змінювався. Параметричний інкремент зростання для режимів  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — різний. Саме параметрична взаємодія визначає різну динаміку хвилі сигналу для різних режимів, яка представлена на рис. 2.3. Також

відзначимо, що в режимі  $D$  в області насичення напруженість електричного поля сигналу досягає значення  $\sim 6$  МВ/м. Довжина хвилі сигналу в вакуумі для цього режиму  $\lambda_1 = 2\pi c / \omega_1 \approx 1,8$  мм. Таким чином, в режимі  $D$  плазмо-пучковий СЛВЕ може працювати як потужне джерело електромагнітного випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль. Відзначимо, що раніше в рамках кубічно-нелінійного наближення був вивчений в [18] тільки один режим роботи плазмо-пучкового СЛВЕ доплертронного типу, в якому бере участь право поляризована електромагнітна хвиля (на рис. 2.2 крива 1, точка  $A$ ) при куті вльоту електронного пучка рівного нулю  $\beta = 0^\circ$ .

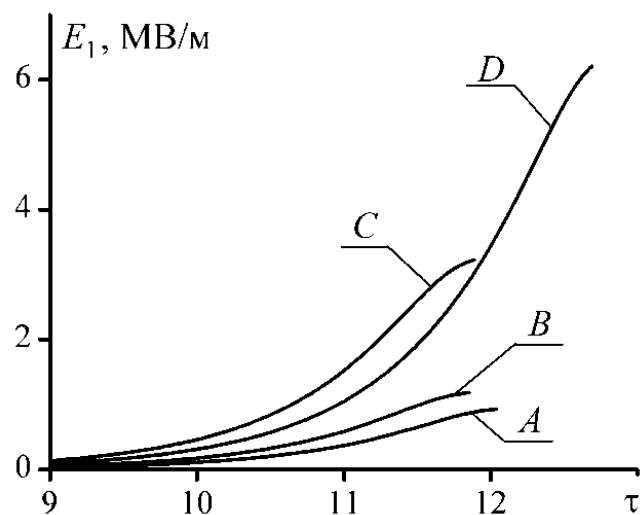


Рисунок 2.3. Залежності амплітуди 1-ї гармоніки напруженості електричного поля сигналу  $E_1$  від нормованого часу  $\tau$

Мультигармонічний аналіз динаміки хвиль. Як говорилося раніше в досліджуваному плазмо-пучковому СЛВЕ з гвинтовим РЕП між вищими гармоніками ХПЗ виникають множинні резонансні взаємодії [16–18], завдяки чому відбувається генерація і посилення вищих гармонік. Умова таких взаємодій описується співвідношеннями (2.4)–(2.5). З'ясуємо, як впливають множинні параметричні резонанси між гармоніками ВПЗ на рівні насичення високочастотної електромагнітної хвилі сигналу в режимі максимального посилення. Використовуючи стандартні чисельні методи, проаналізуємо систему рівнянь (2.11) і



(2.15). При чисельному рішенні будемо враховувати перші десять гармонік хвилі просторового заряду ( $N = 10$ ). Параметри системи наведені в табл. 1

На рис. 2.4 зображено залежність амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу  $E_{1,1} = \sqrt{|E_{1x,1}|^2 + |E_{1y,1}|^2}$  від нормованого часу  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$ . Розрахунки проведені для режиму взаємодії  $D$  (рис. 2.2) при куті вльоту  $\beta = 30^\circ$ . На цьому рисунку крива 1 представляє результат розрахунку, в якому враховано взаємодію тільки перших гармонік хвиль, крива 2 отримана в результаті розрахунків, в яких враховано вплив множинних трихвильових резонансних взаємодій перших десяти гармонік ХПЗ

Порівнюючи криві 1 і 2 на рис. 2.4 бачимо, що вплив вищих гармонік ХПЗ призводить до зменшення рівня насичення більш, ніж в два рази (крива 2). Це означає, що множинні резонансні взаємодії між гармоніками ХПЗ істотно впливають на нелінійні процеси в плазмо-пучкових СЛВЕ доплертронного типу з гвинтовими електронними пучками. Аналогічний вплив множинних резонансних взаємодій на рівень насичення має місце і для інших режимів роботи досліджуваного типу плазмо-пучкового СЛВЕ ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ). Тому облік таких взаємодій для отримання більш якісного аналізу динаміки хвиль в плазмо-пучкових супергетеродинних ЛВЕ є необхідною умовою. Далі всі розрахунки проводяться з урахуванням множинних взаємодій між вищими гармоніками ХПЗ.

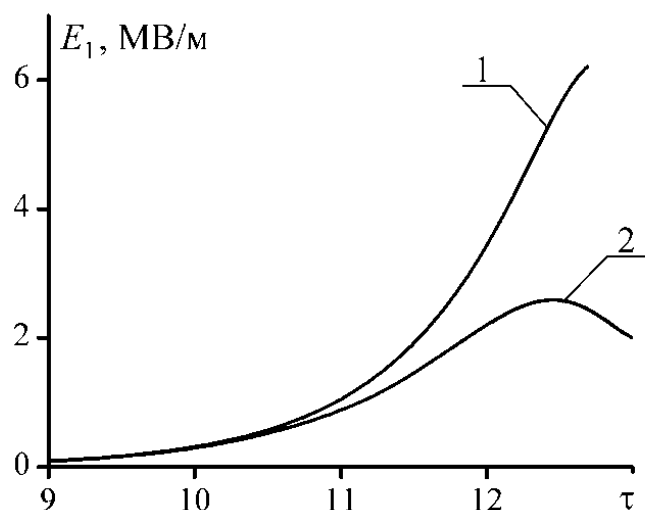


Рисунок 2.4 — Залежності амплітуди першої гармоніки хвилі сигналу

$E_{1,1}$  від нормованого часу  $\tau$  для режиму взаємодії  $D$

На рис. 2.5 представлені залежності амплітуди першої гармоніки напруженості електричного поля хвилі сигналу  $E_{1,1}$  від нормованого часу  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  для чотирьох режимів роботи ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ) при куті вльоту електронного пучка  $\beta = 30^\circ$ .

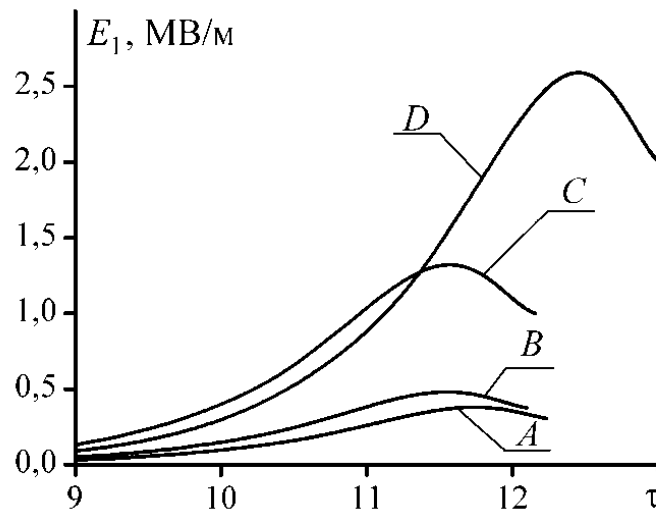


Рисунок 2.5 — Залежність амплітуди 1-ої гармоніки напруженості електричного поля сигналу  $E_1$  від нормованого часу  $\tau$ ,  $\beta = 30^\circ$

На рис. 2.5 крива  $A$  відповідає режиму  $A$  (рис. 2.2), крива  $B$  – режиму взаємодії  $B$ , крива  $C$  – режиму взаємодії  $C$ , крива  $D$  – режиму взаємодії  $D$ . З рис. 2.5 випливає, що максимальний рівень напруженості електричного поля сигналу досягається в разі режиму  $D$ , хоча темп посилення амплітуди сигналу на початковому етапі взаємодії в цьому режимі менше, ніж в режимі  $C$ . Проаналізувавши рівні насичення сигнальної хвилі для різних режимів взаємодії в досліджуваній моделі плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з гвинтовим РЕП (рис. 2.5) можна легко визначити максимальну вихідну потужність електромагнітної хвилі сигналу  $P = 16$  МВт і максимальний електронний коефіцієнт корисної дії, який досягає  $\sim 30\%$ . При цьому врахуємо, що параметри пучка досить помірні для такого класу приладів ( $n_b = 1,25 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $\gamma_b = 2$ , сила струму 100 А). Відомо, що для підвищення вихідної потужності хвилі сигналу, можна використовувати пучки з великими струмами. Таким чином, в режимі  $D$  плазмо-пучковий супергетеродинний ЛВЕ доплертронного

типу може працювати як потужний підсилювач електромагнітного випромінювання в міліметровому діапазоні довжин хвиль.

