

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет

І. О. Князь, Я. О. Ляшенко

**Посібник до лекційних і практичних  
занять із предмету  
”Медична та біологічна фізика”**

Навчальний посібник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету



Суми  
Сумський державний університет  
2018

УДК 53.047:57(075.8)

К54

Рецензенти:

*О. Д. Погребняк* – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри наноелектроніки Сумського державного університету;

*О. М. Завражна* – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та методики навчання фізики Сумського державного педагогічного університету імені А. С. Макаренка.

*Рекомендовано до видання  
вченою радою Сумського державного університету  
(протокол № 4 від 14 грудня 2017 року)*

**Князь І. О.**

К54 Посібник до лекційних і практичних занять із предмету  
”Медична та біологічна фізика” : навч. посіб. /  
І. О. Князь, Я. О. Ляшенко. – Суми :  
Сумський державний університет, 2018. – 209 с.

ISBN 978-966-698-260-8

У навчальному посібнику розглядаються питання, пов’язані з перебігом фізичних процесів у біологічних системах і в організмі людини. Він розрахований на студентів закладів вищої освіти медичних спеціальностей. Посібник також може бути корисний для студентів спеціальностей, де фізика є загальноосвітньою дисципліною.

**УДК 53.047:57(075.8)**

© Князь І. О., Ляшенко Я. О., 2018

ISBN 978-966-698-260-8

© Сумський державний університет, 2018

## Зміст

РОЗДІЛ 1. Зв'язок фізики з медициною. Основи гемодинаміки .....	8
1.1. Зв'язок фізики з медициною .....	8
1.2. Основи гідро- та гемодинаміки .....	15
1.2.1. Основні гідродинамічні показники та закони . . . .	16
1.2.2. Гемодинамічні показники в різних частинах судинної системи . . . . .	37
1.2.3. Пульсова хвиля. Модель Франка . . . . .	39
1.2.4. Кровотік при локальному звуженні судин. Резистивна модель . . . . .	44
Питання для самоконтролю .....	48
 РОЗДІЛ 2. Механічні властивості твердих тіл .....	 50
2.1. Стискання та розтягування .....	50
2.2. Активне скорочення м'яза .....	53
2.3. Зсунення .....	58
2.4. Вигин .....	59
2.5. Кручення .....	60
2.6. Міцність та руйнування .....	61
2.7. Механічні властивості біологічних тканин .....	64
Питання для самоконтролю .....	65
 РОЗДІЛ 3. Механічні коливання та хвилі. Акустика .	 67
3.1. Гармонічні коливання .....	67
3.2. Кінетична і потенціальна енергія коливального руху .....	69

3.3. Згасні коливання .....	70
3.4. Вимушені коливання .....	72
3.5. Механічні хвилі .....	74
3.6. Енергія хвиль .....	76
3.7. Ефект Доплера .....	77
3.8. Звукові коливання .....	79
3.9. Акустика .....	79
3.10. Хвильовий опір .....	82
3.11. Звукові методи дослідження .....	84
Питання для самоконтролю .....	86
<b>РОЗДІЛ 4. Основи термодинаміки .....</b>	<b>87</b>
4.1. Перший початок термодинаміки .....	89
4.2. Ізопроееси .....	92
4.3. Другий початок термодинаміки. Теплова машина .....	98
4.4. Цикл Карно .....	102
4.5. Теорема Клаузіуса. Ентропія .....	105
4.6. Вимірювання температури .....	108
Питання для самоконтролю .....	111
<b>РОЗДІЛ 5. Електростатика .....</b>	<b>112</b>
5.1. Точковий заряд. Закон Кулона. Електричне поле .....	112
5.2. Силова характеристика електричного поля .....	113
5.3. Енергетична характеристика електричного поля .....	114

5.4. Електричний диполь. Мультиполь .....	116
5.5. Електроємність. Конденсатори. Енергія електричного поля	120
5.6. Фізичні основи електрографії .....	122
Питання для самоконтролю .....	126
<b>РОЗДІЛ 6. Електричний струм .....</b>	<b>128</b>
6.1. Сила та густина струму .....	128
6.2. Закон Ома для однорідної ділянки. Закон Джоуля – Ленца	130
6.3. Електрорушійна сила джерела струму .....	132
6.4. Правила Кірхгофа .....	133
6.5. Фізичні процеси в тканинах організму під впливом струму	135
6.5.1. Вплив струму на організм людини . . . . .	135
6.5.2. Застосування струму в лікувальних процедурах . .	137
Питання для самоконтролю .....	139
<b>РОЗДІЛ 7. Магнітне поле .....</b>	<b>140</b>
7.1. Індукція магнітного поля .....	140
7.2. Потік магнітної індукції .....	142
7.3. Магнітна взаємодія струмів. Закон Ампера .....	142
7.4. Робота з переміщення провідника із струмом у магнітному полі .....	143
7.5. Сила Лоренца .....	144
7.6. Електромагнітна індукція .....	145
7.7. Магнітобіологія. Застосування магнітних полів у медицині	148
Питання для самоконтролю .....	151

РОЗДІЛ 8. Електромагнітні коливання і хвилі .....	152
8.1. Електромагнітні хвилі .....	152
8.2. Вільні електромагнітні коливання .....	154
8.2.1. Незгасні коливання .....	156
8.2.2. Згасні коливання .....	156
8.2.3. Аперіодичний розряд конденсатора на резистор (сильне загасання) .....	157
8.3. Медична класифікація частотних інтервалів .....	159
Питання для самоконтролю .....	164
РОЗДІЛ 9. Оптика .....	166
9.1. Інтерференція світла .....	166
9.2. Дифракція світла .....	172
9.3. Поляризація світла .....	172
9.4. Дисперсія світла .....	176
9.5. Геометрична оптика. Оптичні пристрої .....	177
9.5.1. Порушення зору в людини .....	181
9.5.2. Оптичні пристрої, що озброюють око .....	181
Питання для самоконтролю .....	183
РОЗДІЛ 10. Теплове випромінювання тіл .....	184
10.1. Теплове випромінювання тіл .....	184
10.2. Застосування теплового випромінювання тіл у медицині ..	189
Питання для самоконтролю .....	194
РОЗДІЛ 11. Атомні ядра. Радіоактивність. Елементи дозиметрії .....	195

11.1. Основні властивості атомних ядер .....	195
11.2. Радіоактивність .....	196
11.3. Основний закон радіоактивного розпаду .....	198
11.4. Взаємодія радіоактивного випромінювання з речовиною ...	199
11.5. Застосування радіонуклідів у медицині .....	200
11.6. Доза опромінювання .....	201
11.7. Захист від радіоактивного випромінювання .....	202
11.8. Природний радіоактивний фон Землі .....	203
Питання для самоконтролю .....	207
Список використаної та рекомендованої літератури .....	208

## РОЗДІЛ 1

### ЗВ'ЯЗОК ФІЗИКИ З МЕДИЦИНОЮ. ОСНОВИ ГЕМОДИНАМІКИ

#### 1.1. Зв'язок фізики з медициною

Розглянемо деякі складові зв'язку фізики з медициною:

*1. Фізичність процесів, що проходять в організмі на макрорівні і молекулярному рівні.*

Наприклад, кровообіг пов'язаний із течією рідини (розділ фізики "Гідродинаміка"), поширенням пружних коливань по судинах (розділ фізики "Коливання і хвилі"), механічною роботою серця (розділ фізики "Механіка"), генерацією біопотенціалів (розділ фізики "Електрика") та ін. Подих пов'язаний із рухом газу (аеродинаміка), тепловіддачею (термодинаміка), випаровуванням (фазові перетворення) та т. ін.

*2. Методи і засоби діагностики захворювань, які ґрунтуються на використанні фізичних принципів та ідей.*

Наприклад, вимірювання тиску крові (механічна величина) використовується для оцінювання ряду захворювань. Прослуховування звуків, джерела яких знаходяться всередині організму, дозволяє одержувати інформацію про нормальну або патологічну поведінку ряду органів. Спектральний аналіз використовують у гігієні, фармакології та біології. Досягнення атомної й ядерної фізики — рентгенодіагностика, метод мічених атомів тощо.

Загальновідомі засоби діагностики: медичний термометр (теплове розширення ртуті), електрокардіографія (запис біопотенціалів), мікроскоп та медичні прилади, що базуються на волоконній оптиці (огляд внутрішніх порожнин організму) і т. ін.

*3. Вплив фізичних факторів на організм із метою лікування.*

Наприклад, із метою лікування широко використовують процеси



оохолодження та нагрівання. Електричний і електромагнітний впливи широко застосовують у фізіотерапії. Також використовують ультрафіолетове, інфрачервоне, рентгенівське і гамма-випромінювання.

4. *Медична техніка.* Сучасна медицина базується на широкому використанні різноманітної апаратури, що здебільшого є фізичною за конструкцією.

5. *Фізичні властивості матеріалів, які використовують у медицині.* Пов'язки, інструменти, електроди, протези та ін. перебувають в умовах впливу навколишнього середовища, зокрема в безпосередньому оточенні біологічних середовищ. Щоб оцінити можливість експлуатації подібних виробів у реальних умовах, необхідно мати знання про фізичні властивості матеріалів, з яких вони зроблені. Наприклад, для виготовлення протезів (зуби, судини, клапани та ін.) важливими є знання механічної міцності, стійкості до багаторазових навантажень, еластичності, теплопровідності, електропровідності і т. ін.

*Біофізика* — це наука, яка вивчає фізичні та фізико-хімічні процеси, що проходять у біосистемах на різних рівнях організації і є основою фізіологічних актів. Біофізика = фізика + математика + хімія + біологія.

*Основні завдання біофізики:*

1. Розкриття загальних закономірностей поведінки відкритих нерівноважних систем. Теоретичне обґрунтування термодинамічних основ життя.
2. Наукове тлумачення явищ індивідуального та еволюційного розвитку, саморегуляції та самовідтворення.
3. З'ясування зв'язків між будовою і функціональними властивостями біополімерів та інших біологічно активних речовин.

4. Створення і теоретичне обґрунтування фізико-хімічних методів дослідження біооб'єктів.
5. Фізичне тлумачення великого комплексу функціональних явищ (генерація і розподіл нервового імпульсу, м'язове скорочення, рецепція, фотосинтез та ін.).

*Розділи біофізики:*

1. Молекулярна біофізика — вивчає будову і фізико-хімічні властивості, біофізику молекул.
2. Біофізика клітини — вивчає особливості будови і функціонування клітинних і тканинних систем.
3. Біофізика складних систем — вивчає кінетику біопроеесів, поведінку в часі різноманітних процесів, властивих живій матерії, і термодинаміку біосистем.

Розглянемо питання перетворення енергії в біологічних системах. Енергія, як відомо, — це здатність системи виконувати роботу (яка, до речі, не завжди реалізується). Наука, що вивчає перетворення енергії в біологічних системах, називається біоенергетикою.

*Системи та об'єкти.* Біологічною системою ми будемо називати сукупність живих організмів, окремий живий організм або будь-яку його частину. Наприклад, орган, тканина, сукупність клітин, окрема клітина, частина клітини, метаболіти, ферменти і рецептори, що взаємодіють чи взаємоперетворюються у складі живого організму.

Живий організм, з яким проводять експерименти, чи виділені з нього частини (органи, клітини, частини клітин, клітинні органели та ін.) ми будемо називати біологічними об'єктами.

Експериментальна робота з біологічними об'єктами ставить своїм завданням моделювання процесів, що проходять у живому

організмі. Таке моделювання — основа наукового вивчення явищ, але вчений завжди повинен дуже обережно та уважно вибирати моделі, щоб вони відповідали реальним, а не вигаданим ситуаціям і процесам у живих організмах.

Біологічні системи, що досліджуються в біоенергетиці, можуть бути ізольованими, замкненими чи відкритими. Нагадаємо значення цих запозичених із термодинаміки термінів.

*Відкрита система* обмінюється енергією і матерією з оточуючим середовищем. *Замкнена система* не обмінюється речовиною з оточуючим середовищем, але може обмінюватися енергією. *Ізольована система* не може обмінюватися з оточуючим середовищем ні енергією, ні речовиною. Приклад ізольованої системи — термос, замкненої — закрита пляшка з гарячим чаєм, відкритої — чай у блюдечку.

Будь-яка біологічна система насправді є відкритою. Але все у світі відносно. І в багатьох випадках окремі частини біологічної системи можуть розглядатися як замкнені (це досить звичайний випадок) або навіть як ізольовані.

*Сила, робота та енергія.* З фізики ми знаємо, що *сила* — це причина зміни швидкості тіла. Якщо вважати, що маса тіла  $m$  і його прискорення  $\vec{a}$  визначені, то визначенням сили буде закон

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (1.1)$$

За визначенням, робота  $A$  дорівнює добутку сили  $\vec{F}$ , що діє на деяке тіло, на переміщення  $\vec{s}$  цього тіла в напрямку дії сили. І сила, і переміщення — вектори; робота ж є скалярною величиною, що дорівнює добутку цих векторів:

$$A = \vec{F}\vec{s}. \quad (1.2)$$

Будучи скаляром, робота розглядається в термодинаміці, а отже, й у біоенергетиці як величина алгебраїчна, тобто що має знак. Якщо тіло масою  $m$  рухається вгору по похилій площині під дією прикладеної сили  $\vec{F}$ , то робота буде дорівнювати  $\vec{F}\vec{s}$ . Ця робота, здійснена над системою, частково використовується на збільшення потенціальної енергії системи, що в даному разі дорівнює  $mgh$ .

Зазначимо, що за наявності сил тертя не вся робота витрачається на збільшення потенціальної енергії, а лише її частина. Ця енергія потім може бути знову перетворена на роботу, наприклад на роботу з піднімання іншого тіла на деяку висоту. Ця робота, як і раніше, дорівнює добутку шляху і прикладеної до тіла сили, але це вже не робота над розглянутою системою, а робота самої системи. Вона супроводжується не збільшенням, а зменшенням потенціальної енергії даного тіла.

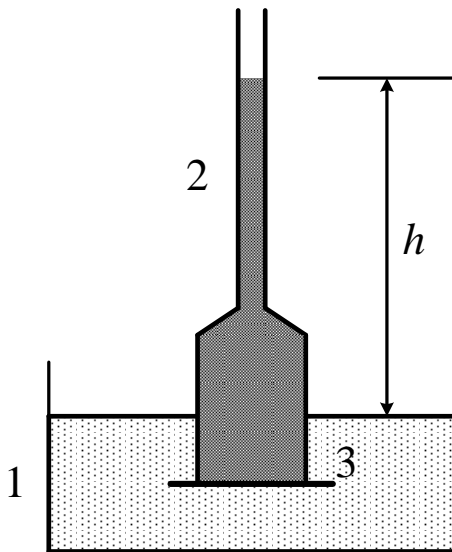
Щоб не заплутатися в знаках, домовимося, що робота, яка приводить до збільшення енергії розглянутої системи, тобто робота над системою, має позитивний знак. Робота, що здійснюється самою системою, яка приводить до зменшення енергії системи, має від'ємний знак.

*Сили.* У принципі, в біологічних системах діють ті самі сили, що й у неживій природі, але відносна роль тих чи інших сил різна. Так, сили гравітації важливі для життя організму, але прямо не впливають на функціонування клітин і тканин. Це ж стосується і магнітних сил. На біологічні мембрани впливає сила осмотичного тиску, яку можна не брати до уваги під час розгляду багатьох інших біологічних систем. Електричні сили, що відіграють величезну роль на молекулярному рівні, навряд чи мають велике значення для функціонування системи кровообігу чи дихання на макроскопічному, органному рівні.

Нагадаємо деякі сили, що розглядаються у фізиці:

- сили інерції, включаючи відцентрову і доцентрову;
- пружні сили, наприклад сила стисненої пружини;
- сила тертя, зокрема сила опору рідкого середовища;
- сила тиску газу на стінку судини;
- електричні сили, що діють на заряджені тіла.

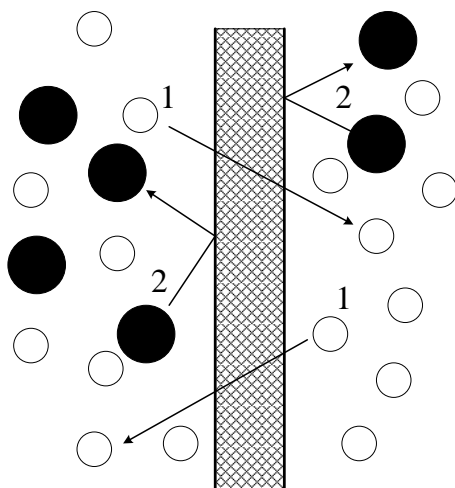
У фізичній хімії розглядається також сила *осмотичного* тиску, на якій варто зупинитися докладніше. Нехай у деяку посудину з водою чи яким-небудь іншим розчинником опускають трубку, нижній кінець якої закритий напівпроникною мембраною (див. рис. 1.1). *Напівпроникною* ми будемо називати мембрану, добре проникну



**Рисунок 1.1.** Дослід, що доводить існування осмотичного тиску. У посудину 1 з розчинником (наприклад, чистою водою) опущена трубка 2, закрита знизу напівпроникною мембраною 3. У трубку налитий розчин речовини, для якого мембрана непроникна. При цьому створюється тиск ( $h$  — висота стовпа рідини)

для розчинника і погано проникну для розчинених речовин (принаймні деяких із них). Зазначимо, що осмотичний тиск створюють лише ті речовини, які через мембрану не проходять. Речовини, що створюють осмотичний тиск, називаються осмотично-активними речовинами. Біологічні мембрани порівняно добре проникні для води, іонів і водорозчинних (гідрофільних) речовин. Тому велика частина водорозчинних речовин у живій клітині має осмотичну активність.

Розглянемо, який тиск на напівпроникну мембрану створюють молекули розчинника і розчиненої речовини. З газових законів ми



**Рисунок 1.2.** Тиск на напівпроникну мембрану молекулами розчинника (маленькі пусті кружечки) і розчиненої речовини. Молекули розчинника вільно проходять через мембрану і тиску на неї не створюють (1). Молекули розчиненої речовини не проходять через мембрану і створюють тиск, подібний до тиску газу на стінку

знаємо, що цей тиск описується рівнянням  $pV = \nu RT$ , де  $p$  — тиск (Па);  $V$  — об'єм ( $\text{м}^3$ );  $\nu$  — кількість речовини (моль);  $R$  — газова стала ( $\text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ );  $T$  — температура (К). У нашому випадку  $p$  — це осмотичний тиск. Величина  $C = \nu/V$  — це молярна концентрація осмотично-активних частинок, звідси знаходимо рів-

няння осмотичного тиску:

$$p = RTC. \quad (1.3)$$

Зазначимо, що молярна концентрація речовини зовсім не обов'язково дорівнює молярній концентрації осмотично-активних частинок (яку ще називають осмотичною концентрацією, чи осмолярністю).

Солі, такі як NaCl чи KCl, у водному розчині цілком дисоціюють, і їх осмотична концентрація вдвічі перевищує молярну концентрацію. Молекула CaCl<sub>2</sub> дисоціює у водному розчині на три частинки, тому її осмотична концентрація буде перевищувати молярну втричі.

Взагалі осмотична концентрація перевищує молярну в таку кількість разів, на скільки частинок розпадається молекула при електричній дисоціації. Іноді осмотичну концентрацію, щоб не плутати з молярною, виражають не в молях, а в осмомолях (або осмолях).

Концентрація речовини в клітині чи інших біологічних системах визначається хімічними методами і може відрізнитися від осмотичної концентрації і з іншої причини, крім електролітичної дисоціації, а саме через зв'язування частини молекул чи іонів білками та іншими макромолекулами або субклітинними структурами.

Зв'язані іони не дифундують і не створюють осмотичного тиску. Осмотичну активність має лише та частина речовини, яка перебуває у вільному, а не зв'язаному з великими структурами стані.

## 1.2. Основи гідро- та гемодинаміки

Гемодинаміка — наука, що вивчає закони руху крові у судинній системі. Загальні закони руху рідини, що вивчаються гідроди-

намікою, встановлені в рамках класичної фізики і є основою для опису гемодинамічних процесів у живому організмі. Однак складна організація реальної системи кровообігу, специфічні властивості руху крові, механічні характеристики кровоносних судин і ряд інших факторів призводять до значних труднощів щодо отримання повного кількісного опису руху крові в організмі. У той самий час лише на основі кількісних закономірностей системи кровообігу можливе глибоке розуміння гемодинамічних явищ, розроблення методів діагностики та лікування цілого ряду захворювань.

### 1.2.1. Основні гідродинамічні показники та закони

**Тиск** — це сила, що діє з боку рідини на одиницю площі поверхні:

$$P = \frac{F}{S}. \quad (1.4)$$

**Об'ємна швидкість**  $V$  — величина, яка чисельно дорівнює об'єму рідини  $Q$ , що перетікає за одиницю часу через даний переріз труби:

$$V = \frac{Q}{t}. \quad (1.5)$$

**Лінійна швидкість**  $v$  задається шляхом  $l$ , який проходять частинки рідини за час  $t$ :

$$v = \frac{l}{t}. \quad (1.6)$$

Об'ємна та лінійна швидкості пов'язані простим співвідношенням

$$V = vS, \quad (1.7)$$

де  $S$  — площа поперечного перерізу потоку рідини. Оскільки рідина нестислива (тобто її густина всюди однакова), то через будь-який переріз труби за одиницю часу  $t = 1$  с протікають однакові



об'єми рідини:

$$Q = vS = \text{const.} \quad (1.8)$$

Це співвідношення називається **умовою нерозривності струменя**. Рівняння нерозривності струменя належить рівною мірою до руху будь якої рідини, зокрема й в'язкої. При описі фізичних законів течії крові по судинах вводиться припущення, що кількість циркулюючої крові в організмі є сталою. Звідси випливає, що об'ємна швидкість кровотоку в будь-якому перерізі судинної системи також стала:  $V = \text{const.}$

У реальних рідинах у міру їх руху трубою потенціальна енергія витрачається на роботу з подолання сил внутрішнього тертя, тому тиск рідини вздовж труби зменшується.

**Закон Стокса.** Розглянемо рух твердого сферичного тіла в рідині. Залежність сили опору під час його руху посудиною виражається законом Стокса:

$$F_{fr} = 6\pi\eta r v, \quad (1.9)$$

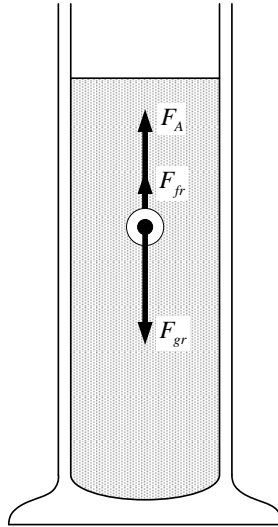
де  $r$  — радіус кульки;  $v$  — швидкість її руху;  $\eta$  — в'язкість рідини. При падінні кульки у в'язкому середовищі (рис. 1.3) на неї діють три сили. По-перше, це сила тяжіння

$$F_{gr} = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g, \quad (1.10)$$

де  $\rho$  — густина речовини кульки. По-друге, виштовхувальна (архімедова) сила

$$F_A = \rho_{liq} g V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{liq} g, \quad (1.11)$$

де  $V$  — об'єм тіла, або об'єм витісненої кулькою рідини, а величина  $\rho_{liq}$  — це густина рідини, в якій кулька знаходиться. По-третє, сила тертя (сила опору з боку рідини)  $F_{fr}$ , обчислювана за вище-



**Рисунок 1.3.** Сили, що діють на тверде тіло під час руху в рідині

наведеною формулою (1.9).

При потраплянні кульки у в'язку рідину її швидкість зменшується. Оскільки сила опору прямо пропорційна швидкості, вона буде зменшуватися до того часу, поки рух не стане рівномірним. У цьому разі сума сил, що діють на кульку, за другим законом Ньютона дорівнює нулю:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_{fr} = 0, \quad (1.12)$$

або в скалярній формі при підстановці відповідних виразів для сил

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{liq} g - 6\pi \eta r v_0 = 0, \quad (1.13)$$

де  $v_0$  — швидкість рівномірного руху кульки. З (1.13) одержуємо

$$v_0 = \frac{2(\rho - \rho_{liq})r^2 g}{9\eta}. \quad (1.14)$$

Формула (1.14) справедлива також для руху кульки в газі. Вона може бути використана для обчислення часу випадання пилу в повітрі. Для повітря — середовища із завислими різними частинками пилу — в'язкість за температури 20 °C становить  $\eta = 1,82 \cdot 10^{-5}$  Па · с. Близько 80 % пилу становлять частинки розміром від 5 до 0,2 мкм. Якщо вважати густину пилу такою, що дорівнює густині землі ( $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>), визначимо, що швидкість осідання пилу знаходиться в межах 0,75 – 0,001 см/с. Для повного випадання такого пилу в кімнаті заввишки 3 метри буде потрібно близько 3 діб за умови повної нерухомості повітря і відсутності броунівського руху.

*Перехідний режим.* Ми вже одержали значення стаціонарної швидкості  $v_0$  (1.14), з якою осідають сферичні частинки в однорідному середовищі. Але поведінка частинки перед тим, як вона набере стаціонарної швидкості  $v_0$ , залежить від її початкової швидкості. Процеси, які передують стаціонарному режиму, називаються перехідними процесами. Розглянемо такий процес на прикладі задачі, що розглядається в цьому параграфі. Другий закон Ньютона в скалярній формі запишемо у вигляді (пор. з (1.12)):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - F_A - F_{fr}. \quad (1.15)$$

Після підстановки виразів для сили тертя  $F_{fr}$  і сили Архімеда  $F_A$ , а також з урахуванням маси кульки  $m = 4/3\pi r^3\rho$  будемо мати

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho g - \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{liq}g - 6\pi\eta r \frac{dx}{dt}, \quad (1.16)$$

де враховано, що швидкість руху кульки  $v$  є першою похідною від координати  $v \equiv dx/dt$ . Рівняння (1.16) можна записати у більш компактній формі:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{9\eta}{2r^2\rho} \frac{dx}{dt} = \frac{g(\rho - \rho_{liq})}{\rho}. \quad (1.17)$$

Зазначимо, що з рівняння (1.17) легко одержати формулу для визначення стаціонарної швидкості руху  $v_0$  (1.14). Якщо швидкість не змінюється, то її похідна за часом дорівнює нулю:  $dv/dt \equiv d^2x/dt^2 = 0$ . Легко бачити, що при  $d^2x/dt^2 = 0$  із рівняння (1.17) можна одержати вираз для визначення швидкості руху кульки  $dx/dt \equiv v_0$ , яка задається формулою (1.14).

Диференціальне рівняння (1.17) має розв'язок у вигляді

$$x(t) = C_1 - \frac{2r^2\rho C_2}{9\eta} \exp\left(\frac{-9\eta}{2r^2\rho}t\right) + \frac{2r^2g(\rho - \rho_{liq})t}{9\eta}, \quad (1.18)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  — константи, які визначаються з фізичного змісту задачі. Залежність (1.18) описує зміну координати  $x$  кульки з часом  $t$ . Перша похідна від координати — це швидкість кульки  $v(t)$ :

$$v(t) \equiv \frac{dx}{dt} = C_2 \exp\left(\frac{-9\eta}{2r^2\rho}t\right) + \frac{2r^2g(\rho - \rho_{liq})}{9\eta}. \quad (1.19)$$

Визначимо значення констант  $C_1$  і  $C_2$ . Для цього нам потрібні початкові умови. Нехай у початковий момент часу  $t = 0$  швидкість кульки дорівнює  $\tilde{v}_0$ , а її координата становить  $\tilde{x}_0$ . Для визначення значень  $C_1$  і  $C_2$  ми повинні розв'язати систему рівнянь  $x(0) = \tilde{x}_0$  і  $v(0) = \tilde{v}_0$ , яка з урахуванням (1.18) і (1.19) набирає вигляду

$$\tilde{x}_0 = C_1 - \frac{2r^2\rho C_2}{9\eta}, \quad (1.20)$$

$$\tilde{v}_0 = C_2 + \frac{2r^2g(\rho - \rho_{liq})}{9\eta}. \quad (1.21)$$

Останні два рівняння дозволяють знайти значення  $C_1$  і  $C_2$ :

$$C_1 = \tilde{x}_0 + \frac{2\tilde{v}_0r^2\rho}{9\eta} - \frac{4r^4\rho g(\rho - \rho_{liq})}{81\eta^2}, \quad (1.22)$$

$$C_2 = \tilde{v}_0 - \frac{2r^2g(\rho - \rho_{liq})}{9\eta}. \quad (1.23)$$

З урахуванням (1.22) і (1.23) рівняння (1.18) і (1.19) набувають остаточного вигляду:

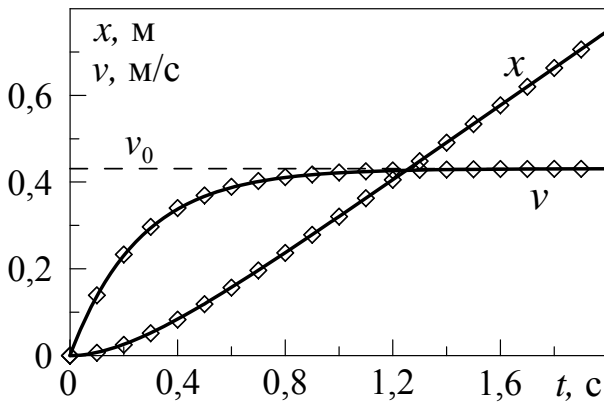
$$x(t) = \tilde{x}_0 + \tilde{v}_0\tau + \frac{\tau g(\rho - \rho_{liq})(t - \tau)}{\rho} - \tau \left( \tilde{v}_0 - \frac{\tau g(\rho - \rho_{liq})}{\rho} \right) e^{-t/\tau}, \quad (1.24)$$

$$v(t) = \frac{\tau g(\rho - \rho_{liq})}{\rho} (1 - e^{-t/\tau}) + \tilde{v}_0 e^{-t/\tau}, \quad (1.25)$$

де введений час релаксації

$$\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta}. \quad (1.26)$$

Розглянемо рух частинки в рідині, що задається рівняннями (1.24) і (1.25), за фіксованих параметрів. Нехай частинка знаходиться у воді з густиною  $\rho = 998,2 \text{ кг/м}^3$  і в'язкістю  $\eta = 1,02 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$ . Густина частинки виберемо дещо більшу за густину рідини —  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ , а її радіус  $r$  нехай дорівнює  $r = 10^{-3} \text{ м}$ . Прискорення вільного падіння в полі сил земного тяжіння має стандартне значення  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ . Розглядатимемо ситуацію, в якій у початковий момент часу частинка не рухається, тобто початкова швидкість  $v_0 = 0 \text{ м/с}$ , і при цьому має нульову координату  $x_0 = 0 \text{ м}$ . Результат розрахунків за формулами (1.24) і (1.25) за таких параметрів показаний на рис. 1.4. На рисунку показані залежності координати кульки та її швидкості від часу  $t$ . Штрихова пряма відповідає стаціонарній швидкості руху кульки  $v_0$ , яка за обраних параметрів становить  $v_0 \approx 0,431 \text{ м/с}$ . Із рисунка бачимо, що з часом швидкість  $v$  наближається до стаціонарного значення  $v_0$ , а залежність координати від часу  $x(t)$  при цьому стає лінійною функцією, яка на графіку подається прямою. Оскільки ми розглядаємо ситуацію  $\rho > \rho_{liq}$ , швидкість руху частинки  $v$  додатна (частинка тоне



**Рисунок 1.4.** Залежності швидкості  $v$  і координати  $x$  частинки, зображеної на рис. 1.3, від часу  $t$

в рідині). У зворотній ситуації  $\rho < \rho_{liq}$  частинка буде спливати, а стаціонарна швидкість її руху  $v_0$  при цьому змінить знак.

Особливістю цього розгляду є те, що нам вдалося знайти аналітичний розв'язок диференціального рівняння (1.17), записаний як (1.24). Однак здебільшого це не є можливим, оскільки диференціальні рівняння є дуже складними. Наприклад, відомо, що в'язкість  $\eta$  багатьох рідин залежить від градієнта швидкості нелінійно, і в такому випадку відповідне диференціальне рівняння не має аналітичного розв'язку. Однак у таких випадках відповідні диференціальні рівняння можуть бути розв'язані чисельно на комп'ютері. Існує багато методів чисельного розв'язання диференціальних рівнянь. Розглянемо найпростіший із них, що має назву методу Ейлера. Він дозволяє розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку, що містять лише першу похідну. Рівняння вищих порядків при цьому необхідно подавати як системи рівнянь першого порядку. Ми знаємо, що швидкість — це перша похідна від координати. Отже, диференціальне рівняння другого порядку (1.17) можна подати як систему двох диференціальних рівнянь першого

порядку:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{9\eta v}{2r^2\rho} + \frac{g(\rho - \rho_{liq})}{\rho}, \quad (1.27)$$

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (1.28)$$

Метод Ейлера полягає в тому, що похідна замінюється різницевою схемою:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, \quad \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{i+1} - v_i}{\Delta t}. \quad (1.29)$$

Співвідношення (1.29) буде тим точнішим, чим менше значення матиме обраний крок за часом  $\Delta t$ . З урахуванням (1.29) система рівнянь (1.27) і (1.28) може бути розв'язана за ітераційною процедурою:

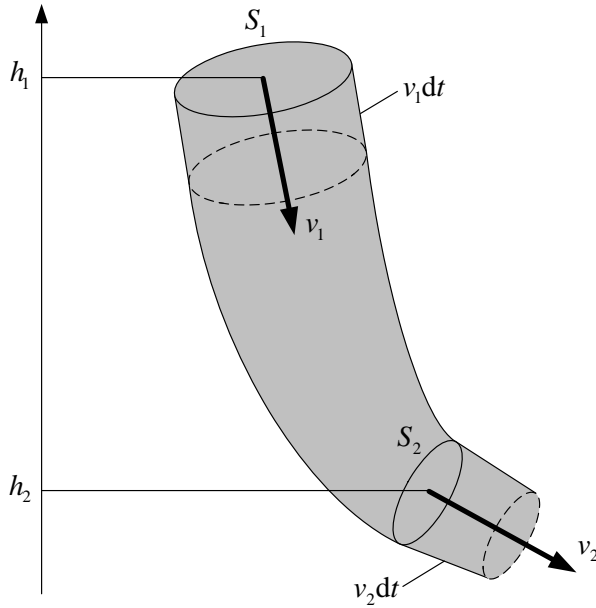
$$v_{i+1} = v_i + \left( -\frac{9\eta v_i}{2r^2\rho} + \frac{g(\rho - \rho_{liq})}{\rho} \right) \Delta t, \quad (1.30)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i \Delta t. \quad (1.31)$$

Процедура (1.30) і (1.31) дозволяє одержати значення величин  $x_{i+1}$  і  $v_{i+1}$  у момент часу  $t_{i+1}$ , знаючи значення  $x_i$  і  $v_i$  у попередній момент часу  $t_i = t_{i+1} - \Delta t$ . Така процедура може бути легко реалізована програмно на комп'ютері. При цьому введені вище початкові значення величин  $x_0$  і  $v_0$  — це значення цих параметрів на початковому кроці різницевої схеми, тобто  $x_1 = x_0$  і  $v_1 = v_0$  на першому кроці при  $i = 1$ . На рисунку 1.4 символами показані чисельно знайдені (за допомогою ітераційної процедури (1.30) і (1.31) із шагом інтегрування  $\Delta t = 0,01$  с) залежності. Із рисунка бачимо, що числові результати повністю збігаються з одержаними аналітично.

**Рівняння Бернуллі.** Рівняння Бернуллі може бути одержане з використанням закону збереження енергії. За відсутності сил

24 Розд. 1. Зв'язок фізики з медициною. Основи гемодинаміки  
 в'язкості приріст сумарної енергії маси води, що знаходиться в трубці струму між перерізами  $S_1$  і  $S_2$  (див. рис. 1.5), дорівнює роботі сил тиску. З рисунка 1.5 випливає, що за час  $dt$  течія рідини екви-



**Рисунок 1.5.** Рух рідини в трубці зі змінним діаметром

валентна переміщенню елемента масою

$$dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt \quad (1.32)$$

з висоти  $h_1$  на висоту  $h_2$  й одночасному зростанню його швидкості з величини  $v_1$  до величини  $v_2$ .

Приріст кінетичної енергії становить

$$dE_k = \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) dm = \frac{\rho}{2} (S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) dt. \quad (1.33)$$



Приріст потенціальної енергії

$$dE_p = g(h_2 - h_1) dm = \rho g(S_2 v_2 h_2 - S_1 v_1 h_1) dt. \quad (1.34)$$

Сила тиску визначається як

$$F = pS, \quad (1.35)$$

тому робота сил тиску  $dA = Fdl$  буде дорівнювати

$$dA = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt. \quad (1.36)$$

Записавши рівняння енергетичного балансу у вигляді

$$dE_K + dE_p = dA, \quad (1.37)$$

одержимо рівняння Бернуллі:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2. \quad (1.38)$$

Статичний тиск  $p$  чисельно дорівнює роботі сил тиску, здійснюваної над одиничним об'ємом рідини; гідродинамічний тиск  $\rho v^2/2$  — це кінетична енергія одиниці об'єму, а величина гідростатичного тиску  $\rho g h$  є потенціальною енергією одиничного об'єму в полі сили тяжіння.

У реальних потоках рідини завжди наявні сили в'язкого тертя. У результаті на тертя між шарами рідини витрачається частина механічної енергії потоку. З цієї причини в процесі руху неминучі втрати енергії. Ця енергія, як і при будь-якому терті, перетворюється на теплову енергію. Через ці втрати енергія потоку рідини по довжині потоку в його напрямку постійно зменшується. Тобто напір потоку в напрямку руху потоку стає меншим. У такому разі

26 Розд. 1. Зв'язок фізики з медициною. Основи гемодинаміки  
рівняння Бернуллі набирає вигляду

$$p_1 + \frac{\alpha_1 \rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\alpha_2 \rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + \rho g \Delta l, \quad (1.39)$$

де  $\Delta l$  — втрата напору рідини за рахунок сил внутрішнього тертя;  $\alpha$  — коефіцієнт Коріоліса, що характеризує відношення дійсної кінетичної енергії потоку рідини в даному перерізі до тієї кінетичної енергії потоку, яку він мав би, якщо б усі частинки рухалися з однаковою швидкістю (за відсутності в'язкості). При ламінарному русі  $\alpha = 2$ , при турбулентному цей коефіцієнт приблизно дорівнює одиниці, але при розрахунках часто вибирають  $\alpha = 1,05$ .

**Турбулентний рух. Число Рейнольдса.** Розглянутий раніше рух рідини є ламінарним. Збільшення швидкості течії в'язкої рідини внаслідок неоднорідності тиску за поперечним перерізом труби створює завихрення, і рух стає вихровим, або турбулентним. Під час турбулентного руху швидкість частинок у кожному місці безперервно і хаотично змінюється, рух є нестационарним. Характер течії рідини трубою залежить від властивостей рідини, швидкості її течії, розмірів труби і визначається числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho_{liq} v D}{\eta}, \quad (1.40)$$

де  $\rho_{liq}$  — густина рідини;  $D$  — діаметр труби;  $v$  — середня за перерізом труби швидкість течії. Якщо число Рейнольдса більше деякого критичного ( $Re > Re_{cr}$ ), то рух рідини турбулентний. Наприклад, для гладких циліндричних труб  $Re_{cr} \approx 2300$ . Оскільки число Рейнольдса залежить від в'язкості та густини рідини, зручно ввести їх відношення, що має назву кінематичної в'язкості:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho_{liq}}. \quad (1.41)$$

Використовуючи це поняття, число Рейнольдса можна виразити у вигляді

$$Re = \frac{vD}{\nu}. \quad (1.42)$$

Одиницею кінематичної в'язкості є квадратний метр за секунду ( $\text{м}^2/\text{с}$ ), в системі СГС — Стокс (Ст). Співвідношення між ними:  $1 \text{ Ст} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Із (1.42) випливає, що характер течії істотно залежить від розмірів труби. У широких трубах навіть при порівняно невеликих швидкостях може виникати турбулентний рух. Наприклад, у трубці діаметром 2 мм рух води стає турбулентним за швидкості більше ніж 127 см/с, а в трубі діаметром 2 см — вже за швидкості 12 см/с (температура 16 °С). Течія крові по такій трубі стала б турбулентною за швидкості 50 см/с, але на практиці, наприклад у кровоносних судинах діаметром 2 см, турбулентна течія виникає навіть за меншої швидкості. Течія крові в артеріях у нормі є ламінарною. Невелика турбулентність виникає поблизу клапанів серця. У разі патології, якщо в'язкість менша за норму, число Рейнольдса може перевищувати критичне значення, і рух стане турбулентним. Турбулентна течія пов'язана з додатковою витратою енергії під час руху рідини, що у випадку крові призводить до додаткового навантаження на серце. Шум, що виникає під час турбулентного руху крові, може бути використаний для діагностики захворювань. Цей шум прослуховують на плечовій артерії під час вимірювання тиску крові.

Рух повітря в носовій порожнині в нормі є ламінарним. Проте при запаленні або інших відхиленнях від норми він може стати турбулентним, що спричинить додаткову роботу дихальних м'язів. Число Рейнольдса є критерієм подібності. Під час моделювання гідро- та аеродинамічних систем, зокрема кровоносної системи, модель повинна мати таке саме число Рейнольдса, як і реальний

об'єкт, інакше немає відповідності між ними. З виразу (1.42) бачимо, що зменшення розмірів моделі порівняно з реальним об'єктом повинна компенсуватися збільшенням швидкості руху або зменшенням кінематичної в'язкості модельної рідини.

