Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Підручник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2017

УДК 510.589(075.8)
М34

Авторський колектив:
Є. А. Лавров, доктор технічних наук, професор;
Л. П. Перхун, кандидат технічних наук, доцент;
В. В. Шендрик, кандидат технічних наук, доцент;
Е. Г. Кузнєцов, кандидат технічних наук;
Ю. В. Парфененко, кандидат технічних наук;
В. А. Сергієнко

Рецензенти:
В. А. Кадієвський – доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри економічної кібернетики Національної академії статистики, обліку та аудиту (м. Київ);
І. К. Кириченко – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та комп'ютерних технологій Української інженерно-педагогічної академії (м. Харків);
В. В. Коваль – доктор технічних наук, професор, директор Українського навчально-наукового інституту інформаційного і телекомунікаційного забезпечення агропромислової та природоохоронної галузей економіки Національного університету біоресурсів і природокористування (м. Київ)

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як підручник
(протокол № 6 від 18 грудня 2014 року)

Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров,
М34 Л. П. Перхун, В. В. Шендрик та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 212 с.
ISBN 978-966-657-730-9

У підручнику розглядаються питання лінійного та нелінійного програмування, двоїстості у лінійному програмуванні, постоптимального аналізу, а також розв'язування класичних задач математичного програмування, зокрема засобами табличного процесора Excel.

Підручник призначений для студентів закладів вищої освіти, які вивчають дисципліну «Математичні методи дослідження операцій». Теоретичні питання доповнюються прикладами розв'язування дослідження операцій. Кожний розділ підручника містить задачі для самостійного розв'язування, а також питання для самоперевірки. Підручник може використовуватися для підготовки до лабораторних занять, а також самостійного вивчення дисципліни.

УДК 510.589(075.8)

ISBN 978-966-657-730-9

ЗМІСТ

С.

ВСТУП

У своєму житті людина часто стикається із ситуацією, коли їй з певної сукупності можливих варіантів своєї поведінки або прийняття рішення необхідно вибрати один варіант. Необхідність прийняття рішень така ж давня, як і саме людство. Впродовж століть люди, намагаючись здійснити свої наміри, розмірковували над їх можливими наслідками і ухвалювали рішення, підбираючи тим чи іншим способом залежні від їх діяльності параметри, щоб одержати найкращий результат. До певного часу рішення могли ухвалюватися без спеціального математичного аналізу, на підставі досвіду та здорового глузду. Такий спосіб прийняття рішень не втратив свого значення і на сьогодні.

Швидкий розвиток та ускладнення техніки, збільшення масштабів та вартості здійснюваних заходів, широке впровадження автоматизації в сферу управління будь-якою діяльністю – все це приводить до необхідності наукового аналізу складних цілеспрямованих процесів із метою удосконалення структури та організації їх діяльності для підвищення ефективності. Пошук оптимального (найкращого за тим чи іншим критерієм) рішення передбачає побудову математичної моделі і використання для її аналізу певного математичного апарату.

Для цього застосовують спеціальні наукові методи, що об’єднані спільною назвою «дослідження операцій».

Як самостійний науковий напрям «дослідження операцій» виникло та одержало свою назву під час Другої світової війни для вирішення проблем та найкращої організації бойових дій, а також прогнозування їх наслідків. За допомогою методів дослідження операцій планували стратегічні та тактичні операції в умовах неповноти знань про стан збройних сил противника.

Після Другої світової війни методи дослідження операцій дістали широкого застосування під час планування науково-дослідних робіт, проектування різних об’єктів, управління виробничими та технологічними процесами, прогнозування розвитку промисловості.

Дослідження операцій – комплексна наукова дисципліна, що застосовує наукові принципи, математичні, кількісні методи для обґрунтування «рішень у всіх областях цілеспрямованої людської діяльності». Основним завданням цієї науки є «пошук кращих або хоча б задовільних шляхів досягнення поставленої мети». Головний метод дослідження операцій – системний аналіз цілеспрямованих дій (операцій) і об’єктивне порівняльне оцінювання можливих результатів цих дій. Таким чином, суть задач дослідження операцій полягає у пошуку шляхів раціонального використання наявних ресурсів для реалізації поставленої мети.

Математичного застосування методи дослідження операцій набувають під час вирішення багатьох завдань, зокрема економічних, у будь-якій сфері людської діяльності.

Цей підручник укладено для студентів вищих навчальних закладів. У системі підготовки бакалаврів дисципліна «Математичні методи дослідження операцій» внесена до циклу професійної підготовки бакалаврів за напрямом

122 – Комп’ютерні науки – і безпосередньо пов’язана з дисциплінами «Вища математика», «Дискретна математика», «Організація та обробка електронної інформації», «Програмування», «Алгоритми і структрури даних», «Чисельні методи».

Предметом вивчення дисципліни «Математичні методи дослідження операцій» є математичні властивості та закономірності пошуку екстремуму функцій, методи та алгоритми оптимізації.

Метою вищезазначеної навчальної дисципліни є забезпечення базової професійної підготовки з питань використання сучасних математичних методів та програмних засобів розв’язання задач дослідження операцій, а також оволодіння практичними вміннями та набуття навичок у застосуванні математичних методів дослідження операцій для вирішення практичних завдань певних галузей науки і техніки.

У процесі вивчення дисципліни у студентів повинні сформуватися теоретичні знання та практичні навички щодо одержання розв’язків та аналізу результатів.

Завданнями курсу є:

– ознайомлення з різними напрямами та методологією дослідження операцій;
– навчання майбутніх фахівців використанню математичних, тобто кількісних, методів для обґрунтування рішень у всіх галузях цілеспрямованої діяльності;
– формування теоретичних знань та набуття практичних навичок для формалізації завдань, що виникають у різних сферах людської діяльності;
– розвинення навичок математичного моделювання;
– розглядання широкого кола задач, пов’язаних із пошуком оптимальних рішень, що стосуються всіх областей людської діяльності.

Після засвоєння матеріалу навчальної дисципліни студент повинен:

а) знати:

- на ознайомлювально-орієнтованому рівні:
  основні особливості методів дослідження операцій, умови їх правильного використання, можливості адаптації до конкретних завдань певних галузей науки і техніки;
- на понятійно-аналітичному рівні:
  набувати вмінь вибирати та застосовувати вивчені методи та програмні засоби для розв'язання конкретних прикладних завдань, забезпечувати необхідні умови їх застосування з погляду використовуваних ресурсів, оцінювати та аналізувати результати.

б) уміти:

- на діагностичному рівні:
  формалізувати завдання прийняття рішень в своїй галузі, обґрунтовано вибирати відповідний метод дослідження оперцій залежно від структури математичної моделі, грамотно застосовувати методи для вирішення практичних задач.

- на евристичному рівні:
  самостійно вирішувати поставлені завдання професійної діяльності із залученням сучасних методів дослідження операцій, спеціалізованої методичної та наукової літератури, використанням сучасного програмного забезпечення.

У підручнику розглядаються лінійне, нелінійне, динамічне, дискретне та стохастичне програмування, а також чисельні методи оптимізації та класичні задачі дослідження операцій.

Підручник містить велику кількість прикладів розв'язання різних класів задач дослідження операцій. Матеріали супроводжуються не лише прикладами, а й питаннями для самостійної роботи та самоперевірки. Приклади розв'язання задач наводяться при викладанні теоретичних відомостей, а завдання для самостійної роботи – у кінці кожної теми.

Основу цього підручника складають навчальний посібник авторів [23] та конспект лекцій [24].

Сподіваємось, що підручник буде корисним всім, хто вивчає основи моделювання технологічних, виробничих, економічних та інших процесів людської діяльності та цікавиться можливими шляхами розв'язання складних моделей із застосуванням комп'ютерних розрахунків.

РОЗДІЛ 1
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

1.1. Основні поняття і визначення. Методика проведення дослідження операцій

Термін **«дослідження операцій»** уперше виник в англомовній літературі у 1939 р. у Великобританії. Однак зачатки наукового мислення, характерного для дослідження операцій, з'явилися набагато раніше.

Перші, досить примітивні моделі математичного програмування були запропоновані ще у 1759 р. Куїсні та у 1874 р. Вальрасом. Більш складні економічні моделі були представлені у 1937 р. фон Нейманом та у 1939 р. Канторовичем. Математичні основи лінійного програмування успішно розроблялися ще Жорданом (1873 р.), Мінковським (1896 р.) і Фаркашем (1903 р.). Ґрунтовні результати з динамічного програмування було одержано Марковим (1856–1922 рр.). У 20-х рр. ХХ століття з'явилися перші публікації Ерланга з дослідження систем масового обслуговування

Різні вчені по-різному подають основні визначення понять, пов'язаних із дослідженням операцій. Наведені нижче поняття можна використовувати в різноманітних дослідженнях, але для кожного конкретного випадку вони потребують відповідної інтерпретації, яка відображає суть явищ, що вивчаються.

Дослідження операцій (ДО) – це використання математичних, кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх сферах цілеспрямованої людської діяльності.

Дослідження операцій (ДО) – це застосування математичних методів для моделювання систем та аналізу їх характеристик.

Операція – це дія або сукупність дій, підпорядкованих єдиному задуму та спрямованих на досягнення певної мети, яка має характер повторюваності, тобто багаторазовості.

Операція має дві особливості – ***цілеспрямованість*** і ***повторюваність***. До того часу, доки мета не визначена, не існує й операції. Якщо ж мета визначена та існують різні шляхи, щоб її досягти, то бажано знайти найкращий із них. Повторюваність припускає встановлення закономірностей. Звідси виникає можливість проводити дослідження, які стосуються кількісних сторін операції.

Операції можна вивчати в процесі дослідження як оригіналів, так і моделей операцій.

Оперувальна сторона – сукупність осіб і технічних пристроїв, які прагнуть у цій операції досягти певної мети. В операції можуть брати участь одна чи кілька оперувальних сторін, які часто ставлять перед собою різні цілі. Залежно від масштабів операції та характеру своєї участі у ній, оперувальна сторона може сама формулювати собі цілі або одержувати їх із зовні. Для досягнення мети оперувальна сторона має у розпорядженні певний запас активних засобів (ресурсів), використовуючи які вона керує операцією.

Оперувальна сторона повинна мати певну свободу вибору активних засобів і здатність впливати на розвиток подій.

Цілеспрямованість операції можлива лише у тому разі, якщо нею можна управляти, тобто її результат залежить від деяких **керованих параметрів**. Сукупність значень керованих параметрів визначають як **рішення, одержане в результаті дослідження операцій**. Рішення можна одержати різними способами, із різною мірою точності, з різними припущеннями щодо властивостей неконтрольованих факторів, але незалежно від цього вони повинні розглядатися лише як допоміжний матеріал, що потребує осмислення і зіставлення для остаточного прийняття рішення. Рішення, які знаходяться за допомогою моделі операції, дають можливість оперувальній стороні орієнтуватися у зовнішньому оточенні, вносити уточнення до моделі, аналізувати різні стратегії, виявляти другорядні чинники розглядуваної операції.

Дослідити операцію – означає знайти оптимальне рішення за наявності обмежень економічного, технічного характеру тощо.

Оптимальними вважають ті рішення, які з тих чи інших міркувань кращі за інші.

Отже, **мета дослідження операцій** – попереднє кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

Ефективність операції – кількісно виражається у вигляді критерію ефективності – цільової функції.

Для застосування кількісних методів дослідження потрібно побудувати **математичну модель операції**.

Реальні явища, які трапляються на практиці у реальному житті, настільки складні, що в процесі їх аналізу часто доводиться відмовлятися від неістотних, другорядних ознак та розробляти новий, можливо, ідеальний, образ, в якому враховано суттєві сторони цих явищ. Цей образ, що відбиває реальну операцію, називають її моделлю.

Таким чином, **модель** – такий матеріальний або уявно зображуваний об’єкт, який у процесі пізнання (вивчення) замінює оригінал, але зберігає деякі важливі для цього дослідження типові риси. Модель доступніша для дослідження, ніж реальна операція. Крім того, певні реальні операції неможливо вивчати безпосередньо, наприклад, раціональні способи використання нового ракетного комплексу або експерименти над економікою країни, де є ризик привести операцію у необоротний стан тощо. Інше, не менш важливе призначення моделі, полягає в тому, що за її допомогою можна виявляти найістотніші фактори, які формують ті чи інші властивості операції. За допомогою моделі можна також навчатися правильного керування операцією, випробовуючи різні варіанти керування на її моделях.

Отже, модель потрібна у таких випадках:

- щоб зрозуміти структуру конкретної операції, її основні властивості, закони розвитку та взаємодії із зовнішнім оточенням;
- щоб керувати операцією та визначати найкращі способи керування при заданих цілях і критеріях;

- щоб складати прогноз про прямі та непрямі наслідки реалізації заданих способів та форм дій на операцію.

Залежно від засобів моделювання моделі можна поділити на абстрактні (концептуальні) та матеріальні (фізичні). Математичні моделі належать до абстрактних.

Математична модель – система математичних виразів, що описують характеристики об'єкта моделювання та взаємозв'язки між ними.

За ступенем відповідності оригіналу моделі поділяють на ***ізоморфні*** та ***гомоморфні***. Ізоморфні моделі строго відповідають оригіналу і подають про нього вичерпну інформацію. Для складних операцій модель можна побудувати лише після спрощених припущень. Моделі, які відбивають лише найсуттєві властивості оригіналу, називають гомоморфними.

Якість розроблюваних моделей значною мірою залежить від досвіду, інтуїції, а також творчих здібностей дослідника. Неможливо запропонувати готові алгоритми, як будувати модель у тій або іншій конкретній ситуації. Але існують деякі загальні принципи побудови моделей:

1. Вивчення та аналіз причинно-наслідкових зв'язків.
2. Використання аналогій.
3. Проведення експериментів для виявлення та вивчення істотних змінних.

Математична модель перетворює операцію дослідження в ідеальний образ, подає нову (можливо й не нову) інформацію про цю операцію. Вона є найзагальнішим методом дослідження, який найширше використовують.

Під час побудови математичної моделі вихідними будуть лише ті властивості операції, які можна описати кількісно, і лише ті зв'язки між властивостями, що піддаються опису мовою математики. Властивості операції, що піддаються чисельному оцінюванню, називають її параметрами, або характеристиками.

Розрізняють моделі ***детерміновані, ймовірнісні та ігрові***.

Математичні моделі можуть бути дуже складними, але, враховуючи те, що вони записуються формальною (математичною) мовою, їх можна досліджувати за допомогою математичних методів та комп'ютерів.

Успішне використання дослідження операцій у теоретичних та практичних дослідженнях будь-яких систем можливе за умови існування чотирьох взаємозв'язаних факторів:

- методів конструювання оптимізаційних моделей;
- методів розв'язування оптимізаційних задач;
- методів якісного математичного аналізу;
- методів інформаційного забезпечення.

Методика і провідні принципи дослідження операцій не є універсальними. Кожне дослідження має свої особливості і потребує від дослідника інтуїції, ініціативи та уявлення, щоб правильно визначити цілі та досягти успіху в дослідженні.

Основні етапи, які є характерними для дослідження операцій, містять:

1. Визначення цілей.

2. Складання плану розроблення проекту, операції.
3. Формулювання проблем.
4. Побудову математичної моделі.
5. Розроблення обчислювального методу.
6. Розроблення технічного завдання на програмування, програмування та налагодження програми.
7. Збирання даних.
8. Перевірку моделі.
9. Постоптимальний аналіз.
10. Реалізацію результатів.

Розглянемо їх детальніше.

Першочергова мета будь-якого дослідження операцій полягає в тому, щоб з'ясувати, що очікує одержати оперувальна сторона (керівник операції) в результаті її проведення, тобто, які передбачувані результати проведення операції можна очікувати.

Цілі дослідження потрібно формулювати, виходячи із суті рішення або рішення, на яке орієнтована ця робота. Цілі не варто формулювати ані занадто вузько, ані занадто широко. Неправильне і неточне формулювання цілей може призвести дослідників до вирішення неправильно поставленого завдання.

Другий етап дослідження полягає у ***складанні плану виконання проекту операції***, тобто в установленні необхідних термінів завершення певних видів робіт. Це – одна з форм контролю за ходом розроблення проекту. Як документ план розроблення проекту операції являє собою календарний графік виконання його етапів. Етапи можуть деталізуватися до рівня окремих завдань. Наприклад, етап розроблення обчислювального методу може мати такі завдання: розроблення методу розв'язання для кожної підмоделі задачі, опис і документальне оформлення методів розв'язання; перевірку запропонованих методів на вибраних задачах невеликої розмірності; внесення уточнень та змін щодо методів розв'язання на підставі результатів пробних розрахунків тощо. Під час складання плану треба також приділяти увагу розподілу робіт між окремими виконавцями.

Формулювання проблеми – наступний етап дослідження операцій. Він містить не лише обговорення з оперувальною стороною (керівником операції) цілей дослідження, а й збирання даних, що дають можливість уявити суть проблеми, що мала місце в минулому, чого потрібно очікувати у майбутньому, який характер співвідношень між змінними досліджуваної задачі. На підставі цих результатів формулюється загальна схема побудови моделі і визначається напрям усієї подальшої роботи.

На цьому етапі виконується дослідження тієї предметної області, де виникла проблема. У результаті разом із формулюванням проблеми – мети операційного дослідження – повинні бути визначені можливі альтернативи рішення проблеми та встановлені вимоги, обмеження, що накладаються на можливі рішення.

Перше питання, пов'язане з формулюванням проблеми, є визначенням того, чи можна усю проблему подати у вигляді окремих підпроблем, щоб паралельно або послідовно дослідити їх незалежно одна від одної (тобто виконати декомпозицію). Друге питання пов'язане з визначенням ступені деталізації моделі, що розробляється. Останнє залежить від обсягів виділених коштів, календарного плану розроблення проекту, цілі дослідження.

Наступна фаза стосується сфери застосування та розмірності розроблюваної моделі, визначення керованих і некерованих змінних, технологічних параметрів операції, показників ефективності, які нададуть можливість оцінити конкретні рішення розглянутої проблеми.

Четвертий етап дослідження пов’язаний із ***побудовою математичної моделі***. Вона відображає взаємозв’язок між керованими змінними, некерованими змінними, технологічними параметрами і показниками ефективності. Правильно побудована модель – основна умова успішного розроблення проекту операції.

Перед початком розроблення моделі насамперед треба з’ясувати питання про можливість використання тих чи інших показників і співвідношень у рамках моделі. Існує декілька різних типів співвідношень, що формують модель: співвідношення, які виходять із визначень, емпіричні співвідношення, нормативні співвідношення. Крім того, потрібно зібрати та ретельно проаналізувати великий обсяг даних.

На кінцевому етапі побудови моделі досліднику треба подати точне аналітичне формулювання досліджуваної проблеми.

Разом із роботою з побудови моделі необхідно вибрати або ***розробити обчислювальний метод розв’язання***. Для цього необхідно з’ясувати такі моменти:

- чи треба використовувати імітаційне моделювання або будь-який із методів оптимізації;
- чи повинна модель враховувати випадковий характер деяких змінних або ж достатньо використовувати детермінований підхід;
- чи треба враховувати нелінійність певних співвідношень, чи достатньо обмежитися їх лінійною апроксимацією;
- чи можна використовувати існуючі методи розв’язання або необхідно розробити новий метод.

Отже, необхідно з’ясувати, які треба зробити припущення та який метод розробити, щоб застосування моделі було практично виправданим відносно використовуваних обчислювальних процедур. Цей етап також містить перевірку запропонованого чисельного методу для невеликих тестових задач, перевіряється можливість використання і коректність розроблених методів розв’язання.

Створення програм для комп’ютера у багатьох випадках є складовою частиною операційного дослідження. ***Розроблення технічного завдання на програмування*** повинно виконуватися ретельно, що дасть можливість забезпечити більш якісне документальне оформлення програм, завдяки чому дослідження стає значною мірою орієнтованим на користувача, на задоволення його потреб. Необхідно звернути увагу на одну з робіт, яка проводиться на цьому етапі, складання вхідних форм та вихідних (документів), їх обговорення та узгодження з керівництвом, керівним персоналом.

Вхідні форми – бази даних, що дають можливість забезпечити користувача інформацією, яка швидко підготовлюється і легко оновлюється. Зрозумілі вихідні форми повинні дати користувачу зрозумілу, добре підібрану та зручно розміщену інформацію.

Що стосується саме програмування і налагодження, то в багатьох випадках проект із дослідження операцій не потребує розроблення машинних програм, а за потреби завжди можна використовувати існуючі програми.

На наступному етапі здійснюється ***збирання та аналіз даних***, які є необхідними для перевірки правильності моделі та практичного застосування результатів дослідження операцій. На попередніх етапах збирання даних мало на меті цілі, пов'язані, насамперед, із формулюванням проблеми та побудовою моделі. Тому проблема відсутності даних не є перешкодою до виконання продуктивних операційних досліджень, оскільки математична модель є засобом, який дозволяє обійти труднощі одержання відповідних результатів оцінювань шляхом зведення їх до більш простих вимірювань.

Використання моделей, розроблених під час дослідження операцій, допомагає в процесі прийняття рішень. Вирішення проблеми зводиться до найпростіших вимірювань, встановлення вихідних змінних і показників ефективності, які є функціями цих змінних. У цьому разі може бути потрібно більше даних, але одержати їх значно простіше, а вимоги до їх точності будуть менш жорсткими.

Етап ***перевірки моделі*** складається із двох фаз: визначення способів перевірки і здійснення самої перевірки. На першій – вибираються аналітичні та експериментальні методи перевірки несуперечності, чутливості, адекватності та роботоздатності моделі. Для здійснення перевірки моделі будуть необхідні дані, які одержані на попередньому етапі. Результати цієї роботи можуть призвести до необхідності перебудови моделі відповідно до складання нових програм.

Етап перевірки моделі передбачає оцінювання побудованої моделі з точки зору можливості її впровадження у життя. Практичне застосування одержують ті моделі, що визнані адекватними.

Перевірити адекватність моделі – це означає виявити, наскільки правильно модель описує реальні процеси, які відбуваються у досліджуваній системі. Тобто властивості, функції, параметри, характеристики тощо реального об'єкта і побудованої моделі повинні збігатися (з певною точністю).

Звичайно аналіз описаних характеристик повинен відбуватися крізь призму цільового призначення пошуку рішення поставленої раніше задачі дослідження операцій.

Формальним загальноприйнятим методом перевірки адекватності вважається порівняння одержаних результатів поведінки моделі з відомими раніше модельними рішеннями або поведінкою реальної системи.

У певних випадках, коли неможливо застосувати зазначену формальну методику, порівнюють математичну та імітаційну моделі системи.

На цьому етапі необхідно враховувати можливі похибки числової реалізації математичної моделі. Доцільно наголосити, що точність розрахунків повинна бути адекватною точності вхідних експериментальних даних.

Якщо аналіз адекватності моделі не показав бажаних результатів, то можливі такі види корегування:

– додатковий аналіз факторів, що впливають на досліджувану проблему;
– перехід до інших видів залежностей;
– зміна кількості обмежень.