З'ясуємо, як змінюються рівні насичення електромагнітної хвилі сигналу в залежності від кута вльоту електронного пучка  $\beta$ . На рис. 2.6 представлені залежності амплітуди першої гармоніки напруженості електричного поля хвилі сигналу від нормованого часу  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  при різних кутах вльоту пучка  $\beta$  по відношенню до магнітного поля для режиму взаємодії  $D$ .

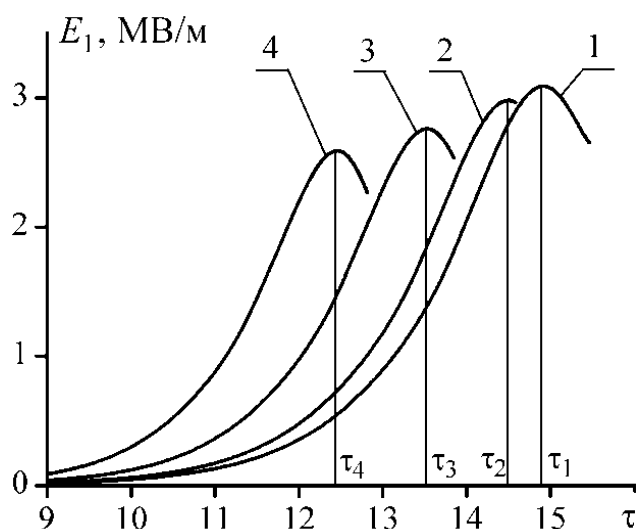


Рисунок 2.6 — Залежності амплітуди 1-ої гармоніки напруженості електричного поля хвилі сигналу  $E_1$  від нормованого часу  $\tau$

Крива 1 відповідає куту вльоту  $\beta = 0^\circ$ , крива 2 відповідає куту вльоту  $\beta = 10^\circ$ , крива 3 відповідає  $\beta = 20^\circ$ , крива 4 відповідає  $\beta = 30^\circ$ . З рис. 2.6 випливає, що на початковому етапі темп посилення хвилі сигналу збільшується зі збільшенням кута вльоту  $\beta$ . Як говорилося раніше це пов'язано зі збільшенням інкременту зростання при збільшенні кута вльоту. З іншого боку, збільшення інкременту зростання також призводить до збільшення темпу посилення напруженості електричного поля ХПЗ, що призводить до захоплення електронів пучка. Також рис. 2.6 показує, що рівень насичення в режимі взаємодії  $D$  при збільшенні кута  $\beta$  незначно знижується. При цьому час насичення також зменшується ( $\tau_4 < \tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ ). Відзначимо, що в монохроматичному режимі рівень насичення незначно підвищується. Таким чином, множинні параметричні резонанси між вищими гармоніками ХПЗ якісно впливають

на динаміку електромагнітної хвилі сигналу і їх врахування необхідно при побудові кубічно нелінійної теорії плазмо-пучкового СЛВЕ з доплертронною накачкою і гвинтовим РЕП.

Проведемо аналіз механізмів насичення в даній системі з урахуванням множинних параметричних резонансів. Для цього розглянемо поведінку амплітуди першої гармоніки концентрації плазми, нормованої на постійну складову концентрації електронів плазми  $n_{p3,1n} = n_{p3,1} / n_{p0}$  (рис 2.7, крива 1) і амплітуди першої гармоніки концентрації пучка, нормованої на постійну складову концентрації електронів пучка  $n_{b3,1n} = n_{b3,1} / n_{b0}$  (рис. 2.7, крива 2) від нормованого часу  $\tau = t \cdot \delta\omega_0$  в режимі взаємодії  $D$  при куті вльоту пучка  $\beta = 30^\circ$ .

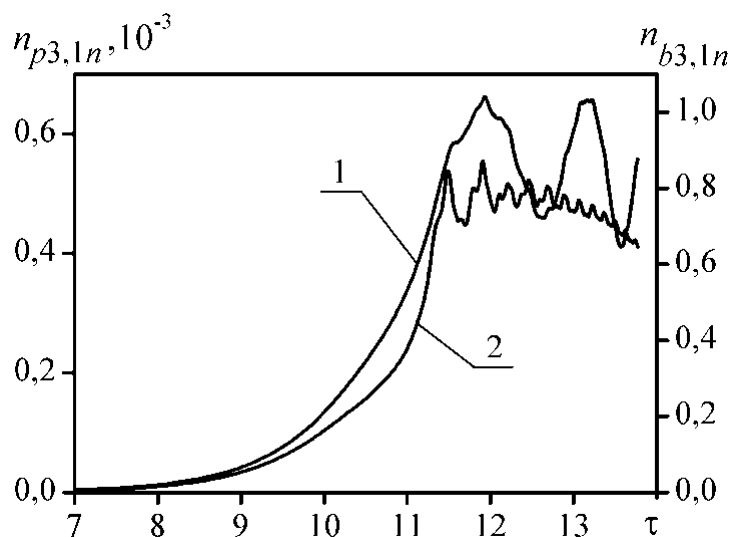


Рисунок 2.7 — Залежно нормованих амплітуд 1-х гармонік концентрацій електронів плазми  $n_{p3,1n}$  і пучка  $n_{b3,1n}$  від нормованого часу  $\tau$ .

На початковому етапі має місце експоненціальне зростання обох величин. Потім відбувається їх нелінійна стабілізація. При цьому амплітуда 1-ї гармоніки концентрації плазми здійснює регулярні коливання. Ці коливання обумовлені захопленням електронів пучка полем плазмової хвилі. Захоплення стає можливим завдяки, з одного боку, зниження швидкості пучка електронів до швидкості близької до фазової швидкості плазмової хвилі, а з іншого боку, істотного збільшення інтенсивності плазмової хвилі. В результаті захоплення електрони пучка формуються в згустки, які коливаються в межах квазіпотенціальної ями плазмової хвилі. Ці згустки

то віддають плазмовій хвилі енергію, то відбирають назад. Характерною особливістю цього процесу - за одне коливання плазмової хвилі згустки кілька разів стикаються з краями квазіпотенціальної ями. Це призводить до того, що осциляції нормованої амплітуди  $n_{b3,1n}$  (рис. 2.7, крива 2) відбуваються в кілька разів частіше осциляцій нормованої амплітуди плазмової хвилі  $n_{p3,1n}$  (рис. 2.7, крива 1). При цьому рівень модуляції електронного пучка виявляється приблизно рівним одиниці, тобто в даному випадку має місце повна модуляція пучка.

Розрахунки показують, що вищі гармоніки (в розрахунках враховувалося перших 10 гармонік хвилі ХПЗ) концентрації пучка мають такий же характер осциляцій як і перша гармоніка, їх амплітуда коливань порівнянна з амплітудою коливань першої гармоніки. Так само було отримано, що в монохроматичному режимі ХПЗ (в розрахунках враховувалася тільки перша гармоніка хвилі ХПЗ) амплітуда концентрації електронів пучка не наситилась. Таким чином, врахування взаємодії вищих гармонік ХПЗ істотно впливає на динаміку хвиль в плазмо-пучкових СЛВЕ доплертронного типу з гвинтовими пучками. Аналогічні дослідження «чисто» плазмо-пучкових систем [1–13, 18, 22] показують, що насичення плазмо-пучкової нестійкості обумовлено саме процесами, описаними вище. Тому можна стверджувати, що насичення посилення в плазмо-пучковому СЛВЕ з доплертронною накачкою і гвинтовим РЕП відбувається, перш за все, завдяки насиченню самої плазмо-пучкової нестійкості шляхом захоплення електронного пучка плазмовою хвилею.

