[chapter] [chapter] [chapter]
[thm] [thm]
[thm]

УДК 515.16
КП
№ держреєстрації 0115U000691
Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
(СумДУ)

40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2;
тел. (0542) 33 41 08, факс (0542) 33 40 49

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи,
д-р.фіз.-мат.наук, професор

____________ А. М. Чорноус

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ ПІДМНОГОВИДІВ І АНАЛІЗ НА МНОГОВИДАХ

(остаточний)

Начальник НДЧ
канд.фіз.-мат.наук, снс Д. І. Курбатов

2017.12.27

Керівник НДР
канд.фіз.-мат.наук І. І. Козлова

2017.12.27

2017

Рукопис закінчено 26 грудня 2017 р.

Результати роботи розглянуті науковою радою СумДУ, протокол № 4 від 28 грудня 2017 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, провідний науковий співробітник, к.ф.-м.н., старший викладач	2017.12.26	І.І. Козлова (реферат, розділи 4, 5)
провідний науковий співробітник, д.ф.-м.н., професор	2017.12.26	К.Г. Малютін (реферат, розділи 1, 2, 3, 8, висновки)
старший науковий співробітник, к.ф.-м.н.. асистент	2017.12.26	О.А. Боженко (розділи 6, 7)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР 109 с., 78 джерел.

ГАУССОВА КРИВИЗНА, ЗАМКНЕНИЙ ІДЕАЛ, ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, МАКРОСКОПІЧНА РОЗМІРНІСТЬ, НОРМАЛЬНА КРИВИЗНА, ОПУКЛИЙ ПІДМНОГОВИД КЕЛЕРА, ПРОСТІР МІНКОВСЬКОГО, МНОГОВИД РІМАНА, СУБГАРМОНІЙНА ФУНКЦІЯ.

Об'єкт дослідження є підмноговиди в евклідовому, рімановому та фінслеровому просторах, групах Лі; субгармонійні функції.

Мета дослідження полягає у вивченні оптимальних властивостей підмноговидів у фінслеровому, рімановому та афінному просторах, а також дослідження властивостей субгармонійних функцій.

Метод дослідження — теореми в просторах постійної кривизни, теореми Александрова, Погорєлова про изометричне занурення Александрівських просторів, топологічні властивості шарів, метод рядів Фур'є.

Актуальність теми дослідження обумовлена недостатньою дослідженістю дійсних повних келерових опуклих підмноговидів в евклідовому просторі, макроскопічних розмірностей ріманових різноманіть, субгармонійних функцій у півплощині.

Основні отримані результати: Доведено теорему про розщеплення дійсного повного келерового опуклого підмноговиду в евклідовому просторі в метричний добуток двовимірних поверхонь позитивної гаусової кривизни в тривимірних евклідових просторах. Вирішено проблему Громова про макроскопічну розмірність риманових різноманіть. Знайдено топологічну будову багатовимірного компактного різноманіття з плоским шаром коразмірності один. Доведено, що якщо нормальні кривизни гіперповерхні відокремлені від одиниці, то гіперповерхня в геометрії Гільберта є компактною. Доведено, що некомпактні фінслерові підмноговиди невід'ємної кривизни Річчі в просторах Мінковського є циліндрами, якщо підмноговиду належить пряма об'ємного простору Мінковського. Вивчено випадки будови багатовимірного компактного різноманіття з плоским шаром коразмірності один. Знайдено умови регулярного вкладення двовимірної сфери в евклідів чотиривимірний простір. Доведено теорему про нижній порядок субгармонійних у верхній півплощині функцій нескінченного порядку. Знайдено умови розв'язання інтерполяційної задачі в класі цілих функцій нульового порядку. Описано лінійні функціонали в класах цілих функцій скінченного порядку і замкнені ідеали в класах цілих функцій.

Зміст

Перелік скорочень, умовних познак, одиниць і термінів **5**

1 Про занурення келерових многовидів в класі опуклих підмноговидів **6**

2 Топологія і макроскопічна геометрія ріманових многовидів **13**

3 Екстримальні оцінки для повних гіперповерхонь в ріманових просторах **24**

4 Субгармонійні функції нескінченного порядку у півплощині **31**

5 Лінійні функціонали в класах цілих функцій скінченного порядку **38**

6 Локально выпуклі простори цілих функцій нульового порядку, застосування до інтерполяції **48**

7 Интерполяція в класах цілих функцій нульового порядку и нормального типу **59**

8 Замкнені ідеали в класах $\mathcal{E}(\gamma)$ **84**

Висновки **89**

Перелік джерел посилання **92**

Перелік скорочень, умовних позначок, одиниць і термінів

$\mathbb{C}$ — відкрита комплексна площина;
$\mathbb{C}_+$ — верхня відкрита комплексна площина: $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$;
$\mathbb{R}$ — дійсна вісь;
$\gamma(r)$ — функція зростання;
$\rho(r)$ — уточнений порядок, $V(r) = r^{\rho(r)}$;
$[\cdot]$ — ціла частина числа;
$\delta S(\gamma(r))$ — клас дельта-субгармонійних функцій скінченного γ -типу;
$S(\gamma(r))$ — клас субгармонійних функцій скінченного γ -типу;
$S\delta(\gamma(r))$ — клас дельта-субгармонійних функцій скінченного γ -типу у півплощині;
$JS(\gamma(r))$ — клас субгармонійних функцій скінченного γ -типу у півплощині;
$C(a,r)$ — відкритий круг з центром в точці a радіуса r ;
$B(a,r)$ — замкнений круг з центром в точці a радіуса r ;
$l^*(G)$ — верхня лінійна щільність множини G ;
$c_k(r;v)$ — коефіцієнти Фур'є функції v ;
μ_v — міра Рісса функції v ;

$$S(r;k,\mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{B(0,r)} \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta^k};$$

$$S(r_1,r_2;k,\mu) = S(r_2;k,\mu) - S(r_1;k,\mu), \quad r_1 \le r_2;$$

$$S'(r;k,\mu) = \frac{1}{k} \iint\limits_{B(0,r)} \left(\frac{\bar{\zeta}}{r}\right)^k d\mu(\zeta);$$

$T(r;v) = N(r,v) + m(r,v)$ — характеристика Неванлінни функції v ;

$$N(r,v) = \int\limits_0^r \frac{\mu(t)}{t} dt;$$

$m(r,v) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} v_+(re^{i\theta}\, d\theta$;
λ_v — повна міра функції v ;
ν_v — гранична міра функції v ;
$D_+(R_1,R_2) = \overline{C_+(0,R_2) \backslash C_+(0,R_1)}$, $R_1 < R_2$, — півкільце.

1 Про занурення келерових многовидів в класі опуклих підмноговидів

Теореми про розщеплення займають одне із центральних місць в рімановій геометрії і геометрії підмноговидів. Це теореми Топоногова, Чігера-Громолла в рімановій геометрії, теорема Хартмана про циліндрічність підмноговидів невід'ємної секційної кривини, теорема про циліндрічність підмноговидів в евклідовому просторі без вимоги на внутрішню геометрію, які замінюються природною зовнішньо геометричною умовою.

Дайчер, Флорит вивчали побудову дійсних келерових підмноговидів в евклідовому просторі. При додатковому обмеженні на внутрішню кривину при малому ковиміру вкладення справедлива

Теорема 1. *[1] Нехай $f : M^{2n} \to R^{2n+p}$ є ізометричне занурення келерового многовиду з $p \leq n$. Якщо M^{2n} має або додатню кривину Річчі або додатню голоморфну секційну кривину, то $p = n$ і f локально розщеплюється як добуток n двовимірних опуклих поверхонь в R^3 . За умови, що M^{2n} повний многовид, то розщеплення глобальне.*

Нагадаємо, що ізометричне занурення $f : M^m \to R^{m+p}$ розщеплюється локально як добуток гіперповерхонь, якщо для будь-якого $x \in M^n$ існує окіл $x \in U \subseteq M^n$ і для будь-якого $1 \geq i \geq p$ рімановий многовид $U_i^{m_i}$ допускає ізометричне занурення $f_i : U_i^{m_i} \to R^{m_i+1}$ таке, що $U = U_1 \times ... \times U_p$ і $f|_U = f_1 \times ... \times f_p$. При менш жорстких обмеженнях на внутрішню кривину справедлива

Теорема 2. *[1] Нехай $f : M^{2n} \to R^{2n+p}$ є ізометричне занурення келерового многовиду. Якщо M^{2n} має або невід'ємну кривину Річчі або невід'ємну голоморфну кривину, то зовнішній нуль-індекс $\nu \geq 2n-2p$. Більш того, якщо $\nu = 2n - 2p$, то на деякій відкритій всюди щільній множині $W \subset M^{2n}$ підмноговид $f|_W$ локально розщеплюється як метричний добуток p ніде не плоских дійсних келерових гіперповерхонь з невід'ємною кривизною Річчі.*

Якщо многовид повний, то розщеплення глобальне:

$$\begin{aligned} M^{2n} &= M_1^2 \times ... \times M_p^2 \times \mathbb{C}^{n-p} \qquad i \\ f &= f_1 \times ... \times f_p \times I, \end{aligned}$$

$f_i : M_i^2 \to R^3$, $1 \le i \le p$ — повні двовимірні опуклі поверхні додатної гаусової кривини, і $I : \mathbb{C}^{n-p} \to R^{2n-2p}$ — тотожне відображення.

Ці результати уточнювались і узагальнювались в [2].

Занурення келерових многовидів вивчались в класі плюрігармонійних підмноговидів: це такі келерові евклідові підмноговиди, коли образ будь-якої голоморфної кривої є мінімальною поверхнею в осяжному евклідовому просторі.

Нехай $\alpha(x)$ друга квадратична форма $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ ізометричного занурення келерового многовиду M^{2n} в евклідів простір. У фіксованій точці $x \in M^{2n}$

$$\alpha : T_xM \times T_xM \to T_x^{\perp}M = N \cong R^p$$

є симетричне білінійне відображення, де $T_xM = R^{2n}$ — дійсний дотичний простір M^{2n} в точці x і $(T_x^{\perp}M, <,>)$ — нормальний простір в точці x .

Комплексифікуємо α

$$\alpha : (T_xM) \otimes \mathbb{C} \times (T_xM) \otimes \mathbb{C} \to N \otimes \mathbb{C}.$$

Нехай V — простір дотичних векторів типу (0, 1) в точці x такий, що V є комплексний підпростір $(T_xM) \otimes \mathbb{C}$, де $V = \{v - iJv : v \in T_xM\}$, $\overline{V} = \{v + iJv : v \in T_xM\}$, де J — комплексна структура на M . Тоді $(T_xM) \otimes \mathbb{C} \cong V \oplus \overline{V}$. Позначимо $H = \alpha|_{V \times \overline{V}}$.

Визначимо нуль-індекс плюрігармонійності $\nu_J(x)$ M^{2n} в точці x [1]:

$$\nu_J(x) = \dim_{\mathbb{C}} \Delta_{1,1}, \qquad \text{где} \qquad \Delta_{1,1} := \{v \in V | H_{v\overline{w}} = 0, \forall w \in V\}.$$

Відображення f є плюрігармонійним тоді і тільки тоді, якщо $\nu_J(x) = n$ для всіх точок $x \in M^{2n}$.

Нагадаємо визначення зовнішнього нуль-індексу ν :

$$\nu(x) = \dim \Delta(x),$$

де $\Delta(x) = \ker \alpha(x) = \{v \in T_xM : \alpha(v, w) = 0, \forall w \in T_xM\}$, тобто це є нуль-простір другої квадратичної форми.

На відкритій множині, де нуль-індекс постійний, нуль-простори утворюють гладкий розподіл, який є інтегрованим.

Шари є цілком геодезичними як у підмноговидів так і в осяжному евклідовому просторі [3, 4, 5]. Тому нижня оцінка на зовнішній нуль-індекс дає глибоку інформацію про підмноговиди. Отримання такої оцінки і буде метою цього розділу.

Вимога позитивності (невід'ємності) кривини Річчі — це вимога на метрику, щоб ізометричне занурення було "далеким" від мінімального. Тому природно було б занурювати в класі підмноговидів, який успадковує деякі властивості опуклих гіперповерхонь. Такий клас підмноговидів був введений в [4, 6].

Нехай $r(x,\xi)$ є ранг другої квадратичної форми $\alpha(x,\xi)$ підмноговиду M^l в рімановому просторі R^n в точці x відносно нормалі ξ. Рангом другої квадратичної форми підмноговидів M^l в точці x називається ціле невід'ємне число

$$r(x) = \max_{\xi \in N_x} r(x,\xi),$$

де N_x — нормальний простір в точці x, а максимум узятий по множині нормалей в цій точці.

Нехай друга квадратична форма $\alpha(x,\xi)$ після зведення до діагонального вигляду має k_1 позитивних і k_2 від'ємних членів. Позначимо $j(x,\xi) = \min(k_1, k_2)$. Типом точки x називається число

$$j(x) = \min j(x,\xi),$$

де мінімум береться по всім нормалям в точці x, для яких $r(x,\xi) = r(x)$, $j = \max_{x \in M^l} j(x)$ [4, 6].

Якщо $j(x) = 0$, то існує нормаль в точці x, відносно якої друга квадратична форма є невід'ємно визначеною.

Якщо $r(x) = l$, то відносно деякої нормалі друга квадратична форма строго позитивно визначена. Підмноговиди з $j(x) = 0$ для всіх точок підмноговидів природно назвати опуклими.

Зауважимо, що для підмноговиду невід'ємної кривини Річчі $j(x) = 0$ [4].

Зворотнє твердження невірне. Тому клас опуклих підмноговидів ширше, ніж клас підмноговидів з невід'ємною кривиною Річчі.

Ми будемо розглядати занурення келерових многовидів в класі підмноговидів евклідового простору з $j(x) = 0$ для $x \in M^l$.

Теорема 3. *Нехай M^l підмноговид в рімановому просторі R^{l+p}. Якщо $j(x) = 0$, то зовнішній нуль*

$$\nu(x) = l - r(x).$$

Доведення. Раніше було доведено нерівність [5, 6, 7]

$$\nu(x) \geq l - r - j(p-1). \tag{1}$$

Так як $j = 0$, $\nu \geq l-r$. Але з іншого боку $\nu \leq l-r$ і ми отримаємо необхідну рівність. Має місце

Теорема 4. *[5, 6, 7] Нехай F^l — повний регулярний зв'язний підмноговид в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$ такий що:*

1. *тип точки $j(x) = 0$ для всіх точок поверхні;*
2. *нуль-індекс $\nu(x) = k$ для всіх точок поверхні.*

Тоді підмноговид F^l є циліндр з k –мірною твірною.

Теорема 5. *Нехай $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ — келеровий підмноговид в евклідовому просторі, $p \geq 1$. Тоді $\nu_J(x) \geq n-p$. Більш того:*

1. *якщо $\nu_J(x) = n-p$, то $\nu \geq 2(n-p)$;*
2. *якщо $\nu_J(x) = n-p$ і $\nu = 2(n-p)$, тоді є відкрита всюди щільна множина $W \subset M^{2n}$ така, що $f|_W$ локально розщеплюється як добуток p ніде не плоских келерових гіперповерхонь;*
3. *якщо $\nu = \nu_J = 0$, то f локально розщеплюється як добуток p ніде не плоских поверхонь в $\mathbb{R}^3$.*

Розщеплення глобальне, якщо M^{2n} повний підмноговид.

Справедлива

Теорема 6. *Нехай $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ є ізометричне занурення келерового многовиду. Якщо $j(x) = 0$ для всіх $x \in M^{2n}$, то зовнішній нуль-індекс*

$$\nu \geq 2(n-p). \tag{2}$$

Більш того, якщо $\nu = 2(n-p)$, то існує всюди щільна відкрита множина $W \subset M^{2n}$ така, що $f|_W$ розщеплюється локально як добуток p ніде не плоских келерових гіперповерхонь з невід'ємною кривиною Річчі.

Теорема 7. *Нехай* $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ *є ізометричне занурення келерового многовиду з* $p \leq n$ *. Якщо в кожній точці* $x \in M^{2n}$ *,* $j(x) = 0$ *,* $r(x) = 2n$ *, то* $p = n$ *і* f *розщеплюється локально як добуток* n *двовимірних поверхонь позитивної гауссової кривини в* $\mathbb{R}^3$ *. Розщеплення глобальне, якщо* M^{2n} *повний.*

Наслідок. *Нехай* $f : M^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+p}$ *є ізометричне занурення повного келерового многовиду. Якщо* $j(x) = 0$ *для всіх* $x \in M^{2n}$ *, то зовнішній нуль-індекс* $\nu \geq 2(n-p)$ *має місце тоді і тільки тоді, коли* $M^{2n} = M_1^2 \times ... \times M_p^2 \times \mathbb{C}^{n-p}$ *і* $f = f_1 \times ... \times f_p \times I$ *глобально розщеплюється, де* $f_i : M_i^2 \to \mathbb{R}^3$ *,* $1 \leq i \leq p$ *, є повні поверхні позитивної гауссової кривини і* $I : \mathbb{C}^{n-p} \to \mathbb{R}^{2n-2p}$ *є тотожне відображення.*

Доведення теореми 3. Нехай N — нормаль в точці $x \in M^{2n}$, для якої $r(x,N) = r(x)$ і $j(x,N) = j(x) = 0$. За теоремою 3 $\nu_J(x) \geq n-p$.

Із визначення індексу плюрігармонійності випливає, що існує підпростір $L \subset T_x M^{2n} \otimes \mathbb{C}$, $\dim_{\mathbb{C}} L = \nu_J(x)$ такий, що

$$\alpha(u - iJu, v + iJv) = 0$$

для $u \in L_R \subset T_x M^{2n}$, $v \in TM_x^{2n}$, де L_R — одійснення L .

Тоді маємо:

$$\alpha(u,v) + \alpha(Ju,Jv) + i(\alpha(u,Jv) - \alpha(v,Ju)) = 0.$$

Тоді для $v = u$ ця рівність перепишеться так:

$$\alpha(u,u) + \alpha(Ju,Ju) = 0. \tag{3}$$

Так як для нормалі N друга квадратична форма α_N невід'ємна, то
$\alpha_N(u,u) = 0$, $\alpha_N(Ju,Ju) = 0$, для $u \in L_R$. Так як за теоремою 3 $\dim_{\mathbb{C}} L \geq n-p$, $\dim L_R \geq 2(n-p)$ і обмеження другої квадратичної форми α_N на L_R дорівнює нулю, то ранг другої квадратичної форми підмноговиду задовольняє нерівність $r(x) \leq l - 2(n-p)$.

Тоді з теореми 1 випливає, що зовнішній нуль-індекс $\nu = l - r(x) \geq 2(n-p)$. Якщо $\nu = 2(n-p)$, то і $\nu_J = n-p$ і виконується умова 2 теореми 3. Невід'ємність кривини Річчі гіперповерхонь випливає з умови $j = 0$.

Доведення теореми 4. Так як з умови теореми 4 $r(x) = 2n$, $j(x) = 0$, то з нерівності (1) випливає $\nu = 0$. З нерівності (2) і умови теореми 4 $p \leq n$ випливає, що $p = n$. З рівності (3) і умови $j = 0$

випливає, що $\nu_J = 0$. Тому підмноговид M^{2n} задовільняє умову 3 теореми 3. Звідси і випливає теорема 4.

Наслідок вірний тому, що виконується умова 2 теореми 3.

В. К. Білошапка, С. Н. Бичков довели наступне твердження [8]:

Нехай опукла гіперплощина F в комплексному евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ розшаровується на комплексні гіперповерхні. Тоді гіперповерхня є циліндр з комплексною твірною $\mathbb{C}^{n-1}$.

Цю теорему можна узагальнити на випадок підмноговидів любого ковиміру з $j(x) = 0$ для всіх точок підмноговидів. Ці підмноговиди є узагальненням опуклих гіперповерхонь.

У регулярному випадку справедлива

Теорема 8. *Нехай F^{2l+1} — регулярний підмноговид в комплексному евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$. Якщо $j(x) = 0$ для всіх точок підмноговидів і підмноговид розшаровується на комплексні площини $\mathbb{C}^l$. Тоді F^{2l+1} є циліндр з комплексною твірною $\mathbb{C}^l$.*

Доведення. Нехай N нормаль до F^{2l+1} в точці x така, що $r(x,N) = r(x)$, $j(x,N) = j(x) = 0$.

В силу того, що через точку на підмноговиді проходить площина $\mathbb{C}^l$ і $j(x,N) = 0$ ранг другої квадратичної форми відносно нормалі N задовольняє нерівність $r(x,N) \leq 1$. З теореми 1 випливає, що зовнішній нуль-індекс $\nu(x) \geq 2l$ і комплексні площини $\mathbb{C}^l$, на які розшаровується підмноговид, належать нульовому підпростору.

Параметризуємо підмноговид наступним чином: нехай $\mathbb{C}^l$ — комплексна площина, яка проходить через точку $O \in F^{2l+1}$. Дійсні вектори $e_q = (0,...,1,...,0,0,...,0)$, $Je_q = (0,...,0,0,...,1,...,0)$, $q = 1,...,l$, де в першому векторі 1 стоїть на q місці, в другому векторі на $(l+q)$ місці, утворюють базис в $\mathbb{C}^l = R^{2l}$.

Проведемо ортогональний комплексний простір $\mathbb{C}^{n-l} = R^{2(n-l)}$ через точку O . Він перетинає F^{2l+1} по кривій $\rho(t)$. Візьмемо дотичний простір в точці O за координатну площину в $R^{2n} = \mathbb{C}^n$, де змінються координати $(u^1,...,u^l,u^{l+1},v^1,...,v^l)$. В просторі $\mathbb{C}^{n-l} = R^{2(n-l)}$ змінюються координати $(u^{l+1},u^n,v^{l+1},v^n)$. Виберемо напрямні вектори площини $\mathbb{C}^l(x)$, $x \in F^{2l+1}$ так, щоб їх ортогональні проекції на площину $\mathbb{C}^l$ спивпали з базовими векторами e_q , Je_q , $q = 1,...,l$. У цьому базисі радіус-вектор підмноговиду має вигляд:

$$R = \rho(t) + S_k(t)u^k + JS_k(t)v^k. \qquad (4)$$

Враховуючи, що вектори $S_k(t)$, $JS_k(t)$ належать нульовому підпростору других квадратичних форм (див. [4, розділ 3.2, рівність 3.2.8]) ми отримаємо:

$$\frac{\partial S_k(t)}{\partial t} = \lambda_k(t)\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad \frac{\partial JS_k(t)}{\partial t} = \mu_k(t)\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$S_k(t) = (a_k(t), b_k(t)),$$

де a_k , b_k — l -мірні дійсні вектори ,

$$JS_k(t) = (-b_k, a_k).$$

Вектор $\rho(t)$ перепишемо у вигляді $\rho = \left(\rho^1(t), \rho^2(t)\right)$, де $\rho^1(t)$ — ортогональна проекція на підпростір натягнутий на вектори $e_{l+1}, ..., e_n$, $\rho^2(t)$ — ортогональна проекція на підпростір натягнутий на вектори $Je_{l+1}, ..., Je_n$.

Тогді рівняння (4) перепишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial t} &= \lambda_k \frac{d\rho^1(t)}{dt}; \qquad & \frac{\partial b_k}{\partial t} &= \lambda_k \frac{d\rho^2(t)}{dt} \\ -\frac{\partial b_k}{\partial t} &= \mu_k \frac{\partial \rho^1(t)}{\partial t}; \qquad & \frac{\partial a_k}{\partial t} &= \mu_k \frac{\partial \rho^2(t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} \mu_k \frac{d\rho^1}{dt} + \lambda_k \frac{d\rho^2}{dt} &= 0; \\ \lambda_k \frac{d\rho^1}{dt} - \mu_k \frac{d\rho^2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\frac{d\rho^1}{dt}\right|_{t=0} = (1, 0, ..., 0); \qquad \left.\frac{d\rho^2}{dt}\right|_{t=0} = (0, 0, ..., 0).$$

Так як вектори $\dfrac{\partial \rho^1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \rho^2}{\partial t}$ не рівні одночасно нулю, то $\mu_k = \lambda_k = 0$. Звідси $\dfrac{\partial S_k}{\partial t} = \dfrac{\partial JS_k(t)}{\partial t} \equiv 0$ і комплексні площини $\mathbb{C}^l$, на які розшаровується підмноговид, паралельні.

2 Топологія і макроскопічна геометрія ріманових многовидів

У цьому розділі описані методи сучасної алгебраїчної топології, які використовуються в роботі. Зокрема, на мові спектрів описані різні теорії (ко)гомологій, представлений необхідний матеріал з теорії перешкод з локальними коефіцієнтами і теорії грубих когомологій.

Розділ присвячено вивченню топологічних, гомотопічних і макроскопічних інваріантів ріманових многовидів і їх відображень.

Одним з основних питань, піднятих в розділі є дослідження проблем, поставлених М. Громовим, про макроскопічну вимірність універсального накриття замкненого ріманового многовиду, зокрема — гіпотеза про падіння макроскопічного виміру. Отримані в розділі результати підтверджують гіпотезу в тривимірному і цілком неспиновому випадках і спростовують її в спиновому випадку більшого виміру.

Найбільш значуща гіпотеза Громова про макроскопічний вимір універсального накриття замкненого многовиду, що допускає метрику позитивної скалярної кривини, виявилася тісно пов'язана з фундаментальною групою многовиду. Встановлено, що в випадку спинового многовиду, гіпотеза має позитивне рішення, якщо фундаментальна група задовольняє деяким додатковим умовам, наприклад, є абелевою.

Вирішено проблему Громова про макроскопічний вимір ріманових многовидів, які ми сформулюємо у вигляді гіпотез.

Макроскопічна розмірність визначається наступним чином:

Означення 9. Макроскопічна розмірність метричного простору X не перевищує k , або $\dim_{\mathrm{mc}} X$, якщо існує k -мірний поліедр P^k і власне неперервне відображення $h : X \to P^k$ таке, що $\mathrm{Diam}(h^{-1}(p)) \leq \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$ і довільного $p \in P^k$. Скажемо, що $\dim_{\mathrm{mc}} X = k$, якщо k найменше із чисел, для яких виконано $\dim_{\mathrm{mc}} X \leq k$.

Гипотеза 10 (Про падіння макроскопічного виміру)*.* Нехай M^n – замкнений многовид виміру n . Якщо $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n < n$, то $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n < n-1$.

Зауваження 11. Нехай M^n компактний рімановий многовид, і класифіковане відображення $f : M^n \to B\pi$, є відображення в k -остов $B\pi^{(k)}$, тоді підняття даного відображення до відображення універсальних накриттів $\widetilde{f} : \widetilde{M}^n \to E\pi^{(k)}$ гарантує нам, що $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n \leq k$, якщо метрику на $\widetilde{M}^n$ припускати піднятою з M^n .

Гомотопічний аналог гіпотези має такий вигляд.

Гипотеза 12. Якщо M^n несуттєво, то класифіковане відображення $f : M^n \to B\pi$, можна продеформувати на $B\pi^{(n-2)}$.