Етап постоптимального аналізу є досить важливим кроком, оскільки на практиці під час побудови математичної моделі проблемної ситуації досить часто використовують наближені значення параметрів. Цей етап можна реалізувати лише після одержання оптимального розв'язання задачі. У межах постоптимального аналізу досліджують чутливість оптимального розв'язку до різноманітних змін початкових умов моделі.

На ***етапі реалізації результатів***, останньому етапі операційного дослідження, одержані результати необхідно подати рядом робочих процедур, які можна легко зрозуміти і застосувати оперувальній стороні. Його можна розглядати як самостійну задачу.

1.2. Загальна постановка задачі дослідження операцій

Задачі дослідження операцій, які є об'єктом математичних методів, це, як правило, задачі на знаходження екстремальних значень деяких функціональних залежностей. Кожна операція проводиться для досягнення певної мети. В ідеальному випадку ступінь її досягнення і вся сукупність дій, що відбуваються в операції і від якої залежить досягнення мети, мають кількісну міру, тобто можуть бути описані математично.

Для **постановки задачі дослідження операцій** необхідно визначити:

– цілі функціонування досліджуваного об'єкта, вагомість кожного з них;
– можливі засоби реалізації досягнення поставлених цілей;
– критерії ефективності досягнення поставлених цілей.

До основних **компонентів математичної моделі дослідження операцій** належать:

1) змінні управління (керовані), умовно керовані та некеровані змінні;
2) обмеження;
3) цільові функції.

Змінними управління (керованими змінними) називають такі змінні, значення яких можливо змінювати у процесі управління деякою системою чи процесом під час знаходження певного рішення проблемної ситуації. Як правило, це змінні, значення яких може змінювати дослідник, і які необхідно відшукати при знаходженні найкращого (оптимального) розв'язку проблемної ситуації. Вони обумовлюють управлінські дії при виборі того чи іншого варіанта управлінського рішення з множини можливих альтернатив.

Дослідник повинен враховувати вплив значення **некерованих змінних** на досліджуваний об'єкт, але змінювати самостійно їх не може. Так, наприклад, під час знаходження оптимальної структури посівних площ ми не можемо змінювати погодні умови, що впливатимуть на врожайність культур. Аналогічно під час знаходження оптимальної податкової стратегії підприємства ставка податку на той чи інший вид діяльності, облікова ставка НБУ, коефіцієнт інфляції тощо є некерованими змінними, які не можуть змінюватися на рівні підприємства. Іноді некеровані змінні називають **параметрами задачі**.

Потрібно зазначити, що залежно від мети розв'язування задачі керовані змінні можуть переходити у некеровані та навпаки. Наприклад, якщо необхідно визначити таку ставку єдиного податку, яка б забезпечила зростання доходів у бюджет на i %, то в цьому разі розмір ставки єдиного податку є керованою змінною.

Обмеження математичної моделі задачі дослідження операцій відображають зв'язок керованих і некерованих змінних. Як правило, це система рівнянь і (або) нерівностей, які у сукупності визначають область припустимих рішень (область зміни керованих змінних). Іноді буває так, що область припустимих рішень нульова. Це означає, що досягнення поставленої мети при встановлених співвідношеннях керованих і некерованих змінних неможливе.

Критерій оптимальності – показник діяльності досліджуваного об'єкта, що має конкретний економічний (фізичний) зміст. За значенням цього критерію обирають таке рішення проблемної ситуації, що максимально задовольняє поставлену мету. Математична модель однієї задачі дослідження операцій може мати кілька критеріїв оптимальності.

Цільова функція – математична форма критерію оптимальності, вона пов'язує між собою мету розв'язування задачі дослідження операцій, керовані та умовно керовані змінні моделі.

Розглянемо загальну **постановку задачі дослідження операцій** у **математичному вигляді**.

Деякі з таких кількісних характеристик бувають незмінними, сталими для певної операції чи певних умов. Позначимо їх $c_k\left(k=\overline{1,l}\right)$. Це і є параметри задачі. Інші мають характер змінних величин, незалежних і залежних, детермінованих чи випадкових. Незалежні змінні можна поділити на дві групи: керовані, значення яких можна змінювати (позначимо їх $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$; некеровані, значення яких визначаються комплексом зовнішніх умов (зовнішнім оточенням), або параметри системи $y_r\left(r=\overline{1,s}\right)$.

За таких умов, як правило, вдається встановити функціональну залежність між деякою величиною $f\ (X)$, якою вимірюють ступінь досягнення мети, і незалежними змінними та параметрами операції:

$$f(X)=F\left(x_j, y_r, c_k\right). \tag{1.1}$$

Функція (1.1) є цільовою, або критерієм оптимальності, оскільки її значення є мірою ефективності проведення операції після досягнення певної мети.

Завдання полягає в тому, щоб вибрати такі значення керованих змінних x_j, які б надавали цільовій функції екстремального значення, тобто

$$f^*(X) = \underset{x_j}{extrem}\, F(x_j, y_r, c_k). \tag{1.2}$$

Проте можливості вибору керованих змінних x_j завжди обмежені зовнішніми щодо операції умовами (енергетичними, матеріальними, людськими, грошовими ресурсами тощо), а також параметрами самої операції. В ідеальному випадку обмеження можна описати за допомогою математичних рівнянь і нерівностей:

$$g_i(x_j, y_r, c_k)\{\leq = \geq\} b_i,\ i = \overline{1,m}\,. \tag{1.3}$$

Залежність (1.3) називають ***системою обмежень***, або ***системою умов задачі***.

Вирази (1.1) та (1.3) і є ***математичною моделлю операції***.

Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти

$$\underset{x_j}{extrem}\, F(x_j, y_r, c_k). \tag{1.4}$$

За умови

$$g_i(x_j, y_r, c_k)\{\leq = \geq\} b_i,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}, r = \overline{1,s}, k = \overline{1,l}\,, \tag{1.5}$$

де $f(\cdot)$ – цільова функція (показник якості або ефективності операції);

$g_i(\cdot)$, b_i – відповідно функція витрати та величини *i*-го ресурсу.

Проілюструємо побудову математичної моделі проблемної операції на конкретному прикладі.

Приклад 1.1

Фермер відгодовує два види тварин – А і В. Для цього використовує три види кормів. Витрати корму кожного виду на одну тварину за видами наведені в табл 1.1. У ній також зазначені запаси кормів та прибуток від реалізації однієї тварини. Визначити, скільки тварин кожного виду потрібно відгодовувати фермерові, щоб отримати максимальний прибуток. Скласти математичну модель операції.

Розв'язання

Кількість тварин виду А позначимо як x_1, кількість тварин виду В – як x_2.

Отже, визначено вектор керованих змінних $X = (x_1, x_2)$.

Запишемо функцію прибутку: $F = 16x_1 + 6x_2 \to \max$. Ця функція виражає критерій оптимальності задачі у математичній формі – *цільову функцію*.

Таблиця 1.1

Вид корму	Витрати кормів на відгодівлю		Запаси кормів
	тварини виду А	**тварини виду В**	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибуток від реалізації однієї тварини	16	6	

Складемо вектор некерованих змінних $B=(b_1,b_2,b_3)=(180;240;426)$.

За умовою задачі корм 1-го виду витрачається в кількості $2x_1+3x_2$, що не повинно перевищувати запаси цього виду корму, тобто 180. Маємо нерівність $2x_1+3x_2 \le 180$. Аналогічні нерівності складаємо щодо інших видів кормів: $4x_1+x_2 \le 240$; $6x_1+7x_2 \le 426$.

У результаті маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 180, \\ 4x_1+x_2 \le 240, \\ 6x_1+7x_2 \le 426. \end{cases}$$

Потрібно додати, що кількість тварин не може бути від'ємним числом, тобто $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Об'єднуючи всі нерівності, одержимо *систему обмежень:*

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 180, \\ 4x_1+x_2 \le 240, \\ 6x_1+7x_2 \le 426, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Цільова функція і система обмежень разом становлять *математичну модель*. Отже, математична модель наведеної задачі має вигляд

$$F=16x_1+6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \le 180, \\ 4x_1+x_2 \le 240, \\ 6x_1+7x_2 \le 426, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1.3. Класифікація математичних моделей дослідження операцій

Існують різні класифікації математичних моделей, що ґрунтуються на різних ознаках. Їх подано на рис. 1.1.

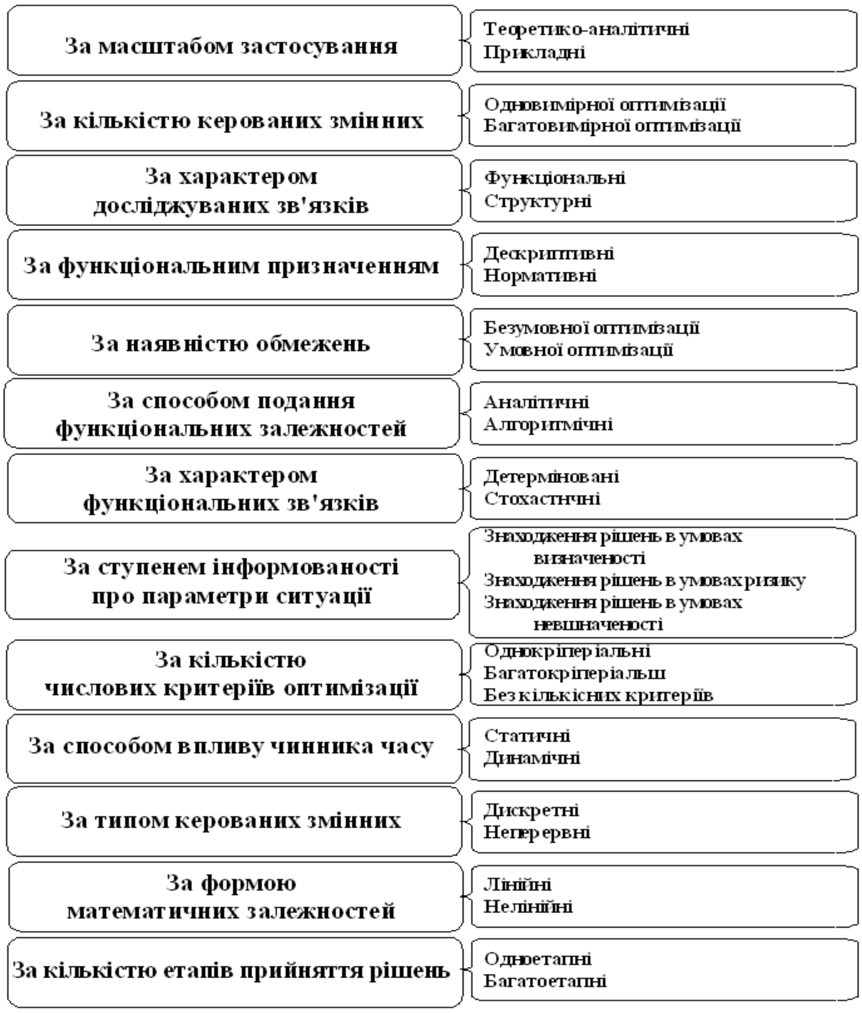


Рисунок 1.1 – Узагальнення класифікацій математичних моделей

Розглянемо деякі з видів класифікацій моделей більш детально.

За масштабом застосування математичні моделі поділяють на *теоретико-аналітичні*, що використовуються під час дослідження загальних властивостей і закономірностей реально існуючих процесів, і *прикладні*, які застосовуються у розв’язанні конкретних задач цілеспрямованої людської діяльності (моделі аналізу, прогнозування, управління).

За кількістю керованих (шуканих) змінних математичні моделі поділяють на *одновимірні* (модель має одну вхідну та одну вихідну змінну) і *багатовимірні* (модель має кілька вхідних і кілька вихідних змінних, причому кількість входів не обов’язково дорівнює кількості виходів).

За характером досліджуваних зв’язків виділяють *функціональні* та *структурні* математичні моделі, а також проміжні форми (структурно-функціональні). У дослідженнях на макрорівні частіше застосовують структурні моделі, оскільки для планування та управління велике значення мають внутрішні залежності між елементами систем. Типовими структурними моделями є моделі міжгалузевих зв’язків. Функціональні моделі широко застосовуються в економічному регулюванні, коли на поведінку об’єкта («вихід») впливають шляхом зміни «входу». Прикладом може слугувати модель поведінки споживачів за умов товарно-грошових відносин. Один і той самий об’єкт може описуватись одночасно і структурною, і функціональною моделями. Наприклад, для планування окремої галузевої системи використовується структурна модель, а на макрорівні кожна галузь може бути подана функціональною моделлю.

За функціональним призначенням розрізняють *дескриптивні* та *нормативні* моделі. Дескриптивні моделі відповідають на запитання: як це відбувається чи як це, найімовірніше, може розвиватися далі? Іншими словами, вони лише пояснюють факти, що спостерігались, або дають прогноз. Прикладом дескриптивних моделей є виробничі функції та функції купівельного попиту, побудовані на підставі опрацювання статистичних даних. Нормативні моделі відповідають на запитання: як це повинно бути? Тобто передбачають цілеспрямовану діяльність. Типовим прикладом нормативних моделей є моделі оптимального (раціонального) планування, що формалізують у той чи інший спосіб мету економічного розвитку, можливість і засоби її досягнення.

Та сама модель залежно від характеру її використання може бути як дескриптивною, так і нормативною. Не виключена та ситуація, коли нормативна модель складної структури об’єднує окремі блоки, що є частковими дескриптивними моделями.

За наявності обмежень на допустимі значення шуканих змінних математична модель належить до моделей *умовної* оптимізації, коли ж такі обмеження відсутні – маємо задачу *безумовної* оптимізації.

За способом подання функціональних залежностей математичні моделі поділяють на *аналітичні* та *алгоритмічні*. Якщо функціональні залежності моделі подані математичними функціями, то модель називається аналітичною. В алгоритмічних моделях функціональні залежності сформульовані у вигляді послідовності дій.

За характером функціональних зв’язків розрізняють моделі жорстко *детерміновані* та моделі, що враховують випадковість і невизначеність, *стохастичні* (ймовірнісні). У детермінованих моделях усі фактори, що впливають на розв’язання, однозначно визначені, їх значення відомі. У стохастичних моделях умови функціонування досліджуваного об’єкта, характеристики його станів тощо є випадковими величинами, пов’язаними стохастичними залежностями. Отже, шукані величини у таких моделях визначаються через закони їх розподілу. Стохастичні моделі застосовуються, наприклад, під час розв’язування задач масового обслуговування, у сітковому плануванні та управлінні тощо.

За ступенем інформованості про параметри ситуації розрізняють моделі пошуку розв’язання за умов *визначеності, невизначеності* та *ризику*. Необхідно розрізняти невизначеність, що описується ймовірнісними законами, і невизначеність, для опису якої закони теорії ймовірностей застосовувати не можна. У багатьох практичних задачах досить часто невідомо, з якою ймовірністю можна очікувати можливі варіанти розвитку ситуації. У такому разі застосовуються моделі пошуку розв’язання за умов невизначеності.

Якщо виникає ситуація, коли ступінь привабливості альтернативи за тим чи іншим критерієм чітко не визначений (не детермінований), а може бути різним і залежати від випадкових факторів, то це модель пошуку розв’язання в умовах ризику. Наприклад, громадянин має 10 000 грн, які він може покласти на депозит до державної банківської установи з мінімальним відсотком прибутку, але майже 100 % надійністю повернення вкладу. Другою альтернативою є відкриття депозитного рахунка у комерційному банку з більшими дивідендами і одночасно досить істотним ризиком втратити гроші (30 %). Якщо відомі ймовірності розвитку можливих ситуацій, то для відповіді на запитання: Куди і скільки вкласти грошей? – застосовують математичні моделі пошуку розв'язання за умов ризику.

За кількістю числових критеріїв оптимізації математичні моделі поділяють на *однокритеріальні, багатокритеріальні* та *без кількісних критеріїв*. Якщо задача дослідження операцій має не один кількісний критерій оптимізації, то для її розв'язання застосовують багатокритеріальну математичну модель, якщо один – однокритеріальну математичну модель.

У деяких проблемних ситуаціях за мету обирають «нечислові» критерії, які не можна кількісно виміряти. Наприклад, максимум краси, мінімум незручностей тощо. Для врахування таких критеріїв будують моделі без кількісних критеріїв із застосуванням, наприклад, експертних оцінювань.

За способами впливу чинника часу математичні моделі поділяють на *статичні* та *динамічні*. У статичних моделях усі залежності відносять до одного моменту чи періоду часу. Динамічні моделі характеризують зміни економічних процесів у часі.

За типом керованих змінних розрізняють *дискретні* та *неперервні* математичні моделі. Більшість реальних об'єктів характеризується величинами, які мають властивість неперервності. Тому математичні моделі, що описують такі об'єкти, відносяться до категорія неперервних і складаються, як правило, з диференціальних та (або) інтегральних рівнянь.

Для опису об'єктів, характеристики яких можуть набувати деяких конкретних наперед відомих значень, застосовують дискретні математичні моделі. Основа останніх – апарат математичної логіки (логічні функції, апарат булевої алгебри, алгоритмічні мови тощо). Прикладами таких об'єктів є комутаційні системи автоматизованих телефонних станцій (АТС).

Моделі дослідження операцій надзвичайно різноманітні ***за формою математичних залежностей***. У самому загальному розумінні виокремлюються *лінійні* (цільова функція і система обмежень лінійні) та *нелінійні* (цільова функція і/або система обмежень нелінійні) математичні моделі.

Також моделі дослідження операцій поділяють ***за кількістю етапів прийняття рішень***. Якщо моделюється проблемна ситуація, яку можна поділити на *кілька етапів* (наприклад, управління виробничими потужностями впродовж кількох років, наприкінці кожного з яких необхідно визначитися між доцільністю подальшої експлуатації обладнання та його заміною), застосовують *багатоетапні* математичні моделі.

1.4. Методи дослідження операцій

Під час розв'язування задач дослідження операцій використовують різноманітний математичний апарат (рис. 1.2).

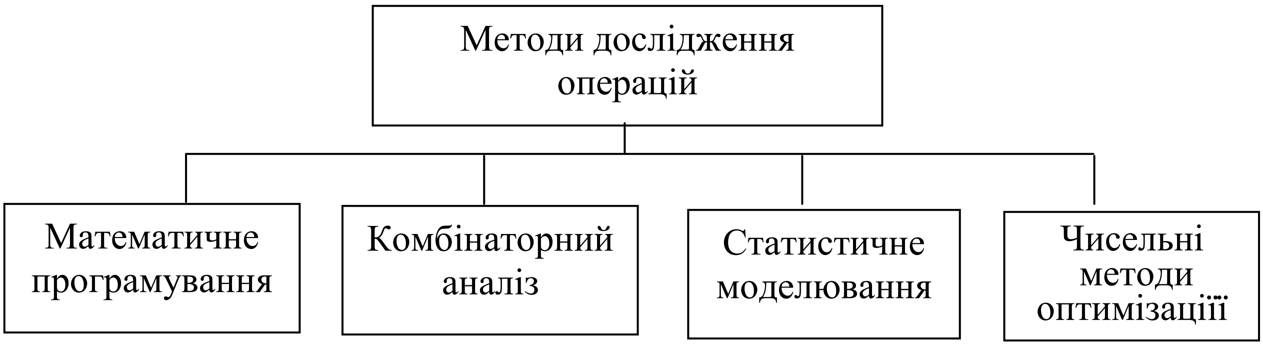


Рисунок 1.2 – Методи розв'язування задач дослідження операцій

Математичне програмування – це прикладна математична дисципліна, що досліджує екстремальні (оптимізаційні) задачі та розробляє методи їх розв'язування. Залежно від вигляду функцій f і g_i (див. формули 1.1, 1.2) математичне програмування можна розглядати як сукупність кількох самостійних дисциплін, що вивчають і розробляють методи розв'язання певних класів задач (рис. 1.3).

Рисунок 1.3 – Класифікація задач математичного програмування

Задачі *опуклого програмування* – це задачі, розв'язком яких є максимум опуклої чи мінімум увігнутої функції.

Задачі *квадратичного програмування* – задачі, в яких необхідно знайти максимум чи мінімум квадратичної функції за умов, що її змінні задовольняють деяку систему лінійних обмежень (нерівностей чи рівнянь).

Задачі *дробово-лінійного програмування* – задачі, в яких цільова функція є співвідношенням двох лінійних функцій.

Задачі.

Задачі *параметричного програмування* – задачі, в яких цільова функція або коефіцієнти системи обмежень залежать від деяких параметрів.

Задачі *стохастичного програмування* – задачі, в яких цільова функція або система обмежень містять випадкові величини.

Задачі *динамічного програмування* – задачі, процес розв’язання яких є багатоетапним.

Комбінаторний аналіз є інструментом розв’язання задач вибору і розміщенняя елементів деякої, як правило, скінченної, множини відповідно до заданих правил. В основу комбінаторних методів дослідження операцій покладено ідею перебору всіх допустимих рішень. Найбільш відомим комбінаторним методом є метод гілок і меж.

Статистичне моделювання досліджує процеси поведінки ймовірнісних систем за умов, коли внутрішні взаємодії у цих системах невідомі. Зміст задач статистичного моделювання полягає у відтворенні досліджуваного фізичного процесу за допомогою імовірнісної математичної моделі і обчисленні характеристик цього процесу.

У дослідженні операцій методи статистичного моделювання використовуються для розв’язування задач управління запасами, аналізу систем масового обслуговування.

Чисельні методи оптимізації в дослідженні операцій використовуються для розв'язування задачі оптимізації, що базується на точному або наближеному обчисленні значення функції мети. У результаті із заданою точністю знаходять наближення до розв'язання задачі – точки екстремуму функції, якщо така точка не єдина, то до множини точок екстремуму.

Розрізняють методи безумовної та умовної оптимізації.

Чисельні методи безумовної оптимізації функції однієї змінної можна поділити на три групи:

– методи виключення інтервалів (метод поділу інтервалу навпіл, метод Фібоначчі, метод «золотого перетину»);
– методи поліноміальної інтерполяції (метод квадратичної інтерполяції та методи інтерполяції вищих порядків);
– методи з використанням похідних (метод середньої точки, метод хорд, метод Н’ютона).

До чисельних методів безумовної оптимізації функції багатьох змінних відносять метод конфігурацій (метод Хука – Дживса), метод деформованого багатогранника (метод Нелдера – Міда), градієнтний метод найшвидшого спуску, метод Н’ютона та ін.

Чисельні методи умовної оптимізації функції багатьох змінних поділяють на дві групи:

– методи, що використовують перетворення задачі умовної оптимізації у послідовність задач безумовної оптимізації шляхом уведення до розгляду допоміжних функцій;
– методи безпосереднього розв'язування задачі умовної оптимізації, що ґрунтуються на русі з однієї припустимої точки, де виконані всі обмеження, до іншої припустимої точки із кращим значенням цільової функції.

До методів першої групи належать такі методи: штрафних функцій, метод бар'єрних функцій, метод множників Лагранжа; другої групи – метод проекції градієнта і метод можливих напрямків Зойтендейка.

1.5. Типові класи задач дослідження операцій

За змістом і постановками множину задач дослідження операцій можна розбити на ряд класів (не повний їх перелік наведено на рис. 1.4). У дійсності задачі відповідних класів «виникають» одна з одної відповідно до того, як поширюється уявлення про досліджувану операцію.