## 2.4 Висновки

Побудована самоузгоджена мультигармонічна кубічно-нелінійна теорія плазмо-пучкового супергетеродинного лазера на вільних електронах доплертронного типу з гвинтовим релятивістським електронним пучком. Отримано кубічно-нелінійна система диференціальних рівнянь для комплексних амплітуд гармонік електромагнітних хвиль з урахуванням множинних параметричних резонансів.

2. Показано, що зі збільшенням кута вльоту  $\beta$  електронного пучка коефіцієнти посилення електромагнітного сигналу збільшуються. Таке збільшення визначається зростанням інкременту зростання плазмо-пучкової нестійкості при збільшенні кута  $\beta$ , що пов'язано зі зменшенням поздовжньої енергії електронів. З'ясовано, що при використанні гвинтових РЕП збільшення інкременту плазмо-пучкової нестійкості спостерігається у всіх режимах трихвильової параметричної взаємодії хвиль.

3. Визначено рівні насичення для чотирьох режимів роботи плазмо-пучкового супергетеродинного ЛВЕ з доплертронною накачкою і гвинтовим електронним пучком. З'ясовано, що режим взаємодії, в якому бере участь незвичайна циркулярно-поляризована хвиля сигналу має найбільшими значеннями ККД ( $\sim 30\%$ ) і вихідної потужності ( $P = 16$  МВт) електромагнітної хвилі сигналу при помірних параметрах пучка (концентрація електронів пучка  $n_b = 1,25 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ , релятивістський фактор  $\gamma_b = 2$ , сила струму 100 А).

4. Проведено облік множинних параметричних резонансних взаємодій гармонік хвилі просторового заряду в плазмо-пучковому супергетеродинному ЛВЕ з доплертронною накачкою при неосьовому вльоті релятивістського електронного пучка. З'ясовано, що такі резонансні взаємодії грають істотну роль, зокрема, призводять до зменшення рівня насичення сигналу в два і більше разів. Визначено, що насичення в досліджуваному пристрої у всіх режимах відбувається через захоплення електронів пучка плазмовими хвилями.

### **3 АНАЛІЗ ФОРМУВАННЯ ХВИЛІ ПРОСТОРОВОГО ЗАРЯДУ З ШИРОКИМ МУЛЬТИГАРМОНІЧНИМ СПЕКТРОМ У ДВОПОТОКОВОМУ ЕЛЕКТРОННОМУ РЕЛЯТИВІСТСЬКОМУ ПУЧКУ МЕТОДОМ ЧАСТИНКА В КОМІРЦІ (РІС)**

Останнім часом інтенсивний розвиток отримав напрямок, пов'язаний зі створенням і вивченням систем з широким спектром сигналу, які здатні формувати потужні ультракороткі електромагнітні імпульси. Такі сигнали мають практичне застосування для ряду фундаментальних і прикладних досліджень в галузі фізики, хімії, біології, медицини.

Як показали дослідження, двухпотокові супергетеродинні лазери на вільних електронах можуть працювати в режимі формування потужних ультракоротких кластерів електромагнітного поля. У цьому режимі в двухпотоковому релятивістському електронному пучку збуджується когерентна мультигармонічна зростаюча хвиля просторового заряду з аномальним ділянкою спектра, в якому вищі гармоніки мають більш високі амплітуди. Завдяки параметрично-резонансній взаємодії гармонік мультигармонічної ХПЗ з гармоніками мультигармонічної системи накачування збуджується мультигармонічний електромагнітний сигнал і стає можливим формування ультракороткого кластера, в тому числі і фемтосекундного в разі когерентного режиму випромінювання.

#### **3.1 Модель**

Розглядається поперечно – необмежена модель релятивістського двопотокового пучка електронів. Уважаємо, що потоки рухаються уздовж позитивного напрямку осі  $z$  з парціальними швидкостями  $v_1$  й  $v_2$ .

Досліджувалась модель у наближенні плазми, без зіткнень [27]. Рух потоків електронів у полі самоузгодженої теорії описується системою рівнянь Власова-Максвелла:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v}_\alpha \times \vec{H}) \right) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} &= 0, \\
\text{rot} \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\
\text{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\
\text{div} \vec{E} &= 4\pi \rho, \\
\text{div} \vec{H} &= 0, \\
\vec{j} &= \sum_\alpha e \int \vec{v} f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p}, \\
\rho &= \sum_\alpha e \int f_\alpha(\vec{p}, \vec{r}, t) d\vec{p}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

де  $f_\alpha$  – функція розподілу частинок компоненти пучка з номером  $\alpha$  ( $\alpha=1,2$ ),  $\vec{v}_\alpha$  – вектор швидкості відповідної компоненти пучка;  $\vec{E}$  – напруженість електричного поля;  $\vec{H}$  – напруженість магнітного поля;  $\rho$  – густина електричного заряду;  $\vec{j}$  – густина електричного струму;  $\vec{r}$  – просторова координата точки спостереження;  $\vec{p}$  – просторова координата імпульсів точки спостереження;  $c$  – швидкість світла у вакуумі;  $e = -|e|$  – заряд електрона.

Розв'язок самоузгодженої інтегро-диференціальної системи рівнянь (3.1) проводився методом частинок-в-комірці (particle-in-cell або PIC) [28-31]. При використанні цього методу плазма моделюється набором дискретних частинок, траєкторії руху яких є характеристиками рівняння Власова. Таким чином, розв'язувана система рівнянь складається з рівнянь Максвелла й релятивістських рівнянь руху для макрочастинок.

### 3.2 Аналіз

Як відомо, при розвитку двопотокової нестійкості в системі збуджуються чотири типи хвиль просторового заряду (ХПЗ). Для знаходження початкових умов



для розрахункових даних скористаємося виразом для дисперсійних функцій  $D_{\chi,m}$  для ХПЗ  $\chi = \sqrt{1.5}$  типу й номера гармоніки  $m$ , що було отримано після розв'язання системи рівнянь (3.1) при використанні ієрархічного асимптотичного підходу до теорії коливань і хвиль, а також методу повільно змінних амплітуд [16]:

$$D_{\chi,m} = -imk_{\chi} \left( 1 - \left( \frac{\omega_p^2}{m^2(\omega_{\chi} - k_{\chi}v_1)^2 \gamma_1^3} + \frac{\omega_p^2}{m^2(\omega_{\chi} - k_{\chi}v_2)^2 \gamma_2^3} \right) \right). \quad (3.2)$$

Зазвичай ці співвідношення для першої гармоніки дорівнюють нулю (умова «власної» хвилі) і визначають залежність між частотою й хвильовим числом даного типу хвиль. При цьому, розв'язки дисперсійних рівнянь  $D_{\chi,m} = 0$  при  $\omega_{1,\dots,4} > \omega_{cr}$  (де  $\omega_{cr} = \sqrt{2}\omega_p / (\delta\gamma_0^{3/2})$  - критична частота) виражаються дійсними величинами, тоді, як у випадку  $\omega_5 < \omega_{cr}$  розв'язок дисперсійного рівняння є комплексними. У даному розділі розглянуто саме останній випадок діапазону частот  $\omega_5$  для формування мультигармонічного спектра ХПЗ.

Таким чином, серед розв'язків рівняння (3.2)

є два які відповідають двом хвилям, що характеризуються комплексним хвильовим числом  $k$ .

$$k = \frac{\omega}{v_0} \pm i\Gamma, \quad (3.3)$$

де  $v_0 = (v_1 + v_2)/2$ .

Одна із цих хвиль експоненційно зростає (зростаюча хвиля), для неї величина  $\Gamma$  означає інкремент зростання. При цьому максимальний інкремент буде у хвилі із частотою, що збігається з оптимальної [19, 32, 33]:

$$\omega_{opt} = \sqrt{3}\omega_p / (2\delta\gamma_0^{3/2}) = \sqrt{3/8}\omega_{cr}. \quad (3.4)$$

Для подальшого моделювання використовували значення параметрів двухпотокової системи представлені в табл. 2

Таблиця 2 — Значення параметрів двошвидкісної системи

Параметр	Значення
Плазмова частота парціальних пучків	$3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$
Середнє значення релятивістського фактора	4,5
Різниця релятивістських факторів парціальних пучків	0,2
Критична частота	$\omega_{cr} = 3,85 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$
Оптимальна частота	$\omega_{opt} = 2,36 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$

На рисунках 3.1- 3.3 представлені результати моделювання методом РІС при різних початкових значеннях робочої частоти  $\omega_s$ . Представлено динаміку хаотизації (термалізації) пучків: показані фазові площини пучків на кадрах, віднесених до різних моментів часу. Показано, що спочатку моношвидкісні пучки значно термолізується в залежності від вибору робочої частоти в різний час. Крім того представлена картина розкладання в спектр ХПЗ в області робочої частоти. Всі розрахунки проведені для початкового ступеня модуляції по початковій частоті  $\frac{\tilde{\rho}}{\rho} = 0,2$  ( $\rho$ ,  $\tilde{\rho}$  – густина заряду двопотокового пучка й осциляторна його частина).