**Залежність в'язкості від температури та градієнта швидкості.** Формула (1.50) (див. далі в тексті) описує в'язку силу тертя у разі, якщо в'язкість залежить лише від температури  $T$ , і не є функцією градієнта швидкості  $dv/dx$ . Але не всі речовини описуються цим законом. Рідини, в'язкість яких є функцією градієнта швидкості, називаються неньютонівськими.

Зі зростанням значення градієнта швидкості динамічна в'язкість  $\eta$  може як збільшуватися, так і зменшуватися. Наприклад, в'язкість полімерних розчинів і розплавів зі зростанням градієнта швидкості часто зменшується, такі рідини називають псевдопластичними. У разі суспензій твердих частинок в'язкість зі зростанням  $dv/dx$  навпаки збільшується, і ці рідини мають назву дилатантних. Для якісного аналізу описаних випадків використовують просту апроксимацію

$$\eta = k \left( \frac{dv}{dx} \right)^\gamma, \quad (1.43)$$

що дозволяє врахувати обидві особливості. Тут уведено коефіцієнт пропорційності  $k$  (Па  $\cdot$  с $^{\gamma+1}$ ). Згідно з (1.43) для псевдопластичних рідин показник  $\gamma < 0$ , дилатантні — характеризуються значенням  $\gamma > 0$ , а в разі звичайних ньютонівських рідин  $\gamma \equiv 0$ , оскільки згідно з виразом (1.43) при цьому в'язкість  $\eta$  не залежить від градієнта швидкості.

В'язкість рідин завжди залежить від температури, з підвищенням температури вона завжди знижується. Так, у 1886 році Рейнольдсом була запропонована формула залежності динамічної

в'язкості від температури  $T$  у вигляді

$$\eta(T) = \eta_0 \exp(-bT), \quad (1.44)$$

де  $\eta_0$  і  $b$  — феноменологічні параметри. Однак залежність (1.44) є емпіричною і працює у вузькому діапазоні температур. Інша модель (модель Арреніуса) вже впливає з фізичних міркувань про будову речовини. Вона записується у вигляді

$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\frac{E}{RT}\right). \quad (1.45)$$

У виразі (1.45) величина  $E$  — це енергія активації, а  $R$  — універсальна газова стала. Рідини, для яких виконується рівність (1.45), називаються рідинами першого роду. Інша модель, яка має назву WLF-модель, записується у вигляді

$$\eta(T) = \eta_0 \exp\left(\frac{-C_1(T - T_r)}{C_2 + T - T_r}\right). \quad (1.46)$$

Модель (1.46) використовується для полімерних розплавів або для рідин, що мають температуру фазового переходу рідина – скло. Для багатьох полімерів  $C_1 \approx 8,86$ ,  $C_2 \approx 101,6$  К, а  $T_r = T_g + 43$  К, де  $T_g$  — температура склування.

Майже всі живі організми мають у своєму складі багато води. Так, людський організм містить приблизно 70 % води. Отже, залежність в'язкості води від температури для біологічних застосувань становить підвищений інтерес. Така залежність із високою точністю описується рівнянням

$$\eta_{water} \approx 2,414 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{247,8/(T-140)}, \quad (1.47)$$

де температура  $T$  вимірюється в Кельвінах, а в'язкість  $\eta$  — в одини-

цях  $\text{Па} \cdot \text{с}$ . Вираз (1.47) із точністю близько 2,5 % описує в'язкість води в діапазоні температур  $T$  від 0 до 370 °C.

Існують також моделі, які одночасно описують залежність в'язкості від температури та градієнта швидкості. Наприклад, для рідин першого роду добре підходить функція

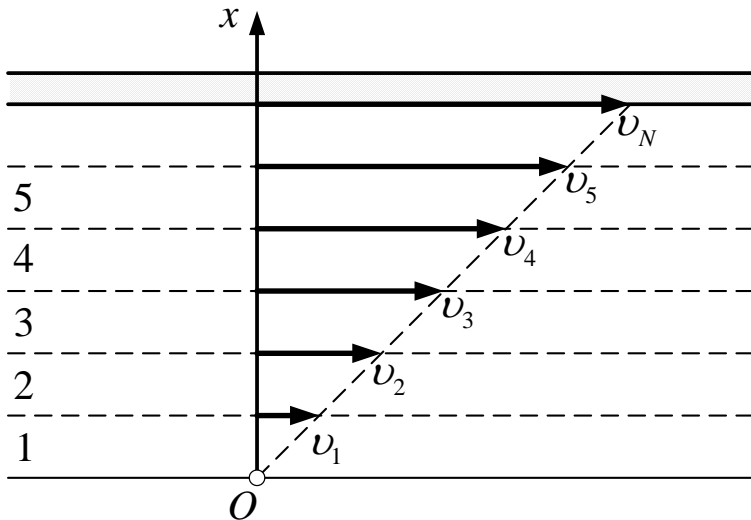
$$\eta_{eff}(dV/dx, T) = \eta_0 \left( \frac{dV}{dx} \right)^{n-1} \exp(-bT), \quad (1.48)$$

що також може бути записана у вигляді

$$\eta_{eff}(dV/dx, T) = \exp \left( A_0 + A_1 \ln \left( \frac{dV}{dx} \right) + A_2 T \right). \quad (1.49)$$

Перелічені моделі — лише частина моделей, запропонованих на сьогодні для опису температурної залежності в'язкості. У кожній конкретній ситуації необхідно обирати ту чи іншу модель, виходячи із фізичних властивостей рідини.

**Рух в'язкої рідини між двома пластинами.** Під час руху реальної рідини окремі її шари впливають один на інший із силами, напрямком яких збігається з напрямком дотичних до шарів. Це явище називають внутрішнім тертям, або в'язкістю. Розглянемо течію в'язкої рідини між двома твердими пластинами (рис. 1.6). Нижня пластина є нерухомою, а верхня — рухається із швидкістю  $v_N$ . Умовно будемо уявляти собі рідину як декілька шарів із номерами 1, 2, 3, ...,  $N$  з однаковими властивостями. Нижній шар за рахунок сили тертя "прилипає" до дна і є нерухомим. Із віддаленням від нижньої пластини швидкості переміщення шарів збільшуються ( $v_1 < v_2 < v_3 < \dots < v_N$ ), максимальну швидкість  $v_N$  буде мати верхній шар. Шари впливають один на інший. Наприклад, третій шар прагне прискорити рух другого, але, з іншого боку, сам випробує гальмування з боку другого шару. Сила внутрішнього тертя є пропорційною площі  $S$  шарів, що взаємодіють, і прямо пропорційно



**Рисунок 1.6.** Течія в'язкої рідини між двома твердими пластинами з верхньою рухомою межею

залежить від швидкості. Вона визначається за формулою

$$F_{fr} = \eta \frac{dv}{dx} S, \quad (1.50)$$

де напрямок  $x$  перпендикулярний до швидкості рідини  $v$ , а  $dv/dx$  — градієнт швидкості. Тут  $\eta$  — коефіцієнт внутрішнього тертя, або в'язкість рідини, яку ми вже використовували раніше у виразі (1.9). Вона залежить від стану і молекулярних властивостей рідини (або газу). Одиницею в'язкості є паскаль-секунда (Па · с). У системі СГС в'язкість виражають в Пуазах:  $1 \text{ Па} \cdot \text{с} = 10 \text{ Пуаз}$ . У разі, якщо в'язкість не залежить від градієнта швидкості, рідину називають ньютонівською. Рідини, що не підпорядковуються рівнянню (1.50), відносять до неньютонівських (див. формулу (1.43) і пояснення до неї).

Рідини, що складаються зі складних і великих молекул, наприклад розчини полімерів, є неньютонівськими. Їх в'язкість за

інших однакових умов є набагато більшою, ніж звичайних рідин. Це пов'язано з тим, що під час руху цих рідин робота зовнішньої сили витрачається не лише на подолання ньютонівської в'язкості, а також і на руйнування структури. Кров, наприклад, є неньютонівською рідиною. Найбільше це пов'язане з тим, що вона має внутрішню структуру, являючи собою суспензію формених елементів у розчині — плазмі. Плазма — практично ньютонівська рідина. Оскільки 93 % формених елементів складають еритроцити, то при спрощеному розгляді кров — це суспензія еритроцитів у фізіологічному розчині. Характерною властивістю еритроцитів є тенденція до утворення агрегатів. Якщо нанести мазок крові на предметний столик мікроскопа, то можна побачити, як еритроцити склеюються один з одним, утворюючи агрегати, що одержали назву монетних стовпчиків. Умови утворення агрегатів різні у великих і дрібних судинах. Це пов'язано насамперед зі співвідношенням розмірів судини  $d_s$ , агрегата  $d_a$  та еритроцита  $d_e$ . Характерні розміри:  $d_e = 8$  мкм,  $d_a \simeq 10d_e$ .

Тут можливі такі варіанти:

1. *Великі судини (аорта, артерії) ( $d_s > d_a$ )*. Градієнт швидкості  $dv/dx$  є невеликим, еритроцити збираються в агрегати у вигляді монетних стовпчиків. У цьому разі в'язкість крові  $\eta = 0,005$  Па · с.
2. *Дрібні судини (дрібні артерії, артеріоли) ( $d_s \simeq d_a$ )*. Градієнт  $dv/dx$  значно збільшується, і агрегати розпадаються на окремі еритроцити, тим самим зменшуючи в'язкість системи. Для цих судин чим меншим є діаметр просвіту, тим меншою є в'язкість крові. У судинах діаметром близько  $5d_e$  в'язкість крові становить приблизно  $2/3$  від в'язкості крові у великих судинах.
3. *Мікросудини (капіляри) ( $d_s < d_e$ )*. У живій судині еритроци-



ти легко деформуються і проходять не руйнуючись через капіляри навіть діаметром 3 мкм. У результаті поверхня зіткнення еритроцитів зі стінкою капіляра збільшується порівняно з недеформованим еритроцитом, сприяючи обмінним процесам.

Таким чином, внутрішня структура крові, а отже, й її в'язкість виявляються неоднаковими вздовж кровеносного русла залежно від умов течії. В'язкість, характерна для течії крові у великих судинах: у нормі  $\eta = (4,2 - 6) \eta_v$ , при анемії  $\eta = (2 - 3) \eta_v$ , при поліцитемії  $\eta = (15 - 20) \eta_v$ . В'язкість плазми  $\eta_p = 1,2 \eta_v$ . Тут  $\eta_v = 0,01$  Пуаз — в'язкість води.

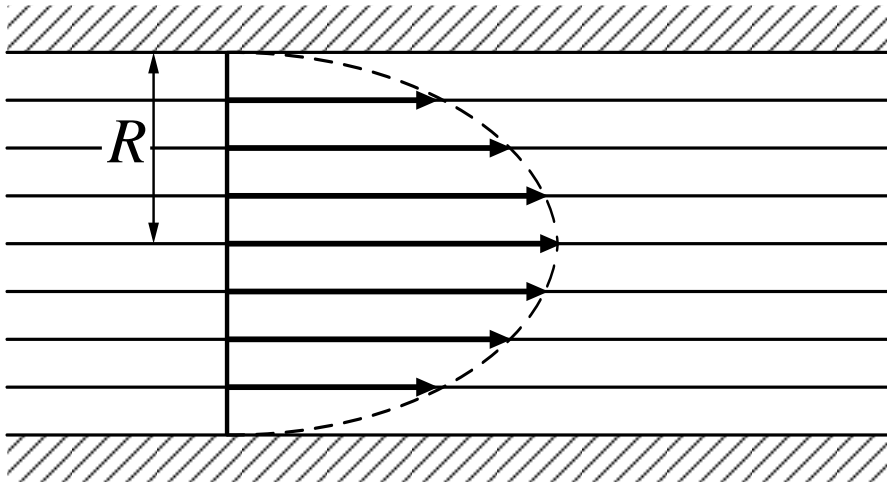
Як і для будь-якої рідини, в'язкість крові зростає при зниженні температури.

**Рух в'язкої рідини по трубах. Формула Пуазейля.** Модель руху в'язкої рідини по трубах становить для медицини особливий інтерес, оскільки кровеносна система складається з циліндричних судин різного діаметра. Внаслідок симетрії зрозуміло, що в трубі частинки рідини, рівновіддалені від осі, мають однакову швидкість. Найбільшу швидкість мають частинки, що рухаються вздовж осі труби; шар рідини, дотичний до труби, є нерухомим. Розподіл швидкості шарів  $v$  рідини в перерізі труби показаний на рис. 1.7. Для визначення залежності швидкості шарів від їх відстані  $r$  до осі виділимо циліндричний об'єм рідини деякого радіуса  $r$  і довжини  $l$  (рис. 1.8 а). На торцях цього циліндра підтримуються тиски  $p_1$  і  $p_2$ , що обумовлює результуючу силу

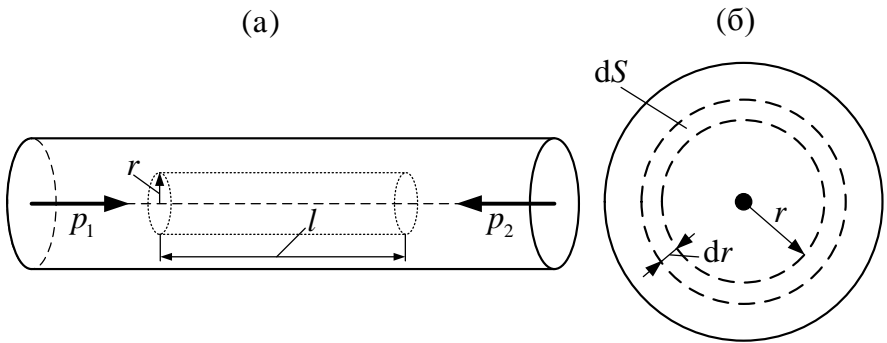
$$F = p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 = (p_1 - p_2) \pi r^2. \quad (1.51)$$

На бічну поверхню циліндра з боку оточуючого шару рідини діє сила внутрішнього тертя

$$F_{fr} = \eta \frac{dv}{dx} S = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l, \quad (1.52)$$



**Рисунок 1.7.** Течія в'язкої рідини між двома твердими нерухомими пластинами



**Рисунок 1.8.** Визначення залежності швидкості шарів від їх відстані  $r$  до осі

де  $S = 2\pi rl$  — площа бічної поверхні циліндра. Оскільки рідина рухається рівномірно, то сили, що діють на виділений циліндр, зрівноважені:  $F = F_{fr}$ . Із цього випливає, що

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi rl. \quad (1.53)$$

Знак "–" у правій частині рівняння обумовлений тим, що  $dv/dr < 0$  (швидкість зменшується зі збільшенням  $r$ ). З (1.53) маємо

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r dr. \quad (1.54)$$

Проінтегруємо це рівняння:

$$\int_0^v dv' = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int_R^r r' dr'. \quad (1.55)$$

Тут нижні межі інтегрування відповідають шару, дотичному до внутрішньої поверхні труби ( $v = 0$  при  $r = R$ ), а верхні межі змінні. Після інтегрування (1.55) одержимо параболічну залежність швидкості шарів рідини від відстані до осі труби:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2). \quad (1.56)$$

Найбільшу швидкість має шар, що тече вздовж осі труби ( $r = 0$ ):

$$v_{\max} = \frac{(p_1 - p_2) R^2}{4l\eta}. \quad (1.57)$$

Установимо, від яких чинників залежить об'єм  $Q$  рідини, що протікає через горизонтальну трубу за час  $t = 1$  с. Для цього виділимо циліндричний шар радіусом  $r$  і товщиною  $dr$ . Площа перерізу цього шару (рис. 1.8 б)  $dS = 2\pi r dr$ . Оскільки шар тонкий, то можна вважати, що він переміщується з однаковою швидкістю  $v$ . За 1 секунду шар переносить об'єм рідини

$$dQ = v dS = v \cdot 2\pi r dr. \quad (1.58)$$

Підставивши (1.56) в (1.58), одержимо

$$dQ = \pi \frac{p_1 - p_2}{2l\eta} (R^2 - r^2) r dr, \quad (1.59)$$

звідси інтегруванням за перерізом знаходимо

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (1.60)$$

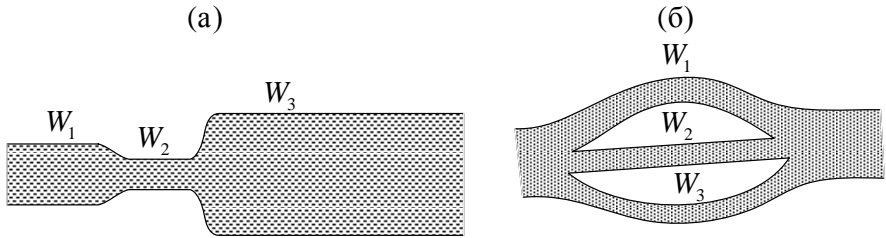
Залежність об'єму рідини  $Q$ , що протікає через горизонтальну трубу радіусом  $R$  за 1 секунду, визначається формулою Пуазейля (1.60), де  $\eta$  — в'язкість рідини;  $(p_1 - p_2)$  — різниця тисків, що підтримується на торцях труби довжиною  $l$ . Як бачимо з (1.60), за заданих зовнішніх умов ( $p_1$  і  $p_2$ ) через трубу протікає тим більший об'єм рідини, чим менша її в'язкість і більший радіус труби. Тут треба розуміти, що отримані формули не враховують молекулярну будову рідини, а рух вважається ламінарним. В реальній ситуації поведінка рідини може бути більш складною. Наприклад, за рахунок неоднорідного розподілу тиску і температури по перетину труби, що ми не враховували.

Проведемо аналогію між формулою Пуазейля (1.60) і законом Ома для ділянки ланцюга без джерела струму. Різниця потенціалів відповідає різниці тисків на кінцях труби, сила струму — об'єму рідини, що протікає через переріз труби за 1 с, електричний опір — гідравлічному опору:

$$W = \frac{8\eta l}{\pi R^4}. \quad (1.61)$$

Аналогія між електричним і гідравлічним опорами дозволяє в деяких випадках використовувати правило знаходження електричного опору послідовного і паралельного з'єднань провідників для визначення гідравлічного опору системи послідовно або пара-

лельно з'єднаних трубок. Так, наприклад, загальний гідравлічний



**Рисунок 1.9.** Гідравлічний опір системи трубок (судин)

опір трьох труб, з'єднаних послідовно (рис. 1.9 а) і паралельно (рис. 1.9 б), обчислюється відповідно за формулами

$$W = W_1 + W_2 + W_3;$$

$$W = \left( \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} + \frac{1}{W_3} \right)^{-1}. \quad (1.62)$$

Щоб надати рівнянню Пуазейля більш загального вигляду, який буде справедливим і для труб змінного перерізу, замінимо  $(p_1 - p_2) / l$  градієнтом тиску  $dp/dl$ . У результаті одержимо

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dl}. \quad (1.63)$$

### 1.2.2. Гемодинамічні показники в різних частинах судинної системи

Закон Пуазейля доводить, що зниження тиску крові у судинах залежить від об'ємної швидкості кровотоку та, досить сильно, від радіуса судини. Так, зменшення радіуса на 20 % приводить до збільшення різниці тисків більше ніж удвічі (оскільки  $Q = \text{const}$ , із (1.60) впливає, що зменшення  $R$  супроводжується збільшенням  $(p_1 - p_2)$ ). Навіть невеликі зміни просвітів кровеносних судин дуже

позначаються на різниці ( $p_1 - p_2$ ). **Невипадково основні фармакологічні засоби нормалізації тиску спрямовані насамперед на зміну просвіту судин!**

Закон Пуазейля може бути застосований лише у випадках:

- 1) ламінарної течії;
- 2) гомогенної (однорідної) рідини;
- 3) прямих твердих трубок;
- 4) значної відстані від джерел збурень (входу, вигинів, звужень).

Розглянемо гемодинамічні показники в різних частинах судинної системи.

#### *Гідралічний опір*

Гідралічний опір  $W$  залежить від радіуса судини. Відношення радіусів для різних ділянок судинного русла (аорта:артерія:капіляри):

$$R_{aort} : R_{art} : R_{kap} \simeq 3000 : 500 : 1. \quad (1.64)$$

Оскільки  $W \sim 1/R^4$ , то можна записати співвідношення

$$W_{kap} > W_{art} > W_{aort}. \quad (1.65)$$

#### *Лінійна швидкість кровотоку*

Розглянемо закон нерозривності (1.8). Площа сумарного просвіту всіх капілярів у 500 – 600 разів більша за поперечний переріз аорти. Це означає, що для виконання (1.8) швидкість у капілярах повинна бути меншою у стільки ж разів:  $V_{kap} = V_{aort}/500$ . **Тому, саме в капілярній сітці за повільної швидкості руху відбувається інтенсивний обмін речовин між кров'ю і тканинами.**

#### *Розподіл середнього тиску*

При скороченні серця тиск крові в аорті зазнає коливань. Далі

буде йти мова про середній тиск за період скорочення. Середній тиск може бути оцінений за формулою

$$P_{sr} = P_{diast} + \frac{P_{sist} - P_{diast}}{3}, \quad (1.66)$$

де  $P_{sr}$ ,  $P_{diast}$ ,  $P_{sist}$  — середній, діастолічний та систолічний тиск відповідно. Зниження середнього тиску вздовж судин може бути описане законом Пуазейля, з якого випливає, що у великих судинах середній тиск знижується приблизно на 15 %, а в дрібних — на 85 %. Це означає, що більша частина енергії, яка витрачається лівим шлуночком серця на вигнання крові, витрачається на її рух дрібними судинами.

### 1.2.3. Пульсова хвиля. Модель Франка

Одним із важливих гемодинамічних процесів є поширення пульсової хвилі.

**Пульсова хвиля** — процес поширення зміни об'єму крові уздовж еластичної судини внаслідок одночасної зміни в ній тиску та маси крові.

Якщо реєструвати деформації стінки артерії в двох різновіддалених від серця точках, то виявиться, що деформація судини дійде до більш віддаленої точки пізніше, тобто по судині поширюється хвиля пульсових коливань об'єму судини, тиску та швидкості кровотоку, однозначно пов'язаних один з одним.

Розглянемо характеристики пульсової хвилі. Амплітудою пульсової хвилі  $p_0(x)$  (пульсовий тиск) будемо називати різницю між максимальним і мінімальним значеннями тисків у даній точці судини. На вході в аорту амплітуда хвилі  $p_{0,\max}$  дорівнює різниці систолічного  $p_{sist}$  і діастолічного  $p_{diast}$  тисків:  $p_{0,\max} = p_{sist} - p_{diast}$ . Максимальний тиск крові  $p_0(x)$  (або рідини в еластичній трубі) у

певній точці  $x$  судини, вздовж якої поширюється пульсова хвиля, можна розрахувати за формулою:

$$p_0(x) = p_{0,\max} e^{-\beta x}, \quad (1.67)$$

де  $\beta$  — коефіцієнт загасання, обернено пропорційний до радіуса;  $x$  — відстань від точки відліку до точки, в якій вимірюється тиск.

Швидкість поширення пульсової хвилі залежить від властивості судин і крові:

$$v_p = \sqrt{\frac{Eh}{2r\rho}}, \quad (1.68)$$

де  $E$  — модуль Юнга матеріалу стінки судини;  $h$  — її товщина;  $r$  — радіус просвіту;  $\rho$  — густина крові.

Швидкість поширення пульсової хвилі становить  $v_p \simeq 6 - 8$  м/с, що в 20 – 30 разів більше, ніж швидкість руху частинок крові  $v \simeq 0,3 - 0,5$  м/с. За час вигнання крові з шлуночків (час систоли)  $t_{sist} = 0,3$  с пульсова хвиля встигає поширитися на відстань  $L = v_p t_{sist} = 2$  м, тобто охопити всі великі судини — аорту та артерії. Експериментальне визначення швидкості пульсової хвилі покладене в основу діагностики стану судин. Із віком величина  $E$  збільшується у 2 – 3 рази, а отже, зростає й швидкість пульсової хвилі.

У 1899 році німецький фізіолог О. Франк теоретично розвив ідею про те, що артерії "запасують" кров під час систоли і виштовхують її в дрібні судини під час діастоли.

Візьмемо за мету: одержати формули (математичну модель) для розрахунку зміни гемодинамічних показників (наприклад, тиску) у часі в системі "лівий шлуночок серця – великі судини – дрібні судини".

Для зручності розгляду виділимо дві фази кровотоку:

- першу фазу — фазу припливу крові в аорту із серця з момен-



ту відкриття аортального клапана до його закриття. Під час надходження крові із серця еластичні стінки великих судин розтягуються, частина крові резервується у великих судинах, а частина тече у дрібні судини.

- другу фазу — фазу вигнання крові з великих судин у дрібні після закриття аортального клапана. Під час цієї фази стінки великих судин за рахунок пружності повертаються у вихідне положення, проштовхуючи кров у мікросудини. У цей час у лівий шлуночок надходить кров із лівого передсердя.

Для створення моделі зробимо такі припущення:

- Усі великі судини об'єднані в один резервуар з еластичними стінками, об'єм якого є пропорційним тиску. Вони (а отже, і резервуар) мають високу еластичність, гідравлічним опором резервуара нехтують.
- Система мікросудин представлена як тверда трубка. Гідравлічний опір твердої трубки є великим — еластичністю дрібних судин нехтують.
- Не розглядаються перехідні процеси встановлення руху крові.

Складемо систему рівнянь, що описують процес. Швидкість зміни об'єму  $V$  резервуара від  $V_2$  до  $V_1$  за час  $\Delta t$  ( $(V_2 - V_1)/\Delta t \equiv dV/dt$ ) дорівнює різниці швидкостей припливу до нього крові із серця  $Q_c$  і відтоку в систему мікросудин  $Q$ :

$$\frac{dV}{dt} = Q_c - Q, \quad (1.69)$$

де  $Q_c$  — об'ємна швидкість надходження крові із серця;  $Q$  — об'ємна швидкість кровотоку на вході в дрібні судини;  $dV$  — зміна об'єму великих судин за час  $dt$ .

Припускаємо, що зміна об'єму резервуара лінійно залежить від зміни тиску  $p_2 - p_1 \equiv dp$  крові в ньому:

$$dV = C dp, \quad (1.70)$$

де коефіцієнт пропорційності  $C$  — еластичність. Застосовуючи для течії крові твердою трубкою закон Пуазейля (1.60), (1.61), одержимо

$$Q = \frac{p - p_v}{W}, \quad (1.71)$$

де  $p$  — тиск у великих судинах (зокрема, на вході в дрібні);  $p_v$  — тиск на виході з дрібних судин;  $W$  — гідравлічний опір дрібних судин. В усіх рівняннях під  $p$  розуміють надлишковий тиск (різниця між реальним та атмосферним тиском).

Розв'яжемо систему рівнянь (1.69) – (1.71) відносно  $p$ . Для цього за допомогою простих перетворень (підставимо (1.70) і (1.71) в (1.69)) зведемо цю систему до одного рівняння:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{Q_c}{C} + \frac{p_v}{WC} - \frac{p}{WC}. \quad (1.72)$$

Це неоднорідне лінійне диференціальне рівняння, розв'язок якого визначається видом функції  $Q_c$ .

Розв'язком цього рівняння буде інтеграл

$$p = \exp \left\{ -\frac{t}{WC} \right\} \left\{ \frac{1}{C} \int \left( Q_c + \frac{p_v}{W} \right) \exp \left\{ \frac{t}{WC} \right\} dt + \text{const} \right\}, \quad (1.73)$$

де константу визначають виходячи з початкових умов.

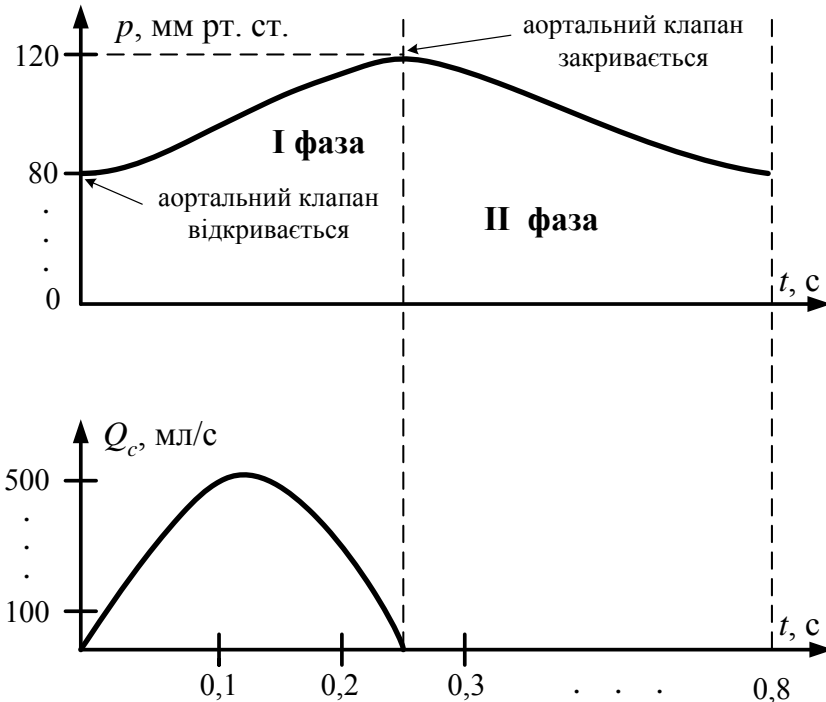
У загальному випадку вигляд функції  $Q_c$  задається параболою

$$Q_c(t) = -at^2 + bt, \quad a = \frac{Q_{\max}}{t_0^2}, \quad b = \frac{2Q_{\max}}{t_0}, \quad (1.74)$$

де  $Q_{\max}$  — максимальне значення кровотоку, що надходить із

серця, час  $t_0 = t_1/2$  дорівнює половині тривалості першої фази.

На рисунку 1.10 наведений графік залежності тиску  $p$  від часу  $t$ , одержаний на основі розрахунків тиску за формулою (1.73). Пода-



**Рисунок 1.10.** Розрахована залежність зміни тиску крові  $p(t)$  в аорті при параболічній зміні  $Q_c(t)$  (швидкість надходження крові із серця) у першій фазі. Параметри:  $Q_{\max} = 500 \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $W = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}/\text{м}^3$ ,  $C = 1,2 \text{ м}^3/(\text{Па} \cdot \text{с})$ ,  $t_1 = 0,24 \text{ с}$ ,  $p(t=0) = 80 \text{ Па}$ ,  $p_v = 0 \text{ Па}$

на модель дозволяє розрахувати  $p(t)$  і для будь-якої апроксимації реальної функції  $Q_c$ .

Розглянемо модель Франка для 2-ї фази. Друга фаза починається з моменту закриття аортального клапана. Оскільки кров уже не надходить із серця, то  $Q_c = 0$ . Тоді рівняння (1.69) можна переписати

сати так:

$$-Qdt = dV. \quad (1.75)$$

Знак "мінус" відображає зменшення об'єму великої судини із часом. З урахуванням (1.70) матимемо

$$Q = -C \frac{dp}{dt}. \quad (1.76)$$

Далі з урахуванням (1.71), припускаючи, що  $p_v = 0$  (тиск у капілярах набагато менший, ніж тиск в артеріях), одержуємо диференціальне рівняння:

$$-C \frac{dp}{dt} = \frac{p}{W}. \quad (1.77)$$

Початкова умова: при  $t = 0$  (що відповідає закриттю клапана) припускаємо, що  $p = p_{sist}$ . У результаті, розв'язуючи рівняння (1.77), одержуємо закон зміни тиску у великих судинах із моменту закриття аортального клапана:

$$p(t) = p_{sist} e^{-t/WC}. \quad (1.78)$$

На рисунку 1.10 наведена залежність зниження тиску у великих судинах після закриття аортального клапана (під час діастоли). Після закінчення фази 2 знову починається фаза 1.

#### **1.2.4. Кровотік при локальному звуженні судин. Резистивна модель**

Ряд процесів у серцево-судинній системі може змінити тиск та швидкість кровотоку як у серцево-судинній системі в цілому, так і в окремих її частинах. Причиною порушення гемодинаміки можуть бути зміни просвітів судин і реологічних властивостей крові.

Розглянемо електричну (або резистивну) математичну модель (течія крові по судинах моделюється електричним струмом у ланцюжку резисторів), що дозволяє проаналізувати зміну гемодинамічних показників системи за деяких патологій та якісно подати вплив цих порушень на транскапілярні процеси.

Для математичного опису розподілу тиску й швидкості кровотоку необхідно спростити систему. Тому введемо такі припущення:

- еластичність судин не враховується;
- не враховуються пульсації тиску й різні фази серцевого циклу (мова буде йти про середній тиск);
- течія крові є ламінарною.

Для побудови резистивної моделі в таблиці 1.1 уведемо електричні величини, що будуть відігравати роль відповідних гемодинамічних аналогів. Нагадаємо, що напруга  $U$  дорівнює різниці потенціалів на кінцях провідника.

Розглянемо випадок звуження великої судини (наприклад, при утворенні в ній тромбу) (рис. 1.11). Оскільки струм у ланцюжку повинен залишатися незмінним, незважаючи на збільшення загального опору в ланцюгу у зв'язку зі збільшенням опору  $r' > r$ , повинен збільшитися потенціал у точці  $a$  за рахунок збільшення  $\varepsilon$ .

Виходячи з еквівалентної електричної схеми з урахуванням закону Пуазейля  $p_2 - p_1 = QW$  (див. (1.60), (1.61)), маємо для судини  $ad$  без звуження

$$p_0 - p = (2W + w) Q_0 \quad (1.79)$$

і для судини  $ad$  зі звуженням

$$p'_0 - p = (2W + w') Q_0, \quad (1.80)$$

**Таблиця 1.1.** Зв'язок між електричними величинами та їх гемодинамічними аналогами

Сила струму $I_0$ в усьому ланцюжку	Об'ємна швидкість $Q_0$ кровотоку в усій системі
Зниження напруги $U$ на опорі	Зниження тиску $\Delta p$ уздовж судини
Електричний потенціал $\varphi$	Тиск $p$ в перерізі судини
Електрорушійна сила джерела $\varepsilon$	Середній тиск $p_s$ на початку аорти
Опір $R$	Гідравлічний опір $W$ ділянки $ab$ або $cd$
Опір $r$	Гідравлічний опір $w$ ділянки $bc$ до її звуження
Опір $r'$	Гідравлічний опір $w'$ ділянки $bc$ при її звуженні
Опір $r_p$	Гідравлічний опір $w_p$ наступного судинного русла
Опір $r_0$	Гідравлічний опір $w_0$ попереднього судинного русла

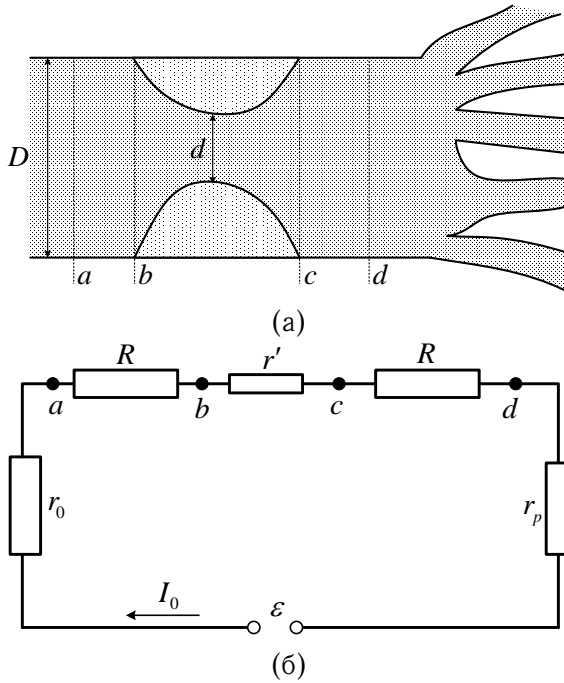
де  $p_0$  — тиск у точці  $a$ , якщо звуження відсутнє;  $p$  — тиск у точці  $d$ ;  $p'_0$  — тиск у точці  $a$  при звуженні. Гідравлічний опір різних ділянок русла розраховують за формулами (1.61):

$$w = \frac{8\eta l}{\pi (D/2)^4}, \quad (1.81)$$

$$w' = \frac{8\eta l}{\pi ((D-d)/2)^4}, \quad (1.82)$$

$$W = \frac{8\eta L}{\pi (D/2)^4}, \quad (1.83)$$

де  $l$  — довжина області звуження  $bc$ ;  $d$  — діаметр просвіту в області звуження;  $L$  — довжина ділянки  $ab$  (та  $cd$ );  $D$  — діаметр



**Рисунок 1.11.** На ділянці  $bc$  виникло звуження (а); еквівалентна до рис. 1.11 а електрична схема (б)

просвіту судини в точках  $a$  та  $d$ ;  $(D - d)$  — діаметр просвіту в зоні звуження.

Візьмемо умовно тиск  $p$  на кінці даної судини  $ad$  таким, що дорівнює нулю, тоді формули (1.79) та (1.80) спрощуються:

судина  $ad$  без звуження

$$p_0 = (2W + w) Q_0; \tag{1.84}$$

судина  $ad$  зі звуженням

$$p'_0 = (2W + w') Q_0. \tag{1.85}$$

Віднявши одне рівняння від іншого, одержимо:

$$p'_0 = p_0 + \frac{p_0(w' - w)}{2W + w} = p_0 \frac{2 + w'/W}{2 + w/W}. \quad (1.86)$$

Відповідно до (1.86) у разі локального звуження ( $w' > w$ ) тиск у точці  $a$  зростає в

$$\frac{p'_0}{p_0} = \frac{2 + w'/W}{2 + w/W} \quad (1.87)$$

разів. Визначимо зниження тиску на ділянках  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$ :

$$p_a - p_b = p_c - p_d = Q_0 W = \frac{p_0 W}{2W + w}, \quad (1.88)$$

$$p_b - p_c = Q_0 w' = \frac{p_0 w'}{2W + w}, \quad (1.89)$$

де згідно з (1.84)

$$Q_0 = \frac{p_0}{2W + w}. \quad (1.90)$$

Таким чином, на базі представленої резистивної моделі можна оцінити зростання тиску крові у лівому шлуночку серця при виникненні звуження у великій судині. З формул бачимо, що підвищення тиску в точці  $a$  є необхідною умовою підтримання незмінного тиску в точці  $d$ .

### Питання для самоконтролю

1. Значення фізики в медицині. Основні етапи моделювання.
2. Внутрішнє тертя в рідині. Формула Ньютона. Коефіцієнт в'язкості та одиниці вимірювання.
3. Ньютонівські та неньютонівські рідини та їх математичні моделі.
4. Течія реальної рідини по горизонтальній трубі з постійним



перерізом. Формула Пуазейля.

5. Закон Стокса. Вираз для швидкості твердого сферичного тіла в рідині.
6. Гідравлічний опір. Паралельне і послідовне з'єднання судин.
7. Сила Архімеда. Умова плавання тіл.
8. Рівняння Бернуллі — основний закон гідродинаміки та його висновки. Статичний, динамічний, гідростатичний тиск, фізичний зміст і способи вимірювання.
9. Рівняння Бернуллі для реальної рідини (з урахуванням в'язкості).
10. Ламінарна і турбулентна течії. Число Рейнольдса.

**РОЗДІЛ 2****МЕХАНІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТВЕРДИХ ТІЛ****2.1. Стискання та розтягування**

Фундаментальними поняттями механіки суцільних середовищ є:

- **пружність** — властивість тіл змінювати розміри та форму під дією сил і відновлювати їх при припиненні зовнішніх впливів. Пружність тіл обумовлена силами взаємодії їх атомів і молекул. При знятті зовнішнього впливу тіло повертається у вихідний стан;
- **в'язкість** — внутрішнє тертя середовища;
- **в'язкопружність** — це властивість матеріалів твердих тіл одночасно демонструвати властивості пружності та в'язкості.

М'яз, наприклад, одночасно має властивості пружності та в'язкості, тобто є в'язкопружним середовищем. Для такого середовища справедливими є закони класичної механіки.

**Деформація** — відносна зміна довжини:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.1)$$

де  $l$  — початкова довжина;  $\Delta l$  — подовження.

**Механічні напруження**  $\sigma$  — міра внутрішніх сил, що виникають при деформації матеріалу. Для однорідного стрижня:

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (2.2)$$

де  $S$  — площа перерізу;  $F$  — прикладена сила.

Пружна деформація виникає та зникає одночасно з навантаженням і не супроводжується розсіюванням енергії. Для пружної деформації справедливим є закон Гука:

$$\sigma_{el} = \varepsilon E = \frac{F}{S}, \quad (2.3)$$

де  $E$  — модуль Юнга, що залежить від природи речовини. При малих розтягуваннях вважають  $E = \text{const}$ .

Модуль пружності (модуль Юнга) деяких матеріалів наведено в таблиці 2.1.

**Таблиця 2.1.** Модулі пружності деяких біологічних матеріалів

Матеріал	Модуль Юнга $E$ , Па
Еластин	$10^5 - 10^6$
Колаген	$10^7 - 10^8$
М'язи	$9 \cdot 10^5$
Кістки	$2 \cdot 10^9$
Артерія	$5 \cdot 10^4$
Деревина	$12 \cdot 10^9$
Гума	$5 \cdot 10^6$
Сталь	$2 \cdot 10^{11}$

Здебільшого при розтягуванні або стисканні ступінь деформації в різних перерізах стрижня різна. Це можна побачити, якщо на поверхню тіла нанести квадратну сітку. Після деформування сітка спотвориться. За характером і величиною цього спотворення можна робити висновок про розподіл напружень уздовж зразка.