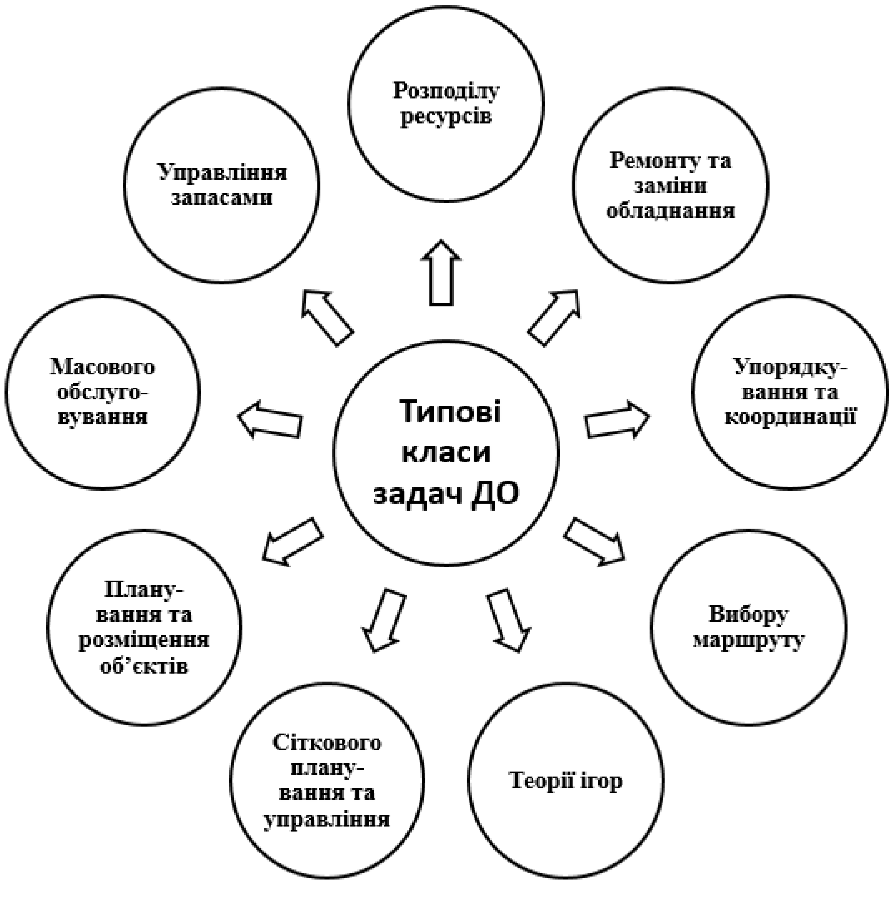


Рисунок 1.4 – Типові класи задач ДО

Надамо стислу характеристику деяких із перелічених задач.

Задачі управління запасами – один із найпоширеніших і добре вивчених класів задач дослідження операцій. Вони виникають у випадках, коли необхідно визначити оптимальну кількість запасів. Зі збільшенням запасів збільшуються і витрати на їх зберігання, але зменшуються втрати від їх можливої нестачі.

Формулювання задачі управління запасами:

Існують певні запаси, витрати на зберігання яких є функцією їх величини. Відомі також витрати на доставляння ресурсів. Необхідно визначити оптимальний розмір поставляння, частоту та терміни надходження ресурсів, щоб сумарні витрати були мінімальними. Критерієм оптимальності є сума витрат на зберігання та поставлення ресурсів.

Класифікація задач управління запасами:

– *за кількістю періодів управління* (поповнення запасів) – на одноперіодні та багатоперіодні;
– *за характером поповнення запасів* – із неперервною системою поповнення запасів (миттєве) і періодичне (наприклад, щотижня або щомісяця);
– *за урахуванням попиту* – на детерміновані та ймовірнісні (статичні);
– *за кількістю типових ресурсів* – на однопродуктові і багатопродуктові;
– *за видом цільової функції* – на задачі з пропорційними та непропорційними витратами.

Задачі розподілу ресурсів виникають у тому разі, коли існує певний набір робіт (операцій), які необхідно виконати, а наявних ресурсів для виконання якнайкраще кожної роботи не вистачає.

Формулювання задачі розподілу ресурсів: можуть бути заданими як роботи, так і ресурси або лише роботи. Необхідно відшукати такий розподіл ресурсів, при якому максимізується спільний прибуток або результат, чи мінімізуються витрати.

Залежно від умов задачі розподілу ресурсів поділяють на групи:

1. Відомі і роботи, і ресурси. Необхідно розподілити ресурси між роботами таким чином, щоб максимізувати певну міру ефективності (прибуток) або мінімізувати очікувані витрати (витрати виробництва).

2. Відома лише кількість ресурсів. Визначити, який перелік робіт можна виконати з урахуванням цих ресурсів, щоб забезпечити максимум певної міри ефективності.

3. Відомий лише перелік робіт. Визначити, які ресурси необхідні для того, щоб мінімізувати сумарні витрати виробництва.

Задачі ремонту та заміни обладнання виникають у тих випадках, коли обладнання зношується, застаріває і з часом підлягає заміні. Зношене обладнання ремонтують або повністю замінюють.

Формулювання задачі ремонту та заміни обладнання: визначити терміни оновлювального ремонту та момент заміни обладнання, за яких сумарні витрати на ремонт та заміну, а також витрати внаслідок погіршених характеристик мінімізуються.

Існує і таке обладнання, в якому деталі повністю виходять з ладу і не поновлюються (наприклад, електронні лампи). У цьому разі необхідно визначити терміни профілактичного контролю, за яких сумарні витрати на проведення контролю та втрати від простою обладнання внаслідок тимчасово непрацюючого обладнання і заміни деталей мінімізуються.

Класифікація задач ремонту та заміни обладнання:

1) *за характером зміни обладнання:*

– задача зміни обладнання довгострокового використання;
– задача зміни обладнання з метою попередження відмов;
– задачі вибору оптимального плану попереджувального ремонту та профілактичного обслуговування;

2) *за характером урахування витрат на обладнання* – на дискретні та неперервні;

3) *за виходом із ладу обладнання* – на детерміновані та випадкові;

4) *за стратегією зміни обладнання;*

5) *за часом урахування витрат на обладнання* – із зведенням та без зведення витрат більш пізніх років до розрахункового.

Задачі масового обслуговування розглядають питання утворення та функціонування черг, що виникають у повсякденному житті. Наприклад, черги літаків, що йдуть на посадку, покупці у супермаркеті тощо. Черги виникають унаслідок того, що потік вимог (клієнтів на обслуговування) є випадковим і ним не можна управляти. Якщо кількість пристроїв обслуговування досить велика, то черги виникають нечасто, однак при цьому неминучі довготривалі простої обладнання. З іншого боку, якщо недостатня кількість пристроїв обслуговування, створюються черги й можливі великі втрати майбутніх звернень унаслідок очікування.

Одне із можливих **формулювань задачі масового обслуговування:** визначити, яка кількість пристроїв масового обслуговування необхідна, щоб мінімізувати сумарні втрати, що очікуються від несвоєчасного обслуговування та простою обладнання.

Залежно від мети дослідження ***задачі масового обслуговування*** поділяють на такі:

– *задачі аналізу* – припускають оцінювання ефективності функціонування систем при незмінних, наперед відомих вихідних характеристиках;
– *задачі синтезу* – оптимізації – спрямовані на пошук оптимальних параметрів і характеристик функціонування.

Задачі упорядкування та координації пов'язані з визначенням оптимальної послідовності оброблення виробів, масивів інформації на різних приладах обслуговування або за певного способу обслуговування, що має кілька обов’язкових етапів. Іноді такі задачі називають задачами календарного планування або задачами складання розкладу.

Задачі планування та розміщення визначають оптимальну кількість і місця розміщення нових об’єктів з урахуванням їх взаємодії з існуючими об’єктами та між собою. Наприклад, на території нового мікрорайону відоме розміщення житлових будинків. Необхідно визначити кількість продуктових магазинів та місця їх розміщення таким чином, щоб населення могло одержувати необхідні послуги із заданим ступенем їх доступності одночасно із забезпеченням вимоги прибутковості торгових точок.

Задачі вибору маршруту найчастіше трапляються у дослідженні транспортних систем та систем зв'язку. До них відносять задачу вибору найкоротшого шляху, задачу комівояжера, задачу про максимальний потік.

Задачі сіткового планування та управління розглядають співвідношення між терміном закінчення великого комплексу операцій і моментом початку всіх операцій комплексу. Вони актуальні під час розроблення складних та високовартісних проектів. Можливі такі **постановки задач сіткового планування і управління:**

1) задана тривалість усього комплексу робіт; визначити терміни початку кожної операції, за яких мінімізується один з таких критеріїв:

– загальні витрати на виконання всього комплексу робіт;
– середньоквадратичний показник нерівномірності ресурсів, що використовуються;
– імовірність невиконання комплексу робіт у календарний термін;
– середньоквадратичне відхилення наявних ресурсів від необхідних;

2) відомі загальний перелік комплексу робіт та наявні ресурси для їх виконання; визначити терміни початку кожної операції, за яких мінімізується тривалість виконання всього комплексу робіт.

Задачі теорії ігор займаються дослідженням конфліктних ситуацій. Під конфліктною ситуацією розуміють ситуацію, у якій стикаються протилежні інтереси двох і більше сторін. У цих задачах необхідно визначити такі стратегії (оптимальні) поведінки кожної зі сторін, які б призвели якщо не до виграшу, то хоча б до мінімального програшу.

За різними ознаками виділяють такі ***класи задач теорії ігор***:

– *по можливості гравців об'єднуватись у групи з відповідною координацією власних дій щодо інтересів усієї групи:* кооперативні, некооперативні, гібридні;
– *за рівністю стратегій:* симетричні (якщо гравці поміняються місцями, їх виграші за одні й ті самі ходи не зміняться) та асиметричні;
– *за наявністю можливості змінювати ресурси або фонд гри:* ігри з нульовою та ненульовою сумами; прикладом гри з нульовою сумою є гра у покер, де один виграє всі ставки інших;
– *за наявністю інформації про ходи суперника:* паралельні та послідовні ігри; у паралельних іграх гравці ходять одночасно або вони не мають інформації про вибір суперника, поки він його не зробить;
– *за повнотою інформації:* ігри з повною та ігри з неповною інформацією; у грі з повною інформацією для кожного гравця відомі всі ходи до поточного моменту і можливі стратегії супротивника;
– *за терміном тривалості гри:* ігри зі скінченною та ігри з нескінченною кількістю кроків; ігри реального світу, як правило, скінченні, дослідження ігор з нескінченною кількістю кроків – поки що «забавка» математиків;
– *за типом компонентів гри:* дискретні та неперервні; для дискретних ігор характерна скінченна кількість гравців, стратегій, результатів тощо;

якщо значення хоча б одного з компонентів належить множині дійсних чисел, то це диференціальні числа.

Комбіновані задачі містять декілька типових задач одночасно.

Задачі для самостійного розв'язування

Розглянемо задачу планування виробництва у загальному вигляді.

Для виготовлення n видів продукції $P_1, P_2, \ldots, P_n$ використовується m видів ресурсів $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Запаси ресурсів, норми витрат ресурсів за видами на виготовлення одиниці продукції, прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в табл. 1.2.

Необхідно знайти такий план випуску продукції, за якого прибуток від її реалізації буде максимальним.

Необхідно:

1) скласти математичну модель задачі у загальному вигляді за даними таблиці 1.2;

2) побудувати математичну модель для випадку двох видів продукції і трьох видів ресурсів; вхідні дані за варіантами взяти з табл. 1.3.

Таблиця 1.2

Вид ресурсу	Норми витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції				**Запас ресурсу**
	P_1	P_2	…	P_n	
R_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
R_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибуток від одиниці продукції	c_1	c_2	…	c_n	

Таблиця 1.3

Варіант	a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{12}	a_{22}	a_{32}	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	7	6	1	3	3	2	1365	1245	650	6	5
2	8	7	4	3	6	9	864	864	945	2	3
3	14	12	8	8	4	2	624	541	372	7	3

Питання для самоперевірки

1. Дати визначення основних понять дослідження операцій: операція, оперувальна сторона, рішення операції, оптимальне рішення операції.

2. Що розуміють під проблемною ситуацією? Навести схему виникнення та приклади проблемних ситуацій.

3. Що необхідно знати для постановки задачі дослідження операцій?

4. Провести порівняльну характеристику змінних управління, умовно керованих змінних та некерованих змінних.

5. Навіщо визначати критерій оптимальності операції?

6. Які змінні (керовані, некеровані, умовно керовані) використовують під час запису цільової функції?

7. Які змінні (керовані, некеровані, умовно керовані) використовують під час запису системи обмежень?

8. Назвіть ознаки, за якими класифікують математичні моделі.

9. Наведіть характерику основних етапів операційного дослідження.

10. Якою повинна бути розмірність задачі оптимізації, щоб була можливість одержати її єдиний розв’язок?

11. Назвіть основні методи дослідження операцій.

12. Наведіть різні класифікації задач управління запасами.

13. Проілюструйте проблемні сторони у ситуації експлуатації обладнання.

14. Який тип задач дослідження операцій вивчає конфліктні ситуації?

15. На які питання дає відповідь розв’язування задачі управління запасами?

РОЗДІЛ 2
ОСНОВИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

2.1. Постановка задачі лінійного програмування

Під *задачею лінійного програмування* в загальному вигляді розуміють задачу знаходження екстремуму (мінімуму, максимуму) лінійної функції від *n* змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь. Математична модель загальної задачі лінійного програмування формулюється так: *знайти такі числові значення змінних* $x_1, x_2, \dots, x_n$, *що перетворюють в екстремум (максимум або мінімум) лінійну функцію*

$$\max(\min)F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \tag{2.1}$$

і задовольняють систему лінійних обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases} \tag{2.2}$$

за умови невід'ємності змінних

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0, \dots,\ \ x_n \ge 0. \tag{2.3}$$

Цю функцію називають ***цільовою функцією***, вона моделює поставлену в задачі мету.

Математична модель загальної задачі лінійного програмування може бути записаною у векторній формі: знайти екстремум функції

$$F(X) = CX \tag{2.4}$$

за умов

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_nA_n \{\le, \ge, =\} B, \tag{2.5}$$

$$X \ge 0. \tag{2.6}$$

Тут $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, CX – скалярний добуток зазначених векторів; $A_1, A_2, \dots, A_m$ – *m*-вимірні вектори-стовпці, складені з коефіцієнтів при невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$; B – стовпець вільних членів.

Будь-який вектор $X = (x_1, x_2, .., x_n)$, координати якого задовольняють систему обмежень (2.2) та умови невід'ємності змінних (2.3), називається ***допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування***.

План $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ називається ***опорним***, якщо система векторів A_j, $j=\overline{1:n}$ лінійно незалежна.

Опорний план $X=(x_1.x_2,\ldots,x_n)$, називається ***невиродженим***, якщо він містить рівно m додатних компонент, та ***виродженим*** – у протилежному разі.

Опорний план $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*\right)$, за якого цільова функція (2.1) набуває максимального (мінімального) значення, називається ***оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.***

У задачах лінійного програмування можна виділити два типи однорідних обмежень на вибір змінних: у вигляді лінійних нерівностей або у вигляді лінійних рівнянь. Крім того, для спрощення можна формулювати задачу лише для мінімуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити максимум функції $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$, то це те саме, що шукати мінімум функції $Z_1=-Z=-c_1x_1-c_2x_2-\ldots-c_nx_n$.

Із цього випливають три ***форми запису задач лінійного програмування***:

1) загальна;
2) стандартна (симетрична);
3) канонічна.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування задовольняє умови:

– цільова функція спрямована на максимум або мінімум;
– система обмежень складається з нерівностей і (або) рівнянь;
– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Загальна форма запису задачі лінійного програмування у математичному вигляді подана формулами (2.1) – (2.3).

Стандартна (симетрична) форма запису задачі лінійного програмування задовольняє умови:

– цільова функція спрямована на максимум;
– система обмежень складається з нерівностей виду "≤";
– на невідомі накладена умова невід'ємності.

Стандартна форма запису задачі лінійного програмування має вигляд

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\max, \tag{2.7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\le b_m, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0,\ldots,\ \ x_n\ge 0, \tag{2.9}$$

або

$$F=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\rightarrow\min, \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases} \tag{2.11}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0. \tag{2.12}$$

Канонічна (основна) форма запису задачі лінійного програмування задовольняє такі умови:

– цільова функція спрямована на максимум;
– система обмежень складається з рівнянь із невід’ємною правою частиною;
– на невідомі накладена умова невід’ємності.

Канонічна форма запису задачі лінійного програмування має вигляд

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.14}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots,\ x_n \ge 0, \tag{2.15}$$

Задачу (2.1)–(2.3) можна звести до ***канонічної форми***, тобто до такого вигляду, коли в системі обмежень (2.2) усі $b_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ невід’ємні, а всі обмеження є рівностями.

Якщо якесь b_i від’ємне, то, помноживши i-те обмеження на -1, одержимо у правій частині відповідної рівності додатне значення. Коли i-те обмеження має вигляд нерівності

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i,$$

то останню завжди можна звести до рівності, увівши *додаткову змінну* x_{n+1}:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i.$$

Аналогічно обмеження вигляду

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$$

зводиться до рівності, віднімаючи від лівої частини *додаткову змінну* x_{n+2}:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$$

$$(x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0).$$

Така заміна нерівностей рівняннями за допомогою введення додаткових змінних не змінить розв'язку початкової задачі.

Щоб перейти від однієї форми запису задачі лінійного програмування до іншої, потрібно вміти:

– зводити задачу мінімізації до задачі максимізації; при переході від знаходження мінімуму функції до знаходження максимуму цієї самої функції (і навпаки) необхідно цю функцію помножити на -1, оскільки $min\,F = -max(-F)$;

– переходити від обмежень-нерівностей до обмежень рівнянь і навпаки; при переході від нерівності до рівняння в ліву частину обмеження вводиться додатна величина, що називається додатковою змінною. Додаткова змінна має знак «+», якщо нерівність вигляду «≤» або має знак «–», якщо нерівність вигляду «≥»;

– замінювати змінні, для яких не виконується умова невід'ємності; деяка змінна x_k замінюється різницею двох невід'ємних змінних u_k і v_k: $x_k = u_k - v_k$.

Задачі лінійного програмування можна розв'язувати графічно й аналітично.

2.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування застосовують у тих випадках, коли система обмежень і цільова функція містять не більше двох змінних.

Розглянемо алгоритм цього методу на конкретному прикладі.

Приклад 2.1. Згадаємо математичну модель задачі прикладу 1.1:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Ця модель містить не більше двох змінних, отже, для її розв'язання можна застосувати графічний метод.

Алгоритм графічного методу

1. У прямокутній системі координат будують прямі, рівняння яких одержують шляхом заміни у початковій системі обмежень знаків нерівності на знаки «=». Отже, система обмежень набирає вигляду

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 180, \\ 4x_1 + x_2 = 240, \\ 6x_1 + 7x_2 = 426. \end{cases}$$

2. Знаходять півплощини, що визначаються кожним з обмежень задачі. Для цього вибирають будь-яку точку площини, наприклад точку (0; 0). Підставляють її координати у початкову нерівність. Якщо нерівність виконується, то обирають ту частину півплощини, в якій знаходиться точка (0; 0). Якщо ж нерівність не виконується – обирають частину площини, протилежну тій, де знаходиться обрана точка.

3. Знаходять багатокутник розв’язків як спільну частину визначених півплощин.

4. Будують вектор $\overline{C}$ із координатами, що дорівнюють коефіцієнтам цільової функції. У нашому прикладі вектор із координатами (16; 6).

5. У будь-якому місці одержаного графіка проводять перпендикулярну до вектора $\overline{C}$ пряму а.

6. Уявно зміщуючи пряму а в напрямку вектора $\overline{C}$, визначають першу та останню точки перетину цієї прямої з багатокутником розв’язків. Перша точка перетину є точкою мінімуму, остання – точкою максимуму.

7. Визначають координати точки максимуму (мінімуму) як точки перетину двох прямих, розв’язуючи систему відповідних лінійних рівнянь.

8. Визначають значення цільової функції в точці максимуму (мінімуму), підставляючи в цільову функцію координати точки максимуму (мінімуму).

Виконуючи описані дії для наведеного прикладу, одержуємо $OABCD$ – багатокутник розв’язків (рис. 2.1).

Останньою точкою перетину прямої a з багатокутником розв’язків є точка B. Вона лежить на перетині прямих (1) і (2).

Розв’язуючи систему з двох рівнянь, одержуємо координати точки $B\,(57;12)$. Підставляючи координати цієї точки у цільову функцію, маємо $F = 57 \cdot 16 + 12 \cdot 6 = 984.$

Отже, $F_{\max} = 984$ у точці $X^*(57;12)$. Фермер одержить максимальний прибуток у розмірі 984 грошових одиниць (далі – грош. од.), якщо вирощуватиме 57 тварин виду А і 12 тварин виду В.

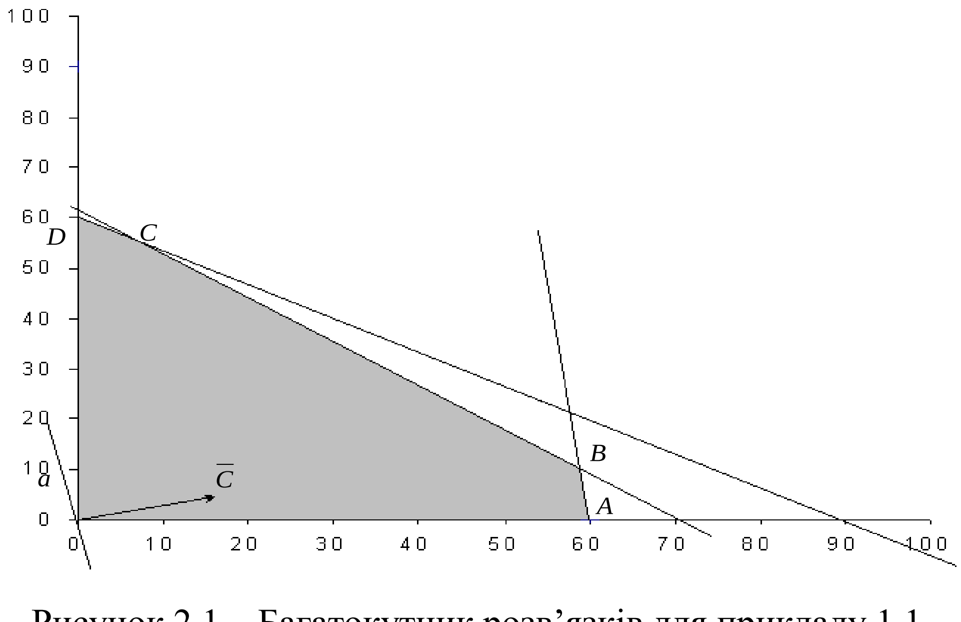
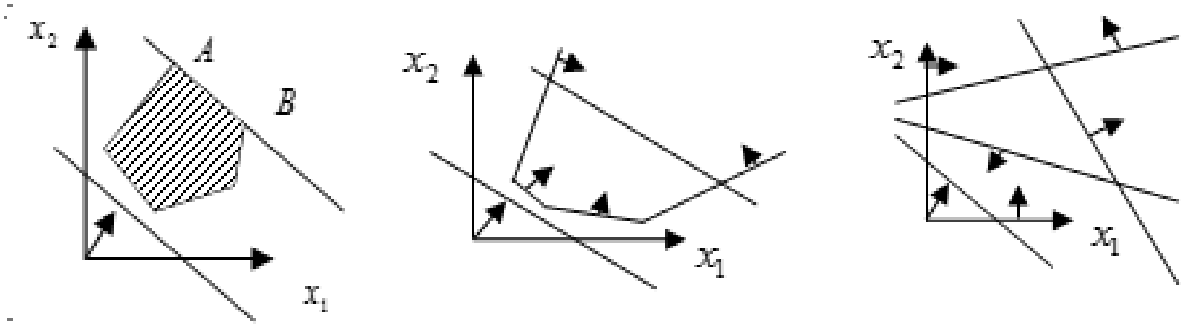


Рисунок 2.1 – Багатокутник розв’язків для прикладу 1.1

Окремі випадки графічного методу

Під час розв’язування задач лінійного програмування графічним методом може виникнути один із чотирьох наведених нижче випадків:

1) цільова функція набуває лише одного максимального (мінімального значення) в точці $B\,(57;12)$ (рис. 2.1);



а) б) в)

Рисунок 2.2 – Окремі випадки багатокутника розв’язків

2) цільова функція набуває максимального (мінімального) значення на відрізку АВ (рис. 2.2 а). Це відбувається тоді, коли пряма a паралельна деякій зі сторін багатокутника розв’язку. У цьому разі всі точки даного відрізка будуть точками максимуму (мінімуму), причому цільова функція в усіх цих точках матиме однакове значення. Під час розв’язування задачі знаходять координати точок А і В та значення цільової функції у будь-якій із них;

3) цільова функція не обмежена зверху (знизу). У цьому разі вважають, що $F_{max} = \infty$ ($F_{min} = -\infty$) (рис. 2.2 б);

4) область обмежень несумісна, тобто немає жодної точки на площині, для якої виконувалися б одночасно всі нерівності системи обмежень (рис. 2.2 в). У цьому разі задача не має розв’язку.