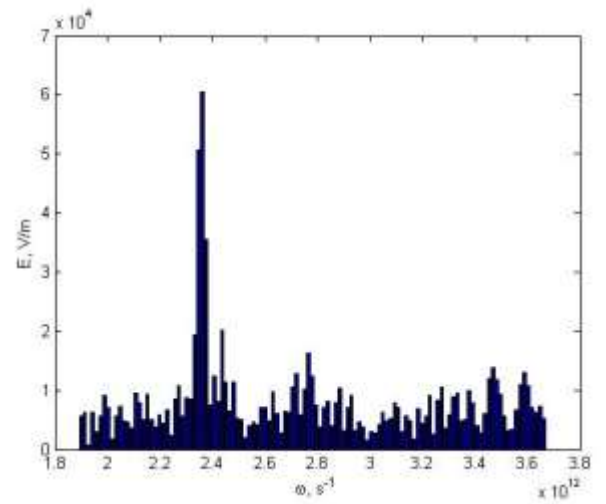
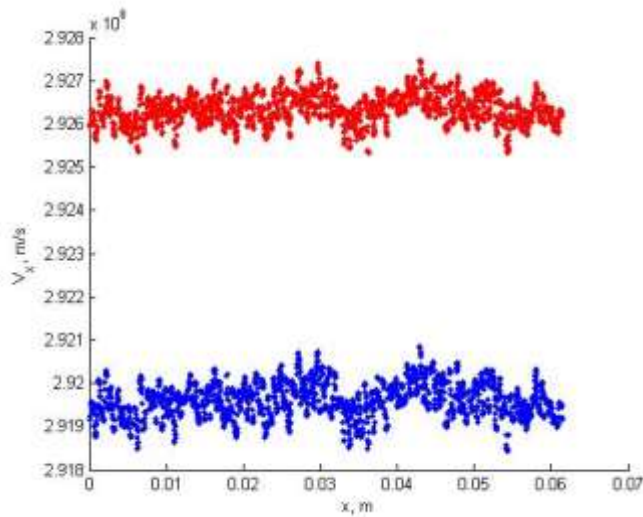
На рисунку 3.1 показано розвиток двопотокової нестійкості за умови початкової модуляції густини заряду по частоті, що збігається з оптимальною  $\omega_s = \omega_{opt}$ . На початковому етапі формується спектр із яскраво вираженим максимумом розвиток якого приводить до формування аномального спектра (Рис. 3.1а) ширина якого становить  $\Delta\omega \approx 0,45 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ . Амплітуда основної гармоніки дорівнює  $6 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ . До моменту нормованого часу  $\tau = 0,6$  (рис. 3.1б) відбувається нелінійна стабілізація нестійкості. До цього моменту величини модуляції пучків досягають максимумів. Після насичення амплітуда основної гармоніки падає, роблячи при цьому хаотичні осциляції, що приводить до зникнення аномального спектра.

На рисунку 3.2 розглянутий випадок розвитку двопотокової нестійкості за умови початкової модуляції пучків по частоті  $\omega_s = \frac{1}{2} \omega_{opt}$ . Початкове поведіння

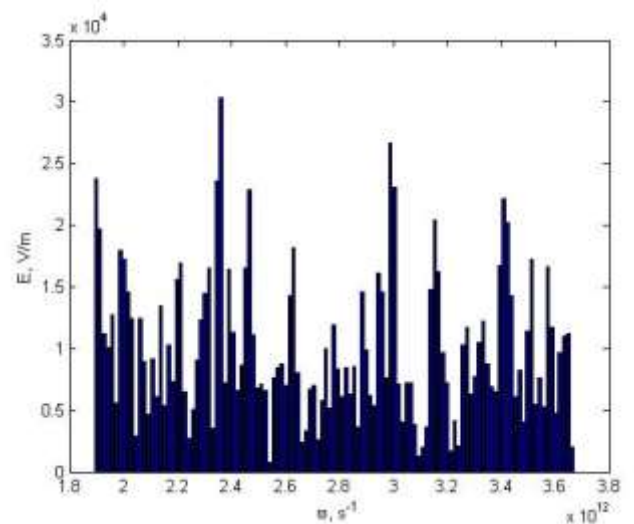
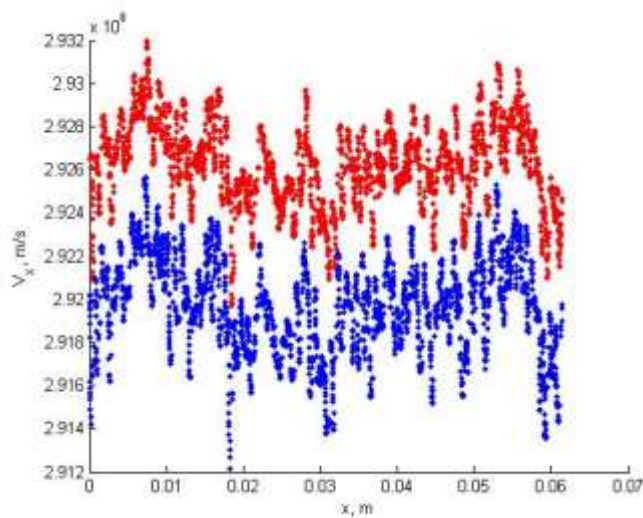
системи аналогічно попередньому з урахуванням зсуву по основній частоті. При цьому значення амплітуди основної гармоніки до моменту часу  $\tau = 0,3$  (рис. 3.2а) дорівнює  $13,6 \cdot 10^4$  В/м, а ширина спектра  $\Delta\omega \approx 0,3 \cdot 10^{12}$  с<sup>-1</sup>. При тому самому значенні часу, що й на рис. 3.1б  $\tau = 0,6$  (рис. 3.2б) форма спектра зберігається. При цьому триває незначний ріст основної гармоніки до часу  $\tau = 0,9$  після чого відбувається насичення.

На рисунку 3.3 показана динаміка розвитку двопотокової нестійкості за умови початкової модуляції пучків по частоті  $\omega_s = \frac{1}{5} \omega_{opt}$ . На початковому етапі формується аномальний спектр за аналогією з попередніми випадками (не показано на малюнку) із шириною  $\Delta\omega \approx 0,27 \cdot 10^{12}$  с<sup>-1</sup>. До моменту часу  $\tau = 0,3$  (рис. 3.3б) пучок значною мірою термолізувався. Подальший розвиток нестійкості (рис. 3.3б і рис. 3.3в) відбувається в умовах хаотизації, що приводить до загасання збурювань полів в обраній області частот.