У разі в'язкого середовища напруження визначаються швидкістю деформації:

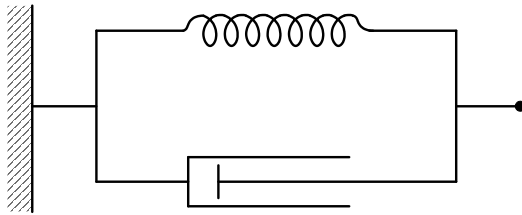
$$\sigma_v = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}, \quad (2.4)$$

де  $\eta$  — коефіцієнт в'язкості середовища.

Для в'язкопружної деформації характерна явна залежність від процесу навантаження в часі, причому при знятті навантаження напруження з часом прямують до нуля.

Пасивні механічні властивості в'язкопружного середовища можна моделювати шляхом сполучення пружних і в'язких елементів.

Найбільш простою моделлю, що дає досить гарне наближення до механічних властивостей м'яза, є модель Кельвіна – Фойгта (рис. 2.1). Вона подає паралельно з'єднані



**Рисунок 2.1.** Модель Кельвіна – Фойгта

в'язкий та пружний елементи. Використовуючи наведену модель, установимо закон зміни деформації м'яза з часом. Для в'язкопружного середовища (м'яза) напруження в системі будуть визначатися пружною  $\sigma_{el}$  і в'язкою  $\sigma_v$  складовими:

$$\sigma = \sigma_{el} + \sigma_v = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2.5)$$

Розв'язуючи одержане диференціальне рівняння і вважаючи, що в початковий момент часу деформація  $\varepsilon = 0$ , визначимо залежність  $\varepsilon(t)$ . У результаті одержимо

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} \left(1 - e^{-t/\tau}\right), \quad (2.6)$$

де величина

$$\tau = \frac{\eta}{E} \quad (2.7)$$

називається часом релаксації деформацій.

Швидкість зростання деформації максимальна при  $t = 0$ :

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\max} = \frac{\sigma}{\eta}. \quad (2.8)$$

Деформація (2.6) зростає з часом, але швидкість її зростання зменшується, і при  $t \rightarrow \infty$  деформація наближається до стаціонарного значення  $\varepsilon_0$  (швидкість зміни  $\varepsilon$  прямує до 0):

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E}. \quad (2.9)$$

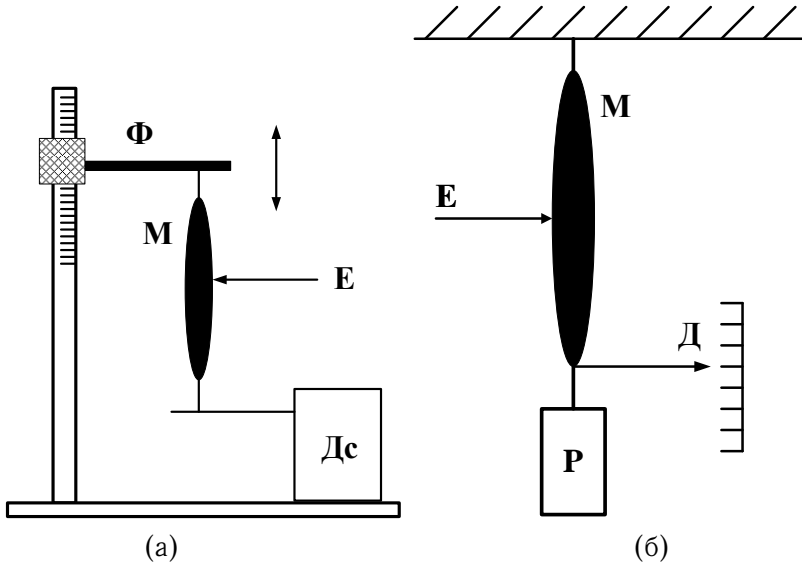
Зазначимо, що одержана залежність (2.6) досить добре описує процес зростання деформації м'яза при його пасивному розтягуванні.

## 2.2. Активне скорочення м'яза

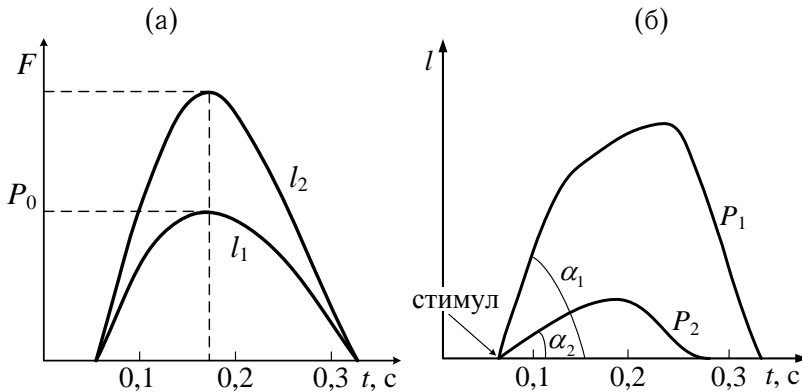
Для дослідження скорочувальних характеристик м'язів, використовують два штучних режими:

- 1) ізометричний режим — довжина м'яза  $l$  є сталою; реєструється сила  $F(t)$ , що розвивається м'язом;
- 2) ізотонічний режим — м'яз піднімає сталий вантаж; реєструється зміна довжини в часі  $l(t)$ .

При ізометричному режимі за допомогою фіксатора (рис. 2.2 а) попередньо встановлюють довжину м'яза  $l$ . Після установаження довжини на електроди Е подається електричний стимул, і за допомогою датчика Дс реєструється функція  $F(t)$ . Вигляд функції  $F(t)$  в ізометричному режимі для двох різних довжин  $l$  поданий на рис. 2.3 а. Максимальна сила  $F_0$ , яку може розвивати м'яз, залежить від його початкової довжини та області перекриття актинових і міозинових ниток, в які можуть замикатися містки: при початковій довжині саркомера 2,2 мкм у скороченні беруть участь усі містки. Тому



**Рисунок 2.2.** Схема дослідних пристроїв для реалізації ізометричного (а) та ізотонічного (б) режимів (Дс — датчик сили; Д — датчик вимірювання довжини; М — м'яз; Е — електрод; Р — навантаження; Ф — фікатор довжини)



**Рисунок 2.3.** Активне скорочення м'яза: (а) —  $l_1 > l_2$ ; (б) —  $P_1 < P_2$

максимальна сила генерується тоді, коли м'яз попередньо розтягнутий на установці так, щоб довжини його саркомерів були близькі

до 2,2 мкм ( $l_1 > l_2$ ).

При ізотонічному режимі до незакріпленого кінця м'яза почергово підвішують вантажі  $P_1$  та  $P_2$  (рис. 2.2 б). Після цього подають стимул і реєструють зміну довжини м'яза в часі  $l(t)$ . Вид цієї функції для двох різних навантажень показаний на рис. 2.3 б. Як випливає з рис. 2.3 б, чим більшим є вантаж  $P_2 > P_1$ , тим меншими є скорочення м'яза і час утримання вантажу (нижня крива). При деякому граничному навантаженні  $P = P_0$  м'яз зовсім перестає піднімати вантаж; це значення  $P_0$  і буде максимальною силою ізометричного скорочення для даного м'яза (див. рис. 2.3 а).

Важливо зазначити, що при збільшенні навантаження кут нахилу вихідної частини кривої ізотонічного скорочення зменшується:  $\alpha_2 < \alpha_1$ . Іншими словами, швидкість скорочення із зростанням навантаження зменшується.

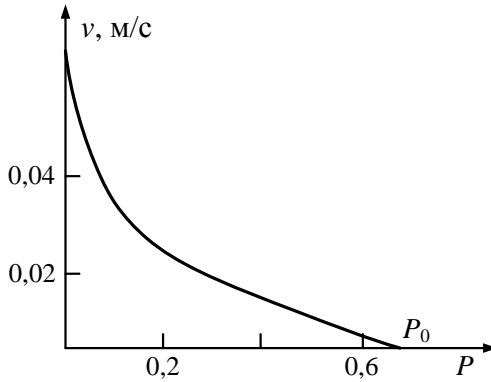
Залежність швидкості скорочення від навантаження  $P$  є найважливішою характеристикою при вивченні роботи м'яза, оскільки вона дозволяє виявити закономірності м'язового скорочення та його енергетики. Хіллом було запропоновано емпіричне рівняння, що описує цю криву:

$$v(P) = \frac{b(P_0 - P)}{P + a}, \quad (2.10)$$

де  $P_0$  — максимальна ізометрична напруга, що розвивається м'язом;  $b$  — константа, що має розмірність швидкості;  $a$  — константа, що має розмірність сили;  $P$  — задане навантаження. Подана залежність  $v(P)$  наведена на рис. 2.4. З наведеного рівняння випливає, що максимальна швидкість розвивається при  $P = 0$ :

$$v_{\max} = P_0 \frac{b}{a}. \quad (2.11)$$

При  $P = P_0$  одержимо  $v = 0$ , тобто скорочення не відбувається. Ро-



**Рисунок 2.4.** Залежність швидкості скорочення м'яза від навантаження

бота  $A$ , здійснена м'язом при скороченні на величину  $\Delta l$ , дорівнює

$$A = P\Delta l. \quad (2.12)$$

На ранній стадії скорочення можна вважати  $v = \text{const}$ . Тоді

$$\Delta l = v\Delta t, \quad (2.13)$$

і відповідно

$$A = P\Delta l = Pv\Delta t. \quad (2.14)$$

Потужність, що розвивається м'язом, визначимо з формули

$$W = \frac{A}{\Delta t} = \frac{Pv\Delta t}{\Delta t} = Pv. \quad (2.15)$$

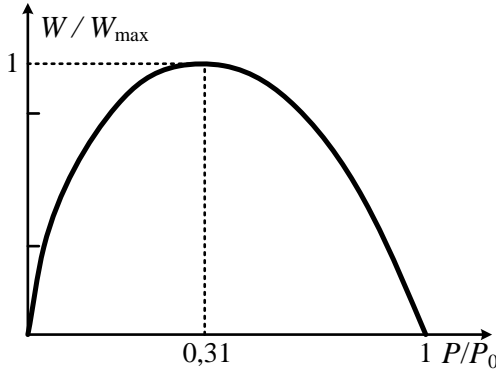
Підставляючи швидкість  $v$  (рівняння Хілла) в це співвідношення, одержимо залежність потужності від сили:

$$W(P) = Pv = \frac{b(P_0 - P)}{P + a}P. \quad (2.16)$$

Функція  $W(P)$  має куполоподібну форму і наведена на рис. 2.5.



Потужність дорівнює нулю при  $P = P_0$  та  $P = 0$  і до-



**Рисунок 2.5.** Залежність потужності м'яза від навантаження

сягає максимального значення за оптимальної величини навантаження  $P_{opt}$ . Оптимальне навантаження — це максимум на кривій  $W(P)$  (див. рис. 2.5). У цій точці похідна  $dW/dP = 0$ . Отже, беручи похідну від  $W$  і прирівнюючи її до нуля, маємо

$$\frac{dW}{dP} = -\frac{bP}{P+a} + \frac{b(P_0-P)}{P+a} - \frac{b(P_0-P)P}{(P+a)^2} = 0, \quad (2.17)$$

звідси

$$P \equiv P_{opt} = \sqrt{a(P_0+a)} - a. \quad (2.18)$$

Використовуючи експериментальні дані для значення  $a$ , одержимо

$$P_{opt} = 0,31P_0. \quad (2.19)$$

Одержані результати показують, що розвиток найбільшої потужності та ефективності скорочення досягається при зусиллях 0,3 від максимального ізометричного навантаження  $P_0$ . Це використовують, наприклад, спортсмени-велогонщики: при переході з рівнини на гірську ділянку навантаження на м'язи зростає ( $P/P_0 > 0,3$ ),

і спортсмен перемикає швидкість на нижчу передачу, тим самим зменшуючи  $P$  і наближуючи її до  $P_{opt}$ .

Ефективність роботи м'яза при скороченні може бути визначена як відношення здійсненої роботи до витраченої енергії  $\Delta E$ :

$$\xi = \frac{A}{\Delta E}. \quad (2.20)$$

### 2.3. Зсування

Деформація зсуву виникає, якщо на тіло діє дотична сила, прикладена паралельно закріпленій основі (рис. 2.6). У цьому випадку

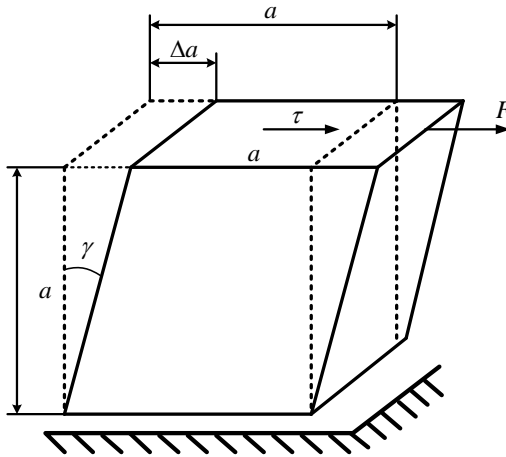


Рисунок 2.6. Деформація зсуву

напрямок зсування є паралельним прикладеній силі й перпендикулярним до бічної грані. При цьому бічні грані зміщуються на деякий кут  $\gamma$ , який називають кутом зсуву.

При зсуванні в зразку виникає напруження зсуву  $\tau$  (дотичне напруження), що дорівнює відношенню сили  $F$  до площі основи  $S$ :

$$\tau = \frac{F}{S}. \quad (2.21)$$

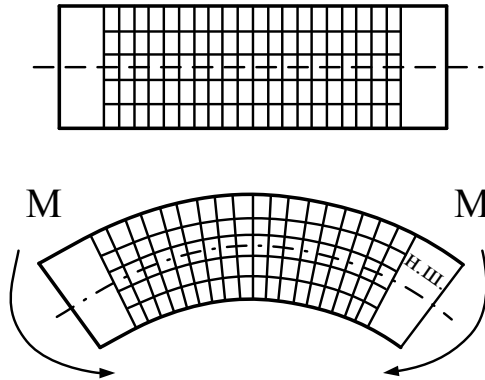
За невеликої величини відносної деформації зсуву зв'язок між деформацією і механічним напруженням виражається емпіричним співвідношенням:

$$\tau = G\gamma, \quad (2.22)$$

де  $G$  — модуль зсуву, що є характеристикою матеріалу і залежить від його внутрішньої будови.

## 2.4. Вигин

Деформація вигину характеризується вигином осі або середньої поверхні деформованого об'єкта під дією зовнішніх сил (рис. 2.7). При вигині один зовнішній шар стрижня стискається,



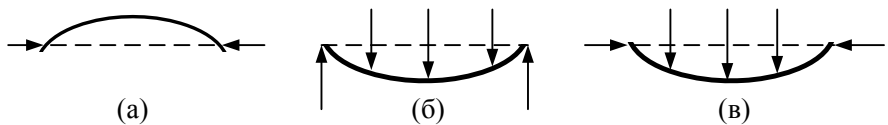
**Рисунок 2.7.** Деформація вигину

а інший — розтягується. Середній (нейтральний) шар змінює лише свою форму, зберігаючи довжину. Ступінь деформування бруска, що має дві точки опори, визначається переміщенням  $\lambda$ , яке отримує середина тіла. Величина  $\lambda$  називається стрілою прогину.

Матеріал, який перебуває в нейтральному шарі, не працює. Тому частина матеріалу, розміщена біля цього нейтрального шару,

може бути видалена без великих збитків для міцності балки. Це одне з розв'язків задачі мінімальної маси конструкції при збереженні заданої міцності. Такий спосіб у природі реалізується для зменшення маси людини і тварин при збереженні міцності їх скелета. У багатьох кістках скелета частково відсутнє "осердя", оскільки циліндричний шар близько від осі кістки не зазнає істотних деформацій при її вигині.

Щодо прямого бруса залежно від напрямку діючих сил, вигин називають поздовжнім або поперечним. Поздовжній вигин виникає під дією сил, спрямованих уздовж бруса та доданих до його кінців назустріч одна одній (рис. 2.8 а). Поперечний вигин виникає під



**Рисунок 2.8.** Різні види вигину: (а) — поздовжній; (б) — поперечний; (в) — поздовжньо-поперечний

дією сил, спрямованих перпендикулярно до бруса та доданих як до його кінців, так і до середньої частини (рис. 2.8 б). Трапляється також і змішаний поздовжньо-поперечний вигин (рис. 2.8 в)

## 2.5. Кручення

Цей спосіб деформування характеризується взаємним поворотом поперечних перерізів стрижня під впливом моментів (пар сил), що діють у площині цих перерізів. Кручення виникає, наприклад, коли нижня частина стрижня є закріпленою, а верхню повертають навколо поздовжньої осі. При цьому відстань між різними кінцями залишається практично незмінною, але точки шарів, що лежать на одній вертикалі, зсунуті одна відносно одної. Це зсунення в різних місцях буде різним. Наприклад, у центрі зсунення зовсім не буде,

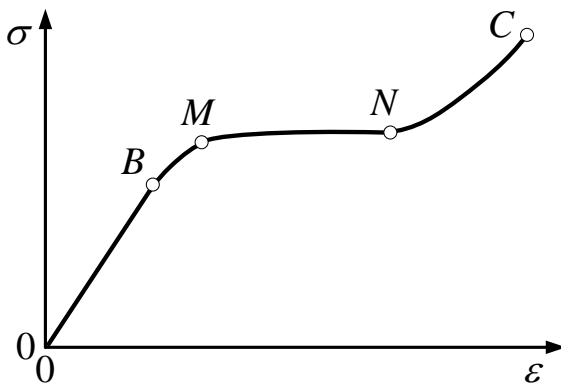
на краях воно буде максимальним. Таким чином, деформація кручення зводиться до неоднорідного зсування. Абсолютна деформація при крученні характеризується кутом повороту  $\phi$  одного кінця відносно іншого. Відносна деформація  $\theta$  дорівнює відношенню кута  $\phi$  до довжини стрижня  $l$ :

$$\theta = \frac{\phi}{l}. \quad (2.23)$$

Необхідно зазначити, що різні способи деформування однорідних тіл завжди можна звести до комбінації розтягування (стиснення) і зсуву.

## 2.6. Міцність та руйнування

Типова залежність механічного напруження  $\sigma$  від відносної деформації  $\varepsilon$  для твердих тіл при розтягуванні подана на рис. 2.9. Ділянка  $OB$  відповідає пружній деформації, що зникає відразу після



**Рисунок 2.9.** Залежність механічного напруження від деформації

для зняття навантаження. Точка  $B$  — межа пружності — напруження, нижче від якого деформація зберігає пружний характер (тобто справедливим є закон Гука). Ділянка  $BM$  відповідає пластичній деформації, що не зникає після зняття навантаження. Ділянка  $MN$

відповідає деформації текучості, яка зростає без збільшення напружень. Граничне значення напружень, починаючи з якого деформація стає текучою, називається межею текучості. Точка  $C$  — межа міцності — механічне напруження, при якому відбувається руйнування зразка. Межа міцності залежить від способу деформування і властивостей матеріалу. В області пружних деформацій (лінійна область) зв'язок між механічною напругою і деформацією описується законом Гука (2.3).

Міцність — здатність тіл витримувати без руйнування прикладене до них навантаження. Міцність зазвичай характеризують величиною граничного напруження, що спричиняє руйнування тіла при даному способі деформування.

Межа міцності — це максимальне напруження, при якому зразок руйнується.

При різних способах деформування значення межі міцності відрізняються. Це показано в таблиці 2.2 на прикладі стегнової кістки людини і коня. Межа міцності в одному органі є істотно різною в

**Таблиця 2.2.** Порівняння меж міцності кісток людини і коня

Межа міцності, МПа	Людина	Кінь
Стискання	170	145
Розтягування	124	121

його різних тканинах. У таблиці 2.3 наведені характеристики тканин різних органів. Руйнування — макроскопічне порушення суцільності тіла (матеріалу) в результаті механічних або будь-яких інших впливів. У процесі руйнування тіла можна виділити дві стадії: початкову — розвиток пор, тріщин, і кінцеву — поділ тіла на дві та більше частин. Залежно від того, як проходять ці стадії, розрізняють крихке і пластичне (в'язке) руйнування. Розглянемо, як відбувається руйнування однорідного стрижня під час його розтя-

**Таблиця 2.3.** Межі міцності людських органів

Вид тканини	Межа міцності при стисканні, МПа
Суцільна кістка	147
Мінеральний компонент	44
Білковий компонент	0,1
Емаль	34 – 45
Дентин	20
Хребець	7
Зв'язки великих суглобів	10 – 16
Шкіра	17 – 36

гування. Нехай один кінець стрижня є закріпленим, а до іншого прикладена поздовжня сила, яку поступово збільшують. Ця сила спричиняє відносно подовження стрижня, в результаті якого в матеріалі виникає механічне напруження.

**В'язке руйнування.** Прямолінійна ділянка на діаграмі рис. 2.9 відповідає пружній деформації, за якої напруження в матеріалі зростає пропорційно величині відносного подовження. Потім починається область незворотних змін розмірів і форми тіла, обумовлена зародженням та розвитком тріщин у найбільш слабкому місці. Швидкість проходження процесу в'язкого руйнування зазвичай невелика, а сам процес можна сповільнити (зупинити), знизивши прикладене навантаження. Коли відносно розтягнення досягає деякого критичного значення, відбувається руйнування (розрив) стрижня.

**Крихке руйнування.** Це руйнування починається практично відразу після завершення пружної деформації (прямолінійна ділянка) і характеризується високою швидкістю проходження процесу. Певна тріщина досить швидко досягає критичного розміру, після цього відбувається її стрімке мимовільне поширення, що завершується руйнуванням.

Основними факторами, що визначають характер процесу руйнування, є: властивості матеріалу і стан речовини (структура речовини, температура, вологість і т. ін.); властивості об'єкта (конструкційні особливості, розміри, форма, якість поверхні), динаміка силового впливу (швидкість навантаження).

## 2.7. Механічні властивості біологічних тканин

Структура матеріалу є основним фактором, що визначає його механічні властивості і характер процесу руйнування. Більшість біологічних тканин є анізотропними композитними матеріалами, утвореними об'ємним поєднанням хімічно різнорідних компонентів. Склад кожного типу тканини сформувався у процесі еволюції та залежить від функцій, які вона виконує.

**Кісткова тканина.** Це основний матеріал опорно-рухового апарату. Так, у скелеті людини більше ніж 200 кісток. У дорослої людини скелет важить близько 12 кг (18 % від загальної ваги). У компактній кістковій тканині половину об'єму становить неорганічний матеріал — мінеральна речовина кістки — гідроксилапатит. Інша частина об'єму складається з органічного матеріалу, в основному колагену (високомолекулярна сполука, волокнистий білок, що має високу еластичність). Здатність кістки до пружної деформації реалізується за рахунок мінеральної речовини, а повзучість — за рахунок колагену.

Механічні властивості кісткової тканини залежать від багатьох факторів: віку, захворювання, індивідуальних умов росту. У нормі густина кісткової тканини дорівнює  $2400 \text{ кг/м}^3$ , модуль Юнга  $E = 10^{10} \text{ Па}$ , межа міцності при розтягуванні 100 МПа, відносна деформація 1 %.

За різних способів деформації (навантаження) кістка поводить-ся по-різному. Міцність на стиск вища, ніж на розтяг або вигин.



Так, стегнова кістка в поздовжньому напрямку витримує навантаження 45000 Н, а при вигині — 2500 Н. Запас механічної міцності кістки досить значний і помітно перевищує навантаження, з якими вона стикається в звичайних життєвих умовах. Стегнова і гомілкорова кістки витримують навантаження, в 25 – 30 разів більше від ваги людини.

**Шкіра.** До складу шкіри входять волокна колагену, еластину та основної тканини — матриці. Колаген становить 75 % сухої маси, а еластин — близько 4 %. Густина шкіри в нормі становить 1100 кг/м<sup>3</sup>. Еластин розтягується дуже сильно, приблизно до 200 – 300 %. Колаген може розтягуватися до 10 %. Механічні характеристики компонентів шкіри:

- колаген:  $E = 10 - 100$  МПа,  $\sigma_{\max} = 100$  МПа;
- еластин:  $E = 0,5$  МПа,  $\sigma_{\max} = 5$  МПа.

Шкіра є в'язкопружним матеріалом із вискоеластичними властивостями, вона добре розтягується і подовжується.

**М'язи.** Середнє значення густини м'язової тканини дорівнює 1050 кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга  $E = 9 \cdot 10^5$  Па. М'язи здатні деформуватися на десятки відсотків, цьому сприяє розпрямлення молекул колагену.

### Питання для самоконтролю

1. Фундаментальні поняття механіки суцільних середовищ. Вирази для пружних та в'язких напружень.
2. Механічні напруження, одиниці вимірювання напружень. Закон Гука. Модуль пружності, його фізичний зміст та одиниці вимірювання.

3. Поняття про в'язкопружне середовище. Модель Кельвіна – Фойгта в'язкопружного середовища.
4. Модель Максвелла в'язкопружного середовища.
5. Модель стандартного лінійного тіла.
6. Діаграма навантаження. Межі пружності, текучості і руйнування.
7. В'язкопружна модель м'яза.
8. Крива повзучості.
9. Механізми пластичності твердих тіл.
10. Модуль зсуву, модуль пружності, коефіцієнт Пуассона.

## РОЗДІЛ 3

### МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ. АКУСТИКА

Коливаннями називають періодичні рухи або зміни стану (змінний електричний струм, рух маятника, робота серця та ін.). Найбільш наочно демонструє коливальний процес маятник, що здійснює коливання.

#### 3.1. Гармонічні коливання

Гармонічне коливання — коливання, що описується функцією синуса або косинуса.

Розглянемо приклад. Нехай математичний маятник у початковий момент часу відхилено від положення рівноваги на невеликий кут  $\alpha$  (рис. 3.1). Тоді траєкторію руху маятника можна вважати

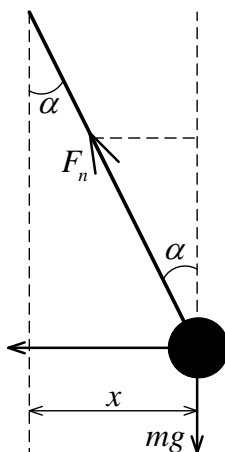


Рисунок 3.1. Математичний маятник

прямою лінією, що збігається з віссю  $OX$ . У цьому разі виконується

ся наближена рівність:

$$\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{x}{l}, \quad (3.1)$$

де  $x$  — зсув тіла масою  $m$  від положення рівноваги;  $l$  — довжина нитки маятника. На матеріальну точку діють сила натягу  $F_n$  нитки і сила тяжіння. Тоді вздовж осі  $OY$  рух не відбувається, і проєкції обох сил повинні бути рівними:

$$F_n \cos \alpha = mg. \quad (3.2)$$

Проектуючи сили тяжіння та натягу на вісь  $OX$ , маємо

$$F = F_n \sin \alpha \quad (3.3)$$

(проекція сили тяжіння дорівнює нулю). Підставляючи одне рівняння в інше, отримуємо

$$F = mg \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = mg \tan \alpha = mg \frac{x}{l} = kx, \quad (3.4)$$

де  $k = mg/l$ . Використовуючи другий закон Ньютона маємо

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \quad (3.5)$$

Припускаючи, що  $k/m \equiv \omega_0^2$ , маємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \quad (3.6)$$

Розв'язок рівняння (3.6) має вигляд

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.7)$$

де  $\omega_0 t + \varphi_0$  — фаза коливань;  $\varphi_0$  — початкова фаза;  $\omega_0$  — колова

частота коливань;  $A$  — амплітуда. Амплітуда і початкова фаза коливань визначаються початковими умовами руху, тобто положенням і швидкістю матеріальної точки на момент часу  $t = 0$ .

Беручи похідну від останнього виразу за часом, одержимо швидкість

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.8)$$

де  $v_{\max} = A\omega_0$  — максимальна швидкість (амплітуда швидкості). Оскільки похідна від швидкості є прискоренням, маємо

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (3.9)$$

де  $a_{\max} = A\omega_0^2$  — максимальне прискорення (амплітуда прискорення).

Визначимо період коливань математичного маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3.10)$$

Зазначимо, що період  $T$  не залежить від маси вантажу  $m$ .

### 3.2. Кінетична і потенціальна енергія коливального руху

Підставляючи вираз для швидкості з (3.8) у формулу для кінетичної енергії  $E_k = mv^2/2$ , маємо

$$E_k = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.11)$$

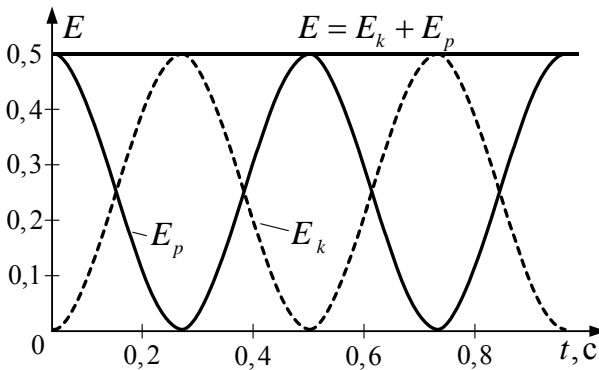
Потенціальну енергію коливального руху можна знайти з відомої формули для енергії пружної деформації:

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.12)$$

Повна енергія буде дорівнювати

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2. \quad (3.13)$$

Типовий графік зміни величин (3.11), (3.12) і (3.13) поданий на рис. 3.2.



**Рисунок 3.2.** Залежності кінетичної (3.11), потенціальної (3.12) і повної (3.13) енергії від часу  $t$  при параметрах  $A = 1$  м,  $k = 1$  Н/м,  $\omega_0 = 2\pi$  рад/с,  $\varphi_0 = 0$  рад

### 3.3. Згасні коливання

Наявність у системі сил тертя принципово змінює характер руху — рух стає згасним. У цьому разі співвідношення (3.5) отримує додаткову складову — силу тертя  $F_t = -rv$ , де  $r$  — коефіцієнт

тертя, що визначається з таблиці. У результаті маємо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_t = -kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (3.14)$$

Поділимо обидві частини співвідношення на  $m$ :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0. \quad (3.15)$$

Уводячи позначення  $2\beta \equiv r/m$  ( $\beta$  — коефіцієнт загасання) та враховуючи, що  $\omega_0^2 = k/m$ , перепишемо (3.15) у вигляді

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.16)$$

За умови  $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0$  розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3.17)$$

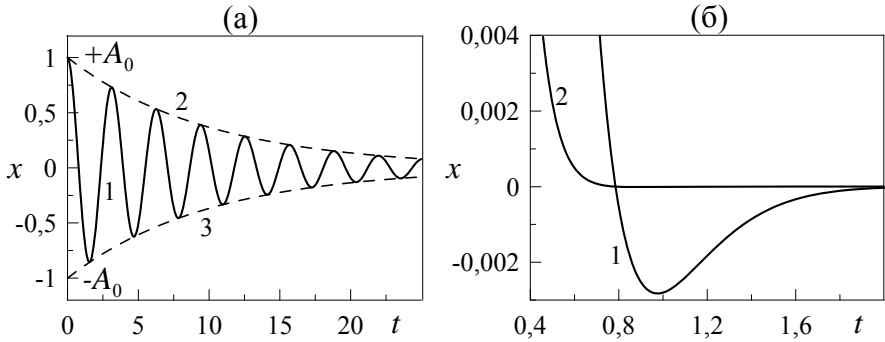
Графік цієї функції наведено на рис. 3.3 (ліворуч). На поданому рисунку штриховими кривими показано зміну амплітуди за законом

$$A = \pm A_0 e^{-\beta t}. \quad (3.18)$$

Період згасних коливань залежить від коефіцієнта тертя і визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.19)$$

Швидкість зменшення амплітуди коливань визначається коефіцієнтом тертя  $\beta$ , однак на практиці зазвичай використовують логарифмічний декремент загасання, розуміючи під цією величиною натуральний логарифм від відношення двох послідовних амплітуд коли-



**Рисунок 3.3.** (а) Періодичний рух маятника: крива 1 — залежність (3.17) при  $\beta = 0, 1 \text{ с}^{-1}$ ; криві 2 і 3 — залежності (3.18) при  $\beta = 0, 1 \text{ с}^{-1}$ . (б) Аперіодичний рух маятника: крива 1 — залежність (3.17) при  $\beta = 5 \text{ с}^{-1}$ ; крива 2 — залежність (3.17) при  $\beta = 11 \text{ с}^{-1}$ . Значення параметрів:  $A_0 = 1 \text{ м}$ ,  $\omega = 2 \text{ рад/с}$ ,  $\varphi_0 = 0 \text{ рад}$

вання, розділених періодом:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (3.20)$$

У разі, якщо коефіцієнт загасання є значним ( $\beta^2 > \omega_0^2$ ), рух маятника називають аперіодичним (рис. 3.3 б).

### 3.4. Вимушені коливання

Вимушеними називають коливання, що виникають у системі під дією зовнішньої сили, яка змінюється за періодичним законом. Наприклад,

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (3.21)$$

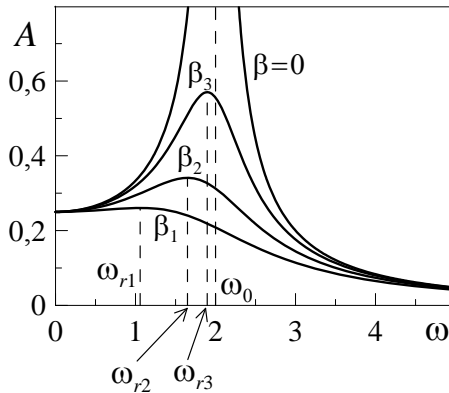
де  $F_0$  — амплітуда;  $\omega$  — частота коливань зовнішньої сили. Записуючи другий закон Ньютона і розв'язуючи одержане рівняння, маємо нетривіальну залежність для амплітуди вимушених коли-



вань:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.22)$$

Якщо  $\omega_0$  та  $\beta$  для системи є заданими, то амплітуда вимушених коливань має максимум за деякої певної частоти зовнішньої сили (рис. 3.4). Ця частота називається резонансною, а відповідне яви-



**Рисунок 3.4.** Залежності амплітуди вимушених коливань  $A$  від частоти  $\omega$  (рад/с) (3.22) при параметрах:  $F_0 = 1$  Н,  $m = 1$  кг,  $\omega_0 = 2$  рад/с, і коефіцієнтах загасання:  $\beta_1 = 1,2$  с $^{-1}$ ,  $\beta_2 = 0,8$  с $^{-1}$ ,  $\beta_3 = 0,45$  с $^{-1}$ . Резонансні частоти, позначені як  $\omega_r$ , розраховують за формулою (3.23)

ще — резонансом. Резонансну частоту можна визначити з умови екстремуму (3.22):

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (3.23)$$

Відповідна амплітуда при резонансі дорівнює

$$A_r = \frac{F_0}{2\beta m\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (3.24)$$

Звідси бачимо, що амплітуда коливань при резонансі тим більша, чим меншим є коефіцієнт загасання  $\beta$ .

Зазначимо, що внутрішні органи людини мають декілька влас-

них частот коливань, тобто існує реальна загроза виникнення резонансних явищ при періодичному зовнішньому впливі, що, у свою чергу, буде супроводжуватися негативними наслідками з можливим розривом внутрішніх органів. Джерелами такого впливу на організм людини є вібрації та інфразвукові коливання, тобто коливання на низьких частотах.

### 3.5. Механічні хвилі

Механічною хвилею називають механічне збурення, що поширюється у просторі та переносить енергію. Виділяють два основних різновиди механічних хвиль:

- пружні хвилі (поширення пружних деформацій);
- хвилі на поверхні рідини.

Пружні хвилі виникають завдяки зв'язкам, що існують між частинками середовища. Цей процес поширюється в просторі з кінцевою швидкістю.

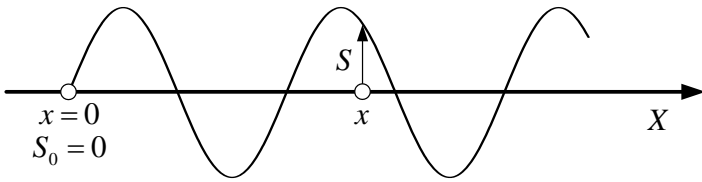
Рівняння хвилі описує залежність величини збурення точки простору від координати  $x$  і часу  $t$ . Ця залежність має вигляд

$$\vec{s} = f(\vec{x}, t). \quad (3.25)$$

Хвилі можна поділити на поздовжні та поперечні. Хвиля називається поздовжньою, якщо  $\vec{s}$  і  $\vec{x}$  спрямовані вздовж однієї осі, поперечною, — якщо  $\vec{s}$  і  $\vec{x}$  спрямовані взаємно перпендикулярно.

Для одержання рівняння хвилі припустимо таке. Нехай хвиля поширюється вздовж осі  $OX$  без загасання, амплітуда всіх точок однакова і дорівнює  $A$ . Джерелом хвилі є коливання в точці  $O$  з координатою  $x = 0$  (рис. 3.5). Тоді рівняння коливань джерела має вигляд

$$S_0 = A \cos \omega t. \quad (3.26)$$



**Рисунок 3.5.** Поширення механічної хвилі

До точки з координатою  $x \neq 0$  коливання дійде за час  $\tau$  (час запізнення). Рівняння коливань цієї точки набирає вигляду

$$S = A \cos [\omega (t - \tau)], \quad v = \frac{x}{\tau}, \quad \tau = \frac{x}{v}. \quad (3.27)$$

Отже, рівняння коливань будь-якої точки з координатою  $x$  набуває вигляду

$$S = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Останнє співвідношення являє собою рівняння плоскої хвилі, за допомогою якого можна визначити зміщення будь-якої точки хвилі в будь-який момент часу. З цього рівняння випливає, що фаза коливань

$$\varphi = \omega \left( t - \frac{x}{v} \right). \quad (3.29)$$

На основі поняття фази можна визначити такі поняття:

- **фронт хвилі** — множина точок, що одночасно мають однакову фазу коливань;
- **фазова швидкість** — швидкість поширення фіксованої фази коливань, що дорівнює швидкості поширення хвилі;
- **довжина хвилі** — відстань між двома точками, фази яких в один і той самий момент часу відрізняються на  $2\pi$ .

Довжина хвилі  $\lambda$  дорівнює відстані, яку пройшла хвиля за період

коливань:

$$\lambda = Tv. \quad (3.30)$$

### 3.6. Енергія хвиль

Кількісною характеристикою енергії, яку переносить хвиля, є потік енергії. Потік енергії хвилі дорівнює відношенню енергії, що переносить хвиля через деяку поверхню, до часу, за який цю енергію перенесено.

$$\Phi = \frac{dE}{dt} = w_p Sv, \quad (3.31)$$

де  $w_p$  — об'ємна густина енергії коливального руху, тобто величина енергії коливального руху частинок, що беруть участь у хвильовому процесі й розміщені в  $1 \text{ м}^3$ .

Густина потоку енергії (або інтенсивність хвилі) — це відношення потоку енергії хвиль до площини, орієнтованої перпендикулярно до напрямку поширення хвилі:

$$I = \frac{\Phi}{S} = w_p v. \quad (3.32)$$

Енергія, що переноситься пружною хвилею, складається з потенціальної енергії деформацій та кінетичної енергії частинок, що здійснюють коливання. Об'ємна густина енергії хвиль дорівнює

$$w_p = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2}, \quad (3.33)$$

де  $A$  — амплітуда коливань точок середовища;  $\rho$  — густина середовища.

Підставимо вираз (3.33) у (3.32) та одержимо

$$I = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2} v. \quad (3.34)$$

Отже, густина потоку енергії пружних хвиль пропорційна густині середовища, квадрату амплітуди коливань частинок, квадрату частоти коливань і швидкості поширення хвиль.

### 3.7. Ефект Доплера

Ефектом Доплера називають зміну частоти хвилі, яку сприймає спостерігач, унаслідок відносного руху джерела хвиль і спостерігача. Розглянемо декілька випадків.

1. Спостерігач наближається зі швидкістю  $v_c$  до нерухомого щодо середовища джерела хвиль. При цьому за один і той самий інтервал часу він натрапляє на більшу кількість хвиль, ніж за відсутності руху. Тому частота  $\nu'$ , що сприймається спостерігачем, більша за частоту хвилі  $\nu$ , випромінювану джерелом. Оскільки  $\nu = v/\lambda$ , маємо

$$\nu' = \frac{v + v_c}{\lambda} = \frac{v + v_c}{v} \nu. \quad (3.35)$$

2. Джерело хвиль рухається зі швидкістю  $v_d$  до нерухомого щодо середовища спостерігача. Тоді спостерігач сприймає частоту

$$\nu'' = \frac{v}{v - v_d} \nu. \quad (3.36)$$

3. Одночасний рух спостерігача і джерела назустріч один одному:

$$\nu''' = \frac{v}{v - v_d} \frac{v + v_c}{v} \nu = \frac{v + v_c}{v - v_d} \nu. \quad (3.37)$$

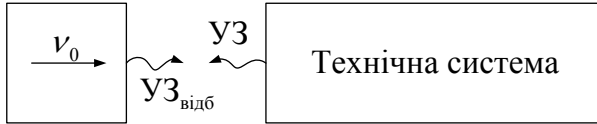
4. Загальна формула

$$\nu'''' = \frac{v \pm v_c}{v \mp v_d} \nu. \quad (3.38)$$

В останньому виразі верхній знак у чисельнику та знаменнику відповідає наближенню, а нижній — віддаленню об'єктів.