Нагадаємо, що по Громову

> *многовид M^n називається несуттевим, якщо класифіковане відображення $f : M^n \to B\pi$, можна продеформувати на $B\pi^{(n-1)}$.*

Природно також дати наступне визначення (Дранишников):

> *многовид M^n називається макроскопічно несуттєвим, якщо існує обмежена деформація класифікованого відображення $f : \widetilde{M}^n \to E\pi$ на $E\pi^{(n-1)}$.*

Ясно, що якщо M несуттєве, то з гіпотези і зауваження негайно випливає гіпотеза . На рівні когомологій гіпотеза не має перешкод, так як неважко показати, що $f^*(H^{n-1}(B\pi)) = 0$.

В даному розділі автором наводиться позитивне розв'язання гіпотез і в окремих випадках і негативне розв'язання в загальному випадку.

Наступна теорема підтверджує гіпотезу Громова про падіння макроскопічного виміру універсального накриття замкненого многовиду виміру 3 .

Теорема 13. *Нехай M - замкнений рімановий многовид виміру 3 , а - його універсальне накриття. Тоді $\dim_{mc} \widetilde{M} \neq 2$.*

Зауваження 14. Якщо M^3 несуттєвий, то він не містить $K(\pi, 1)$ - фактори K_i в розвиненні Кнезера - Мілнора многовиду M^3 на незведені многовиди:

$$M^3 = \Sigma_1 \# \dots \# \Sigma_n \# k(S^2 \times S^1) \# K_1 \# \dots \# K_m.$$

Тому, якщо $\pi_1(M^3)$ з теореми не має крутіння, то $\pi_1(M)$ або тривіальна, або $B\pi_1(M^3)$ гомотопічно еквівалентно букету кіл, а значить в цьому випадку підтверджується гіпотеза Громова . rem

Виявляється, гіпотеза Громова про падіння макроскопічного виміру не підтверджується для $n \geq 4$. Тут суттєвим виявилася наявність спінової структури на многовиді.

Має місце наступна теорема.

Теорема 15. *Для кожного $n \geq 4$ існує замкнений несуттєвий спіновий многовид M^n , що має макроскопічний вимір універсального накриття* $\dim_{mc} \widetilde{M}^n = n-1$.

В чотиривимірному випадку приклад многовиду з теореми будується наступним чином.

Розглянемо розшарування на колі $S^3 \times S^1 \to S^2 \times S^1$, отримане добутком розшарування Хопфа $S^3 \to S^2$ на S^1 .

Тепер розглянемо тривіальне розшарування $T^4 = S^1 \times T^3 \to T^3$ і візьмемо його зв'язну суму над S^1 з побудованим вище розшаруванням вздовж маленьких розшарованих трубок навколо фіксованих шарів з природною тривіалізацією, яка визначається розшаруваннями. Отримаємо шуканий многовид $M^4 = S^3 \times S^1 \#_{S^1} T^4$. У загальному випадку контрприклад до гіпотези Громова доставляє многовид $M^n = M^{4+k}$, який є тотальним простором розшарування над $M^3 \times T^k$, яке індуковано проекцією $pr : M^3 \times T^k \to M^3$ і розшаруванням $p : M^4 \to M^3$.

У неспіновому випадку аналога теореми не існує, так як має місце наступна теорема.

Теорема 16. *Нехай M є цілком неспіновим замкненим орієнтованим n -многовидом, $n \geq 5$, з $\pi_1(M) = \Gamma$, чиє універсальне накриття $\widetilde{M}$ є макроскопічно несуттєвим. Тоді* $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq n-2$.

Нагадаємо, що многовид називається *цілком неспіновим*, якщо його універсальне накриття не є спіновим многовидом, або що те ж саме — має нетривіальний другий клас Штіфеля-Уїтні.

Має місце також гомотопічний аналог теореми , проте з деякими обмеженнями на фундаментальну групу. Нагадаємо, що для скінченопердставимої групи π , умова FP_m означає, що $B\pi$ може бути взяте з скінченим m -остовом.

Теорема 17. *Нехай M цілком неспіновий, замкнений, орієнтований, несуттєвий n -многовид, $n \geq 5$, чия фундаментальна група π має тип FP_3 . Тоді класифіковане відображення $u^M : M \to B\pi$ може бути продеформовано в $B\pi^{(n-2)}$, зокрема, $\dim_{mc} \widetilde{M} \leq n-2$.*

Тепер сформулюємо ряд гіпотез Громова про макроскопічні виміри PSC-многовидів.

Гипотеза 18. Нехай M^n є повний PSC-многовид виміру n і скалярна кривина $Sc(M^n) > c > 0$. Тоді $\dim_{\mathrm{mc}} M^n \leq n-2$.

Зауваження 19. У разі $n=2$ справедливість гіпотези випливає з того, що рімановий многовид секційної кривини $K \geq K_0 > 0$, як і будь-який простір Александрова кривини відокремленої від нуля додатньою константою, має обмежений діаметр, а значить має нульовий макроскопічний вимір. Випадок $n=3$ доведений Громовим і Лоусоном (1983).

Гипотеза 20 (Гіпотеза Громова). Нехай M^n – замкнений PSC-многовид виміру n . Тоді $\dim_{\mathrm{mc}} \widetilde{M}^n \leq n-2$.

Гипотеза 21 (Сильна гіпотеза Громова). Класифіковане відображення $f : M^n \to B\pi$ замкненого PSC-многовиду M^n можна продеформувати у $(n-2)$ -остов $B\pi^{(n-2)}$.

Зауваження 22. Із зауваження випливає, що гіпотеза Громова випливає з сильної гіпотези Громова. Крім того, гіпотеза Громова негайно випливає з гіпотези , яку також можна вважати її сильним аналогом.

Має місце наступна теорема.

Теорема 23. *Припустимо, що група π містить підгрупу π' скінченого індексу, задовольняє наступним двом умовам:*

1. *π' задовільняє сильній гіпотезі Новікова.*
2. *Відображення $per : ko_n(B\pi') \to KO_n(B\pi')$ ін'єктивне.*

Тоді гіпотеза Громова справедлива для спінових многовидів M^n з фундаментальною групою $\pi_1(M^n) = \pi$.

Зауваження 24. Будемо називати другу умову на фундаментальну групу умовою Розенберга-Штольца або (RS) -умовою, так як Розенберг і Штольц вперше розглянули цю умову при доведенні гіпотези Громова -Лоусена.

Із цієї теореми можна отримати наступні наслідки.

Наслідок 0.1. *Гіпотеза Громова виконується для замкнених спінових* n *-мірних многовидів* M *з фундаментальною групою* $\pi_1(M) = \pi$ *, що має скінчене* $B\pi$ *і задовольняє нерівність* $\operatorname{asdim} \pi \leq n + 4$ *.*

Зауваження 25. Помітемо, що приклади M^n , побудовані в теоремі , мають фундаментальну групу $\pi_1(M^n) \cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^3) \times \mathbb{Z}^k$, яка задовольняє попередньому наслідку, тому вони не допускають метрики додатньої скалярної кривини.

Наслідок 0.2. *Гіпотеза Громова виконується для спінових* n *-мірних многовидів* M *з фундаментальною групою* $\pi_1(M) = \pi$ *, що дорівнює добутку вільних груп* $F_1 \times \cdots \times F_n$ *. Зокрема, для вільних абелевих груп, а значить і для абелевих груп, так як останні містять вільні абелеві групи скінченого індексу.*

Далі ми представляємо результати, які описують топологію ріманових многовидів, наділених структурою шарування ковимірності один із заданими обмеженнями на внутрішню або зовнішню геометрію шарів, що розглядаються як ріманові підмноговиди. Зокрема, описується топологія замкнених многовидів, які допускають шарування ковмимірності один невід'ємної кривини.

Ми доводимо наступний результат, який є топологічним узагальненням шарової теореми Картана-Адамара, доведеної Г. Штаком (1991).

Теорема 26. *Нехай* $(M, \mathcal{F})$ — C^2 *-універсально рівномірно стягуване шарування корвимірності* 1 *на повному рімановому* n *-вимірному многовиді* M *. Тоді універсальне накриття многовиду* M *є стягуваним.*

Нагадаємо, що метричний простір називається *рівномірно стягуваним* якщо існує неспадна функція $Q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, що будь-яка куля радіусу r стягується всередині кулі радіуса $Q(r)$. Функція Q називається *функцією рівномірності.*

Основниою задачею даного розділу є опис топології замкнених многовидів, які допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини. Описується тривимірний випадок.

Наступна теорема дає класифікацію замкнених орієнтованих тривимірних многовидів, що допускають шарування невід'ємної кривини.

Теорема 27. *Нехай M^3 — гладкий замкнений орієнтований рімановий многовид вимірності 3, а $\mathcal{F}$ — C^∞ -трансверсально орієнтоване шарування невід'ємної кривини ковимірності 1 на цьому многовиді. Тоді M^3 гомеоморфне многовиду одного з наступних типів:*

1) *Торичне розшарування над колом;*

2) *Торичне напіврозшарування;*

3) $S^2 \times S^1$ *;*

4) $\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ *;*

5) *Лінзовий простір* $L_{p/q}$ *;*

6) *Призматичний простір.*

Кожний із перелічених многовидів для деякої метрики допускає шарування невід'ємної кривини.

Наслідок 0.3. *З теореми випливає, що не всі тривимірні сферичні форми допускають шарування невід'ємної кривини. Наприклад, таке шарування неможливе на гомологічній сфері Пуанкаре з фундаментальною групою I , ізоморфною A_5 , і такою, що є групою симетрій ікосаедра.*

Серед шарувань невід'ємної кривини плоскі шарування характеризуються наступною теоремою.

Теорема 28. *Трансверсально орієнтоване шарування $\mathcal{F}$ корвиміру один невід'ємної кривини на замкненому орієнтованому тривимірному многовиді M плоске, тоді і тільки тоді, коли M є торичним розшаруванням або напіврозшаруванням.*

Розглядаються шарування корвимірності один невід'ємної кривини в довільному вимірі. Одним із основних наших спостережень є наступний результат, що узагальнює тривимірний випадок.

Твердження 0.1. *Нехай* $\mathcal{F}$ — C^2 *-трансверсально орієнтоване шарування невід'ємної кривини Річчі на* M *, де* M *— орієнтований замкнений многовид. Тоді* $\mathcal{F}$ *— шарування майже без голономії.*

Зауваження 29. Вимогу невід'ємності кривини Річчі в теоремі можна послабити і вимагати, щоб шари мали поліноміальне зростання і скінчене число кінців.

Твердження дає можливість застосування результатів, отриманих Іманіші, до шарувань корвимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкненому многовиді, що дає нам таку структурну теорему.

Теорема 30. *Нехай* $\mathcal{F}$ *— трансверсально орієнтоване шарування ковимірності один невід'ємної кривини Річчі на замкненому орієнтованому рімановому многовиді* M *. Тоді виконана одна із наступних можливостей:*

1) *Всі шари всюди щільні і* M *є розшаруванням над* S^1 *. При цьому фундаментальна група* M *описується груповим розширенням:*

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z}^k \to 0 \ (k \geq 1) \tag{0.2}$$

2) F *містить компактний шар і* M *можна розбити скінченим числом компактних шарів на блоки одного з наступних типів:*

   A) *Винятковий блок:* B *— гомеоморфний* $L \times I$ *, де* L *є компактним шаром шарування і шар* $L \times 0$ *є граничним для множини компактних шарів;*

   B) *Щільний блок: всі внутрішні шари діффеоморфні типовому шару* L *і скрізь щільні в* B *;*

   C) *Власний блок: всі внутрішні шари діффеоморфні типовому шару* L *і є власними (вкладеними підмноговидами) в* B *.*

Фундаментальна група блоків описується груповим розширенням:

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}^k \to 0. \tag{0.3}$$

При цьому якщо $k = 1$ *, то* $int\ B$ *є розшаруванням над колом з шаром* L *, і в цьому випадку блок буде власним. Якщо ж* $k \geq 2$ *, то* B *буде щільним блоком. Для будь-якого* k *має місце гомеоморфізм*

$$\widetilde{int\ B} \simeq \widetilde{L} \times \mathbb{R} \tag{0.4}$$

Введемо таке визначення.

Означення 31. Будемо говорити, що компактна підмножина B замкненого многовиду M з шаруванням ковиміру один є блоком, якщо B — зв'язний многовид з краєм, який є насиченою множиною, тобто множиною, що є об'єднанням шарів.

Структурна теорема дозволяє нам більш детально описати топологічну структуру блоків, оснащених шаруваннями невід'ємної кривини Річчі.

Твердження 0.2. *Нехай* B *— блок без внутрішніх компактних шарів, оснащений шаруванням невід'ємної кривини Річчі і границя* ∂B *має більше однієї компоненти зв'язності. Тоді:*

1. *Кожен внутрішній шар є регулярним ізометричним накриттям будь-якого граничного шару* $K \in \partial B$ *.*

2. $\#(\pi_0(\partial B)) = 2$ *, а* B *є h-кобордізмом.*

Наслідком твердження є наступне важливе твердження.

Твердження 0.3. *Нехай* B *— блок без внутрішніх компактних шарів, оснащений шаруванням невід'ємної кривини Річчі. Якщо фундаментальна група типового шару* L *скінчено-породжена, тоді:*

1. *Фундаментальна група* $\pi_1(B)$ *є майже поліциклічною.*

2. *Образ гомоморфізму* $i_* : \pi_1(K) \to \pi_1(B)$ *, індукованого включенням граничного шару* $i : K \to B$ *, має індекс в* $\pi_1(B)$ *, що не перевищує* 2 *.*

Наступна теорема описує фундаментальну групу замкнених многовидів, які допускають шарування невід'ємної кривини і є шаровим аналогом відповідних результатів Чігера-Громолла про топологічну структуру замкнених многовидів невід'ємної кривини Річчі.

Теорема 32. *Нехай* M *— замкнений, рімановий n-вимірний многовид з заданим* C^2 *-шаруванням* $\mathcal{F}$ *ковимірності один невід'ємної кривини Річчі. Припустимо, що всі шари мають скінчено-породжену фундаментальну групу (наприклад* $\mathcal{F}$ *-шарування невід'ємної секційної кривини). Тоді:*

1. $\pi_1(M)$ *— майже поліциклічна група.*
2. $\mathcal{F}$ *— плоске, тоді і тільки тоді, коли* M *є* $K(\pi, 1)$ *-многовидом. В цьому випадку виконана одна із таких можливостей:*
   1) $\mathcal{F}$ *не містить компактні шари. Тоді* $\mathcal{F}$ *є шаруванням без голономії зі всюди щільними шарами, ізометричними ріманововому добутку* $S \times E^k$ *, а сам многовид гомеоморфний розшаруванню над* S^1 *.*
   2) $\mathcal{F}$ *містить компактні шари. Якщо* $\dim M \geq 5$ *, тоді всі компактні шари гомеоморфні між собою, а сам многовид або його двулистне накриття гомеоморфне розшаруванню над колом з шаром, гомеоморфним компактному шару шарування.*
3. $asdim\ \pi_1(M) \leq n$ *, причому* $asdim\ \pi_1(M) = n$ *, тоді і тільки тоді, коли* M *є* $K(\pi, 1)$ *-многовидом. Якщо* $asdim\ \pi_1(M) < n$ *, то* $asdim\ \pi_1(M) < n - 1$ *.*

Наслідок 0.4. *Нехай* M *задовольняє умову теореми . Тоді для* M *має місце гіпотеза Громова .*

Наступна теорема дає вичерпну відповідь на питання Г. Штака про можливість існування шарувань ковиміру один невід'ємної секційної кривини на рімановому многовиді, гомеоморфному $2n+1$ -вимірній сфері S^{2n+1} , де $n \geq 2$. Зауважимо, що стандартне шарування Ріба на стандартній круглій сфері S^3 дає приклад шарування невід'ємої кривини.

Теорема 33. 3-зв'язний многовид M виміру $n \geq 5$, зокрема, многовид гомеоморфний S^n, не допускає C^2-шарування ковиміру один невід'ємної кривини.

Ми розглядаємо питання існування сідлових шарів на замкнених 3-вимірних многовидах. Ми наводимо спосіб побудови таких метрик, який використовує подвійність між зовнішньою геометрією шарування і геометрією одновимірного потоку Φ^t, який визначається ортогональним до шарування одиничним векторним полем. Зокрема, є наступна подвійність для сідлових шарувань: шарування $\mathcal{F}$ є сильно сідловим ($K_e < 0$), тоді і тільки тоді, коли для кожного $x \in M$ і досить малого $t > 0$ існують одиничні вектори v, w дотичні до $\mathcal{F}$ такі, що $|\overline{d\Phi^t}(v)| \leq e^{-Ct}|v|$ та $|\overline{d\Phi^t}(w)| \geq e^{Ct}|w|$, де $\overline{d\Phi^t} := \pi \circ d\Phi^t$, а $\pi : TM \to L$ — проекція на дотичне до шарування $\mathcal{F}$ розподіл L.

Зауважимо, що друга квадратична форма $B(X,Y)$ може бути визначена і для розподілів наступним чином.

$$B(X,Y) = \frac{1}{2}g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, \xi).$$

Використовуючи вищевикладений критерій можна довести, що для даного розподілу P з другою квадратичною формою B і ортогональним векторним полем X, можна змінити метрику так, що дане трансверсальне до X шарування в новій метриці буде ортогональне до X і матиме ту ж другу квадратичну форму, що і P в старій метриці. Це спостереження дозволило нам довести наступний ключовий результат цього підрозділу, який відповідає на питання, поставлене О. А. Борисенко.

Теорема 34. На S^3 існує ріманова метрика, така, що шарування Ріба є сильно сідловим.

Також в даному розділі ми наводимо приклади однорідних сильно сідлових шарувань на замкнених тривимірних многовидах, зокрема, на торичних розшаруваннях над колом.

Ми досліджуємо зв'язок між гомотопічним типом розподілу на рімановому торі T^2, який визначає деяке C^2-шарування, з абсолютною кривиною цього шарування. Під абсолютною кривиною шарування мається на увазі інтеграл $\int_{T^2} |k| d\sigma$, де $|k|(x)$ це кривина (без знака) в точці $x \in T^2$ шарування, що проходить через x . Першим кроком в оцінці інтеграла є оцінка знизу числа рібовских компонентів шарування, що належить даному гомотопічному класу. Це число оцінюється знизу так званим *абсолютним числом обертання розподілу*, а саме, вірна наступна теорема.

Теорема 35. *Мінімально можливе число рібовскіх компонентів шарування тору з дотичним розподілом заданого гомотопічного типу* (m, n) *дорівнює абсолютному числу обертання* $|\mu|$ *-розподілу. Причому якщо* $m \neq 0$ *і* $n \neq 0$ *, то* $|\mu| = HOD(m, n)$ *.*

Ця теорема дала можливість довести наступний результат, який дає оцінку знизу абсолютній кривині шарування, яке належить фіксованому гомотопічному класу.

Теорема 36. *Нехай* $(T^2, \mathcal{F})$ *— двовимірний тор із заданим шаруванням класу* C^2 *. Припустимо, що гомотопічний тип дотичного розподілу є* (m, n) *. Тоді*

$$\int_{T^2} |k| d\sigma \geq 2|\mu| l_{geod},$$

де $|\mu|$ *— абсолютне число обертання дотичного розподілу, а* l_{geod} *— довжина глобально мінімальної геодезичної, що представляє клас замкненої кривої на торі, в який переходить пряма* $mx + ny = 0$ *при факторизації* $\mathbb{R}^2$ *по* $\mathbb{Z}^2$ *.*

Зауваження 37. Відмітимо, що всі нерівності переходять в рівності для шарування, заданого розподілом $(\cos \pi(mx+ny), \sin \pi(mx+ny))$, якщо метрика на торі є евклідовою, індукованою з $\mathbb{R}^2$.

З останньої теореми, як наслідок, нами доводиться наступний важливий результат.

Наслідок 0.5. *Нехай* (T^2, g) *— тор з деякою рімановою метрикою* g *на ньому. Тоді для заданої константи* C *існує не більше скінченого числа гомотопічних класів одновимірних* C^2 *-розподілів на* T^2 *таких,* *що дотичне до розподілу шарування* $\mathcal{F}$ *має шарування, чия кривина обмежена зверху нерівністю* $|k| < C$.

Далі розглядається проблема Коена-Ласка про часткову склейку орбіти $\mathbb{Z}_p$ -простору в евклідів простір. Визначимо множину

$$A(f,q) = \{x \in X|$$

існують такі $i_1, i_2 \dots i_q (0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q < p)$, що $f(\sigma^{i_1}) = f(\sigma^{i_2}) = \dots = f(\sigma^{i_n})\}$, где σ позначає твірну $\mathbb{Z}_p$.

Коен і Ласк довели, що якщо X — паракомпактний хаусдорфів простір, на якому діє група $\mathbb{Z}_p$, де p — просте число, а $f : X \to \mathbb{R}^n$ — довільне неперервне відображення в n -мірний векторний простір, тоді якщо $H^i(X) = 0$ для $0 < i < (n-1)(p-1) + q - 1$ и $q \geq (p+1)/2$ или $q = 2$, то

$$A(f,q) \neq \emptyset. \tag{0.5}$$

Гіпотеза Коена-Ласка полягає в тому, що (0.5) має місце без будь-яких обмежень на q . Ми довели наступну теорему.

Наш результат покращує оцінку на q , наведену Коеном і Ласком при деяких незначних обмеженнях на p . А саме, має місце наступна теорема.

Теорема 38. (0.5) *має місце в разі* $q = (p-1)/2 = [p/2]$, $p \geq 11$.

У цьому розділі ми розглядаємо також одне із фундаментальних питань геометрії в цілому про можливість ізометричного занурення простору Лобачевського L^n в евклідів простір E^m більшого виміру. При цьому ми припускаємо плоску зв'язність в нормальному розшаруванні, що, наприклад, завжди має місце в разі найменшого можливого виміру занурення $m = 2n - 1$. Має місце наступний результат.

Теорема 39. *Не існує ізометричного занурення* L^n *в* E^m *з плоскою нормальною зв'язністю і обмеженим модулем вектора середньої кривини.*

Ми даємо часткову відповідь на наступне питання, поставлене професором Ю. Б. Зелінським.

Вопрос 40. Чи існує континіум в E^4, що має гомотопічний тип двовимірної сфери і є 2-опуклим? Останнє означає, що через кожну точку поза континіумом проходить двовимірна площина, що має з континіумом поржній перетин.

Тут ми даємо часткову відповідь на це питання, а саме ми відповідаємо на питання, поставлене професором О. А. Борисенко, який переформулював задачу для гладкого випадку.

Теорема 41. *Нехай* $S^2 \subset E^4$ *двовимірна сфера,* C^2 *-ладко вкладена в евклідів чотиривимірний простір* E^4. *Тоді знайдеться така точка* $x \in E^4$, *що будь-яка двовимірна площина, що проходить через* x, *перетинає* S^2. *Іншими словами, не існує 2-опуклого вкладення класу гладкості* C^2 *двовимірної сфери* S^2 *в* E^4.

Зауваження 42. Можна показати, що для двовимірного тора дана теорема вже не вірна. Прикладом є стандартний тор Кліффорда $T^2 \subset S^3 \subset E^4$.

3 Екстримальні оцінки для повних гіперповерхонь в ріманових просторах

Результати по зовнішній геометрії підмноговидів можна природним чином розділити на два класи: локальні, коли йде мова про локальні властивості об'єкту в деякому околі простору, ы глобальні результати "в цілому", коли щось затверджується про об'єкт в цілому. Другий клас включає в себе перший, тому отримання результатів "в цілому" є, в певному сенсі, більш цікавою, але складною задачею. Класичні результати диференціальній і рімановій геометрії "в цілому" були отримані в першій половині XX століття в роботах В. Бляшке, А.Д. Александрова, А.В. Погорєлова. Пізніше, їх результати були розвинуті і доповнені в роботах Л. Сантало, Г. Каршера, А.Д. Мілкі і інші. Сучасний розвиток ідей геометрії "в цілому" може бути проілюстровано, серед іншого, позитивим розв'язанням гіпотез Г. Лоусона (С. Брендл, [9]) та Т. Вілмора (Ф.К. Маркус і А. Невес, [10]).

В 1972 році Л.Сантало і І. Янеш [11], цікавлячись питаннями геометричної теорії ймовірності, досліджували асимптотичну поведінку сімейств h -*опуклих* областей, тобто областей, кривина границі яких не менше 1 , які поширюються на весь простір. Вони показали, що на площині Лобачевського для таких областей відношення площі до довжини границі прямує до 1 . Варто зауважити, що для опуклих областей на евклідовій площині ця границя дорівнює ∞ , а для *довільних* опуклих областей на площині Лобачевського, як було показано Э. Галлего і А. Ревентосом [12, 13], ця границя може набувати будь-якого значення від 0 до 1. Узагальнення результату Сантало і Янеша для багатовимірного простору Лобачевського при додаткових обмеженнях на сімейство h -опуклих областей було отримано в [14]. Використовуючи принципово інший підхід, О.А. Борисенко з співавторами (В. Мікуель, Э. Галлего, Д.І. Власенко, та інші) в цілому циклі праць [15, 16, 17, 18, 19] вдалося ліквідувати ці обмеження і перенести результат Сантало та Янеша на випадок сімейства λ -*опуклих* областей, тобто областей, нормальні кривини, границі яких не менше λ для деякої додатньої константи $\lambda \leqslant 1$, в повних однозв'язних рімановых многовидах від'ємної кривини не менше -1 (*многовидах Адамара*). Ключовим етапом цих досліджень був розгляд величини кута між границею області і радіальним напрямом із фіксованної точки всередині цієї області (*функція радіального кута*) і доведення запропованої О. А. Борисенко теореми порівняння для таких кутів і випливаючих з неї точних оцінок для них. Аналогічні оцінки у випадку осяжного евклидового простору були отримані і застосовані в роботах О.А. Борисенко з К. Тененблат [20, 21] і з Е. А. Оліним [22]. Тому цікавим є росповсюдження згаданих результатів для функції радіального кута на випадок невід'ємно-викривлених многовидів, а також для вже згаданих многовидів Адамара у випадку $\lambda > 1$.

Для просторовоподібних гіперповерхонь в просторі-часу канонічним чином виникає поняття *функції гіперболічного кута* між орієнтуючим, часоподібним, векторним полем і направленим в майбутнє (часоподібним) нормальним векторним полем до гиперповерхні. Величина цого кута має визначеній фізичний зміст у питаннях загальної теорії відносності. В циклі праць А. Ромеро, Р. Рубіо з співавторами ця функція була використана для дослідження поверхонь постійної середньої кривини. Для отримання результатів типу Бернштейна суттєвою виявлялась обмеженість цього кута. Тому природно спробувати перенести результати по оцінкам радіальних кутів із ріманового випадку на випадок поверхонь обмеженої нормальної кривини в лоренцевому многовиді.

Обмеження на нормальну кривину повної гиперповерхні накладують обмеження на структуру цієї поверхні "в цілому". Так, В. Бляшке довів [23], що гладкий овалоїд (границя компактної області з внутрішніми точками) в $\mathbb{E}^m$, нормальна кривина якого задовільняє $k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda > 0$ (λ -опуклий), може вільно перекачуватися в шарі радіуса $1/\lambda$. У випадку $\lambda \geqslant k_{\mathrm{n}} > 0$, відповідний шар може вільно перекачуватися всередині овалоїда. Ця теорема узагальнювалась у багатьох напрямках в просторах постійної кривини (див., наприклад, [24, 25]), а також для довільних ріманових многовидів в роботі Р. Ховарда [26]. Виникає природнє питання про зв'язок теореми прокачування Бляшке з теоремою порівняння кутів для повних λ -опуклих поверхонь в просторах постійної кривини і загальних ріманових просторах.