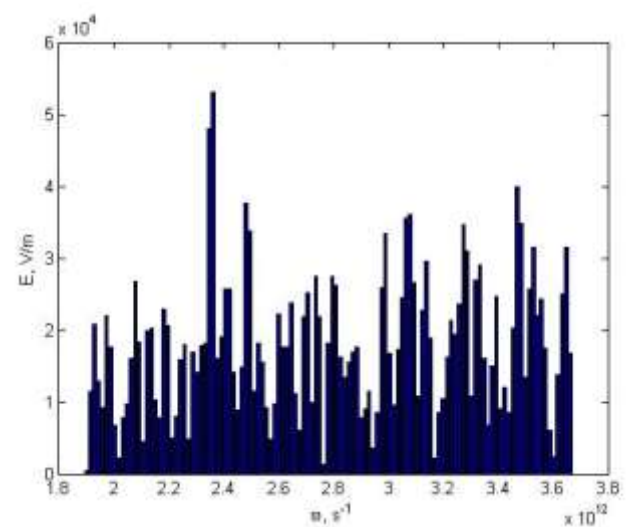
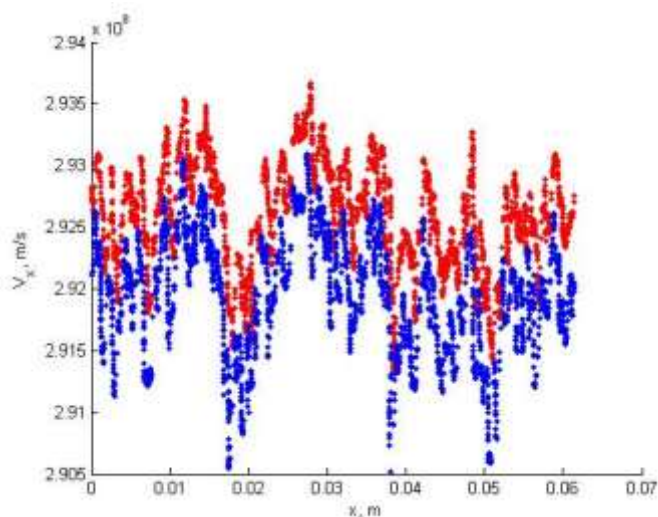
У такий спосіб можна бачити, що при зниженні робочої частоти формування аномального спектра відбувається більш інтенсивно, значення основної гармоніки зростає, що приводить до більше активного росту прилеглих гармонік. З іншого боку час розвитку лінійної стадії нестійкості зменшується, що приводить до зменшення стабільності аномального спектра й відповідно можливості його використання в системах формування ультракоротких кластерів. Крім того зі зниженням частоти основної гармоніки відбувається звуження діапазону частот, у якому розвивається аномальний спектр. Збільшення часу взаємодії було б можливо, при зменшенні початкової модуляції пучка на основній частоті, але в процесі моделювання було помічено, що при ступені модуляції менш 0,1 сформувати аномальний широкий спектр стає важко. Проте, питання впливу ступеня модуляції на форму спектра залишається відкритим і планується досліджуватися надалі.



а)  $\tau = 0,3$

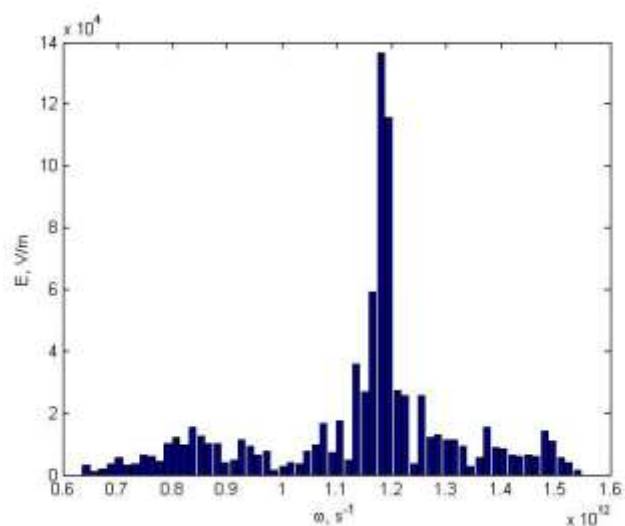
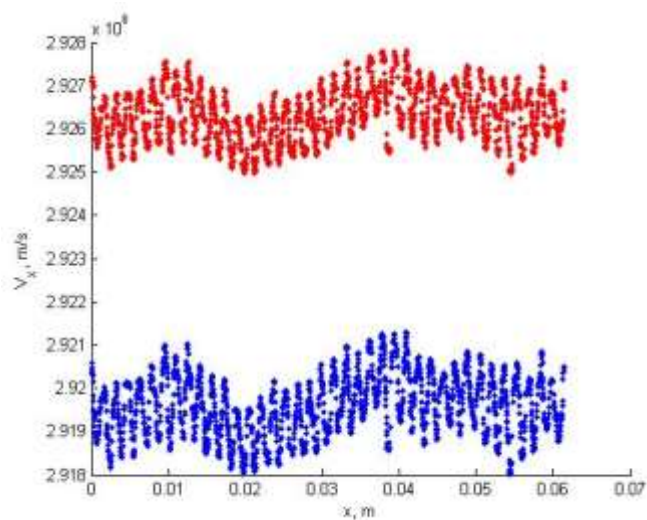


б)  $\tau = 0,6$

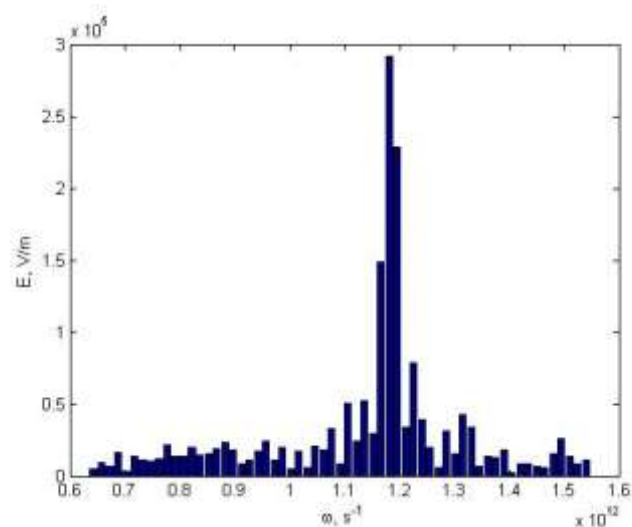
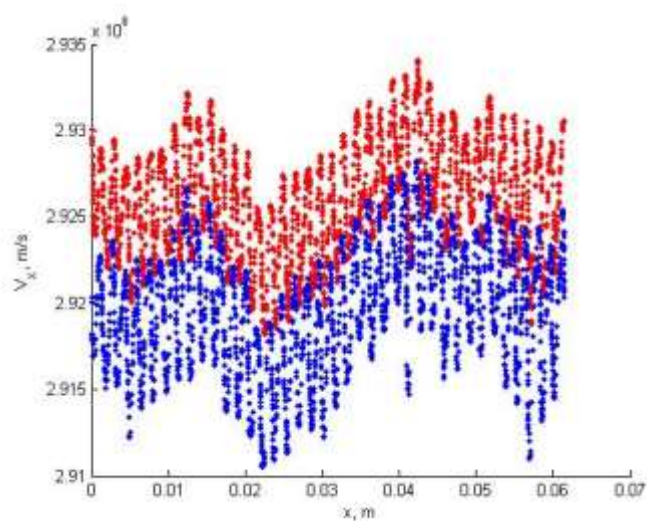


в)  $\tau = 0,9$

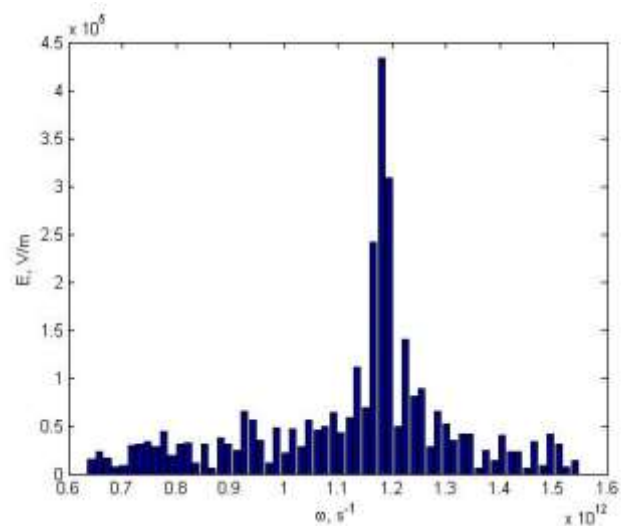
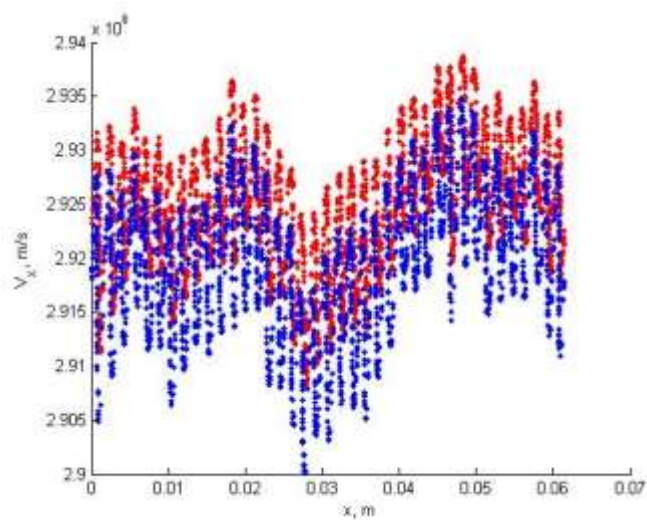
Рисунок 3.1 — Фазові площини й спектральні залежності амплітуд гармонік напруженості ХПЗ за умови  $\omega_5 = \omega_{opt}$  в різні моменти часу