Ефект Доплера можна використовувати для визначення швидкості руху тіла в середовищі. Для медичних застосувань це має

особливе значення. Розглянемо докладніше такий випадок. Нехай генератор ультразвуку суміщений із приймачем у вигляді деякої технічної системи (див. рис. 3.6). Технічна система нерухома щодо



**Рисунок 3.6.** Застосування ефекту Доплера

середовища. У середовищі зі швидкістю  $v_0$  рухається об'єкт (тіло). Генератор випромінює ультразвук із частотою  $\nu_g$ . Рухомим об'єктом як спостерігачем сприймається частота  $\nu_1$ , що визначається за формулою (3.35):

$$\nu_1 = \frac{v + v_0}{v} \nu_g, \quad (3.39)$$

де  $v$  — швидкість поширення механічної хвилі (ультразвуку). Ультразвукова хвиля з частотою  $\nu_1$  відбивається рухомим об'єктом у бік технічної системи. Приймач сприймає вже іншу частоту (ефект Доплера), яку можна виразити використовуючи формулу (3.36):

$$\nu_r = \frac{v}{v - v_0} \nu_1, \quad (3.40)$$

або з урахуванням (3.39):

$$\nu_r = \frac{v}{v - v_0} \frac{v + v_0}{v} \nu_g = \frac{v + v_0}{v - v_0} \nu_g. \quad (3.41)$$

Таким чином, різниця частот дорівнює

$$\nu_s = \nu_r - \nu_g = \frac{v + v_0}{v - v_0} \nu_g - \nu_g = \frac{v + v_0 - v + v_0}{v - v_0} \nu_g = \frac{2v_0}{v - v_0} \nu_g \quad (3.42)$$

і називається **доплерівським зсувом частоти**.

У медичних застосуваннях швидкість ультразвуку значно біль-

ша від швидкості руху об'єкта ( $v \gg v_0$ ). Для цих випадків із (3.42) маємо

$$\nu_s \approx \frac{2v_0}{v} \nu_g. \quad (3.43)$$

Ефект Доплера використовують для визначення швидкості кровотоку, швидкості руху клапанів і стінок серця (доплерівська ехокардіографія) та інших органів.

### 3.8. Звукові коливання

Коливання пружної пластинки, стисненої в лещатах, мають тим більшу частоту, чим коротшим є вільний (той, що коливається) кінець пластини. Коли частота коливань стає більшою за 16 Гц, ми починаємо чути коливання пластинки. Коли частота коливань стане більшою за 20000 Гц, коливання знову перестають бути чутними. Тобто звук обумовлений механічними коливаннями в пружних середовищах і тілах, частоти яких лежать у діапазоні від 16 Гц до 20 кГц і які здатне сприймати людське вухо. Нечутні механічні коливання з частотами нижче ніж 16 Гц називають інфразвуковими, а з частотами вище за 20 кГц — ультразвуковими.

Передавання коливань від тіла, що генерує звук, здійснюється через повітря (або будь-яке щільне середовище). Під час коливань тіло почергово то стискає шар повітря, який прилягає до поверхні тіла, то, навпаки, створює розрідження в цьому шарі. Таким чином, поширення звуку в повітрі починається з коливань густини повітря біля поверхні тіла, що здійснює коливання.

### 3.9. Акустика

Наведемо основні визначення.

Тон — будь-який звук, який є періодичним процесом. Простий або чистий тон (нота) — гармонічний хвильовий процес, тобто зву-

кова хвиля, яка може бути описана функцією синуса. Складний тон — ангармонічний хвильовий процес.

Складний тон за допомогою аналізу Фур'є може бути розкладений на прості тони різних частот. Мінімальна (або нульова гармоніка) частота такого розкладання відповідає основному тону, інші тони (гармоніки, обертони) мають різні частоти, більші за основну.

Акустичний спектр — сукупність частот, що відповідають складному тону.

Шум — сукупність складних тонів, що змінюються хаотично.

Висота тону — суб'єктивна характеристика, яка визначається частотою основного тону.

Тембр — визначається виключно спектральним складом складного тону.

Енергетичною характеристикою звуку як механічної хвилі є інтенсивність  $I$ :

$$I = \frac{p^2}{2\rho c}, \quad (3.44)$$

де  $\rho$  — густина середовища;  $c$  — швидкість звуку.

Вуху людини сприймає широкий діапазон інтенсивностей. Наприклад, на частоті 1000 Гц від  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> або  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па (поріг чутності) до  $I_{\max} = 10$  Вт/м<sup>2</sup> або  $p_{\max} = 60$  Па (поріг болювого відчуття).

Відношення цих інтенсивностей дорівнює  $10^{13}$ , тому зручно використовувати логарифмічні одиниці та логарифмічну шкалу. Шкала рівнів інтенсивностей звуку створюється таким чином: значення  $I_0$  беруть як початковий рівень шкали, а будь-яку інтенсивність  $I$  виражають через десятковий логарифм її відношення до  $I_0$  (одиниця вимірювання — Бел):

$$L_B = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (3.45)$$



а для звукового тиску

$$L_B = 2 \lg \frac{p}{p_0}. \quad (3.46)$$

При використанні децибел відповідно маємо

$$L_{dB} = 10 \lg \frac{I}{I_0}, \quad L_{dB} = 20 \lg \frac{p}{p_0}. \quad (3.47)$$

Гучність — ще одна суб'єктивна характеристика, що визначає рівень слухового відчуття. Гучність оцінюється шляхом порівняння слухового відчуття від двох звукових джерел.

В основу шкали гучності покладено закон Вебера – Фехнера: якщо збільшувати звукове подразнення (інтенсивність звуку) в однакове число разів (у геометричній прогресії), то відчуття цього подразнення (гучність) збільшиться на однакову величину (в арифметичній прогресії).

Нехай інтенсивність зростає за законом  $xI, x^2I, x^3I, \dots$ , де величина параметра  $x > 1$ , тоді гучність змінюється таким чином:  $E, 2E, 3E, \dots$

Математично це означає, що гучність пропорційна логарифму інтенсивності:

$$E = k \lg \frac{I}{I_0}, \quad (3.48)$$

де  $k$  залежить від частоти шуму та інтенсивності й визначається експериментальним шляхом (з усереднених даних осіб із нормальним слухом).

Якщо б параметр  $k$  був сталою величиною, то з (3.45) та (3.48) впливало б, що логарифмічна шкала інтенсивностей звуку відповідає шкалі гучностей. У цьому разі гучність також можна було б виражати у белах або децибелах. Однак складна залежність коефіцієнта  $k$  від частоти та інтенсивності не дозволяє використовувати формулу (3.45). Умовно вважають, що на частоті 1 кГц шкали гуч-

ності та інтенсивності повністю збігаються, тобто  $k = 1$  та

$$E_B = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (3.49)$$

або за аналогією з (3.47)

$$E_\Phi = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (3.50)$$

Для відмінності від шкали інтенсивності звуку в шкалі гучності децибели називають фонами ( $\Phi$ ).

### 3.10. Хвильовий опір

Звуковий тиск  $p$  залежить від швидкості  $v$  частинок середовища, що здійснюють коливання. Обчислення приводять до залежності

$$p = \rho cv, \quad (3.51)$$

де  $\rho$  — густина середовища;  $c$  — швидкість звукової хвилі в середовищі.

Добуток  $\rho c$  у формулі (3.51) називають питомим акустичним імпедансом (див. таблицю 3.1). Для плоскої хвилі його називають також хвильовим опором.

Хвильовий опір — найважливіша характеристика середовища, що визначає умови віддзеркалення і заломлення хвиль на його межі.

Нехай звукова хвиля потрапляє на межу поділу двох середовищ. Частина хвилі відбивається, а частина — заломлюється. Закони відбиття і заломлення звукової хвилі аналогічні законам відбиття й заломлення світла. Заломлена хвиля може поглинатися в другому середовищі, а може вийти з нього.

Припустимо, що плоска хвиля падає нормально до межі поділу,

інтенсивність її в першому середовищі  $I_1$ , інтенсивність заломленої хвилі в другому середовищі  $I_2$ . Введемо параметр

$$\beta = \frac{I_2}{I_1}, \quad (3.52)$$

що є коефіцієнтом проникнення звукової хвилі. Він визначається за формулою Релея:

$$\beta = \frac{4c_1\rho_1}{c_2\rho_2} \left( \frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2} + 1 \right)^{-2}. \quad (3.53)$$

Найбільше значення параметра  $\beta$  дорівнює 1, якщо  $c_1\rho_1 = c_2\rho_2$ . Отже, при рівності хвильових опорів двох середовищ звукова хвиля за нормального падіння пройде межу поділу без відбиття. Якщо хвильовий опір другого середовища дуже великий порівняно з опором першого ( $c_2\rho_2 \gg c_1\rho_1$ ), то замість (3.53) маємо

$$\beta \approx 4 \frac{c_1\rho_1}{c_2\rho_2}. \quad (3.54)$$

У таблиці 3.1 наведено хвильові опори деяких речовин за температури 20 °С. Використаємо (3.54) для обчислення коефіцієнта проникнення звукової хвилі з повітря в бетон та у воду:

$$\beta = \frac{4 \cdot 430}{4800000} \cdot 100\% = 0,036\%;$$

$$\beta = \frac{4 \cdot 430}{1440000} \cdot 100\% = 0,119\%.$$

Згідно з цим лише дуже мала частина енергії звукової хвилі надходить із повітря в щільне середовище.

У будь-якому закритому приміщенні відбитий від стін, стель, меблів звук потрапляє на інші стіни, підлогу і т. ін., знову відбивається і поглинається та поступово згасає. Тому навіть після

**Таблиця 3.1.** Хвильові опори деяких речовин за температури 20 °С

Матеріал	$\rho c$ , кг·м <sup>-2</sup> ·с <sup>-1</sup>
Залізо	40 000 000
Бетон	4 800 000
Вода	1 440 000
Гума	60 000
Повітря	430
Масло	1 350 000
М'язи	1 540 000
Мозок	1 600 000
Кістка	6 220 000

того, як джерело звуку припинить свою дію, в приміщенні все ще є звукові хвилі, що створюють гул. Особливо це помітно у великих просторих залах. Процес поступового згасання звуку в закритих приміщеннях після виключення джерела називають реверберацією.

Реверберація, з одного боку, корисна, оскільки сприйняття звуку посилюється за рахунок енергії відбитої хвилі, але, з іншого боку, надмірно тривала реверберація може значно погіршити сприйняття мови, музики, оскільки кожна нова частина тексту перекривається попередніми. У зв'язку з цим зазначають деякий оптимальний час реверберації, враховуваний під час спорудження аудиторій, театральних і концертних залів та інше. Наприклад, час реверберації заповненого Великого театру в Москві становить 1,55 с, а для порожнього приміщення це 2,06 с.

### 3.11. Звукові методи дослідження

Звук може бути джерелом інформації про стан органів людини.

1. Аускультация — безпосереднє вислуховування звуків, що виникають усередині організму. За характером таких звуків можна

визначити, які саме процеси проходять у даній ділянці тіла і, в деяких випадках, установити діагноз. Прилади, які застосовують для вислуховування: стетоскоп, фонендоскоп.

Фонендоскоп складається з порожньої капсули з передавальною мембраною, що прикладається до тіла. У порожній капсулі виникає резонанс стовпа повітря, що викликає посилення звучання і, отже, поліпшення вислуховування. Вислуховуються дихальні шуми, хрипи, тони серця, шуми в серці. У клініці використовують установки, в яких вислуховування здійснюється за допомогою мікрофона та динаміка.

2. Фонокардіографія — графічна реєстрація тонів і шумів серця та їх діагностична інтерпретація. Запис здійснюють за допомогою фонокардіографа, що складається з мікрофона, підсилювача, частотних фільтрів, пристрою для реєстрації.

3. Перкусія — дослідження внутрішніх органів за допомогою постукування по поверхні тіла та аналізу звуків, що виникають. Постукування здійснюють або за допомогою спеціальних молоточків, або за допомогою пальців.

Якщо в замкненій порожнині викликати звукові коливання, то за певної частоти звуку повітря в порожнині почне резонувати, підсилюючи той тон, що відповідає розміру порожнини та її положенню. Схематичне тіло людини можна подати сумою різних об'ємів: газонаповнених (легені), рідких (внутрішні органи), твердих (кістки). Під час удару по поверхні тіла виникають коливання з різними частотами. Частина з них загасає. Інші збігаються з власними частотами порожнеч, отже, підсилюються і через резонанс будуть чутними. За тоном перкуторних звуків визначають стан і топографію органа.

**Питання для самоконтролю**

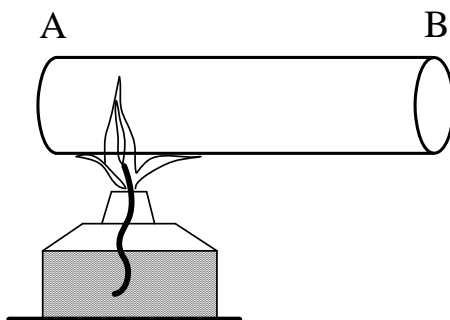
1. Наведіть приклади коливань. Які з них є механічними?
2. Вільні коливання. Амплітуда, період, частота. Гармонічні коливання. Математичний маятник. Коливання вантажу на пружині.
3. Кінетична і потенціальна енергія коливального руху.
4. Згасні коливання.
5. Вимушені коливання.
6. Автоколивання в біології.
7. Резонанс. Приклади резонансу в біологічних системах.
8. Які сили діють на кульку, підвішену на нитці, під час її коливання? Як ці сили змінюються?
9. Як зміниться період коливань маятника, якщо масу кульки збільшити (зменшити)?
10. Чому в реальних системах відбуваються втрати механічної енергії?

## РОЗДІЛ 4

### ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ

У механіці не розглядається зміна внутрішнього стану тіл. Наприклад, ми говоримо, що під час руху частина механічної енергії переходить в теплову, не уточнюючи, які процеси супроводжують цей перехід. Термодинаміка вивчає внутрішню будову і стан тіл, що можуть змінюватися в таких процесах, як нагрівання та охолодження, теплове розширення і стиснення, фазові перетворення, дифузія, теплопровідність та в'язкість і т. ін.

Термодинамічний стан тіла (наприклад, газу) характеризується його масою  $m$ , молярною масою  $\mu$ , тиском  $P$ , об'ємом  $V$ , температурою  $T$ . Ці величини називають термодинамічними параметрами тіла. Такі параметри мають сенс лише тоді, коли тіло перебуває, хоча б наближено, в так званому стані термодинамічної рівноваги. Тобто в стані, в якому всі термодинамічні параметри не змінюються з часом (до цього необхідно додати ще умову відсутності стаціонарних потоків). Якщо, наприклад, швидко підігрівати газ у посудині, як це показано на рис. 4.1, то температура в частині А виявиться вищою за температуру в частині В. Не будуть однакові і тиски в



**Рисунок 4.1.** Порушення стану термодинамічної рівноваги за рахунок нагрівання однієї частини посудини

частинах А і В. У цьому разі не має сенсу поняття температури або тиску всього газу.

У рівноважному стані для кожної речовини термодинамічні параметри пов'язані між собою так званим рівнянням стану:

$$P = f(T, V, m, \mu, \dots). \quad (4.1)$$

Таким рівнянням стану для ідеального газу є рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad (4.2)$$

де  $R = 8,31$  Дж/(моль · К) — універсальна газова стала;  $\mu$  — молярна маса газу. У молі будь-якої речовини міститься одна й та сама кількість молекул:  $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup>. Масу молекули можна одержати діленням маси моля на число Авогадро:

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A}. \quad (4.3)$$

Відношення універсальної газової сталої  $R$  до числа Авогадро називається постійною Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_A}, \quad (4.4)$$

яка має числове значення  $k \approx 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К. Температура  $T$  у формулі (4.2) вимірюється в Кельвінах:

$$T = t + 273,15, \quad (4.5)$$

де  $t$  — температура за Цельсієм.

Внутрішня енергія  $U$  — це вся енергія системи, за винятком механічної енергії системи як цілого. Сюди входить кінетична енергія поступального руху молекул системи та потенціальна енергія їх



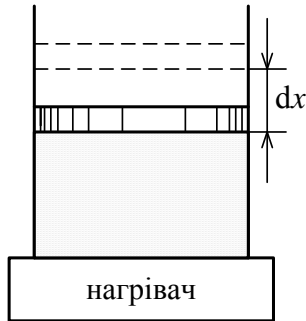
взаємодії між собою. Внутрішня енергія визначається за формулою

$$U = N\langle\varepsilon\rangle = N\frac{i}{2}kT, \quad (4.6)$$

де  $N$  — кількість молекул газу;  $\langle\varepsilon\rangle$  — середня кінетична енергія молекули;  $i$  — кількість ступенів вільності, що дорівнює мінімальній кількості змінних, необхідних для повного опису стану системи. Найпростіша механічна система — матеріальна точка в тривимірному просторі, що має три ступені вільності, оскільки її стан повністю описується трьома просторовими координатами.

#### 4.1. Перший початок термодинаміки

Розглянемо газ, що міститься в циліндрі з поршнем, який дозволяє змінювати об'єм газу (рис. 4.2). Циліндр контактує з нагрівачем



**Рисунок 4.2.** Рух поршня в циліндрі зі зміною об'єму газу

або холодильником, який може передавати газу тепло або забирати його. Нехай на поршень діє сила  $F$ . Розглянемо квазірівноважний процес, тобто повільний настільки, що можна вважати, що в кожен момент газ перебуває в стані рівноваги.

Робота над газом виконується зовнішніми силами при його стисненні. Робота самого газу виконується при його розширенні. Нехай

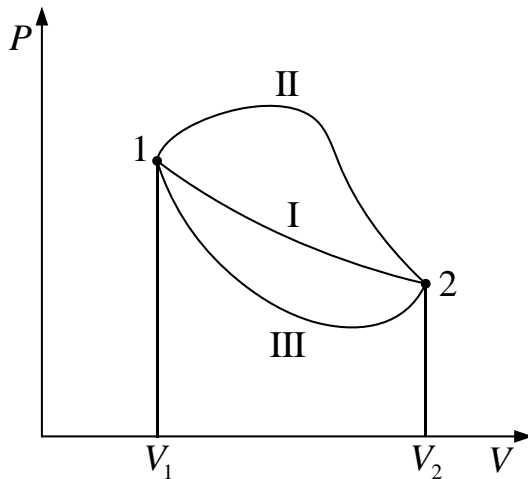
газ розширюється так, що поршень піднімається на величину  $dx$ . Тоді газ виконує роботу

$$dA = Fdx = PSdx = PdV. \quad (4.7)$$

де  $S$  — площа поршня. Ця величина називається елементарною роботою газу. Робота при розширенні газу від  $V_1$  до  $V_2$  дорівнює

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} PdV. \quad (4.8)$$

Якщо по одній осі відкласти об'єм газу, а по іншій — його тиск, то робота (4.8) буде зображуватися площею під кривою  $P(V)$  (рис. 4.3). Процес розширення від  $V_1$  до  $V_2$  може від-



**Рисунок 4.3.** Зміна обсягу роботи при розширенні газу в різних термодинамічних процесах

буватися по-різному: наприклад, можна ізолювати газ від нагрівача або, навпаки, нагрівати газ і т. п. Під час переміщення з точки 1 в точку 2 в газі можуть відбуватися різні процеси, навіть якщо

зафіксовано початковий і кінцевий стани. У кожному процесі робота матиме своє значення, оскільки площа під кривою процесу буде різною (криві I, II та III). Таким чином, робота газу залежить від характеру процесу. Робота додатна, якщо вона виконується газом, і від'ємна, якщо зовнішні сили виконують її над газом.

Перший закон термодинаміки визначає закон збереження енергії в теплових процесах. Якщо передати тілу певну кількість тепла, тіло може збільшити свою внутрішню енергію на величину  $\Delta U$  і, крім того, виконати роботу  $A$ , причому внаслідок закону збереження енергії

$$\Delta Q = \Delta U + A. \quad (4.9)$$

Останній вираз зручніше записати для малої зміни стану системи:

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (4.10)$$

Різниця в записі малого збільшення внутрішньої енергії  $dU$  та елементарної кількості теплоти  $\delta Q$ , а також елементарної роботи  $\delta A$  полягає в такому: внутрішня енергія системи є функцією її стану. Тобто при будь-якому процесі, в результаті якого система знову повернулася до вихідного стану, повна зміна її внутрішньої енергії дорівнює нулю. Математично це записується у вигляді рівняння

$$\oint dU = 0, \quad (4.11)$$

яке є критерієм того, що внутрішня енергія системи  $U$  є повним диференціалом  $dU$ . Робота і теплота таких властивостей не мають, тому вони не є повними диференціалами, а є "функціями процесу".

Перший закон термодинаміки формулюється так: теплота, передана системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії та здійснення роботи.

Для характеристики теплових властивостей тіл використовують

поняття теплоємності. Теплоємність — це кількість теплоти, що необхідна для нагрівання тіла на один Кельвін:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}. \quad (4.12)$$

Питома теплоємністю називається величина, що чисельно дорівнює теплоті, яку необхідно передати одиниці маси тіла для підвищення його температури на один Кельвін:

$$c = \frac{\Delta Q}{m\Delta T}. \quad (4.13)$$

Звідси можна визначити кількість теплоти, необхідної для нагрівання речовини масою  $m$ :

$$Q = cm\Delta T. \quad (4.14)$$

Молярна теплоємність — це кількість теплоти, необхідної для нагрівання одного моля речовини на один Кельвін:

$$C = \frac{\Delta Q}{(m/\mu)\Delta T} = \frac{\Delta Q\mu}{m\Delta T} = c\mu. \quad (4.15)$$

Теплоємність є функцією процесу, тобто залежить від того, яким чином система переходить з одного стану в інший. Таких процесів може бути скільки завгодно, але найчастіше використовується теплоємність при  $p = \text{const}$  ( $C_p$ ) і при  $V = \text{const}$  ( $C_V$ ).

## 4.2. Ізопроеци

**Ізохорний процес** — процес, що проходить за сталого об'єму (наприклад, газ у герметичній посудині). Оскільки при ізохорному

процесі об'єм постійний,

$$\delta A = P\Delta V = 0. \quad (4.16)$$

З урахуванням (4.16) перший початок термодинаміки (4.10) набирає вигляду

$$\delta Q = dU, \quad (4.17)$$

тобто вся підведена до газу теплота витрачається на збільшення внутрішньої енергії системи. Молярна теплоємність визначається як

$$C_V = \frac{\mu}{m} \frac{\delta Q}{\delta T} = \frac{\mu}{m} \frac{dU}{dT}, \quad (4.18)$$

звідси маємо

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT. \quad (4.19)$$

Одержаний вираз для зміни внутрішньої енергії справедливий для будь-якого процесу, оскільки отриманий із визначення теплоємності за постійного об'єму.

**Ізобаричний процес** — процес, що проходить при  $P = \text{const}$ . Якщо нагрівати газ за сталого тиску, він буде розширюватися і здійснювати додатну роботу. Згідно з першим законом термодинаміки

$$\delta Q = dU + PdV. \quad (4.20)$$

Поділивши цей вираз на  $dT$ , одержимо вираз для теплоємності за сталого тиску:

$$\frac{m}{\mu} C_p = \frac{dU}{dT} + P \frac{dV}{dT}, \quad (4.21)$$

або з урахуванням (4.18):

$$\frac{m}{\mu} C_p = \frac{m}{\mu} C_V + P \frac{dV}{dT}. \quad (4.22)$$

Згідно з рівнянням стану (4.2):

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad V = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{P}, \quad \frac{dV}{dT} = \frac{m}{\mu} \frac{R}{P}, \quad (4.23)$$

або після підставлення знайденої похідної до (4.22):

$$\frac{m}{\mu}C_p = \frac{m}{\mu}C_V + P \frac{m}{\mu} \frac{R}{P}, \quad C_p - C_V = R. \quad (4.24)$$

Одержане рівняння має назву рівняння Майєра. З урахуванням (4.19) вираз (4.20) перепишемо у вигляді

$$\delta Q = \frac{m}{\mu}C_V dT + PdV. \quad (4.25)$$

Знайдемо повний диференціал лівої частини рівняння стану ідеального газу:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad d(PV) = \frac{m}{\mu}RdT, \quad PdV + VdP = \frac{m}{\mu}RdT. \quad (4.26)$$

Оскільки тиск незмінний,  $VdP = 0$ , маємо

$$PdV = \frac{m}{\mu}RdT. \quad (4.27)$$

Підставимо цей вираз у (4.25):

$$\delta Q = \frac{m}{\mu}C_V dT + \frac{m}{\mu}RdT, \quad \delta Q = \frac{m}{\mu}(C_V + R)dT, \quad (4.28)$$

або з урахуванням рівняння Майєра (4.24):

$$\delta Q = \frac{m}{\mu}C_p dT. \quad (4.29)$$

Визначимо роботу

$$\delta A = \delta Q - dU = \frac{m}{\mu} C_p dT - \frac{m}{\mu} C_V dT = \frac{m}{\mu} (C_p - C_V) dT = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (4.30)$$

**Ізотермічний процес** — процес, що відбувається за сталої температури ( $T = \text{const}$ ). Зміна внутрішньої енергії

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V dT = 0. \quad (4.31)$$

Отже, з першого закону термодинаміки випливає

$$\delta Q = \delta A. \quad (4.32)$$

Знайдемо роботу

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} P dV = \left\{ PV = \frac{m}{\mu} RT, P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V} \right\} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{\mu} RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{m}{\mu} RT (\ln V_2 - \ln V_1) = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

**Адіабатичний процес** — це така зміна стану газу, за якої він не віддає і не поглинає теплоти. Отже, адіабатичний процес характеризується відсутністю теплообміну газу з оточуючим середовищем. Адіабатичними можна вважати процеси, що швидко проходять. Оскільки передавання теплоти під час адіабатичного процесу не відбувається ( $\delta Q = 0$ ), рівняння першого початку термодинаміки набирає вигляду

$$dU + \delta A = 0, \quad \delta A = -dU, \quad (4.34)$$

де  $dU$  визначається за формулою (4.19). Тобто зовнішня робота газу може здійснюватися лише через зміну його внутрішньої енергії. Адіабатичне розширення газу ( $dV > 0$ ) супроводжується додат-

ною зовнішньою роботою, але при цьому внутрішня енергія зменшується, і газ охолоджується ( $dT < 0$ ). Адіабатичне стиснення газу ( $dV < 0$ ) супроводжується його нагріванням ( $dT > 0$ ). Знайдемо зв'язок між параметрами стану ідеального газу в адіабатичному процесі. Для цього перепишемо (4.34) у формі

$$PdV = -\frac{m}{\mu}C_V dT. \quad (4.35)$$

Використаємо рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad PdV + VdP = \frac{m}{\mu}RdT, \quad \frac{m}{\mu}dT = \frac{PdV + VdP}{R}. \quad (4.36)$$

Підставимо (4.36) в (4.35):

$$\begin{aligned} PdV &= -\frac{C_V}{R}(PdV + VdP), & RPdV &= -C_V(PdV + VdP), \\ PdV(R + C_V) &= -C_VVdP. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Згідно з рівнянням Майєра (4.24):

$$C_p - C_V = R, \quad R + C_V = C_p. \quad (4.38)$$

Після підставлення (4.38) у (4.37) будемо мати

$$C_pPdV = -C_VVdP, \quad C_pPdV + C_VVdP = 0. \quad (4.39)$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на величину  $C_VPV$ :

$$\frac{C_p}{C_V} \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0. \quad (4.40)$$

Уведемо безрозмірну величину  $\gamma = C_p/C_V$  (постійна адіабати).



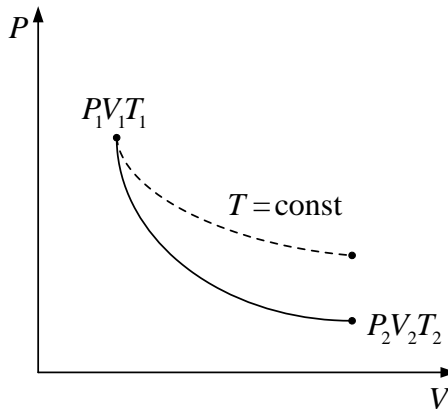
Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\begin{aligned} \gamma \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dP}{P} &= 0, & \gamma \ln V + \ln P &= \text{const}, \\ \ln V^\gamma + \ln P &= \text{const}, & \ln PV^\gamma &= \text{const}, \\ \ln PV^\gamma &= \ln(\text{const}), & PV^\gamma &= \text{const}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Цей вираз називають рівнянням Пуассона. Використовуючи рівняння Менделєєва – Клапейрона, можна легко одержати співвідношення

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}, \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const}. \quad (4.42)$$

Лінію, що зображає адиабатичний процес на діаграмі стану, називають адіабатою (суцільна лінія на рис. 4.4). Для порівняння



**Рисунок 4.4.** Адіабата (суцільна крива) та ізотерма (пунктирна) крива

на рис. 4.4 пунктирною лінією зображено ізотерму, що відповідає температурі газу в початковому стані 1. Оскільки для будь-якого ідеального газу відповідно до (4.24) показник адиабати  $\gamma > 1$ , на діаграмі адіабата завжди проходить крутіше, ніж ізотерма. Пояснюється це тим, що при адиабатичному стисненні збільшення тиску обумовлене не лише зменшенням об'єму газу, як при ізотермічно-

му стисненні, а й збільшенням температури. При адіабатичному розширенні температура газу зменшується, тому тиск знижується швидше, ніж при ізотермічному розширенні.

Розділемо всі члени в рівнянні Майєра (4.24) на  $C_V$  та врахуємо вираз для показника адіабати  $\gamma = C_p/C_V$ :

$$C_p - C_V = R, \quad \frac{C_p}{C_V} - 1 = \frac{R}{C_V}, \quad \gamma - 1 = \frac{R}{C_V}, \quad C_V = \frac{R}{\gamma - 1}. \quad (4.43)$$

Згідно з (4.34) та (4.19) визначимо роботу

$$\begin{aligned} A &= -\Delta U = -\frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = \frac{mR}{\mu(\gamma - 1)} (T_1 - T_2) = \\ &= \frac{mRT_1}{\mu(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \\ &= \left\{ PV = \frac{m}{\mu} RT \right\} = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Використовуючи рівняння адіабати (4.41) та (4.42), останній вираз можна подати в іншому вигляді:

$$A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]. \quad (4.45)$$

### 4.3. Другий початок термодинаміки. Теплова машина

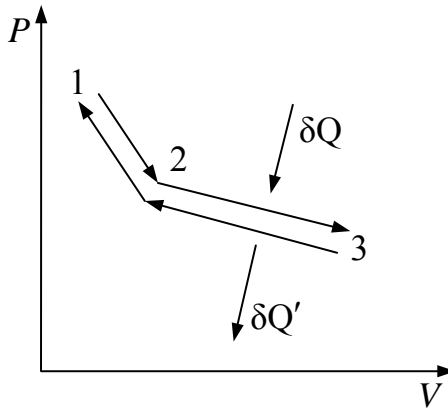
Перший початок термодинаміки (ППТ) не дозволяє визначити напрям проходження процесу. Процес мимовільного передавання енергії у формі теплоти від холодного тіла до гарячого не суперечить ППТ. Однак при опусканні розпеченого шматка заліза в холодну воду ніколи не спостерігається явища подальшого нагрівання заліза за рахунок охолодження води. ППТ не виключає можливості процесу, єдиним результатом якого було б перетворення теплоти, отриманої від нагрівача, на еквівалентну їй роботу. Напри-

клад, ґрунтуючись на ППТ, можна було б спробувати побудувати періодично діючий двигун, що здійснює роботу за рахунок одного джерела тепла (наприклад, за рахунок внутрішньої енергії океану). Такий двигун називається вічним двигуном другого роду. Узагальнення величезного експериментального матеріалу привело до висновку про неможливість побудови вічного двигуна другого роду. Цей висновок називається другим початком термодинаміки (ДПТ).

Існує декілька формулювань другого початку:

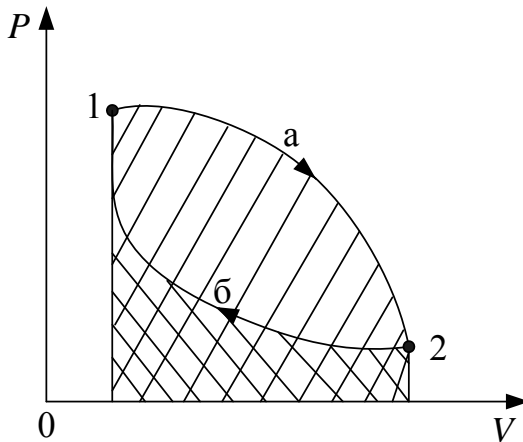
- Неможливий процес, єдиним результатом якого є перетворення всієї теплоти, отриманої від нагрівача, на еквівалентну їй роботу.
- Формулювання Клаузіуса: теплота сама по собі не може переходити від менш нагрітого до більш нагрітого тіла.
- Формулювання Томсона – Планка: вічний двигун другого роду неможливий.

Зворотним процесом називають такий, який може бути проведений у зворотному напрямку таким чином, що система проходитьиме через ті самі стани, що й при прямому процесі, але в зворотній послідовності. Зворотним може бути лише рівноважний процес. Якщо при прямому процесі на певній елементарній ділянці система отримує тепло  $\delta Q$  і здійснює роботу  $\delta A$ , то під час зворотного процесу на тій самій ділянці система віддає тепло  $\delta Q' = \delta Q$ , і над нею здійснюється робота  $\delta A' = \delta A$  (рис. 4.5). Із цієї причини після перебігу зворотного процесу в прямому, а потім у зворотному напрямках і повернення системи до початкового стану в оточуючих тілах не повинно залишатися жодних змін. У разі, якщо після завершення прямого і зворотного процесів система повернулася до первинного стану і в оточуючому середовищі залишилися зміни, процес не є зворотним. Усі процеси в природі незворотні.



**Рисунок 4.5.** Ілюстрація другого закону термодинаміки

Коловим процесом (або циклом) називається такий процес, за якого система після низки змін повертається до початкового стану. На графіку цикл зображується замкненою кривою (рис. 4.6). Робота, виконувана при коловому процесі, чисельно дорівнює пло-



**Рисунок 4.6.** Ілюстрація роботи теплової машини

щі огинальної кривої. Після здійснення циклу система повертається

до попереднього стану. Тому будь-яка функція стану, зокрема внутрішня енергія, має на початку і в кінці циклу однакові значення.

Розглянемо докладніше цикл, зображений на рис. 4.6. "Прямий" цикл 1-а-2-б-1 відповідає тепловій машині, або такому пристрою, який отримує певну кількість теплоти від зовнішнього тіла (нагрівача), виконує роботу і віддає частину теплоти іншому тілу (охолоджувачу). У цьому циклі газ виконує додатну роботу: в процесі 1-а-2 газ розширюється, робота додатна і дорівнює площі під кривою 1-а-2; в процесі 2-б-1 робота від'ємна (газ стискується) і чисельно дорівнює площі під кривою 2-б-1. У цілому робота, виконувана газом за цикл, додатна і дорівнює площі, обмеженій кривою 1-а-2-б-1.

Розглянемо зворотний цикл 1-б-2-а-1. Такий цикл відповідає холодильній машині, або такій системі, яка забирає теплоту від холодильника і передає більшу кількість теплоти нагрівачу. За другим законом термодинаміки цей процес не може відбуватися сам по собі, він проходить за рахунок роботи зовнішніх тіл. При цьому газ здійснює від'ємну роботу (робота стиснення 2-а-1 від'ємна). Робота розширення в процесі 1-б-2 додатна. Отже, сумарна робота буде від'ємною і чисельно дорівнюватиме площі, обмеженій кривою 2-а-1-б-2.

Коефіцієнт корисної дії теплової машини або прямого циклу дорівнює відношенню виконаної роботи до кількості теплоти, отриманої робочою речовиною (газом) від нагрівача:

$$\eta = \frac{A}{Q_1}. \quad (4.46)$$

Внутрішня енергія робочої речовини за цикл не змінюється:  $\Delta U = 0$ . Отже, з першого закону термодинаміки випливає:

$$A = Q_1 + Q_2, \quad (4.47)$$

або після підставлення в останню формулу

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} < 1, \quad (4.48)$$

де  $Q_2 < 0$ , оскільки це втрата теплоти системою.

#### 4.4. Цикл Карно

Аналізуючи роботу теплових двигунів, французький інженер Нікола Леонар Саді Карно у 1824 р. дійшов до висновку, що найвигіднішим коловим процесом є зворотний коловий процес, що складається з двох ізотермічних і двох адіабатичних процесів, тому що характеризується найбільшим коефіцієнтом корисної дії. Такий цикл називається циклом Карно. У прямому циклі Карно робоче тіло ізотермічно, а потім адіабатично розширюється, після цього знову ізотермічно (за більш низької температури), а потім адіабатично стискається. Тобто цикл Карно обмежений двома ізотермами і двома адіабатами. При ізотермічному розширенні від нагрівача заби-

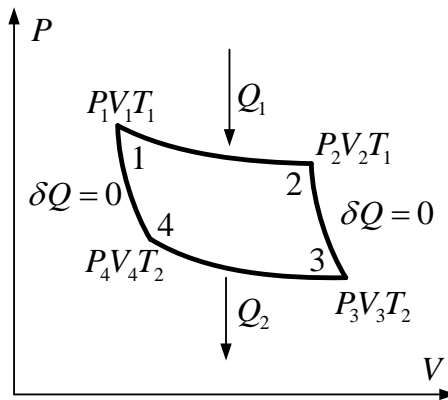


Рисунок 4.7. Цикл Карно

рається тепло (на ділянці 1–2 рис. 4.7). Унаслідок цього температу-

ра газу підтримується незмінною. Відповідно параметри точки 2 будуть дорівнювати  $P_2V_2T_1$ . На ділянці 2–3 відбувається адіабатичне розширення. Внутрішня енергія газу зменшується, і його температура знижується до  $T_2$ . Параметри точки 3 —  $P_3V_3T_2$ . На ділянці 3–4 газ ізотермічно стискується. Параметри точки 4 —  $P_4V_4T_2$ . Тепло  $Q_2$ , що при цьому виділяється, забирається холодильником. Ділянка 4–1 — це адіабатичне стиснення до вихідного стану, що відповідає точці 1. Таким чином, у циклі 1–2–3–4–1 в підсумку нагрівач віддає газу теплоту  $Q_1$ , а холодильник забирає  $Q_2$ . Різниця  $Q_1 - Q_2$  визначає корисну роботу газу за один цикл, тому що відповідно до першого початку термодинаміки  $\delta Q = \delta A + dU$ , а для колового процесу  $dU = 0$ , отже,  $\delta Q = \delta A$ .

Згідно з формулою (4.48) відношення корисної роботи до витраченої енергії нагрівача визначає коефіцієнт корисної дії теплової машини:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (4.49)$$

Визначимо коефіцієнт корисної дії циклу Карно для зворотного процесу. Теплота підводиться на ділянці 1–2 і відводиться на ділянці 3–4. Для ізотермічного процесу внутрішня енергія  $U = \text{const}$  і все тепло, що підводиться до системи, витрачається на роботу:  $Q = A$ .

Тоді матимемо

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_{12} - (-A_{34})}{A_{12}} = 1 - \frac{-A_{34}}{A_{12}}. \quad (4.50)$$

Згідно з формулою щодо визначення роботи для ізотермічного процесу

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (4.51)$$

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -\frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}. \quad (4.52)$$

Підставимо ці вирази у формулу (4.50):

$$\eta = 1 - \frac{\frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (4.53)$$

Оскільки процеси на ділянках 2–3 і 4–1 адіабатичні, для визначення зв'язку між об'ємами використовуємо рівняння Пуассона:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad (4.54)$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (4.55)$$

Поділимо ці рівняння:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (4.56)$$

Тоді вираз для ККД (4.53) набере вигляду

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.57)$$

Ця формула справедлива лише для зворотного циклу Карно.

Теорема Карно:

1. Усі зворотні машини, що працюють за циклом Карно, мають, незалежно від природи робочого тіла, однаковий ККД за умови, якщо в них спільний нагрівач і холодильник.
2. Якщо дві теплові машини мають спільні нагрівач і холодильник і одна з них зворотна, а інша — незворотна, то ККД зворотної завжди більший.



**4.5. Теорема Клаузіуса. Ентропія**

Розглянемо зворотний і незворотний цикли Карно. Для зворотного циклу

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}; \quad (4.58)$$

для незворотного

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (4.59)$$

Для зворотного та незворотного циклів разом будемо мати:

$$1 - \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad -\frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}, \quad \frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}. \quad (4.60)$$

Перенесемо величини в один бік:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (4.61)$$

Оскільки  $Q_2$  — це відведене від системи тепло, можна зазначити, що до системи підводиться тепло  $Q'_2 = -Q_2$ . З урахуванням цього

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q'_2}{T_2} \leq 0. \quad (4.62)$$

Відношення кількості теплоти, підведеної до системи, до температури, за якої це відбувається, називається наведеною теплотою. Таким чином,  $Q/T$  — це наведена теплота, передана системі.  $Q_1/T_1$  — це наведена теплота в першому процесі,  $Q'_2/T_2$  — наведена теплота в другому процесі. На ділянках 2–3 і 4–1 теплота  $Q = 0$ . Таким чином, для циклу Карно матимемо

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (4.63)$$

Оскільки будь-який замкнений цикл можна подати як суму нескінченного числа циклів Карно, для будь-якого замкнутого циклу останній вираз буде справедливий і набере вигляду

$$\oint \frac{dQ}{T} \leq 0. \quad (4.64)$$

Таким чином, сума наведених теплот будь-якого циклу дорівнює нулю для зворотного процесу або менша від нуля — для незворотного.