О.А. Борисенко (частково з В. Мікуелем) в серії праць [15, 17, 19, 20] було отримано точну оцінку для ширини сферичного шару, тобто простору між двома концентричними геодезичними сферами, в який можна помістити замкнену λ -опуклу гіперповерхню, $\lambda \in (0,1]$, в многовидах Адамара кривини не менше -1 . Окремий випадок цього результата у просторі Лобачевського був пізніше іншими методами отриманий В. К. Іоніним [27]. Оцінки подібного роду показують степінь близькості відповідної поверхні до сфери. Тому звичайний інтерес представляє дослідження степені сферичності λ -опуклих поверхонь при інших обмеженнях на λ в многовидах Адамара та в ріманових просторах невід'ємної кривини. Також виникає питання про степінь сферичності і отриманні відповідних точних оцінок для повних гіперповерхонь *затисненої нормальної кривини*, тобто кривина яких для деяких додатних констант λ_1 , λ_2 задовольняє умову $\lambda_2 \geqslant k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda_1$. З цим питанням тісно пов'язані дослідження про стабільність для гіперповерхонь, у яких матриця другої фундаментальної форми в кожній точці p в деякій нормі близька до $\lambda(p) \cdot I$, де $\lambda(p)$ — функція точки, I — одинична матриця (*практично омбілічні поверхні*). Результати такого типу були отримані А. В. Погорєловым [28], Р. Шнайдером [29], К. Лихтвейсом [30], В. І. Дискантом [31], Ж. Шойером [32] та інш.

Одним з важливих розділів глобальної геометрії гіперповерхонь є результати, пов'язані з мінімізацією одних геометричних величин при обмеженні (фіксації) інших. Мабуть, історично першим питанням такого типу є *ізопереметрична задача.* Так, в $\mathbb{E}^m$ вона свідчить: максимізувати об'єм компактної області при заданій площі границі. Рішенням класичної ізопериметричної задачі є шар. Ця задача уточнювалася та нетривіально узагальнювалась великою плеядою видатних математиків, таких как Я. Штейнер, К. Брунн, Г. Мінковський, Т. Боннезен, А.Д. Александров та багатьма іншими. Але, тема актуальна і по сей день. Відмітимо, недавнє вирішення гипотези подвійної бульбашки [33] про форму поверхні в $\mathbb{E}^3$ мінімальної площі, що обмежує два заданних об'єма. Поряд з класичною постановкою, має місце і *обернена ізопериметрична задача* про *мінімізацію* об'єму і знаходження екстремального об'єкту. Для довільних областей вона має тривіальне рішення. Тому необхідно звичайним чином звузити клас розглядуваних об'єктів з накладанням додаткових обмежень. Одним із таких обмежень може бути кривина. Єдиний результат такого типу був отриманий Р. Ховардом і А. Трайбергсом в [34]. В ній автори повністю розв'язали обернену ізопериметричну задачу в $\mathbb{E}^2$ для замкнених вкладених кривих кривини $|k| \leqslant 1$ (взагалі кажучи, не опуклих) при деяких додаткових обмеженнях на довжину. В цьому плані інтерес представляє розгляд оберненої ізопериметричної задачі в класі повних λ-опуклих гіперповерхонь. На завершення відмітимо, що в $\mathbb{E}^m$ таке питання перекликається з *задачею Бляшке – Лебега* про мінімізацію об'ема області, границею якої є гіперповерхня постійної ширини d ([35, 37, 38, 39] для $m = 2$, в вимірі більше 2 проблема Бляшке – Лебега в повній спільності до сих пір не вирішена). При $m = 2$ і $m = 3$, з необхідністю, вирішенням задачі є повна $1/d$-опукла гіперповерхня [36, 37].

Були розглянуті основні означення і необхідні допоміжні факти із ріманової та лоренцевої геометрій, теорій оптимального управління.

Доведена теорема порівняння радіальних кутів (в рімановому випадку) і гіперболічних кутів (в лоренцевому випадку), із яких виводяться деякі наслідки.

Теорема 43. *Нехай M^{m+1} — гладкий ріманів многовид, всі секційні кривини K_σ якого задовольняють умову*

$$c_2 \geqslant K_\sigma;$$

$\Sigma \subset M^{m+1}$ – гладка λ-увігнута гіперповерхня (у випадку $c_2 > 0$ вважаємо, що Σ лежить всередині геодезичної сфери радіуса $\pi/(2\sqrt{c_2})$); $\mathcal{S}_\lambda \subset M^{m+1}(c_2)$ — цілком омбілична гіперповерхня кривини λ ; точки $p \in M^{m+1} \backslash \Sigma$, $p_\lambda \in M^{m+1}(c_2) \backslash \mathcal{S}_\lambda$ вибрані так, що $\mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) =$

$\mathrm{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$. *Якщо точки* $q \in \Sigma$ *і* $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ *такі, що*

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda),$$

то для радіальних кутів φ *та* φ_λ *по відношенню до* p *і* p_λ *гіперповерхонь* Σ *і* $\mathcal{S}_\lambda$ *в цих точках виконується нерівність*

$$\cos\varphi(q) \leqslant \cos\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Більш того, якщо D_Σ *– опукла область і* $p \in D_\Sigma$, $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$, *то для опорних функцій* h_p *і* h_{p_λ} *гіперповерхонь* Σ *і* $\mathcal{S}_\lambda$ *в точках* q *та* q_λ *справедлива нерівність*

$$h_p(q) \leqslant h_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

Справедливий наступний наслідок.

Наслідок 0.6. *Нехай виконані умови теореми , і при цьому гіперповерхня* Σ *є повною гладкою* λ *-опуклою гіперповерхнею в повному однозв'язному рімановому многовиді* M^{m+1} . *Тоді для опорних функцій* h_p *и* h_{p_λ} *гіперповерхонь* Σ *та* $\mathcal{S}_\lambda$ *виконується нерівність*

$$h_p(q) \geqslant h_{p_\lambda}(q_\lambda).$$

Далі справедлива

Теорема 44. *Нехай* $M^{m+1}(c)$ *— повний однозв'язний рімановий многовид постійної секційної кривини, що дорівнює* c , $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ *— регулярна класу* C^2 *повна* λ *-опукла (* $\lambda > 0$ *) гіперповерхня в ньому,* $p \in D_\Sigma$ *— точка всередині області, обмеженою* Σ , $d = \mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma)$ *і* φ *— функція радіального кута гіперповерхні* Σ *по відношенню до точки* p . *Тоді:*

1. *Якщо* $c = 0$, *тобто осяжний простір є евклідовим простором* $\mathbb{E}^{m+1}$, *то функція радіального кута зодовальняє нерівність*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{\frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2}} \geqslant \frac{d}{R_\lambda}. \tag{0.6}$$

2. *Якщо* $c = -k^2 < 0$ *, тобто осяжний простір є простором Лобачевського* $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ *, та* $\lambda > k$ *, то функція* φ *задовольняє*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d)}{\operatorname{sh}^2 kR_\lambda}} \geqslant \frac{\operatorname{sh} k\, d}{\operatorname{sh} kR_\lambda}. \tag{0.7}$$

3. *Якщо* $c = k^2 > 0$ *, тобто осяжний простір є сферичним простором* $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$ *, то для функції* φ *виконується оцінка*

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\sin^2 k(R_\lambda - d)}{\sin^2 kR_\lambda}} \geqslant \frac{\sin k\, d}{\sin kR_\lambda}. \tag{0.8}$$

В усіх оцінках вище R_λ *— радіус цілком омбілічної сфери кривини, що дорівнює* λ *, в просторі постійної кривини* $M^{m+1}(c)$ *.*

Більш того, перші оцінки у всіх випадках є точними.

Теорема 45. *Нехай* $\Sigma \subset M^{m+1}$ *— повна* C^2 *-гладка* λ *-опукла (* $\lambda > 0$ *) гіперповерхня в повному однозв'язному* $(m+1)$ *-мірному рімановому многовиді* M^{m+1} *,* $p \in D_\Sigma$ *— точка всередині* Σ *на відстані* $d = \mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma)$ *від* Σ *,* φ *— функція радіального кута для* Σ *і* p *. Тоді:*

1. *Якщо секційні кривини* K_σ *многовиду* M^{m+1} *по будь-якій двомірній площадці* σ *задовольняють нерівності* $0 > K_\sigma \geqslant -k^2$ *, і* $\lambda > k > 0$ *, то виконується нерівність (0.7).*

2. *Якщо секційні кривини многовиду* M^{m+1} *задовольняють нерівності* $K^2 \geqslant K_\sigma \geqslant k^2$ *, для додатніх* K *та* k *, а область* D_Σ *лежить в шарі радіуса* $\pi/2K$ *, то для* φ *справедлива нерівність (0.8).*

Теорема 46. *Нехай* $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ *– замкнена опукла область з непорожньою внутрішністю та гладкою границею. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1. D_Σ *–* λ *-опукла область (* $\lambda > 0$ *, при цьому для* $c < 0$ *вважаємо, що* $\lambda > \sqrt{-c}$ *).*

2. *Для будь-яких точок* $p \in D_\Sigma \backslash \Sigma$ *та* $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ *таких, що* $\mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) = \mathrm{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ *для відповідних* p, Σ *та* $p_\lambda, \Sigma_\lambda$ *функцій радіальних кутів* φ *та* φ_λ *справедлива нерівність*

$$\varphi(q) \leqslant \varphi_\lambda(q_\lambda) \tag{0.9}$$

в тих точках $q \in \Sigma$ *та* $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ *для яких* $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$.

3. *Для будь-якої точки* $s \in \Sigma$ *існує сфера* $\mathcal{S}_\lambda(s)$ *кривини, щ дорівнює* λ *, така, що* $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ *та*

$$D_{\mathcal{S}_\lambda(s)} \subset D_\Sigma.$$

Теорема 47. *Нехай* $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ *– замкнена опукла область з не порожньою внутрішністю та гладкою границею. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1. D_Σ *–* λ *-увігнута область (* $\lambda > 0$ *, при цьому для* $c < 0$ *вважаємо, що* $\lambda > \sqrt{-c}$ *).*

2. *Для будь-яких точок* $p \in D_\Sigma \backslash \Sigma$ *и* $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ *таких, що* $\mathrm{dist}(\mathrm{p}, \Sigma) = \mathrm{dist}(\mathrm{p}_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ *для відповідних* p, Σ *і* $p_\lambda, \Sigma_\lambda$ *функцій радіальних кутів* φ *та* φ_λ *справедлива нерівність*

$$\varphi(q) \geqslant \varphi_\lambda(q_\lambda) \tag{0.10}$$

в тих точках $q \in \Sigma$ *і* $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$ *для яких* $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$.

3. *Для будь-якої точки* $s \in \Sigma$ *існує сфера* $\mathcal{S}_\lambda(s)$ *кривини, що дорівнює* λ *, така, що* $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ *і*

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}.$$

Теорема 48. *Нехай* M^{m+1} *—* $(m+1)$ *-мірний простір-час,* N *– гладка, опукла ахронічна просторподібна гіперповерхня в* M *з* $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$ *. Припустимо, що вздовж будь-якої часоподібної направленої в майбутнє геодезичної* $\gamma \colon [0, s_0) \to \mathcal{I}^+(N)$ *, випущеної ортогонально* N *, секційні кривини* K_{σ_s} *многовиду* M^{m+1} *задовільняють умову*

$$K_{\sigma_s} \geqslant k^2,$$

для деякої додатньої константи k *і всеможливих двомірних часоподібних площин* σ_s *, що містять* $\dot{\gamma}(s)$ *,* $s \geqslant 0$ *. Нехай* $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ *– гладка простороподібна гіперповерхня,* ν *– напрямлене в минуле нормальне векторне поле для* Σ *,* $\Sigma_\lambda \subset \mathbb{S}_1^{m+1}(c)$ *— цілком омбілічна гіперповерхня кривини* λ *така, що* $\mathrm{dist}(\mathrm{N},\Sigma) = \mathrm{dist}(\mathcal{S}_0, \Sigma_\lambda)$ *. Тоді для* φ *і* φ_λ *– функцій гіперболічного кута для* Σ *,* Σ_λ *по відношенню, відповідно, до* N *і* $\mathcal{S}_0$ *– в тих точках* $q \in \Sigma$ *та* $q_\lambda \in \Sigma_\lambda$ *, для яких*

$$\tau_N(q) = \tau_{\mathcal{S}_0}(q_\lambda),$$

Виконується нервність

$$\operatorname{ch}\varphi(q) \leqslant \operatorname{ch}\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Теорема 49. Нехай M^{m+1} *–* $(m+1)$ *-мірний простір-час,* N *– гладка опукла ахронічна простороподібна гіперповерхня в* M *з* $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$ *. Припустимо, що вздовж будь-якої часоподібної напрямленої в майбутьнє геодезичної* $\gamma\colon [0, s_0) \to \mathcal{I}^+(N)$ *, випущеної ортогонально* N *, секційні кривини* K_{σ_s} *многовиду* M^{m+1} *задовільняють*

$$K_{\sigma_s} \geqslant k^2, \quad k > 0,$$

для всеможливих двомірних часоподібних площин σ_s *, що містять* $\dot{\gamma}(s)$ *,* $s \geqslant 0$ *. Нехай* $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ *– гладка просторо-подібна гіперповерхня,* ν *– напрямлене в минуле нормальне векторне поле для* Σ *, і припустимо, що* $d(N,\Sigma) = d(p_0, q_0) = t_0$ *для деяких* $p_0 \in N, q_0 \in \Sigma$ *. Якщо нормальні кривини* k_{n}^ν *гіперповерхні* Σ *в кожній точці та в кожному напрямку задовільняють нерівність*

$$k_{\mathrm{n}}^\nu \leqslant \lambda, \quad \lambda > 0,$$

функція гіперболічного кута φ *гіперповерхні* Σ *по відношенню до* N *обмежена і задовільняє наступним нерівностям:*

1. *У випадку* $\lambda < k$ *,*

$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant \frac{\operatorname{sh}\left((\beta - t_0)k\right)}{\operatorname{ch}\left(\beta k\right)};$$

   де $\beta = 1/k\mathrm{arcth}\,(\lambda/\mathrm{k})$ *;*

2. *у випадку* $\lambda = k$,

$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant e^{-t_0 k};$$

3. *У випадку* $\lambda > k$,

$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant \frac{\operatorname{ch}\left((\beta - t_0)k\right)}{\operatorname{sh}\left(\beta k\right)}, \text{ \textit{для} } \beta > t_0 ,$$

і

$$\operatorname{sh}\varphi < \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\beta k\right)}, \text{ \textit{для} } \beta \leqslant t_0 ,$$

де $\beta = 1/k\operatorname{arccth}\left(\lambda/\mathrm{k}\right)$.

Більш того, наведені оцінки точні.

4 Субгармонійні функції нескінченного порядку у півплощині

В розділі 4 розглядаються субгармонійні функції у верхній півплощині нескінченного порядку, з повною мірою, розподіленою на скінченній системі променів. Доведена теорема про те, що в цьому випадку і нижній порядок функції дорівнює нескінченності. Аналогічний результат для цілих функцій був отриманий Д. Майлзом.

Нехай v – субгармонійна функція в комплексній площині $\mathbb{C}$, $M(v,r)=\max\limits_{0\le\theta\le2\pi} v(re^{i\theta})$. *Порядком і нижнім порядком функції* v називаються відповідно числа

$$\rho[\gamma]=\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(v,r)}{\ln r},\quad \rho_*[\gamma]=\liminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(v,r)}{\ln r}.$$

Порядком і нижнім порядком цілої функції f називаються відповідно порядок і нижній порядок субгармонічної функції $\ln|f|$.

В роботі [40] розглядались цілі функції, нулі яких лежать на скінченній системі променів. Зокрема, було доведено, що якщо f – ціла функція нескінченного порядку з нулями, розташованими на скінченній системі променів, то її нижній порядок також дорівнює нескінченності. Цей результат легко узагальнюється на субгармонійні функції в комплексній площині: якщо рісовська міра субгармонійної на всій комплексній площині функції v, нескінченного порядку, зосереджена на скінченній системі променів, тобто її нижній порядок також дорівнює нескінченності. Ми доводимо аналогічний результат для функцій, субгармонійних у півплощині.

Позначимо через $\mathbb{C}_+=\{z:\operatorname{Im}z>0\}$ верхню півплощину комлексної змінної z. Через $C(a,r)$ будем позначати відкритий, а через $B(a,r)$ замкнений, круг радіуса r з центром в точці a; через Ω_+ – перетин множини Ω з півплощиною $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+=\Omega\cap\mathbb{C}_+$; $\overline{G}$ означає замикання множини G. Якщо $0<r_1<r_2$, то $D_+(r_1,r_2)=\overline{C_+(0,r_2)\backslash C_+(0,r_1)}$ означає замкнене напівкільце.

Нехай SK – клас субгармонійних функцій в $\mathbb{C}_+$, що містять додатню гармонійну мажоранту в будь-якій обмеженій області в $\mathbb{C}_+$. Функції классу $v(z)$ SK мають наступні властивості [41]:

a) $v(z)$ має недотичну границю $v(t)$ майже скрізь на дійсній осі, $v(t) \in L^1_{loc}(-\infty, \infty)$;

b) на дійсній прямій існує знакозмінна міра ν така, що

$$\lim_{y \to +0} \int_a^b v(t+iy)\,dt = \nu([a,b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Міра ν називається граничною мірою функції v ;

c) $d\nu(t) = v(t)\,dt + d\sigma(t)$, де σ – сингулярна міра відносно міри Лебега.

Для функції $v \in SK$ визначимо, дотримуючись [41], повну міру λ як

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{\mathbb{C}_+ \cap K} \operatorname{Im}\zeta\, d\mu(\zeta) - \nu(K),$$

де μ — рісовська міра функції v .

Міра λ має наступні властивості:

1) λ – скінченна міра на кожному компакті $K \subset \mathbb{C}$,

2) λ – невід'ємна міра поза $\mathbb{R}$,

3) λ дорівнює нулю у півплощині $\mathbb{C}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$.

Навпаки, якщо міра λ задовольняє умовам 1) – 3), то існує функція $v \in SK$, з повною мірою що дорівнює λ . Сукупність умов 1) – 3) надалі будемо позначати через {G}, якщо, крім того, міра λ невід'ємна і на $\mathbb{R}$, то через $\{G^+\}$.

Якщо D – обмежена область в $\mathbb{C}_+$, $D_1 = D \cup (\partial D \cap \mathbb{R})$, $v \in SK$, $z \in D$, тоді

$$v(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{D_1} \frac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln\left|\frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}}\right| d\lambda(\zeta) + h(z),$$

де h – гармонійна функція в D, а якщо $[a,b] \subset \{\mathbb{R} \cap \partial D\}$, то h допускає неперервне продовження нулем на (a,b), ядро $\dfrac{1}{\operatorname{Im}\zeta} \ln \left| \dfrac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right|$ вважається продовженим за неперервністю на дійсну вісь. Повна міра λ визначає функціію $v \in SK$ так як і міра Ріса μ визначає субгармонійну функцію в $\mathbb{C}$. Точніше, якщо функції v_1, $v_2 \in SK$ і кожна має повну міру λ, то існує дійсна ціла функція g така, що $v_2(z) - v_1(z) = \operatorname{Im} g(z)$, $z \in \mathbb{C}_+$.

Субгармонійна в $\mathbb{C}_+$ функція v називається істинно субгармонійною, якщо $\limsup\limits_{z \to t} v(z) \leqslant 0$ для будь-якого дійсного числа $t \in \mathbb{R}$. Клас істинно субгармонійних функцій позначимо через JS. Повна міра функції $v \in JS$ є додатньою мірою, чим і пояснюється термін "істинно субгармонійна функція". Також зазначимо, що множина JS є конусом, тобто, якщо v_1, $v_2 \in JS$, $\alpha \geq 0$, то $v_1 + v_2$, $\alpha v_1 \in JS$.

Клас істинно дельта-субгармонійних функцій $J\delta$ визначається як різниця $J\delta = JS - JS$. Зауважимо, що $J\delta$ – найбільш широкий клас δ-субгармонійних функцій у півплощині, для яких можна визначити неванліннівську характеристику.

Справкдливі наступні твердження [41]:

Твердження 1. $JS \subset SK$.

Твердження 2. $J\delta = SK - SK$.

Із твердження 2 випливає, що $SK \subset J\delta$. Тому надалі при розгляданні субгармонійних функцій ми можемо обмежитись класом JS, оскільки функція класа SK представляється у вигляді різниці двох істинно субгармонійних функцій. Для функцій $v \in J\delta$ справедливе представлення у напівкільці $z \in D_+(R_1, R_2)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D_+(R_1,R_2)} K(z,\zeta)\, d\lambda(\zeta) +$$

$$\int\limits_0^{\pi} \left[\frac{R_2}{2\pi} \frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n} v\left(R_2 e^{i\varphi}\right) + \frac{R_1}{2\pi} \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi}) \right] d\varphi,$$

і у півкрузі $z \in C_+(0,R)$:

$$v(z) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\overline{C_+(0,R)}} \frac{G(z,\zeta)}{\operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta) + \frac{R}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial G(z,Re^{i\varphi})}{\partial n}v(Re^{i\varphi})\,d\varphi\,,$$

,

де $G(z,\zeta)$ – функція Гріна півкруга, $\dfrac{\partial G}{\partial n}$ – означає похідну по внутрішній нормалі, ядро під знаком подвійного інтеграла продовжується на дійсну вісь по неперевності при $|t| \leqslant R$.

Для заданої міри λ позначимо через $\lambda(t) = \lambda(\overline{C(0,t)})$. Нехай $v \in J\delta$, $v = v_+ - v_-$, λ – повна міра функції v , $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$ – жорданове розвинення міри λ . Далі будемо вважати, що виконується умова:

d) функція v гармонійна в деякому околі нуля і збігається інтеграл $\displaystyle\int_0^{r_0}\frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt < \infty$ при деякому $r_0 > 0$.

Введемо наступні характеристики функції v :

$$m(r,v) := \frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi} v_+(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi, \quad N(r,v,r_0) := \int\limits_{r_0}^{r}\frac{\lambda_-(t)}{t^3}\,dt\,,$$

$$T(r,v,r_0) := m(r,v) + N(r,v,r_0) + m(r_0,-v), \quad r > r_0\,,$$

де r_0 – довільне, зазвичай фіксоване, додатне число, яке в позначеннях (якщо це не викликає нерозуміння) ми не будемо брати до уваги (наприклад, замість $T(r,v,r_0)$ писати $T(r,v)$). Окрім того, позначимо $T_0(r,v) = T(r,v,0)$, $N_0(r,v) = N(r,v,0)$.

Позначимо

$$d\lambda_k(\tau e^{i\varphi}) = \frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}\tau^{k-1}\,d\lambda(\tau e^{i\varphi})$$

$\Bigl($ функція $\dfrac{\sin k\varphi}{\sin\varphi}$ при $\varphi = 0$, π , визначається за неперевністю $\Bigr)$.

Покладемо $\lambda_k(r) = \lambda_k(\overline{C(0,r)})$. Справедлива нерівність, яка буде використовуватися надалі:

$$|\lambda_k(r)| \leqslant kr^{k-1}|\lambda|(r)\,.$$

Відмітимо формулу Карлемана в позначеннях Грішина:

$$\frac{1}{r^k}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^{r}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt + \frac{1}{r_0^k}\int\limits_0^{\pi} v(r_0e^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi\,, \qquad (1)$$

Зокрема, для $k=1$ маємо

$$\frac{1}{r}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi = \int\limits_{r_0}^{r}\frac{\lambda(t)}{t^3}\,dt + \frac{1}{r_0}\int\limits_0^{\pi} v(r_0e^{i\varphi})\sin\varphi\,d\varphi\,. \tag{2}$$

Формула (2) може бути записана у вигляді:

$$T(r,v) = T(r,-v)\,. \tag{3}$$

Означення 50. Гармонійними коефіцієнтами Фур'є функції $v\in J\delta$ називаються функції

$$c_k(\theta,r,v) = \frac{2\sin k\theta}{\pi}\int\limits_0^{\pi} v(re^{i\varphi})\sin k\varphi\,d\varphi,\ \theta\in[0,\pi],\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Нехай λ – повна міра функції $v\in J\delta$, величина λ_k визначена вище. Тоді із формули (1) отримаємо наступні вирази для гармонійних коефіцієнтів Фур'є:

$$c_k(\theta,r,v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k\sin k\theta}{\pi}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}}\,dt,\quad k\in\mathbb{N}\,, \tag{4}$$

де $\alpha_k = \dfrac{2}{\pi}r_0^{-k}c_k(\theta,r_0,v)$ (тут і далі r_0 – фіксоване додатнє число, наприклад, $r_0=1$).

Застосовуючи формулу інтегрування частинами до інтеграла в правій частині (4), отримаємо

$$\begin{gathered} c_k(\theta,r,v) = \alpha_k r^k + \frac{r^k\sin k\theta}{\pi k r_0^{2k}}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r_0)}}\frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) + \\ \frac{r^k\sin k\theta}{\pi k}\iint\limits_{D_+(r_0,r)}\frac{\sin k\varphi}{\tau^k\operatorname{Im}\zeta}\,d\lambda(\zeta) - \frac{\sin k\theta}{r^k\pi k}\iint\limits_{\overline{C_+(0,r)}}\frac{\sin k\varphi}{\operatorname{Im}\zeta}\tau^k\,d\lambda(\zeta) \end{gathered} \tag{5}$$

(тут і скрізь нижче $\zeta=\tau e^{i\varphi}$).

Означення 51. Порядком і нижнім порядком функції $v\in J\delta$ називаються відповідно числа $\rho[rT(r,v)]$ і $\rho_*[rT(r,v)]$.

Основним результатом цього розділу є наступна теорема.