2.3. Симплексний метод розв'язування задач лінійного програмування

2.3.1. Простий симплексний метод

Алгоритм симплексного методу будемо розглядати на математичній моделі задачі прикладу 1.1.

Приклад 2.2. Математична постановка задачі, наведеної у прикладі 1.1, має вигляд

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Перед застосуванням симплексного методу задачу лінійного програмування записують у канонічній формі:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426, \end{cases}$$
$$xj \geq 0, \ldots (j = \overline{1,5}).$$

Алгоритм простого симплексного методу

I. Складають першу симплексну таблицю (знаходять допустимий план).

1. Визначають базисні змінні. Для цього:

а) виписують вектори з координатами, що відповідають коефіцієнтам системи обмежень при відповідних змінних:

$$P_1\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad P_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad P_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0\begin{pmatrix} 180 \\ 240 \\ 426 \end{pmatrix};$$

б) серед виписаних векторів знаходять ті, що становлять систему одиничних.

Нагадаємо, що одиничним називається вектор, в якого одна координата дорівнює одиниці, а всі інші – нулі. До *системи одиничних векторів* повинно входити стільки векторів, скільки координат має кожен із них, причому таких, що в першому одиниця знаходиться на першому місці, а всі інші координати – нулі; в другому одиниця знаходиться на другому місці, а всі інші – нулі й т. д. У цьому прикладі систему одиничних становлять вектори

$$P_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Змінні, що відповідають одиничним векторам, називаються *базисними*. У даному разі це змінні x_3, x_4, x_5.

2. Заповнюють першу симплексну таблицю (табл. 2.1):

а) у стовпчик «Базис» записують базисні змінні;

б) стовпчик «$С_б$» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) у стовпчик «План» записують координати вектора P0;

г) над змінними $x_1, x_2, ..., x_5$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

ґ) у стовпчики $X_1, X_2, ..., X_5$ заносять відповідно координати векторів $P_1, P_2, ..., P_5$;

д) заповнюють рядок (m + 1):

– на перетині (m+1)-го рядка і стовпчика «План» записують скалярний добуток векторів $\overline{План}$ і $\overline{C_б}$:

$$\overline{План} \cdot \overline{C_б} = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 426 = 0;$$

– на перетині (m + 1)-го рядка і стовпчиків $X_1, X_2, ..., X_5$ відповідно записують значення виразу: $\overline{C_б} \cdot \overline{P}_j - c_j$, де $j = \overline{1:5}$, а c_j – коефіцієнти цільової функції, записані у таблиці над змінними $x_1, x_2, ..., x_5$. Так, наприклад, на перетині (m + 1)-го рядка і стовпчика X_1 записують число $\overline{C_б} \cdot \overline{P}_1 - c_1 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 6 - 16 = -16$.

Таблиця 2.1

№ пор.	**Базис**	**Сб**	**План**	**16**	**6**	**0**	**0**	**0**	**Оцінне відношення**
				X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	
1	x3	0	180	**2**	3	1	0	0	90
2	**x4**	**0**	**240**	**4**	**1**	**0**	**1**	**0**	60
3	x5	0	426	**6**	7	0	0	1	71
m + 1			0	**–16**	–6	0	0	0	

ІІ. Оцінюють складений план на оптимальність. Можливі три випадки:

1) (m + 1)-й рядок не містить від'ємних елементів, отже, план вважається *оптимальним*, переходять до пункту V;

2) серед чисел (m + 1)-го рядка знаходяться від'ємні та у відповідному до деякого числа стовпчику немає жодного додатного; задача розв'язків не має;

3) серед чисел (m + 1)-го рядка знаходяться від'ємні, та в кожному відповідному до них стовпчику є хоча б одне додатне число. Це означає, що опорний план можна покращити, в цьому разі переходять до нової симплексної таблиці (пункт ІІІ).

ІІІ. Перехід до нової симплексної таблиці здійснюється заміною існуючого базису, що повинно привести до збільшення значення цільової функції. При цьому деяка змінна вилучається з базису, а замість неї вводиться інша.

1. Знаходження нового базису:

а) визначення змінної, що вводиться у новий базис: серед чисел (m + 1)-го рядка, що знаходяться у стовпчиках $X_1, X_2, ..., X_5$, розраховують найменше від'ємне. Стовпчик, в якому це число знаходиться, називається *ведучим*, а відповідна змінна вводиться у новий базис;

б) визначення змінної, що вилучається з базису: ділять почленно елементи стовпчика «План» на додатні елементи ведучого стовпчика. Одержані частки записують в стовпчик «Оцінні відношення» симплексної таблиці. Серед них знаходять найменшу. Рядок, якому вона відповідає, називається *ведучим*, а відповідна змінна вилучається з базису.

У нашому прикладі ведучим стовпчиком є стовпчик X_1, а ведучим рядком – рядок із номером 2. Отже, у новий базис замість змінної x_4 уводиться змінна x_1.

На перетині ведучого рядка і ведучого стовпчика знаходиться *ведучий елемент*, відносно якого виконують перерахунок елементів нової симплексної таблиці.

2. Заповнення нової симплексної таблиці (табл. 2.2):

а) у стовпчик «Базис» записують базисні змінні;

б) стовпчик «$С_б$» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) над змінними $x_1, x_2, ..., x_5$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

г) елементи ведучого рядка ділять на ведучий елемент і заносять до нової таблиці;

ґ) на перетині однойменних рядків і стовпчиків ставлять одиниці, всі інші елементи базисних стовпчиків – нулі;

д) клітинки таблиці, що залишилися, заповнюють за правилом чотирикутника:

$$\text{новий елемент} = \text{попередній елемент} - \frac{\text{відп. ел.} - \text{т по рядку} \cdot \text{відп. ел.} - \text{т по стовпчику}}{\text{ведучий елемент}}.$$

Для спрощеного знаходження відповідних елементів у рядку і відповідних елементів у стовпчику заштриховують ведучий рядок і ведучий стовпчик.

Проілюструємо обчислення на прикладі елемента (x_3, План):

$$(x_3, План)' = 180 - \frac{2 \cdot 240}{4} = 60,$$

де *180* – елемент табл. 2.1, що знаходився у клітинці (x_3, План);

2 – відповідний елемент у рядку; знаходимо його, проводячи уявну лінію від попереднього елемента до перетину з ведучим стовпчиком;

240 – відповідний елемент у стовпчику; знаходимо його, проводячи уявну лінію від попереднього елемента до перетину з ведучим рядком;

4 – ведучий елемент.

Таблиця 2.2

№ пор.	**Базис**	**$С_б$**	**План**	**16**	**6**	**0**	**0**	**0**	**Оцінне відно-шення**
				X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	
1	x3	0	60	0	$5/2$	1	$-1/2$	0	24
2	x1	16	60	1	**j**	0	j	0	240
3	**x5**	**0**	**66**	**0**	$11/2$	**0**	$-3/2$	**1**	12
m + 1			960	0	**–2**	0	4	0	

IV. Оцінюють складений план на оптимальність, тобто переходять до п. II. Як бачимо з табл. 2.2, одержаний план нової симплексної таблиці не є оптимальним. Отже, знову знаходимо новий базис і переходимо до ще однієї симплексної таблиці (табл. 2.3).

Як бачимо, останній рядок не містить від'ємних елементів, отже, одержаний план є оптимальним.

Таблиця 2.3

№ пор.	Базис	$C_б$	План	16	6	0	0	0	Оцінні відно-шення
				X1	X2	X3	X4	X5	
1	x3	0	30	0	0	1	2/11	–5/11	
2	x1	16	57	1	0	0	7/22	–1/22	
3	x2	6	12	0	1	0	–3/11	2/11	
m + 1			984	0	0	0	38/11	4/11	

V. Виписують одержану відповідь із стовпчика «План». На перетині (m + 1)-го рядка і стовпчика «План» знаходиться значення цільової функції. Інші елементи стовпчика «План» показують значення базисних змінних. Якщо змінна не ввійшла до базису, її значення дорівнює нулю.

У нашому прикладі F_{max} = 984 при таких значеннях базисних змінних: $x_1 = 57$, $x_2 = 12$, $x_3 = 30$. Фермер одержить максимальний прибуток розміром 984 гр. од., якщо буде відгодовувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. При цьому корм 1-го виду залишається у кількості 30 одиниць, а корми 2-го і 3-го видів використовуються повністю.

Деякі зауваження до використання симплексного методу:

1) при переході до нової симплексної таблиці елементи (m + 1)-го рядка можна обчислювати не лише за правилом чотирикутника, а й за правилом їх знаходження під час складання першої симплексної таблиці;

2) якщо за умовою задачі цільова функція була спрямована на мінімум, то одержане кінцеве значення цільової функції із стовпчика «План» потрібно помножити на –1;

3) якщо не переходити від пошуку мінімуму до пошуку максимуму функції, то при застосуванні симплексного методу в (m + 1)-му рядку вилучають додатні елементи; ведучий стовпчик визначається за найбільшим додатним числом (m + 1)-го рядка; всі інші етапи симплексного методу аналогічні описаним вище.

2.3.2. Симплексний метод зі штучним базисом

Симплексний метод зі штучним базисом застосовують у тих випадках, коли з початкової системи обмежень не можна визначити потрібної кількості базисних векторів.

Приклад 2.3. У прикладі 1.1 за початковими умовами обмеження накладалися лише на кількість кормів. Уведемо ще одне обмеження. Нехай фермер уклав угоду на продаж 20 тварин виду В. Тоді до системи обмежень уводиться ще одна нерівність: $x_2 \geq 20$. Математична модель набере вигляду

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 180, \\ 4x_1 + x_2 \leq 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 426, \\ x_2 \geq 20, \end{cases}.$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Запишемо її в основній формі:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426, \\ x_2 - x_6 = 20, \end{cases}.$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Почнемо розв'язувати задачу відомим нам симплексним методом:
I Складають першу симплексну таблицю (знаходять опорний план).
1. Визначають базисні змінні. Для цього:
а) виписують вектори з координатами, що відповідають коефіцієнтам системи обмежень при відповідних змінних:

$$P_1\begin{pmatrix}2\\4\\6\\0\end{pmatrix},\quad P_2\begin{pmatrix}3\\1\\7\\1\end{pmatrix},\quad P_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad P_6\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\end{pmatrix} P_0\begin{pmatrix}180\\240\\426\\20\end{pmatrix};$$

б) серед виписаних векторів знаходять одиничні:

$$P_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad P_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Як бачимо, ми маємо лише три одиничні вектори, у той час як система одиничних векторів повинна містити чотири. Для системи одиничних векторів не вистачає вектора з координатами $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Отже, для того щоб стало можливим застосування симплексного методу, необхідно ввести в четверте обмеження деяку змінну, щоб відповідний вектор мав потрібні нам координати. Ця змінна вводиться лише для можливості одержання системи одиничних векторів. Такі змінні називаються *штучними*, позначаються $y_j,\ j=\overline{1,m}$ і вводяться у цільову функцію з коефіцієнтом $-M$. Математична модель набере вигляду

$$F = 16x_1 + 6x_2 - My_1 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 180, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 240, \\ 6x_1 + 7x_2 + x_5 = 426, \\ x_2 - x_6 + y_1 = 20, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

До векторів P_j додають ще один $P_{y_1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ – одиничний вектор, якого не вистачало.

Отже, систему одиничних векторів становлять вектори $P_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $P_{y_1}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, а відповідні змінні x_3, x_4, x_5, y_1 є базисними.

2. Заповнюють таблицю, до якої додається ще один рядок із номером (m + 2) (табл. 2.4):

Таблиця 2.4

№ пор.	**Базис**	**$C_б$**	**План**	**16**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**	**–M**	**Оцінні відно-шення**
				X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**У1**	
1	x3	0	180	2	6	1	0	0	0	0	
2	x4	0	240	4	1	0	1	0	0	0	
3	x5	0	426	6	7	0	0	1	0	0	
4	y1	–M	20	0	1	0	0	0	–1	1	
m + 1			0	–16	–6	0	0	0	0	0	
m + 2			–20	0	–1	0	0	0	1	0	

а) у стовпчик «Базис» записують базисні змінні;

б) стовпчик «Сб» становлять коефіцієнти цільової функції при базисних змінних;

в) у стовпчик «План» записують координати вектора P_0;

г) над змінними $x_1, x_2, ..., y_1$ надписують коефіцієнти цільової функції c_j при відповідних змінних;

ґ) у стовпчики $X_1, X_2, ..., Y_1$ заносять відповідно координати векторів $P_1, P_2, ..., P_6, Y_1$;

д) заповнюють рядки (m + 1) і (m + 2). Алгоритм аналогічний до заповнення (m + 1)-го рядка, проте доданок без M заносять до рядка (m + 1), а коефіцієнт доданка, що містить M, – до рядка (m + 2).

$$\overline{План} \cdot \overline{C_б} = 0 \cdot 180 + 0 \cdot 240 + 0 \cdot 426 + (-M) \cdot 20 = -20M .$$

У рядок (m + 1) вписують 0, а в (m + 2)-й рядок -20.

Аналогічно знаходять інші елементи (m + 1)-го та (m + 2)-го рядків.

ІІ. Оцінюють складений план на оптимальність за (m + 2)-м рядком. Ітераційний процес за (m + 2)-м рядком припиняється, якщо:

1) всі штучні вектори вилучені з базису; у цьому разі подальше оцінювання оптимальності одержаного плану здійснюється за (m + 1)-м рядком;

2) не всі штучні вектори вилучені з базису, але (m + 2)-й рядок не містить більше від'ємних елементів у стовпчиках $X_1, X_2, ..., Y_1$. У цьому разі, якщо:

а) елемент, що знаходиться на перетині (m + 2)-го рядка і стовпчика «План», від'ємний, тоді задача не має розв'язків, тому що значення цільової функції прямує до нескінченності;

б) елемент, що знаходиться на перетині (m + 2)-го рядка і стовпчика «План», дорівнює нулю, тоді задача не має розв'язків, тому що система обмежень несумісна.

Кроки ІІІ–V аналогічні алгоритму простого симплексного методу.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'язати задачу, формулювання якої наведено на с. 27–28 у розділі 1, графічним методом.

2. Розв'язати задачу, формулювання якої наведено на с. 27–28 у розділі 1, простим симплексним методом. Порівняти результати розв'язання задач 1 і 2.

3. Підприємець придбав приміщення у бізнес-центрі загальною площею 80 м^2. На ній обов'язково необхідно розмістити планово-економічний відділ, якому потрібно 20 м^2. Залишок площі підприємець може здати в оренду рекламній агенції, майстерні з ремонту одягу і/або кадровій агенції.

На утримання зазначеної площі з урахуванням майбутніх надходжень від оренди підприємство може витратити не більше ніж 25 000 грн.

У табл. 2.5 наведено дані щодо реальних витрат на утримання орендаторів, а також дані стосовно прибутку від здачі площі в оренду (з розрахунку на 1 м^2).

Таблиця 2.5

Варіант	Претенденти на оренду	Дохід претендента з 1 м^2 площі	Реальні витрати на утримання орендаторів (із розрахунку на 1м^2)	Прибуток власника з 1 м^2, грн
1	Рекламна агенція	3 000	420	16 000
2	Кадрова агенція	2 000	350	14 000
3	Майстерня з ремонту	2 000	350	10 000

Відомий середній дохід з 1 м^2 площі для кожного орендатора. Власники рекламної агенції відразу попередили, що можуть взяти в користування вільну площу лише за умови, що їх загальний дохід буде не меншим ніж 30 000 грн. (з урахуванням середнього доходу з 1 м^2 площі).

Визначити, як потрібно розподілити площу між претендентами на оренду, щоб прибуток власника був максимальним.

Побудувати математичну модель та розв'язати задачу симплексним методом зі штучним базисом.

Питання для самоперевірки

1. Скільки змінних повинна містити математична модель, щоб для знаходження її оптимального розв'язку можна було використати графічний метод?
2. Що таке багатокутник розв'язку?
3. Чи можна застосовувати графічний метод для знаходження мінімуму цільової продукції?
4. Що таке одиничний вектор?
5. Яка умова оптимальності розв'язку під час розв'язування задачі симплексним методом?
6. Сформулюйте правило визначення ведучого рядка.
7. Сформулюйте правило визначення ведучого стовпця.
8. Який елемент симплексної таблиці називають ведучим?
9. Які методи розв'язання задачі лінійного програмування Вам відомі?
10. У яких випадках застосовують симплексний метод зі штучним базисом?
11. Для чого застосовують штучні змінні?
12. Чи може бути штучна змінна від'ємною?
13. З яким коефіцієнтом уводяться штучні змінні у цільову функцію?
14. В якому випадку при розв'язуванні задачі симплексним методом зіштучним базисом можна вважати задачу несумісною?
15. Яке призначення (m + 2)– рядка симплексної таблиці?

РОЗДІЛ 3
ДВОЇСТІСТЬ У ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

3.1. Математична модель двоїстої задачі

У теорії лінійного програмування для кожної задачі можна побудувати іншу – так звану двоїсту, або спряжену.

Нехай задана задача

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1\,1}x_1 + a_{k+1\,2}x_2 + \ldots + a_{k+1\,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l},\ l \le n).$$

Задача знаходження мінімального значення функції F^* за умов

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min,$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \ldots + a_{ml}y_m \ge c_l, \\ a_{1\,l+1}y_1 + a_{2\,l+1}y_2 + \ldots + a_{m\,l+1}y_m = c_{l+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases} \tag{3.2}$$
$$y_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,k},\ k \le m).$$

називається задачею, двоїстою до даної.

Зв'язок між розв'язками прямої та двоїстої задач

Існують залежності між розв'язками прямої та двоїстої задач, що формулюються у вигляді теорем.

Теорема 3.1 (перша теорема двоїстості): якщо одна з пар двоїстих задач (3.1) або (3.2) має оптимальний план, то й інша має оптимальний план, причому значення їх цільових функцій рівні між собою, тобто $F\max = F^*\min$.

Якщо ж цільова функція однієї з пари двоїстих задач не обмежена, то інша задача взагалі не має розв'язків.

Теорема 3.2 (друга теорема двоїстості для симетричних задач): план $X^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$ задачі (3.1) і план $Y^* = (y^*_1, y^*_2, \ldots, y^*_m)$ задачі (3.2) є оптимальними планами цих задач тоді й лише тоді, якщо для будь-яких *i* та *j* *(j=1, 2, ..., n; i=1, 2, …, m)* виконуються рівності:

$$(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) x_j^* = 0,$$

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) y_i^* = 0.$$

3.2. Особливості побудови математичної моделі двоїстої задачі

Математична модель двоїстої задачі має такі особливості побудови:

1) кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі;

2) кількість обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних прямої задачі;

3) коефіцієнтами при невідомих цільової функції двоїстої задачі є праві частини співвідношень системи обмежень (вільні члени системи обмежень) прямої задачі;

4) цільова функція прямої задачі прямує до максимуму, а цільова функція двоїстої задачі – до мінімуму;

5) матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень двоїстої задачі складається шляхом транспонування матриці коефіцієнтів при невідомих прямої задачі (транспонування матриці – заміна рядків стовпчиками, а стовпчиків – рядками);

6) правими частинами співвідношень системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомих цільової функції прямої задачі;

7) якщо змінна x_j прямої задачі може набувати лише невід'ємних значень, то відповідне j-те обмеження двоїстої задачі має знак «$\geq$»; якщо ж змінна x_j може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то j-те співвідношення системи обмежень двоїстої задачі має знак «$=$»;

8) якщо i-те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то i-та змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$; у протилежному разі змінна y_i може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Приклад 3. Розглянемо побудову двоїстої задачі про використання ресурсів. Згадаємо задачу про відгодівлю фермером тварин (приклад 1.1).

Припустимо, що деяке господарство вирішило викупити корми (ресурси). Фермерові необхідно встановити оптимальні ціни на ці корми. Позначимо через y_1 – ціну корму першого виду, y_2 – ціну корму другого виду, y_3 – ціну корму третього виду.

Загалом поняття ціни корму в цьому разі не збігається зі звичним для нас економічним поняттям ціни. У теорії двоїстості змінні y_1, y_2, y_3 є так званими двоїстими оцінками ресурсів. Вони показують розмір прибутку, який може дати одиниця певного ресурсу.

Очевидно, що господарство, яке закуповує корми, зацікавлене в тому, щоб витрати на них були мінімальними. Отже, цільова функція матиме вигляд $F^* = 180y_1 + 240y_2 + 426y_3 \to \min$.

З іншого боку, фермер у разі продажу кормів прагне отримати не менше грошей, ніж він би отримав, використовуючи ці корми на годівлю тварин. Тобто система обмежень матиме вигляд

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16, \\ 3y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 6, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Отже, ми одержали нову модель задачі лінійного програмування, що має назву двоїстої до вихідної:

$$F^* = 180y_1 + 240y_2 + 426y_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16, \\ 3y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 6, \end{cases}$$
$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.$$

Розв'язок двоїстої задачі можна знайти за останньою із симплексних таблиць розв'язку прямої задачі.