Із виразу (4.64) випливає, що сума наведених теплот при переході з одного стану в інший не залежить від форми переходу у випадку зворотних процесів. Останнє твердження має назву теореми Клаузіуса. Звідси випливає, що наведена теплота є функцією стану, тобто не залежить від шляху переходу, а залежить лише від стану системи. Інтеграл (4.64) виражає зміну деякої функції стану системи, її називають ентропією  $S$ . Для зміни ентропії системи запишемо

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \quad (4.65)$$

Ми говоримо лише про зміну ентропії, подібно до того, якщо говоримо про зміну потенціальної енергії, для якої не важливо, де брати початок відліку. З рівняння (4.65) випливає основний кількісний вираз для другого початку термодинаміки:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (4.66)$$

Розглянемо зворотний процес:

$$\oint dS = \oint \frac{dQ}{T} = 0. \quad (4.67)$$

Інтеграл по замкнутому контуру — це зміна ентропії в усьому цик-

лі, тобто при зворотних циклах ентропія не змінюється  $\Delta S = 0$ . Для незворотного процесу можна записати

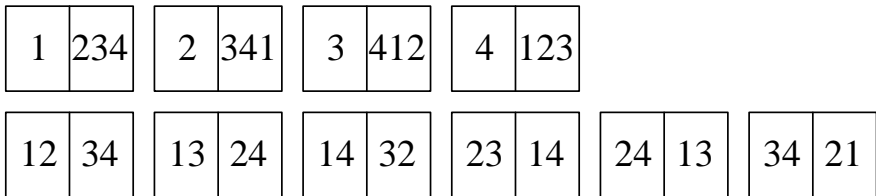
$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = - \left( \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \right) = - \left( \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} \right). \quad (4.68)$$

Із урахуванням виразу (4.62) матимемо  $\Delta S > 0$ , або з урахуванням зворотного процесу

$$\Delta S \geq 0. \quad (4.69)$$

Таким чином, ентропія ізольованої системи може лише зростати.

Ентропія  $S$  характеризує міру неупорядкованості частинок системи. Наприклад, якщо об'єм газу зменшується, його молекули займають більш визначені положення одна відносно іншої, що відповідає більшому порядку у системі — ентропія  $S$  зменшується. Неупорядкованість системи кількісно характеризується статистичною вагою  $W_{therm}$  (термодинамічна ймовірність). Розглянемо систему, що складається із 4 частинок газу (рис. 4.8). Ці частин-



**Рисунок 4.8.** Ілюстрація поняття макро- та мікростану

ки містяться в об'ємі, розділеному на дві рівні частини і можуть вільно в ньому переміщатися. Стан системи, що визначається кількістю частинок у 1-й та 2-й частині, називають макростаном. Стан, що визначається тим, які конкретно частинки містяться у кожній з частин системи, називають мікростаном.

Макростану з однією частинкою ліворуч і трьома праворуч від-

повідують чотири мікростани (верхня частина рис. 4.8), макростану з двома частинками ліворуч і двома праворуч — шість мікростанів (нижня частина рис. 4.8). Статистичною вагою називають число способів розміщення частинок або число мікростанів, що реалізують даний макростан. Больцман установив, що ентропія є пропорційною статистичній вазі:

$$S = k \ln W_{therm}, \quad (4.70)$$

де  $k$  — стала Больцмана (4.4). Дійсно, чим більша статистична вага  $W_{therm}$ , тим більша ймовірність реалізації такого макростану і тим більший безлад у системі (ентропія збільшується).

Використовуючи поняття ентропії, можна сформулювати другий закон термодинаміки: в ізольованих термодинамічних системах ентропія збільшується, або залишається незмінною (молекули повітря не можуть зібратися в одній частині приміщення без зовнішньої дії на систему). Твердження про неможливість цього процесу свідчить про нескінченно малу ймовірність. Таким чином, перший закон термодинаміки зображує енергетичний баланс процесу, а другий закон свідчить про його ймовірний напрямок.

## 4.6. Вимірювання температури

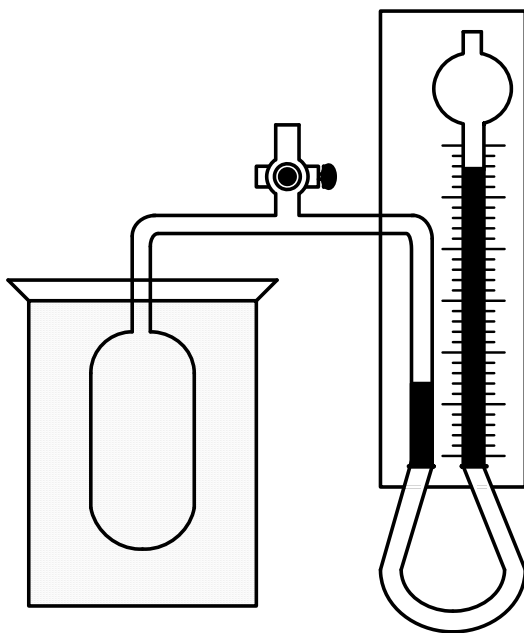
Для вимірювання температури будь-якого органа він повинен бути приведений до теплового контакту з термометром. Термометр — пристрій для вимірювання температури. Основною частиною термометра є термометричне тіло, яке приводиться до теплового контакту з об'єктом, температура якого може бути виміряна. У рідинних термометрах термометричним тілом є або ртуть, або підфарбований спирт, у термометрах опору — металевий дріт (температура визначається за його електричним опором). Термометр не по-

винен бути великої маси: масивний термометр змінить температуру того тіла, з яким він приведений до теплового контакту. Він фіксує свою власну температуру, яка відповідає температурі тіла, з яким він перебуває в термодинамічній рівновазі. Для вимірювання температури можна скористатися залежністю будь-якої макроскопічної величини (об'єму, тиску, електричного опору та ін.) від температури. На практиці найчастіше використовують залежність об'єму рідини (ртуті, спирту) від температури (рідинні термометри). Необхідно передусім створити температурну шкалу, що дозволяє приписувати температурі певні числа. Будова більшості термометрів ґрунтується на припущенні, що покладена в основу вимірювання фізична властивість термометричного тіла лінійно і безперервно залежить від температури. Для побудови шкали вибирають дві так звані реперні точки, яким приписують довільні значення температури, а шкала між ними ділиться на рівні частини. Цим установлюється одиниця вимірювання температури. У метричній системі для практичного застосування прийнята шкала Цельсія. При побудові цієї шкали вважають, що за нормального атмосферного тиску температура плавлення льоду дорівнює  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а температура кипіння води —  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  (реперні точки). Шкалу між точками 0 і 100 ділять на 100 рівних частин, що називають градусами. Переміщення покажчика (у рідинних термометрах — кінця стовпчика рідини) на одну поділку відповідає зміні температури на  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Такі термометри мають істотні недоліки:

1) діапазон температур обмежений: за низьких температур рідини твердіють, за високих — випаровуються;

2) показники різних термометрів, наприклад ртутного і спиртового, збігаючись за  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  і  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ , не збігаються за інших температур внаслідок того, що температурні коефіцієнти об'ємного розширення спирту і ртуті по-різному залежать від температури. На відміну від рідин усі розріджені (ідеальні) гази під час нагрівання однаково

змінюють свій об'єм і тиск, причому тиск газу пропорційний температурі. Отже, тиск газу (при  $V = \text{const}$ ) можна використовувати як кількісну міру температури. З'єднавши посудину, в якій міститься газ (частіше водень або гелій), з манометром і проградувавши прилад, можна вимірювати температуру за показниками манометра. Такий прилад називають газовим термометром (рис. 4.9). Газо-



**Рисунок 4.9.** Газовий термометр

вий термометр непридатний для визначення температури в ділянці високих температур, за яких відбувається термічна дисоціація та іонізація, і дуже низьких температур, за яких усі реальні гази конденсуються.

**Питання для самоконтролю**

1. Термодинаміка. Термодинамічні величини. Рівняння Менделєєва – Клапейрона. Стаціонарні і рівноважні стани.
2. Узагальнене рівняння Менделєєва – Клапейрона для реального газу.
3. Теплоємність і її фізичний зміст.
4. Перший початок термодинаміки, внутрішня енергія.
5. Ізопроееси. Перший початок термодинаміки для ізопроеесів.
6. Другий початок термодинаміки.
7. Теплова машина. Цикл. Принципи прямого та зворотного циклів. Коефіцієнт корисної дії.
8. Ентропія та невпорядкованість. Динаміка ентропії в живому організмі. Способи зменшення ентропії в організмі.
9. Термометрія. Термодинамічна шкала температур.
10. Пристрої для вимірювання температури, їх різновиди і принципи роботи.

## РОЗДІЛ 5

## ЕЛЕКТРОСТАТИКА

## 5.1. Точковий заряд. Закон Кулона. Електричне поле

Незважаючи на різноманітність речей, у природі існує лише два види електричних зарядів (величина заряду вимірюється у кулонах, Кл): додатний та від'ємний. Найменшу частинку, яка має від'ємний елементарний заряд, називають **електроном** (заряд  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, маса  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг). Для зручності в електростатиці використовують поняття **точкового заряду** — це заряд, сконцентрований у точці. За **точковий заряд** беруть заряджене тіло, розміри якого можна не враховувати щодо відстані від нього до інших тіл.

Французький фізик Кулон встановив **закон взаємодії електричних зарядів**: два точкових заряди  $q_1$  та  $q_2$ , що перебувають у деякому середовищі на відстані  $r$  один від одного, взаємодіють із силою  $F$ , прямо пропорційною добутку цих зарядів та обернено пропорційною квадрату відстані між ними:

$$F = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} = \frac{k|q_1||q_2|}{\epsilon r^2}, \quad (5.1)$$

де  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$  — коефіцієнт пропорційності;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — електрична стала;  $\epsilon$  — **діелектрична проникність середовища**, яка показує, у скільки разів сила взаємодії зарядів у деякому середовищі менша, ніж у вакуумі.

Поле, що створюється навколо зарядженого нерухомого тіла, називають **електричним полем**. Заряд, який створює електричне поле, називають **джерелом поля**.



## 5.2. Силова характеристика електричного поля

Силову характеристикою електричного поля є **напруженість**, яка дорівнює відношенню сили, що діє у даній точці поля на точковий заряд, до величини цього заряду (одиниця вимірювання — вольт/метр, В/м):

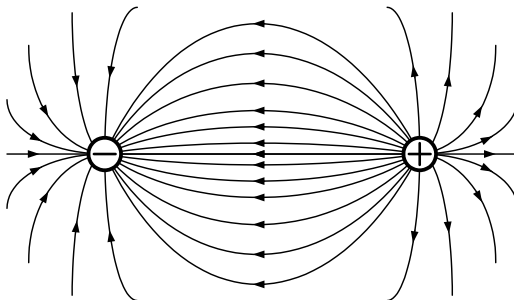
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (5.2)$$

**Напруженість** — це вектор, напрямок якого збігається з напрямком сили, що діє в даній точці поля на додатний заряд.

Якщо електричне поле створюється не лише одним зарядом, а декількома, то його напруженість визначається як геометрична сума напруженостей полів, що створюються цими зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \quad (5.3)$$

Електричне поле графічно подається у вигляді **силових ліній**, дотичні до яких збігаються з напрямком вектора напруженості у відповідних точках поля. Силкові лінії мають початок і кінець (звичайно, умовно). Вони починаються на додатних та закінчуються на від'ємних зарядах (рис. 5.1). **Напруженість** електричного поля чи-



**Рисунок 5.1.** Силкові лінії електричного поля

сельно дорівнює числу силових ліній, що проходять через одиницю поверхні, розміщеній у цій точці перпендикулярно до силових ліній. Число силових ліній називають **густиною силових ліній**.

### 5.3. Енергетична характеристика електричного поля

*Енергетичною характеристикою* електричного поля є **потенціал** — величина, що чисельно дорівнює енергії, яку має одиничний точковий заряд, внесений у будь-яку точку поля.

**Потенціал** вимірюється роботою зовнішніх сил при переміщенні одиничного додатного заряду з нескінченності у дану точку поля (одиниця вимірювання — вольт, В).

$$\varphi = \frac{A}{q}. \quad (5.4)$$

Сили поля при цьому виконують роботу

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} q d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (5.5)$$

Визначимо роботу сил електростатичного поля за переміщенням заряду замкненим контуром:

$$A = \oint \vec{E} q d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} q d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E} q d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} q d\vec{l} - \int_1^2 \vec{E} q d\vec{l} = 0. \quad (5.6)$$

Таким чином, робота сил електростатичного поля не залежить від траєкторії, а залежить від заряду, початкової та кінцевої точок переміщення та величини напруженості поля.

**Різницею потенціалів** (напругою) між точками поля називають відношення роботи, яка виконується силами поля при переміщенні точкового додатного заряду від однієї точки до іншої, до величини

цього заряду:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A}{q} = \frac{q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}}{q} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (5.7)$$

**Потенціал точкового заряду**, що міститься в однорідному ізотропному середовищі з відносною діелектричною проникністю  $\varepsilon$ , можна визначити за формулою

$$\varphi = \frac{kq}{\varepsilon r}, \quad (5.8)$$

де  $r$  — відстань до точкового заряду. Потенціал у різних точках простору графічно подається у вигляді поверхонь однакового потенціалу (**еквіпотенціальні поверхні**). Еквіпотенціальні поверхні проводять таким чином, щоб вони відрізнялися на одне й те саме значення потенціалу. На рисунку 5.2 показано перерізи еквіпотенціальних сферичних поверхонь для додатного точкового заряду. Одержимо диференціальний зв'язок між напруженістю та потенціалом. Із виразу (5.7) впливає таке:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad d\varphi = -\vec{E} d\vec{l}, \quad \vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{l}}. \quad (5.9)$$

Останній вираз у загальному вигляді запишемо як

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi, \quad (5.10)$$

де  $\overrightarrow{\text{grad}}$  — оператор векторної похідної, який у декартовій прямокутній системі координат записується як

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (5.11)$$

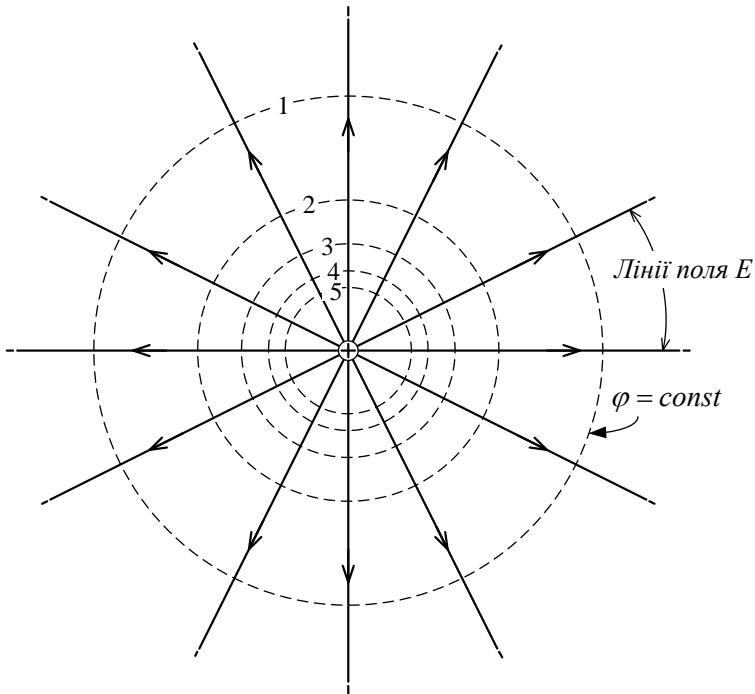


Рисунок 5.2. Еквіпотенціальні поверхні

де  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  — одиничні орт-вектори.

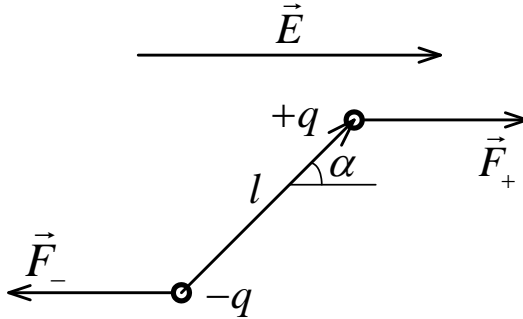
#### 5.4. Електричний диполь. Мультиполь

**Електричним диполем** називають систему, що складається з двох рівних за модулем та протилежних за знаком точкових електричних зарядів, розміщених на деякій відстані один від одного.

Основною характеристикою диполя є **електричний (дипольний) момент** — вектор, який дорівнює добутку заряду на плече диполя, спрямований від від'ємного до додатного заряду (одиниця вимірювання — Кл · м):

$$\vec{p} = q\vec{l}. \quad (5.12)$$

Нехай диполь розміщений в однорідному електричному полі (рис. 5.3). На заряди діють сили



**Рисунок 5.3.** Диполь в однорідному електричному полі

$$F_+ = qE, \quad F_- = -qE, \quad (5.13)$$

які утворюють обертальний момент:

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}], \quad (5.14)$$

$$M = pE \sin \alpha = qlE \sin \alpha. \quad (5.15)$$

На диполь в однорідному електричному полі діє обертальний момент, який залежить від електричного моменту, орієнтації диполя у полі та напруженості поля  $E$ . Розглянемо сили, що діють на диполь, розміщений у неоднорідному електричному полі:

$$F_+ = qE_+, \quad F_- = -qE_-, \quad (E_- > E_+), \quad (5.16)$$

де  $E_-$ ,  $E_+$  — напруженості поля у точках, в яких містяться заряди, що створюють диполь. Тоді виникає некомпенсована сила:

$$F = F_- - F_+ = qE_- - qE_+ = q(E_- - E_+). \quad (5.17)$$

Величина  $(E_- - E_+)/l$  характеризує середню зміну напруженості, яка припадає на одиницю довжини диполя. Оскільки плече невелике, можна вважати, що

$$\frac{(E_- - E_+)}{l} = \frac{dE}{dx}, \quad (5.18)$$

де  $dE/dx$  — це похідна від напруженості електричного поля в напрямку осі  $OX$ , яка є мірою неоднорідності електричного поля уздовж відповідного напрямку. Одержимо

$$(E_- - E_+) = l \frac{dE}{dx}. \quad (5.19)$$

Підставимо останній вираз у формулу (5.17):

$$F = q(E_- - E_+) = ql \frac{dE}{dx} = p \frac{dE}{dx}. \quad (5.20)$$

Таким чином, на диполь діє сила, що залежить від його електричного моменту та ступеня неоднорідності поля  $dE/dx$ .

Якщо диполь орієнтований у неоднорідному електричному полі не вздовж силових ліній, тоді на нього додатково діє ще й обертовий момент.

Крім диполя, існують системи зарядів більш високих порядків ( $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ), які мають симетрію, — **мультиполі**. Число зарядів мультиполю визначається як  $2^l$ :

$2^0 = 1$  — точковий заряд;

$2^1 = 2$  — диполь;

$2^2 = 4$  — квадруполь;

$2^3 = 8$  — октуполь.

Якщо помістити діелектрик у зовнішнє електричне поле, то він поляризується, тобто одержить дипольний момент, який не дорів-

нює нулю:

$$\vec{p}_v = \sum \vec{p}_i, \quad (5.21)$$

де  $\vec{p}_i$  — дипольний момент однієї молекули. Для кількісного опису поляризації діелектрика вводять векторну величину, що має назву **поляризованість** та визначається як дипольний момент одиниці об'єму діелектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}. \quad (5.22)$$

Із досвіду відомо, що для великого класу діелектриків поляризованість залежить від напруженості поля лінійно. Якщо діелектрик ізотропний і напруженість чисельно не дуже велика, то справедливим є співвідношення

$$P = \theta \varepsilon_0 E, \quad (5.23)$$

де  $\theta$  — діелектрична сприйнятливості речовини, що характеризує властивості діелектрика. Це безрозмірна величина, яка завжди більша від нуля і для більшості діелектриків становить величину кілька одиниць (наприклад, для спирту  $\theta \approx 25$ , для води  $\theta \approx 80$ ). Діелектрична сприйнятливості пов'язана з діелектричною проникністю середовища таким чином:

$$\varepsilon = 1 + \theta. \quad (5.24)$$

**П'єзоефект** — це виникнення поляризації в кристалів унаслідок деформації за відсутності електричного поля за рахунок того, що додатні та від'ємні підгратки зсуваються одна відносно іншої.

### 5.5. Електроємність. Конденсатори. Енергія електричного поля

Заряд та потенціал пов'язані між собою. Чим більший заряд ми передаємо тілу, тим більшим стає його потенціал. Цей взаємозв'язок можна виразити співвідношенням

$$q = C\varphi, \quad (5.25)$$

де  $C$  — електроємність. **Електроємністю** називають величину, що визначається зарядом, який необхідно передати провіднику, щоб змінити його потенціал (вимірюється у фарадах,  $\Phi$ ):

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (5.26)$$

Ємність визначається геометричними розмірами і формою провідника, а також електричними властивостями оточуючого середовища (його діелектричною проникністю) і не залежить від матеріалу провідника. Наприклад, ємність кулі з провідника радіусом  $R$  дорівнює

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (5.27)$$

Для накопичення заряду використовують спеціальні пристрої — **конденсатори**, які розрізняються геометрією — плоскі, сферичні, циліндричні. Ємністю конденсатора називають величину, яка визначається співвідношенням

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (5.28)$$

де  $Q$  — заряд, який міститься на кожній із пластин конденсатора;  $\varphi_1 - \varphi_2$  — різниця потенціалів між пластинами.



## 5.5. Електроємність. Конденсатори. Енергія електричного поля 121

Для плоского конденсатора остання формула набирає вигляду

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}, \quad (5.29)$$

де  $S$  — площа пластин конденсатора;  $d$  — відстань між ними;  $\varepsilon$  — відносна діелектрична проникність речовини, що міститься між обкладками.

Щоб зарядити конденсатор, потрібна робота  $A$ , яку необхідно виконати проти сил електричного поля:  $W = A$ , де  $W$  — енергія електричного поля.

Елементарна робота з переміщення заряду проти сил поля дорівнює

$$dA = Udq. \quad (5.30)$$

Перенесення заряду  $dq$  з однієї обкладки конденсатора на іншу змінить його напругу на  $dU$ . Унаслідок цього

$$dq = CdU, \quad (5.31)$$

або після підставлення у (5.30):

$$dA = CUdU. \quad (5.32)$$

Проінтегруємо останній вираз від  $U = 0$  до  $U = U$ :

$$A = \int_0^U CU' dU' = C \int_0^U U' dU' = \frac{CU^2}{2}. \quad (5.33)$$

Можна виразити роботу й через інші величини:

$$C = \frac{q}{U} \Rightarrow W = A = \frac{CU^2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (5.34)$$

## 5.6. Фізичні основи електрографії

Живі тканини є джерелом електричних потенціалів. Реєстрацію біопотенціалів тканин та органів називають електрографією.

Існують такі діагностичні методи:

ЕКГ — електрокардіографія — реєстрація біопотенціалів, що виникають у серцевому м'язі при його збудженні.

ЕРГ — електроретинографія — реєстрація біопотенціалів сітківки ока, що виникають унаслідок впливу на око.

ЕЕГ — електроенцефалографія — реєстрація біоелектричної активності головного мозку.

Під час вивчення електрограм розв'язують 2 задачі:

а) пряму — з'ясування механізму виникнення електрограми або розрахування потенціалу в області вимірювання за заданими характеристиками електричної моделі органа;

б) зворотну (діагностичну) — виявлення стану органа за характером його електрограм.

Майже в усіх існуючих моделях електричну активність органів і тканин зводять до дії певної сукупності струмових електричних генераторів, що перебувають в об'ємному електропровідному середовищі. Для  $n$  струмових генераторів виконується правило суперпозиції електричних полів:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n. \quad (5.35)$$

Потенціал поля генераторів дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів полів, створюваних генераторами. Подальші конкретні розгляди фізичних питань електрографії показані на прикладі електрокардіографії.

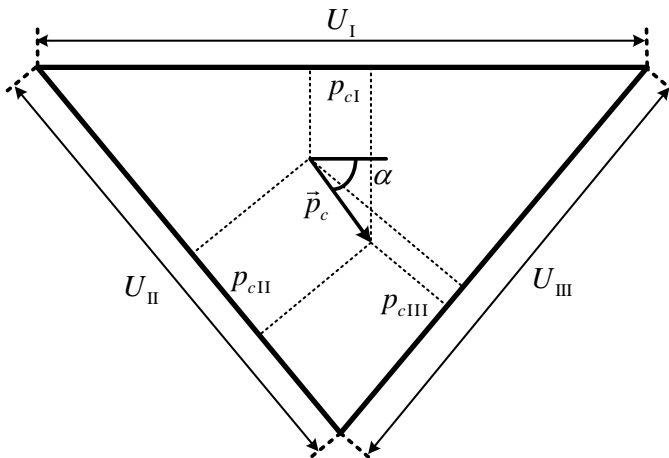
Серце людини — потужний м'яз. При синхронному русі безлічі волокон серцевого м'яза у середовищі, що оточує серце, проходить

струм, який на поверхні тіла створює різниці потенціалів порядку декількох мВ. Ця різниця потенціалів реєструється при записі електрокардіограми.

Моделювати електричну активність серця можна з використанням дипольного еквівалентного електричного генератора. Дипольне подання про серце є основою теорії відведень Ейнтховена, відповідно до якої серце є струмовий диполь із дипольним моментом  $p_c$ , що повертається та змінює своє положення під час серцевого циклу.

Згідно Ейнтховену, серце розташовується в центрі рівнобічного трикутника, вершинами якого є: права рука — ліва рука — ліва нога. Вершини трикутника рівновіддалені як одна від одної, так і від центра трикутника. Тому різниці потенціалів, зняті між цими точками, є проєкціями дипольного моменту серця на сторони цього трикутника. Ці різниці потенціалів у фізіології називають "відведеннями". Таким чином, теорія Ейнтховена встановлює зв'язок між різницею біопотенціалів серця та різницею потенціалів, які реєструються у відповідних відведеннях.

На рисунку 5.4 подані три стандартні відведення.



**Рисунок 5.4.** Відведення Ейнтховена

Відведення I (права рука — ліва рука), відведення II (права рука — ліва нога), відведення III (ліва рука — ліва нога). Їм відповідають різниці потенціалів  $U_I$ ,  $U_{II}$ ,  $U_{III}$ . Напрямок вектора  $p_c$  визначає електричну вісь серця. Лінія електричної осі серця при перетині з напрямком 1-го відведення утворює кут  $\alpha$ , що визначає напрямок електричної осі серця. Співвідношення між різницею потенціалів на сторонах трикутника (відведеннях) можна одержати як співвідношення проєкцій вектора  $p_c$  на сторони трикутника:

$$U_I : U_{II} : U_{III} = p_{cI} : p_{cII} : p_{cIII}. \quad (5.36)$$

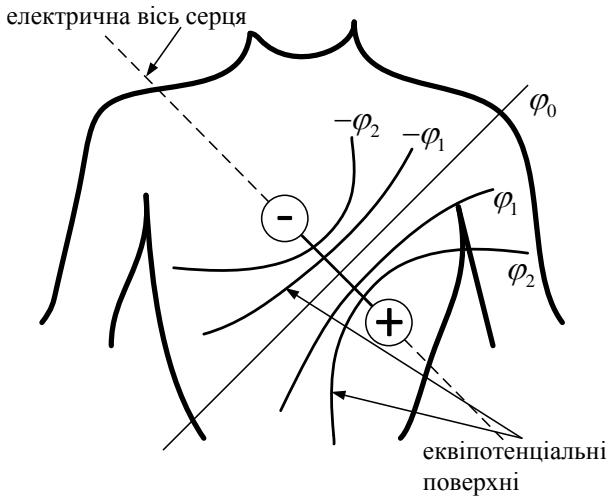
Оскільки електричний момент диполя-серця змінюється з часом, то у відведеннях будуть одержані часові залежності напруги, які називають електрокардіограмами.

У кожний момент діяльності серця його дипольний електричний генератор створює навколо електричне поле, що поширюється провідними тканинами тіла та створює потенціали в його різних точках. Якщо уявити, що підстава серця заряджена додатньо (має додатний потенціал), а верхівка — від'ємно, то розподіл еквіпотенціальних ліній навколо серця буде таким, як на рисунку 5.5.

Потенціали зазначені в деяких відносних одиницях. Унаслідок асиметричного положення серця в грудній клітці його електричне поле поширюється переважно у бік правої руки та лівої ноги і найбільш висока різниця потенціалів може бути зафіксована в тому випадку, якщо електроди розмістити на правій руці і лівій нозі. У таблиці 5.1 наведені значення максимального дипольного моменту серця в зіставленні з масою серця та тіла.

На рисунку 5.6 подана нормальна електрокардіограма людини (позначення зубців були подані Ейнтховеном і являють собою узяті підряд літери латинського алфавіту).

Таким чином, ЕКГ являє собою залежність від часу різниці по-

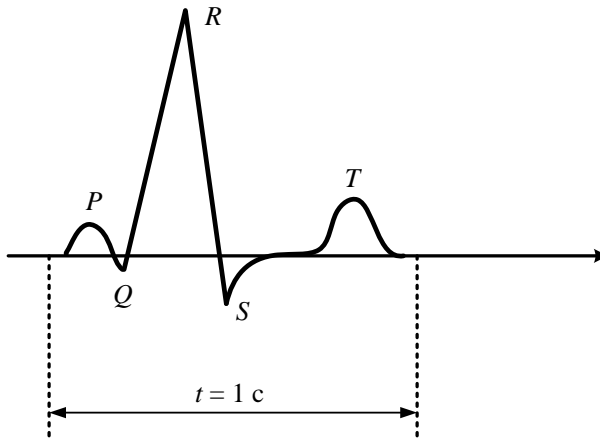


**Рисунок 5.5.** Розподіл еквіпотенціальних ліній на поверхні тіла

**Таблиця 5.1.** Значення максимального дипольного моменту серця порівняно з масою серця та тіла

Об'єкт	Маса серця, г	Маса тіла, кг	$p_c$ , мА · см
Жаба	0,16	0,036	0,005
Собака	108	14,2	1,63
Людина	300	71,5	2,32
Кінь	3060	419	13,0

тенціалів, що знімається двома електродами відповідного відведення за цикл роботи серця. Горизонтальна вісь є не лише віссю часу, а й віссю нульового потенціалу. ЕКГ є кривою, що складається з трьох характерних зубців із позначеннями P, QSR, T, розділених інтервалом нульового потенціалу. Висоти зубців у різних відведеннях обумовлені напрямком електричної осі серця, тобто кутом  $\alpha$  (рис. 5.4). Електрокардіограма, записана в стандартних відведеннях (у нормі), характеризується тим, що її зубці в різних відведеннях



**Рисунок 5.6.** Нормальна електрокардіограма людини

будуть неоднакові за амплітудою. Зубці ЕКГ будуть найбільш високими у II відведенні і найбільш низькими у III відведенні (за нормального положення електричної осі). Зіставляючи криві, зареєстровані в трьох відведеннях, можна говорити про характер зміни  $p_c$  за цикл роботи серця, на підставі чого і складається уявлення про стан нервово-м'язового апарату серця.

### Питання для самоконтролю

1. Точковий заряд. Закон Кулона. Електричне поле.
2. Силова характеристика електричного поля.
3. Енергетична характеристика електричного поля.
4. Електричний диполь. Мультиполь.
5. Провідники. Діелектрики. Напівпровідники.
6. Діелектрики в електричному полі. Поляризація. П'єзо ефект.

7. Електроємність. Конденсатори. Енергія електричного поля.
8. Використання п'єзоефекту в медицині.
9. Діелектрична проникність.
10. Фізичні основи електрокардіографії.

## РОЗДІЛ 6

### ЕЛЕКТРИЧНИЙ СТРУМ

#### 6.1. Сила та густина струму

Під електричним струмом розуміють упорядкований рух заряджених частинок. За напрям струму беруть напрям руху додатних зарядів. Електричний струм існує за наявності вільних зарядів та електричного поля. Такі умови можна створити у вакуумі і в різних середовищах, таких як тверді тіла (метали, напівпровідники), рідини (рідкі метали, електроліти) і в газах. Зазвичай розглядають проходження струму в металевих провідниках, де вільними носіями заряду є електрони.

Проходження струму провідником характеризується силою струму  $I$  (вимірюється в амперах, А):

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (6.1)$$

де  $dq$  — заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за час  $dt$ .

Сила струму може бути як більшою, так і меншою від нуля. Це, наприклад, виявляється при розрахунках складних електричних ланцюгів, де важко зазначити правильний напрям струму в кожній частині ланцюга.

Для постійного струму величина  $I$  залишається однаковою за модулем і напрямом, що дозволяє у формулі (6.1) вибирати кінцеві значення заряду і часу:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (6.2)$$

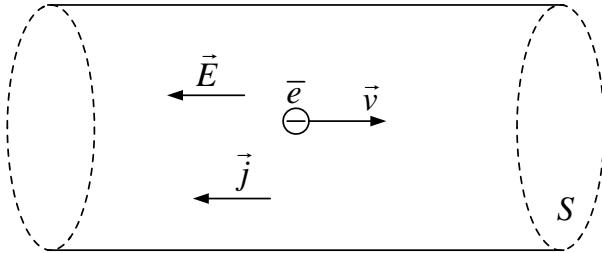
Розподіл струму по перерізу провідника характеризує густина стру-



му  $\vec{j}$ :

$$j = \frac{dI}{dS}, \quad (6.3)$$

де  $dI$  — сила струму, що проходить в даній точці усередині провідника через елементарну площу  $dS$ , розміщену перпендикулярно до напрямку струму (рис. 6.1). Виразимо вектор густини струму  $\vec{j}$



**Рисунок 6.1.** Визначення напрямку струму

через характеристики, що описують рух вільних зарядів у провіднику. Як приклад, розглянемо електричний струм у металі, де валентні електрони утворюють газ вільних частинок, що заповнюють кристалічну ґратку додатно заряджених іонів.

За відсутності електричного поля електрони беруть участь у тепловому русі із середньою арифметичною швидкістю  $\langle u \rangle$ , яка за кімнатної температури має величину близько  $10^5$  м/с:

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}}. \quad (6.4)$$

Завдяки хаотичності теплового руху електронів електричний струм не виникає ( $j = 0$ ), оскільки через поперечний переріз провідника в обидва боки проходить однакове число електронів, і тому сумарне перенесення заряду дорівнює нулю.

При ввімкненні електричного поля в електронів з'являється додаткова швидкість  $\langle v \rangle$  — швидкість спрямованого руху під дією сил

електричного поля; вона за модулем приблизно дорівнює  $\sim 1$  мм/с, що істотно менша за модуль швидкості  $\langle u \rangle$ . Але саме швидкість  $\langle v \rangle$  забезпечує наявність струму в провіднику.

Через поперечний переріз провідника площею  $S$  за час  $t$  пройдуть усі електрони, що містяться в циліндрі заввишки  $\langle \vec{v} \rangle t$  (див. рис. 6.1). Якщо ввести додаткову характеристику металу — концентрацію  $n$  вільних електронів, тоді можна одержати

$$\begin{aligned} j &= \frac{I}{S} = \frac{q}{St} = \frac{eN}{St} = \frac{enS\langle v \rangle t}{St} = en\langle v \rangle, \\ \vec{j} &= en\langle \vec{v} \rangle. \end{aligned} \quad (6.5)$$

де  $e$  — заряд електрона або в загальному випадку вільно зарядженої частинки, що бере участь у створенні електричного струму;  $\langle \vec{v} \rangle$  — середня швидкість спрямованого руху зарядженої частинки.

## 6.2. Закон Ома для однорідної ділянки. Закон Джоуля – Ленца

Однорідною ділянкою електричного ланцюга називають таку ділянку, на якій спрямований рух зарядів відбувається під дією лише кулонівських сил. Для неї Георг Ом у 1826 році експериментально встановив такий закон (закон Ома): сила струму  $I$ , що проходить однорідною ділянкою ланцюга, прямо пропорційна напрузі  $U$ , прикладеній до нього, й обернено пропорційна опору  $R$  цієї ділянки

$$I = \frac{U}{R}. \quad (6.6)$$

Зазначимо, що у цьому разі напруга  $U$  збігається з різницею потенціалів  $\varphi_1 - \varphi_2$  між початковою та кінцевою точками ділянки.

На підставі формули (6.6) вводиться поняття опору  $R$  однорідної ділянки ланцюга: опір  $R$  (вимірюється в омах, Ом) характеризує

## 6.2. Закон Ома для однорідної ділянки. Закон Джоуля – Ленца 131

властивість провідника перешкоджати проходженню ним електричного струму і дорівнює

$$R = \frac{U}{I}. \quad (6.7)$$

На практиці використовують провідники циліндричної форми довжиною  $l$  і площею поперечного перерізу  $S$ . Це дозволяє ввести нову характеристику — питомий опір  $\rho$  провідника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad \rho = \frac{RS}{l}. \quad (6.8)$$

Питомий опір провідника  $\rho$  залежить лише від його матеріалу і температури. Він чисельно дорівнює опору  $R$  провідника при  $l = 1$  м і  $S = 1$  м<sup>2</sup>.

Для чистих металевих провідників в області кімнатних температур питомий опір лінійно зростає з підвищенням температури:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t). \quad (6.9)$$

де  $\rho_0$  — питомий опір провідника за температури  $t = 0^\circ\text{C}$ ;  $t$  — температура провідника за шкалою Цельсія. Параметр  $\alpha$  називають температурним коефіцієнтом опору.

Залежність опору  $R$  металевого провідника також відповідає формулі (6.9), оскільки розміри провідника змінюються з температурою значно слабше, ніж питомий опір:

$$R = R_0(1 + \alpha t). \quad (6.10)$$

Опір може і зменшуватися з підвищенням температури ( $\alpha < 0$ ). Це спостерігається для розчинів електролітів і для напівпровідників, що пов'язане зі збільшенням у них концентрації вільних носіїв заряду за підвищення температури.

Знайдемо кількість теплоти  $Q$ , що виділяється в провіднику під

час проходження по ньому електричного струму. Припустимо, що робота сил електричного поля з переміщення заряду в провіднику цілком витрачається на виділення теплоти. У цьому разі кількість теплоти  $dQ$ , що виділяється за малий проміжок часу  $dt$ , можна розрахувати таким чином:

$$dQ = dA = Udq = IUdt = \frac{U^2}{R}dt = I^2Rdt. \quad (6.11)$$

Для кінцевого проміжку часу у разі змінного струму одержимо

$$Q = \int_0^t dQ = \int_0^t I^2Rdt', \quad (6.12)$$

а для постійного струму ( $I = \text{const}$ )

$$Q = I^2Rt. \quad (6.13)$$

Співвідношення (6.11) є формульним виразом закону Джоуля – Ленца.

### 6.3. Електрорушійна сила джерела струму

Нехай існує замкнений електричний контур, що містить джерело струму. У зовнішній частині ланцюга з опором  $R$  під дією кулонівських сил додатний заряд переміщається від точок із великим потенціалом до точок із меншим потенціалом. Для подальшого руху заряду (шляхом — внутрішня частина ланцюга, джерело струму) необхідно перемістити заряд до точок із великим потенціалом (підняти заряд на потенціальну гору). Кулонівські сили зробити це не можуть, оскільки вони лише з'єднують різнойменні заряди.

Тому в джерелі струму на заряди, крім кулонівських сил, повинні діяти так само і сторонні сили — це сили некулонівського походження, що здійснюють роботу з розділення різнойменних зарядів і

переводять заряд  $+q$  від від'ємного полюса джерела струму до його додатного полюса. Таким чином, завершується повний цикл руху заряду замкненим ланцюгом; у ньому за рахунок роботи сторонніх сил спостерігається постійний рух заряду — проходить постійний струм.

Джерело струму можна охарактеризувати опором  $r$  (опір внутрішньої частини ланцюга) та електрорушійною силою (ЕРС)  $\varepsilon$ , яка визначає роботу сторонніх сил з переміщення точкового додатного заряду в один кулон від від'ємного до додатного полюса:

$$\varepsilon = \frac{A_{ext}}{q_+}. \quad (6.14)$$

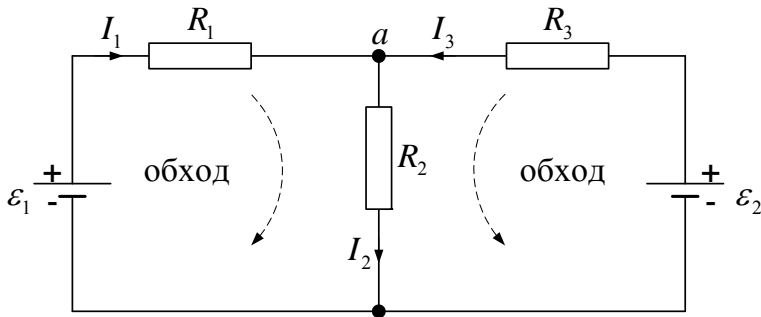
Закон Ома для повного ланцюга постійного струму, що складається з джерела з електрорушійною силою  $\varepsilon$  і внутрішнім опором  $r$  та зовнішньої однорідної ділянки з опором  $R$ , набирає вигляду

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (6.15)$$

## 6.4. Правила Кірхгофа

Ці правила були сформульовані німецьким фізиком Густавом Кірхгофом у 1847 році для розрахунку розгалужених ланцюгів, що містять декілька замкнених контурів.