Теорема 52. Якщо $v \in SK$ *– субгармонійна функція в* $\mathbb{C}_+$ *нескінченного порядку з повною мірою* λ *на скінченній системі променів* $\mathbb{L}_k = \left\{z : \arg z = e^{i\theta_k}, \right\rangle \theta_k = \dfrac{\pi p_k}{q_k}; \quad k = 1, \dots, N_0; \quad p_k, q_k, N_0 \in \mathbb{N};$ $p_k < q_k;$ *тоді її нижній порядок також дорівнює нескінченності.*

Доведення. Будемо вважати, що $0 \notin \operatorname{supp} v$. Оскільки міра λ зосереджена на скінченній системі променів, то із формул (5) для коефіцієнтів Фур'є функції v знаходимо:

$$c_n(r, v) = \alpha_n r^n + \sum_{k=1}^{N_0} \frac{r^n \sin(\theta_k n)}{\pi n r_0^{2n}} \int\limits_0^{r_0} t^{n-1} d\lambda(t) +$$

$$\sum_{k=1}^{N_0} \frac{r^n \sin(\theta_k n)}{\pi n} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{d\lambda(t)}{t^{n+1}} - \sum_{k=1}^{N_0} \frac{\sin(\theta_k n)}{r^n \pi n} \int\limits_0^{r} t^{n-1} d\lambda(t), n \in \mathbb{N}\,.$$

Вибираючи r_0 так, щоб $C(0, r_0) \notin \operatorname{supp} v$, звідси отримаємо:

$$c_n(r, v) = \alpha_n r^n +$$

$$\sum_{k=1}^{N_0} \frac{\sin(\theta_k n)}{\pi n} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{1}{t} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^n - \left(\frac{t}{r}\right)^n \right] d\lambda(t), n \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

Інтегруючи двічі частинами у формулах (6), отримаємо:

$$\begin{gathered} c_n(r, v) = \alpha_n r^n + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \sin(\theta_k n) \left(\tilde{N}(r) + r^n \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{N}(r)}{t^{n+1}}\, dt \right) + \\ + \frac{n-1}{\pi} \sum_{k=1}^{N_0} \sin(\theta_k n) \int\limits_{r_0}^{r} \frac{1}{t} \left[\left(\frac{r}{t}\right)^n - \left(\frac{t}{r}\right)^n \right] \tilde{N}(r)\, dt, n \in \mathbb{N}\,, \end{gathered} \tag{7}$$

де $\tilde{N}(r) = \displaystyle\int_{r_0}^{r} \frac{\lambda(t)}{t^2} dt.$

Позначимо через $C = \sum\limits_{k=1}^{N_0} \sin\theta_k$. Ясно, що $C > 0$. із (7) з $n = n_l = 1 + 2l \prod\limits_{k=1}^{N_0} q_k$, $l \in \mathbb{N}$, мы отримуємо

$$\frac{|c_n(r, v)|}{r^n} \geqslant \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\tilde{N}(r)}{r^n} + \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\tilde{N}(r)}{t^{n+1}}\, dt \right) - |\alpha_n|, n \in \mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Якщо функція $\tilde{N}(r)$ має нескінченний порядок, то інтеграл, що знаходиться в правій частині цієї нерівності, необмежений при $r \to \infty$, оскільки

$$\int\limits_r^\infty \frac{\tilde{N}(t)}{t^{n+1}}\,dt \geqslant \frac{\tilde{N}(r)}{nr^n}, \quad n \in \mathbb{N}\,,, \quad n = 1, 2, \dots\,, \tag{8}$$

і права частина цієї нерівності може бути зроблена безмежно великою при підходящому виборі r.

Із означення коефіцієнтів Фур'є $c_k(r, v)$ випливає нерівність:

$$|c_k(r, v)| \leqslant \frac{2k}{\pi} \int\limits_0^\pi |v(re^{i\varphi})| \sin\varphi\, d\varphi, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Звідси і із рівності (3) отримаємо

$$rT(r, v) \geqslant \frac{\pi}{2k}|c_k(r, v)|, \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

Враховуючи це і нерівність (7), із (8), отримаємо необхідне твердження.

Якщо $\tilde{N}(r)$ має скінченний порядок, то існують додатні числа $K > 0$ і $\rho > 0$ такі, що $\tilde{N}(r) \leqslant Kr^\rho$ для всіх $r > 0$. Можна вважати ρ нецілим. Звідси випливає, що

$$K2^\rho r^\rho \geqslant \tilde{N}(2r) \geqslant \int_r^{2r} \frac{\lambda(t)}{t^2}\,dt \geqslant \lambda(r) \int_r^{2r} \frac{dt}{t^2} = \frac{\lambda(r)}{2r}\,,$$

тобто

$$\lambda(r) \leqslant K2^{\rho+1} r^{\rho+1}\,.$$

У цьому випадку із роботи [41] випливає, що існує функція $g \in JS$ порядка ρ з повною мірою λ. Тоді функція $G = v - g \in J\delta$ і $\lambda_G \equiv 0$. Оскільки $G(z) = \operatorname{Im} f(z)$, де $f(z)$ – ціла дійсна функція,

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n\,.$$

Якщо лише скінченне число $a_n \neq 0$, то $f(z)$ – многочлен, тоді функції G і v мають скінченний порядок, що суперечить умові.

Далі

$$c_n(r, G) = a_n r^n\,, n = 1, 2, \dots\,.$$

Тоді із нерівності

$$rT(r,v) \geqslant rT(r,G) - rT(r,g) \geqslant \frac{\pi}{2n}\left|c_n(r,G)\right| + O(r^\rho) \geqslant \\ \frac{1}{2}\left|a_n\right| r^n + O(r^\rho)\,, r \to \infty\,, n = 1, 2, \dots\,,$$

випливає, що $\alpha[rT(r,v)] = \infty$.

Теорема доведена.

5 Лінійні функціонали в класах цілих функцій скінченного порядку

У розділі 3 розглядаються лінійні функціонали в класах цілих функцій скінченного порядку.

Введемо необхідні означення. Функція $\rho(r)$, визначена на промені $(0,\infty)$, яка задовольняє умову Ліпшица на будь-якому сегменті $[a,b]\subset(0,\infty)$ і умову

$$\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\geq 0, \text{and} \lim_{r\to\infty} r\rho'_{+}(r)\ln r=0$$

називається *уточненим порядком.*

Опис властивостей уточненого порядку можна знайти в [48, 49]. Ми використовуємо позначення $V(r)=r^{\rho(r)}$. Будемо вважати, що $V(r)$ – зростаюча функція на $(0,\infty)$ і $\lim\limits_{r\to+0}V(r)=0$.

Сформулюємо деякі властивості уточненого порядку, які будемо використовувати надалі [48, (2), p.33].

Для $r\to\infty$ *і* $0<a\leq k\leq b<\infty$ *асимптотична нерівність*

$$(1-\varepsilon)k^{\rho}V(r)<V(kr)<(1+\varepsilon)k^{\rho}V(r) \tag{0.11}$$

вірна рівномірно відносно k.

Позначимо через $M_f(r)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$. Якщо для цілої функції $f(z)$ число

$$\sigma_f=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log M_f(r)}{V(r)}$$

відмінне від нуля і нескінченності, то $\rho(r)$ називається *уточненим порядком цілої функції* $f(z)$ *і* σ_f *називаєтся типом функції* $f(z)$ *відносно уточненого порядку* $\rho(r)$.

Нехай $\rho(r)$ – уточнений порядок, $\lim_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\geq\ 0$. Ціла функція $f(z)$ комплексної змінної z належить простору $[\rho(r),p]$, якщо $f(z)$ має порядок менший ніж $\rho(r)$ або рівний $\rho(r)$, але у цьому випадку тип менший або дорівнює p.

Послідовність функцій $\{f_n(z)\}$ із $[\rho(r),p]$ збігається в сенсі $[\rho(r),p]$, якщо: (i) вона збігається рівномірно на компактах, (ii) для всіх

$\varepsilon > 0$ існує $r_0(\varepsilon)$, незалежне від n , таке що

$$|f_n(z)| < \exp[(p+\varepsilon)V(|z|)], \quad |z| > r_0(\varepsilon)(n \geq 1)\,.$$

Для відповідних $C(\varepsilon)$, які не залежать від n , для всіх z

$$|f_n(z)| < C(\varepsilon)\exp[(p+\varepsilon)V(|z|)] \quad (n \geq 1)\,. \tag{0.12}$$

Простір $[\rho(r),p]$ – це лінійний топологічний простір з секвенційною топологією.

Введемо функцію $\varphi(t)$, яка визначається як єдиний розв'язок рівняння $t = V(r)$. Таким чином

$$\varphi(V(t)) = t\,. \tag{0.13}$$

Теорема 53. **([48, Теорема 2', сторінка 42])** *Тип* σ_f *цілої функції* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *уточненого порядку* $\rho(r)$ $(\rho > 0)$ *визначається рівністю*

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} = (e\sigma_f\rho)^{1/\rho}\,. \tag{0.14}$$

Введемо

$$d_n = \frac{(ep\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \quad n \geq 1, d_0 = 1\,.$$

Для функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in [\rho(r),p]$ ми ставимо у відповідність функцію

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = \frac{c_n}{d_n}(n \geq 0)\,, \tag{0.15}$$

яка є аналітичною, принаймі, в крузі $|z| < 1$. Насправді, маємо з (0.14) $\limsup\limits_{n\to\infty} \varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} \leq (ep\rho)^{1/\rho}$, звідси випливає $\varphi(n)\sqrt[n]{|c_n|} \leq (ep_1\rho)^{1/\rho}$, $p_1 > p$, $n > n_0$, і

$$|b_n| < \left(\frac{p_1}{p}\right)^{n/\rho}, \quad n \geq n_0\,.$$

Оскільки p_1 більше p , то

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} \leq 1$$

і ряд (0.26) збігається в крузі $|z| < 1$. З іншої сторони, кожній аналітичній в крузі $|z| < 1$ функції $F(z)$ відповідає функція $f(z)$ із $[\rho(r),p]$.

Факт відповідності $f(z)$ з $[\rho(r),p]$ функції $F(z)$, описаним вище способом, записується наступним чином

$$f(z) \sim F(z)\,.$$

Очевидно, якщо $F(z) \in [\rho(r),p]$, то $f(\lambda z) \sim F(\lambda z)$ у сенсі $[\rho(r),\lambda^{\rho}p]$, де λ — параметр, і якщо $f_n(z) \sim F_n(z)$ ($n=1,2,\ldots,m$) то

$$\sum_{n=1}^{m} a_n f_n(z) \sim \sum_{n=1}^{m} a_n F_n(z)\,.$$

Ми доводимо дві теореми.

Теорема 54. *Для того, щоб послідовність* $\{f_n(z)\}$ *функцій із* $[\rho(r),p]$ *збігалася в сенсі* $[\rho(r),p]$ *, необхідно і досить, щоб послідовність* $\{F_n(z)\}$ $(f_n(z) \sim F_n(z))$ *збігалась рівномірно всередині диску* $|z|<1$ *.*

Теорема 55. *Неперервний лінійний функціонал* l *у просторі* $[\rho(r),p]$ *має вигляд*

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,, \tag{0.16}$$

де значення a_n *задовольняють нерівність*

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n)\sqrt[n]{|a_n|} < (ep\rho)^{-1/\rho}\,. \tag{0.17}$$

Випадок $\rho(r) \equiv \rho > 0$ розглянутий О.Ф. Леонтьєвим [50, Теорема 1.1.7, Теорема 1.1.9].

Доведемо теорему . Нехай

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n, \quad F_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} z^n \quad (k \ge 1),$$

І нехай послідовність $\{f_k(z)\}$ збігається в сенсі $[\rho(r),p]$. В силу нерівності Коші та умови (0.34)

$$|c_n^{(k)}| < C(\varepsilon)\frac{\exp[(p+\varepsilon)V(r)]}{r^n}, \quad r>0\,.$$

Покладемо тут $r = \dfrac{\varphi(n)}{(p_1\rho)^{1/\rho}}$, $p_1 = p + \varepsilon$, тоді із (0.11) і (0.25) отримаємо

$$|c_n^{(k)}| < \frac{C(\varepsilon)(p_1\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \exp\left[p_1 V\left(\frac{\varphi(n)}{(p_1\rho)^{1/\rho}}\right)\right] \leq$$
$$\leq \frac{C_1(\varepsilon)(p_1 e^{p_1}\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \quad (n \geq 0, k \geq 1)\,.$$

Із (0.34) для $z = 0$ маємо

$$|c_0^{(k)}| < C_1(\varepsilon) \quad (k \geq 1)\,.$$

На основі цих оцінок

$$|b_n^{(k)}| = \frac{|c_n^{(k)}|}{d_n} < C_1(\varepsilon)\left(\frac{p_1 e^{p_1}}{p\, e^p}\right)^{n/\rho} \quad (n \geq 0, k \geq 1)\,.$$

Візьмемо $r < \left(\dfrac{p\, e^p}{p_1 e^{p_1}}\right)^{1/\rho}$, $p_1 = p + \varepsilon$. Вибираючи ε, r скільки завгодно близько до одиниці, маємо

$$|F_m(z) - F_k(z)| < \sum_{n=1}^{s} |b_n^{(m)} - b_n^{(k)}| r^n + 2C_1(\varepsilon) \sum_{n=s+1}^{\infty} \left(\frac{p_1 e^{p_1}}{p\, e^p}\right)^{n/\rho} r^n\,.$$

Ряд в правій частині збігається. По ε_1 виберемо s таким чином, щоб другий доданок був меншим за ε_1.

Із рівномірної збіжності $\{f_k(z)\}$ на компактах випливає, що для кожного фіксованого n коефіцієнт $c_n^{(k)}$ має границю коли $k \to \infty$. Тоді $b_n^{(k)}$ також має границю при $k \to \infty$. Тому

$$\sum_{n=1}^{s} |b_n^{(m)} - b_n^{(k)}| r^n < \varepsilon_1,$$

якщо m і k великі. Остаточно, $|F_m(z) - F_k(z)| < 2\varepsilon_1$, $|z| < r$. Що і потрібно було довести.

Доведемо другу частину теореми. Нехай послідовність $\{F_k(z)\}$ рівномірно збігається в крузі $|z| < 1$. Тоді для фіксованого n коефіцієнт $b_n^{(k)}$ має границю коли $k \to \infty$ і $|F_k(z)| < M$, $|z| < r < 1$. Із цього випливає, що

$$|b_n^{(k)}| < \frac{M}{r^n} \quad (n \geq 0, k \geq 1)\,.$$

Із цієї оцінки отримаємо

$$|c_n^{(k)}| = |b_n^{(k)}|d_n < M\frac{p\,e\rho)^{n/\rho}}{(r\varphi(n))^n} \quad (n \geq 0, k \geq 1)$$

і

$$|f_k(z)| \leq M\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p\,e\rho)^{n/\rho}}{((r\varphi(n))^n}|z|^n \quad (k \geq 1)$$

(права частина не залежить від k).

За теоремою функція $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(p\,e\rho)^{n/\rho}}{(r\varphi(n))^n}z^n$ – ціла функція порядку ρ і типу $\frac{p}{r^\rho}$. Цей тип близький до p , коли r близьке до 1. Тому умова (0.34) виконується.

Оскільки коефіцієнт $c_n^{(k)}$ має границю коли $k \to \infty$ для кожного фіксованого n , то аналогічно можна довести, що послідовність $\{f_k(z)\}$ збігається рівномірно на компактах. Таким чином, ця послідовність збігається в сенсі $[\rho(r), p]$.

Зауважимо, що якщо послідовність $\{f_k(z)\}$ збігається до $f(z)$ в сенсі $[\rho(r), p]$ і $\{F_k(z)\}$ збігається до $F(z)$, то $f(z) \sim F(z)$.

Зауваження. Якщо послідовність $\{f_k(z)\}$ збігається в сенсі $[\rho(r), p_1]$, тоді послідовність $\{F_k(z)\}$ рівномірно збігається в крузі $|z| < \left(\frac{p}{p_1}\right)$. Обернене твердження вірне. Це можна перевірити, проводячи попередні міркування.

Відповідно до теореми можна стверджувати, що простір $[\rho(r), p]$ функцій $f(z)$ зі збіжністю в сенсі $[\rho(r), p]$ переходить в простір функцій $F(z)$, аналітичних в диску $|z| < 1$ зі збіжністю в сенсі рівномірної збіжності на компактах. Ми використовуємо цей факт, щоб отримати вигляд лінійного неперервного функціоналу у просторі $[\rho(r), p]$.

Нехай $l(f)$ — неперервний лінійний функціонал у просторі $[\rho(r), p]$. Позначимо $l(z^n) = a_n$ ($n \geq 0$). Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – функція із $[\rho(r), p]$. Оскільки ряд збігається в сенсі $[\rho(r), p]$, то, використовуючи неперервність функціоналу, отримаємо

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n\,.$$

У цьому випадку

$$l(f)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc_n,\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\,. \tag{0.18}$$

Тепер розглянемо лінійний функціонал $L(F)$ у просторі функцій $F(z)$, аналітичних в диску $|z|<1$:

$$L(z^n)=a_nd_n\quad (n\geq 0);\quad d_n=\frac{(ep\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n}\quad n\geq 1, d_0=1$$

(ми ще не знаємо, що це неперервний функціонал).

Нехай $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$ аналітична в крузі $|z|<1$. Тоді

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n\in[\rho(r),p],\quad c_n=b_nd_n\,.$$

Маємо

$$L\left(\sum_{n=0}^{m}b_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{m}b_nL(z^n)=\sum_{n=0}^{m}c_na_n\,.$$

Виходячи із (0.29), права частина має границю якщо $m\to\infty$. Позначимо

$$L(F)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nd_nb_n\,. \tag{0.19}$$

У цьому випадку

$$l(f)=L(F),\quad f(z)\sim F(z)\,. \tag{0.20}$$

Так як $l(f)$ – неперервний лінійний функціонал, звідси випливає , що і $L(F)$ також неперервний лінійний функціонал.

Неперервний лінійний функціонал у просторі аналітичних функцій в одиничному крузі задається формулою

$$L(F)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nb_n,\quad F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

де $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|p_n|}<1$. Із цього і (0.19) отримаємо: $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|d_n}<1$ або

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\varphi(n)}<(p\,e\rho)^{-1/\rho}\,. \tag{0.21}$$

Таким чином, неперервний лінійний функціонал $l(f)$ в просторі $[\rho(r),p]$ має вигляд (0.29), де числа a_n задовільняють умову (0.21). Обернене твердження також вірне: якщо умова (0.21) вірна, то функціонал (0.29) є неперервним лінійним функціоналом $l(f)$ у просторі $[\rho(r),p]$, оскільки відповідно цій умові функціонал(0.19) є неперервним лінійним функціоналом.

Теорему доведено.

Простір аналітичних функцій в одиничному крузі $D=\{z:|z|<1\}$ зі збіжністю в сенсі рівномірної збіжності на компактах позначимо через $A(D)$. Відмітимо наступні відомі факти:

1) Нехай $F_n(z)\in A(D)$ ($n\geq 1$). Для того,щоб функція $F_0(z)\in A(D)$ могла бути апроксимована з будь-яким степенем точності лінійними комбінаціями функцій $F_n(z)$ (рівномірно на компактах D), необхідно і досить, щоб виконувались рівності

$$L(F_n)=0 \quad (n\geq 1)\,, \tag{0.22}$$

де $L(F)$ - неперервний лінійний функціонал в $A(D)$, і $L(F_0)=0$. Зокрема, щоб сімейство функцій $\{F_n(z)\}$ було повним в $A(D)$, небхідно і достить, щоб виконувались рівності (0.22) і $L(F)=0$ для кожної функції $F(z)\in A(D)$.

2) Нехай M - замкнена множина в $A(D)$, не співпадаюча з $A(D)$, і $F_0(z)\in A(D)$ – функція, що не належить M . Тоді існує функціонал $L(F)$, такий, що $L(F)=0$ для всіх $F(z)\in M$ і $L(F_0)\neq 0$.

Звернемо увагу, що замкнена множина M в $A(D)$, виходячи з співвідношення $f(z)\sim F(z)$, відповідає замкненій множині у просторі $[\rho(r),p]$.

Грунтуючись на зазначених фактах, а також беручи до уваги рівність (0.20), отримуємо натупні твердження:

1) Нехай $f_n(z)\in[\rho(r),p]$ ($n\geq 1$). Для того, щоб функція $f_0(z)\in[\rho(r),p]$ могла бути аппроксимована з будь-яким степенем точності лінійними комбінаціями функцій $f_n(z)$ (у сенсі $[\rho(r),p]$), необхідно і досить, щоб виконувались рівності

$$l(f_n)=0 \quad (n\geq 1)\,, \tag{0.23}$$

де $l(f)$ – неперервний лінійний функціонал в $[\rho(r), p]$, і $l(f_0) = 0$. Зокрема, щоб сімейство функцій $\{f_n(z)\}$ було повним в $[\rho(r), p]$, необхідно і досить, щоб виконувались рівності 0.23) і $l(f) = 0$ для кожної функції $f(z) \in [\rho(r), p]$.

2) Нехай N – замкнена множина в $[\rho(r), p]$, не співпадаюча з $[\rho(r), p]$, і $f_0(z) \in [\rho(r), p]$ – функція, що не належить N . Тоді існує функціонал $l(f)$, такий, що $l(f) = 0$ для всіх $(z) \in N$ і $l(f_0) \neq 0$.

Нехай $\rho(r)$ – уточнений порядок, $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho \geq 0$. Однозначна функція $f(z)$ комплексної змінної z належить простору $[\rho(r), \infty)$, якщо $f(z)$ має порядок менше, ніж $\rho(r)$ або рівний $\rho(r)$, але в цьому вмпадку тип менший, ніж ∞ .

Послідовність функцій $\{f_n(z)\}$ із $[\rho(r), \infty)$ збігається в сенсі $[\rho(r), \infty)$, якщо (i) вона сходиться рівномірна на компактах, (ii) існує $\beta < \infty$ таке, що

$$|f_n(z)| < \exp[\beta V(|z|)], \quad |z| > r_0(\beta)(n \geq 1)\,,$$

де $r_0(\beta)$ не залежить від $n \geq 1$.

При відповідному $C(\beta)$, яке не залежить від n , для всіх z

$$|f_n(z)| < C(\beta)\exp[\beta V(|z|)] \quad (n \geq 1)\,. \tag{0.24}$$

Простір $[\rho(r), \infty)$ – лінійний топологічний простір з секвенціальною топологією.

Як і выще, введемо функцію $\varphi(t)$, яка визначається як єдине рішення рівняння $t = V(r)$. Так,

$$\varphi(V(t)) = t\,. \tag{0.25}$$

Нехай $\rho > 0$. Позначимо

$$d_n = \frac{(e\sigma\rho)^{n/\rho}}{(\varphi(n))^n} \quad n \geq 1, d_0 = 1\,.$$

Для функції $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in [\rho(r), p)$ ми ставимо у відповідність функцію

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad b_n = \frac{c_n}{d_n}(n \geq 0)\,, \tag{0.26}$$

яка аналітична, принаймні, в крузі $|z| < 1$. Функція співставлення $f(z)$ із $[\rho(r), p]$ функції $F(z)$, как описано выще, позначається наступним чином:

$$f(z) \sim F(z)\,.$$

Нижче наш головний результат.

Теорема 56. *Неперервний лінійний функціонал* l *у просторі* $[\rho(r), \infty)$ *має вигляд*

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,, \tag{0.27}$$

де величини a_n *задовільняють нерівність*

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} = 0\,. \tag{0.28}$$

Доведемо тепер теорему . Нехай $l(f)$ – неперервний лінійний функціонал у просторі $[\rho(r), \infty)$. Позначимо $l(z^n) = a_n$ ($n \geq 0$). Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – функція в $[\rho(r), \infty)$. Так як ряд збігається в сенсі $[\rho(r), \infty)$, то, в силу неперервності функціоналу,

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n l(z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n\,.$$

Отже

$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\,. \tag{0.29}$$

Візьмемо довільне скінченне число $p > 0$. Функционал $l(f)$ – це, зокрема, лінійний неперервний функціонал в просторі $[\rho(r), p]$. Згідно теоремі

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} < (ep\rho)^{-1/\rho}\,.$$

Так як p – довільне число, то

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} = 0\,.$$

Перевіримо тепер, що якщо виконується умова (0.28), то функціонал (0.29) є неперервним лінійним функціоналом у просторі $[\rho(r), \infty)$.

Нехай

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in [\rho(r), \infty).$$

Згідно теоремі , $\limsup\limits_{n\to\infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} = (e\sigma_f \rho)^{1/\rho} < \infty$. Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \varphi(n) \sqrt[n]{|c_n|} \limsup_{n\to\infty} \varphi^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} = 0\,,$$

і тоді ряд (0.29) збігається.

Нехай $\{f_k(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n\} \subset [\rho(r), \infty)$, $f_k(z) \to f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, якщо $k \to \infty$ і нехай l задовільняє умову (0.28). Із (0.34), існує $\beta > 0$ таке, що $\{\{f_k(z)\}, f(z)\} \subset [\rho(r), \beta]$ і $f_k(z) \to f(z)$, якщо $k \to \infty$ у сенсі $[\rho(r), \beta]$. Із (0.28) і (0.27) l є неперервним лінійним функціоналом у просторі $[\rho(r), \beta]$. Тоді $l(f_k) \to l(f)$, якщо $k \to \infty$. Отже l – неперервний лінійний фукціонал у просторі $[\rho(r), \infty)$.

Розглянемо тепер простір цілих функцій $E_{\rho(r)}$, які мают уточнений порядок менший $\rho(r)$. Уточнений порядок $\rho_1(r)$ буде менший ніж $\rho(r)$, якщо $0 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$.

Ціла функція $f(z)$ комплексної змінної z належить простору $E_{\rho(r)}$, якщо $f(z)$ має порядок менший $\rho(r)$.

Послідовність функцій $\{f_n(z)\}$ із $E_{\rho(r)}$ збігається в сенсі $E_{\rho(r)}$, якщо (i) вона збігається рівномірно на компактах, (ii) існує уточнений порядок $\rho_1(r)$, $0 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, такий що

$$|f_n(z)| < \exp[V_1(|z|)], \quad |z| > r_0(\beta)(n \geq 1)\,, \tag{0.30}$$

де $r_0(\beta)$ не залежить від $n \geq 1$, $V_1(r) = r^{\rho_1(r)}$.

Простір $E_{\rho(r)}$ – це лінійний топологічний простір з секвенціальною топологією.

Неперервний лінійний функціонал $l(f)$ у просторі $E_{\rho(r)}$ має вигляд (0.27).

Знайдемо умови, яким задовільняють значення a_n . Функціонал $l(f)$ є, зокрема, лінійним неперервним функціоналом у просторі $[\rho_1(r), \infty)$ для всіх уточнених порядків $\rho_1(r)$, $0 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho_1(r) = \rho_1 < \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$.

Тому, за теоремою
$$\limsup_{n\to\infty} \varphi_1^{-1}(n) \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \,, \tag{0.31}$$
де $\varphi_1(t)$ визначається як єдине рішення рівняння $t = V_1(r)$. Звідси
$$\frac{\log |a_n|}{\varphi_1(n)n} < 1, \quad n > n_0 \,.$$

Покладемо $\rho_1(r)$ – довільне число, менше за $\rho(r)$, і таке, що
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{\varphi(n)n} \le 1 \,. \tag{0.32}$$
Навпаки, нехай умова (0.32) виконується і $\rho_1(r)$ – довільне число, менше ніж $\rho(r)$. Тоді $\varphi_1(n) > \varphi(n)$, $n > n_0$, таке що
$$\frac{\log |a_n|}{\varphi_1(n)n} < 1, \quad n > n_0 \,,$$

Тому умова (0.31) виконується і $l(f)$ – неперервний лінійний функціонал у просторі $[\rho(r), \infty)$. Тоді $\rho_1(r)$ - довільне число, менше за $\rho(r)$, и $l(f)$ - неперервний лінійний функціонал у просторі $E_{\rho(r)}$.

Теорема 57. *Неперервний лінійний функціонал* l *у просторі* $E_{\rho(r)}$ *має вигляд*
$$l(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n c_n, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,,$$
де величини a_n *задовільняють умову*
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\log |a_n|}{\varphi(n)n} \le 1 \,.$$

Зауваження. Простори цілих функцій $[\rho(r), \sigma]$ уточненого порядку $\rho(r)$, типу менше або що дорівнюють σ і простори цілих фунцій $[\rho(r), \sigma)$ уточненого порядку $\rho(r)$, типу меншего σ розглядались у роботах [65], [66], [67].