a)  $\tau=0,3$



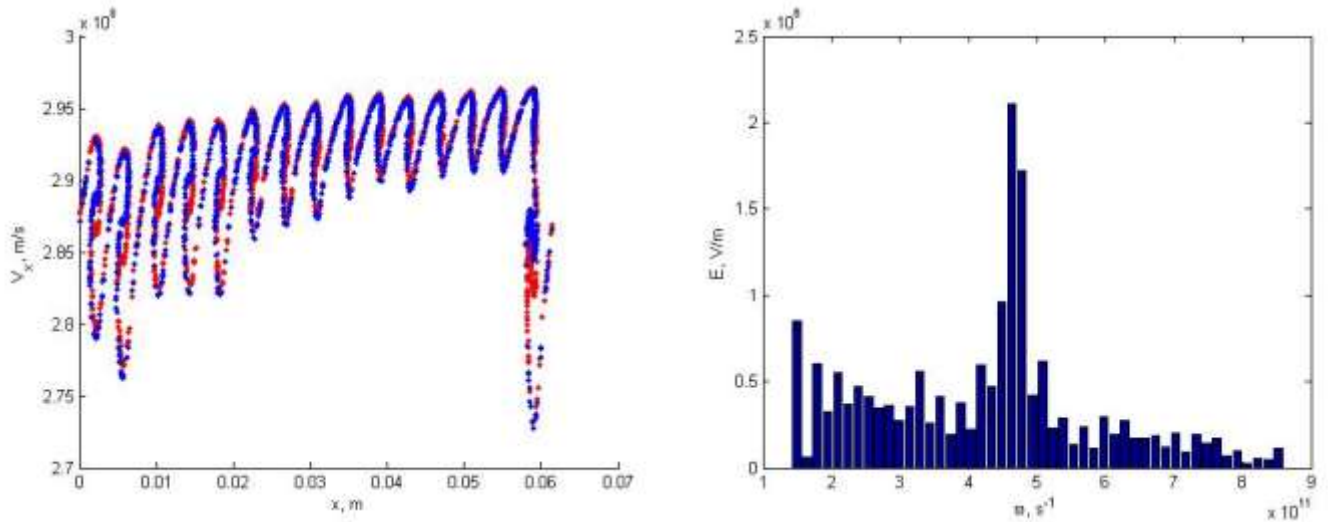
б)  $\tau=0,6$



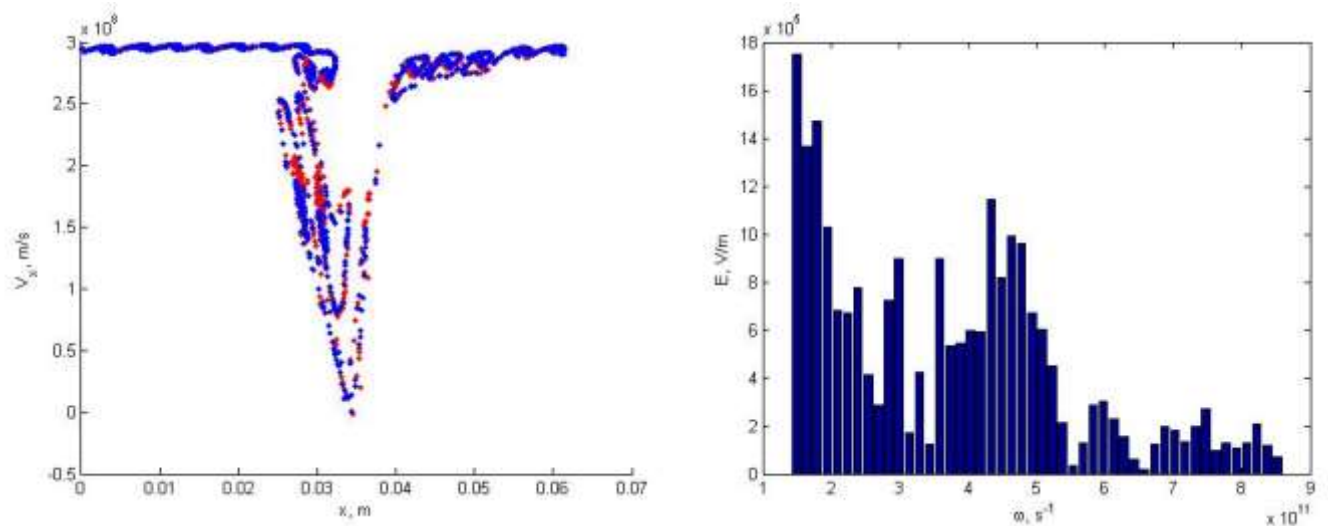
в)  $\tau=0,9$

Рисунок 3.2 — Фазові площини й спектральні залежності амплітуд гармонік напруженості ХПЗ за умови  $\omega_5 = 1/2\omega_{opt}$  в різні моменти часу

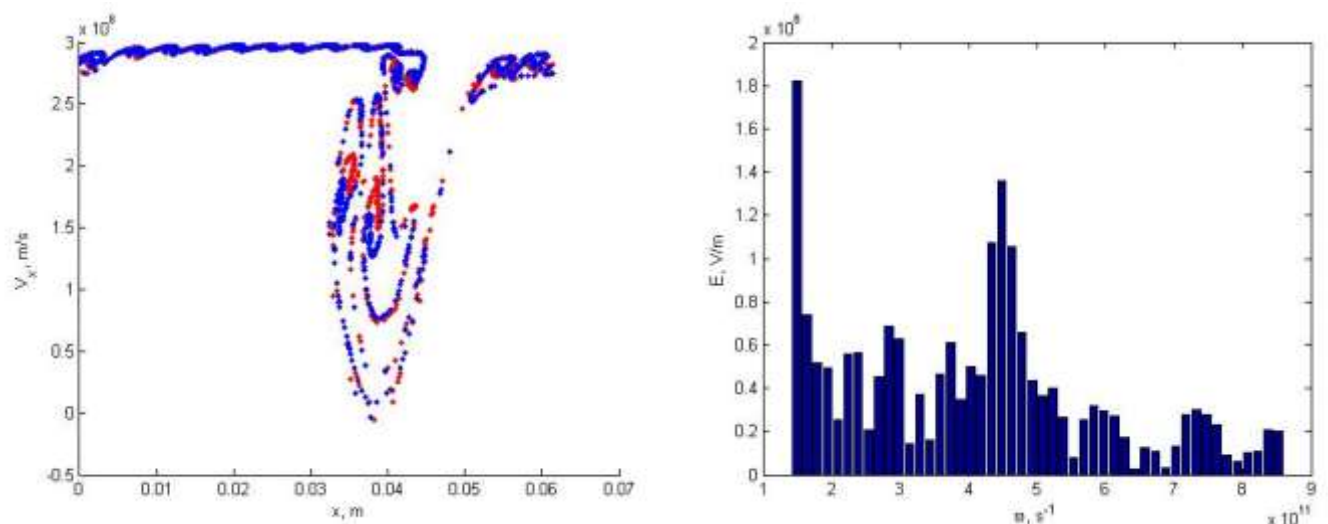
часу



а)  $\tau = 0,3$



б)  $\tau = 0,6$



в)  $\tau = 0,9$

Рисунок 3.3 — Фазові площини й спектральні залежності амплітуд гармонік напруженості ХПЗ за умови  $\omega_5 = 1/5\omega_{opt}$  в різні моменти часу

### 3.3 Висновки

Проведено дослідження системи формування широкого мультигармонічного спектру на базі двопотокового електронного релятивістського пучка за допомогою ієрархічного асимптотичного підходу до теорії коливань і хвиль і комп'ютерного моделювання методом РІС. Показано, що при зниженні частоти основної гармоніки зменшується час розвитку лінійної стадії двопотокової нестійкості. При цьому відбувається звуження аномальної ділянки частотного спектра, але при цьому більш активно зростають значення амплітуд гармонік, тобто відбувається підвищення інкременту гармонік. Зазначено можливість формування більше стійкого аномального спектра при зниженні робочої частоти за допомогою зменшення ступеня модуляції, більше докладне дослідження цієї залежності планується зробити в найближчому майбутньому

## ВИСНОВКИ

1. Уперше встановлено, що в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими електронними пучками як доплертронного, так і Н-убітронного типу має місце істотне збільшення коефіцієнта підсилення електромагнітної хвилі сигналу за умови збільшення кута вльоту електронного пучка. З'ясовано, що цей ефект має релятивістський характер, пов'язаний зі зміною поздовжньої кінетичної енергії електронів пучка та обумовлений залежністю інкременту зростання плазмово-пучкової нестійкості від кута вльоту РЕП. За умови збільшення кута вльоту пучка з  $0^\circ$  до  $30^\circ$  інкремент зростання хвиль збільшується більше ніж на 20%.