Друге правило Кірхгофа: алгебраїчна сума знижень напруги на різних ділянках замкненого ланцюга дорівнює сумі ЕРС, що діють у цьому ланцюзі. Кількість незалежних рівнянь, які можна записати за другим правилом, дорівнює числу замкнених контурів, які не можна одержати накладенням одного на інший. Так, для схеми, наведеної на рис. 6.2, число незалежних рівнянь дорівнює двом (один із трьох контурів одержуємо накладенням двох інших).



**Рисунок 6.2.** Ілюстрація правил Кірхгофа

Математично друге правило записуємо як

$$\pm \sum_{i=1}^N I_i R_i = \pm \sum_{i=1}^M \varepsilon_i. \quad (6.16)$$

Розглянемо вибір знаків у формулі (6.16). Для цього спочатку довільно обирають напрями струмів на різних ділянках розгалуженого ланцюга і напрями обходу замкнених контурів. Якщо напрям струму збігається з напрямом обходу контуру, тоді для сили струму вибирається знак плюс, якщо ні — знак “-”. Якщо ЕРС у напрямі обходу підвищує свій потенціал (відбувається перехід від від’ємного полюса до додатного), для неї в рівняннях (6.16) вибирається знак плюс, якщо навпаки — знак мінус. Для наведеної на рис. 6.2 схеми за другим правилом Кірхгофа можна записати два незалежних рівняння:

$$\begin{cases} I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_1, \\ I_2 R_2 + I_3 R_3 = \varepsilon_2. \end{cases} \quad (6.17)$$

Для формулювання першого правила Кірхгофа введемо поняття вузла електричного ланцюга. Вузол електричного ланцюга — це точка ланцюга, в якій сходяться три або більше провідників. Тоді із зако-

6.5. Фізичні процеси в тканинах організму під впливом струму 135

ну збереження електричного заряду (він не може накопичуватися в якій-небудь точці ланцюга) впливає перше правило Кірхгофа

$$\pm \sum_{i=1}^k I_i = 0, \quad (6.18)$$

згідно з яким алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю. Прийнято брати силу струму  $I$  із знаком "+", якщо струм входить у вузол, або із знаком мінус "-", якщо струм виходить із вузла. Число незалежних рівнянь, які можна записати за цим правилом, дорівнює числу вузлів розгалуженого ланцюга мінус один. Для ланцюга, наведеного на рис. 6.2, можна записати лише одне рівняння:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0. \quad (6.19)$$

Система рівнянь (6.16) і (6.18) дозволяє провести розрахунок електричних ланцюгів за різних початкових даних. Для розгалуженого ланцюга, що містить велике число контурів, для розв'язування системи рівнянь необхідно використовувати відомі в алгебрі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

## **6.5. Фізичні процеси в тканинах організму під впливом струму**

### **6.5.1. Вплив струму на організм людини**

Біологічні тканини та органи мають різні електричні властивості. Наприклад, одні з них є діелектриками, а інші — провідниками. Значну частину організму становлять біологічні рідини (електроліти), що містять велику кількість іонів, які беруть участь у різних обмінних процесах. Властивості біологічних тканин істотно залежать від дії на них струмів та електромагнітних полів.

Опір тіла людини між двома електродами складається з опору внутрішніх тканин і органів та опору шкіри. Електроопір можна змодельювати електричним ланцюгом, що складається з резисторів і конденсаторів, які відображають омичні та ємнісні властивості біологічних тканин. Опір внутрішніх частин організму  $R_{int}$  слабо залежить від загального стану людини; у розрахунках беруть  $R_{int} = 1$  кОм (для шляху "долоня – ступня"). Опір шкіри  $R_s$  під час проходження струму від її поверхні до внутрішніх тканин у десятки разів більший ніж  $R_{int}$ . Тому для постійного та низько-частотного струму (50 – 60 Гц) опір шкіри за точкового контакту є визначальним чинником (за високих частот більш істотним чинником є внутрішній опір тіла). Електропровідність шкіри залежить від її товщини, стану її шарів і вмісту води. Суха шкіра має високий опір, а волога — буде мати низький опір, тому що іони, що перебувають у волозі, забезпечать проходження струму в тіло. При сухій шкірі опір між крайніми точками тіла (долоня – ступня) може дорівнювати  $10^5$  Ом, а при вологій — може становити лише 1 % від цього значення. Повний опір тіла між вологими руками вважають таким, що дорівнює 1500 Ом. Максимальні струми, які виникнуть під час контакту з побутовою електромережею з напругою 220 В, будуть такими:  $I = 220 \text{ В} / 10^5 \text{ Ом} = 2,2 \text{ мА}$  (суха шкіра),  $I = 220 \text{ В} / 1500 \text{ Ом} = 146 \text{ мА}$  (волога шкіра). Струм 1 мА під час проходження через тіло буде ледь помітний, але струм 146 мА буде смертельним навіть за короткочасного впливу.

При дії електричного струму на людину може мати місце електротравма. Найбільш чутливими до електричного струму частинами організму є мозок, грудні м'язи та нервові центри, які контролюють подих і серце. Тому наслідки електротравми залежать від того, яка частина тіла виявилася ввімкненою в електричний ланцюг. Дуже небезпечно, якщо електричний струм іде через серце. Характер електротравми залежить і від сили струму. Так, при ввімкненні в



6.5. Фізичні процеси в тканинах організму під впливом струму 137

ланцюг обох рук з органами грудної клітки, розміщеними між ними, відбувається таке:

- струм 10 мА спричинює скорочення м'язів обох рук;
- струм 20 мА спричинює розлади подиху, пов'язані із скороченням дихальних м'язів;
- струм 80 мА спричинює порушення серцевої діяльності;
- струм 100 – 400 мА спричинює необоротні розлади у функціонуванні збудливих тканин серця (одна з причин смерті при електротравмі).

### **6.5.2. Застосування струму в лікувальних процедурах**

Під впливом постійного електричного поля іони, що містяться у біологічних тканинах, виконують спрямований рух. При цьому відбувається їх поділ і зміна концентрації в різних елементах тканини. Як і за звичайного проходження струму через електроліт, на електродах відбувається виділення речовин. Продукти електролізу є хімічно активними речовинами й у достатній концентрації можуть спричинювати хімічний опік тканин (тому під електродами кладуть вологі прокладки). Для запобігання іонного дисбалансу тканин тривалість процедур із постійним струмом не перевищує 20 – 30 хвилин. Апарати для проведення лікувальних процедур постійним струмом живляться від мережі змінного струму з напругою 220 В. Для одержання постійного струму здійснюється:

- трансформаторне зниження змінної напруги до необхідної величини;

- перетворення змінного струму на пульсуючий за допомогою напівпровідникового випрямляча;
- згладжування пульсації фільтром;
- величина постійного струму, який використовується в процедурах, регулюється потенціометром.

*Гальванізація* — фізіотерапевтичний метод, що ґрунтується на пропущенні через тканини організму постійного струму напругою 60 – 80 В. При гальванізації різних ділянок тіла використовують різні струми:

- кінцівки: 20 – 30 мА;
- тулуб: 15 – 20 мА;
- частини обличчя: 3 – 5 мА.

При проведенні гальванізації в прилеглих тканинах активізуються системи регуляції локального кровотоку. Відбувається розширення просвіту дермальних судин і виникає гіперемія шкірних покривів. Розширення капілярів і підвищення проникності їхніх стінок відбувається не лише в місці накладення електродів, а й у глибоко розміщених тканинах, через які проходить постійний електричний струм.

*Електрофорез* — метод, що ґрунтується на введенні лікарської речовини через шкіру під дією постійного струму. Для проведення електрофорезу під електроди на шкіру кладуть прокладки, змочені відповідним лікарським препаратом. Ліки вводять із того полюса, заряд якого вони мають. Через катод вводять аніони (йод, гепарини, бром), а через анод — катіони (Na, Ca, новокаїн).

**Питання для самоконтролю**

1. Сила та густина струму.
2. Закон Ома для однорідної ділянки ланцюга.
3. Закон Джоуля – Ленца.
4. Залежність опору провідників і напівпровідників від температури.
5. Електрорушійна сила джерела струму.
6. Перше і друге правила Кірхгофа. Розрахунок електричних розгалужених ланцюгів.
7. Закон Ома для повного ланцюга постійного струму.
8. Питомий опір. Залежність електричного опору провідників від їх геометричних розмірів.
9. Методи лікування захворювань, що ґрунтуються на дії електричного струму. Електрофорез. Електросон.
10. Дія електричного струму на організм людини.

## РОЗДІЛ 7

### МАГНІТНЕ ПОЛЕ

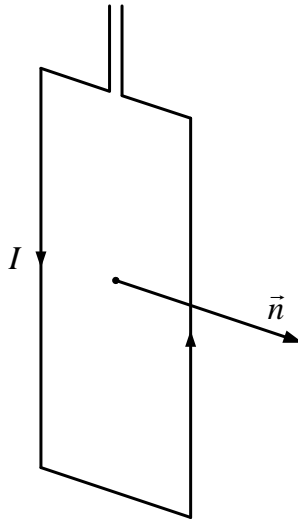
Згідно з дослідями Ерстеда навколо провідників із струмом і постійних магнітів існує магнітне поле, яке можна виявити за його силовою дією на інші провідники зі струмом або постійні магніти. Магнітне поле, як і електричне, матеріально й існує об'єктивно. Дослідами Ерстеда було показано, що нерухомі заряди не створюють магнітного поля і що постійне магнітне поле не діє на нерухомі електричні заряди. При пропусканні по провіднику струму магнітна стрілка повертається залежно від напрямку струму. Таким чином, струм провідності утворює магнітне поле.

#### 7.1. Індукція магнітного поля

Для вивчення властивостей магнітного поля використовують замкнений плоский контур із струмом. Така рамка в магнітному полі певним чином орієнтується. Цю обставину використовують для визначення напрямку магнітного поля.

За напрям магнітного поля в місці розміщення рамки вважають такий, уздовж якого розміщується позитивна нормаль до рамки, що знаходиться в полі в положенні стійкої рівноваги. За позитивний напрям нормалі беруть такий, за якого струм у рамці при розгляді з кінця вектора нормалі здається таким, що йде проти годинникової стрілки (див. рис. 7.1). Рамка із струмом у магнітному полі орієнтується під дією пари сил. Величина моменту цієї пари сил залежить від струмів, що створюють поле, та від властивостей самої рамки: її розмірів, орієнтації. Момент пари сил досягає максимального значення, якщо нормаль до площини рамки орієнтована перпендикулярно до напрямку поля.

Використовувати значення обертового моменту для характе-



**Рисунок 7.1.** Напрямок магнітного поля під час проходження струму рамкою

ристки поля було б незручно, оскільки це значення залежить не лише від властивостей поля, а й від параметрів рамки. Тому за основну силову характеристику поля взята магнітна індукція — фізична величина, значення якої визначається лише властивостями поля. Магнітна індукція  $B$  (одиниця вимірювання — тесла, Тл) — це вектор, що збігається за напрямом із напрямом магнітного поля і дорівнює відношенню максимального обертового моменту, що діє на прямокутну рамку із струмом, до площі рамки і сили струму в ній:

$$B = \frac{M}{IS}. \quad (7.1)$$

Величина  $P_m = IS$  має назву магнітного моменту, його необхідно розглядати як вектор, напрям якого збігається з напрямом позитивної нормалі до площини контуру. Як і напруженість електричного поля  $E$ , магнітна індукція  $B$  залежить від середовища, в якому утворене магнітне поле.

Допоміжною характеристикою, яка не залежить від властивостей середовища, є напруженість магнітного поля:

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu}. \quad (7.2)$$

де  $\mu$  — магнітна проникність середовища, що показує, у скільки разів магнітне поле в середовищі сильніше ( $\mu > 1$ ) або слабше ( $\mu < 1$ ) від магнітного поля тих самих струмів у вакуумі. Параметр  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$  Гн/м називають магнітною сталою, що погоджує одиниці вимірювання.

## 7.2. Потік магнітної індукції

За аналогією з електричним полем силові лінії магнітного поля будують таким чином, щоб їх густина (число силових ліній на одиницю поверхні площини, яка є перпендикулярною до поля) дорівнювала модулю вектора індукції  $B$ . Число силових ліній, що пронизують поверхню  $S$ , називають потоком вектора індукції магнітного поля  $\Phi$  через цю поверхню:

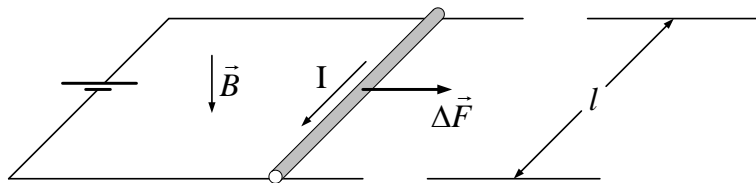
$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (7.3)$$

де  $\alpha$  — кут між вектором магнітної індукції та нормаллю до площини рамки.

## 7.3. Магнітна взаємодія струмів. Закон Ампера

Не можна виміряти індукцію поля  $dB$ , що створюється елементом постійного струму  $dl$ , оскільки цей елемент не можна відокремити від решти ділянки ланцюга зі струмом. Але можна виміряти механічну силу  $dF$ , що діє на окремий елемент контуру зі струмом у магнітному полі, якщо одну з ділянок ланцюга зробити рухо-

7.4. Робота з переміщення провідника із струмом у магнітному полі 143  
 мою (див. рис. 7.2). Закон Ампера запишемо у вигляді



**Рисунок 7.2.** Напря́м сили Ампера

$$\Delta F = IBdl \sin \alpha, \quad (7.4)$$

або у векторній формі

$$d\vec{F} = I[d\vec{l} \times \vec{B}], \quad (7.5)$$

де  $\alpha$  — кут між векторами  $d\vec{l}$  і  $\vec{B}$ . Напря́м цієї сили (сили Ампера) зручно визначати за допомогою правила лівої руки: якщо розміщувати ліву руку так, щоб силові лінії магнітного поля входили в долоню, а чотири складені разом пальці були спрямовані уздовж струму, то відставлений у бік великий палець покаже напря́м сили.

#### 7.4. Робота з переміщення провідника із струмом у магнітному полі

Розглянемо ділянку провідника зі струмом, який може рухатися у магнітному полі (рис. 7.2). Нехай поле, перпендикулярне до площини контуру, є однорідним. Робота, виконана силою  $F$  при переміщенні на  $\Delta x$  ділянки провідника  $dl$  із струмом  $I$ , буде дорівнювати

$$\Delta A = F\Delta x = BI\Delta l\Delta x = IB\Delta S = I\Delta\Phi. \quad (7.6)$$

У разі, якщо поле є неоднорідним, матимемо

$$A = \int Id\Phi, \quad (7.7)$$

де  $d\Phi$  — потік магнітної індукції, що перетинається провідником під час руху. Формула справедлива для випадку переміщення провідника із струмом будь-якої форми, зокрема і замкненого контура зі струмом (у цьому разі  $d\Phi$  — це зміна потоку, що перетинає контур). Якщо контур переміщується в однорідному полі таким чином, що магнітний потік, який його перетинає, залишається незмінним, то робота не виконується.

### 7.5. Сила Лоренца

На елемент струму в магнітному полі діє сила Ампера (7.5). Заміняючи  $Id\vec{l}$  на  $\vec{j}Sdl$ , одержуємо

$$d\vec{F} = Sdl[\vec{j} \times \vec{B}] = dV[\vec{j} \times \vec{B}], \quad (7.8)$$

де  $dV$  — об'єм провідника, до якого прикладена сила  $dF$ . Ураховуючи, що  $\vec{j} = ne\vec{v}$ , одержуємо

$$d\vec{F} = ne[\vec{v} \times \vec{B}]dV, \quad (7.9)$$

де  $ndV$  — число носіїв заряду в об'ємі  $dV$ . Сила, що діє на один заряд (сила Лоренца), дорівнює

$$\vec{f}_l = e[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (7.10)$$

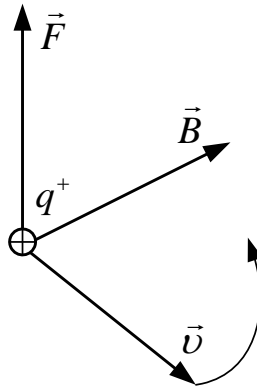
або в скалярній формі

$$f_l = evB \sin \alpha. \quad (7.11)$$

Напрямок сили Лоренца визначається за правилом лівої руки: якщо



долоню лівої руки розмістити так, щоб в неї входили лінії індукції магнітного поля, а чотири витягнуті пальці спрямувати уздовж вектора швидкості  $\vec{v}$ , то відігнутий великий палець покаже напрям сили, що діє на позитивний заряд (рис. 7.3). На негативний заряд



**Рисунок 7.3.** Визначення напрямку сили Лоренца

сила з боку магнітного поля діє в протилежному напрямі.

Сила Лоренца завжди спрямована перпендикулярно до швидкості зарядженої частинки та роботи не здійснює. Отже, діючи на заряджену частинку магнітним полем, змінити її енергію не можна.

## 7.6. Електромагнітна індукція

*Закон Фарадея* (головний закон електромагнітної індукції) — при зміні магнітного потоку, який пронизує замкнену рамку-провідник, у рамці виникає електрорушійна сила, яка надає руху зарядженим частинкам (індукує у рамці струм). Зміну магнітного потоку можна викликати за рахунок наближення або віддалення магніту, зміни сили струму у сусідній рамці і т. п. При цьому величина електрорушійної сили і відповідно сила індукційного струму тим більша, чим швидше змінюється магнітний потік, який прони-

зує рамку. Силу індукційного струму розраховуємо за формулою

$$I = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (7.12)$$

де  $\varepsilon$  — електрорушійна сила.

Якщо в однорідному магнітному полі з індукцією  $B$  механічно обертається рамка площею  $S$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , то зміна магнітного потоку  $\Phi$  у часі описується формулою

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos(\omega t), \quad (7.13)$$

де  $\alpha$  — кут між вектором нормалі до площини рамки та напрямом магнітного поля. Звідси бачимо, що магнітний потік буде максимальним, якщо площина рамки встановиться перпендикулярно до напрямку магнітного поля; при подальшому обертанні рамки магнітний потік зменшується і дорівнює нулю, коли площина рамки встановиться паралельно до напрямку магнітного поля. При подальшому обертанні процес зміни магнітного потоку циклічно повторюється. Отже, магнітний потік змінюється періодично за законом косинуса від  $-BS$  до  $BS$ . З експерименту відомо, що електрорушійна сила тим більша, чим більша швидкість зміни магнітного потоку (або швидкість обертання рамки у магнітному полі). При незмінному потоці ця сила зовсім зникає. Оскільки швидкість зміни є похідною за часом, можна записати

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (7.14)$$

де  $\Delta\Phi$  — зміна магнітного потоку за час  $\Delta t$ . Підставляючи останній вираз у формулу (7.12), одержуємо

$$I = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dt} BS \cos(\omega t) = \frac{1}{R} BS \omega \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t). \quad (7.15)$$

Згідно з формулою (7.15) амплітуда сили струму визначається як

$$I_{\max} = \frac{BS\omega}{R}. \quad (7.16)$$

Отже, сила струму у рамці змінюється від  $-I_{\max}$  до  $+I_{\max}$ . Мінус у даному разі означає зміну напрямку струму.

**Взаємна індукція.** Проходження електричного струму у провіднику супроводжується появою магнітного поля у просторі, що оточує провідник. Відповідно при зменшенні або збільшенні сили струму у провіднику змінюється магнітне поле, що його оточує. Розглянемо дві рамки, розміщені на незначній відстані одна від одної. При зміні сили струму в одній рамці змінюється магнітне поле у просторі, що її оточує, і відповідно магнітний потік, що пронизує сусідню рамку. Отже, в іншій рамці виникає електрорушійна сила та виникає струм. Подібне явище називають взаємною індукцією.

**Самоіндукція** — виникнення електрорушійної сили у рамці при зміні сили струму, який проходить по ній. При цьому електрорушійну силу розраховують за формулою

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}, \quad (7.17)$$

де  $L$  — індуктивність рамки, яка залежить від розміру, форми та матеріалу, з якого вона виготовлена. Внаслідок самоіндукції зміна сили струму у рамці відбувається не миттєво, оскільки рух носіїв струму підтримується електрорушійною силою. Навіть при вимкненні джерела електричного струму деякий час у контурі проходить повільно загасаючий струм. Загасання струму свідчить про перетворення енергії магнітного поля в основному на енергію молекулярно-теплого руху, що спричинює нагрівання контуру. Цю теплоту (енергію) можна виміряти, що дасть інформацію про енергію електромагнітного поля. Встановлено, що енергія електро-

магнітного поля визначається співвідношенням

$$E = \frac{LI^2}{2}. \quad (7.18)$$

## 7.7. Магнітобіологія. Застосування магнітних полів у медицині

**Магнітобіологія** — розділ біофізики, який вивчає вплив магнітного поля на біологічні системи. До цього часу ця сфера є невивченою, однак на сьогодні добре відомі факти руйнування клітин у неоднорідному магнітному полі, негативний вплив магнітного поля на нервову систему, погіршення стану певної категорії людей у період магнітних бур<sup>1</sup>.

Тканини організму є діаманітними. Джерелом магнітних полів в організмі є слабкий біострум. На реєстрації часової залежності індукції магнітного поля серця базується діагностичний метод — *магнітокардіографія*. Це є безконтактний та найбільш нешкідли-

---

<sup>1</sup>Земна куля — постійний магніт із віссю, напрямленою з півночі на південь. Магнітні полюси приблизно збігаються із південним та північним географічними полюсами (а втім, положення магнітних полюсів із часом повільно змінюється). Упродовж року земне магнітне поле повільно змінюється (із певним періодом). Однак час від часу впродовж 6 – 12 годин відбувається різка зміна магнітного поля. Це явище має назву **магнітної бурі**. Число та інтенсивність магнітних бур у різні роки та пори року різна, однак періоди максимуму магнітних бур повторюються із проміжком в 11,5 років. Тривалий час причини виникнення магнітних бур залишалися невстановленими. Однак із часом було помічено, що ряд інших явищ (кількість полярних сьйв, сонячних плям та ін.) також мають періодичність 11,5 року. Було зроблено висновок, що існує певний зв'язок між появою плям на сонці та виникненням магнітних бур. Стало відомо, що плями на Сонці є місцями, звідки із великою швидкістю вилітають в оточуючий простір потоки заряджених частинок — електронів. Ці швидкі електрони і впливають на магнітне поле Землі, спричинюючи магнітні бурі. Потрапляючи у верхні шари атмосфери, швидкі електрони змушують світитися її гази (на зразок неонових ламп) — виникають полярні сьйва. Питання "Чому полярні сьйва простежуються лише у високих широтах?" має просту відповідь. На електрони, що потрапляють у магнітне поле Землі, починає діяти сила Лоренца, що скривлює їх траєкторії, відхиляючи електрони до полюсів.

## 7.7. Магнітобіологія. Застосування магнітних полів у медицині 149

вий засіб одержання інформації щодо серцевої діяльності людини, оскільки поле реєструється на певній відстані від поверхні тіла.

Дія магнітного поля на біологічні об'єкти обумовлена електродинамічними змінами біологічних структур у вигляді відповідної орієнтації доменів поляризації та рідкокристалічних утворень, наведення електрорушійної сили. Ці зміни спричинюють певну перебудову структур тканин, що м'яко модифікує ті або інші біохімічні реакції та біологічні процеси.

*Стала магнітотерапія* — лікувальне використання постійного магнітного поля. У цей час із лікувальною метою використовують пристрої різних типів:

1. Магнітоеластичні, виготовлені із суміші полімерної речовини з порошкоподібним феромагнітним наповнювачем (має безліч локальних магнітних полюсів). Набори еластичних магнітів у корсеті створюють основу будь-яких радікулітних поясів. Магнітна індукція 8 – 16 мТл.
2. Магніти кільцеві, пластинчасті, дискові. Магнітна індукція становить 60 – 130 мТл.
3. Мікромагніти — намагнічені голки, кульки, кліпси. Магнітна індукція — 60 – 100 мТл.
4. Пластинчасті магніти використовують у вигляді браслетів, які носять на зап'ясті. Магнітна індукція 20 – 70 мТл.

*Імпульсна магнітотерапія* — лікувальне застосування імпульсів магнітного поля низької частоти. Використовуються імпульсні магнітні поля з частотами 0,125 – 1000 Гц, магнітна індукція яких не перевищує 100 мТл. Діючим чинником у цьому методі є вихрові електричні поля, що індукуються в тканинах імпульсним магнітним полем високої амплітуди. За рахунок швидкого зростання вектора магнітної індукції (швидкість якого досягає  $10^4$  мТл/с) вихрові

електричні поля, що виникають, спричиняють колові рухи зарядів. Висока ефективність цього методу обумовлена максимальною граничною чутливістю організму до імпульсних магнітних полів, що становить 0,1 Тл, у той час як для постійних магнітних полів вона дорівнює 8 мТл, а для змінних — 3 мТл. Застосовують різні способи розміщення індукторів. Наприклад, при впливі на кінцівки, їх поміщають усередину блока соленоїдів.

*Високочастотна магнітотерапія* — лікувальне застосування магнітної складового електромагнітного поля високої частоти. Для формування змінного магнітного поля в цьому випадку використовують індуктори-соленоїди. Внаслідок явища електромагнітної індукції (як і у випадку імпульсного магнітного поля) у провідних тканинах утворюються вихрові струми Фуко, що нагрівають об'єкт. Теплова потужність  $q$ , що виділяється в одиниці об'єму тканини під впливом змінного магнітного поля, прямо пропорційна квадрату магнітної індукції  $B$ , квадрату колової частоти  $\omega$  та обернено пропорційна питомому електроопору  $\rho$ :

$$q = \frac{k\omega^2 B^2}{\rho}, \quad (7.19)$$

де  $k$  — коефіцієнт, який ураховує розміри об'єкта.

За високочастотної магнітотерапії більше теплоти виділяється в тканинах із меншим питомим опором. Тому сильніше нагріваються тканини, багаті судинами, наприклад м'язи. У меншому ступені нагріваються такі тканини, як жир. Нагрівання ділянки тіла за дії високочастотного магнітного поля здійснюється на частотах 10 – 15 МГц. Вплив на біологічний об'єкт відбувається з використанням кабельних індукторів, розміщених у трьох положеннях:

- а) плоскій поздовжній петлі (частіше на спині);
- б) плоскій круглій спіралі (на тулубі);
- в) циліндричній спіралі (на кінцівках).

## 7.7. Магнітобіологія. Застосування магнітних полів у медицині 151

Унаслідок виділення тепла відбувається рівномірне локальне нагрівання тканини на 2 – 4 градуси на глибину 8 – 12 см, а також підвищення температури тіла пацієнта на 0,3 – 0,9 градуси. Для цього виду магнітотерапії використовують стару назву — індукто-термія — наведення тепла.

### **Питання для самоконтролю**

1. Індукція магнітного поля. Обертальний момент, що діє на коло зі струмом у магнітному полі.
2. Потік магнітної індукції.
3. Сила Ампера.
4. Сила Лоренца.
5. Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі.
6. Закон електромагнітної індукції.
7. Взаємна індукція. Самоіндукція. Енергія магнітного поля.
8. Залежність індуктивності від геометричної форми провідника. Індуктивність соленоїда.
9. Закон Біо – Савара – Лапласа.
10. Вплив магнітних полів на організм людини. Методи лікування та діагностики, що ґрунтуються на використанні магнітного поля.

## РОЗДІЛ 8

### ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

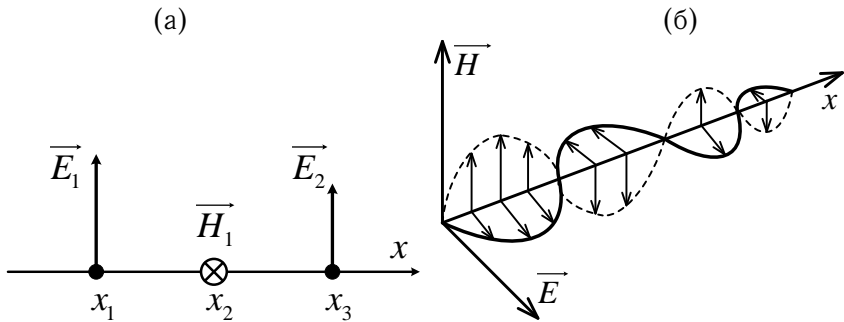
Електромагнітними коливаннями називають періодичні взаємозв'язані зміни зарядів, струмів і характеристик електричного та магнітного полів. Поширення електромагнітних коливань у просторі відбувається у вигляді електромагнітних хвиль.

#### 8.1. Електромагнітні хвилі

На сучасному рівні розвитку науки відомі два типи матерії: речовина та поле. До речовини відносять форми матерії, що складаються з елементарних частинок (протонів, електронів, нейтронів тощо), які входять до складу атомів і молекул та, у кінцевому підсумку, усіх тіл. Речовині властива наявність маси спокою. Поле — форма матерії, за допомогою якої здійснюється взаємодія між частинками речовини або тілами. Йому властива безперервність у просторі та відсутність маси спокою. Поле і речовина нерозривно пов'язані між собою, утворюючи єдину матерію нашого світу. Найважливішою універсальною властивістю матерії є корпускулярно-хвильовий дуалізм: усі мікрооб'єкти (наприклад, електрони) поведуть себе як частинки речовини й одночасно проявляють певні хвильові властивості. Вперше корпускулярно-хвильовий дуалізм був установлений для світла. Досліди з інтерференції та дифракції світла свідчили про його хвильову природу і підтверджували теорію Максвелла, у якій зазначено, що світло являє собою електромагнітні хвилі. **Під електромагнітною (ЕМ) хвилею розуміють процес поширення у просторі взаємозв'язаних (взаємозалежних) змінних електричного і магнітного полів.** Основні положення про ЕМ-поле були сформульовані англійським фізиком Максвеллом. ЕМ-поля (хвилі) поширюються у середовищі з кінцевою швидкістю  $c \approx 300\,000$  км/с,



яка збігається із швидкістю світла у вакуумі; вектори напруженості електричного поля  $\vec{E}$  та магнітного поля  $\vec{H}$  взаємно перпендикулярні, а фази їх коливань — однакові. Процес поширення ЕМ-хвилі схематично можна подати так. Нехай у точці  $x_1$  (рис. 8.1 а) зростає електричне поле з напруженістю  $\vec{E}_1$ . Електричне поле породжує



**Рисунок 8.1.** Схематичне зображення процесу поширення електромагнітної хвилі у просторі

магнітне поле з напруженістю  $\vec{H}_1$  у сусідній точці  $x_2$ . Зростання магнітного поля супроводжується виникненням електричного поля  $\vec{E}_2$  у точці  $x_3$  і т. д. Якщо періодична зміна  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  у деякій точці  $x = 0$  буде підтримуватися за рахунок зовнішнього джерела, то у просторі буде поширюватися ЕМ-хвиля. Для плоскої гармонічної ЕМ-хвилі, що поширюється в ізотропному середовищі без загасання, справедливими є такі рівняння:

$$E(x, t) = E_{\max} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad H(x, t) = H_{\max} \sin \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (8.1)$$

де  $E(x, t)$  — миттєве значення напруженості електричного поля у точці  $x$  у момент часу  $t$ ;  $E_{\max}$  — її максимальне значення;  $H(x, t)$  — миттєве значення напруженості магнітного поля;  $H_{\max}$  — її максимальне значення;  $\omega$  — циклічна частота;  $v$  — швидкість поширення ЕМ хвилі;  $t$  — час;  $x$  — координата уздовж напрямку

поширення хвилі.

У роботах Планка була розвинута гіпотеза про дискретний характер випромінювання: енергія випромінювання кратна деякій величині  $\varepsilon$ , яку називають квантом енергії:

$$\varepsilon = h\nu, \quad (8.2)$$

де  $\nu$  — частота випромінювання;  $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с — стала Планка.

ЕМ-хвилі не лише випромінюються, а й поширюється квантами. Так виникло уявлення про частинки світла — фотони, що несуть квант енергії  $\varepsilon$  і рухаються із швидкістю світла. ЕМ-випромінювання проявляє дуалізм, тобто одночасно має властивості хвилі і властивості потоку частинок — фотонів. Тобто один вид матерії (частинка) може перетворюватися на інший (хвиля). Цей ефект підтверджено експериментально. Так, наприклад, відома реакція анігіляції (знищення) двох античастинок: електрона і позитрона. У цій реакції речовина — електрон і позитрон — перетворюється на два кванти електромагнітного поля (фотони).

## 8.2. Вільні електромагнітні коливання

Вільними (власними) електромагнітними коливаннями називають такі, які здійснюються без зовнішньої дії за рахунок початково накопиченої енергії. Розглянемо коливальний контур, що складається з резистора  $R$ , котушки індуктивності  $L$  і конденсатора  $C$  (рис. 8.2). Опором провідників і можливим випромінюванням електромагнітних хвиль нехтуємо. Конденсатор за допомогою ключа  $K$  заряджається від джерела  $\varepsilon$ , а потім розряджується на резистор і котушку індуктивності. При цьому в контурі виникає

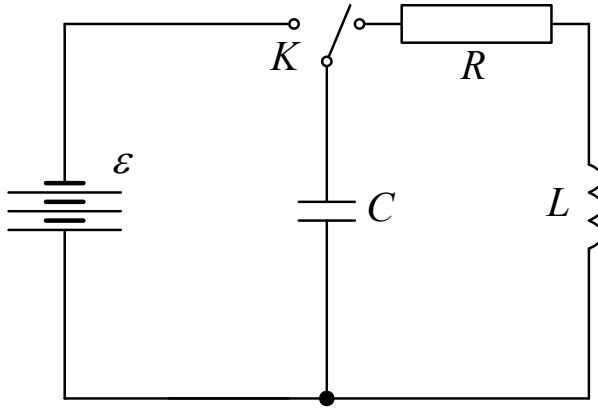


Рисунок 8.2. Коливальний контур

ЕРС самоіндукції

$$\varepsilon_i = -L \frac{dI}{dt}, \quad (8.3)$$

яка згідно із законом Ома дорівнює сумі напруг на елементах ланцюга: на резисторі  $U_R = IR$  і на конденсаторі  $U_C = q/C$ . Тому запишемо

$$-L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}. \quad (8.4)$$

Перетворимо це рівняння, поділивши всі члени на  $L$  та врахувавши співвідношення  $I = dq/dt$ ,  $dI/dt = d^2q/dt^2$ :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (8.5)$$

Це диференціальне рівняння вільних електромагнітних коливань.

Виконавши заміну

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2, \quad (8.6)$$

одержимо рівняння

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (8.7)$$

### 8.2.1. Незгасні коливання

Якщо контур не містить резистора (рис. 8.2), то з (8.7) одержуємо

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (8.8)$$

Відомо, що (8.8) є диференціальним рівнянням гармонічного коливання та його розв'язок має вигляд

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.9)$$

де  $q_m$  — найбільший (початковий) заряд на обкладках конденсатора;  $\omega_0$  — циклічна частота власних коливань контура;  $\varphi_0$  — початкова фаза.

За гармонічним законом змінюється не лише заряд на обкладках конденсатора, а й напруга і сила струму в контурі:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.10)$$

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (8.11)$$

де  $U_m$  та  $I_m$  — амплітуди напруги та сили струму.

Із (8.6) знайдемо вираз для періоду власних коливань (формула Томсона):

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (8.12)$$

### 8.2.2. Згасні коливання

За наявності резистора коливальний процес описується рівнянням (8.7), аналогічним рівнянню для механічних коливань. За умови, що загасання не дуже велике, тобто

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 > 0, \quad (8.13)$$

знаходимо такий розв'язок:

$$q = q_m e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8.14)$$

Якщо загасання мале ( $\omega_0^2 \gg \beta^2$ ), то  $\omega \approx \omega_0$ . У цьому разі логарифмічний декремент загасання

$$\lambda = \beta T = \frac{R}{2L} \cdot 2\pi\sqrt{LC} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (8.15)$$

### 8.2.3. Аперіодичний розряд конденсатора на резистор (сильне загасання)

При сильному загасанні  $\omega_0^2 < \beta^2$  задовольняються умови

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{4L^2}, \quad \frac{1}{C} < \frac{R^2}{4L}. \quad (8.16)$$

Нерівність (8.16) виконується, зокрема, в контурі за відсутності індуктивності ( $L \rightarrow 0$ ). Для цього випадку (розряд конденсатора на резистор) з (8.4) одержуємо

$$IR = -\frac{q}{C}, \quad \frac{dq}{dt}R = -\frac{q}{C}, \quad \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}. \quad (8.17)$$

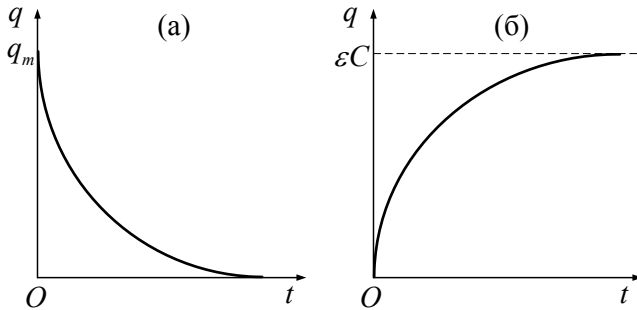
Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо

$$\int_{q_m}^q \frac{dq'}{q'} = - \int_0^t \frac{dt'}{RC}, \quad \ln \frac{q}{q_m} = -\frac{t}{RC}. \quad (8.18)$$

Потенціюючи другий вираз у (8.18), одержуємо

$$q = q_m \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (8.19)$$

Рівняння (8.19) описує процес розрядження конденсатора  $C$  на резистор  $R$ . За відсутності індуктивності коливання не виникають (рис. 8.3 а). За таким законом змінюється і напруга на обклад-



**Рисунок 8.3.** Зміна заряду на конденсаторі при його розряджанні (а) та заряджанні (б)

ках конденсатора. Тривалість подібних процесів оцінюють часом, упродовж якого параметр, що характеризує процес, зменшиться в  $e$  разів (час релаксації  $\tau$ ).

Вираз для часу релаксації можна одержати з (8.19), якщо замість  $q$  підставити  $q_m/e$ , а  $t$  замінити на  $\tau$ :

$$\frac{q_m}{e} = q_m \exp\left(-\frac{\tau}{RC}\right), \quad (8.20)$$

звідки для контура з конденсатором і резистором одержимо

$$\tau = RC. \quad (8.21)$$

Можна показати, що зарядження конденсатора від джерела із постійною ЕРС  $\epsilon$  також відбувається за експоненціальним законом

$$q = \epsilon C \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right]. \quad (8.22)$$

Графік залежності (8.22) поданий на рис. 8.3 б.

### 8.3. Медична класифікація частотних інтервалів

Із теорії Максвелла випливає, що радіохвилі, світло, рентгенівське випромінювання та гамма-випромінювання являють собою електромагнітні хвилі з різною довжиною хвилі (частотою). Для класифікації електромагнітних хвиль уся шкала поділена на кілька діапазонів довжин хвиль (див. табл. 8.1). Весь діапазон елек-

**Таблиця 8.1.** Інтервали електромагнітних хвиль

Довжина хвилі, м	Назва діапазону	Джерела
$10^4 - 10^{-4}$	Радіохвилі (довгі, середні, короткі)	Змінні струми в провідниках
$10^{-4} - 10^{-6}$	Інфрачервоне випромінювання	Випромінювання атомів і молекул
$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	Видиме світло ( $\lambda = 400 - 760$ нм)	Випромінювання атомів і молекул
$4 \cdot 10^{-7} - 5 \cdot 10^{-9}$	Ультрафіолетове випромінювання	Випромінювання атомів і молекул
$5 \cdot 10^{-9} - 4 \cdot 10^{-12}$	Рентгенівське випромінювання	Внутрішньоатомні процеси
$4 \cdot 10^{-12} - 10^{-13}$	$\gamma$ -випромінювання	Ядерні процеси, радіоактивний розпад, космічні процеси

тромагнітних хвиль досить широкий: за довжиною хвилі від  $10^{-12}$  м до  $10^{13}$  м; за частотою від  $10^{-5}$  Гц до  $10^{20}$  Гц. Деякі діапазони перекриваються, тому що хвилі однієї й тієї самої довжини можуть утворюватися в різних процесах. Так, наприклад, найбільш короткохвильове ультрафіолетове випромінювання перекривається довгохвильовим рентгенівським, а короткохвильове рентгенівське випромінювання —  $\gamma$ -випромінюванням. Електромагнітні хвилі різних діапазонів по-різному взаємодіють із речовиною.

Медична класифікація частотних інтервалів подана у таблиці 8.2.

**Таблиця 8.2.** Класифікація частотних інтервалів

Назва інтервалу	Частоти
Низькі частоти (НЧ)	До 20 Гц
Звукові частоти (ЗЧ)	20 Гц – 20 кГц
Ультразвукові частоти (УЗЧ)	20 кГц – 200 кГц
Високі частоти (ВЧ)	200 кГц – 30 МГц
Ультрависокі частоти (УВЧ)	30 – 300 МГц
Надвисокі частоти (НВЧ)	300 МГц – 300 ГГц
Дуже високі частоти (ДВЧ)	Понад 300 ГГц

*Вплив хвиль радіодіапазону на людину.* Радіохвилі, що генеруються за допомогою електронних пристроїв, за довжиною охоплюють діапазон від міліметрів до декількох кілометрів. Довгі та середні радіохвилі ( $\lambda > 100$  м) практично не взаємодіють із біологічними об'єктами. У медичних цілях вони не використовуються.