До останньої симплексної таблиці розв’язання задачі про відгодівлю тварин додамо ще один рядок (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

№ пор.	**Базис**	**С_б**	**План**	**16**	**6**	**0**	**0**	**0**
				X1	X2	X3	X4	X5
1	X3	0	30	0	0	1	2/11	–5/11
2	X1	16	57	1	0	0	7/22	–1/22
3	X2	6	12	0	1	0	–3/11	2/11
m + 1			984	0	0	0	38/11	4/11
				y_4^*	y_5^*	y_1^*	y_2^*	y_3^*

У цей рядок під додатковими змінними прямої задачі (x_3, x_4, x_5) вписують основні змінні двоїстої задачі (y_1, y_2, y_3).

І навпаки, під основними змінними прямої задачі (x_1, x_2) вписують додаткові змінні двоїстої задачі (y_4, y_5).

Розв'язок двоїстої задачі виписують із *(m + 1)*-го рядка. Над відповідними змінними знаходяться їх значення. Отже, $F^*_{min} = F_{max} = 984$ в точці $У^*(0;\ 38/11;\ 4/11;\ 0;\ 0)$.

Розглянемо на прикладі 3.1 економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості. Максимальний прибуток розміром 984 грош. од. фермер отримає, якщо буде відгодовувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. Однак такий самий прибуток він отримає, якщо реалізує корми за оптимальними цінами, тобто весь корм другого виду за ціною $38/11$ грош. од. і весь корм третього виду за ціною $4/11$ грош. од.

Економічна інтерпретація другої теореми двоїстості для прикладу 3.1 полягає у такому. Якщо для виготовлення продукції кількістю, заданою оптимальним планом X*, певний ресурс витрачено не в повному обсязі, то відповідна двоїста оцінка такого ресурсу буде дорівнювати нулю і він не вважатиметься «цінним» для фермера. У протилежному разі (ресурс витрачено в повному обсязі) двоїста оцінка ресурсу буде додатною і він відповідно буде «цінним».

Визначимо економічний зміст основних та додаткових змінних двоїстої задачі в досліджуваному прикладі про фермера. Як зазначалося раніше, основні змінні прямої задачі показують ціну (оцінку) корму (сировини) певного виду. Отже, змінні, y_1^*, y_2^* та y_3^* показують двоїсті оцінки корму (сировини) відповідно I, II та III видів. Двоїсті оцінки сировини другого та третього видів додатні, це означає, що ці види сировини повністю використовуються у виробництві. Двоїста оцінка сировини першого виду дорівнює нулю. Це свідчить про те, що сировина першого виду використовується не повністю. Отже, двоїсті оцінки визначають дефіцитність сировини. Крім того, величина двоїстої оцінки показує, на скільки збільшиться прибуток підприємства при збільшенні сировини відповідного виду на одиницю.

Розтлумачимо економічний зміст двоїстої оцінки $y_2^* = \frac{38}{11}$. Якщо збільшити кількість корму II виду на одиницю, тобто якщо його кількість становитиме 241, то загальний прибуток збільшиться на $\frac{38}{11}$ і дорівнюватиме $984 + \frac{38}{11} = 987\frac{5}{11}$ грош. од. При цьому числа, що знаходяться у відповідному до змінної y_2^* стовпчику (табл. 2.5), показують, як при цьому зміниться план випуску продукції: залишок сировини першого виду збільшиться на $\frac{2}{11}$ і становитиме $30\frac{2}{11}$, кількість продукції 1-го виду збільшиться на $\frac{7}{22}$ і становитиме $57\frac{7}{22}$, кількість продукції другого виду зменшиться на $\frac{3}{11}$ і становитиме $29\frac{8}{11}$.

Аналогічно збільшення сировини третього виду на одиницю дозволить знайти новий оптимальний план виробництва.

Визначимо економічний зміст додаткових змінних двоїстої задачі. Розглянемо першу нерівність двоїстої задачі $2y_1 + 4y_2 + 6y_3 \geq 16$.

Ліва частина нерівності $2y_1 + 4y_2 + 6y_3$ показує витрати (у грош. од.) на відгодівлю однієї тварини виду А (витрати на виробництво одиниці продукції певного виду); 16 – ціна від реалізації однієї тварини виду А (ціна одиниці продукції). Перетворимо цю нерівність на рівняння. Уведемо додаткову змінну y_4: $2y_1 + 4y_2 + 6y_3 - y_4 = 16$.

Величина y_4 показує, на скільки витрати на виробництво одиниці продукції більші за ціну цієї продукції. Виходячи з визначеного економічного змісту, можна зробити висновок про вигідність виробництва того чи іншого виду продукції: якщо додаткова змінна двоїстої задачі додатна, то це означає, що продукцію відповідного виду випускати економічно не вигідно, оскільки ціна сировини, що витрачається на виробництво одиниці продукції, більша за ціну цієї продукції.

Аналізуючи одержаний розв'язок, робимо висновки, що, оскільки $y_4 = y_5 = 0$, то вартість сировини на виробництво цих видів продукції не перевищує ціни одиниці продукції, а отже, випускати продукцію даних видів економічно вигідно.

3.3. Двоїстий симплексний метод

У двоїстому симплексному методі порівнянно зі звичайним симплекс-методом змінюються правила визначення ведучого рядка і ведучого стовпчика, а також критерій оптимальності.

Особливості двоїстого симплексного методу:

1) критерій оптимальності: стовпчик «План» не містить від'ємних елементів;

2) правило вибору ведучого рядка: серед від'ємних елементів стовпчика «План» знаходимо найменший. Рядок, в якому він знаходиться, називається ведучим, а змінну, що йому відповідає, вилучають із базису;

3) правило вибору ведучого стовпчика: ділять почленно елементи (m + 1)-го рядка, взяті зі знаком «мінус», на відповідні від'ємні елементи ведучого рядка. Серед одержаних часток вибирають найменшу. Стовпчик, в якому вона знаходиться, називають ведучим, а змінну, яка йому відповідає, вилучають із базису.

Правила перерахунку елементів нової симплексної таблиці аналогічні звичайному симплексному методу.

Задачі для самостійного розв’язування

Для задач 2 і 3, наведених на с. 42, виконати такі дії:

1) записати математичну модель задачі в основній формі;

2) скласти та розв’язати задачу, двоїсту до даної;

3) з останньої симплексної таблиці розв’язку прямої задачі виписати оптимальний план;

4) з останньої симплексної таблиці розв’язку прямої задачі виписати розв’язок двоїстої задачі.

Питання для самоперевірки

1. Скільки змінних повинно бути у двоїстій задачі?

2. Скільки обмежень повинно бути у двоїстій задачі?

3. До чого прагне цільова функція прямої задачі, якщо цільова функція двоїстої прямує до мінімуму?

4. Що є правими частинами співвідношень системи обмежень двоїстої задачі?

5. Припустимо, що змінна x_j прямої задачі може набувати лише невід'ємних значень. Який знак матиме відповідне j-те обмеження двоїстої задачі?

6. Припустимо, що змінна x_j прямої задачі може набувати будь-яких значень. Який знак матиме відповідне j-те обмеження двоїстої задачі?

7. Якщо i-те співвідношення прямої задачі є нерівністю, то яких значень може набувати i-та змінна двоїстої задачі?

8. Якщо i-те співвідношення прямої задачі є рівнянням, то яких значень може набувати i-та змінна двоїстої задачі?

9. Сформулюйте першу теорему двоїстості.

10. Наведіть економічну інтерпретацію першої теореми двоїстості.

11. Сформулюйте другу теорему двоїстості для симетричних задач.

12. Надайте економічну інтерпретацію другої теореми двоїстості.

13. Яким співвідношенням пов’язані значення цільових функцій прямої і двоїстої задач?

14. Назвіть критерій оптимальності двоїстого симплексного методу.

15. Сформулюйте правило вибору ведучого рядка у двоїстому симплексному методі.

16. Сформулюйте правило вибору ведучого стовпчика у двоїстому симплексному методі.

17. Сформулюйте правило перерахунку елементів нової симплексної таблиці у двоїстому симплексному методі.

18. У яких випадках застосовують двоїстий симплексний метод?

РОЗДІЛ 4
ПОСТОПТИМАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Постоптимальний аналіз (аналіз моделі на чутливість) проводять після того, як отримано оптимальний розв'язок задачі. У межах такого аналізу виявляють чутливість оптимального розв'язку до визначених змін вихідної моделі. Метою проведення постоптимального аналізу є дослідження впливу можливих змін вихідних умов на одержаний раніше оптимальний розв'язок. Важливість цього дослідження для задач лінійного програмування пояснюється тим, що більшість на практиці зазвичай беруть наближені значення параметрів задачі лінійного програмування, а точні значення параметрів заздалегідь не відомі. Виділяють аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції та аналіз зміни правих частин системи обмежень, які будуть розглянуті нижче на прикладі аналізу розв'язку задачі прикладу 1.1.

4.1. Постоптимальний аналіз зміни коефіцієнтів цільової функції

Згадаємо приклад 1.1. Аналіз чутливості на зміну коефіцієнтів цільової функції повинен дати відповідь на запитання: на скільки можна змінити (збільшити або зменшити) прибуток від реалізації однієї тварини, за якого знайдений раніше оптимальний план відгодовування тварин залишиться незмінним. Зрозуміло, що прибуток при цьому зміниться (відповідно до зміни ціни – зменшиться або збільшиться), але залишатиметься максимальним з усіх можливих за наявних умов.

Приклад 4.1. За умовою прикладу 1.1 прибуток від реалізації однієї тварини виду А становить 16 грош. од. Припустимо, що він змінюється на величину Δc_1. Зазначимо, що в разі збільшення прибутку $\Delta c_1 \geq 0$, у разі зменшення – $\Delta c_1 \leq 0$. Отже, маємо вираз для прибутку від реалізації однієї тварини виду А: $16 + \Delta c_1$.

Знайти межі величини Δc_1 можна з *(m+1)*-го рядка останньої симплексної таблиці (табл. 2.3). Розраховуючи ці елементи, необхідно використовувати коефіцієнти цільової функції. Результат обчислень зі зміненим значенням прибутку від реалізації однієї норки подано у табл. 4.1.

Таблиця 4.1

№ пор.	**Базис**	**$C_б$**	**План**	$16+\Delta c_1$	**6**	**0**	**0**	**0**
				X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
1	x_3	0	30	0	0	1	2/11	–5/11
2	x_1	$16+\Delta c_1$	57	1	0	0	7/22	–1/22
3	x_2	6	12	0	1	0	–3/11	2/11
m + 1			$984+57\Delta c_1$	0	0	0	$\frac{76+7\Delta c_1}{22}$	$\frac{8-\Delta c_1}{22}$

Для оптимальності розв'язку необхідно, щоб елементи *(m+1)*-го рядка, що знаходяться у стовпчиках $X_1, X_2, \ldots, X_n$, були невід'ємними. Тобто повинна виконуватися система нерівностей

$$\begin{cases} \dfrac{76+7\Delta c_1}{22} \ge 0, \\ \dfrac{8-\Delta c_1}{22} \ge 0. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є нерівності $\Delta c_1 \ge -\dfrac{76}{7}$ та $\Delta c_1 \le 8$, що задають межі зміни величини прибутку від реалізації однієї тварини виду А ($c_{\min} = 16 - \dfrac{76}{7} = \dfrac{36}{7}$; $c_{\max} = 16 + 8 = 24$). При цьому оптимальний план, що забезпечить максимальний прибуток, не зміниться.

Отже, якщо прибуток від реалізації однієї тварини виду А знаходиться у межах від $\dfrac{36}{7}$ до 24 грош. од., то оптимальний план відгодовування тварин становить 57 тварин виду А і 12 тварин виду В. Якщо ж прибуток від реалізації однієї тварини виду А виходить за межі зазначеного інтервалу, то оптимальний план відгодовування тварин змінюється і необхідно знову застосовувати заходи щодо його знаходження.

Аналогічно можна знайти межі зміни прибутку від реалізації однієї тварини виду В, при якому оптимальний план відгодовування тварин не зміниться.

4.2. Постоптимальний аналіз зміни правих частин системи обмежень

При з'ясуванні економічного змісту двоїстих оцінок установлено, що додатна величина двоїстої оцінки сировини певного виду показує, на скільки збільшиться прибуток за зростання кількості відповідної сировини на одиницю. Також можна визначити, до яких меж ми можемо збільшувати (зменшувати) кількість відповідної сировини, і при цьому оптимальний план двоїстої задачі (у структурному розумінні) залишиться незмінним (у базисі залишаться ті самі змінні, що й були, але з новими значеннями).

Для розв'язання цієї задачі знаходять так званий *інтервал стійкості* (*незмінності*) *двоїстих оцінок*.

Приклад 4.2. Визначимо інтервали стійкості для всіх видів сировини у прикладі 1.1.

Замінимо вектор $P_0\begin{pmatrix}180\\240\\426\end{pmatrix}$ на вектор $P_0^{'}\begin{pmatrix}180+D_1\\240+D_2\\426+D_3\end{pmatrix}$. Змінна D_1 показує, на скільки може змінитися запас ресурсу стосовно початкового значення 180, і при цьому одержаний розв'язок залишиться оптимальним. Змінні D_2 і D_3 мають аналогічний зміст щодо запасів сировини II і III видів.

При відомому оптимальному розв’язку прямої задачі новий розв’язок задачі зі зміненими правими частинами системи обмежень знаходять за формулою:

$$X_Б = P^{-1} P_0, \tag{4.1}$$

де $X_Б$ – матриця розв'язку, який планується знайти;

P^{-1} – матриця, розміщена в останній симплексній таблиці розв’язку прямої задачі під початковими базисними змінними (табл. 2.3);

P_0 – матриця нових вільних членів.

Для того щоб новий розв’язок був припустимим, необхідне виконання нерівності

$$X_Б = P^{-1} P_0 \geq 0. \tag{4.2}$$

За даними табл. 2.3, згідно з формулою (4.2), одержимо таку систему:

$$X_Б = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/11 & -5/11 \\ 0 & 7/22 & -1/22 \\ 0 & -3/11 & 2/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 + D_1 \\ 240 + D_2 \\ 426 + D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 + 11D_1 + 2D_2 - 5D_3 \\ 1254 + 7D_2 - D_3 \\ 132 - 3D_2 + 2D_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $D_2 = 0$ і $D_3 = 0$, залишається нерівність $330 + 11D_1 \geq 0$ або $D_1 \geq -30$. Це свідчить про те, що якщо кількість сировини I виду зменшувати на величину до 30 одиниць, тобто її кількість коливатиметься у межах $[150, 180]$, то оптимальний план двоїстої задачі залишиться незмінним.

Якщо $D_1 = 0$ і $D_3 = 0$, одержуємо нерівності

$$\begin{cases} 330 + 2D_2 \geq 0, \\ 1254 + 7D_2 \geq 0, \\ 132 - 3D_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} D_2 \geq -165, \\ D_2 \geq -1254/7, \\ D_2 \leq 44. \end{cases}$$

Отже, $-165 \leq D_2 \leq 44$. Це означає, що кількість сировини II виду може зменшитися на 165 одиниць або збільшитися на 44 одиниці щодо початкової кількості. За початковою умовою задачі кількість сировини другого виду дорівнює 240 одиницям. Отже, незмінність двоїстих оцінок залишиться у межах коливання сировини II виду від 75 одиниць до 288.

Для знаходження інтервалу стійкості двоїстої оцінки сировини III виду беремо $D_1 = 0$ і $D_2 = 0$. Тоді $-66 \leq D_3 \leq 66$. Отже, збереження незмінності двоїстої оцінки сировини III виду знаходиться у межах від 360 до 492.

Крім аналізу стійкості двоїстих оцінок, постоптимальний аналіз зміни вільних членів системи обмежень може давати відповідь на запитання, чи призведе зміна вільних членів системи обмежень прямої задачі до зміни поточного оптимального розв'язку і якщо так, то як ефективно знайти новий оптимальний розв'язок у разі його існування.

У загальному випадку зміна вільних членів системи обмежень вихідної задачі може призвести до однієї із ситуацій:

1) поточний базисний розв’язок залишається допустимим;

2) поточний базисний розв’язок стає неприпустимим. Неприпустимість розв'язку виявляється в тому, що хоча б один елемент вектора «План» стає від'ємним, тобто одна або декілька базисних змінних набувають від’ємного значення;

3) поточний базисний розв’язок стає неоптимальним;

4) поточний базисний розв’язок стає неоптимальним і неприпустимим.

У першому випадку питань не виникає. У другому випадку для поновлення допустимості розв'язку використовують двоїстий симплексний метод. У третій ситуації застосовують простий симплексний метод для одержання нового симплексного розв'язку. Четверта ситуація потребує використання як прямого, так і двоїстого симплексного методів.

Приклад 4.3. Припустимо, що фермер (приклад 1.1) планує розширити власне господарство за умов збільшення запасів кормів на 20 %, тобто запаси кормів становитимуть 216, 288 та 511.2 умовних одиниць відповідно. Визначити, чи буде це економічно вигідним рішенням.

Розв’язання

За формулою (4.1)

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/11 & -5/11 \\ 0 & 7/22 & -1/22 \\ 0 & -3/11 & 2/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 216 \\ 288 \\ 511{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 68{,}4 \\ 14{,}4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, базисні змінні x_1, x_2, x_3 із новими значеннями $68{,}4; 14{,}4; 36$, як і раніше, становлять припустимий розв'язок. Максимальне значення цільової функції $F = 16 \cdot 68{,}4 + 6 \cdot 14{,}4 = 1180{,}8$ грош. од.

Отже, збільшення запасів кормів на 20 % дасть додатковий прибуток розміром $1180{,}8 - 984 = 196{,}8$ грош. од.

Приклад 4.4. Припустимо, що частину коштів, які витрачали на корм першого виду (його залишки становлять 30 грош. од.), фермер вирішив витратити на закупівлю кормів 2-го та 3-го видів. Нехай нові запаси кормів становлять 155, 250 і 450 грош. од. відповідно. Визначити економічну вигідність цього рішення.

Розв’язання

Знайдемо новий розв’язок за формулою 4.1:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/11 & -5/11 \\ 0 & 7/22 & -1/22 \\ 0 & -3/11 & 2/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 155 \\ 250 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45/11 \\ 650/11 \\ 150/11 \end{pmatrix}.$$

Як бачимо, маємо випадок, що підпадає під другу ситуацію – одержаний розв'язок став недопустимим, оскільки $x_3 = -45/11$. Для повернення в область допустимих розв'язків та одержання відповіді на запитання задачі необхідно застосувати двоїстий симплексний метод.

В останній симплексній таблиці розв'язку прямої задачі замінюють елементи стовпчика «План» на елементи одержаного нового вектора розв'язків. Причому значення цільової функції також змінюють (табл. 4.2).

У нашому прикладі значення цільової функції дорівнюватиме $F = 16 \cdot \frac{650}{11} + 6 \cdot \frac{150}{11} = \frac{11300}{11}$.

Таблиця 4.2

№ пор.	Базис	$C_б$	План	16	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_3	0	–45/11	0	0	1	2/11	–5/11
2	x_1	16	650/11	1	0	0	7/22	–1/22
3	x_2	6	150/11	0	1	0	–3/11	2/11
m + 1			11 300/11	0	0	0	38/11	4/11

Як бачимо з табл. 4.2, одержаний план не є оптимальним, оскільки стовпчик «План» містить від’ємний елемент. Отже, необхідно переходити до нової симплексної таблиці. Ведучий рядок – перший (він містить від’ємний елемент стовпчика «План»), ведучий стовпчик – $\mathbf{X_5}$ (від’ємний елемент у ведучому рядку один, отже, він і визначає ведучий стовпчик). Ведучий елемент – (–5/11). Здійснивши необхідні розрахунки, одержуємо табл. 4.3, аналіз якої дозволяє зробити висновок про оптимальність одержаного плану (всі елементи стовпчика «План» (m + 1)-го рядка додатні.

Таблиця 4.3

№ пор.	Базис	$C_б$	План	16	6	0	0	0
				X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	x_5	0	9	0	0	–2,2	–0,4	1
2	x_1	16	1 309/22	1	0	–0,1	33/110	0
3	x_2	6	12	0	1	0,4	–0,2	0
m + 1			1024	0	0	0,8	198/55	0

Отже, нова кількість кормів дозволить одержати прибуток розміром 1 024 грош. од, що на 1024 – 948 = 40 грош. од. більше за попередній.

Задачі для самостійного розв’язування

Виконати постоптимальний аналіз розв’язку задачі 2, умову якої наведено на с. 42 в розділі 2.

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте призначення постоптимального аналізу.

2. Назвіть види постоптимального аналізу.

3. Який вид постоптимального аналізу дає нам відповідь на запитання: «*До яких меж ми можемо збільшувати (зменшувати) кількість відповідної сировини, і при цьому оптимальний план двоїстої задачі* (у структурному розумінні) *залишиться незмінним* (у базисі залишаться ті самі змінні, що й були, але з новими значеннями)?»

4. Назвіть ситуації, до яких може призвести зміна вільних членів системи обмежень?

РОЗДІЛ 5
НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

5.1. Постановка задачі нелінійного програмування

У загальному вигляді задача нелінійного програмування складається з визначення максимального чи мінімального значення функції

$$f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5.1}$$

за умов, що її змінні задовольняють співвідношення:

$$\begin{cases} g_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \le b_i \quad (i=\overline{1,k}), \\ g_i(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n) = b_i \quad (i=\overline{k+1,m}) \end{cases}, \tag{5.2}$$

де f і g_i – деякі відомі функції n змінних, а b_i – задані числа.

У результаті розв’язування задачі визначають точку $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, координати якої задовольняють співвідношення (5.2), причому таку, що для будь-якої іншої точки $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координати якої також задовольняють співвідношення (5.2), виконується нерівність $f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \ge f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ($f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \le f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

Якщо f і g_i – лінійні функції, то задача (5.1)–(5.2) є задачею лінійного програмування.

5.2. Графічний метод розв’язування задачі нелінійного програмування

Процес знаходження розв’язку задачі нелінійного програмування (5.1)–(5.2) графічним методом складається з таких кроків:

1) знаходять область допустимих розв’язків задачі, визначену співвідношеннями (5.2) (якщо вона порожня, то задача не має розв’язку);
2) будують гіперповерхню $f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h$;
3) визначають гіперповерхню найвищого (найнижчого) рівня або встановлюють неможливість розв’язання задачі через необмеженість функції (5.1) зверху (знизу) на множині допустимих розв’язків;
4) знаходять точку області допустимих розв’язків, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнижчого) рівня, та обчислюють в ній значення функції (5.1) у цій точці.

Приклад 5.1. Знайти максимальне значення функції

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \tag{5.3}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ \quad\quad x_2 \le 4, \end{cases} \tag{5.4}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{5.5}$$

Розв'язання

Цільова функція (5.3) нелінійна, тому задача (5.3)–(5.5) є задачею нелінійного програмування. Областю допустимих розв'язків даної задачі є багатокутник OABC (рис. 5.1).