6 Локально опуклі простори цілих функцій нульового порядку, застосування до інтерполції

Нехай $f(z)$ – ціла функція, $M(f,r)=\max\limits_{\varphi}|f(re^{i\varphi})|$. Через $[\rho,\infty]$ позначимо клас цілих функцій, порядок яких не перевищує ρ , $\rho\geqslant 0$, тобто таких. що

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+ M(f,r)}{\ln r}\leqslant\rho\,. \qquad (0.33)$$

Зокрема через $\mathcal{E}_0$ позначимо клас цілих функцій нульового порядку ($\rho=0$). Введемо наступне означення Послідовність функцій $\{f_n(z)\}$ із класу $\mathcal{E}_0$ збігається у сенсі $\mathcal{E}_0$, якщо: (i) вона рівномірно збігається на компактах, (ii) для будь-якого $\varepsilon>0$ виконується нерівність

$$|f_n(z)|<\exp[|z|^{\varepsilon}],\quad |z|>r_0(\varepsilon)(n\geq 1)\,,$$

де $r_0(\varepsilon)$ не залежить від $n\geq 1$.

При відповідному $C(\varepsilon)$, яке не залежить від n , при всіх z

$$|f_n(z)|<C(\varepsilon)\exp[|z|^{\varepsilon}]\quad (n\geq 1)\,. \qquad (0.34)$$

Клас $\mathcal{E}_0$ є лінійним топологічним простором з секвенціальною топологією.

Через $C(a,r)$ будемо позначати відкритий, а через $B(a,r)$ — замкнений круг радіуса r с центром в точці a .

Нехай $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множина різних комплексних чисел $\{a_n=r_ne^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$. По A визначимо міру: $n_A(G)=\sum_{a_n\in G}1$. Якщо це не буде викликати непорозумінь, то індекс A будемо опускати. Множину коренів довільної функції f будемо позначати через A_f . Позначимо через $n_f=n_{A_f}$, $n_{f,a}(r)=n_f(C(a,r))$, $n_{A,a}(r)=n_A(C(a,r))$. Зокрема, покладемо $n_f(r)=n_{f,0}(r)$, $n_A(r)=n_{A,0}(r)$.

Нерівність (0.56) призводить до розумності введення наступного визначення.

Послідовність $A=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называється *интерполяційною* в класі $[\rho,\infty]$, якщо для будь-якій послідовності комплексних чисел b_n , $n\in\mathbb{N}$, які задовільняють умову

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|}\leqslant\rho\,, \tag{0.35}$$

Існує функція $F\in[\rho,\infty]$ з властивістю

$$F(a_n)=b_n,\quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{0.36}$$

Задача (0.36) в класі $[\rho,\infty]$ у випадку коли $\rho>0$ вперше розглядалась О. Ф. Леонтьєвим [46]. Ним були знайдені критерії її розв'язання в термінах канонічних добутків, які визначаються послідовністю A . Пізніше К. Г. Малютин [51], виходячи з результатів О. Ф. Леонтьєва, знайшов критерії можливості розв'язання задачі (0.36) в термінах міри, яка визначається послідовністю A . В роботі К. Г. Малютин і О. А. Боженко розглянули задачу кратной інтерполяції в класі $\mathcal{E}_0$. В даній роботі ми розглядаємо задачу вільної інтерполяції і знаходимо критерії можливості розв'язання задачі (0.36) в класі $\mathcal{E}_0$, розглядаючи його як проективну границю нормованих просторів, як в термінах канонічних добутків, що визначаються послідовністю A , так і в термінах міри, що визначається вузлами інтерполяції. При цьому останні критерії відрізняються від критеріїв, отриманих раніше К. Г. Малютиним і О. А. Боженко.

Ми додатково припускаємо, що виконується нерівність $|a_1|>0$. Це спрощує доведення і формуліровки деяких тверджень, однак, не обмежує спільності наших міркувань. По ходу роботи ми робимо зауваження, що послідовності A і $A\cup\{0\}$ є одночасно інтерполяційними.

Нехай $\rho(r)$ – уточненый порядок [52], $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho\geqslant 0$. Якщо $\rho=0$, то уточнений порядок $\rho(r)$ называється нульовым уточненим порядком. За заданною послідовністю A і уточненому порядку $\rho(r)$ визначимо сімейства функцій

$$\Phi_A(z,\alpha)=\frac{(n_A(C(z,\alpha|z|))-1)^+}{|z|^{\rho(|z|)}}\,.$$

Наведемо формулу Пуассона для субгармонійної функції v і круга $B(z,R)$, на яку будемо посилатися в нашій роботі:

$$v(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v(z+Re^{i\varphi})\,d\varphi-\int\limits_0^R\frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt\,. \tag{0.37}$$

Тут μ_v – ріссовська міра функції v. У випадку, якщо $f(z)$ – ціла функція, a – простий корінь функції f, $v(z) = \ln\left|\frac{f(z)}{(z-a)}\right|$, то формула Пуассона (0.37) для круга $B(a,R)$ набуває вигляду:

$$\ln|f'(a)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(a+Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{n_f(B(a,t))-1}{t}\,dt - \ln R\,. \quad (0.38)$$

Нехай $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність. Позначимо через

$$E_A(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

Функція $E_A(z)$ називається канонічною функцією послудовності A.

Основним результатом нашої роботи є наступна теорема. Нагадаємо, ми вважаємо, що виконується умова $|a_1| > 0$. Крім того, як завжди, $b^+ = \max\{b;0\}$.

Теорема 58. *Наступня три твердження еквівалентні* :

(1) *последовательність* A *є інтерполяційною в класі* $\mathcal{E}_0$;

(2) *для будь якого* $\varepsilon > 0$ *виконується співвідношення* :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}} < \infty\,, \quad (0.39)$$

і канонічна функція $E_A(z)$ *послідовності* A *задовільняє умову* :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln^+\frac{1}{|E'_D(a_n)|} \leqslant 0\,. \quad (0.40)$$

(3) *Виконується співвідношення* (0.39) *і* (3.1) *існує нульовий уточнений порядок* $\rho(r)$ *такий, що*

$$\Phi_A(z,\alpha) \leqslant \frac{1}{\log\frac{1}{\alpha}}\,. \quad (0.41)$$

Розглянемо послідовність $\mathcal{E}_n^*$ просторів цілих функцій, для яких норма

$$\|f\| = \sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{\exp(|z|^{1/n})} < \infty\,.$$

Зрозуміло, $\mathcal{E}^*_{n_2} \subset \mathcal{E}^*_{n_1}$, якщо $n_2 > n_1$. Позначимо через $\mathcal{E}^*_0$ проективну границю просторів $\mathcal{E}^*_n$.

Теорема 59. *Простори* $\mathcal{E}^*_0$ *і* $\mathcal{E}_0$ *співпадають.*

Доведення. Із роботы [53] виплиає, що простір $\mathcal{E}^*_0$ є локально опуклим простором з секвенціальною топологією. При цьому послідовність функцій $\{f_n(z)\}$ із $\mathcal{E}^*_0$ збігається в сенсі $\{f_n(z)\}$, якщо вона при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ збігається в просторі $\mathcal{E}^*_n$. Звідси випливає, що послідовність $\{f_n(z)\}$ збігається і в просторі $\mathcal{E}_0$. Очевидно, обернене, якщо послідовність $\{f_n(z)\}$ збігається і в просторі $\mathcal{E}_0$, то вона збігається і в будь-якому просторі $\mathcal{E}^*_n$, а, значить, и в просторі $\mathcal{E}^*_0$.

Теорема доведена.

Доведемо допоміжні твердження.

Теорема 60. *Нехай* A *– интерполяційна послідовність в класі* $\mathcal{E}_0$. *Тоді виконуетьса співвідношення* (0.39)

Доведення. Нехай f – ціла функція з класу $\mathcal{E}_0$, яка розв'язує інтерполяційну задачу: $f(a_1) = 1$, $f(a_n) = 0$ при $n \geqslant 2$. За припущенням теореми така функція існує. Запишемо формулу (0.37) для функції $v(z) = \ln|f(z)|$ і круга $B(a_1, R)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(a_1 + Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\,dt\,.$$

Далі отримуєм, що нерівність

$$\int\limits_0^R \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant \int\limits_0^R \frac{n_f(B(a_1,t))}{t}\,dt \leqslant K_\varepsilon R^\varepsilon\,, \quad K_\varepsilon > 0\,,$$

виконується при будь-якому фіксованому $\varepsilon > 0$ для всіх $R > R_\varepsilon$. Звідси випливає нерівність:

$$n(R) \leqslant \int\limits_R^{eR} \frac{n(t)}{t}\,dt \leqslant K_\varepsilon R^\varepsilon. \tag{0.42}$$

Оскільки остання нерівність виконується при будь-якому фіксованому $\varepsilon > 0$, то із неї випливає співвідношення:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{n(R)}{R^\varepsilon} = 0, \quad \varepsilon > 0\,. \tag{0.43}$$

Тоді , використовуючи нерівність (0.42) з $\varepsilon/2$ ы спывідношення (0.43), отримаємо :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\varepsilon} = \int\limits_0^\infty \frac{dn(t)}{t^\varepsilon} = \varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{n(t)}{t^{1+\varepsilon}}\,dt \leqslant \varepsilon K_\varepsilon \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t^{1+\varepsilon/2}} < \infty\,.$$

Теорема доведено.

Теорема 61. *Нехай* A *– інтерполяційна послідовність в класі* $\mathcal{E}_0$. *Тоді канонічна функція* $E_A(z)$ *належить класу* $\mathcal{E}_0$.

Доведення. Нехай A – інтерполяційна послідовність у класі $\mathcal{E}_0$, а $E(z)$ – його канонічна функція . Із рівності (0.43) випливає , що $E(z)$ – ціла функція . Крім того,справедлива нерівність

$$\ln|E(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{r}{|a_n|}\right) = \int\limits_0^\infty \ln\left(1+\frac{r}{t}\right)\, dn(t) = \int\limits_0^\infty \frac{rn(t)}{(t+r)t}\,dt\,,$$

із якої випливає,що $E \in \mathcal{E}_0$.

Теорема доведено .

Тут і надалі використовується позначення $|z| = r$.

Імплікація 1) $\Rightarrow$ (0.39) доведена в теоремі 2. Доведемо імплікацію 1) $\Rightarrow$ (0.41) . Спочатку доведемо ,що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln r_n} \ln^+ \int\limits_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n,t)) - 1)^+}{t}\,dt = 0\,. \tag{0.44}$$

Якщо це не так , то існують послідовність $n_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$ і число $\varepsilon_0 > 0$ такі, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_{n_k}|} \ln^+ \int\limits_0^{|a_n|/2} \frac{(n(B(a_{n_k},t)) - 1)^+}{t}\,dt \geqslant \varepsilon_0\,, \quad k = 1,2,\ldots\,. \tag{0.45}$$

Додатково можна вважати , що виконується нерівність $|a_{n_{k+1}}| > 4|a_{n_k}|$, $k = 1, 2, \dots$. Нехай $f(z)$ – функція із класу $\mathcal{E}_0$, яка вирішує інтерполяційну задачу $f(a_{n_k}) = 1$, $k = 1, 2, \dots$, $f(a_n) = 0$, якщо $n \neq n_k$. За умовою теореми така функція існує. Запишемо формулу (0.37) для функції $v(z) = \ln|f(z)|$ і круга $B(a_{n_k}, \frac{1}{2}|a_{n_k}|)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{n_f(B(a_{n_k}, t))}{t}\, dt\,.$$

При $t \in \left[0, \frac{1}{2}|a_{n_k}|\right]$ справедлива нерівність $n_f(B(a_{n_k}, t)) \geqslant n(B(a_{n_k}, t)) - 1$. Тому

$$\int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(n(B(a_{n_k}, t)) - 1)^+}{t}\, dt \leqslant \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{n_f(B(a_{n_k}, t))}{t}\, dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(a_{n_k} + \frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\,.$$

Отримана нерівність, співвідношення $f \in \mathcal{E}_0$ і нерівність (0.45) в сукупності суперечать один одному. Тим самим, рівність (0.44) доведено.

Із рівності (0.39) випливає, що

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \int\limits_{|a_n|/2}^{|a_n|} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t}\, dt = 0\,.$$

Разом з рівністю (0.44) це дає

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \int\limits_0^{|a_n|} \frac{(n(B(a_n, t)) - 1)^+}{t}\, dt = 0\,. \qquad (0.46)$$

Нехай z – довільне комплексне число і $a = a(z)$ – найближча до z точка послідовності $\{a_n\}$. Позначимо через F_1 множину тих z , для яких виконується нерівність $|z - a| > \frac{1}{2}|z|$. Із умови (0.39) легко випливає, що

$$\limsup_{\substack{z\to\infty \\ z\in F_1}} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int\limits_0^r \frac{(n(B(z, t)) - 1)^+}{t}\, dt = 0\,.$$

Тому в подальшому доведенні можна вважати , що виконується нерівність $|z-a| \leqslant \dfrac{1}{2}|z|$.

Далі маємо

$$\int\limits_0^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt = \int\limits_{|z-a|}^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt \leqslant$$

$$\int\limits_{|z-a|}^r \frac{(n(B(a,t+|z-a|))-1)^+}{t}\,dt =$$

$$\int\limits_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u))-1)^+}{u-|z-a|}\,du \leqslant 2 \int\limits_0^{r+|z-a|} \frac{(n(B(a,u))-1)^+}{u}\,du\,.$$

Із наведених міркувань, рівності (0.44) тепер випливає , що

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln r} \ln^+ \int\limits_0^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt = 0\,.$$

Звідси випливає , що існує нульовий уточнений порядок $\rho(r)$ такий , що

$$\int\limits_0^r \frac{(n(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt \leq V(r)\,.$$

Зробивши заміну змінної $t=\alpha r$ в підінтегральному виразі останньої рівності і розділивши обидві частини на $V(r)$, отримаємо співвідношення

$$\int\limits_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \leqslant 1\,. \tag{0.47}$$

Нерівність (0.41) випливає тоді із ланцюжка нерівностей

$$1 \geqslant \int\limits_0^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \geqslant \int\limits_\delta^1 \frac{\Phi_A(z,\alpha)}{\alpha}\,d\alpha \geqslant \Phi_A(z,\delta)\ln\frac{1}{\delta}\,.$$

Імплікація $1) \Rightarrow 3)$ доведена.

Нехай виконується умови (0.41) і (0.39). Для довільної точки $a_n \in A$ оцінимо довжину $|a_n - a|$, де $a \in A$ найближча точка до a_n із послідовності A. Точніше, оцінимо $\alpha_n = \dfrac{|a_n - a|}{|a_n|}$. Помітивши, що $(n(B(a_n,\alpha_n)) - 1)^+ \geqslant 1$ і скориставшись нерівністю (0.41), отримаємо

$$\frac{1}{V(r_n)} \leqslant \Phi_A(a_n,\alpha_n) \leqslant \ln\frac{1}{\alpha_n}\,.$$

Звідси випливає оцінка

$$\alpha_n \geqslant \exp[-V(|a_n|)]\,.$$

Знову застосовуючи нерівність (0.41) і оцінку для α_n, отримаємо

$$\int\limits_0^{r_n/2} \frac{(n(B(a_n,t)) - 1)^+}{t}\,dt \leqslant V(r_n) \int\limits_{\exp[-V(|a_n|)]}^{1/2} \frac{1}{t\ln(1/t)}\,dt =$$

$$V(r_n)(\rho(r_n)\ln r_n - \ln\ln 2)\,.$$

Звідси випливає співвідношення (0.44). Дослівно повторюючи міркування, викладені вище, отримємо справедливість оцінки (0.47).

Напишемо рівність (0.38) для функції $E(z)$ і круга $B(a_n,R)$:

$$\begin{gathered}\ln|E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|E(a_n + Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \\ \int\limits_0^R \frac{n(B(a_n,t)) - 1}{t}\,dt - \ln R\,.\end{gathered} \tag{0.48}$$

Рівність (0.48) можна переписати у вигляді:

$$\begin{gathered}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\frac{1}{|E(a_n + Re^{i\varphi})|}\,d\varphi + \\ \int\limits_0^R \frac{n(B(a_n,t)) - 1}{t}\,dt + \ln R\,.\end{gathered} \tag{0.49}$$

Далі ми скористуємся наступною теоремою.

Теорема С. *Нехай* $f(z)$ *голоморфна в крузі* $B(0,2eR)$ $(R > 0)$, $f(0) = 1$ *і* η – *довільне додатне число*, *що не перевищуюче* $\dfrac{3}{2}e$.

Тоді всередині круга $B(0,R)$, *але зовні виняткових кругів з загальною сумою радіусів , що не перевищує* $4R\eta$, *виконується нерівність*

$$\ln|f(z)| \geqslant -\left(2+\ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(f,2eR)\,.$$

Це теорема 11 з [52, Глава I, §8].

Оскільки $E \in \mathcal{E}_0$, то для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує r_ε таке ,що при $r > r_\varepsilon$ виконується нерівність :

$$\ln|E(z)| \leqslant r^\varepsilon\,.$$

Із цієї нерівності і теореми С, застосованої до функції $E(z)$ і круга $B(0,3e|a_n|)$, випливає , що існують номер N_ε і число $R_1 \in \left[\frac{1}{2}|a_n|,|a_n|\right]$ такі, що для всіх φ і $n > N_\varepsilon$ буде виконуватися нерівність

$$\ln\frac{1}{|E(a_n+R_1e^{i\varphi})|} \leqslant r_n^\varepsilon\,.$$

Вибираючи в рівності (0.49) $R = R_1$, отримаємо доведення імплікації (0.45) $\Rightarrow$ (0.44) .

Тим самим імплікація 3) $\Rightarrow$ 2) доведена.

Позначимо

$$P_n(z) = \frac{1}{E'(a_n)}\frac{b_n}{z-a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{S_n}, n \in \mathbb{N} \tag{0.50}$$

де $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ – послідовність натуральних чисел, яку ми виберемо нижче. Замітемо, що формальний ряд

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{\infty}P_n(z) \tag{0.51}$$

вирішуєє інтерполяційну задачу (0.36).

Покажемо, що при відповідному виборі послідовності $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ функція $F \in \mathcal{E}_0$.

Із умов (0.35) і (0.40) отримуємо , що існує послідовність $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$, така, що при всіх $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{b_n}{E'(a_n)}\right| \leqslant \exp(r_n^{\varepsilon_n})\,. \tag{0.52}$$

Крім того, в силу умови (0.39), можна вважати , що збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-r_n^{\varepsilon_n})\,. \tag{0.53}$$

Позначимо $u_n(z) = \dfrac{1}{z-a_n}\left(\dfrac{z}{a_n}\right)^{S_n}$, $n \in \mathbb{N}$, і оцінимо при $z \notin C(a_n, 1)$,

$$|u_n(z)| \leqslant \frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Звідси, з урахування означення (0.50) функції $P_n(z)$ і (0.52), отримаємо

$$|P_n(z)| \leqslant \left|\frac{b_n}{E'(a_n)}\right| |u_n(z)| \leqslant \exp(r_n^{\varepsilon_n})\frac{|z|^{S_n}}{r_n^{S_n}} = \left(\frac{e^2|z|}{r_n}\right)^{S_n} \frac{\exp(r_n^{\varepsilon_n})}{e^{2S_n}} \tag{0.54}$$

при $z \notin C(a_n, 1)$.

Покладемо $S_n = [2r_n^{\varepsilon_n}] + 1$, $n \in \mathbb{N}$, де $[\cdot]$ – ціла частина числа. Тоді із (0.54) отримаємо

$$|P_n(z)| \leqslant \exp(-r_n^{\varepsilon_n}) \left(\frac{e^2|z|}{r_n}\right)^{2r_n^{\varepsilon_n}}\,. \tag{0.55}$$

Нехай $N = N(r)$ – найменше ціле число, що має властивість $|a_n| \geqslant e^2 r$, якщо $n > N$, N_0 – фіксоване число таке, що $|a_{n_0}| \geqslant 1$. Функцію $F(z)$ представимо у вигляді суми :

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{N_0-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N_0}^{N-1} P_n(z) + E(z)\sum_{n=N}^{\infty} P_n(z) =$$

$$F_1(z) + F_2(z) + F_3(z)\,.$$

Розглянемо доданок $F_3(z)$. Із умови (0.53) і нерівності (0.55) випливає, що $\sum\limits_{n=N}^{\infty} P_n(z) \leqslant C$, де C – деяка константа.

Розглянемо $F_2(z)$. Так як $|a_{n_0}| \geqslant 1$ при $n \geqslant N_0$, то в силу нерівності (0.55) буде справедлива оцінка

$$|P_n(z)| \leqslant \exp(-r_n^{\varepsilon_n})(er)^{4r_n^{\varepsilon_n}}\,.$$

Враховуючи отриману оцінку, одержимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ при $r > R(\varepsilon)$ має місце $|F_2(z)| < r^{\varepsilon}$. Оскільки в представленні $F_1(z)$

сума містить скінченне число доданків, то із отриманих оцінок випливає, що $F(z) \in \mathcal{E}_0$.

Теорема повністю доведена .

В завершення покажемо, що якщо послідовність A , $|a_1| > 0$, є інтерполяційною в класі $\mathcal{E}_0$, то і послідовність $A_0 = D \cup \{0\}$ також є інтерполяційною в цьому класі. Дійсно, розглянемо інтерполяційну задачу (0.36) для послідовності A_0 . Нехай $f \in \mathcal{E}_0$ – рішення інтерполяційної задачі (0.36) для послідовності A . Тоді функція

$$f_1(z) = f(z) + \frac{E_A(z)}{E_A(0)}[b_0 - f(0)],$$

належить классу $\mathcal{E}_0$ і є рішенням поставленої інтерполяційної задачі. Тим самим , обмеження $a_1 \neq 0$ не є суттєвим.

Аналогічно доводиться наступна теорема.

Теорема 62. *Нехай* $\{a_n\}$ *– допустима послідовність. Наступні 3 твердження еквівалентні* :

1) *для бідь-якої послідовності чисел* $\{b_n\}$, *що задовольняє умову*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ |b_n|}{\ln |a_n|} \leqslant 0.$$

існує функція $f(z)$ *із класу* $\mathcal{E}_0$, *з властивістю* (1).

2) *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *виконується співвідношення* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}} < \infty \,, \tag{2}$$

і канонічна функція $E_A(z)$ *послідовності* $\{a_n\}$ *задовольняє умову* :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln |a_n|} \ln^+ \ln \frac{1}{|E'_A(a_n)|} \leqslant 0 \,.$$

3) *Виконується співвідношення (2) і*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln |z|} \ln^+ \int\limits_0^1 \frac{\Phi^*_A(z,\alpha)}{\alpha}\, d\alpha = 0 \,.$$

7 Интерполяція в класах цілих функцій нульового порядку и нормального типу

Введемо необхідні означення. Абсолютно неперервна функція $\rho(r)$ на півоісі $(0,+\infty)$ називається уточненим порядком, якщо виконується умова: 1) $\lim\limits_{r\to\infty}\rho(r)=\rho$, 2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r=0$,

де під $\rho'(r)$ мають на увазі найбільше за модулем похідне число. Детально викладення властивостей уточннечого порядку можна знайти в роботах [52, 49]. Використовується позначення $V(r)=r^{\rho(r)}$. Додатково ми припускаємо, що $V(r)\equiv 1$ при $r\in[0,1]$. Це зроблено для того, щоб не вводити додаткову функцію

$$V_1(r)=\begin{cases} V(r), & r>1,\\ 1, & r\in[0,1].\end{cases}$$

Наведемо найбільш часто цитуєму властивість уточненого порядку. Вона полягає в тому, що

$$\lim_{r\to\infty}\frac{V(rt)}{V(r)}=t^{\rho},\quad t>0\,, \tag{0.56}$$

і ця границя рівномірна на будь-якому сегменті $[a,b]\subset(0,+\infty)$. У випадку, якщо число ρ в означенні уточненого порядку дорівнює нулю, то уточненого порядок $\rho(r)$ називається нульовим уточненим порядком.

Нехай $f(z)$ – ціла функція, $M(f,r)=\max\limits_{\varphi}|f(re^{i\varphi})|$. Символом $[\rho(r),\infty)$ ми будимо позначати класс цілих функцій f , для яких виконується нерівність:

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln M(f,r)}{V(r)}<\infty\,.$$

Нехай $A=\{a_n : n=1,2,\dots\}$ – така послідовність комплексних чисел, що виконується співвідношення: $0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\dots$, $a_n\neq a_k$ при $n\neq k$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

Такі послідовності ми в подальшому будимо називати допустимими.

Дослідження розв'язності задачі

$$f(a_n)=b_n,\quad n=1,2,\dots\,, \tag{0.57}$$

в класі $[\rho(r),\infty)$ при єдиному обмеженні

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\ln^+|b_n|}{V(|a_n|)}<\infty \tag{0.58}$$

тепер називають задачею вільної простої інтерполяції в класі $[\rho(r),\infty)$. Цей термін ввів О.Ф. Леонтьєв.

Послідовність a_n називається інтерполяційною в класі $[\rho(r),\infty)$, якщо задача (0.57) має розв'язок в класі $[\rho(r),\infty)$ для будь-якої послідовності чисел b_n , що задовольняють умову (0.58) .

В основному тексті ми додатково припускаємо, що виконується нерівність $|a_1|>0$. Це спрощує доведення і формулювання деяких тверджень, однак, не обмежую спільності наших міркувань. По ходу ми робимо зауваження, що послідовності $a_1,a_2,\ldots$ і $0,a_1,a_2,\ldots$ є одночасно інтерполяційними. В принципі, на нульовий уточнений порядок $\rho(r)$ ми не накладаємо ніяких обмежень. Однак, в основному тексті ми допускаємо, що виконується додаткова умова

$$\sigma=\varliminf_{r\to\infty}\frac{V(r)}{\ln r}=\infty\,. \tag{0.59}$$

Справа в тому, що у випадку, якщо $\sigma<\infty$, то клас $[\rho(r),\infty)$ складається із поліномів $P(z)$ таких, що $\deg P\leqslant\sigma$. Цей випадок нецікавий для теорії.

Знаходяться чотири різних необхідних умови, для того щоб послідовність a_n була інтерполяційною у класі $[\rho(r),\infty)$. Виділяються два різних набори, кожен із яких складається з трьох умов, що зазначені вище. Доводиться, що виконання усіх трьох умов із кожного набору є достатньою для того, щоб послідовність a_n біла інтерполяційною в класі $[\rho(r),\infty)$.

З кожною послідовністю a_n ми пов'язуємо наступну міру в комплексній площині $\mathbb{C}$:

$$\mu(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\delta(z-a_n)\,, \tag{0.60}$$

де $\delta(z-a_n)$ – міра Дирака, тобто є одинична міра, зосереджена в точці a_n . Ми будимо використовувати наступні позначення:

$$C(z,t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-z|<t\},\quad B(z,t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-z|\leqslant t\}\,.$$

Функція $n(t)=\mu(B(0,t))$ називається лічільною функцією послідовності a_n, а функція $N(t)=\int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\,dx$ називається неванліннов-ською лічільною функцією послідовності a_n.

В цьому означені важлива умова $|a_1|>0$. В супротивному випадку функція $N(t)$ визначається більш складним чином:

$$N(t)=m\ln t+\int\limits_0^t \frac{n(x)-m}{x}\,dx\,,$$

де m – кратність нуля в послідовності $\{a_n\}$.