Зі зменшенням довжини хвилі біологічна активність радіохвиль зростає. Хвилі ВЧ-діапазону помітно поглинаються біологічними тканинами, а для УВЧ- і НВЧ-діапазонів це поглинання стає дуже значним. УВЧ-діапазон використовується в медицині для глибокого прогрівання тканин. Особливо ефективно поглинають такі хвилі тканини із значним вмістом води, що приводить до їх сильного нагрівання. Велике виділення тепла небезпечно для органів і тканин, що мають погану систему кровопостачання, наприклад для кришталіка. Так, радіовипромінювання з довжиною хвилі 10 – 12 см може підвищити температуру в задній частині кришталіка на 20 °С. Подібний вплив здатний викликати катаракту, що розвивається не відразу, а через кілька тижнів після опромінення і прогресує навіть за відсутності додаткового опромінення.



Радіохвилі від штучних джерел можуть мати велику інтенсивність і впливати на життєво важливі процеси. Штучними джерелами радіохвиль є радіомовні і телевізійні станції, радіолокатори і супутникові системи зв'язку. Для людини, яка перебуває в постійному ЕМ-полі, інтенсивність радіохвиль  $0,1 \text{ Вт/м}^2$  вважається безпечною. Ефекти нагрівання біологічних тканин радіохвилями використовуються в медицині під час проведення фізіотерапевтичних процедур за допомогою апаратів УВЧ-, НВЧ-терапії.

*Інфрачервоне випромінювання.* Низькочастотний край цієї області не має різкої межі, що відокремлювала б її від мікрохвильової області. Верхня межа інфрачервоного випромінювання визначається початком області видимого світла. На високочастотній межі інфрачервоної області фотони мають енергію  $W \approx 1,8 \text{ еВ}$ , достатню для порушення молекул. Ця властивість використовується для вивчення будови речовини (ІЧ-спектроскопія). Джерелом інфрачервоного випромінювання є всі тіла. За підвищення температури інтенсивність випромінювання зростає. Це випромінювання є основним переносником тепла від Сонця. Молекули, що входять до складу шкірного покриву людини, "резонують" на інфрачервоних частотах; тому саме це випромінювання переважно поглинається і зігріває людину.

*Видиме світло.* Видима область спектра електромагнітного випромінювання дуже вузька і має досить різкі межі, обумовлені властивостями органа зору людини. Довжини хвиль, що відповідають основним кольорам видимого світла, наведені у таблиці 8.3. Енергія високочастотної межі цього діапазону становить 3 еВ. Оскільки енергія зв'язку атомів порядку 1 еВ, видиме світло може спричинювати хімічні перетворення (фотосинтез, фотографія, фотобіологічні реакції, відбілювання).

Видиме світло може генеруватися у великій кількості різних процесів, що відбуваються у зв'язаних атомних або молекулярних системах, за рахунок їхнього порушення внаслідок нагрівання або

**Таблиця 8.3.** Довжини хвиль основних кольорів видимого світла

Червоний	760 – 620 нм
Жовтогарячий	620 – 590 нм
Жовтий	590 – 560 нм
Зелений	560 – 500 нм
Блакитний	500 – 480 нм
Синій	480 – 450 нм
Фіолетовий	450 – 400 нм

іншого впливу, наприклад електронного удару.

*Ультрафіолетове випромінювання* генерується атомами при впливі прискорених заряджених частинок. Область ультрафіолетового випромінювання починається біля фіолетової межі видимого світла і зливається з довгохвильовим рентгенівським випромінюванням. Поглинання УФ-випромінювання пов'язане з фотохімічними реакціями і може призвести до виникнення еритеми (почервоніння та засмага). Виділяють три зони дії УФ-випромінювання на організм:

A — антирахітну (400 – 315 нм) — відбувається синтез вітаміну D;

B — еритемну (315 – 280 нм) — виникає еритема, опіки;

C — бактерицидну (280 – 200 нм) — може спричинити мутації, бактерицидний ефект. Останній використовують в операційних і перев'язувальних відділеннях клінік для дезінфекції приміщень.

*Рентгенівське та  $\gamma$ -випромінювання.* Рентгенівське випромінювання генерується за різкого гальмування електронів, що рухаються з великою швидкістю, під час потрапляння на металеву мішень. Точно також, як не існує чіткої межі між ультрафіолетовим випромінюванням і м'яким рентгенівським випромінюванням, так і відсутня чітка межа з  $\gamma$ -випромінюванням.

Для первинної взаємодії між рентгенівським випромінюванням і речовиною характерні три механізми:

1. *Когерентне розсіювання*. Ця форма взаємодії відбувається, коли фотони рентгенівських променів мають меншу енергію, ніж енергія зв'язку електронів з ядром атома. У такому випадку енергія фотона виявляється недостатньою для звільнення електронів з атомів речовини. Фотон не поглинається атомом, але змінює напрям поширення. При цьому довжина хвилі рентгенівського випромінювання залишається незмінною.
2. *Фотоелектричний ефект (фотоефект)*. Коли фотон рентгенівського випромінювання досягає атома речовини, він може вибити один з електронів. Це відбувається в тому випадку, якщо енергія фотона перевищує енергію зв'язку електрона з ядром. При цьому фотон поглинається, а електрон вивільняється з атома. Якщо фотон несе більшу енергію, ніж необхідно для вивільнення електрона, він передасть залишок енергії звільненому електрону у формі кінетичної енергії. Цей феномен називають фотоелектричним ефектом, що відбувається при поглинанні відносно низькоенергетичного рентгенівського випромінювання. Атом, що втрачає один зі своїх електронів, стає позитивним іоном. Тривалість існування вільних електронів дуже коротка. Вони поглинаються нейтральними атомами, які перетворюються при цьому в негативні іони. Результатом фотоелектричного ефекту є інтенсивна іонізація речовини. Якщо енергія фотона рентгенівського випромінювання менша, ніж енергія іонізації атомів, то атоми переходять в збуджений стан, але не іонізуються.
3. *Некогерентне розсіювання (ефект Комптона)*. Цей ефект виявлений американським фізиком Комптоном. Він відбувається, якщо речовина поглинає рентгенівські промені малої

довжини хвилі. Енергія фотонів таких рентгенівських променів завжди більша, ніж енергія іонізації атомів речовини. Ефект Комптона є результатом взаємодії високоенергетичного фотона рентгенівських променів з одним з електронів зовнішньої оболонки атома, який має порівняно слабкий зв'язок з атомним ядром. Високоенергетичний фотон передає електрону деяку частину своєї енергії. Збуджений електрон вивільняється з атома. Частина енергії первинного фотона випромінюється у вигляді фотона рентгенівського випромінювання більшої довжини хвилі під деяким кутом до напрямку руху первинного фотона. Вторинний фотон може іонізувати інший атом і т. ін. Ці зміни напрямку і довжини хвилі рентгенівських променів відомі як ефект Комптона.

Оскільки рентгенівські промені здатні збуджувати атоми і молекули речовини, це може спричинити флюоресценцію певних речовин (наприклад, сульфату цинку). Якщо паралельний пучок рентгенівських променів спрямувати на непрозорі об'єкти, то можна спостерігати, як промені пройдуть крізь об'єкт, поставивши екран, покритий флуоресціювальною речовиною. Флюоресцентний екран можна замінити фотографічною плівкою. Рентгенівські промені діють на фотографічну емульсію так, як і світло. Обидва методи використовують у практичній медицині.

### **Питання для самоконтролю**

1. Електромагнітні хвилі як особлива форма матерії.
2. Коливальний контур. Вільні електромагнітні коливання.
3. Незгасні коливання в коливальному контурі.
4. Згасні електромагнітні коливання. Логарифмічний декремент загасання.

5. Аперіодичний розряд конденсатора на резистор. Час релаксації електричного струму.
6. Величини, що періодично змінюються у коливальному контурі.
7. Роль ЕРС самоіндукції в коливальному контурі.
8. Змінний струм.
9. Резонанс у коливальному контурі.
10. Використання ЕМ-хвиль у медицині.

## РОЗДІЛ 9

### ОПТИКА

В оптиці розглядають закони поширення, відбиття та заломлення світла. Світло має дуалістичну природу: поширення світла в область тіні (наприклад, при проходженні крізь щілину) свідчить про його хвильову природу; з іншого боку, світло чинить механічну дію на тіла, що свідчить про наявність у світла певної маси. У такому разі ми можемо подати світло як потік елементарних частинок — фотонів. Механічна дія проявляється у тиску на поверхню тіла, яке поглинає або відбиває світло. Простим доказом того, що світлові хвилі являють собою саме електромагнітні хвилі, є факт проходження світла крізь вакуум (наприклад, потрапляння світла від Сонця на Землю). За сучасними даними, у міжзоряному просторі у середньому близько одного атома на  $1 \text{ см}^3$  (сучасні вакуумні установки дають лише  $10^8$  атомів на  $1 \text{ см}^3$ ), отже, ні про яку деформацію середовища, як у випадку механічних хвиль під час поширення ЕМ-хвилі, мова йти не може. Крім того, встановлена швидкість поширення світла, що становить  $300\,000 \text{ км/с}$  і збігається із швидкістю поширення радіохвиль.

#### 9.1. Інтерференція світла

Тіла, що світяться, випромінюють первинні електромагнітні хвилі. Потрапляючи на будь-яке тіло, ця первинна хвиля викликає вимушені коливання електронів цього тіла, що стають джерелами вторинних електромагнітних хвиль. Уся різноманітність світлових явищ, усі видимі забарвлення та обриси предметів являють собою суперпозицію, тобто накладання первинних та вторинних хвиль.

Серед відомих світлових явищ вагоме місце займає інтерференція світла. Проведемо такий дослід. Капнемо на поверхню води

краплину олії. При розгляді поверхні в білому світлі відразу можна побачити появу різнокольорових переливчастих плям. Далі помістимо між джерелом білого світла та нашим розчином прозоре скло, наприклад зеленого кольору. Це дасть можливість виділити з усього набору хвиль лише хвилі, що відповідають зеленому кольору. На поверхні побачимо чергування світлих зелених та темних смужок. Від темних смужок світло зовсім не потрапляє в око спостерігача, світлі смужки, навпаки, посиляють багато світла у бік спостерігача. Це означає, що у просторі відбувається перерозподіл енергії, внаслідок якого утворюються світлі (хвилі підсилюють одна одну) та темні (хвилі гасять одна одну) області. Зазначене явище називають інтерференцією.

Розглянемо фізичну суть інтерференції. Нехай існує два джерела світла. Ми розглянемо електричну складову окремих ЕМ-хвиль, що випромінюються цими джерелами:

$$E_1 = E_{1m} \cos(\omega_{01}t + \varphi_{01}), \quad E_2 = E_{2m} \cos(\omega_{02}t + \varphi_{02}). \quad (9.1)$$

Припустимо, що частоти хвиль однакові, тобто  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ . Тоді результуюча напруженість поля  $E$  у деякий момент часу для певної точки простору розраховується за формулою

$$E = E_1 + E_2 = E_{1m} \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}) + E_{2m} \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}). \quad (9.2)$$

При цьому згідно з векторною діаграмою амплітуда результуючого коливання має вигляд

$$E_m^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2E_{1m}E_{2m} \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (9.3)$$

Залежно від типу джерел світла результат складання хвиль може бути принципово різним.

Якщо хвилі йдуть від звичайних джерел світла (лампа, полум'я,

Сонце і т. п.), то кожне джерело є сукупністю величезної кількості випромінювальних атомів. Окремий атом випромінює електромагнітну хвилю приблизно впродовж  $10^{-8}$  с, причому випромінювання випадкове, тому і різниця фаз  $\Delta\varphi = (\varphi_{02} - \varphi_{01})$  у формулі (9.3) набуває випадкових значень. При цьому середнє значення останнього доданка дорівнює нулю. Замість (9.3) одержимо усереднену рівність для тих точок простору, де накладаються одна на одну дві хвилі, що йдуть від двох звичайних джерел світла:

$$E_m^2 = E_{1m}^2 + E_{2m}^2. \quad (9.4)$$

Оскільки інтенсивність хвилі пропорційна квадрату амплітуди, то з (9.4) маємо умову складання інтенсивностей:

$$I = I_1 + I_2. \quad (9.5)$$

Це спостерігається в повсякденній практиці: освітленість від двох ламп дорівнює сумі освітленостей, що створюються кожною лампою окремо.

Якщо  $\Delta\varphi$  залишається незмінною в часі, спостерігається інтерференція світла. Інтенсивність результуючої хвилі набуває в різних точках простору значення від мінімального до максимального. Інтерференція виникає від узгоджених, когерентних джерел, які забезпечують постійну в часі різницю фаз  $\Delta\varphi$ . Хвилі, що відповідають цій умові, називають **когерентними**.

Інтерференція могла б бути здійснена від двох синусоїдальних хвиль однакової частоти, проте на практиці створити такі світлові хвилі неможливо. Для одержання когерентних хвиль можна використати простий пристрій — дзеркало Ллойда. Когерентність досягається за рахунок того, що обидві хвилі одночасно випромінюються одним джерелом. Одна хвиля безпосередньо потрапляє у точку



спостереження, інша (яка випромінюється під певним кутом до першої хвилі) — відбивається від дзеркала і теж потрапляє у цю точку.

Розрахунок інтерференційної картини можна провести, використовуючи формулу (9.3), якщо відомі різниця фаз хвиль, що інтерферують, та їх амплітуди. Практичний інтерес становлять окремі випадки: найбільше посилення хвиль — максимум інтенсивності та найбільше послаблення — мінімум інтенсивності.

Умови максимумів та мінімумів зручніше виражати через різницю ходу хвиль. Покажемо це на прикладі інтерференції двох плоских хвиль. Коливання векторів  $\vec{E}$  цих хвиль у деякій точці, віддаленій на відстані  $x_1$  та  $x_2$  від кожного джерела, відбуваються за гармонічним законом

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{1m} \cos \omega \left( t - \frac{x_1}{v_1} \right), \\ E_2 &= E_{2m} \cos \omega \left( t - \frac{x_2}{v_2} \right). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Нехай хвилі поширюються в різних середовищах із показниками заломлення  $n_1$  та  $n_2$ . Швидкості поширення хвиль відповідно дорівнюють  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$ , де  $c$  — швидкість світла у вакуумі. Тоді з (9.6) одержуємо різницю фаз:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = \omega \left( t - \frac{x_2}{v_2} \right) - \omega \left( t - \frac{x_1}{v_1} \right) = \omega \left( \frac{x_1}{v_1} - \frac{x_2}{v_2} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{cT} (x_1 n_1 - x_2 n_2). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Оскільки довжина хвилі у вакуумі  $\lambda = Tc$ , замість (9.7) одержимо

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 n_1 - x_2 n_2). \quad (9.8)$$

Добуток геометричного шляху хвилі  $x$  на показник заломлення середовища  $n$  називають **оптичною довжиною шляху**, а різницю

цих шляхів

$$\delta = x_1 n_1 - x_2 n_2 \quad (9.9)$$

оптичною різницею ходу хвиль. З останніх двох формул одержимо зв'язок:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta, \quad \delta = \frac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi. \quad (9.10)$$

Згідно із формулою (9.3), якщо значення косинусу дорівнює  $-1$ , амплітуда коливання мінімальна. Якщо косинус набуває значення  $1$ , амплітуда результуючого коливання максимальна (див. рис. 9.1). Отже, використовуючи співвідношення

$$\cos(2k\pi) = 1, \quad \cos((2k+1)\pi) = -1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.11)$$

та формулу (9.10), одержимо умову максимуму

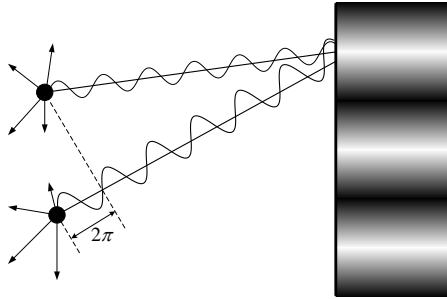
$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi}2k\pi = 2k\frac{\lambda}{2} \quad (9.12)$$

та мінімуму

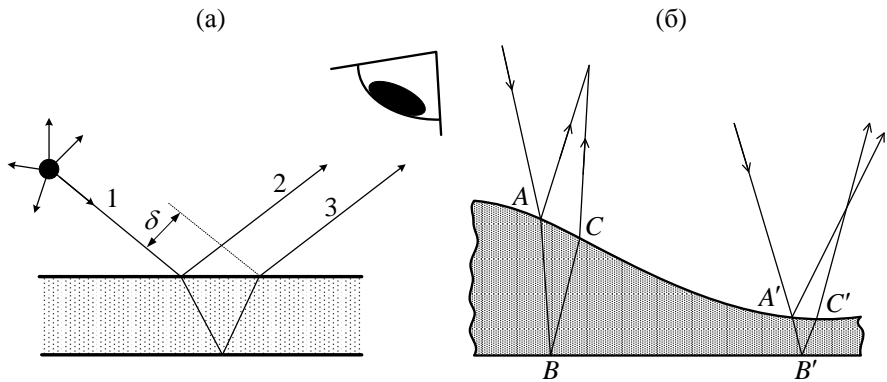
$$\delta = \frac{\lambda}{2\pi}(2k+1)\pi = (2k+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (9.13)$$

Інтерференційну картину можна одержати при пропусканні монохроматичного світла (однієї довжини хвилі) через напівпрозору пластинку (рис. 9.2 а). Якщо світлові хвилі, що потрапляють на поверхню, є паралельними, то за умови однорідної пластини відбите світло — теж паралельні хвилі. Отже, уся пластинка у відбитому світлі буде темною або світлою залежно від різниці ходу  $\delta$ . Саме це явище використовують для зменшення сонячних відблисків на екранах осцилографів, моніторів і т. д., покриваючи їх тонкою плівкою, товщина якої забезпечує необхідну різницю ходу  $\delta$  і відповідно мінімум інтерференційної картини.

Спираючись на вищесказане, ми можемо скласти певне уявлен-



**Рисунок 9.1.** Інтерференційна картина від двох когерентних джерел світла. Два промені, зсунуті за фазою на  $2\pi$ , сходяться в одній точці екрана, і у цій точці простежується максимум освітленості (світла смужка). У сусідній ділянці, для якої різниця фаз буде становити приблизно  $3\pi$ , відбувається послаблення інтенсивності (темна смужка). У центрі наступної смужки хвилі мають різницю фаз  $4\pi$  (ця смужка є світлою) і т. д.



**Рисунок 9.2.** Інтерференція світла

ня про походження різнокольорових областей тонких масляних плівок. При освітленні прозорої плівки частина світлової хвилі відбивається від передньої поверхні, частина — від задньої, завдяки цьому спостерігають хвилі з деякою різницею ходу. Незавжди побачити (рис. 9.2 б), що ця різниця ходу залежить від товщини плівки, яка визначає довжину шляху хвилі усередині плівки (гео-

метричну різницю ходу  $ABC$  або  $A'B'C'$ ). У тих місцях, де оптична різниця ходу досягає парної кількості півхвиль  $\lambda/2$ , обидві хвилі підсилюють одна одну (простежується максимум), там, де різниця ходу виражається непарною кількістю півхвиль, має місце взаємне послаблення (мінімум). Оскільки плівка в різних місцях має різну товщину, то області максимумів та мінімумів дають на її поверхні картину темних та світлих областей, якщо дослід проводять у монохроматичному світлі, або картину різнокольорових областей, якщо використовують біле світло.

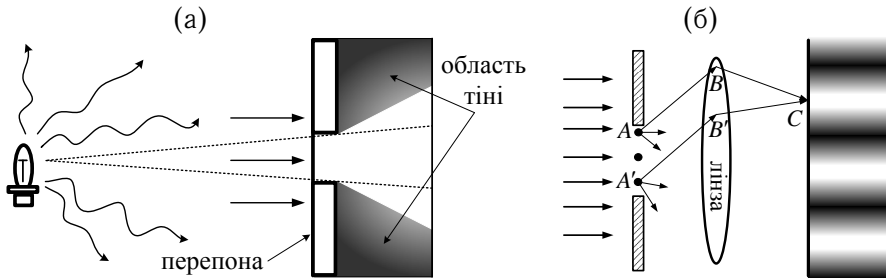
## 9.2. Дифракція світла

Дифракція — це відхилення світла від прямолінійного поширення (наприклад, при огинанні перепони) (рис. 9.3 а). Явище дифракції можна пояснити принципом Гюйгенса – Френеля: кожна точка хвильової поверхні, до якої дійшла хвиля, у свою чергу, стає джерелом ЕМ-хвиль (рис. 9.3 б). Отже, доходячи до щілини у непрозорому екрані, ЕМ-хвилі збуджують генерацію вторинних ЕМ-хвиль у кожній точці щілини — світло потрапляє в область тіні.

Ці вторинні ЕМ-хвилі є когерентними, отже, стає можливою їх інтерференція. Для того щоб одержати чітку інтерференційну картину, необхідно помістити між щілиною та екраном опуклу лінзу. У такому разі усі паралельні промені (вторинні) лінза збирає у певних точках екрана (рис. 9.3 б). Внаслідок цього на екрані з'являється чітка картина чергування максимумів та мінімумів.

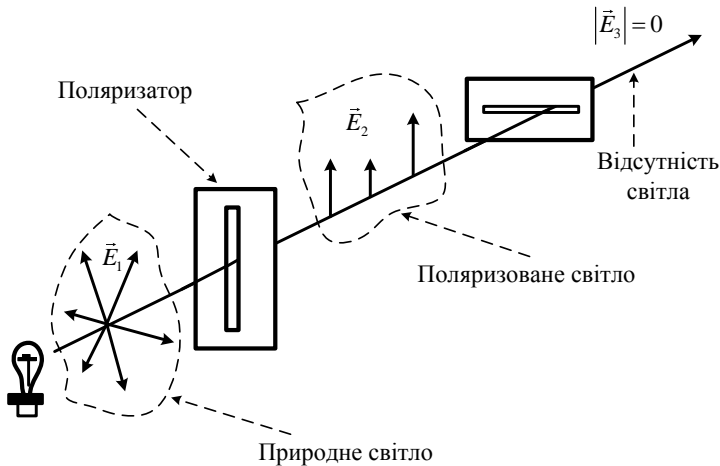
## 9.3. Поляризація світла

Проведемо такий дослід. Візьмемо дві абсолютно однакові непрозорі пластинки з вирізаними у них щілинами. Накладемо одну пластинку на іншу, так щоб їх щілини збігалися за напрямком, і пропустимо крізь цю складену пару пластинок пучок світла від



**Рисунок 9.3.** (а) Демонстрація явища дифракції: світло, огинаючи перепону, потрапляє в область геометричної тіні. (б) Реалізація принципу Гюйгенса – Френеля. Паралельні промені від усіх точок щілини збираються лінзою в одній точці екрана. На рисунку показані два паралельних промені від різних точок. Різниця ходу  $\delta = ABC - A'B'C$  (без урахування показника заломлення лінзи) становить парне число півхвиль — у точці  $C$  простежується максимум

звичайної лампочки. На екрані ми побачимо світлу пляму. Почнемо повертати одну із пластинок навколо пучка, залишаючи іншу пластину нерухомою (рис. 9.4).



**Рисунок 9.4.** Поляризація світла шляхом пропускання крізь поляризатор

Ми побачимо, що пляма стає слабшою, і якщо пластину по-

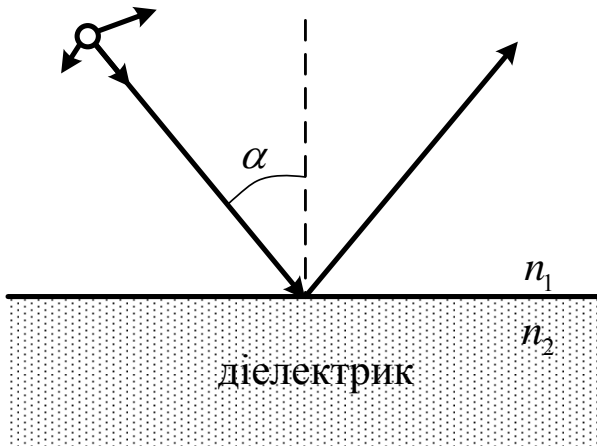
вернеться на  $90^\circ$ , вона зовсім зникне. При подальшому повертанні пластинки пучок світла, що проходить крізь пластини, почне підсилюватися і досягне вихідної інтенсивності, якщо щілини пластин знову стануть паралельними. Таким чином, при повертанні пластинки на  $360^\circ$  інтенсивність пучка, що пройшов крізь обидві пластинки, двічі досягає максимуму (коли щілини стають паралельними). Для пояснення наведеного ефекту ми будемо використовувати таку термінологію.

- **Природне світло** — електромагнітна хвиля, вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  якої хаотично пульсують за усіма напрямками (на рис. 9.4 подана лише електрична складова  $\vec{E}$ ).
- **Поляризоване світло** — електромагнітна хвиля, в якій вектори  $\vec{E}$  та  $\vec{H}$  лежать строго в одній площині. Площину, в якій лежить вектор  $\vec{E}$  або  $\vec{H}$ , називають площиною поляризації. Пристрій, за допомогою якого одержують поляризоване світло, називають поляризатором.

Повертаючись до нашого досліду, приходимо до висновку, що із поперечних коливань природного світла при проходженні крізь поляризатор виконується добір лише тих коливань, які лежать у площині щілини поляризатора. Тому світло, що пройшло крізь поляризатор, буде являти собою сукупність поперечних коливань одного напрямку. Ці коливання можуть пройти крізь другий поляризатор повністю лише у тому разі, коли їх напрямок збігається з напрямком орієнтації щілини другого поляризатора! Якщо напрямок коливань у поляризованому світлі є перпендикулярним до напрямку щілини другого поляризатора, то світло буде повністю затримане (як це показано на рис. 9.4).

Зазначимо, що при відбитті природного світла від поверхні діелектрика воно частково поляризується. Повна поляризація можлива лише при виконанні закону Брюстера:  $\tan \alpha = n_2/n_1$ , де  $\alpha$  —

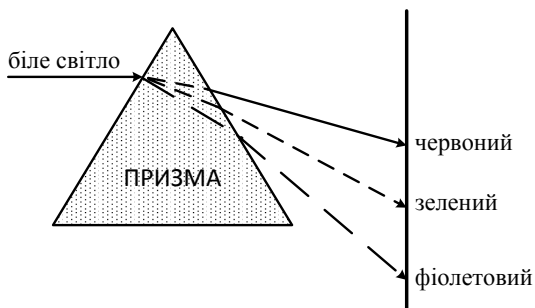
кут падіння світла;  $n_1$  та  $n_2$  — показники заломлень двох середовищ (рис. 9.5).



**Рисунок 9.5.** Поляризація світла шляхом відбиття від поверхні діелектрика

Поляризацію світла широко застосовують у медицині для визначення концентрації деяких речовин (наприклад, цукру) у різноманітних розчинах (наприклад, сечі). Ідея цього методу є достатньо простою і ґрунтується на експериментальних даних, які свідчать про те, що розчин цукру повертає площину поляризації світла. Наллємо розчин у прозору судину, помістимо його між двома поляризаторами та пропустимо природне світло крізь цю систему. Проходячи крізь перший поляризатор, світло поляризується. Далі поляризоване світло проходить крізь розчин, який повертає площину поляризації на певний кут. Цей кут можна легко встановити, повертаючи другий поляризатор: коли кут, на який повернутий другий поляризатор, та площина поляризації збіжаться, на екрані буде простежуватися чітка світла пляма. При цьому величина кута залежить від концентрації цукру: чим більша концентрація, тим більшим буде кут, на який повернеться площина поляризації.

## 9.4. Дисперсія світла



**Рисунок 9.6.** Розкладання білого світла на прості кольори

Проведемо такий дослід. Пропустимо вузький пучок сонячного (білого) світла крізь прозору скляну призму. На екрані, розміщеному за призмою, ми побачимо появу смужок різних кольорів: від фіолетового до червоного. Цей ефект свідчить про те, що промені різного кольору по-різному заломлюються призмою. Оскільки біле світло являє собою суміш усіх кольорів, а показник заломлення речовини залежить від довжини хвилі (кольору), то при проходженні білого світла крізь призму останній розкладається на окремі кольори, що і приводить до появи різнокольорової картини на екрані. Сукупність довжин хвиль (простих кольорів), що складають складний колір (наприклад, білий), називають **спектром**. Підбиваючи підсумок, зазначимо, що **під дисперсією світла розуміють залежність показника заломлення від кольору світла**. Природно очікувати, що якщо ми змішаємо усі кольори одержаного спектра, то знову одержимо біле світло. Звичайно спектри різних джерел є різними. При цьому, порівнюючи спектри різних джерел світла, побачимо, що відповідні ділянки спектрів мають різну яскравість, тобто у різних спектрах енергія розподілена по-різному. Наприклад, у спектрі неонових ламп переважає червоний колір, світло лампи розжарю-



вання має жовтий відтінок і т. п.

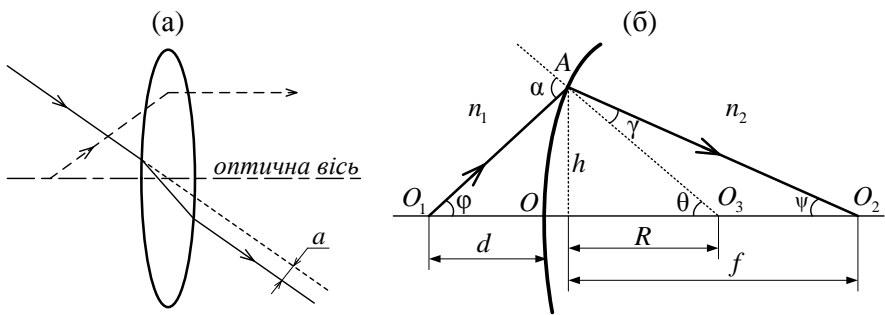
## 9.5. Геометрична оптика. Оптичні пристрої

Для розв'язання багатьох задач практичної медицини достатньо розглядати світло не як хвильовий процес (це значно ускладнює одержання кінцевого результату), а як сукупність променів або ліній, уздовж яких поширюється енергія світлової хвилі. Введемо таку термінологію:

**Лінза** — прозоре тіло, обмежене двома поверхнями різної форми (сферична, циліндрична і т. п.).

**Оптична вісь** — вісь, що проходить через центр поверхонь, які обмежують лінзу.

**Тонка лінза** — лінза, товщина якої значно менша за радіуси кривизни поверхонь, які її утворюють. У тонкій лінзі нехтують зсушенням  $a$  променів, що проходять через її центр (рис. 9.7 а). Лінзу



**Рисунок 9.7.** (а) Зсушення променів, які проходять через центр лінзи. (б) Заломлення променів сферичною лінзою

називають збиральною, якщо вона заломлює промені у бік оптичної осі, або розсіювальною, якщо вона відхиляє промені від оптичної осі.

Розглянемо заломлення променів на одній сферичній поверхні лінзи (рис. 9.7 б). Нехай  $\alpha$  — кут падіння променя,  $n_1 < n_2$  — по-

казники заломлення середовища та лінзи. Нехай падаючий промінь є параксіальним, тобто таким, що утворює з оптичною віссю дуже малий кут  $\varphi$ . Тоді  $\theta$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$  — теж малі кути і можна припустити, що  $O_1A \approx O_1O \approx d$ ,  $O_2A \approx O_2O \approx f$ ,  $\varphi \approx h/d$ ,  $\psi \approx h/f$ ,  $\theta \approx h/R$ . Згідно з законом заломлення

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} \implies n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \gamma. \quad (9.14)$$

Оскільки  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \gamma \approx \gamma$ , то (9.14) перепишемо як

$$n_1 \alpha \approx n_2 \gamma. \quad (9.15)$$

Із рисунка можна побачити, що

$$\alpha = \theta + \varphi = \frac{h}{R} + \frac{h}{d}, \quad \gamma = \theta - \psi = \frac{h}{R} - \frac{h}{f}.$$

Підставляючи ці співвідношення у (9.15), одержуємо

$$n_1 \left( \frac{h}{R} + \frac{h}{d} \right) = n_2 \left( \frac{h}{R} - \frac{h}{f} \right) \implies \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f}. \quad (9.16)$$

Таким чином, якщо відома відстань  $d$  від предмета до поверхні та радіус кривизни поверхні  $R$ , можна розрахувати відстань  $f$  від поверхні до зображення:

$$f = \frac{Rn_2d}{d(n_2 - n_1) - Rn_1}. \quad (9.17)$$

Зазначимо, що величина  $h$  не входить до формули. Це означає, що всі промені, які під різними кутами падають на сферичну поверхню із точки  $O_1$ , обов'язково збираються у точці  $O_2$ !

Оскільки лінза має дві заломлювальні поверхні, можливо з різними радіусами кривизни  $R_1$  та  $R_2$ , то формулу, яка пов'язує відс-

тань від предмета до лінзи  $d$  та відстань від лінзи до зображення  $f$ , запишемо так:

$$(n_2 - n_1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = n_1 \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \right). \quad (9.18)$$

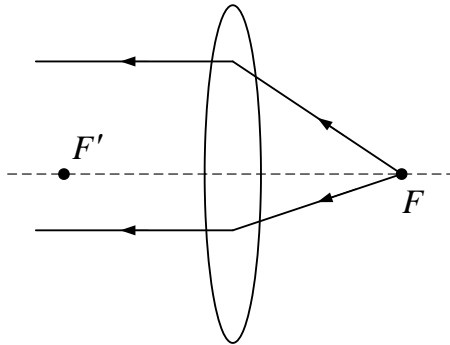
Праворуч у дужках знаходиться величина, яка є обернено пропорційною до так званої **фокусної відстані**  $F$  лінзи, її називають **оптичною силою** лінзи  $D$ :

$$D = \frac{1}{F} = \left( \frac{1}{d} + \frac{1}{f} \right). \quad (9.19)$$

Звідси

$$\frac{1}{F} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.20)$$

Будь-який промінь, який є паралельним до головної оптичної осі, після заломлення лінзою пройде через одну й ту саму точку  $F$ , яка лежить на відстані  $F$  від її центра. Повністю за аналогією з



**Рисунок 9.8.** Фокусна відстань лінзи

попереднім висновком можна стверджувати, що пучок світла, який виходить із фокуса лінзи, поза лінзою являє собою сукупність паралельних променів (рис. 9.8). Фокус  $F$  називають переднім фокусом. Існує і задній фокус  $F'$ , розміщений на тій самій відстані з ін-

шого боку лінзи. Припустимо, що точка, яка випромінює промені розміщена на досить великій відстані  $d$  від лінзи. Тоді при  $d \gg 1$  величина  $1/d \ll 1$ , і, повертаючись до формули (9.19), одержуємо

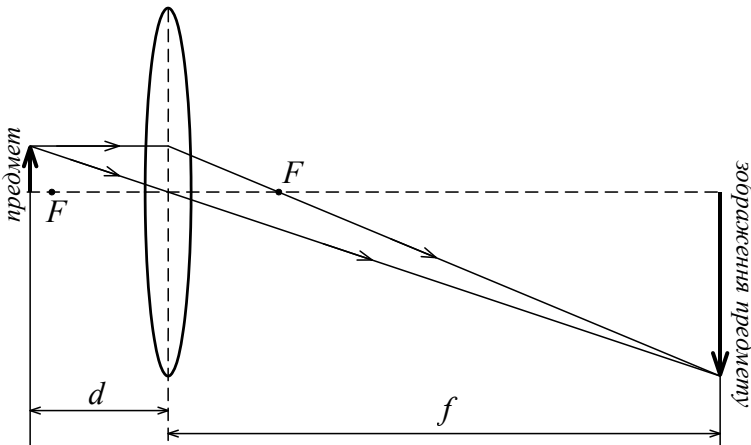
$$\frac{1}{F} \approx \frac{1}{f} \quad \longrightarrow \quad f = F, \quad (9.21)$$

тобто промені від віддаленої точки (вони практично є паралельними в околі лінзи) зберуться у фокусі.

Для системи тонких лінз (наприклад, двох), які прилягають одна до одної, справедливим є співвідношення

$$\frac{1}{F_{12}} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \quad \longrightarrow \quad D_{12} = D_1 + D_2. \quad (9.22)$$

При розрахунках необхідно брати до уваги таке: якщо  $D < 0$ ,



**Рисунок 9.9.** Предмет, що випромінює (відбиває) світлові промені, розміщений поза фокусом лінзи — зображення дійсне, збільшене, перевернуте

тобто  $F < 0$ , то відстань  $f$  має знак мінус: зображення знаходиться з того ж боку, що й предмет. Таке зображення називають уявним. Лінзи з  $D > 0$  є збиральними і дають дійсне зображення,

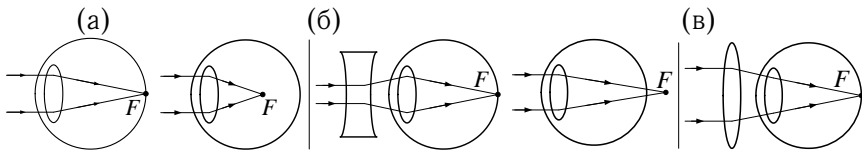
поки  $d > F$ , при  $d < F$  зображення є уявним. Збільшення, яке дає тонка лінза, залежить від розміщення предмета, оптичної сили лінзи та фокусної відстані  $F$ . Якщо предмет міститься поза фокусом, то зображення є дійсним, перевернутим і збільшеним у

$$\Gamma = \frac{f}{d} \quad (9.23)$$

разів, де  $\Gamma$  — лінійне збільшення лінзи. Зображення є тим більшим, чим ближче предмет розміщений до фокусу.

### 9.5.1. Порушення зору в людини

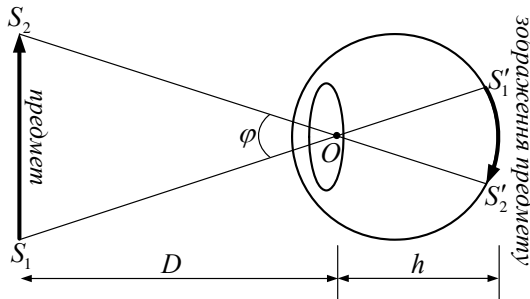
Роль збиральної лінзи відіграє око людини (точніше кришталик + склоподібне тіло + передня камера). Промені від джерел світла збираються на сітківці (рис. 9.10).



**Рисунок 9.10.** (а) Нормальне око: задній фокус у стані спокою міститься на сітківці. (б) Короткозоре око: задній фокус розміщений перед сітківкою, для корекції використовують розсіювальну лінзу. (в) Далекозоре око: задній фокус — поза сітківкою, для корекції використовують збиральну лінзу

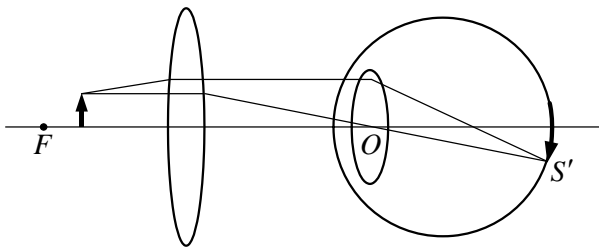
### 9.5.2. Оптичні пристрої, що озброюють око

Хоча око й не є тонкою лінзою, у ньому можна знайти точку, через яку промені проходять майже без заломлень, тобто точку, яка відіграє роль оптичного центра. Оптичний центр ока міститься усередині кришталика, поблизу його задньої стінки. Відстань від



**Рисунок 9.11.** Зображення предмета на сітківці ока

оптичного центра до сітківки називають глибиною ока (у нормі становить  $h = 15$  мм). Знаючи положення оптичного центра на сітківці можна побудувати зображення будь-якого предмета (рис. 9.11). Зображення буде дійсним, зменшеним та перевернутим. Кут  $\varphi$  називають кутом зору. Оскільки сітківка складається з окремих світлочутливих елементів, то зображення на сітківці, що потрапляють на один і той самий елемент, сприймаються оком як одна точка. Мінімальний кут зору, під яким дві точки сприймаються оком ще окремо, становить приблизно 1 хв. Значне збільшення кута зору до-



**Рисунок 9.12.** Підсилення зору за допомогою оптичних пристроїв

сягається за допомогою оптичних пристроїв. Розглянемо принцип збільшення зображення за допомогою лупи (рис. 9.12). Предмет, який розглядають через лупу, розміщують на відстані, яка є меншою за фокусну відстань. Промінь, виходячи із точки  $S$  предмета,

заломлюється спочатку у речовині лупи, а потім у заломлювальному середовищі ока, і збирається у точці  $S'$  на сітківці. З рисунка бачимо, що розміри зображення значно перевищують розміри предмета.

### **Питання для самоконтролю**

1. Інтерференція світла.
2. Дифракція світла.
3. Оптична та геометрична довжина шляху променів.
4. Інтерференція в напівпрозорих плівках.
5. Дифракційна ґратка та її використання в медичній діагностиці.
6. Дослід Юнга.
7. Частота, період, швидкість поширення світла в речовині, показник заломлення. Закон заломлення.
8. Розсіювальна лінза. Хід променів. Характеристики зображення.
9. Збиральна лінза. Хід променів. Характеристики зображення.
10. Типи порушень зору людини та їх корекція.

## РОЗДІЛ 10

## ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ ТІЛ

## 10.1. Теплове випромінювання тіл

З усієї різноманітності електромагнітних випромінювань можна виділити одне, що властиве всім тілам, — теплове випромінювання.

**Теплове випромінювання** — електромагнітне випромінювання, яке випромінює речовина, воно виникає за рахунок її внутрішньої енергії.

Теплове випромінювання обумовлюється збудженням частинок речовини при зіткненнях у процесі теплового руху або прискореним рухом зарядів (коливання іонів кристалічної ґратки, тепловий рух вільних електронів і т. д.).