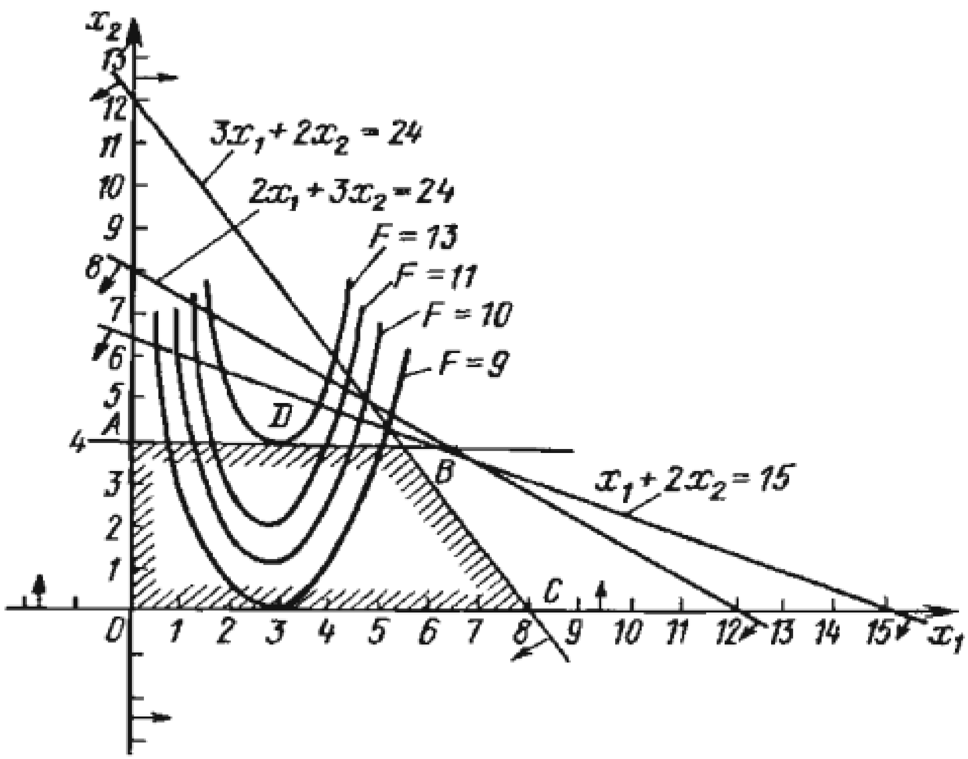


Рисунок 5.1 – Область допустимих розв'язків задачі прикладу 5.1

Для знаходження розв'язку потрібно знайти таку точку багатокутника OABC, в якій функція (5.3) набуває максимального значення. Побудуємо лінію рівня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$, де h – деяка стала, і дослідимо її поведінку при різних значеннях.

При кожному значенні *h* отримуємо параболу, яка зі збільшенням *h* буде вище підніматися над віссю Ox_1. Отже, функція *F* набуває максимального значення в точці дотику (*D*) однієї з парабол із границею багатокутника OABC. Координати точки *D* можна знайти із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ \quad\quad x_2 = 4. \end{cases} \tag{5.6}$$

Розв’язавши цю систему, одержуємо $x_1^* = 3; \quad x_2^* = 4.$ Отже, $F_{max} = 13$ у точці $X^* = (3; 4)$.

У задачі (5.3)–(5.5) точка максимального значення цільової функції не є вершиною багатокутника розв’язків. Тому процедура перебору вершин, що використовувалася під час розв’язування задач лінійного програмування, незастосовна для розв’язання цієї задачі.

Приклад 5.2. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \tag{5.7}$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases} \tag{5.8}$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0. \tag{5.9}$$

Розв’язання

Областю допустимих розв’язків задачі (5.7)–(5.9) є трикутник АВС (рис. 5.2).

Нехай значення цільової функції дорівнює h. Отримаємо лінію рівня $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h$. Це буде коло з центром у точці E (3; 4) і радіусом $\sqrt{h}$. Із збільшенням (зменшенням) числа h значення функції F відповідно збільшується (зменшується).

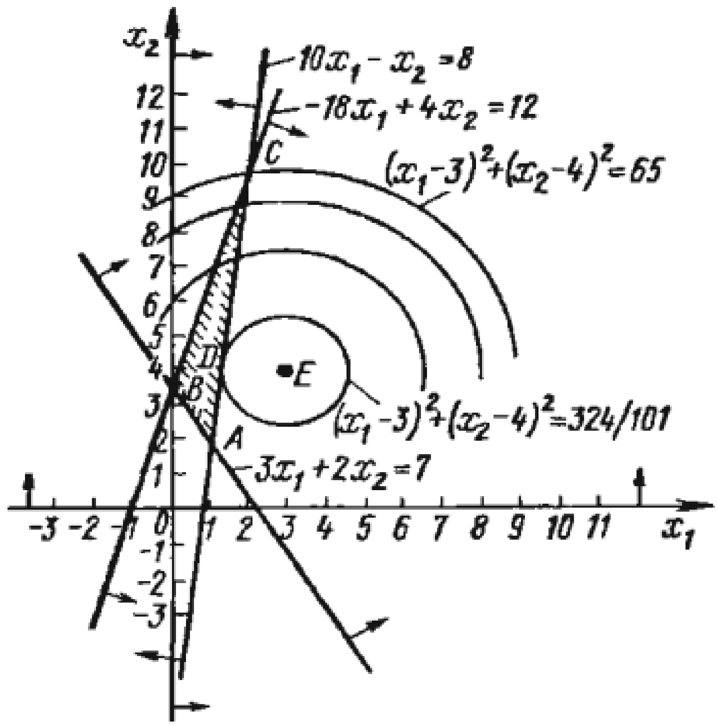


Рисунок 5.2 – Область допустимих розв’язків задачі прикладу 5.2

Будуючи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що мінімального значення цільова функція набуває у точці D, в якій коло дотикається до області розв'язків. Для визначення координат цієї точки скористаємося рівністю кутових коефіцієнтів прямої $10x_1 - x_2 = 8$ і дотичної до кола в точці D. Із рівняння прямої $x_2 = 10x_1 - 8$ бачимо, що її кутовий коефіцієнт у точці D дорівнює 10. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо як значення дотичної функції x_2 від змінної x_1 у цій точці. Розглядаючи x_2 як неявну функцію змінної x_1 і диференціюючи рівняння кола, одержуємо $2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4)x_2' = 0$, звідки $x_2' = -(x_1 - 3)/(x_2 - 4)$. Прирівнявши знайдений вираз до числа 10, одержимо рівняння для визначення координат точки D. Приєднаємо до нього рівняння прямої, на якій лежить точка D. Одержимо систему $\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8, \end{cases}$ звідки $x_1^* = 123/101, \quad x_2^* = 422/101$. Таким чином, $F_{\min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101$. Як бачимо з рис. 5.2, цільова функція набуває максимального значення у точці C (2; 12). Її координати визначені шляхом розв'язання системи рівнянь прямих, на перетині яких знаходиться точка C. Таким чином, $F_{max} = 65$.

Приклад 5.3. Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \tag{5.10}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \end{cases} \tag{5.11}$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0. \tag{5.12}$$

Розв'язання

Областю допустимих розв'язків вихідної задачі (5.10)–(5.12) є багатокутник ABCDE (рис. 4.3), а лініями рівня – кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ із центром у точці F (4; 3) та радіусом $\sqrt{h}$.

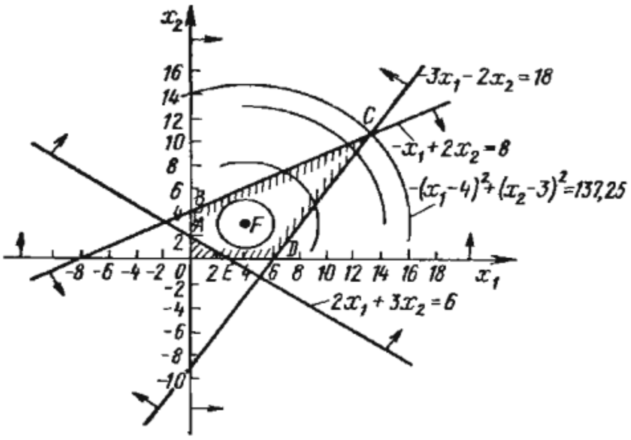


Рисунок 5.3 – Область допустимих розв'язків задачі прикладу 5.3

З рисунка 5.3 бачимо, що цільова функція набуває мінімального значення в точці F (4; 3), а максимального – в точці C (13; 10,5). Отже, F_{min} = 0 і $F_{max} = 137{,}25$.

5.3. Метод множників Лагранжа

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування, система обмежень якої складається лише з рівнянь, відсутні умови невід'ємності змінних і функцій f і g_i неперервні разом зі своїми частинними похідними:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max\ (\min), \tag{5.13}$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i, \quad (i = \overline{1,m}). \tag{5.14}$$

У курсі математичного аналізу задачу (5.13)–(5.14) називають класичною задачею оптимізації. Щоб знайти розв'язок цієї задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називаються *множниками Лагранжа*, і складають *функцію Лагранжа:*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right]. \tag{5.15}$$

Далі знаходять частинні похідні $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}\ (j = \overline{1,n})$ та $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}\ (i = \overline{1,m})$ і розглядають систему $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad (i = \overline{1,m}) \end{cases} \tag{5.16}$$

з $n + m$ змінними $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Будь-який розв'язок системи рівнянь (5.16) визначає точку $X = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$, в якій функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ може мати екстремум. Подальші дослідження знайдених точок проводять так, як і у випадку безумовного екстремуму.

Алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа:

1) складають функцію Лагранжа;
2) знаходять частинні похідні від функції Лагранжа за змінними x_j та λ_i і прирівнюють їх до нуля;
3) розв'язують систему рівнянь (5.16), знаходять точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум;

4) серед точок, підозрілих на екстремум, знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (5.13) у цих точках.

Приклад 5.4. За планом виробництва продукції підприємству потрібно виготовити 180 штук виробів. Ці вироби можна виготовляти двома технологічними способами. При виробництві I способом затрати становлять $4x_1 + x_1^2$ грош. од., а при виготовленні виробів II способом вони становлять $8x_2 + x_2^2$ грош. од. Визначити, скільки виробів кожним із способів потрібно виготовити, так щоб загальні затрати підприємства на виробництво продукції були мінімальними.

Розв'язання

Математична постановка задачі складається із знаходження мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min \tag{5.17}$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 180, \tag{5.18}$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \tag{5.19}$$

Для розв'язання задачі використаємо метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (5.17) за умов (5.18), тобто без урахування умови невід'ємності змінних. Для цього складемо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

Обчислимо її частинні похідні за x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Перенесемо у праву частину перших двох рівнянь λ і, прирівнявши їх ліві частини, одержимо

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2, \text{ або } x_1 - x_2 = 2.$$

Приєднаємо до одержаного рівняння третє рівняння. Отримаємо систему двох рівнянь із двома змінними:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, маємо $x_1^* = 91,\ x_2^* = 89$. Точка $X^* = (91, 89)$ є точкою екстремуму. Другі частинні похідні функції F додатні, отже, у точці $X^* = (91, 89)$ функція f має умовний мінімум. Це означає, що якщо підприємство виготовляє 91 виріб першим технологічним способом і 89 виробів другим технологічним способом, то загальні затрати будуть мінімальними і становитимуть $4 \cdot 91 + 91^2 + 8 \cdot 89 + 89^2 = 17\,278$ грош. од.

Приклад 5.5. Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$.

Розв’язання

Складемо функцію Лагранжа $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(5 - x_1 - x_2)$.

Знайдемо її частинні похідні за x_1, x_2, λ і прирівняємо їх до нуля. У результаті отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 5 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із першого і другого рівнянь маємо $x_1 - x_2 = 0$. Додамо до отриманого рівняння третє і, розв’язавши утворену систему рівнянь, знаходимо $x_1^* = \dfrac{5}{2},\ x_2^* = \dfrac{5}{2}$. Таким чином, у точці $\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ дана функція може мати умовний екстремум. Знайшовши другі частинні похідні, можна показати, що у цій точці функція має умовний мінімум і $F_{\min} = \dfrac{25}{2}$.

Приклад 5.6. Знайти найменше значення функції $Z = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2$ за умови $x + y = 6$.

Розв’язання

$F(x, y, \lambda) = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2 + \lambda(6 - x - y)$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4(x-1) - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 6(y-3) - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 6 - x - y = 0. \end{cases}$$

Розв’яжемо систему

$$\begin{cases} 4(x-1)=\lambda, \\ 6(y-3)=\lambda, \\ \quad 6=x+y. \end{cases}$$

Далі *x=(λ+4)/4 ; y=(λ+18)/6* . Підставивши ці значення у третє рівняння, отримаємо *6= (λ+4)/4)+ (λ+18)/6 = (3λ+12+2λ+36)/12*, звідки *λ=4,8*. Отже, *x = 2,2; y = 3,8*. Точка (2,2; 3,8) є точкою екстремуму. За допомогою других похідних встановлюємо, що знайдена точка є точкою мінімуму. Найменше значення функції *z* дорівнює $2\cdot(2{,}2-1)^2+3\cdot(3{,}8-3)^2=4{,}8$.

Задачі для самостійного розв’язування

Деяку продукцію на підприємстві можна виготовити двома технологічними способами. Перший спосіб потребує затрат, що дорівнюють $a_0+a_1x_1+a_2x_2^2$, а другий – $b_0+b_1x_2+b_2x_2^2$. Визначити, скільки виробів із їх загальної кількості d штук необхідно виготовити кожним із можливих способів.

Значення $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2, d$ взяти із таблиці 5.1 згідно з варіантом.

Розв’язати задачу графічним методом та методом множників Лагранжа.

Таблиця 5.1

Варіант	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2	d
1	2	4	6	1	8	5	4
2	4	4	4	8	6	9	10
3	3	2	6	8	4	9	5

Питання для самоперевірки

1. За яких умов задача математичного програмування є задачею нелінійного програмування?
2. Сформулюйте постановку задачі нелінійного програмування у загальному вигляді.
3. Що є результатом розв’язання задачі нелінійного програмування?
4. Охарактеризуйте основні етапи графічного методу розв’язання задачі нелінійного програмування.
5. Як знайти область допустимих розв’язків задачі нелінійного програмування?

6. Що називають множниками Лагранжа?

7. У чому полягає суть методу множників Лагранжа?

8. Як скласти функцію Лагранжа?

9. З яких етапів складається алгоритм визначення екстремальних точок методом множників Лагранжа?

10. За якої умови знайдена методом множників Лагранжа точка умовного екстремуму функції є точкою мінімуму?

РОЗДІЛ 6
ДИСКРЕТНЕ ТА СТОХАСТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

6.1. Постановка задачі дискретного програмування

Дискретними задачами дослідження операцій називають задачі, в яких одна, декілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. Окремий клас задач дискретного програмування становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень, тобто задачі ***цілочислового програмування***.

Під задачею дискретного програмування розуміємо задачу дослідження операцій

$$f(x^0) = \max(\min) f(x), x \in G,$$

множина допустимих рішень якої скінченна, тобто $0 \le |G| = N < \infty,$ де N – число елементів множини G.

Особливості задач дискретного програмування.

1. Нерегулярність. Дискретні задачі характеризуються тим, що область допустимих значень не опукла та незв’язна.

2. Складності при визначенні околу. Близькі одна до одної точки можуть суттєво відрізнятися за значеннями функції в них. Тому в задачах дискретного програмування близькість двох точок $x^1 \in G$ та $x^2 \in G$ визначається за оцінюванням значень функції в них $f(x^1)$ та $f(x^2)$

3. Виконання перебору значної кількості варіантів допустимих рішень потребує застосовування ЕОМ із великою обчислювальною потужністю.

У більшості економічних задач множина допустимих рішень повинна бути виражена цілими числами. Наприклад, кількість одиниць продукції, кількість обладнання тощо.

Екстремальна задача, змінні якої набувають лише цілочислових значень, називається ***задачею цілочислового дискретного програмування***.

У математичній моделі задачі цілочислового програмування цільова функція і функції системи обмежень можуть бути лінійними, нелінійними та змішаними. Загальний вигляд основної задачі лінійного програмування (ЗЛП), у якій змінні можуть бути лише цілими числами, такий:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \qquad (6.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (6.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{6.3}$$

$$x_j \text{ – цілі } (j = \overline{1,n}). \tag{6.4}$$

Розв’язання задачі (6.1)–(6.4) симплексним методом не обов’язково дає цілочислову відповідь. У такому разі для обчислення оптимального плану задачі потрібні спеціальні методи.

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують дві основні групи методів:

– методи відтинання;
– комбінаторні методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі вводяться у модель спеціальні додаткові обмеження, що враховують цілочисловість змінних, многокутник допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо до того часу, поки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень. До цієї групи належать:

- методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);
- методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на повному переборі всіх допустимих цілочислових розв'язків, тобто вони реалізують процедуру цілеспрямованого перебору, під час якої розглядається лише частина розв'язків (досить невелика), а решта враховується одним зі спеціальних методів.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж. Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає розбиття початкової задачі на дві підзадачі виключенням областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідженням кожної окремої частини многокутника допустимих розв'язків.
Розглянемо приклади постановки задачі цілочислового програмування.

Приклад 6.1. На виробничій ділянці необхідно встановити устаткування трьох типів. Вартість одиниці устаткування першого типу становить 2 млн грн, другого – 3 млн грн і третього –1 млн грн. На закупівлю устаткування виділено 20 млн грн. Площа виробничої ділянки становить 40 м^2. Продуктивність одиниці кожного типу устаткування відповідно дорівнює 2, 4 і 3 одиниці за зміну. Визначити, скільки устаткування кожного типу необхідно закупити, щоб одержати максимальну продуктивність виробничої ділянки, якщо для установлення одиниці устаткування першого типу потрібно 9 м^2 площі, другого – 7 і третього – 10 м^2.

Позначимо через x_1, x_2 і x_3 кількість устаткування кожного типу, що закуповується. Тоді математична модель задачі набере вигляду

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$, $2x_1 + 3x_2 + x_3 <= 20$,

$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 <= 40$, $x_j \geq 0$; x_j – цілі ($j = \overline{1,3}$).

Приклад 6.2. Транспортне судно вантажопідйомністю P і місткістю V завантажується n неподільними різними предметами. Для кожного предмета відомі такі величини, як вага p_j , вартість перевезення c_j і об'єм V_j $(j = \overline{1,n})$. Необхідно завантажити судно предметами так, щоб їх сумарна вартість перевезення була максимальною і виконувалися обмеження з вантажопідйомності та місткості.

Якщо позначити

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{якщо } j\text{-й предмет завантажується на судно } (j = \overline{1,n}), \\ 0, \text{ у протилежному разі,} \end{cases}$$

то математична модель задачі набере вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \; \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq P; \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq V.$$

Задачі з прикладу 6.1 та 6.2 можуть бути розв'язаними методом Гоморі, алгоритм якого наведено у п. 6.2, або методом гілок і меж, алгоритм якого наведено у п. 6.3.

6.2. Алгоритм методу Гоморі

Одним із способів розв'язання задач цілочислового програмування є метод Гоморі, складений із таких етапів:

1. Знаходять розв'язок задачі цілочислового програмування симплексним методом, незважаючи на умову цілочисловості змінних.
2. Аналізують знайдений розв'язок: якщо серед його компонентів немає дробових чисел, то знайдений план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування; у протилежному разі складають додаткове обмеження для змінної, яка в оптимальному плані задачі (6.1)–(6.3) має максимальне дробове значення, а в оптимальному плані задачі (6.1)–(6.4) повинна бути цілочисловою.

$$\sum_j f(a_{ij}^*) x_j \geq f(b_i^*) \qquad (6.5)$$

У цій нерівності значення a_{ij}^* *і* b_i^* виписують з останньої симплексної таблиці з рядка, що відповідає змінній, для якої складається додаткове обмеження, $f(a_{ij}^*)$ *і* $f(b_i^*)$ – дробові частини відповідних чисел.

Довідкова інформація

Дробовою частиною числа називається різниця між цим числом і його цілою частиною.

Цілою частиною числа називається найбільше ціле число, яке не перевищує дане.

Наприклад, $f(\frac{1}{3})=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$; $f(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}$.

3. За допомогою двоїстого симплексного методу знаходять розв'язок задачі шляхом введення додаткового обмеження.
4. За необхідності складають ще одне додаткове обмеження і продовжують ітераційний процес до отримання оптимального плану задачі або до встановлення неможливості її розв'язання.

Приклад 6.3. Молокозавод випускає два види йогуртів – «Вишенька» та «Полуничний» і використовує для цього два види добавок. Норми витрат добавок кожного виду на виготовлення 1 т за видами подано у табл. 6.1. У ній також зазначені прибуток від реалізації 1 т йогурту кожного виду і загальна кількість добавок за видами.

Скласти такий план виробництва, при якому загальний прибуток підприємства буде максимальним.

Таблиця 6.1

Вид добавки	**Норми витрат добавок на 1 т йогурту, кг**		**Запаси добавок, кг**
	«Вишенька»	**«Полуничний»**	
I	2	1	$6\frac{1}{3}$
II	1	3	4
Прибуток від реалізації 1 т йогурту, тис. грн	1	4	

Розв'язання

Нехай x_1 – кількість (у тоннах) йогурту «Вишенька», x_2 – кількість (у тоннах) йогурту «Полуничний». Тоді прибуток підприємства буде становити

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6\frac{1}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \text{цілі}.$$

Запишемо задачу у формі основної задачі лінійного програмування:

$$F = x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6\dfrac{1}{3}, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 - \text{цілі}.$$

Складена задача є частково цілочисловою, оскільки змінні x_3 та x_4 можуть набувати не лише цілочислових значень.

Застосуємо алгоритм розв’язання цілочислових задач лінійного програмування методом Гоморі.

1. Розв’яжемо задачу симплексним методом без урахування умови цілочисловості змінних x_1 та x_2 (табл. 6.2).

Таблиця 6.2

Пор. ном.	**Базис**	**$C_б$**	**План**	**1**	**4**	**0**	**0**	**Оцінні відношення**
				X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	
1	X_3	0	$6\frac{1}{3}$	2	**1**	1	0	$6\frac{1}{3}$
2	**X_4**	**0**	**4**	**1**	**3**	**0**	**1**	$4/3$
m+1			0	−1	**−4**	0	0	
1	X_3	0	5	5/3	**0**	1	-1/3	
2	X_2	4	4/3	1/3	**1**	0	1/3	
m+1			16/3	1/3	**0**	0	4/3	

2. Проналізуємо знайдений розв’язок: $F = 16/3 \text{ в т. } X^*(0; 4/3; 5; 0)$. У цьому плані змінна x_2 набула дробового значення. Тому необхідно перейти до нової задачі, додавши до системи обмежень ще одне обмеження:

$$f(1/3)x_1 + f(1)x_2 + f(0)x_3 + f(1/3)x_4 \geq f(4/3).$$

Знаходимо значення функції f як дробової частини зазначених аргументів:

$$(1/3)x_1 + (1/3)x_4 \geq 1/3,$$

або

$$x_1 + x_4 - x_5 = 1.$$

Для того щоб змінна x_5 стала базисною, помножимо одержане рівняння на -1:

$$-x_1 - x_4 + x_5 = -1 .$$

Запишемо додаткове обмеження в останню таблицю розв'язання початкової задачі звичайним симплексним методом (табл. 6.3).