2. Уперше побудована самоузгоджена кубічно-нелінійна теорія мультигармонічних взаємодій хвиль у плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ з гвинтовими РЕП як з доплертронною так і Н-убітронною накачками. Отримано систему кубічно-нелінійних диференціальних рівнянь для амплітуд гармонік електромагнітних полів хвиль, яка описує динаміку хвиль, що взаємодіють, з урахуванням мультигармонічних резонансів.

3. Показано, що множинні параметричні резонанси призводять до якісної зміни динаміки хвиль, зокрема до зменшення рівнів насичення хвилі сигналу. Встановлено, що насичення в плазмово-пучкових СЛВЕ з гвинтовими релятивістськими електронними пучками обумовлено захопленням електронів пучка плазмовими хвилями.

4. Установлено, що в плазмово-пучковому супергетеродинному ЛВЕ із гвинтовим РЕП доплертронного типу можлива реалізація чотирьох режимів роботи приладу. З'ясовано, що режим роботи, коли у трихвильовому параметричному резонансі бере участь незвичайна циркулярно-поляризована електромагнітна хвиля сигналу, характеризується коефіцієнтом підсилення, який перевищує коефіцієнт підсилення в інших режимах більше ніж удвічі.

5. З'ясовано, що в плазмово-пучковому супергетеродинному ЛВЕ Н-убітронного типу для режиму роботи, в якому використовується швидка



циклотронна електромагнітна хвиля сигналу коефіцієнт підсилення хвилі сигналу перевищує інші майже удвічі. Знайдено оптимальний кут вльоту електронного пучка ( $\sim 37^\circ$ ) відносно поздовжнього магнітного поля, коли підсилення хвилі сигналу є максимальним. Установлено, що в цьому разі має місце збіг кроку гвинтового пучка з періодом ондуляції магнітного поля накачки, у результаті цього відбувається ефективно збільшення поля накачки.

6. Установлено, що в плазмово-пучкових супергетеродинних ЛВЕ із гвинтовими РЕП, за помірних вимог до параметрів системи (концентрація електронів пучка  $1,3 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ , енергія пучка 0,5 МеВ, струм пучка 100 А) можливе створення потужної електромагнітної хвилі сигналу в міліметровому діапазоні довжин хвиль (довжина хвилі сигналу 1,8 мм) із вихідною потужністю  $\sim 16$  МВт та ККД  $\sim 30\%$ .

7. Подальшого розвитку набув метод усереднених характеристик для вирішення мультигармонічних задач у потужнострумівих приладах, що використовують гвинтові РЕП. У рамках цього методу була запропонована нова заміна змінних, яка дозволила підвищити ефективність алгоритму асимптотичного інтегрування.

**ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ**

1. Девидсон Р. Теория заряженной плазмы / Р. Девидсон ; пер. с англ. А.В. Агафонова. – М.: Мир, 1978. – 215 с.
2. Электродинамика плазмы / [ Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др.] ; под ред. А.И. Ахиезера. – М.: Наука, 1974. – 719 с.
3. Кузелев М.В. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. – М. : Наука, 1990. – 336 с.
4. Кузелев М.В. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 544 с.
5. Krall N.A. Principles of Plasma Physics / N.A. Krall, A.W. Trivelpiece. – New York: San Francisco Press, 1986. – 686 p.
6. Bellan P. M. Fundamentals of plasma physics / P. M. Bellan. — Cambridge; New York : Cambridge University Press, 2008. — 628 p.
7. Александров А. Ф. Радиофизика. Физика электронных пучков и основы высокочастотной электроники / А. Ф. Александров, М. В. Кузелев. – М: Изд. КДУ, 2007 – 300 с.
8. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей: в 2 т. – Т. 1: Неустойчивости однородной плазмы / А.Б. Михайловский. – Изд. 2-е, исп. и доп. – М.: Атомиздат, 1975. – 272 с.
9. Михайловский А.Б. Теория плазменных неустойчивостей: в 2 т. – Т. 2: Неустойчивости неоднородной плазмы / А.Б. Михайловский. – Изд. 2-е, исп. и доп. – М.: Атомиздат, 1977. – 360 с.
10. Krasovitskiy V.B. Instabilities of relativistic electron beam in plasma / V.B. Krasovitskiy. – New York : Nova Publishers, 2008. – 219 p.
11. Bret A. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime / A. Bret, L. Gremillet, M. E. Dieckmann // Phys. Plasmas. — 2010. — Vol. 17, No. 12. — P. 120501.

12. Generation of high-power sub-thz waves in magnetized turbulent electron beam plasmas / M. K. A. Thumm, A. V. Arzhannikov, V. T. Astrelin [et al.] // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. — 2013. — Vol. 35, No. 1. — P. 81–90.
13. Timofeev I.V. Exact kinetic theory for the instability of an electron beam in a hot magnetized plasma / I.V. Timofeev, V.V. Annenkov // *Phys. Plasmas* — 2013.— Vol. 20, No. 9. — 092123
14. Kuzelev M. V. On the theory of electromagnetic interactions of a relativistic electron beam and plasma in a coaxial waveguide in an external magnetic field / M. V. Kuzelev, E. A. Khapaeva // *Moscow University Physics Bulletin*. — 2015. — Vol. 69, No. 6. — P. 512–518.
15. Bret A. Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime / A. Bret, L. Gremillet, M. E. Dieckmann // *Phys. Plasmas* — 2010.— Vol. 17, No. 12. — 120501
16. Kulish V.V. Hierarchic electrodynamics and free electron lasers / V.V. Kulish. – *Baca Raton, London, New York : CRC Press, 2011. – 697 p.*
17. Kulish V. V. Cubic-nonlinear theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with h-ubitron pumping / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, V. V. Koval // *Telecommunications and Radio Engineering*. — 2010. — Vol. 69, No. 20. — P. 1859–1869. (Кулиш В. В. Кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазма-пучковых лазеров на свободных электронах с Н-убитронной накачкой / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, В. В. Коваль // *Радиофизика и электроника*. — 2009. — Vol. 14, No. 3. — P. 383—388.)
18. Kulish V.V. Multiharmonic cubic-nonlinear theory of plasma-beam superheterodyne free-electron lasers of the dopplertron type / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // *Plasma Physics Reports*. – 2010. – Vol. 36, No. 13. –P. 1185–1190. (Кулиш В.В. Мультигармоническая кубически-нелинейная теория супергетеродинных плазменно-пучковых лазеров на свободных электронах с доплертронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // *Прикладная физика*. – 2009. – № 5. – С. 76–81.)