Під час роботи нам доведеться зустрічатися ще з такими об'єктами. Нехай $f(z)$ – ціла функція і нехай $\{z_n, n=1,2,\dots\}$ – множина коренів цієї функції, перенумерованих в порядку зростання їх модулів. З цілою функцією f позв'язана наступна міра μ_f в комплексній площині $\mathbb{C}$:

$$\mu_f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} m(z_n)\delta(z-z_n)\,,$$

де $m(z_n)$ – кратність кореня z_n. Функція $n_f(t)=\mu_f(B(0,t))$ називається лічільною функцією коренів функції f, а функція

$$N_f(t)=m(0)\ln t+\int\limits_0^t \frac{n_f(x)-m(0)}{x}\,dx$$

називається неванлінновською лічільною функцією коренів функції f.

Зауважимо, що міра μ_f є ріссовською мірою субгармонійної функції $v(z)=\ln|f(z)|$. Розглянемо більш детально результати роботи [54]. Ми вже указували на зв'язок нашого дослідження з цією роботою. В роботі [54] досліджується розв'язність задачі кратної інтерполяції в класах $[\rho(r),\infty)$, причому розглядається випадок $\rho\geqslant 0$. Автори роботи [54] відодокремлюють випадок $\rho=0$ і помічають, що в їх роботі вперше розглядається інтерполяційна задача в класі цілих функцій нульового порядку.

Сформулюємо окремий випадок теореми 5 із [54], який відповідає задачі простої інтерполяції для $\rho=0$.

Теорема А. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок такий, що функція* $V(r)$ *є логарифмічно опуклою, причому* ${}_{r\to\infty} rV'(r) > 0$, *а функція* $\dfrac{V(r)}{rV'(r)}$ *є зростаючою (не обов'язково строго) і необмеженою на промені* $[r_0,\infty)$ *. Для того, щоб послідовність* $\{a_n\}$ *була інтерполяційною в класі* $[\rho(r),\infty)$, *необхідно й досить, щоб виконувались умови* :

1) $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{n(r)}{rV'(r)} = 0$,

2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{V(|a_n|)} \ln \dfrac{1}{|\Phi_n^\delta(a_n)|} < \infty$, *для будь-якого фіксованого* $\delta \in (0,1)$,

де

$$\Phi_n^\delta(z) = \prod_{0<|a_n-a_k|<\delta|a_n|} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right).$$

Замітимо, що формуліровка теореми А потребує уточнення. В наведенній формуліровці вона невірна. Про це говориться в зауваженні до теореми 8.

Наведемо формулу Пуассона для субгармонійної функції v і круга $B(z,R)$, на яку часто будемо посилатися в нашій роботі:

$$v(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z+Re^{i\varphi})\,d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt\,. \qquad (0.61)$$

Тут μ_v – рісовська міра функції v .

У випадку, якщо $f(z)$ – ціла функція, a – простий корень функції f , $v(z) = \ln\left|\dfrac{f(z)}{z-a}\right|$, то формула Пуассона (0.61) для кругаа $B(a,R)$ набуває вигляду:

$$\ln|f'(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|f(a+Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int_0^R \frac{\mu_f(B(a,t))-1}{t}\,dt - \ln R\,. \quad (0.62)$$

Основним результатом роботи є наступни дві теореми. Нагадаємо, ми вважаємо, що виконуються умови: $|a_1| > 0$ і (0.59). Крім того, зазвичай, $b^+ = \max\{b;0\}$.

Теорема 6. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок, що задовольняє умову* (0.59), a_n *– допустима послідовність. Для того, щоб послідовність* a_n *була інтерполяційною у класі* $[\rho(r), \infty)$, *необхідно й досить, щоб виконувались умови*:

1) $\displaystyle\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty,$

2) $\displaystyle\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{1}{V(r)} \int_0^r \frac{(\mu(B(z,t))-1)^+}{t}\, dt < \infty,$

3) *для будь-якого числа* $M > 0$ *існує ціла функція* $g \in [\rho(r), \infty)$ *така, що для будь-якого* n *в крузі* $B\left(a_n, \dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ *виконується нерівність*:

$$\ln|g(z)| \geqslant MV(|a_n|).$$

Теорема 7. *Пусть* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок, що задовольняє умову* (0.59), a_n *– допустима послідовність. Для того, щоб послідовність.* a_n *була інтерполяційною у класі* $[\rho(r), \infty)$, *необхідно і дость, щоб виконувались умови*:

1) $\displaystyle\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty,$

2) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty,$ *де* $\displaystyle E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right),$

3) *для будь-якого числа* $M > 0$ *існує ціла функція* $g \in [\rho(r), \infty)$ *така, що для будь-якого* n *в крузі* $B\left(a_n, \dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ *виконується нерівність*:

$$\ln|g(z)| \geqslant MV(|a_n|).$$

Відмітимо, що у випадку, коли $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho > 0$ у теоремах, аналогічних теоремам 6 і 7 немає аналога умови 3). Однак, ці міркування не поширюються на випадок, коли $\rho = 0$. Тому в теоремах 6 і 7 з'являється специфічна умова 3).

На закінчення розділу ми наводимо теореми 8 - 11, які можна розглядати як приклади на застосування теорем 6 і 7, і які, на наш погляд, мають самостійний інтерес.

Теорема 1. *Пусть* a_n – *інтерполяційна послідовність у класі* $[\rho(r), \infty)$, $N(r)$ – *неванліннівська лічільна функція послідовності* a_n . *Тоді виконується нерівність* :

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty\,. \tag{0.63}$$

Доведення. Нехай f – ціла функція із класу $[\rho(r), \infty)$, яка вирішує інтерполяційну задачу: $f(a_1) = 1$, $f(a_n) = 0$ при $n \geqslant 2$. За припущенням теореми така функція існує. Запишемо формулу (0.61) для функції $v(z) = \ln|f(z)|$ і круга $B(a_1, R)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|f(a_1 + Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \int\limits_0^R \frac{\mu_f(B(a_1,t))}{t}\,dt\,. \tag{0.64}$$

Далі маємо (см. формулу (0.82)):

$$N(R) = \int\limits_0^R \frac{n(t)}{t}\,dt = \int\limits_{|a_1|}^R \frac{dt}{t} + \int\limits_{|a_1|}^R \frac{\mu(B(0,t))-1}{t}\,dt \leqslant$$

$$\ln\frac{R}{|a_1|} + \int\limits_{|a_1|}^R \frac{\mu_f(B(0,t))}{t}\,dt \leqslant \ln\frac{R}{|a_1|} + \int\limits_{|a_1|}^R \frac{\mu_f(B(a_1, t+|a_1|))}{t}\,dt =$$

$$\ln\frac{R}{|a_1|} + \int\limits_{2|a_1|}^{R+|a_1|} \frac{\mu_f(B(a_1,u))}{u-|a_1|}\,du \leqslant \ln\frac{R}{|a_1|} + 2\int\limits_0^{R+|a_1|} \frac{\mu_f(B(a_1,u))}{u}\,du\,.$$

Із отриманої нерівності, формул (0.56), (0.59), (0.64) випливає твердження теореми.

Теорема доведена.

Надалі ми будемо користуватися наступною теоремою.

Теорема B. *Нехай* $\rho(r)$ – *нульовий уточнений порядок* , $\{b_n\}$ – *послідовність комплексних чисел* , $0 \leqslant |b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots$, $n(r)$ – *лічільна функція цієї послідовності* , *а* $N(r)$ – *її неванлиннівська лічільнаа* *функція. Якщо* $\varlimsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{N(r)}{V(r)} < \infty$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{n(r)}{V(r)} = 0\,. \tag{0.65}$$

Доведення. Очевидно, що доведення досить провести для випадку, коли виконується нерівність $|b_1| > 0$. Надалі ми вважаємо, що ця нерівність виконується. Припустимо, що твердження теореми невірно. Тоді існує число $\eta > 0$ і послідовність чисел $r_k \uparrow \infty$ такі, що $n(r_k) > \eta V(r_k)$. Нехай $r > r_k$. Тоді

$$N(r) \geqslant \int\limits_{r_k}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt \geqslant \eta V(r_k) \ln \frac{r}{r_k}\,.$$

Зауважимо, що саме тут використовується припущення $|b_1| > 0$. Нехай M таке число, що

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < M\,.$$

Якщо взяти $r = e^{M/\eta} r_k$, то отримаємо

$$N(e^{M/\eta} r_k) \geqslant M V(r_k)\,.$$

Ця нерівність і рівність (0.56) с $\rho = 0$ приводять до протиріччя.

Теорема доведена.

Таким чином, з теорем 1 і B випливає, що якщо a_n – інтерполяційна послідовність у класі $[\rho(r), \infty)$, то виконується рівність (0.65).

Нехай a_n – інтерполяційна послідовність у класі $[\rho(r), \infty)$. Позначимо

$$E(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)\,.$$

З рівності (0.65) випливає, що $E(z)$ – ціла функція. Крім того, справедлива нерівність

$$\ln|E(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{r}{|a_n|}\right) = \int\limits_0^{\infty} \ln\left(1+\frac{r}{t}\right)\, dn(t) = \\ \int\limits_0^{\infty} \frac{rn(t)}{(t+r)t}\, dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{rN(t)}{(t+r)^2}\, dt\,. \tag{0.66}$$

Тут і далі використовується позначення $|z| = r$.

Із нерівностей (0.63), (0.66) і формул (1.53), (1.53 $'$) з [52] випливає, що $E \in [\rho(r), \infty)$.

Тепер зауважимо, що якщо допустима послідовність a_n є інтерполяційною в класі $[\rho(r), \infty)$, то послідовність $0, a_1, a_2, \ldots$, також є інтерполяційною в цьому класі. Дійсно, розглянемо інтерполяційну задачу $f_1(0) = b_0$, $f_1(a_n) = b_n$, де

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{V(|a_n|)} < \infty\,.$$

Нехай $f \in [\rho(r), \infty)$ – розв'язок інтерполяційної задачі $f(a_n) = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді функція

$$f_1(z) = f(z) + (b_0 - f(0))E(z)$$

належить класу $[\rho(r), \infty)$ і є рішенням поставленої інтерполяційної задачі. Тим самим, обмеження $a_1 \neq 0$ не є суттєвим.

Теорема 2. *Нехай послідовність* a_n *є інтерполяційною в класі* $[\rho(r), \infty)$. *Тоді*

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{1}{V(r)} \int\limits_0^{r} \frac{(\mu(B(z,t)) - 1)^+}{t}\, dt < \infty\,. \tag{0.67}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \int\limits_0^{|a_n|/2} \frac{(\mu(B(a_n,t)) - 1)^+}{t}\, dt < \infty\,. \tag{0.68}$$

Якщо це не так, то існує послідовність $n_k \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, така,що

$$\frac{1}{V(|a_{n_k}|)} \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(\mu(B(a_{n_k},t))-1)^+}{t}\,dt \geq k, \quad k=1,2,\dots . \tag{0.69}$$

Додатково можна вважати, що виконується нерівність $|a_{n_{k+1}}| > 4|a_{n_k}|$, $k=1,2,\dots$.

Нехай $f(z)$ – функція із класу $[\rho(r),\infty)$, яка вирішує інтерполяційну задачу $f(a_{n_k})=1$, $k=1,2,\dots$, $f(a_n)=0$, якщо $n \neq n_k$. За умовою теореми така функція існує.

Запишемо формулу (0.61) для функції $v(z) = \ln|f(z)|$ і круга $B(a_{n_k}, \frac{1}{2}|a_{n_k}|)$:

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(a_{n_k}+\frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi}\right)\right|\,d\varphi - \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{\mu_f(B(a_{n_k},t))}{t}\,dt\,.$$

При $t \in \left[0, \frac{1}{2}|a_{n_k}|\right]$ справедлива нерівність $\mu_f(B(a_{n_k},t)) \geqslant \mu(B(a_{n_k},t))-1$. Тому

$$\int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{(\mu(B(a_{n_k},t))-1)^+}{t}\,dt \leqslant \int\limits_0^{|a_{n_k}|/2} \frac{\mu_f(B(a_{n_k},t))}{t}\,dt =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|f\left(a_{n_k}+\frac{1}{2}|a_{n_k}|e^{i\varphi}\right)\right|\,d\varphi\,.$$

Отримана нерівність, співвідношення $f \in [\rho(r),\infty)$ і нерівність (0.69) в сукупності суперечливі. Тим самим, нерівність(0.68) доведено.

З рівності (0.65) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \int\limits_{|a_n|/2}^{|a_n|} \frac{\mu(B(a_n,t))}{t}\,dt = 0\,.$$

Разом з нерівністю (0.68) це дає

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \int\limits_0^{|a_n|} \frac{(\mu(B(a_n,t))-1)^+}{t}\,dt < \infty\,. \tag{0.70}$$

Нехай z – довільне комплексне число і $a = a(z)$ – найближча до z точка послідовності a_n. Позначимо через F_1 множину тих z, для яких виконується нерівність $|z-a| > \dfrac{1}{2}|z|$. З рівності (0.65) легко випливає, що

$$\sup_{z\in F_1} \frac{1}{V(r)} \int\limits_0^r \frac{(\mu(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt < \infty\,.$$

Тому в подальшому доведенні можна вважати, що виконується нерівність $|z-a| \leqslant \dfrac{1}{2}|z|$. Далі маємо

$$\frac{1}{V(r)} \int\limits_0^r \frac{(\mu(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt = \frac{1}{V(r)} \int\limits_{|z-a|}^r \frac{(\mu(B(z,t))-1)^+}{t}\,dt \leqslant$$

$$\frac{1}{V(r)} \int\limits_{|z-a|}^r \frac{(\mu(B(a,t+|z-a|))-1)^+}{t}\,dt =$$

$$\frac{1}{V(r)} \int\limits_{2|z-a|}^{r+|z-a|} \frac{(\mu(B(a,u))-1)^+}{u-|z-a|}\,du \leqslant \frac{2}{V(r)} \int\limits_0^{r+|z-a|} \frac{(\mu(B(a,u))-1)^+}{u}\,du\,.$$

З наведених міркувань випливає твердження теореми.

Теорема доведена.

Теорема 3. *Нехай* a_n *– така допустима послідовність, що виконується нерівність* (0.63) *. Нехай* $E(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$ *. Тоді умова* (0.67) *еквівалентна умові*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln\frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\,. \tag{0.71}$$

Доведення. Нехай виконується умова (0.67). Напишемо рівність (0.62) для функції $E(z)$ і круга $B(a_n,R)$:

$$\begin{aligned}\ln|E'(a_n)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|E(a_n+Re^{i\varphi})|\,d\varphi - \\ \int\limits_0^R \frac{\mu(B(a_n,t))-1}{t}\,dt - \ln R\,.\end{aligned} \tag{0.72}$$

Рівність (0.72) можна переписати у вигляді:

$$\ln\frac{1}{|E'(a_n)|} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{1}{|E(a_n+Re^{i\varphi})|}\,d\varphi + \int\limits_0^R\frac{\mu(B(a_n,t))-1}{t}\,dt + \ln R\,. \tag{0.73}$$

Далі ми скористаємося наступною теоремою.

Теорема C. *Нехай функція* $f(z)$ *голоморфна у крузі* $B(0,2eR)$ $(R>0)$, $f(0)=1$ *і* η *– довільне додатне число , що не перевищує* $\frac{3}{2}e$ *. Тоді в середині круга* $B(0,R)$, *але поза винятковими кругами із загальною сумою радіусів , що не перевищує* $4R\eta$, *виконується нерівність*

$$\ln|f(z)| \geqslant -\left(2+\ln\frac{3e}{2\eta}\right)\ln M(f,2eR)\,.$$

Це теорема 11 з [52, Глава I, §8].

Оскільки $E\in[\rho(r),\infty)$, то існує постійна M_1 така, що у всій площині $\mathbb{C}$ виконується нерівність $\ln|E(z)|\leqslant M_1V(r)$. З цієї нерівності і теореми C, застосованої до функції $E(z)$ і круга $B(0,3e|a_n|)$, випливає, що існують постійна M_2 , яка незалежіть від n , число $R_1\in\left[\frac{1}{2}|a_n|,|a_n|\right]$ такі, що для всіх φ буде виконуватись нерівність

$$\ln\frac{1}{|E(a_n+R_1e^{i\varphi})|}\leqslant M_2V(|a_n|)\,.$$

Вибираючи в рівності (0.73) $R=R_1$, отримаємо доведення імплікації (0.67) $\Rightarrow$ (0.71) .

Імплікації (0.71) $\Rightarrow$ (0.67) , очевидно, випливає з рівності (0.73) з $R=|a_n|$ і еквівалентності умов (0.67) і (0.70).

Теорема доведена.

Теорема 4. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок , а* $\Lambda=\{\lambda_n : n=1,2,\dots\}$, $0\leqslant|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\dots,$ *– така послідовність комплексних чисел , що її неванліновська лічильна функція* $N_\Lambda(r)$ *має* *нормальний тип щодо уточненого порядку* $\rho(r)$. *Нехай*

$$f(z) = z^{m-1}\prod_{n=m}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad g(z) = z^{m-1}\prod_{n=m}^{\infty}\left(1+\frac{z}{|\lambda_n|}\right),$$

де $m-1$ *– кількість нулів у послідовності* Λ . *Нехай* H *– така необмежена підмножина комплексної площини* $\mathbb{C}$, *що*

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{z\in H}\frac{1}{V(r)}\int_0^{\delta r}\frac{\mu_\Lambda(B(z,t))}{t}\,dt = 0\,.$$

Тоді

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\frac{1}{V(r)}(\ln|f(z)| - \ln g(r)) = 0\,.$$

Доведення. Доведення спирається на наступну теорему.

Теорема D. *Нехай* $v(z)$ *– субгармонійна функція в комплексній площині* $\mathbb{C}$, *гармоніна в деякому околі нуля ,* μ_v *– рісовська міра цієї функції. Нехай неванлінновская лічильна функція міри* μ_v

$$N_v(r) = \int_0^{r}\frac{\mu_v(B(0,x))}{x}\,dx$$

має нормальний тип щодо нульового уточненого порядку $\rho(r)$. *Тоді виконуєтьcя рівність*

$$v(z) = -\int_0^{r}\frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt + N_v(r) + o(1)V(r), \quad r\to\infty\,.$$

Зауважимо, що різниця $\ln|f(z)| - \ln g(r)$ не залежить від m . Тому можна вважати, що $m=1$. У цьому випадку

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\lambda_n}\right), \quad g(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{|\lambda_n|}\right).$$

Позначимо $v(z) = \ln|f(z)|$, $u(z) = \ln|g(z)|$. Застосовуючи теорему D до субгармонійних функцій $v(z)$ і $u(z)$ отримаємо рівності

$$\ln|f(z)| = -\int_0^{r}\frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt + N_v(r) + o(1)V(r), \quad r\to\infty\,,$$

$$\ln g(r) = -\int_0^r \frac{\mu_u(B(r,t))}{t}\,dt + N_u(r) + o(1)V(r), \quad r \to \infty\,.$$

Так як міра μ_u зосереджена на промені $(-\infty, 0)$, то

$$\int_0^r \frac{\mu_u(B(r,t))}{t}\,dt = 0\,.$$

Зауважимо ще, що $N_v(r) = N_u(r)$. Зі сказаного випливає, що

$$\ln|f(z)| - \ln g(r) = -\int_0^r \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt + o(1)V(r), \quad r \to \infty\,.$$

З теореми B випливає, що для будь-якого $\delta \in (0,1)$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{V(r)} \int_{\delta r}^r \frac{\mu_v(B(0,t))}{t}\,dt = 0\,.$$

Таким чином, отримаємо формулу

$$\ln|f(z)| - \ln g(r) = -\int_0^{\delta r} \frac{\mu_v(B(z,t))}{t}\,dt + o(1)V(r), \quad r \to \infty\,,$$

із якої легко випливає твердження теореми.

Теорема доведена.

Нехай функція

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right)$$

належить класу $[\rho(r), \infty)$. Нехай a_n – допустима послідовність і нехай

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{N_1(r)}{V(r)} = M_1 < \infty\,,$$

де $N_1(r)$ – неванліновська лічильна функція послідовності a_n .

Розглянемо послідовність сегментів

$$I_n = \left[|a_n| - \frac{2}{1+|a_n|}, |a_n| + \frac{2}{1+|a_n|}\right], \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Якщо $|a_{n_1}| = |a_{n_2}|$, то $I_{n_1} = I_{n_2}$. через $|I_n|$ будемо позначати довжину I_n . Маємо $|I_n| = \dfrac{4}{1+|a_n|}$.

Із рівності (0.65) випливає, що

$$L := \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \infty\,.$$

Нехай

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad S_k = (2^k, 2^{k+1}] \setminus F, \quad k = 0, 1, \ldots\,,$$

і нехай k_0 – таке число, що при $k \geqslant k_0$ виконується нерівність $|S_k| \geqslant 2^{k-1}$.

Нехай ν_k – число коренів функції $f(z)$ у кільці $2^k < |z| \leqslant 2^{k+1}$. Припустимо, що $\nu_k > 0$. Нехай це будуть корені $b_{n_k+1}, \ldots, b_{n_k+\nu_k}$.

Визначимо числа $b'_{n_k+\nu}$, $\nu \in \overline{1, \nu_k}$, наступним чином. Число b'_{n_k+1} визначається рівністю: $b'_{n_k+1} = 2^k + x_1$, де x_1 визначається із умов

$$|S_k \cap [2^k, 2^k + x_1]| = \frac{|S_k|}{\nu_k}, \quad x_1 \notin \operatorname{int} F$$

(тут $\operatorname{int} F$ означає внутрішність множини F). Якщо числа $b'_{n_k+\nu}$ при $\nu \leqslant m$ уже визначені рівностями $b'_{n_k+\nu} = 2^k + x_\nu$ і $m < \nu_k$, то число b'_{n_k+m+1} визначається рівністю $b'_{n_k+m+1} = 2^k + x_{m+1}$, де число x_{m+1} визначається із умов

$$|S_k \cap [x_m, x_{m+1}]| = \frac{|S_k|}{\nu_k}, \quad x_{m+1} \notin \operatorname{int} F\,.$$

Таким чином, числа $b'_{n_k+\nu}$ будуть визначені для будь-якого $\nu \in \overline{1, \nu_k}$.

Далі визначимо послідовність b''_n за наступним правилом: $b''_n = b_n$, якщо $|b_n| \leqslant 2^{k_0}$, якщо ж $|b_n| > 2^{k_0}$, то $\arg b''_n = \arg b_n$, $|b''_n| = |b'_n|$. Функцію

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b''_n}\right)$$

ми у подальшому будемо називати T -перетворенням функції f і писати $f_1 = Tf$. Зазначимо, що відображення T будується, виходячи із спеціальної послідовності a_n . У подальшому відображення T ми будемо використовувати у зв'язку із вивченням інтерполяційної задачі. У цьому випадку послідовність a_n буде послідовністю вузлів інтерполяції.

ЛЕММА 1. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок. Нехай функція* $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{b_n}\right)$ *належить классу* $[\rho(r), \infty)$, $f_1 = Tf$, $f_2(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{|b_n|}\right)$. *Тоді виконуеться рівність* :

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}} \frac{1}{V(r)}(\ln|f_1(z)| - \ln|f_2(r)|) = 0\,,$$

де $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right)$.

ДОВЕДЕННЯ. Визначимо наступні міри:

$$\mu_k = \sum_{|b_n''|\in(2^k,2^{k+1}]} \delta(z - b_n''), \quad \mu = \sum_{k=k_0}^{\infty} \mu_k\,.$$

Величина $\mu_k(B(z,t))$ не перевищуе числа точок b_n', що потрапляють на сегмент $[|z| - t, |z| + t]$. ТОму справедлива нерівність:

$$\mu_k(B(z,t)) \leqslant 1 + \frac{2t}{\delta_k}\,,$$

де $\delta_k = \frac{|S_k|}{\nu_k}$. Будемо оцінювати при $z \in H$, $\delta \in (0, 1/2]$, $k \geqslant k_0$, наступну величину:

$$J_k(z,\delta) = \frac{1}{V(r)} \int_0^{\delta r} \frac{\mu_k(B(z,t))}{t}\,dt\,.$$

Якщо $r = |z| \notin [2^{k-1}, 2^{k+2}]$, то $J_k(\delta, z) = 0$. Тому у подальшому будемо вважати, що $r \in [2^{k-1}, 2^{k+2}]$. Нехай $z \in B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right)$. Тоді виконуеться нерівність $r - 1 \leqslant |a_n| \leqslant r + 1$. Крім того, з того, що інтервал $\left(|a_n| - \frac{2}{1+|a_n|}, |a_n| + \frac{2}{1+|a_n|}\right)$ не містить точок b_n' випливае, що $\mu_k\left(B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right)\right) = 0$.

Нехай $b = b(z)$ – точка послідовності b_n'', найближча до z. Зауважимо, що $|b - z| \geqslant \frac{1}{1+|a_n|}$. Якщо $|b - z| \geqslant \delta r$, то $J_k(\delta, z) = 0$. У супротивному випадку

$$J_k(z,\delta)=\frac{1}{V(r)}\int\limits_{|z-b|}^{\delta r}\frac{\mu_k(B(z,t))}{t}\,dt=\frac{1}{V(r)}\ln\frac{\delta r}{|z-b|}+$$
$$+\frac{1}{V(r)}\int\limits_{|z-b|}^{\delta r}\frac{\mu_k(B(z,t))-1}{t}\,dt\leqslant\frac{1}{V(r)}\Big(\ln r+\ln(1+|a_n|)+ \tag{0.74}$$
$$+2\delta\frac{r}{\delta_k}\Big)\leqslant\frac{1}{V(r)}\left(\ln r+\ln(r+2)+2\delta\frac{2^{k+2}}{|S_k|}\nu_k\right)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{V(r)}(\ln r+\ln(r+2)+16\delta n(4r))\,,$$

де $n(r)$ – лічильа функція послідовності b_n .

Якщо припустити, що $|z|\leqslant R$, то, враховуючи оцінку $|z-\ b|\geqslant \dfrac{1}{1+|a_n|}$, отримаємо наступну нерівність, виходячи із означення величини $J_k(z,\delta)$,

$$|J_k(z,\delta)|\leqslant\frac{1+|a_n|}{V(r)}\delta r\mu(B(z,\delta r))\leqslant A(R)\delta\,, \tag{0.75}$$

де $A(R)$ – деяка величина, що залежить тількі від R .

Із нерівностей (0.74), (0.75), (0.59) и (0.65) випливає, що

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{z\in H}\sup_{k\geqslant k_0}J_k(z,\delta)=0\,. \tag{0.76}$$

Зважаючи на те, що $\delta\in(0,1/2]$ круг $B(z,\delta r)$ перетинає не більше двох кілець вигляду $2^k\leqslant|w|\leqslant 2^{k+1}$, то із (0.76) випливає, що

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{z\in H}\frac{1}{V(r)}\int\limits_0^{\delta r}\frac{\mu(B(z,t))}{t}\,dt=0\,. \tag{0.77}$$

Нехай Λ – це послідовність b_n'' . Обмеження міри μ_Λ на зовнішність круга $|z|\geqslant 2^{k_0}$ є міра μ . Тому із рівності (0.77) випливає рівність :

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{z\in H}\frac{1}{V(r)}\int\limits_0^{\delta r}\frac{\mu_\Lambda(B(z,t))}{t}\,dt=0\,.$$

Тепер із теореми 4, застосованої до функції $f_1(z)$, і рівності

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{V(r)}\left(\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{|b_{n''}|}\right)-\ln\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{|b_n|}\right)\right)=0$$

випливає твердження леми.