Таблиця 6.3

Пор. ном.	**Базис**	**$C_б$**	**План**	**1**	**4**	**0**	**0**	**0**
				X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
1	X3	0	5	5/3	0	1	–1/3	0
2	X2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	X5	0	−1	−1	0	0	–1	1
m+1			16/3	1/3	0	0	4/3	0

3. За допомогою двоїстого симплексного методу знаходимо розв'язок одержаної задачі (табл. 6.4).

Таблиця 6.4

Пор. ном.	**Базис**	**$C_б$**	**План**	**1**	**4**	**0**	**0**	**0**
				X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
1	X3	0	5	5/3	0	1	−1/3	0
2	X2	4	4/3	1/3	1	0	1/3	0
3	**X5**	**0**	**−1**	−1	**0**	**0**	**−1**	**1**
m+1			16/3	1/3	0	0	4/3	0
1	X3	0	10/3	0	0	1	−2	5/3
2	X2	4	1	0	1	0	0	1/3
3	X1	1	1	1	0	0	1	−1
m+1			5	0	0	0	1	1/3

Одержали цілочисловий розв'язок: $F = 5 \text{ в } m. X^*(1; 1; 10/3; 0)$. Отже, підприємство повинно виробляти 1 т йогурту «Вишенька», 1 т йогурту «Полуничний». При цьому його прибуток становитиме 5 тис. грн.

6.3. Алгоритм методу гілок і меж

Метод гілок і меж – один із комбінаторних методів дослідження операцій. Його суть полягає в упорядкованому переборі варіантів та розгляді лише тих з них, які виявляються за певними ознаками перспективними, та відкиданні безперспективних варіантів.

Загальну схему методу гілок і меж розглянемо на прикладі задачі *дискретного програмування*: необхідно знайти мінімум функції $f(\bar{x})$ за умови, що $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in G$, де G – скінченна множина. Нехай $\xi(G)$ – *нижня межа* функції $f(\bar{x})$ на множині G. Реалізація методу базується на розбитті (*розгалуженні*) початкової множини G_0 на послідовність підмножин, які не перетинаються. Очевидно, що нижня межа будь-якої з цих підмножин не менша за нижню межу G_0, тобто:

$$\xi(G_j) \geq \xi(G). \tag{6.6}$$

На кожній підмножині $G_1^1, G_2^1, \dots, G_S^1$ розв’язують часткову задачу дискретного програмування. Якщо відшукати точний розв’язок задачі на деякій підмножині $G_k^1 (1 \leq k \leq S)$,то його вважають *поточним* оптимальним розв’язком початкової задачі $\overline{x}^*$ обирають той з них, що має найменше значення $f\left(\overline{x}^*\right)$.

Усі підмножини G_i^1, на яких $\left(G_i^1\right) \geq f\left(\overline{x}^*\right)$ або існує точний розв’язок, *вилучають* із подальшого розгляду. Серед решти підмножин G_j^1 визначають $\min\limits_j \xi\left(G_j^1\right) = \xi\left(G_l^1\right)$. Якщо точних розв’язків не відшукали, то $\min\limits_{1 \leq j \leq S} \xi\left(G_j^1\right) = \xi\left(G_l^1\right)$. Множину G_l^1 знову розбивають на декілька підмножин, які не перетинаються та об’єднання яких дає G_l^1. На цих підмножинах знову розв’язують часткові задачі та здійснюють відповідний аналіз. Процес розгалуження продовжують доти, поки є невилучені підмножини. Цей процес скінченний через скінченність множини G_0. Розв’язком початкової задачі буде останнє знайдене значення $\overline{x}^*$. Під час реалізації загальної схеми методу гілок і меж для конкретних задач дискретного програмування необхідно розробляти правила розгалуження, способи обчислення нижніх меж і знаходження розв’язків, виходячи зі специфіки цих задач.

Розглянемо реалізацію методу гілок і меж для загальної цілочислової задачі *лінійного програмування* (ЗЛП), що записується так:

$$\max(\min) F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{6.1}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \qquad \left(i = \overline{1, m}\right); \tag{6.2}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \left(j = \overline{1, n}\right); \tag{6.3}$$

$$x_j \text{ – цілі числа } \left(j = \overline{1, n}\right). \tag{6.4}$$

Спочатку розв’язують відповідну задачу ЗЛП із послабленими обмеженнями (тобто задачу (6.1)–(6.3)).

Нехай множина допустимих розв’язків задачі (6.1)–(6.3) є опуклим багатогранником $X \subset R^n$. Скінченна множина G_0 допустимих розв’язків ЗЛП (6.1)–(6.4) є *сукупністю* ізольованих точок з цілочисловими координатами, які належать X (тобто $G \subset X$). Якщо задача (6.1)–(6.3) не має розв’язків, то розв’язків не має і задача (6.1)–(6.4).

Якщо оптимальний розв’язок $\overline{x}_0$ задачі (6.1)–(6.3) – цілочисловий, то обчислення завершують. У протилежному разі значення цільової функції $y_0 = f\left(\overline{x_0}\right)$ дає *нижню межу* для шуканого розв’язку, тобто $\xi(G) = y_0$.

Алгоритм методу гілок і меж для ЗЛП

1. На множині допустимих планів G_0 знаходять оптимальне значення функції цілі (6.1), відкинувши умови цілочисельності (6.4). При цьому знаходять оцінку функції якості

$$\xi(G_0) = F(\overline{X}_0).$$

Цю оцінку вважають верхньою оцінкою функції якості G_0. Якщо план $\overline{x}_0$ задовольняє умовам цілочисельності, то він вважається оптимальним для ЗЛП (6.1)–(6.4). Якщо ж умови цілочисельності для задачі (6.1)–(6.4) не виконуються, то переходять до п. 2 цього алгоритму.

2. Починають розвивати процес розгалуження. Для цього вибирають деяку нецілочислову компоненту $x_j = x_{j0}$, $1 \le j \le n$. При цьому множину G_0 розбивають на дві підмножини $G_0 \subset G_1^{(1)} \cup G_1^{(2)}$, що не перетинаються.

Операцію реалізують так:

$$G_1^{(1)} = \{\overline{x} : \overline{X} \in G_0; \quad x_j \le [x_{j0}]\},$$
$$G_1^{(2)} = \{\overline{x} : \overline{X} \in G_0; \quad x_j \ge [x_{j0}] + 1\}.$$

Для наочності одержаного результату зображують дерево розв’язків (рис. 6.1).

3. На третьому етапі розв’язують дві задачі лінійного програмування. Одна – на множині $G_1^{(1)}$, а друга – на множині $G_1^{(2)}$. При цьому одержують верхню оцінку функції якості на відповідних підмножинах. Якщо розв’язки на множинах $G_1^{(1)}$ і $G_1^{(2)}$ виявляться цілочисловими, то оптимальним для задачі (6.1)–(6.4) буде той план, що дає більшу верхню оцінку функції якості.Якщо ж, наприклад, на множині $G_1^{(1)}$ одержують цілочисловий план, а на множині $G_1^{(2)}$ – нецілочисловий, причому $\xi\left(G_2^{(2)}\right) > \xi\left(G_1^{(1)}\right)$, то надалі розвивається процедура розгалуження на множині $G_1^{(2)}$.

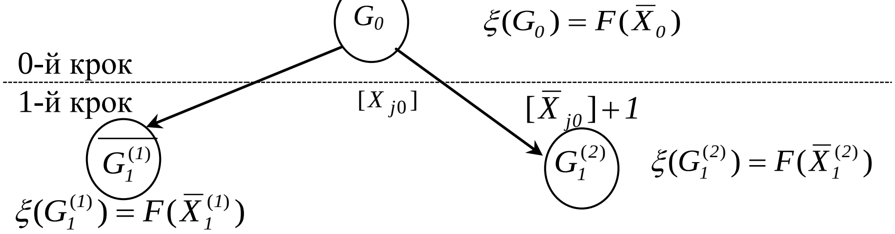


Рисунок 6.1 – Дерево розв’язків

4. Далі здійснюють процес розгалуження області припустимих розв’язків (ОПР) і паралельно формують дерево розв’язків. Процес розгалуження реалізують доти, поки не знайдуть той оптимальний план, що задовольняє

постановку задачі. Після того як дерево розв'язків буде сформоване остаточно, аналізують кожну його гілку і знаходять той вектор $\overline{X}$, що доставляє оптимум функції якості (5.1).

Приклад 6.4. Розв'язати задачу ЦЛП методом гілок і меж:

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, & 1 \\ x_1 + x_2 \le 7, & 2 \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, & 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0; \qquad 4$$

$$x_1, x_2 => цілі.$$

Зобразимо ОПР задачі.

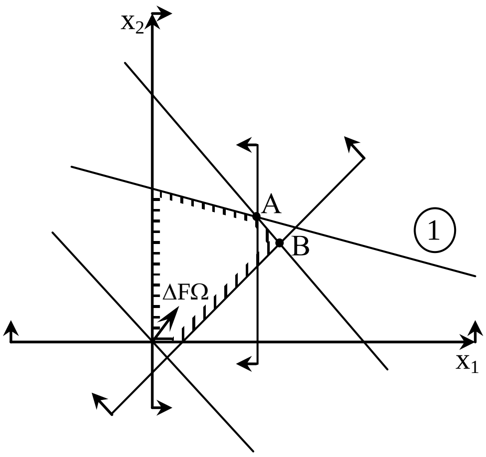


Рисунок 6.2 – Область припустимих розв'язків

Визначимо координати точки А. Для цього розв'язується система рівнянь, використовуються формули Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 = 38, \\ x_1 + x_2 = 7, \end{cases} \qquad \Delta = -9, \qquad \Delta_1 = -39, \qquad \Delta_2 = -24,$$

$$x_1 = \frac{13}{3}, \qquad x_2 = \frac{8}{3}.$$

Таким чином, F(A) = F (13/3, 8/3) = 7.

Визначимо координати точки B:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = 5, \end{cases} \qquad x_1 = \frac{40}{9}, \qquad x_2 = \frac{23}{9}.$$

Таким чином, F(B) = F (40/9, 23/9) = 7.

Процедура розгалуження здійснюється відповідно до співвідношень

$$G_1^{(1)} = \left\{ \overline{X} \in G_0, \quad x_1 \le 4 \right\},$$
$$G_1^{(2)} = \left\{ \overline{X} \in G_0, \quad x_1 \ge 5 \right\}.$$

Вихідна задача розпадається на дві:

Перший крок

1-ша задача

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$F^*_{\max} = 6{,}727,$$

$$\overline{X}^* = (4; \frac{30}{11}).$$

2-га задача

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Ця задача несумісна.

Другий крок. Розгалуження здійснюємо за змінною x_2.

$$G_2^{(1)} = \left\{ \overline{X} \in G_2^{(1)}, \quad x_2 \le 2 \right\}$$

$$G_2^{(2)} = \left\{ \overline{X} \in G_2^{(1)}, \quad x_2 \ge 3 \right\}$$

1-ша задача

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 5, \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

$$F^*_{\max} = 5{,}75,$$

$$\overline{X}^* = (3{,}75; 2).$$

2-га задача

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \le 4, \\ x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 = 38, \\ x_2 = 3, \end{cases}$$

$$F^*_{\max} = 5{,}5,$$

$$\overline{X}^* = (2{,}5; 3).$$

Отриманий план не є цілочисловим.

Третій крок. Розгалуження здійснюємо у першій задачі за змінною x_1.

$$G_3^{(1)} = \left\{ \overline{X} \in G_3^{(1)}, \quad x_1 \le 3 \right\}$$

$$G_3^{(2)} = \left\{ \overline{X} \in G_3^{(2)}, \quad x_1 \ge 4 \right\}$$

$$F^*_{\max} = 5,$$

$$\overline{X}^* = (3; 2).$$

Четвертий крок. Розгалуження здійснюємо за змінною x_1 задачі другого кроку.

$$G_3^{(1,1)} = \left\{ \overline{X} \in G_3^{(1,1)}, \quad x_1 \le 2 \right\}$$
$$G_3^{(1,2)} = \left\{ \overline{X} \in G_3^{(1,2)}, \quad x_1 \ge 3 \right\}$$

1-ша задача

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \le 2, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0,$$

$$F^*_{\max} = 5,$$
$$\overline{X}^* = (2; 3).$$

2-га задача

$$F = x_1 + x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 11x_2 \le 38, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 3, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Ця задача несумісна.

Дерево розв’язків цієї задачі зображено на рис. 6.3.

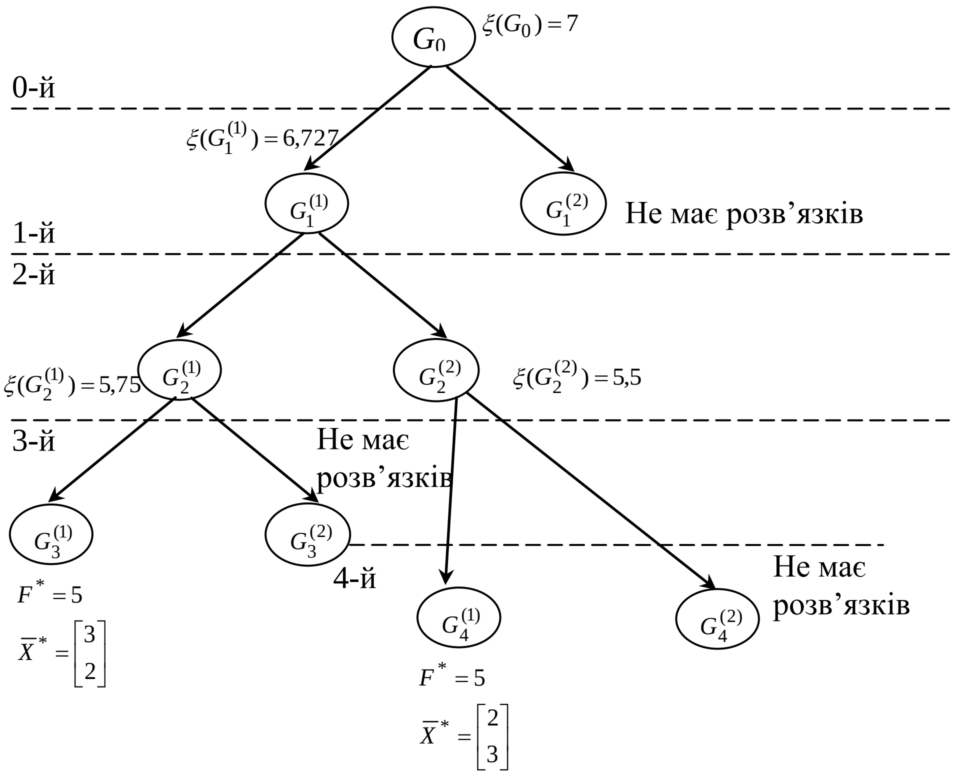


Рисунок 6.3 – Дерево розв’язків задачі

6.4. Стохастичне програмування

Типову задачу дослідження операцій в детермінованій постановці формулюють так: визначити вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для компонентів якого

$$\max(min)\, F = f(x),$$
$$i = \left(\overline{1, m}\right),$$
$$X \geq \mathbf{0}\ .$$

Якщо значення функції у цій задачі залежать, крім керованих параметрів X, ще і від деяких випадкових величин $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, то маємо задачу стохастичного програмування:

$$\max(min)\, F = f(X, w),$$
$$i = \left(\overline{1, m}\right),$$
$$X \geq 0, w \in \Omega\ ,$$

де Ω – простір подій *w*.

Залежно від можливості одержувати та враховувати інформацію відносно детермінованості (стохастичності) функцій *f(X,w),* $q_i(X,w)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

– стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;

– детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;

– стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени та коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

– детермінованим чи випадковим є вектор X. Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від *w* — *X(w)* , тобто залежить від випадкових змінних;

– як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення?

– як виконуються обмеження: абсолютно для всіх чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

Під час постановки задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з врахуванням евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора *X* зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково повинен бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того самого підприємства за тих самих умов визначатиме, наприклад, обсяги кредитів, то його компоненти повинні бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть одержані.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи – прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, якщо існують способи побудови функцій $f(X,w)\le 0$ і $g(X,w)\le 0$, $i=\left(\overline{1,m}\right)$ і на базі інформації щодо параметра w.

Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

До одноетапних задач стохастичного програмування належать задачі, в яких рішення приймаються на підставі відомих стохастичних характеристик розподілу випадкових параметрів умов задачі, до спостережень за їх реалізаціями. При цьому повинне прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення.

Постановки задач стохастичного програмування розрізняються за такими ознаками:

1) характером рішень;
2) вибором показника якості рішення (критерію);
3) способом декомпозиції обмежень задачі.

У задачі стохастичного програмування зазвичай обирають такі функціонали, як математичне сподівання або дисперсія цільової функції, або ймовірність перевищення цільовою функцією деякого порога.

Розглянемо приклади постановки задач стохастичного програмування.

Приклад 6.4. Відомо, що у комерційних банках нараховується більша відсоткова ставка на вкладені кошти порівняно з ощадним, але повернення вкладу не гарантується. Перед кожним вкладником постає питання: мати менший, але гарантований прибуток, або більший, проте з ризиком втратити вклад. Із ризиком невикористаних можливостей пов'язаний вклад в ощадний банк. Визначити оптимальний розподіл вкладень у банки.

Розв'язання. Позначимо через S загальну суму грошей певного власника: x – обсяг вкладень в ощадний банк, y – у комерційний; a, b – відповідно відсоткові ставки нарахувань в ощадному та комерційному банках; p – імовірність повернення вкладу з комерційного банку; $(1-p)$ – імовірність ліквідації (банкрутства) комерційного банку.

За певного розподілу S на x і y можливі такі дві ситуації щодо отримання доходів:

$ax+by$ – за умов успішного функціонування комерційного банку;

$ax-y$ – у протилежному разі.

Математична модель цієї задачі має такий вигляд:

$$\max F(x, y) = (1-p)(ax-y) + p(ax+by)$$

за умов

$$x + y \le S;$$
$$x, y \ge 0.$$

Задачі для самостійного розв'язування

6.1. Компанія-розробник програмного забезпечення має філії, розміщені в Києві, Сумах, Дніпрі, Харкові. Головному офісу компанії необхідно розподілити чотири сегменти певного проекту між зазначеними підрозділами. Кожен сегмент проекту може виконуватися лише одним підрозділом. Час виконання робіт кожною філією наведений у табл. 6.5.

Таблиця 6.5

Сегмент j	**Час виконання** c_{ij} **(тижнів) філією** i			
	Київ	**Суми**	**Дніпро**	**Харків**
1	6	8	2	3
2	3	7	4	3
3	2	5	5	9
4	5	6	3	2

Виконати математичну постановку задачі розподілу робіт між підрозділами таким чином, щоб сумарний час виконання робіт був мінімальним.

6.2. Розв'язати задачу методом Гоморі:

$$F = 2x_1 + x2 \to \max$$

за умови

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1,5}), \end{cases}$$

$$x_j - \text{цілі } (j = \overline{1,5}).$$

6.3. Розв'язати задачу з п. 6.2 методом гілок і меж.

6.4. Виконати математичну постановку задачі стохастичного програмування. Потрібно оцінити доцільність страхування. Припустимо, що фізична особа бажає застрахувати частину свого активу. Для цього вона сплачує певний внесок страховій компанії, а у разі втрати активу одержує від неї страхову винагороду. Визначити частку активу, яку особа вважає за доцільне застрахувати.

6.5. Відповідно до наведеної математичної моделі:

1) скласти словесне формулювання задачі дослідження операцій;

2) розв’язати задачу цілочислового програмування графічним методом;

3) знайти методом Гоморі цілочисловий розв'язок задачі лінійного програмування;

$$Z = 3x_1 + x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}\quad x_1, x_2 - \textit{цілі}.$$

$$Z = x_1 + 2x_2 \to \max,\quad \begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}\quad x_1, x_2 - \textit{цілі}.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулюйте постановку задачі дискретного програмування у загальному вигляді.
2. Охарактеризуйте особливості задач дискретного програмування.
3. Сформулюйте постановку задачі цілочислового дискретного програмування.
4. На які групи поділяють методи, що застосовують для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування?
5. До якої групи методів належить метод Гоморі?
6. У чому полягає суть методу Гоморі?
7. Охарактеризуйте основні етапи алгоритму методу Гоморі.
8. До якої групи методів належить метод гілок і меж?
9. У чому полягає суть методу гілок і меж?
10. Охарактеризуйте основні етапи алгоритму методу гілок і меж.

РОЗДІЛ 7
ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

7.1. Предмет динамічного програмування

Динамічне програмування – це математичний апарат, що дозволяє здійснювати оптимальне планування багатокрокових керованих процесів.

До класу задач динамічного програмування можуть бути віднесені задачі, вирішені шляхом їх розкладання на частини, тобто невеликі за обсягом та менш складні завдання.

У завданнях динамічного програмування залежності між змінними та цільовою функцією можуть мати і нелінійний характер.

Найбільш доцільно динамічне програмування застосовувати для розв'язання таких практичних задач, в яких пошук оптимального рішення вимагає покрокового підходу. Планування кожного кроку повинне проводитися з урахуванням загальної вигоди, одержуваної на завершення всього процесу, що дозволяє оптимізувати кінцевий результат управління за обраним критерієм.

Принцип динамічного програмування передбачає, що управління на кожному окремому кроці повинно обиратися з урахуванням наслідків від його впровадження в майбутньому, тобто виходячи з інтересів операції в цілому. На практиці цей підхід став поширеним під час довгострокового планування багатоетапних операцій. Наприклад, необхідно спланувати роботу групи промислових підприємств на декілька років уперед. При цьому потрібно розподілити сировину та обладнання, за допомогою яких можна розпочати виробництво готової продукції. Як етап процесу планування можна розглянути календарний рік. Нехай необхідно прийняти рішення про закупівлю сировини, обладнання та їх розподіл між підприємствами за перший рік. Припустимо, що можна вкласти максимальну кількість інвестицій на закупівлю обладнання і сировини у перший рік та одержати максимальний прибуток. Такий підхід до планування призведе до зношення обладнання внаслідок його інтенсивного використання, це потребуватиме додаткових коштів на його ремонт та модернізацію, що не було передбачено під час планування. Таким чином, прибуток у подальші роки може бути набагато меншим від запланованого, що зменшить загальний прибуток за весь період.

Тому, плануючи багатоетапну операцію, управління на кожному кроці потрібно вибирати виходячи не з короткострокових цілей, а з більш широких інтересів операції в цілому. Очевидно, що лише останній крок можна планувати без урахування майбутніх кроків. Спланувавши останній крок як такий, що його реалізація повинна давати найбільшу вигоду, можна планувати передостанній крок. Тому задачі динамічного програмування також називаються багатоетапними або багатокроковими. Таким чином, процес планування операції в цілому здійснюється у зворотному за часом реалізації порядку – від кінця до початку. У будь-якому разі планування останнього кроку неможливе без припущення, який будо досягнуто ефект від управління на попередніх кроках. Оптимальне управління, обране за умови, чим завершився попередній крок, називається умовним оптимальним управлінням.

Принцип динамічного програмування вимагає знаходження на кожному кроці умовного оптимального управління для будь-якого з можливих результатів попереднього кроку.

Динамічне програмування дістало великого поширення для задач дослідження операцій, в яких фактор часу не враховується.