19. Kulish V.V. Hierarchical methods: Hierarchy and hierarchic asymptotic methods in electrodynamics, Vol. 1 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 380 p.
20. Kulish V.V. Hierarchical methods: Undulative electrodynamic system, Vol. 2 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 396 p.
21. Kulish V.V. Methods of averaging in nonlinear problems of relativistic electrodynamics / V.V. Kulish. – Atlanta : World Federation Published Company, 1998. – 263 p.
22. Модернізований метод усереднених характеристик для розв'язування задач мультигармонічних резонансних взаємодій у пристроях сильнострумової електроніки / В.В. Куліш, О.В. Лисенко, Г.А. Олексієнко, Г.В. Биченко, О.О. Колоскова // Ж. нано- електрон. фіз. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 02015.
23. Лисенко О.В. Застосування модернізованого методу усереднених характеристик в задачах теорії плазмово-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах / О.В. Лисенко, Г.А. Олексієнко, М.О. Феденко // Ж. нано- електрон. фіз. – 2015. – Т. 7, № 4. – С. 04083.
24. Савченко В.І. Метод усереднених характеристик та його застосування у нелінійних задачах релятивістської електродинаміки: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.04.02 / Савченко Валерій Іванович. – Київ, 2005. – 142 с.
25. Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы. Москва: Высш. Школа, 1988. 424 с.
26. Kulish V. V., Lysenko A. V., Oleksiienko G A., Koval V. V., Rombovsky M. Nonlinear Theory of Plasma-Beam Superheterodyne Free Electron Laser of Dopplertron Type with Non-Axial Injection of Electron Beam. Acta Physica Polonica A. 2014. Vol. 126, N. 6. P. 1263–1268. DOI: 10.12693/APhysPolA.126.1263
27. Kulish V. et al. Plural interactions of space charge wave harmonics during the development of two-stream instability // Chinese Physics B. – 2015. – Т. 24. – №. 9. – С. 095201.

28. C.K. Birdsall, A.B Langdon Plasma Physics via Computer Simulation (London, New York, CRC Press, 2004).
29. Arber T. D. et al. Contemporary particle-in-cell approach to laser-plasma modelling //Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2015. – T. 57. – №. 11. – C. 113001.
30. Jiang C. et al. The affine particle-in-cell method //ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2015. – T. 34. – №. 4. – C. 51.
31. Edwards E., Bridson R. A high-order accurate particle-in-cell method //International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2012. – T. 90. – №. 9. – C. 1073-1088.
32. H Mehdian and S Saviz. Electron trajectory and growth rate in two-stream electromagnetically pumped free-electron lasers with ion-channel guiding. // Phys. Scr. 80 045401 (9pp) (2009).
33. B. W. J. McNeil and G. R. M. Robb. Two-beam free-electron laser. // Phys. Rev. E 70, 035501 [4 pages] (2004).
34. Sprangle P. Nonlinear analysis of a relativistic beam-plasma cyclotron instability / P. Sprangle, L. Vlahos // Physical Review A. — 1986. — Vol. 33, No. 2. — P. 1261–1269.
35. Bekefi G. Double-stream cyclotron maser / G. Bekefi // Journal of Applied Physics. — 1992. — Vol. 71, No. 9. — P. 4128–4131.
36. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a two-stream free-electron laser with a helical wiggler and an axial magnetic field / T. Mohsenpour, N. Mehrabi // Phys. Plasmas. - 2013. - V. 20, No. 8. - P. 082133.
37. Liu W. Instability of Two-stream Free-electron Laser with an Axial Guiding Magnetic Field / W. Liu, Z. Yang, Z. Liang // Int. J. Infrared Millim. Waves. - 2006. - V. 27. P. 1073.
38. Forming of ultrashort electromagnetic clusters by two-stream superheterodyne free electron lasers / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval, M.Yu. Rombovsky and I.I. Volk // Acta Physica Polonica A. – 2017. – Vol. 131, No. 2. – P. 213–221.

39. To Forming of Space Charge Wave with Broad Frequency Spectrum in Helical Relativistic Two-Stream Electron Beam / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko // *Chin. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 34, No. 7. – P. 075202(5).
40. Лысенко А.В. Влияние продольного магнитного поля на усиление волн в плазменно-пучковом супергетеродинном лазере на свободных электронах доплертронного типа/ А.В. Лысенко, Г.А. Алексеенко, А.В. Павлов // *Радиофизика и электроника.* – 2017. – Т. 22, № 4. – С. 48–54.
41. Lysenko A. V. Effects of Axial Magnetic Field Strength on Radiation Efficiency of Plasma-Beam Superheterodyne Free Electron Laser of Dopplertron Type / A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko, A. V. Pavlov // *5th Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS-2017): Conference Proceedings, (Kyiv, Ukraine, 29-31, August, 2017).* – Kyiv, 2017. – P. 143–146.
42. Plural Three-Wave Resonances of Space Charge Wave Harmonics in Transit Section of Klystron-type Two-Stream FEL with Helical Electron Beam / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko // *2017 IEEE Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium, August 29-31 : proceeding.* – Kyiv, Ukraine, 2017. – P. 163–168.
43. Lysenko A.V. Influence of Axial Guide Magnetic Field on Amplifying Properties of Plasma-Beam Superheterodyne Free Electron Laser with Doppleron Pump / A.V. Lysenko, G.A. Oleksienko, A.V. Pavlov // *2017 IEEE International conference of information-telecommunication technologies and radio electronics (UkrMiCo'2017), September 11–15, 2017 : Materials of scientific and technical conference.* – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine, 2017. – P. 165-169.
44. Plural Resonant Interactions in Two-Stream Free-Electron Laser of Klystron Type with Helical Electron Beam / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko // *2017 IEEE International conference of information-telecommunication technologies and radio electronics (UkrMiCo'2017), September 11–15, 2017 : Materials of scientific and technical conference.* – Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine, 2017. – P. 170-174.
45. Lysenko A. Helical relativistic electron beam parameters influence on space charge wave with broad frequency spectrum forming / A. Lysenko, I. Volk // *Electronics and*

Applied Physics : XIII International Conference, October 24–27, 2017 : proceeding. – Kyiv, Ukraine, 2017. – P. 186–187.

46. Lysenko A. Modelling of space charge wave with broad frequency spectrum forming in helical relativistic two-stream electron beam / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (ЕВРИКА-2017), Львів 16-18 травня 2017 р. : тези доповідей. – Львів, Львівський національний університет імені Івана Франка, 2017. – С. Н2.
47. Лисенко О.В. Моделювання динаміки хвиль у плазмово-пучкових супергетеродинних лазерах на вільних електронах із гвинтовими електронними пучками / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко, А. В. Павлов // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики (ЕВРИКА-2017), Львів 16-18 травня 2017 р. : тези доповідей. – Львів, Львівський національний університет імені Івана Франка, 2017. – С. Н7.
48. Влияние неосевого влёта пучка на формирование мультигармонического спектра в пролетной секции ДСЛСЭ / Лысенко А.В., Волк Ю.Ю., Сережко А.С., Сметанин Н.А. // Фізика, електроніка, електротехніка (ФЕЕ 2017) : Матеріали та програма науково-технічної конференції, 17-21 квітня 2017 року. – Суми, СумДУ, 2017. – С. 60.
49. К формированию волны пространственного заряда с широким частотным спектром в винтовом релятивистском двухскоростном электронном пучке / Лысенко А.В., Волк Ю.Ю., Сережко А.С. // Інформатика, математика, автоматика (ІМА 2017) : Матеріали та програма науково-технічної конференції, 17-21 квітня 2017 року. – Суми, СумДУ, 2017. – С. 194.
50. Лысенко А.В. Моделирование динамики волн в плазменно-пучковом супергетеродинном ЛСЭ доплертонового типа с продольным электростатическим полем / А.В. Лысенко, Г.А.Алексеевко, С.А. Никитин // Інформатика, математика, автоматика (ІМА 2017) : Матеріали та програма науково-технічної конференції, 17-21 квітня 2017 року. – Суми, СумДУ, 2017. – С. 191.

51. Лисенко О.В. Моделювання множинних параметричних взаємодій гармонік ХПЗ у гвинтовому двопотоковому електронному пучку методом РІС / О.В. Лисенко, М.Ю. Ромбовський, В.В. Коваль, А.С.Мироненко // Фізика, електроніка, електротехніка (ФЕЕ 2017) : Матеріали та програма науково-технічної конференції, 17-21 квітня 2017 року. – Суми, СумДУ, 2017. – С. 58.
52. Lysenko A. Influence axial guiding magnetic fields on efficient electromagnetic radiation in plasma-beam superheterodyne free electron lasers with helical beams / A.V. Lysenko, G.A. Oleksiienko, A.V. Pavlov // International Conference OPTO 2017, July 04 – 08, 2017 : the book of abstracts. – Warsaw, Poland, 2017. – P. 23.