Лема доведена.

Теорема 5. *Нехай $\rho(r)$ – нульовий уточнений порядок. Нехай послідовність a_n є інтерполяційною у класі $[\rho(r),\infty)$, M – довільне , додатне число. Тоді існує ціла функція $g(z)$ нормального типу відносно уточненого порядку $\rho(r)$ така , що для будь-якого n в крузі $B\left(a_n,\dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ буде виконуватися нерівність :*

$$\ln|g(z)|\geqslant MV(|a_n|)\,.$$

Доведення . Так як послідовність $\{a_n\}$ є інтерполяційною, то існує ціла функція $g_1(z)$ із класу $[\rho(r),\infty)$ така, що виконуються рівності:

$$g_1(0)=1, g_1(a_n)=e^{(M+1)V(|a_n|)},\quad n=1,2,\dots\,.$$

Оскільки $g_1(0)=1$, то функція $g_1(z)$ представляється у вигляді:

$$g_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right)\,,$$

де b_n – корені функції $g_1(z)$. Позначимо

$$g_2(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{|b_n|}\right)\,.$$

Нехай $g_3=Tg_1$. За лемою 1

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\frac{1}{V(r)}(\ln|g_3(z)|-\ln g_2(r))=0\,,$$

де $H=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B\left(a_n,\dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$.

Маємо $g_2(|a_n|)\geqslant|g_1(a_n)|=e^{(M+1)V(|a_n|)}$. Легко бачити, що функція

$$\frac{1}{V(r)}(\ln g_2(r+hr)-\ln g_2(r))$$

збігається до нуля при $r \to \infty$ рівномірно відносно h на сегменті $[-1/2, 1/2]$. Тому для всіх достатньо великих n при $z \in B\left(a_n, \dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ виконується нерівність:

$$\ln|g_3(z)| \geqslant MV(|a_n|)\,.$$

У якості функції $g(z)$ можна взяти функцію $\lambda g_3(z)$ з достатньо великим λ .

Теорема доведена.

Перед тим як доводити теорему 6 нагадаємо, що міра μ визначається формулою (0.82), а функція N визначається формулою:

$$N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}\,dx = \int\limits_0^t \frac{\mu(B(0,x))}{x}\,dx\,.$$

Далі зауважимо, що теорема 6 в сторону необхідності вже доведена. Це теореми 1, 2, і 5. Доведемо теорему у сторону достатньості.

Позначимо $l_n = \min\limits_{k\neq n}|a_n - a_k|$. Із умови 2) випливає, що існує стала K_1 така, що для всіх $n \geqslant 2$ виконуються нерівності:

$$K_1 \geqslant \frac{1}{V(|a_n|)}\int\limits_0^{|a_n|}\frac{\mu(B(a_n,t))-1}{t}\,dt \geqslant \frac{1}{V(|a_n|)}\int\limits_{l_n}^{|a_n|}\frac{dt}{t} = \frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{|a_n|}{l_n}\,.$$

Звідси випливає, що для будь-якого n виконується нерівність:

$$\ln\frac{|a_n|}{l_n} \leqslant K_1 V(|a_n|)\,. \tag{0.78}$$

Насправді, ми довели цю нерівність для $n \geqslant 2$. Але збільшуючи, якщо потрібно, сталу K_1 , можна вважати, що (0.78) виконується і для $n = 1$.

Відмітемо також нерівність $|a_n - a_k| \geqslant \dfrac{1}{2}(l_n + l_k)$, із якої випливає, що круги $C\left(a_n, \dfrac{1}{2}l_n\right)$ попарно не перетинаються.

Покажемо, що існує послідовність нескінченно диференційованих функцій $\chi_n(z)$, що має властивості: $\chi_n(z) \in [0,1]$, $\chi_n(z) = 1$ при

$z \in B\left(a_n, \dfrac{1}{4}l_n\right)$, $\chi_n(z) = 0$ при $z \notin C\left(a_n, \dfrac{1}{2}l_n\right)$, для всіх z виконується нерівність: $\left|\dfrac{\partial \chi_n(z)}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant \dfrac{6}{l_n}$.

Дійсно, нехай функція $\varphi(x)$ визначається наступним чином: $\varphi(x) = 1$ при $x \in \left[-\dfrac{1}{3}l_n, \dfrac{1}{3}l_n\right]$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in \left(-\infty, -\dfrac{5}{12}l_n\right] \cup \left[\dfrac{5}{12}l_n, +\infty,\right)$, $\varphi(x)$ – лінійна функція на кожному із її сегментів $\left[-\dfrac{5}{12}l_n, -\dfrac{1}{3}l_n\right]$, $\left[\dfrac{1}{3}l_n, \dfrac{5}{12}l_n\right]$. Побудована функція $\varphi(x)$ є кусково-лінійною і всюди, окрім кутових точок, виконується нерівність:

$$|\varphi'(x)| \leqslant \operatorname{arctg} \frac{12}{l_n} .$$

Розглянемо добре відому у теорії регуляризації функцію

$$\omega_\varepsilon(x) = \frac{c}{\varepsilon} \begin{cases} e^{\frac{\varepsilon^2}{x^2 - \varepsilon^2}} & , \ |x| < \varepsilon, \\ 0 & , \ |x| \geq \varepsilon \, , \end{cases}$$

де стала c вибирається із умови

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_\varepsilon(x)\, dx = 1 \, .$$

Функція $\omega_\varepsilon(x)$ є нескінченно диференційовною функцією на всій дійсній осі, причому для будь-якого x виконується співвідношення: $\psi(x) \in [0,1]$; $\psi(x) = 1$ на сегменті $\left[-\dfrac{1}{4}l_n, \dfrac{1}{4}l_n\right]$ і $\psi(x) = 0$ при $|x| \geqslant \dfrac{1}{2}l_n$,

$$\psi'(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x-y)\omega_\varepsilon(y)\, dy, \quad |\psi'(x)| \leqslant \operatorname{arctg} \frac{12}{l_n} .$$

Далі покладемо $h(z) = \psi(\sqrt{x^2 + y^2})$, $z = x + iy$. Функція $h(z)$ є нескінченно диференційовною на комплексній площині $\mathbb{C}$, причому для будь-якого z виконуються співвідношення: $h(z) \in [0,1]$; $h(z) = 1$ в крузі $B\left(0,\dfrac{1}{4}l_n\right)$, $h(z)=0$ при $|z|\geqslant\dfrac{1}{2}l_n$.Крім того,

$$\frac{\partial h(z)}{\partial x}=\psi'(|z|)\frac{x}{|z|},\quad \frac{\partial h(z)}{\partial y}=\psi'(|z|)\frac{y}{|z|},$$
$$\left|\frac{\partial h(z)}{\partial \bar z}\right|=\left|\frac{1}{2}\frac{\partial h(z)}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial h(z)}{\partial y}\right|\leqslant\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,\frac{12}{l_n}\leqslant\frac{6}{l_n}\,.$$

У якості $\chi_n(z)$ можна взяти функцію $h(z-a_n)$.

Позначимо
$$\alpha_n(z)=\frac{\partial\chi_n(z)}{\partial\bar z}\frac{b_n}{E(z)}\,.$$

Тут $\{b_n:n=1,2,\dots\}$ – довільна послідовність комплексних чисел, що задовільняє умову (0.58) . Вважаємо, що $\alpha_n(a_n)=0$, $\alpha_n(z)=0$ при $|z-a_n|\geqslant\dfrac{1}{2}l_n$. Крім того, позначимо

$$u(z)=\ln\left|\frac{E(z)}{E'(a_n)(z-a_n)}\right|,\quad \gamma_n=\min\left\{l_n,\frac{1}{1+|a_n|}\right\}\,.$$

Функція $u(z)$ є гармонійною функцією в крузі $C(a_n,\gamma_n)$, субгармонійною в $\mathbb{C}$ і $u(a_n)=0$. Ми вже довели, що $E(z)\in[\rho(r),\infty)$. З теореми 3 випливає, що

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|}<\infty\,.$$

Якщо врахувати ще умови (0.59) і (0.78), то отримаємо, що існує стала K_2 , така, що для будь-якого n на межі круга $B(a_n,\gamma_n)$, а отже і у всьому крузі $B(a_n,\gamma_n)$, буде виконуватися нерівність :

$$u(z)\leqslant K_2V(|a_n|)\,.$$

Розглянемо тепер функцію $v(z)=K_2V(|a_n|)-u(z)$. Це додатна гармонійна функція в крузі $C(a_n,\gamma_n)$, причому $v(a_n)=K_2V(|a_n|)$.У цьому крузі справедливе представлення:

$$v(a_n+Re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\gamma_n^2-R^2}{\gamma_n^2-2R\gamma_n\cos(\varphi-\theta)+R^2}\,d\sigma(\varphi)\,,$$

де σ –скінчена додатня міра. Справедлива оцінка:

$$v(a_n+Re^{i\theta})\leqslant\frac{\gamma_n+R}{\gamma_n-R}v(a_n)\,.$$

Якщо $R \in \left[\frac{1}{4}\gamma_n, \frac{1}{2}\gamma_n\right]$, то отримуємо, що $v(a_n+Re^{i\theta}) \leqslant 3K_2V(|a_n|)$. Для таких R це приводить до оцінки :

$$\ln\left|\frac{E'(a_n)R}{E(a_n+Re^{i\theta})}\right| \leqslant 2K_2V(|a_n|)\,.$$

Із цього, в свою чергу, випливає, що існує така стала K_3 , що для всіх натуральних n і для всіх $R \in \left[\frac{1}{4}\gamma_n, \frac{1}{2}\gamma_n\right]$ виконується нерівність:

$$\ln\frac{1}{|E(a_n+Re^{i\theta})|} \leqslant K_3V(|a_n|)\,.$$

Із цього, в свою чергу, випливає, що існує стала K_4 така, що для будь-якого n в кільці $\frac{1}{4}\gamma_n \leqslant |z-a_n| \leqslant \frac{1}{2}\gamma_n$ буде виконуватись нерівність:

$$\ln((1+|z|^4)|\alpha_n(z)|) \leqslant K_4V(|a_n|)\,.$$

Із умови 3) теореми випливає, що існує ціла функція $g(z) \in [\rho(r),\infty)$ така, що в кругах $B\left(a_n, \frac{1}{1+|a_n|}\right)$ виконується нерівність : $\ln|g(z)| \geqslant K_4V(|a_n|)$.

Нехай $\alpha(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(z)$. Із викладеного вище випливає, що на всій комплексній площині $\mathbb{C}$ виконується нерівність

$$|\alpha(z)| \leqslant \frac{|g(z)|}{1+|z|^4}\,. \tag{0.79}$$

Розглянемо тепер диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial\beta(z)}{\partial\bar{z}}=\alpha(z)\,.$$

Одним із розв'язків цього рівняння є функція

$$\beta(z)=-\frac{g(z)}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{\alpha(\zeta)d\xi d\eta}{g(\zeta)(\zeta-z)}, \quad \zeta=\xi+i\eta\,.$$

Із оцінки випливає, що виконується нерівність :

$$\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{C}}\frac{\alpha(\zeta)d\xi d\eta}{g(\zeta)(\zeta-z)}\right| \leq K_5$$

з деякою сталою K_5 . Таким чином, $|\beta(z)| \le K_5|g(z)|$.

Розв'язок інтерполяційної задачі (0.57) задається функцією:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(z) - \beta(z)E(z)\,.$$

Маємо

$$\frac{\partial F(z)}{\partial \bar z} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\partial \chi_n(z)}{\partial \bar z} - \frac{\partial \beta(z)}{\partial \bar z} E(z) = E(z)\left(\alpha(z) - \frac{\partial \beta(z)}{\partial \bar z}\right) = 0\,.$$

Таким чином, $F(z)$ – ціла функція. Очевидно, що $F \in [\rho(r), \infty)$.

Теорема 6 доведена.

Теорема 7 є наслідком теорем 6 і 3.

Далі ми доводимо 4 теореми, які можна розглядати, як приклади на застосування теорем 6 і 7.

Теорема 8. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок , що задовольняє умову* (0.59), *і такий , що функція* $V(r) = r^{\rho(r)}$ *є логарифмічно опуклою на деякій півосі* (r_0, ∞) . *Нехай* a_n *– допустима послідовність. Для того , щоб послідовність* a_n *була інтерпояційною у класі* $[\rho(r), \infty)$, *необхідно й досить , щоб виконувались умови* :

$$1) \quad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad 2) \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\,.$$

Доведення. Необхідність умов 1) і 2) випливає із теорем 1 і 3. Тому доведення потребує лише достатність. Із умови теореми випливає, що функція $rV'(r)$ є зростаючою на напівосі (r_0, ∞) . Із рівності (0.59) випливає, що це необмежена функція. Нехай $n_1(r)$ – зростаюча функція стрибків зі стрибками що дорівнюють одиниці, яка дорівнює нулю на деякому сегменті $[0, \delta]$, $\delta > 0$, і стрибки якої, на напівосі, (r_0, ∞) співпадають зі стрибками функції $[rV'(r)]$ (зазвичай, $[\cdot]$ означає цілу частину числа). Позначимо

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\, dt\,.$$

Легко бачити, що $N_1(r) \sim V(r)$ при $r \to \infty$.

Нехай b_n – точки стрибків функції $n_1(r)$, $f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{b_n}\right)$.

Добре відомо і легко перевіряється що

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln f_1(r)}{V(r)}=1\,.$$

Нехай $f_2=Tf_1$. Із леми 1 випливає, що для всіх достатньо великих n в крузі $B\left(a_n,\dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ буде виконуватися нерівність

$$\ln|f_2(z)|\geqslant\frac{1}{2}V(|a_n|)\,.$$

Тоді якщо λ і m – достить великі натуральні числа, $g(z)=\lambda f_2^m(z)$, то для будь-якого n в крузі $B\left(a_n,\dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ буде виконуватися нерівність $\ln|g(z)|\geqslant MV(|a_n|)$ з будь-яким наперед заданим M . Тепер із теореми 7 буде випливати, що послідовність a_n є інтерполяційною у класі $[\rho(r),\infty)$.

Теорема доведена.

Зауваження. За допомогою теореми 8 можна впевнитися, що теорема A сформульована неточно. Нехай $V(r)=\ln^2 r$ при $r\geqslant e$. Тоді функція $V(r)$ задовольняє усім обмеженням, які накладаються на цю функцію в теоремі A. Розглянемо послідовність $a_n=e^{n/2}$ і функцію

$$E(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{e^{n/2}}\right)\,.$$

Справедливі співвідношення:

$$N(r)\sim\ln^2 r(r\to\infty),\quad \ln|E'(a_n)|\sim\ln^2 a_n(n\to\infty)\,.$$

Тоді за теоремою 8 послідовність a_n є інтерполяційною у классі $\left[\dfrac{2\ln\ln r}{\ln r},\infty\right)$. Між тим, умова з теореми A не виконується, так як

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{rV'(r)}=1\,.$$

Теорему 8 можна вважати виправленим варіантом теореми A.

Теорема 9. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок , що задовольняє умову* (0.59), $V(r)=r^{\rho(r)}$, *і нехай існує логарифмічно опукла функція* $h(r)$ *на деякій напівосі* (r_0,∞) *така , що*

$$0<\varliminf_{r\to\infty}\frac{V(r)}{h(r)}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{V(r)}{h(r)}<\infty\,.$$

Нехай a_n *– допустима послідовність. Для того , щоб послідовність* a_n *была інтерполяційною у класі* $[\rho(r), \infty)$, *необхідно й досить, , щоб виконувалися умови* :

$$1)\quad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad 2)\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty\ .$$

Доведення суттєво повторює доведення попередньої теореми, тільки функцію $n_1(r)$ треба будувати використовуючи функцію $rh'_+(r)$, а не $rV'(r)$ як у доведенні попередньої теореми.

Теорема 10. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок , що задовольняє умову* (0.59), $V(r) = r^{\rho(r)}$, *і нехай*

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{\ln^2 r} > 0\,.$$

Нехай a_n *– допустима послідовність. Для того , щоб твердження:*

i) a_n *– інтерполяційна послідовність у класі* $[\rho(r), \infty)$,

i

ii) виконуються умови :

$$1)\quad \varlimsup_{r\to\infty} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \qquad 2)\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty,$$

були еквівалентні , необхідно і досить , щоб існувала логарифмічно опукла функція $h(r)$ *на деякій півосі* (r_0, ∞) *така , що*

$$0 < \varliminf_{r\to\infty} \frac{V(r)}{h(r)} \leqslant \varlimsup_{r\to\infty} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty\,. \tag{0.80}$$

Доведення. Те, що при виконанні умови (0.80) умови i) та ii) еквівалентні – це теорема 9.

Доведемо необхідну частину теореми. Спочатку зауважимо, що із твердження i) випливакє твердження ii). Це теореми 1 та 3. Тому нам залишилося довести, що якщо з твердження ii) випливає твердження i), то виконується умова (0.80).

Розглянемо послідовність a_n таку, як у зауваженні до теореми 8. Виконуються умови:

$$N(r) \sim \ln^2 r(r \to \infty), \quad \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} \sim -\ln^2 a_n(n \to \infty)\,.$$

Із обмежень на $V(r)$ в умові теореми випливає, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r)}{V(r)} < \infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(|a_n|)} \ln \frac{1}{|E'(a_n)|} < \infty \, .$$

Таким чином, для послідовності a_n справедливе твердження ii). За припущенням із цього випливає, що послідовність a_n є інтерполяційною в класі $[\rho(r), \infty)$. Тому існує функція $f(z)$ із цього класу, яка вирішує інтерполяційну задачу: $f(a_n) = e^{V(a_n)}$, $f(0) = 1$. Нехай b_n – корені функції $f(z)$. Маємо

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_n}\right) .$$

Введемо ще функцію

$$f_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{|b_n|}\right) .$$

Функція f_1 також належить класу $[\rho(r), \infty)$. Тому з деяким M_1 виконується нерівність

$$h(r) := \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r}{|b_n|}\right) < M_1 V(r) \, .$$

Окрім цього,

$$V(a_n) = \ln f(a_n) \leqslant \ln f_1(a_n) = h(a_n) \, .$$

З цієї нерівності, визначення a_n та умов $V(r) = r^{\rho(r)}$, де $\rho(r)$ – нульовий уточнений порядок, $h(r)$ – зростаюча функція, випливає, що

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{V(r)}{h(r)} \leqslant 1 \, .$$

Тим самим доведено, що

$$\frac{1}{M_1} < \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{V(r)}{h(r)} \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{V(r)}{h(r)} < \infty \, .$$

Так як $h(r)$ – логарифмічно опукла функція, то тим самим доведене співвідношення (0.80), а разом з ним і теорема.

На закінчення ми наведемо просто сформульовані достатні умови рішення інтерполяційної задачі, які можуть бути застосовані для досить широкого класу послідовностей.

Теорема 11. *Нехай* $\rho(r)$ *– нульовий уточнений порядок, що задовольняє умову* (0.59) *і* a_n *– допустима послідовність. Нехай виконуються умови*:

$$1)\quad \overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r)}{V(r)}<\infty,\qquad 2)\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{V(|a_n|)}\ln\frac{1}{|E'(a_n)|}<\infty,$$

$$3)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{V(|a_n|)}{N(|a_n|)}<\infty,\qquad 4)\quad \lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{N(r)}=0\,.$$

Тоді a_n *є інтерполяційною послідовністю в класі* $[\rho(r),\infty)$.

Доведення. З умови 4) випливає, що функція $N(r)$ представляється у вигляді $N(r)=V_1(r)=r^{\rho_1(r)}$, де $\rho_1(r)$ – нульовий уточнений порядок. Точками зростання функції $n(r)$ є точки $|a_n|$. Позначимо

$$g_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{|a_n|}\right).$$

Виконується рівність:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g_1(r)}{V_1(r)}=1\,. \tag{0.81}$$

Нехай $g_2=Tg_1$. За лемою 1

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ z\in H}}\frac{1}{V_1(r)}(\ln|g_2(z)|-\ln g_1(r))=0\,.$$

З (0.81) випливає, що для усіх достатньо великих n в крузі $B\left(a_n,\dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ буде виконуватися нерівність

$$\ln|g_2(z)|\geqslant\frac{1}{2}V_1(|a_n|)\,.$$

Тепер якщо взяти $g(z)=\lambda g_2^m(z)$, то при достатньо великих натуральних числах λ і m в будь-якому крузі $B\left(a_n,\dfrac{1}{1+|a_n|}\right)$ буде виконуватися нерівність $\ln|g(z)|\geqslant MV_1(|a_n|)$ з будь-яким наперед заданим M . Тепер із теореми 7 буде випливати, що послідовність a_n є інтерполяційною в класі $[\rho_1(r),\infty)$. Із умови 1) теореми випливає, що ця послідовність буде інтерполяційною також в класі $[\rho(r),\infty)$.

Теорема доведена.

8 Замкнені ідеали в класах $\mathcal{E}(\gamma)$

Позначимо через $\mathcal{E}$ алгебру цілих функцій на $\mathbb{C}$ зі звичайними операціями додавання та множення. Для фіксованих дійсних сталих $A, B > 0$ введемо банахів простір

$$\mathcal{E}_{A,B}(\gamma) := \{f : f \in \mathcal{E}, ||f||_{A,B} = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| \exp(-A\gamma(B|z|)) < \infty\}\,.$$

Ясно, що $\mathcal{E}(\gamma) = \bigcup\limits_{A,B>0} \mathcal{E}_{A,B}(\gamma)$. Простір $\mathcal{E}(\gamma)$ є лінійним локально опуклим простором з топологією індуктивної границі. Більш того, простір $\mathcal{E}(\gamma)$ є топологічною алгеброю відносно додавання і добутку функцій.

Послідовність цілих функцій $\{f_n(z)\}$ збігається у просторі $\mathcal{E}(\gamma)$ при $n \to \infty$ до функції $f(z)$ тоді і тільки тоді , коли $\{f_n(z)\}$ збігається до функції $f(z)$ рівномірно на компактних множинах в $\mathbb{C}$ і існують сталі $A, B > 0$ такі , що для всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність:

$$|f_n(z)| \le \exp(A\gamma(B|z|)), \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Зауважимо, що якщо $\gamma(r) = r^\rho$ ($\rho > 0$), то простір $\mathcal{E}(\gamma) = [\rho, +\infty)$ є простором цілих функцій скінченого порядку ρ і нормального типу. Такі простори вивчалися О. Ф. Леонтьєвим при побудові біортогональних систем функцій.

Якщо $\mathcal{L}$ – мультиплікативний гомоморфізм з $\mathcal{E}(\gamma)$ на $\mathbb{C}$, то множина ω всіх елементів з $\mathcal{E}(\gamma)$, на яких $\mathcal{L}$ набуває значення 0, є максимальним (власним) ідеалом в $\mathcal{E}(\gamma)$, так як $\mathbb{C}$ – поле.

Для будь-якої точки $z \in \mathbb{C}$ функціонал обчислення значення в точці z

$$f \longmapsto f(z)$$

є гомоморфізмом алгебри $\mathcal{E}(\gamma)$ на $\mathbb{C}$. Отже, кожній точці z комплексної площини очевидним чином відповідає деякий максимальний ідеал, а саме ідеал функцій $f \in \mathcal{E}(\gamma)$, які що обертаются в нуль в z . Цей ідеал називається закріпленим (в точці z). Дамо загальне означення.

Нехай $D = \{a_k, q_k\}_{k=1}^{\infty}$ – який-небудь дивізор (не обов'язково γ - допустимий) . Тоді множина

$$\mathcal{I}_D = \{f \in \mathcal{E}(\gamma) : f^{(j)}(a_k) = 0, \quad j = 0, \dots, q_k - 1\}$$

називається ідеалом закріпленим в дивізорі D .

Ясно, що ідеал $\mathcal{I}_D$ є замкненим ідеалом в алгебрі $\mathcal{E}(\gamma)$. Справедливо и обернене твердження: кожен нетривіальний замкнений ідеал $\mathcal{I}$ в $\mathcal{E}(\gamma)$ – закріплений і визначається однозначно дивізором своїх нулів.

Ідеал $\mathcal{I}$ називається головним , якщо він має вигляд : $\mathcal{I} = f_{\mathcal{I}}\,\mathcal{E}(\gamma)$, де $f_{\mathcal{I}} \in \mathcal{E}(\gamma)$.

Н. К. Нікольський довів, що в просторі $\mathcal{E}(r^{\rho})$, $\rho > 0$, при нецілому ρ всі замкнені ідеали головні. При цілому ρ це справедливо тоді і тільки тоді, коли часткові суми ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k a_k^{-\rho}$ обмежені.

Ми можемо сформулювати наступне твердження:

Замкнений ідеал $\mathcal{I}_D$ у просторі $\mathcal{E}(\gamma)$ головний тоді і тільки тоді , коли дивізор D є γ -допустимим.

Зрозуміло, що у цьому випадку в якості функції $f_{\mathcal{I}}$ ми можемо взяти узагальнений канонічний добуток дивізора, який визначає ідеал $\mathcal{I}$.

Важливою задачею при вивченні ідеалів аналітичних функцій є знаходження будь-якого достатньо простої за своєю структурою множини, яка була б щільною в цьому ідеалі. Для просторів H^p , $p > 0$, аналітичних функцій в одиничному крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при $p = 2$ рішення було отримане А. Берлінгом.

Нехай $F = I_F Q_F \in H^2$, I_F *– внутрішня функція* F *. Тоді замикання в* H^2 *лінійного многовиду* $F(z)\cdot$ $\{$ *многочлени від* $z\}$ *співпадає з* $I_F \cdot H^p$.

Загальний випадок $p > 0$ був розглянутий Т. Срінівассаном і Д. Вангом. Для алгебри цілих функцій скінченого порядку і нормального типу аналогічний результат був отриманий К. Г. Малютіним и Н. Садиком. Ми доведемо узагальнення цієї теореми на випадок довільної функції зростання.

Теорема. *Припустимо, що функція зростання* $\gamma(r)$ *є опуклою функцією відносно* $\ln r$ *. Нехай функція* $f = E_f Q_f \in \mathcal{E}(\gamma)$*, де* E_f *–*

внутрішня функція f, *а* Q_f *– зовнішня функція* f . *Тоді замикання в* $\mathcal{E}(\gamma)$ *лінійного многовиду* $f(z)\cdot$ $\{$ *многочлени від* $z\}$ *співпадає з* $E_f\cdot\mathcal{E}(\gamma)$.

Доведення. Позначимо через $H(r) = \gamma(e^r)$. За умовою теореми $H(r)$ – опукла функція на півосі $[0,+\infty)$. Припустимо, що існує границя

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{H(r)}{r} = +\infty. \tag{0.82}$$

Тоді визначена двоїста по Юнгу функція $H^*(r)$ к $H(r)$:

$$H^*(r) := \max\{ru - H(u) : u \geq 0\}\,.$$

Функція $H^*(r)$ – опукла, задовольняє умову (0.82) і $H(r)^{**} \equiv H(r)$.

Нехай u_r – точка максимуму функції $ru - H(u)$, $u \geq 0$. За визначенням $H^*(r)$: $H^*(r) = ru_r - H(u_r) \leq ru_r$. Використовуючи (0.82) для $H^*(r)$, неважко показати, що $\lim\limits_{r\to+\infty} u_r = +\infty$. Отже, для будь-якого $t \geq 0$, існує $r_0(t) \geq 0$ таке, що

$$H^*(r) = \max\{ru - H(u) : u \geq t\}, \tag{0.83}$$

для всіх $r \geq r_0(t)$.