**Енергетична світність**  $R_e$  (одиниці вимірювання — Вт/м<sup>2</sup>) — потік випромінювання  $\Phi$ , що випромінюється з 1 м<sup>2</sup> поверхні:

$$R_e = \frac{\Phi}{S}. \quad (10.1)$$

Нагріте тіло випромінює електромагнітні хвилі різної довжини. На кожний інтервал довжин хвиль припадає певна енергія (енергетична світність  $\Delta R_\lambda$ ):  $\Delta R_\lambda = r_\lambda \Delta \lambda$  — світність на довжинах хвиль від  $\lambda$  до  $\lambda + \Delta \lambda$ ;  $r_\lambda$  — спектральна густина енергетичної світності тіла. Зазначимо, що будь-яке тіло (нагріте до температури вище за 0 К), випромінює електромагнітні хвилі, тобто "світиться". Інше питання: чи сприймаються ці ЕМ-хвилі оком людини (видимий діапазон), чи ні (наприклад, ультрафіолетові та інфрачервоні). Сукупність довжин хвиль або частот, на яких переноситься енергія випромінювання, називають **спектром випромінювання тіла**.

Здатність тіл поглинати енергію випромінювання від зовнішніх



об'єктів<sup>2</sup> характеризується коефіцієнтом  $\alpha = \Phi_p / \Phi_v$ , де  $\Phi_p$  — потік випромінювання, поглинутого цим тілом;  $\Phi_v$  — загальний потік випромінювання від зовнішнього джерела, який потрапляє на тіло. Зрозуміло, що коефіцієнт  $\alpha$  лежить у проміжку від 0 (тіло зовсім не поглинає зовнішнього випромінювання) до 1 (тіло повністю поглинає випромінювання).

**Абсолютно чорне тіло** — тіло, коефіцієнт поглинання якого  $\alpha = 1$ . Прикладом абсолютно чорного тіла є вуглина. Зауважимо, що тіло називають абсолютно чорним умовно, оскільки чорного кольору взагалі не існує у природі. Чорне світло — це просто відсутність світла. Тобто у просторі ми бачимо, власне, не саме чорне тіло, а лише "отвір", який "виколує" це тіло в оточуючому середовищі. Абсолютно чорним тілом можна вважати приміщення без вікон із невеликим отвором. Зовнішнє випромінювання, потрапляючи через отвір усередину приміщення, багаторазово відбиваючись від стінок, поглинається останніми, і лише малий відсоток виходить через отвір назад<sup>3</sup>.

**Закон Стефана – Больцмана** — енергетична світність абсолютно чорного тіла пов'язана з температурою таким співвідношенням:

$$R = \sigma T^4, \quad (10.2)$$

де  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>) — стала Стефана – Больцмана;  $T$  — термодинамічна температура (К).

Енергетична світність сірого тіла:

$$R = \alpha \sigma T^4, \quad (10.3)$$

де  $\alpha$  — коефіцієнт теплового випромінювання (ступінь чорноти)

<sup>2</sup>При цьому, зазвичай, тіло нагрівається.

<sup>3</sup>Саме тому вдень неможливо крізь вікно розглянути внутрішність неосвітленого приміщення.

сірого тіла.

**Закон Кірхгофа:** якщо тіло здатне випромінювати хвилі певної частоти, то хвилі саме цієї частоти (від зовнішніх джерел) воно буде поглинати більш інтенсивно.

**Закон зміщення Віна:** за підвищення температури змінюється колір світності тіла, оскільки спектр випромінювання зміщується в область високих частот (малих довжин хвиль). Проявами цього закону є зміна кольору тіла під час нагрівання: за кімнатної температури тіла випромінюють хвилі низьких частот (інфрачервоні), які не сприймає око людини. Якщо температура підвищується, колір світності тіла стає червоним. За подальшого підвищення температури колір набирає блакитного відтінку (хвилі високих частот).

Закон зміщення Віна можна подати у формульному вигляді:

$$\lambda_m = \frac{b}{T}, \quad (10.4)$$

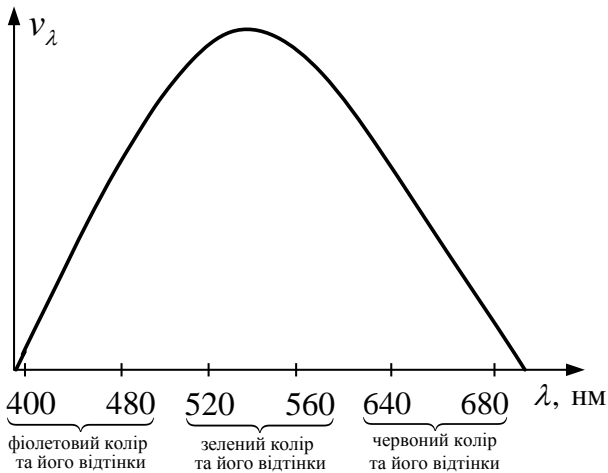
де  $\lambda_m$  — довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання (м);  $b = 2,9 \cdot 10^{-3}$  м · К — стала Віна.

Розглянемо простий приклад — випромінювання розпеченої вуглини. За температур до 750 К випромінювання вуглини лежить в інфрачервоній області спектра. У міру збільшення температури зростає загальна енергія, яку випромінює вуглина, і помітно збільшується частка видимого випромінювання (тобто при збільшенні температури спектр поступово зсувається у бік видимої області). Ретельне вивчення та теоретичний аналіз цього явища засвідчили, що довжина хвилі, на яку припадає максимум випромінювання, залежить лише від температури. Ця обставина дозволяє застосувати наведений закон для визначення температури тіл, які світяться<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup>Застосування цього прийому до Сонця показує, що максимум випромінювання Сонця лежить близько 500 нм, тобто у жовто-зеленій частині спектра, якій відповідає температура 5800 К. Це, зазвичай, температура поверхні Сонця, а не його внутрішньої частини.

Необхідно зазначити, що чутливість ока до світла різних довжин хвиль (різного кольору) є різною, і відповідно енергетичне оцінювання світла і оцінювання світлового потоку за зоровим відчуттям можуть істотно відрізнятись. Так, за однієї й тієї самої потужності випромінювання зорове відчуття від променів зеленого кольору є у 100 разів більшим за відчуття від променів червоного або фіолетового кольору. Тому для зорового оцінювання світлових потоків необхідно знати чутливість ока до світла різної довжини хвилі, або так звану криву відносної спектральної чутливості ока  $v_\lambda$  (рис. 10.1). На підставі законів Стефана – Больцмана та Віна можна



**Рисунок 10.1.** Чутливість ока до світла різної довжини хвилі

виміряти температуру тіл за допомогою вимірювання випромінювання цих тел. Наприклад, так визначають температуру поверхні Сонця ( $\approx 6000$  К), температуру в епіцентрі вибуху ( $\approx 10^6$  К) і т. д. Загальна назва цих методів — пірометрія. Численні спроби визначити вид функції для спектральної густини енергетичної світності  $\varepsilon(\lambda, T)$ , спираючись на закони класичної фізики, не привели до успіху. Одна з таких спроб належала Віну, інша — Релею. Залеж-

ність Віна мала розбіжність з досвідом у довгохвильовій області, а залежність Релея — у короткохвильовій.

Нарешті, у 1900 році Макс Планк одержав для випромінювальної здатності абсолютно чорного тіла формулу, що повністю збігалася з експериментальними даними для всіх довжин хвиль. Для цього йому довелося відмовитися від класичних понять про безперервність процесу випромінювання електромагнітних хвиль. Як вже зазначалося, згідно з уявленнями Планка випромінювальне тіло являє собою сукупність осциляторів, енергія яких може змінюватися лише порціями, або квантами. Енергія кванта визначається за формулою (8.2). Оскільки стала Планка  $h$  дуже мала, кожен квант несе мізерно малу енергію. Тому за значних потоків випромінювання його дискретна природа непомітна. Формула Планка, що описує спектр випромінювання чорного тіла, має вигляд

$$\varepsilon = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}, \quad (10.5)$$

де  $\lambda$  — довжина хвилі (м);  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с — швидкість світла у вакуумі;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К — стала Больцмана;  $\omega$  — колова частота (рад/с);  $T$  — термодинамічна температура (К);  $\hbar = h/(2\pi) \approx 1,0546 \cdot 10^{-34}$  Дж · с — редукована стала Планка (стала Дірака).

Залежність максимальної спектральної густини енергетичної світності від температури можна оцінити так:

$$\varepsilon_{\max} = CT^5, \quad (10.6)$$

де стала  $C = 1,3 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м<sup>3</sup>·К<sup>5</sup>).

## 10.2. Застосування теплового випромінювання тіл у медицині

Відомо, що найбільша частка теплообміну організму людини із зовнішнім середовищем припадає на випромінювання від відкритих ділянок тіла (50 %). При цьому випромінювання відбувається на малих частотах в інфрачервоному діапазоні. За підвищення температури ділянок тіла (пухлина, запалення) їх світність значно збільшується, що реєструється спеціальними приладами. Метод діагностики організму, що ґрунтується на цих принципах, називають термографією. Для реєстрації випромінювання використовують фотопластинки із спеціальним покриттям.

Потужність втрат за рахунок випромінювання при взаємодії тіла людини з довкіллям розраховуємо за формулою

$$E = S\alpha\sigma(T_1^4 - T_0^4), \quad (10.7)$$

де  $S$  — площа поверхні;  $\alpha$  — коефіцієнт поглинання;  $T_1$  — температура поверхні тіла або одягу;  $T_0$  — температура довкілля. Для одягненої людини під температурою  $T_1$  варто розуміти температуру поверхні одягу.

Визначають різницю температури поверхні тіла двома способами.

1. Використанням рідких кристалів, фізичні властивості яких чутливі до невеликої зміни температури. За зміною кольорів рідких кристалів можна визначити місцеву зміну температури.

2. Використанням приладів нічного бачення, тепловізорів. У технічній системі тепловізора використовують електронно-оптичні перетворювачі, призначені для перетворення зображення з однієї області спектра на іншу. На вхідний елемент системи подається сигнал в області ІЧ-випромінювання, а відтворюється на екрані теп-

ловізора в області видимого світла. Частини тіла з різною температурою розрізняються на екрані або кольорами, або інтенсивністю (тепловий портрет). Сучасні методи вимірювання дозволяють відрізнити ділянки тіла, різниця температур яких становить 0,2 °С.

Дослідження розподілу температури шкіри важливе для функціональної діагностики. За патологічних станів внутрішніх органів можуть утворюватися шкірні зони зі зміненою температурою. Різні патологічні стани характеризуються термоасиметрією і наявністю температурного градієнта між зоною підвищеного або зниженого випромінювання та симетричною ділянкою тіла, що відбивається на термографічній картині і має діагностичне та прогностичне значення. Термографічний метод полегшує диференціальний діагноз між доброякісними та злоякісними пухлинами. Цей метод є об'єктивним засобом контролю за ефективністю терапевтичних методів лікування. Так, під час термографічного обстеження хворих псоріазом було встановлено, що окремі папули, а також псоріатичні бляшки не завжди мають підвищену теплопродукцію порівняно з оточуючим шкірним покривом. За наявності вираженої інфільтрації і гіперемії в бляшках відбувається підвищення температури. Поступове зниження температури до рівня оточуючих ділянок здебільшого корелює з клінічною картиною захворювання, що свідчить про регресію процесу на шкірі.

У багатьох медико-реабілітаційних заходах необхідно враховувати теплообмін людини та середовища. Організм людини підтримує постійну температуру тіла, що відрізняється від температури зовнішнього середовища. Внаслідок цього між тілом людини й оточуючим середовищем виникає теплообмін. Завдання організму полягає в забезпеченні рівності між теплотою, що виділяється в організмі, і теплотою, яку він віддає в оточуюче середовище. Виділення теплоти в організмі відбувається за рахунок енергії метаболічних процесів і характеризується питомою теплопродукцією —

## 10.2. Застосування теплового випромінювання тіл у медицині 191

кількістю теплоти, яка виділяється одиницею маси тіла за 1 секунду. Передавання теплоти в довкілля здійснюється за рахунок процесів теплообміну, зазначених нижче. Тепловий вплив на організм людини можуть чинити зовнішнє середовище і процеси, що проходять у самому організмі.

*Теплообмін за рахунок теплопровідності.* Теплопровідність — процес передавання теплоти від більш нагрітих частин системи до менш нагрітих, що відбувається без перенесення маси речовини і без випромінювання електромагнітних хвиль. Теплопровідність обумовлена тим, що частинки речовини, які мають більшу кінетичну енергію, передають її менш швидким частинкам. Передавання теплоти шляхом теплопровідності може відбуватися між будь-якими тілами за безпосереднього контакту або через проміжне середовище (крім вакууму).

Зазначимо, що коефіцієнт теплопровідності повітря порівняно малий, тому втрати тепла тіла за рахунок теплопровідності повітря невеликі. Коефіцієнт теплопровідності води перевищує коефіцієнт теплопровідності повітря більше ніж в 20 разів, тому в холодній воді людина починає мерзнути досить швидко. У живому організмі тканини мають різні теплопровідності, і це розходження досить істотно для підтримки теплового режиму організму. Значна теплопровідність м'язової тканини, що містить багато кровоносних судин, дозволяє швидко переносити тепло від внутрішніх органів до зовнішніх, охороняючи внутрішні органи від перегрівання. Навпаки, за низьких температур зовнішнього середовища шар жирової тканини перешкоджає швидкому витоку тепла. Аналогічну роль відіграє волосяний покрив і шар повітря між волоссям.

*Теплообмін за рахунок конвекції.* У тих випадках, коли в теплообміні беруть участь рідини або гази, звичайно виникають явища конвекції: одночасно з потоком тепла виникають потоки речовини — більш нагріті шари спливають догори, а менш нагріті —

опускаються. Таке перемішування значно прискорює процес теплообміну. У разі, коли тверде тіло обтікає рідина або газ, теплообмін також має конвекційний характер і відбувається значно швидше, ніж у нерухомому середовищі. Тому навіть невеликий вітер (протяг) призводить до збільшення втрат тепла з поверхні тіла.

Теплообмін за допомогою конвекції описується законом Ньютона

$$P_c = \alpha_c S (T_1^4 - T_0^4), \quad (10.8)$$

де  $P_c$  — тепловий потік від організму до середовища;  $S$  — площа поверхні тіла;  $T_1$  і  $T_0$  — відповідно температури поверхні тіла (зовнішнього боку одягу) і повітря;  $\alpha_c$  — коефіцієнт теплопередавання конвекцією.

*Тепловий удар.* Теплопередавання шляхом теплопровідності та конвекції відбувається в напрямку зменшення температури. Якщо температура довкілля вища від температури тіла, то теплопровідність і конвекція створюють тепловий потік, спрямований усередину тіла, що за певної тривалості призводить до перегрівання (тепловий удар). Живий організм не може функціонувати без віддавання тепла назовні.

*Теплообмін за рахунок випаровування.* Ще один механізм, за допомогою якого організм віддає теплоту в навколишнє середовище, пов'язаний із випаровуванням рідини. Кількість теплоти, що витрачається на пароутворення, визначається формулою

$$Q = rt, \quad (10.9)$$

де  $t$  — маса рідини, що випарувалася;  $r$  — питома теплота пароутворення.

За кімнатної температури і нормальної вологості людина виводить з організму близько 0,35 кг вологи за добу разом із видихуваним повітрям і приблизно 0,5 кг вологи у вигляді поту. Питома



## 10.2. Застосування теплового випромінювання тіл у медицині 193

теплота пароутворення води велика і дорівнює  $2,52 \cdot 10^6$  Дж/кг. Тому теплові втрати організму на випаровування можуть досягати  $(0,35 + 0,5) \cdot 2,52 \cdot 10^6 \approx 2 \cdot 10^6$  Дж за 1 добу, що становить 25 – 30 % від загальної теплопродукції організму.

За високої вологості процес випаровування з поверхні тіла сповільнюється, а при 100 % припиняється повністю. За високої температури доквілля це призводить до перегрівання організму. З цієї причини людині важко виконувати фізичну роботу за підвищеної вологості. Вологість, менша ніж 40 %, призводить до підсилення втрати вологи організмом, до його зневоднювання. Це також ускладнює виконання роботи.

Для проходження деяких процесів важлива не відносна, а абсолютна вологість. Так, випаровування води з поверхні альвеол у легенях залежить від абсолютної вологості повітря, тому що з легенів видихається повітря, майже повністю насичене паром за температури приблизно 30 °С.

*Особливості теплового випромінювання людини.* Частка теплового випромінювання в теплообміні людини з довкіллям досягає 45 %. Інфрачервоне випромінювання різних ділянок поверхні тіла визначається трьома факторами:

- 1) особливостями васкуляризації поверхонь тканин;
- 2) рівнем метаболічних процесів (обміну речовин) у них;
- 3) розходженнями в теплопровідності (пов'язаними з розвитком жирової клітковини).

*Вплив низьких температур.* Холод — лікувальний засіб. Під впливом холоду (лід, сніг) відбувається спазм дрібних судин, знижується нервова збудливість, сповільнюється кровотік, знижується проникність дрібних судин, зменшується інтенсивність виникнення набряків. Кріокомпрес (гр. *kryos* — холод, мороз, лід) зменшує біль при забитих місцях м'яких тканин, суглобів, розтяганнях зв'язок та інших травмах. Із лікувальною метою на шкіру впливають процеду-

рою кріомасажу, що здійснюється з використанням рідкого азоту. Вплив на шкіру здійснюється при цьому за допомогою заповненого рідким азотом кріодеструктора, на якому є тефлонова насадка з температурою від  $-50$  до  $-60$  °С. Для кріогенних методів створюють спеціальні кріогенні апарати.

### **Питання для самоконтролю**

1. Енергетична світимість. Спектр випромінювання тіла.
2. Закон Кірхгофа.
3. Перший закон випромінювання Віна.
4. Другий закон випромінювання Віна.
5. Закон Релея – Джинса.
6. Закон Планка.
7. Закон Стефана – Больцмана.
8. Закон зміщення Віна.
9. Абсолютно чорне, біле і сіре тіла.
10. Застосування теплового випромінювання у медицині. Термографія.

## РОЗДІЛ 11

### АТОМНІ ЯДРА. РАДІОАКТИВНІСТЬ. ЕЛЕМЕНТИ ДОЗИМЕТРІЇ

#### 11.1. Основні властивості атомних ядер

Властивості атомних ядер визначаються їх складом:

- 1) числом протонів  $Z$  і нейтронів  $N$  у ядрі;
- 2) властивостями цих частинок та характером взаємодії між ними;
- 3) відносним розміщенням і рухом протонів і нейтронів усередині ядра.

Протони і нейтрони об'єднані загальною назвою — нуклони;  $A = Z + N$  — число нуклонів у ядрі. Ядра зображають хімічним символом елемента із символами, які зазначають склад ядра, за схемою  ${}^A_ZX_N$ . Приклад:  ${}^{23}_{11}\text{Na}_{12}$  — ядро натрію, що складається з 11 протонів та 12 нейтронів.

На початок 2016 року відомо та вивчено 3211 ядер, з яких 431 є стабільним. Ядра, які мають:

- 1) однакові  $Z$ , але різні  $N$  називають ізотопами;
- 2) однакові  $N$ , але різні  $Z$  називають ізотонами;
- 3) різні  $Z$  та  $N$ , але однакові  $A = Z + N$  — ізобарами.

Нуклід — ядро разом з електронною оболонкою, що нейтралізує його заряд.

Сили, що діють усередині ядра:

1. Електричні сили відштовхування між протонами.
2. Ядерні сили між нуклонами (відштовхування на малих відстанях і притягання на великих).

Ядерне притягання значно перевищує електричне відштовхування. Отже, протони добре утримуються всередині ядра. Вихід із ядра

нуклона можливий лише при одержанні енергії із зовнішнього середовища або спонтанно. У першому випадку відбувається вимушена ядерна реакція, у другому — спонтанний радіоактивний розпад.

Стан нуклона всередині ядра можна характеризувати величиною енергії  $E$ , яку необхідно витратити щоб видалити цей нуклон із ядра. Цю енергію називають енергією зв'язку даного нуклона в ядрі.

Основні характеристики ядер:

1) заряд ( $Z_e$ );

2) маса ( $M$ );

3) дефект маси ( $\Delta M$ ) або енергія зв'язку ( $E = c^2 \Delta M$ );

4) механічний момент (спін  $s$ );

5) магнітний момент ( $\mu$ );

6) спектр можливих енергетичних станів, в яких може міститися ядро даного складу.

Маса ядра  $M$  менша від сумарної маси протонів  $m_p$  і нейтронів  $m_n$ , виміряних у вільному стані окремо від ядра.

Різницю

$$\Delta M = Zm_p + Nm_n - M \quad (11.1)$$

називають дефектом маси ядра. Дефект маси ядра помножений на квадрат швидкості світла  $c^2$  дорівнює енергії, яка виділяється при утворенні ядра або яка необхідна для його руйнування на елементи.

## 11.2. Радіоактивність

Радіоактивність — це невимушений (спонтанний) процес розпаду нестійких (нестабільних) ядер із випромінюванням інших ядер або елементарних частинок.

Існують два типи радіоактивності:

1) природна — у нестійких ядер, які існують у природі (до них відносять елементи, розміщені наприкінці таблиці Менделєєва та

калій); 2) штучна — одержана під час бомбардування ядер протонами, нейтронами, альфа ( $\alpha$ )-частинками.

Принципової різниці між цими видами радіоактивності немає.

*Основні типи радіоактивного розпаду*

Альфа ( $\alpha$ )-розпад — спонтанне перетворення ядра з випромінюванням  $\alpha$ -частинки (ядро гелію  ${}^4_2\text{He}$ ),



X та Y — символи відповідних ядер.

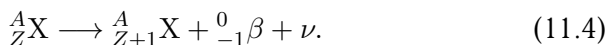
Приклад:



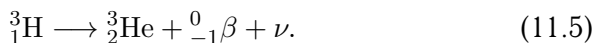
Сумарна маса спокою радону та гелію менша за масу спокою радію (закон, який впливає з релятивістської фізики), отже, така реакція може проходити без зовнішнього впливу, тобто спонтанно.

За такого розпаду утворене ядро може бути у збудженому стані. При переході до основного стану воно випромінює  $\gamma$ -фотон (електромагнітне випромінювання).

Бета ( $\beta$ )-розпад — вилітання з ядра  $\beta$ -частинки (електрона) та нейтральної частинки (нейтрино  $\nu$ ):



Приклад:



При  $\beta$ -розпаді звільняються місця в електронній оболонці атома. На ці місця переходять електрони з більш високих енергетичних рівнів, результатом чого є випромінювання  $\gamma$ -фотонів.

При спонтанному розпаді неможливо передбачити, коли розпадається нестабільне ядро.

Гамма ( $\gamma$ )-розпад — за якого ні число нуклонів у ядрі, ні склад ядра не змінюється. Ядро випромінює електромагнітне випромінювання дуже коротких довжин хвиль  $10^{-10} - 10^{-13}$  м ( $\gamma$ -фотони). Випромінювання  $\gamma$ -фотонів — це перехід ядер зі збудженого стану до основного при зміні положення або русі нуклонів, тобто їх розподілом за атомними рівнями енергії. Енергія  $\gamma$ -фотонів

$$h\nu = E_1 - E_2, \quad (11.6)$$

де  $\nu$  — частота хвилі.

### 11.3. Основний закон радіоактивного розпаду

Число радіоактивних ядер, які ще не розпалися, зменшується з часом за експоненціальним законом:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (11.7)$$

де  $\lambda$  — стала розпаду, пропорційна ймовірності розпаду радіоактивного ядра (для різних радіоактивних речовин вона є різною).

Період піврозпаду  $T$  — час, за який розпадається половина радіоактивних ядер:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,69}{\lambda}. \quad (11.8)$$

Швидкість розпаду (активність) — число частинок або  $\gamma$ -фотонів, які вилітають з речовини за 1 секунду:

$$A = -\frac{dN}{dt}, \quad A = \frac{N \ln 2}{T}. \quad (11.9)$$

### 11.4. Взаємодія радіоактивного випромінювання з речовиною

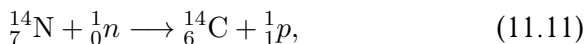
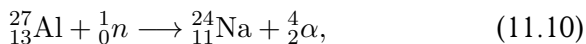
Проходячи крізь речовину,  $\alpha$ -,  $\beta$ -частинки та  $\gamma$ -фотони іонізують атоми, змінюючи стан речовини.

Середня відстань, яку проходить  $\alpha$ -частинка у речовині, залежить від її енергії. У повітрі — це 8 см (тому стінки скляних ампул з радіоактивним препаратом повністю їх поглинають), у живому організмі 10 – 100 мкм. Після того як енергія  $\alpha$ -частинки зменшиться, вона захоплює 2 електрони і перетворюється на атом гелію.

При гальмуванні у речовині  $\beta$ -частинки, крім іонізації породжують ще і гальмівне рентгенівське випромінювання. У тканини організму  $\beta$ -випромінювання проникає на глибину 10 – 15 мм. Унаслідок малої маси здатність іонізації у цих частинок слабша у 100 разів, а середній пробіг у повітрі становить 200 м.

Потік нейтронів, який утворюється при радіоактивному розпаді, теж є іонізуючим випромінюванням. Унаслідок їх взаємодії з ядрами часто утворюються заряджені частинки і  $\gamma$ -випромінювання.

Приклад:



де  ${}_1^1p$  — протон; а  ${}_0^1n$  — нейтрон. Зазначимо, що малі дози радіоактивного випромінювання приводять до значних біологічних порушень. Особливо небезпечним є негативний вплив радіоактивного випромінювання на спадковий апарат клітин (вміст ядра). Для біологічного впливу іонізуючого випромінювання характерним є деякий латентний (схований) період. Іонізуюче випромінювання порушує репродуктивну функцію клітин, отже найбільш чутливими до нього є тканини, які ростуть (організм дитини). З терапевтичною

метою іонізувальне випромінювання використовують для впливу на ріст пухлин (опромінення онкохворих).

### **11.5. Застосування радіонуклідів у медицині**

*Метод помічених атомів.*

В організм вводять радіонукліди та визначають їх активність в органах і тканинах. Наприклад, для діагностики захворювань щитоподібної залози в організм вводять радіоактивний йод  $^{125}_{53}\text{I}$ , частина якого концентрується в ній. Радіоактивний йод випромінює  $\alpha$ -,  $\beta$ -частинки та  $\gamma$ -випромінювання. Радіоактивні частинки та  $\gamma$ -випромінювання реєструють спеціальним пристроєм. За швидкістю зміни інтенсивності випромінювання роблять висновок про процеси, які відбуваються у залозі.

Зазначимо, що рак щитоподібної залози спричиняє метастази, які будуть збагачуватися радіоактивним йодом. Це дає інформацію про розвиток ракової пухлини.

Радіонукліди застосовують для одержання інформації про процеси обміну речовин в організмі. Наприклад, вводячи невелику кількість радіонуклідів у кров за допомогою спеціального пристрою (гамма-топограф), стежать за їх розподілом в організмі людини. Гамма-топограф є сканувальним датчиком, який, проходячи над різними частинами тіла людини, реєструє випромінювання. В організм вводять таку кількість радіоактивної речовини, яка не впливає на його функціонування.

*Застосування іонізувального випромінювання радіонуклідів для лікування (гамма-терапія).*

Важливо зазначити, що заряджені частинки найбільшу іонізацію спричинюють перед зупиненням при гальмуванні, оскільки заряджена частинка більше часу взаємодіє з атомами речовини та ймовірність іонізації зростає. Тому при потраплянні пучка протонів



на біологічний об'єкт ззовні найбільший вплив буде здійснено не на поверхневі шари, а на пухлинні тканини, розміщені всередині організму. Хворого опромінюють вузьким пучком радіовипромінювання для руйнування глибоких пухлин. Інший спосіб — у пухлину вводять ядра і під дією нейтронів спричиняють атомну реакцію, продуктом якої є  $\alpha$ -частинки. Радіоактивний препарат вводять у пухлину за допомогою голки. Після введення препарату пухлину опромінюють потоком нейтронів, які спричиняють ядерну реакцію всередині пухлини. Утворені  $\alpha$ -частинки руйнують пухлину.

### 11.6. Доза опромінювання

Доза опромінювання  $D$  (Грей) — відношення енергії, яка була передана об'єму речовини, до маси цього об'єму.

Поглинена доза (Рад) — це частина дози опромінювання, яка була поглинута тілом. Вона залежить від часу опромінювання, типу іонізуючого випромінювання, складу речовини тіла і т. п.

Оскільки оцінити поглинену дозу досить складно, то в реальному експерименті використовують так звану експозиційну дозу  $X$ , яка є мірою іонізації повітря, що оточує тіло,  $\gamma$ -випромінюванням (вимірюється в рентгенах (Р)):

$$D = fX, \quad (11.12)$$

де  $f$  — коефіцієнт, який визначається за таблицею. Для м'яких тканин людини  $f = 1$ .

Зазначимо, що найбільш небезпечним для біологічного об'єкта є  $\alpha$ -випромінювання. За експериментальними даними створена так звана Таблиця якості опромінювання, з якої визначається коефіцієнт якості  $K$ . Наприклад, для рентгенівського випромінювання  $K = 1$ , для  $\alpha$ -випромінювання  $K = 20$  за однакової дози ви-

202 Розд. 11. Атомні ядра. Радіоактивність. Елементи дозиметрії промінювання  $D$ .

Отже, вводять ще одну одиницю вимірювання опромінювання — еквівалентна доза  $H$ , яка дає уявлення про біологічну дію іонізуючого випромінювання (вимірюється в зівертах (Зв) або берах (бер)):

$$H = DK. \quad (11.13)$$

Природні радіоактивні джерела (сонце, радіоактивність Землі, радіоактивні елементи організму) створюють радіоактивний фон 125 мбер.

Гранична допустима доза одержана людиною впродовж 1 року становить 5 бер. Мінімальна летальна доза від  $\gamma$ -випромінювання — 600 бер.

### **11.7. Захист від радіоактивного випромінювання**

1. Повітря цілком затримує  $\alpha$ -випромінювання (навіть лист паперу є непроникним для нього). Але можливе потрапляння  $\alpha$ -частинок в організм при диханні або з їжею.
2.  $\beta$ -випромінювання затримується перепонами з алюмінію, скла і т. п. в декілька сантиметрів. Але необхідно враховувати, що  $\beta$ -випромінювання — це потік електронів, які при потрапленні на перепону з великою швидкістю гальмуються і випромінюють  $\gamma$ -фотони.
3. Рентгенівське,  $\gamma$ -випромінювання та потік нейтронів — це так зване "нейтральне" випромінювання, яке менше взаємодіє з частинками речовини і відповідно глибше проникає в неї. Для захисту використовують речовини, які складаються з елементів з великим  $Z$ .

## 11.8. Природний радіоактивний фон Землі

На біосферу Землі безперервно діє космічне випромінювання, а також потоки  $\alpha$ -,  $\beta$ -частинок та  $\gamma$ -фотонів унаслідок випромінювання радіонуклідів, розсіяних у земній корі, воді, підземних джерелах, річках, морях, у повітрі. Крім того, радіонукліди входять до складу живих організмів. Сукупність випромінювань цих радіоактивних джерел називають **природним радіоактивним фоном**. Найбільш поширені на Землі радіонукліди:  $^{220}\text{Rn}$ ,  $^{222}\text{Rn}$ ,  $^{40}\text{K}$ , а також радіонукліди, що складають ряди урану.

Радіаційний фон Землі визначається в основному такими природними джерелами:

- $^{220}\text{Rn}$ ,  $^{222}\text{Rn}$  — 50 %;
- $^{40}\text{K}$  — 15 %;
- космічні промені — 15 %;
- нукліди урану — 20 %.

Ізотоп радону  $^{222}\text{Rn}$  дає  $\alpha$ -випромінювання з енергією 5,5 МеВ на нуклон, яке супроводжується випромінюванням  $\gamma$ -фотонів з енергією 0,5 МеВ.

У масі стабільного К міститься 0,01 % ізотопу  $^{40}\text{K}$ , ядра якого розпадаються з утворенням  $^{40}\text{Ca}$ ,  $\beta$ - та  $\gamma$ -випромінювання. Цей ізотоп міститься в ґрунті, добривах, головному та кістковому мозку, м'язах, селезінці. В організмі людини міститься 0,3 % К і відповідно 0,0003 % радіоактивного ізотопу  $^{40}\text{K}$  (на 70 кг – 0,021 г). Оскільки період піврозпаду (час, за який розпадається половина ядер) становить  $1,3 \cdot 10^9$  років, то, розраховуючи кількість радіоактивних ядер на 0,021 г, можна побачити, що в організмі кожен секунду розпадається 50000 ядер  $^{40}\text{K}$ . Проте це не є небезпечним для людини, а, швидше за все, необхідним для нормального розвитку організму.

Космічні промені виникають унаслідок міжзоряних, галактичних подій та активності Сонця. Космічне випромінювання складається із потоків протонів високих енергій,  $\alpha$ -частинок, ядер деяких елементів, потоків електронів, фотонів, нейтронів. Магнітне поле Землі відхиляє низькоенергетичні заряджені частинки до полюсів (полярні сяйва). Частинки високих енергій, взаємодіючи з атмосферою, утворюють у результаті ядерних реакцій цілу низку радіонуклідів  $^3\text{H}$ ,  $^{22}\text{Na}$  тощо та потоки нейтронів та протонів. Ці потоки, які називають вторинним космічним випромінюванням, проникають у нижні шари атмосфери. На біосферу діє іонізуючий компонент даного випромінювання. Воно дає 2 – 3 іонізації в  $1\text{ см}^3$  повітря за 1 секунду на рівні моря і вдвічі — тричі більше у горах.

*Діапазон еквівалентних доз для людини від природних джерел, які утворюють радіоактивний фон (мкЗв за 1 рік):*

Зовнішнє опромінювання:

- 1) космічні промені — 300;
- 2)  $^{40}\text{K}$  — 120;
- 3)  $^{238}\text{U}$  та ізотопи — 280.

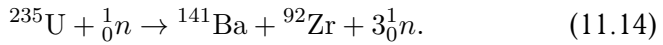
Внутрішнє опромінювання:

- 1)  $^{40}\text{K}$  — 180;
- 2)  $^{222}\text{Rn}$  та ізотопи — 800.

Однак радіаційний фон залежно від місцезнаходження, пори року, наявності промислових підприємств тощо може істотно змінюватися у значних діапазонах. Так, у містах потужність дози фонового випромінювання становить у середньому 20 мкР/час і може змінюватися вдвічі залежно від району.

Причина такого порушення — активна (деструктивна) діяльність людини. Найбільш небезпечними є викиди радіоактивних частинок при ядерних вибухах та при експлуатації АЕС. В основі ядерних вибухів та роботи АЕС лежить явище поділу ядер, напри-

клад, ізотопу урану  $^{235}\text{U}$  при бомбардуванні його швидкими нейтронами. Внаслідок цього ядра урану розпадаються на дві частинки, при цьому випромінюються декілька нейтронів:



Важливо зазначити, що при поділі урану вивільняється величезна кількість енергії, оскільки маса ядра  $^{235}\text{U}$  більша за сумарну масу осколків поділу  $^{141}\text{Ba} + ^{92}\text{Zr}$ . При цьому виділяється 2 або 3 нейтрони, які здатні спричинити подальший поділ ядер (сусідніх), тобто виникає ланцюжкова реакція. Важливим показником є коефіцієнт розмноження нейтронів  $f_n$ : середнє число нейтронів у кожному акті поділу, що приводить до поділу інших ядер. Якщо  $f_n = 1$ , то проходить реакція, яка підтримує себе; при  $f_n > 1$  процес називають надкритичним (може спричинити ядерний вибух). Мінімальну масу речовини, яка ділиться внаслідок ядерної реакції і яка необхідна для виконання умови  $f_n > 1$ , називають критичною масою  $M_{cr}$ <sup>5</sup>.

Різниця між процесами в атомному реакторі та атомній бомбі полягає у швидкості вивільнення енергії: у реакторі  $f_n$  є меншим, але близьким до 1, в атомній бомбі  $f_n > 1$ , унаслідок цього атомна реакція проходить дуже швидко і відбувається вибух. Для цього маса ядерного палива повинна перевищувати  $M_{cr}$ . Для урану  $M_{cr} \approx 50$  кг. В епіцентрі вибуху розвивається величезна температура  $10^5$  К та тиск  $10^{12}$  атм. Це приводить до сукупності складних фізичних процесів: речовина перетворюється на плазму (високоенергетичні електрони), виникає потужний потік нейтронів та  $\gamma$ -випромінювання (1 % від усієї енергії, яка виділяється внаслідок реакції). Ці потоки є небезпечними для людини на відстані

---

<sup>5</sup>Термін "критична маса", який означає перехід процесу в іншу якість, використовується у медицині, наприклад "критична маса міокарда", при виникненні особливо небезпечних аритмій серця.

декількох сотень метрів. У повітрі виникає ударна хвиля, тобто фронт високого тиску, яка спричинює руйнування радіусом 1 км. У центрі вибуху на декілька секунд виникає світлова куля радіусом приблизно 150 м. За час світіння приблизно 10 – 20 % енергії вибуху переходить у світло: виникають пожари та опіки. Крім того, виникає інтенсивне радіаційне випромінювання, джерелом якого є осколки поділу ядерного пального — нестабільні ізотони з кількістю протонів  $Z$  від 30 до 60. Розріджене нагріте повітря піднімає вгору продукти розпаду на висоту до 50 км, після цього хмара може поширитися на декілька тисяч кілометрів. Радіоактивні частинки випадають на поверхню Землі, утворюючи радіоактивний слід. Оцінювання ступеня небезпеки цих частинок можна визначити за активністю препарату  $A$ :

$$A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}, \quad (11.15)$$

де  $\Delta N$  — кількість ядер, що розпадається за час  $\Delta t$ . Активність радіоактивної речовини зменшується за законом

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}, \quad (11.16)$$

де  $\lambda$  — стала радіоактивного розпаду;  $N_0$  — початкова кількість ядер.

Ізотопи, які потрапили до організму людини, можуть накопичуватися, спричинюючи порушення його діяльності. Так,  $^{131}\text{I}$  (період піврозпаду 8 тижнів із випромінюванням  $\gamma$ -фотонів) накопичується у щитоподібній залозі і вже 0,35 мг цього ізотопу є небезпечним для людини. Ізотоп  $^{90}\text{Sr}$  (період піврозпаду 28 років із випромінюванням  $\beta$ -частинок) накопичується у кісткових тканинах, а ізотоп  $^{137}\text{Cs}$  рівномірно розподіляється у клітинах організму. Особливо небезпечні підвищенні дози радіоактивного випромінювання для

кровоносної та травної систем, залоз внутрішньої секреції.

### **Питання для самоконтролю**

1. Будова ядра та атома.
2. Сили, що діють всередині ядра.
3. Основні характеристики ядер.
4. Типи радіоактивності.
5.  $\alpha$ -розпад.
6.  $\beta$ -розпад.
7.  $\gamma$ -розпад.
8. Основний закон радіоактивного розпаду.
9. Взаємодія радіоактивного випромінювання із речовиною. Захист від радіоактивного випромінювання.
10. Застосування радіонуклідів та іонізуючого випромінювання в медицині.

## Список використаної та рекомендованої літератури

1. Ремизов А. Н. Медицинская и биологическая физика / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина, А. Я. Потапенко. – Москва : Дрофа, 2003. – 560 с.
2. Ремизов А. Н. Сборник задач по медицинской и биологической физике / А. Н. Ремизов, А. Г. Максина. – Москва : Дрофа, 2001. – 192 с.
3. Варфоломеев Н. М. Международная система единиц измерения: практическое справочное руководство / Н. М. Варфоломеев, З. А. Матысина, В. П. Милюков, А. И. Шкодина. – Киев : Урожай, 1964. – 88 с.
4. Ляшенко Я. О. Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 1. Механіка. Термодинаміка. Електростатика / Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко. – Суми : Сумський державний університет, 2013. – 224 с.
5. Збірник задач з фізики з прикладами розв'язання : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 2. Електричний струм. Магнітне поле. Оптика. Радіоактивність / А. В. Дворниченко, Я. О. Ляшенко, О. В. Хоменко, Г. С. Корнющенко. – Суми : Сумський державний університет, 2015. – 230 с.
6. Корнющенко Г. С. Медична та біологічна фізика: практикум : навч. посіб. : у 2 ч. Частина 1 / Г. С. Корнющенко, У. С. Швець, Л. Ф. Суходуб. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 186 с.



Навчальне видання

**Князь** Ігор Олександрович  
**Ляшенко** Яків Олександрович

**Посібник до лекційних і практичних занять із предмету  
"Медична та біологічна фізика"**

Навчальний посібник

Суми: Видавництво СумДПУ, 2018 р.  
Свідоцтво ДК № 231 від 02.11.2000 р.

Комп'ютерне верстання: *Я. О. Ляшенко, І. О. Князь*

Художнє оформлення обкладинки: *І. О. Князь*

Редактори: *Н. З. Клочко, С. М. Симоненко*

Здано в набір 01.11.17. Підписано до друку 07.05.18.

Формат 60x84/16. Гарн. Times New Roman. Друк офсет. Папір офсет.

Ум. друк. арк. 12,09. Обл. вид. арк. 10,86.

Тираж 300 пр. Вид. № 36.

Видавництво СумДПУ імені А. С. Макаренка  
40002, м. Суми, вул. Роменська, 87

Виготовлено на обладнанні СумДПУ імені А. С. Макаренка