Використовуючи (0.83) , можна показати, що двоїста по Юнгу функція до $H_1(r) = H(r+B) + D$ має вигляд

$$H_1^*(r) = H^*(r) - Br - D. \tag{0.84}$$

Тут $B, D \geq 0$ – фіксовані додатні числа. Нехай $A > 0$ – фіксоване число. Тоді функція $A\gamma(r)$ також є функцією зростання. Двоїста функція $H_A(r)$ до $A\gamma(r)$ є опуклою на півінтервалі $[0,+\infty)$ і задовольняє умову (0.82) .

Нехай ціла функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{E}(\gamma). \tag{0.85}$$

Тоді існують сталі $A, B > 0$, що не залежать від r , такі що $M(r,f) := \max\limits_{|z|=r}|f(z)| \leq \exp(A\gamma(Br))$ для всіх $r \geq 0$. Отже,

$$\ln M(r,f) \leq A\gamma(Br) = AH(\ln(Br)) = H_A(\ln B + \ln r).$$

Для максимального члену степеневого ряду (0.85) $\mu(r,f) := \max\limits_{n\geq 0} |a_n| r^n$, має місце наступна нерівність

$$\mu(r,f) \leq \ln M(r,f) \leq H_A(\ln B + \ln r).$$

За співвідношенням (0.84) двоїста по Юнгу функція к $H_A(\ln B + r)$ має вигляд $H_A^*(r) - r\ln B$. Тоді

$$\ln |a_n| \leq -H_A^*(n) + n\ln B, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{0.86}$$

Доведемо допоміжну лему.

Лема. *Нехай* $f(z) \in \mathcal{E}(\gamma)$. *Тоді існує послідовність поліномів* $P_n(z)$, $n = 1, 2, \ldots$, *така* , *що* $P_n(z)$ *збігається в просторі* $\mathcal{E}(\gamma)$ *до* $f(z)$ *коли* $n \to \infty$.

Доведення. Нехай функція $f(z)$ представлена у вигляді ряду (0.85) . Тоді існують числа $A, B > 0$ такі, що має місце (0.86) . Отже, застосовуючи (0.86) ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-H_A^*(k) + k\ln B\} r^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\{-H_A^*(k) + k\ln B + k\ln(2r)\} \frac{1}{2^k} \leq$$

$$\max_{k\geq 0} \{\exp\{-H_A^*(k) + k\ln B + k\ln(2r)\}\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq$$

$$2\exp\{\max_{u\geq 0}\{-H_A^*(u) + u\ln(2Br)\}\} =$$

$$2\exp\{H_A^{**}(\ln(2Br)\} = 2\exp\{H_A(\ln(2Br)\} = 2\exp\{A\gamma(2Br)\}.$$

Використовуючи цю нерівність, ми отримаємо, що послідовність часткових сум ряду (0.85) збігається в просторі $\mathcal{E}(\gamma)$ до $f(z)$ коли $n \to \infty$.

Лема доведена.

Доведемо тепер теорему.

а) Доведемо, що $I_f \cdot \mathcal{E}(\gamma)$ включає в себе замикання у просторі $\mathcal{E}(\gamma)$ лінійного многовиду $f(z)\cdot$ $\{$ многочлени від $z\}$. Нехай $g \in \mathcal{E}(\gamma)$, і нехай $\{P_n(z)\}$ – послідовність поліномів така, що $\{fP_n\}$ збігається у просторі $\mathcal{E}(\gamma)$ до $g(z)$ коли $n \to \infty$.

Нехай $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ – множина нулів функції $f(z)$. Так як $\{fP_n\}$ збігається до g рівномірно на кожній компактній множині, то $\{f(z_k)P_n(z_k)\}$ збігається до $g(z_k)$ коли $n \to \infty$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$. Так як $f(z_k)P_n(z_k) = 0$ для будь-якого $k, n \in \mathbb{N}$, то $g(z_k) = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Тоді $G := g/I_f$ – ціла функція. Доведемо, що $G \in \mathcal{E}(\gamma)$.

Наступне міркування ми назвемо "стандартним міркуванням". Нехай $C(a, \rho)$ – круг радіуса ρ з центром в точці a . Нехай $\{C(a_n, \rho_n)\}$ – послідовність кругів. Тоді число

$$L = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{|a_n|\le r} \rho_n \tag{0.87}$$

називається верхньою лінійною щільністю множини $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C(a_n, \rho_n)\}$ [48]. Використовуючи теорему 11 [48, глава 1], легко показати, що для даної функції $f \in \mathcal{E}(\gamma)$, та числа η , $0 < \eta < 1/2$, існують числа $A(\eta), B > 0$ такі, що

$$\ln |f(re^{i\theta})| \ge -A(\eta)\gamma(Br)$$

для всіх $re^{i\theta} \notin C_\eta$, де C_η – множина кругів з верхньою лінійною щільністю меншою ніж η . Можна вважати, що круги C_η не перетинаються.

Отже, існує множина кругів C_η , що неперетинаються з верхньою лінійною щільністю меншою ніж η таких, що нерівність

$$\ln |G(re^{i\theta})| \le A(\eta)\gamma(Br) \tag{0.88}$$

виконується для всіх $re^{i\theta} \notin C_\eta$, де $A(\eta), B > 0$ – постійні, які не залежать від r .

Нехай $re^{i\theta} \in C_\eta$ та нехай $C(a_n, \rho_n)$ – круг із множини C_η такі, що $re^{i\theta} \in C(a_n, \rho_n)$. Із (0.87) випливає, що

$$\rho_n \le \frac{1+\eta}{1-\eta} r.$$

Застосовуючи принцип максимуму модуля до (0.88) , отримуємо, що ця нерівність (можливо з іншими константами) справедлива для всіх $z \in \mathbb{C}$.

б) Доведемо тепер, що замикання $f(z)\cdot$ $\{$ многочлени від $z\}$ містить $I_f \cdot \mathcal{E}(\gamma)$. Ми доведемо, що лінійне многовид $Q(z)\cdot$ $\{$ многочлени від $z\}$ є всюди щільною множиною у просторі $\mathcal{E}(\gamma)$. Нехай функція $g \in \mathcal{E}(\gamma)$. Тоді (використаємо "стандартне міркування") $g/Q_f \in \mathcal{E}(\gamma)$. Нехай $\{P_n(z)\}$ – послідовність многочленів, яка збігається у просторі $\mathcal{E}(\gamma)$ до $g(z)/Q_f(z)$. Тоді послідовність $\{Q_f(z)P_n(z)\}$ збігається до $g(z)$ коли $n \to \infty$.

Звідси слідує доведення теореми.

ВИСНОВКИ

Теореми про розщеплення займають одне з центральних місць в геометрії Рімана і геометрії підмноговидів. Це теореми Топоногова, Чігера-Громолла в геометрії Рімана, теорема Хартмана про циліндрічність підмноговидів невід'ємної секційної кривини, теорема про циліндрічність підмноговидів в евклідовому просторі без вимоги на внутрішню геометрію, які замінюються природною зовнішньою геометричною умовою. У першому розділі розглядаються занурення келерових різноманіть в класі підмноговидів евклідового простору.

Одним з основних питань, розглянутих у другому розділі є дослідження проблем, поставлених М. Громовим, про макроскопічний вимір універсального накриття замкненого ріманового многовиду, зокрема, – гіпотеза про падіння макроскопічного виміру. Отримані результати підтверджують гіпотезу в тривимірному і цілком неспіновом випадках і спростовують її в спиновому разі більшого виміру.

Найбільш значуща гіпотеза Громова про макроскопічний вимір універсального накриття замкненого многовиду, що допускає метрику позитивної скалярної кривини, виявилася тісно пов'язаною з фундаментальною групою многовидів. Встановлено, що в разі спинового многовиду, гіпотеза має позитивне рішення, якщо фундаментальна група задовольняє деяким додатковим умовам, наприклад, є абелевою.

Наступним фундаментальним питанням піднятим в роботі, є опис топології замкнених риманових многовидів, які допускають шарування ковиміру один невід'ємної кривини. Нам вдалося описати топологічну структуру таких шарувань. Це дозволило показати, що фундаментальна група осяжного многовиду повинна бути майже поліциклічною. У разі невід'ємної секційної кривини виявилося, що 3-зв'язний замкнений многовид не допускає шарування невід'ємної секційної кривини. Таким чином, дано вичерпну відповідь на питання, поставлене Г. Штаком про можливість існування шарування ковиміру один невід'ємної секційної кривини на сферах. Крім того, нами дана топологічна характеризація плоских шарувань, а в тривимірному випадку нам вдалося класифікувати замкнені орієнтовані многовиди, що допускають шарування невід'ємної кривини.

Розглянуті питання, пов'язані з зовнішньою геометрією шарувань на тривимірних многовидах. Зокрема, доведено, що для деякої метрики на тривимірній сфері шарування Ріба є сильно сідловим. Пред'явлена конструкція побудови таких шарувань і на інших, зокрема, на однорідних тривимірних многовидах.

Досліджено питання про зв'язок гомотопічного типу розподілу, дотичного шарування на двовимірному торі з абсолютною кривиною цього шарування. Введено поняття абсолютного числа обертання розподілу. Виявилося, що це число обмежує знизу число рібовських компонент шарування. Це дозволило показати, що якщо кривина шарів обмежена зверху спільною константою, то число гомотопічних класів розподілів, дотичних до таких шарувань скінченне.

Також в роботі досліджене питання топологічних і макроскопічних перешкод до існуванню деяких класів відображень в евклідів простір. У спеціальному окремому випадку доведена гіпотеза Коена-Ласка про часткову склейку орбіти вільного $\mathbb{Z}_p$ -простору при відображенні в евклідів простір, доведена неможливість изометрического занурення з плоскою нормальною зв'язністю простору Лобачевського в евклидів простір за умови обмеженості довжини вектора середньої кривини, і в C^2 гладкому випадку дана відповідь на питання, поставлене Ю. Б. Зелінським, про існування 2-опуклого вкладення двовимірної сфери в чотиривимірний евклідів простір.

Третій розділ присвячено дослідженню екстремальних властивостей повних сильно опуклих гіперповерхонь, нормальні кривини яких обмежені знизу деякою додатною константою λ (λ -опуклі гіперповерхні) або затиснуті між двома невід'ємними константами, і їх нерегулярних аналогів. У ріманових многовидах обмеженої кривини доведені теореми порівняння для радіальних кутів, що утворюються між повною вкладеною сильно опуклою гіперповерхнею і радіальними напрямками з фіксованої точки всередині неї. Отримані точні оцінки таких кутів. Аналогічні результати доведені в лоренцевих многовидах. У ріманових просторах досліджено зв'язок між теоремами порівняння радіальних кутів і теоремою прокатування Бляшке. Знайдені точні оцінки ширини і відношення радіусів сферичного шару, в який можна помістити повну вкладену сильно опуклу гіперповерхню в ріманових модельних просторах. Для λ -опуклих гіперповерхонь оцінки ширини шару перенесені на випадок ріманових многовидів обмеженої знакосталої секційної кривини. На двовимірних площинах постійної кривини для замкнених вкладених λ-опуклих кривих вирішена обернена ізопериметрична задача про знаходження кривої, яка обмежує найменшу площу серед кривих даної довжини. Доведені відповідні обернені ізопериметричні нерівності.

В роботі Майлза розглядалися цілі функції, нулі яких лежать на скінченній системі променів. Зокрема, було доведено, що якщо F - ціла функція нескінченного порядку з нулями, розташованими на скінченній системі променів, то її нижній порядок також дорівнює нескінченності. Цей результат легко узагальнюється на субгармонійні функції в комплексній площині: якщо рісовська міра субгармонійній у всій комплексній площині функції V, нескінченного порядку, зосереджена на скінченній системі променів, то її нижній порядок також дорівнює нескінченності. У четвертому розділі доводено аналогічний результат для функцій, субгармонійних у півплощині.

У п'ятому розділі розглядаються лінійні топологічні простори цілих функцій уточненого порядку і нормального типу менше заданого. Отримано форму неперервного лінійного функціоналу на цьому просторі.

У шостому розділі вивчені локально опуклі простори цілих функцій нульового порядку. Основним результатом шостого розділу є теорема, в якій сформульовані необхідні та достатні умови можливості розв'язання інтерполяційної задачі в класі цілих функцій нульового порядку в термінах канонічного добутку і міри Дірака, що визначаються вузлами інтерполяції.

У сьомому розділі отримано два критерії можливості розв'язання задачі простої вільної інтерполяції в класі цілих функцій, заздалегідь не фіксованого скінченного типу відносно нульового уточненного порядку $\rho(r)$. У формулюванні першого критерію бере участь міра, що породжена вузлами інтерполяції, в формулюванні другого – канонічний добуток, породжений цими вузлами. У попередній роботі А.В. Братіщева і Ю.Ф. Коробейника така задача розглядалася при дуже жорстких обмеженнях на уточнений порядок $\rho(r)$, і тим не менше, частина результатів цієї роботи, що відноситься до нульового уточненого порядку потребує корегування.

Питанням опису замкнених ідеалів в класах цілих функцій скінченного гама-типу присвячено восьмий розділ роботи.

Перелік джерел посилання

1. L. A. Florit, W. S. Hui, F. Zheng, *On real Kahler Euclidean submanifolds with non-negative Ricci curvature* // J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **7**, 2005, P. 1–11.
2. L. A. Florit, F. Zheng, *A local and global splitting result for real Kahler Euclidean submanifolds* // Arch. Math. (Basel), **84**, 2005, P. 88–95.
3. M. Dajczer,L. Rodrigues,*Rigidity of real Kahler submanifolds* // Duke Math. J., **53**, 1986, P. 211–220.
4. А. А. Борисенко,*Внешняя геометрия сильно параболических многомерных подмногообразий* // УМН, 1997, **52**:6(318), с. 3–52.
5. А. А. Борисенко. Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий, М. Экзамен, 2003, 671 с.
6. А. А. Борисенко, *О строении l -мерных поверхностей с вырожденной второй квадратичной формой в n -мерном евклидовом пространстве* // Харьков, Укр. геом. сб., 1973, **13**, с. 18–27.
7. А. А. Борисенко, *Внешняя геометрия параболических и седловых многомерных подмногообразий* // УМН, 1998, **53**:6(324), с. 3–52.
8. В. К. Белошапка, С. Н. Бычков, *Об одном свойстве выпуклых гиперповерхностей в* $\mathbf{C}^n$ // Матем. заметки, 1986, **40**:5, с. 621–626.
9. Simon Brendle, Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture, Acta Mathematica, Volume 211, Issue 2, pp 177-190, 2013.
10. Fernando C. Marques, André Neves, Min-Max theory and the Willmore conjecture, Annals of Mathematics, Pages 683-782 from Volume 179 (2014), Issue 2

11. L. A. Santaló, I. Yañez, Averages for Polygons Formed by Random Lines in Euclidean and Hyperbolic Planes, Journal of Applied Probability, Vol. 9, No. 1 (Mar., 1972), pp. 140-157

12. E. Gallego, A. Reventós, Asymptotic behavior of convex sets in the hyperbolic plane, Journal of Differential Geometry, 21 (1985), 63-72.

13. E. Gallego, A. Reventós, Asymptotic Behaviour of λ-Convex Sets in the Hyperbolic Plane, Geometriae Dedicata, 76: 275 - 289, 1999. !4

14. A.M. Naveira, A. Tarrío, Two problems on h-convex sets in the hyperbolic space, Archiv der Mathematik June 1997, Volume 68, Issue 6, pp 514-519

15. *A. A. Borisenko, V. Miquel* Total curvatures of convex hypersurfaces in hyperbolic space // Illinois journal of mathematics — 1999 — **43** No. 1. — p. 61–78.

16. *A. A. Borisenko, E. Gallego, A. Reventos* Relation between area and volume for λ-convex sets in Hadamard manifolds // Differential geometry and its application — 2001 — **14** — p. 267–280.

17. *A. A. Borisenko, V. Miquel* Comparison Theorems on Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds // Annals of global analysis and geometry — 2002 — Issue 2, **21** — p.191–202.

18. А. А. Борисенко, Д. И. Власенко, Асимптотическое поведение объемов выпуклых тел в многообразии Адамара // Математическая физика, анализ, геометрия, — 1999 — **6** №3/4 — стр. 223–233

19. *A. A. Borisenko* Convex sets in Hadamard manifolds // Differential geometry and its application — 2002 — **17** — p. 111–121.

20. A. A. Borisenko, Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds, Chapter in Complex, Contact and Symmetric Manifolds (Editors Oldrich Kowalski, Emilio Musso, Domenico Perrone) Volume 234 of the series Progress in Mathematics, Springer, 2005, pp 27-39

21. Alexander A. Borisenko , Keti Tenenblat, On the total curvature of curves in a Minkowski space, Israel Journal of Mathematics, October 2012, Volume 191, Issue 2, pp 755-769

22. Alexander Borisenko, Eugene Olin, Curvatures of spheres in Hilbert geometry, Pacific Journal of Mathemtics, Vol. 254, No. 2, 2011, pp. 257–273.

23. *Бляшке В.* Круг и шар. – М.: Наука, 1967. – 232 с.

24. *Karcher H.* Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der spharischen und der hyperbolischen Geometrie// Math. Ann. – 1968. – **177**. – P. 122-132.

25. *Милка А. Д.* Об одной теореме Шура – Шмидта// Укр. геом. сб. – 1970 – **8**. – стр. 95-102.

26. *Howard R.* Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary // Manuscripta Math. – 1999. – **99**, No. 4. – P. 471-483.

27. Ионин В. К. Внешнегеометрические свойства выпуклых гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны и некоторые геометрические свойства неполных римановых пространств неположительной кривизны. Автореф. дис. на соиск. учен. степ. д.ф.-м.н. Спец. 01.01.04 /Ионин В.К.; [Ин-т математики им. С.Л. Соболева СО РАН]. - Новосибирск, 2001. - 13 с. ; 20 см. - Библиогр.: с. 12-13 (21 назв.)

28. А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Москва, Наука, 1969, 759 стр.

29. *R. Schneider*, Closed convex hypersurfaces with curvature restrictions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103** (1988), No. 4, 1201-1204.

30. *K. Leichtweiss*, Nearly umbilical ovaloids in the n-space are close to spheres, *Res. Math.*, **36** (1999), 102-109.

31. *В.И. Дискант*, Некоторые оценки для выпуклых поверхностей с ограниченной функцией кривизны, *Сибирский математический журнал*, **12** (1971), 109-125.

32. *J. Scheuer*, Quantitative oscillation estimates for almost-umbilical closed hypersurfaces in Euclidean space, Bulletin of the Australian Mathematical Society / Volume 92 / Issue 01 / August 2015, pp 133-144

33. Hutchings, Michael; Morgan, Frank; Ritoré, Manuel; Ros, Antonio (2002), "Proof of the double bubble conjecture Annals of Mathematics, 2nd Ser. 155 (2): 459–489,

34. R. Howard, A. Treibergs, *A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature*, Rocky Mountain J. Math., Vol. 25, **2** (1995), 635 – 684.

35. M. Ghandehari, An optimal control formulation of the Blaschke – Lebesgue theorem, *J. Math. Ann. Appl.*, **200** (1996), 322-331.

36. Henri Anciaux, Brendan Guilfoyle, On the Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 1831-1839.

37. E. Harrell, II, A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue, J. Geom. Anal. 12 (2002) , no. 1, 81-88.

38. W. Blaschke, Konvexe Bereiche gegebener konstanter Breite und kleinsten Inhalts, Math. Ann. 76 (1915) 504–513.

39. H. Lebesgue, Sur le problème des isopèrimétres et sur les domaines de largeur constante. Bull. Soc. Math. France, C.R. (1914) 72–79.

40. J. B. Miles, *On entire functions of infinite order with radially distributed zeros* // Pacif. J. Math., 1979, **81**:1, P. 131–157.

41. Гришин А. Ф. , *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций* // Математическая физика, анализ, геометрия, 1994, **1**:2, p. 193–215.

42. Малютин К. Г., *Ряды Фурье и δ -субгармонические функции конечного γ -типа в полуплоскости* // Матем. сб. , 2001. — **192**:6, С. 51–70.

43. Титчмарш Е. Теория функций, М.: Наука, 1980.

44. А. Ф. Леонтьев, *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // Докл. АН СССР, **5**, (1948), 785–787.

45. Малютин К. Г., Боженко О. А., *Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка* // Збірник праць Ін-ту математики НАН Украіни, 2013, **10**: 4-5, с. 412–423.

46. Леонтьев А. Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* / А. Ф. Леонтьев // Докл. АН СССР. –1948. – Т. 5. С. 785–787.

47. Малютин К. Г. *Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка* / К. Г. Малютин, О. А. Боженко // Збірник праць Ін-ту математики НАН Украіни. – 2013. – Т. 10, № 4-5. – С. 412–423.

48. Levin, B.Ya. *Distribution of Zeros of Entire Functions* / B.Ya. Levin. – English revised edition Amer. Math. Soc, Providence, RI, 523pp. MR 81k:30011, 1980.

49. Bingham N.H. *Regular variation* / N.H. Bingham, C.M. Goldie , J.L. Teugels. – Cambridge university press, Cambridge, London, New-York, New Rochele, Melburn, Sydney, 1987.

50. Леонтьев А.Ф. *Obobshcheniye ryadov e'ksponent* / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1981.

51. Малютин К. Г. Интерполяция голоморфными функциями: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Малютин Константин Геннадьевич. – Харьков, 1980. – 104 с.

52. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* / Б. Я. Левин — Москва: ГИТТЛ, 1956, 632 с.

53. Sebastião e Silva J. Su certi spazi localmente convessi importanti per le applicazioni / J. Sebastião e Silva // Rend. Math. Univ. Roma. – 1955. – V. 14, No (5). – P. 388–410.

54. А.В. Братищев, Ю.Ф. Коробейник, "Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточнённого порядка *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, **40**:5 (1976), 1102–1127.

Список публикаций по теме НИР

55. Борисенко А.А., *О погружении кэлеровых много-образий в классе выпуклых подмногообразий* // Матем. заметки, 2015, **98**:6, с. 418-431. (Translate in journal "Mathematical Notes"). (Scopus, IFI, Impact Factor: 0,259)

56. A. Borisenko, K. Drach, *Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere* // Journal of Dynamical and Control Systems, 2015, **21**:3, p 311–327. (Scopus, IFI, Impact Factor 0.492)

57. A. A. Borisenko, V. A. Gorkavyy, *In commemoration of Valentin Ivanovich Diskant* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2015, **11**:2, p. 187–196. (Scopus, IFI, Impact Factor 0.432)

58. K. D. Drach, *Some sharp estimates for convex hypersurfaces of pinched normal curvature* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2015, **11**:2, p.111–122. (Scopus, IFI, Impact Factor 0.432)

59. О. А. Боженко, А. Ф. Гришин, К. Г. Малютин, *Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка* // Изв. РАН. Сер. матем., 2015, **79**:2, с. 21–44. (Translate in journal Izvestiya: Mathematics). (Scopus, IFI, Impact Factor 0.74)

60. Борисенко А.А., Драч К.Д., *Теорема сравнения для опорных функций, гиперповерхностей* // Доповіді НАН Украіни, 2015, **3**, с. 11–16.

61. K.G. Malyutin, T.I. Malyutina, *Linear Functionals in Some Spaces of Entire Functions of Finite Order* // Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy, 2015, **6**, p. 1–6.

62. Bolotov D. *Torus Actions in Geometry* // International conference Topology and Applications, Skolkovo Institute of Science and Technology, Skolkovo, Moscow, February 2015, p. 16–21. (Scopus)

63. Малютин К.Г., Студеникина Л.И., Ковалев В.Г., *Линейный функционал в пространстве целых функций* // Труды международной научно-практической конференции Методы и модели специальных разделов математики Курск, 2015, с.75–79.

64. Малютин К.Г., Козлова И.И., *Некоторые свойства уточненного порядка в смысле Бутру* // Труды международной научно-практической конференции, Методы и модели специальных разделов математики Курск, 2015, с.80–84.

65. Malyutin, K.G., Malyutina T.I., *Linear Functionals in Some Spaces of Entire Functions of Finite Order* / K.G. Malyutin, Malyutina T.I. // Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy. – 2015. – Vol. 6. – P. 1-6.

66. Malyutin K. G. *Linear functionals in space of entire functions of finite order and less of the given type* / K. G. Malyutin, L. I. Studenikina // Matematychni Studii. — 2016. — V. 45, № 2. — P. 132 — 136.

67. Малютин К. Г. *Линейный функционал в пространстве целых функций* $[\rho(r), \sigma)$ / К. Г. Малютин , Л. И. Студеникина // Известия ЮЗГУ, серия "Техника и технологии". – 2016. – № 2(19). – С.128–131.

68. Малютин К. Г. *Некоторые свойства уточненного порядка в смысле Бутру* / К. Г. Малютин , И.И. Козлова , О.А. Бредихина, С.В. Шеставина // Известия ЮЗГУ, серия "Техника и технологии". – 2016. – № 1(18). - С.103-106.

69. Bolotov Dmitry. *On Gromov's conjecture for totally non-spin manifolds* / Dmitry Bolotov // Journal of Topology and Analysis. – 2016. – Vol. 8, No. 4. – P. 571-587. (SCOPUS)

70. Назаренко А.М. *Метод энергетического моделирования дифракции упругих волн* / А.М. Назаренко // Харків:Вісник НТУ "ХПІ".- Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2016. –№ 6(1178). – С.74–82.

71. Малютин К.Г., Студеникина Л.И. *Локально выпуклые пространства целых функций нулевого порядка, приложения к интерполяции.* - Научные ведомости Белгородского государст-венного университета. Математика. Физика. 2017. Вып. 46, № 6(255). С. 62-71.

72. K.G. Malyutin, Kh. Al Manji. *Interpolation in a half-plane in a space of functions of finite orde*, Thesises of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Lviv, September 18-23, 2017. http://at.yorku.ca/cgi-bin/abstract/cbnx-55.

73. K.G. Malyutin, I. I. Kozlova, T.V. Shevtsova. *The functions of completely regular growth in the half-plane*, Thesises of International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach. Lviv, September 18-23, 2017. http://at.yorku.ca/cgi-bin/abstract/cbnx-54.

74. МалютинК.Г., Шевцова Т.В. *Мероморфные функции конечного гамма-эпсилон роста* // Материалы молодежной международной научной конференции "Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения Воронеж, 2016, 186-187.

Монографии

75. Малютин К.Г. Интерполяционные задачи типа А.Ф. Леонтьева // в кн. Комплексный анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фун-дам. направления, 91, ред. Борисов Д.И., Кордюков Ю.А., Юлмухаметов Р.С., ФИЗМАТЛИТ, М, 2017 (Scopus)

76. Гришин А.Ф., Малютин К.Г. Тригонометрически выпуклые функции. – Курск: Университетская книга, 2016, 147 с.

77. Малютин К.Г., Студеникина Л.И. Локально выпуклые пространства целых функций. – Курск: Университетская книга, 2017, 60 с.

Учебники

78. Горяйнов В.В., Малютін К.Г., Козлова І.І Комплексний аналіз. – Суми:Сумський державний університет.