Динамічне програмування застосовується для розв'язання таких класів задач:

- розподілу дефіцитних капітальних вкладень між новими напрямами їх використання;
- визначення необхідного обсягу запасних частин, що гарантує ефективне використання обладнання;
- заміни устаткування;
- оптимального управління запасами;
- розроблення довгострокових правил заміни основних фондів, що вибувають з експлуатації;
- пошуку найкоротших відстаней на транспортній мережі.

Динамічне програмування не є окремим методом розв’язування задач, а являє собою теорію, що поєднує ряд однотипних ідей та прийомів, застосовуваних для розв’язування досить різних за змістом задач. Переваги динамічного програмування полягають у можливості поетапного аналізу результатів розв’язуваної задачі, поглибленні раніше розроблених методів кількісного і якісного дослідження операцій, що дозволяє більш об’єктивне, повне та точне вирішення планово-економічних та виробничих задач цілеспрямованої людської діяльності.

7.2. Постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана

Розглянемо операцію, складену з m кроків (етапів). Нехай ефективність операції на кожному кроці характеризується показником W, який будемо називати виграшем. Припустимо, що виграш W від реалізації усієї операції складається з виграшів на окремих кроках:

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i ,$$

де w_i – виграш на i-му кроці.

Операція являє собою керований процес, тобто ми можемо вибирати якісь параметри, що впливають на хід її виконання, причому на кожному кроці вибирається певне рішення, від якого залежить виграш на цьому кроці та виграш за операцію в цілому.

На кожному кроці управління системою S (операцією) необхідно визначити змінні двох типів – змінну станів системи S_k та змінну управління x_k. Змінна S_k визначає, в яких станах може опинитися система на k-му кроці. Залежно від стану системи S на цьому кроці можна застосовувати відповідні управління, що характеризуються змінною x_k, що задовольняють певні обмеження та є допустимими.

Сукупність усіх кроків x_k являє собою управління операцією в цілому. Позначимо його символом x, а крокові управління – літерами $x_1, x_2, ..., x_n$: Тоді управління, що переводить систему із стану S_0 у стан S_n:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

У загальному випадку крокові управління можуть бути виражені числами, функціями і т. ін.

Послідовність станів системи S можна подати у вигляді графу, наведеного на рис. 7.1.

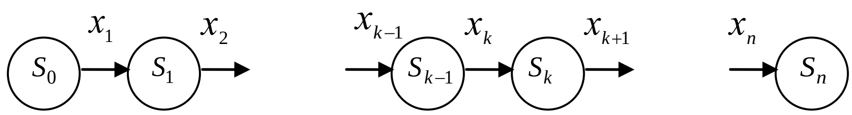


Рисунок 7.1 – Графік станів системи

Необхідно знайти таке управління x, при якому виграш W від реалізації усієї операції обертається в максимум:

$$W = \sum_{i=1}^{m} w_i \to \max. \tag{7.1}$$

Оптимальним розв’язком цієї задачі є управління x^*, що складається з сукупності оптимальних покрокових управлінь:

$$x^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*).$$

Максимальний виграш, якого можна досягти при цьому управлінні, W^*:

$$W^* = \max_{x \in X} \{W(x)\}.$$

Величина W^* є максимумом із усіх виграшів $W(x)$ за різних управлінь x, можливих за цих умов.

В основі розв’язування усіх задач динамічного програмування закладено принцип оптимальності, вперше сформульований у 1953 році Р. Е. Беллманом: оптимальне управління характеризується такими властивостями, що незалежно від початкового стану та управління на початковий момент подальші управління повинні обиратися оптимальними відносно стану, одержаного в результаті першого управління.

Іншими словами, яким би не був стан системи S перед черговим кроком управління, потрібно обирати управління на цьому кроці так, щоб виграш на даному кроці плюс оптимальний виграш на усіх подальших кроках були максимальними.

Тобто, під час розв'язування задачі динамічного програмування на кожному кроці вибирається управління, що повинне давати оптимальний виграш. Якщо вважати всі кроки незалежними один від одного, то оптимальним кроковим управлінням буде те управління, що дає максимальний виграш саме на цьому кроці.

Інший момент, який варто враховувати при виборі управління на даному кроці, – це можливі варіанти закінчення попереднього кроку. Ці варіанти визначають стан процесу. Наприклад, при визначенні кількості коштів, укладених у підприємство в i-му році, необхідно знати, скільки коштів залишилося у наявності до цього року і який прибуток отриманий у попередньому ($i-1$)-му році. Таким чином, при виборі крокового управління необхідно враховувати:

– можливі результати попереднього кроку;

– вплив управління на всі кроки, що залишилися, до кінця процесу.

У задачах динамічного програмування перший пункт враховують, роблячи на кожному кроці умовні припущення про можливі варіанти закінчення попереднього кроку й проводячи для кожного з варіантів умовну оптимізацію. Виконання другого пункту забезпечується тим, що в задачах динамічного програмування умовна оптимізація проводиться від кінця процесу до початку. Спершу оптимізується останній m-й крок, на якому не потрібно враховувати можливі впливи обраного управління x_m на всі подальші кроки, тому що ці кроки просто відсутні. Роблячи припущення про умови закінчення *($m-1$)*-го кроку, для кожного з них проводять умовну оптимізацію m-го кроку й визначають умовне оптимальне управління x_m. Аналогічно діють для *($m-l$)*-го кроку, роблячи припущення про стан закінчення *($m-2$)*-го кроку й визначаючи умовне оптимальне управління на *($m-1$)*-му кроці, що дає оптимальний виграш на двох останніх кроках – *($m-1$)*-му і m-му. Так само діють на всіх інших кроках до першого. На першому кроці, як правило, не треба робити умовних припущень, тому що стан системи перед першим кроком звичайно відомо.

Розглянемо задачу на максимізацію функції:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j)$$

і вектор $X^*(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ є її оптимальним планом (стратегією, поведінкою) n-крокового процесу (n-вимірної задачі) з початковим параметром стану b. Принцип оптимальності еквівалентний твердженню, що вектор $\left(x_2^*,\ldots,x_n^*\right)$

повинен бути оптимальним планом $(n-1)$ крокового процесу $(n-1)$ вимірної задачі з початковим параметром стану b_{n-1}, що дорівнює $b-x^*_1$.

Припустимо протилежне, тобто що вектор $\left(x_2^*, ..., x_n^*\right)$ не є оптимальним планом відповідного процесу, а ним є якийсь інший план $\left(x'_2, ..., x'_n\right)$.

Тоді

$$\max_{x_2,\dots,x_n} \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=2}^{n} z_j(x'_j) > \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*),$$

але

$$\max_{x_1,x_2,\dots,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j) = \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j^*) = \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x_j^*) <$$

$$< \max_{x_1} z_1(x_1) + \sum_{j=2}^{n} z_j(x'_j) = \max_{x_1} \max_{x_2,\dots,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x'_j) = \max_{x_1,\dots,x_n} \sum_{j=1}^{n} z_j(x_j).$$

Таким чином підтверджується справедливість принципу оптимальності Беллмана.

7.3. Алгоритм розв’язування задачі динамічного програмування

1. Визначають специфічні показники стану досліджуваної керованої системи і множину параметрів, що описують цей стан. Стан системи описується у такий спосіб, щоб можна було забезпечити зв’язок між послідовними етапами розв’язування задачі і мати можливість одержати допустиме розв’язання задачі в цілому як результат оптимізації на кожному кроці окремо, а крім того, приймати оптимальні рішення на подальших етапах без урахування впливу майбутніх рішень на ті, що були прийняті раніше.
2. Процес поділяють на етапи (кроки), які відповідають певним періодом планування динамічних процесів.
3. Формулюють перелік управлінь

$$X_j \,(j = \overline{1,n})$$

для кожного кроку і відповідні обмеження щодо них.

4. Визначають ефективність, яку забезпечує управління x_j на j-му кроці, якщо перед тим система була у стані S у вигляді функції ефективності

$$\max Z(S, x_j).$$

5. Визначають, як змінюється стан S системи під впливом управління x_j на j-му кроці, тобто як здійснюється перехід до нового стану:

$$S' = \varphi_j(S, x_j).$$

6. Будують рекурентну залежність $Z_j(S)$ задачі динамічного програмування, що визначає умовний оптимальний ефект, починаючи з j-го кроку і до останнього, через вже відому функцію

$$Z_{j+1}(S'):$$

$$Z_j(S) = \max_{x_j}\{Z_j(S)\} = \max_{x_j}\{f_j(S, x_j) + Z_{j+1}(S', x_j)\}.$$

Цьому ефекту відповідає умовне оптимальне управління на j-му кроці $(x_j(S))$. Зауважимо, що у функції $Z_{j+1}(S)$ необхідно замість S враховувати змінений стан системи, тобто

$$S' = \varphi_j(S, x_j).$$

7. Використовують умовну оптимізацію останнього n-го кроку, визначаючи множину станів S, з яких можна за один крок дійти до кінцевого стану.

Умовно-оптимальний ефект на *n*-му кроці обчислюють за формулою

$$Z_n(S) = \max_{x_n}\{f_n(S, x_n)\}.$$

Потім знаходять умовно-оптимальне управління, в результаті реалізації якого цей максимум буде досягнуто.

8. Проводять умовну оптимізацію (n−1)-го та (n−2)-го та інших кроків за рекурентними залежностями і визначають для кожного кроку умовно-оптимальне управління $\mathrm{x}_{\mathrm{n}}^*(S_{n-1})$.

9. Проводять безумовну оптимізацію управління у «зворотному» напрямку від початкового стану S_0 до кінцевого. Для цього з урахуванням визначеного оптимального управління на першому кроці x_1^* змінюють стан системи згідно з пунктом 5. Потім для цього нового стану знаходять оптимальне управління на другому кроці x_2^* і аналогічно ці дії повторюють до останнього етапу (кроку).

У результаті знаходять оптимальне покрокове управління $X^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ що забезпечує максимальну ефективність Z^*.

7.4. Класи задач динамічного програмування

Задача розподілу ресурсів методом динамічного програмування

Математична постановка задачі полягає в тому, що потрібно розподілити В одиниць ресурсів серед n підприємств, прибуток від яких $g_k(x_n)$ залежно від кількості вкладених засобів x_i визначається матрицею (табл. 7.1) таким чином, щоб сумарний прибуток серед усіх підприємств був максимальним

Таблиця 7.1 – Матриця прибутку від капіталовкладень

X_i / G_i	g_1	g_2	…	g_i	…	g_k
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$	…	$g_i(x_1)$	…	$g_k(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$	…	$g_i(x_2)$	…	$g_k(x_n)$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	…	…	…	$g_i(x_i)$	…	…
…	…	…	…	…	…	…
x_n	$g_1(x_n)$	$g_2(x_n)$	…	…	…	$g_k(x_n)$

Для цього необхідно визначити таке оптимальне управління $(\tilde{O}) = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_n^*)$, що задовольняє умови:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = B, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

та забезпечує максимум цільової функції:

$$F(\tilde{O}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i(x_i) \to \max .$$

Розглянемо етапи розв’язання цієї задачі. Спершу проводиться умовна оптимізація, яка складається з кроків *1, ... , k*.

Крок 1. На першому кроці умовної оптимізації при *k = n* функція Беллмана являє собою прибуток лише з n -го підприємства.

Кроки 2, ... , k: враховують результат попереднього кроку. Максимально можливий прибуток на цих кроках визначається за формулою

$$F_k(C_k) = \max_{x_k \leq C_k} \{ g_k(x_n) + F_{k+1}(C_k - x_k) \} k = \overline{1,n}.$$

Максимум цього виразу досягається на певному значенні $\tilde{O}_k^*$, що є оптимальним керуванням на к-му кроці для стану системи, діючи таким чином, можна визначити функції Беллмана та оптимальні управління до кроку *k = 1*.

Значення функції Беллмана $F_1(C_1)$ являє собою максимально можливий прибуток з усіх підприємств, а значення на якому досягається максимум прибутку, є оптимальною кількістю коштів, укладених у перше підприємство.

Безумовна оптимізація: для всіх подальших кроків обчислюється величина залишку коштів $C_k = C_{k-1} - x_{k-1}$ і оптимальним управлінням на к-му кроці є те значення $\tilde{O}_k$, яке забезпечує максимум прибутку S_k за відповідного стану системи.

Задача пошуку найкоротшого шляху на графі
методом динамічного програмування. Алгоритм Флойда – Уоршелла

У рамках теорії дослідження операцій розглядається велика кількість практичних завдань, які можна сформулювати і вирішити як мережеві моделі.

Прикладами таких задач є:

1. Проектування газопроводу, що з'єднує свердловини морського базування з розміщеною на березі приймальною станцією.
2. Знаходження найкоротшого маршруту між двома містами за існуючої мережі доріг.
3. Визначення максимальної пропускної здатності трубопроводу для транспортування вугільної пульпи від вугільних шахт до електростанцій.
4. Визначення схеми транспортування нафти від пунктів нафтовидобутку до нафтопереробних заводів із мінімальною вартістю транспортування.
5. Знаходження найкоротшого маршруту прокладання оптичного кабеля.

Розв'язання вищенаведених задач дослідження операцій вимагає застосування різних мережевих оптимізаційних алгоритмів.

Розглянемо задачу пошуку в графі найкоротшого шляху між кожною парою вершин. Цю задачу можна розв'язати багатократним застосуванням алгоритмів Дейкстри або Беллмана – Форда з послідовним вибором кожної вершини графу як початкової. Проте є прямий спосіб розв'язання цієї задачі за допомогою алгоритму Флойда – Уоршелла. У ньому довжини дуг можуть бути від'ємними, проте не може бути циклів із від'ємною довжиною.

Дано орієнтований граф *G = (V, E)*. Для реалізації цього алгоритму його необхідно подати у вигляді квадратної матриці вагів графу $D_0 = \|d_{ij}\|$ з n рядками та n стовпцями. Елемент (j, i) дорівнює відстані dij від вузла i до вузла j, яке має кінцеве значення, якщо існує дуга $\langle d_i, d_j \rangle$ та дорівнює нескінченності в іншому випадку:

$$d_{ij} = \begin{cases} w(\langle d_i, d_j \rangle), \text{вага дуги} \langle d_{i,}, d_j \rangle, \\ \infty, \text{ немає дуги} \langle d_i, d_j \rangle. \end{cases}$$

Загальна задача знаходження найкоротших шляхів полягає в знаходженні для кожної упорядкованої пари вершин $\langle d_i, d_j \rangle$ будь-якого шляху від вершини *i* до вершини *j*, довжина якого мінімальна серед усіх можливих шляхів від *i* до *j*.

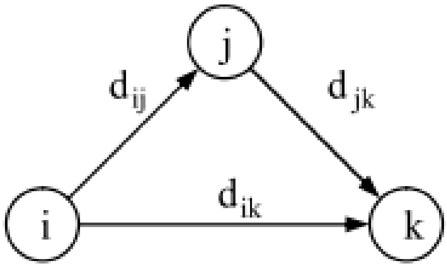


Рисунок 7.2 – Трикутний оператор Флойда

Розглянемо основну ідею методу Флойда. Нехай граф має три вузли i,j та k, задані відстані між ними (рис. 7.2). Якщо виконується нерівність $d_{ik}+d_{jk} < d_{ij}$, то доцільно замінити шлях $k \to i$ шляхом $k \to j \to i$. Така заміна (трикутний оператор Флойда) виконується систематично в процесі виконання алгоритму Флойда.

За алгоритмом Флойда будується послідовність матриць $D_k = \left\| d_{ij}^{(k)} \right\|, (k = 0,1,2,...,n)$. Тобто $d_{ij}^{(n)}$ – шукана мінімальна відстань між вершинами di та dj. Матриці D_k та D_{k-1} пов'язані між собою рекурентною формулою

$$d_{ij}^{(k)} = \min\left\{ d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \right\}.$$

Алгоритм Флойда вимагає виконання таких дій.

Підготовчий етап. Спочатку необхідно сформувати початкову матрицю відстаней між вузлами D_0 (вагів графу), зображену на рис. 7.3 та матрицю послідовності вузлів S_0, зображену на рис. 7.4 (ця містить дані про проміжні вузли на шляху між двома вузлами, у ній $s_{ij} = j$, $s_{ii} = 0$.). Діагональні елементи обох матриць потрібно позначити знаком «–» (або будь-яким іншим знаком, але не цифрою), що буде вказувати на те, що ці елементи в обчисленнях не будуть брати участі.

$$D_0 = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ \hline 1 & - & d_{12} & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1n} \\ 2 & d_{21} & - & \dots & d_{1j} & \dots & d_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & d_{i1} & d_{i2} & \dots & d_{ij} & \dots & d_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nj} & \dots & - \end{array}$$

Рисунок 7.3 – Матриця відстаней між вузлами

$$S_0 = \begin{array}{c|cccccc} & 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ \hline 1 & - & 2 & \dots & j & \dots & n \\ 2 & 1 & - & \dots & j & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & 1 & 2 & \dots & j & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & j & \dots & - \end{array}$$

Рисунок 7.4 – Матриця послідовності вузлів

Основний етап. Нехай $k = 1$. Задаємо рядок k і стовпець k як ведучий рядок і ведучий стовпець. Потім розглядаємо можливість застосовування трикутного оператора до всіх елементів d_{ij} матриці D_{k-1}.

Якщо виконується нерівність:

$$d_{ik} + d_{kj} < d_{ij},\ (i \neq k, j \neq k, i \neq j),\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}; k = \overline{1,n}),$$

то виконуємо такі дії:

a) створюємо матрицю D_k шляхом заміни в матриці D_{k-1} елемента d_{ij} сумою $d_{ik} + d_{kj}$;

b) створюємо матрицю S_k, замінюючи в матриці S_{k-1} елемент s_{ij} на k, $s_{ij} := k$ – ознака наявності шляху (i, k), (k, j).

Вважаючи $k = k+1$ повторюємо етап k.

На рисунку 7.5 зображено матрицю D_{k-1} на k-му етапі алгоритму.

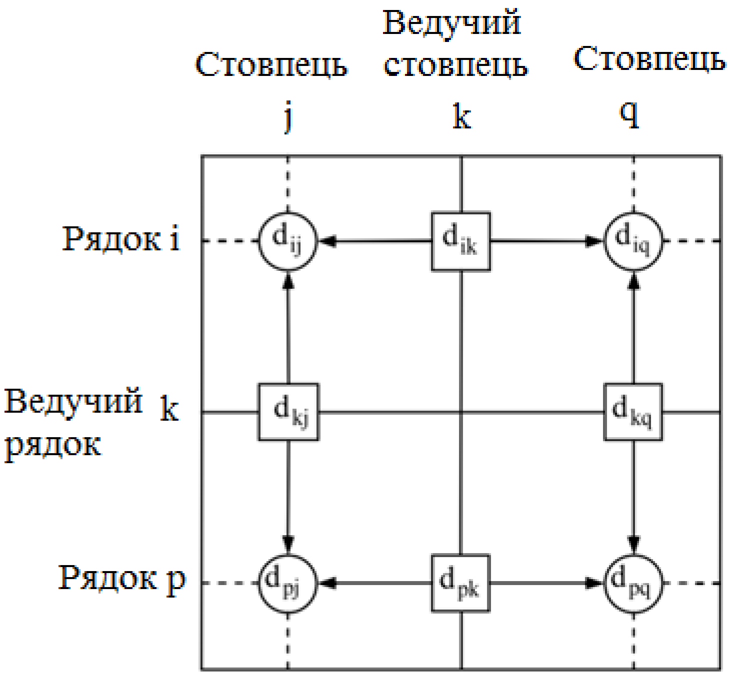


Рисунок 7.5 – Реалізація трикутного оператора

На рисунку 7.5 рядок k та стовпець k є ведучими. Рядок i – довільний рядок із номером від 1 до k , а рядок p – довільний рядок із номером від $k+1$ до n.

Аналогічно стовпець j – довільний стовпець з номером від 1 до $k-1$, а стовпець q – довільний стовпець з номером від $k+1$ до n.

Трикутний оператор виконується таким чином. Якщо сума елементів ведучого рядка і стовпчика (показаних у квадратах) менша за елементи, розміщені на перетині стовпця і рядка (показані в колах), то відстань (елемент у колі) замінюється сумою відстаней, поданих ведучими елементами.

Після реалізації n етапів алгоритму визначення за матрицями D_n і S_n найкоротшого шляху між вузлами i та j виконується за такими правилами.

1. Відстань між вузлами і та j дорівнює елементу d_{ij} в матриці D_n.

2. Проміжні вузли шляху від вузла і до вузла j визначаємо за матрицею S_n. Нехай $s_{ij} = k$, тоді маємо шлях $j \to k \to i$. Якщо далі $s_{ik} = k$ і $s_{kj} = j$, тоді вважаємо, що весь шлях визначений, оскільки знайдені всі проміжні вузли. В іншому випадку повторюємо описану процедуру для шляхів від вузла i до вузла k і від вузла k до вузла j.

Задачі для самостійного розв’язування

7.1. Сформулюйте загальну постановку задачі динамічного програмування. Виробниче об’єднання складається з m підприємств, інвестиції між якими розподіляються кожного року із централізованого фонду. При цьому завдяки виділенню і-му підприємству коштів x_i млн грош. од. можна одержати додатковий прибуток $f_i(x_i)$. На початок планового періоду, що складається з N років, централізований фонд складається з А млн грн. Кожного наступного року планується поповнювати цей фонд за рахунок відрахувань від отриманого прибутку $y_i(x_i)$ млн грош. од. від кожного підприємства.

Знайти такий варіант розподілу централізованого фонду розвитку виробництва між m підприємствами, при якому загальний прибуток, отриманий за N років, буде максимальним.

7.2. Скласти оптимальний план розподілу ресурсів у розмірі 100 000 грош. од. між чотирма підприємствами за умови, наведеної в табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Обсяг капітало-вкладень, грош. од.	**Приріст випуску продукції залежно від об’єму капіталовкладень**			
	Підприємство 1	**Підприємство 2**	**Підприємство 3**	**Підприємство 4**
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

7.3. Знайти для мережі, зображеної на рис.7.6, найкоротшу відстань між вузлами:

а) 2 та 3; б) 1 та 5; в) 1 та 4;

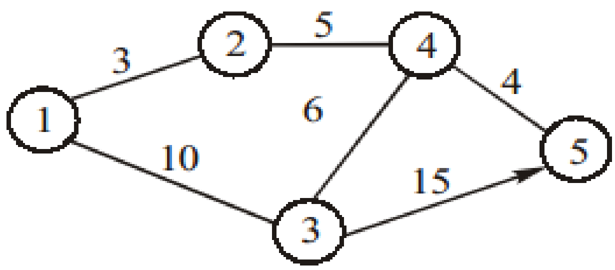


Рисунок 7.6

Питання для самоперевірки

1. Що є предметом динамічного програмування?
2. Сформулюйте постановку задачі динамічного програмування у загальному вигляді.
3. Сформулюйте принцип оптимальності Беллмана.
4. Чому задачі динамічного програмування називають багатокроковими?
5. З яких етапів складається алгоритм розв’язання задачі динамічного програмування?
6. Яким чином під час розв’язання задачі динамічного програмування проводиться умовна оптимізація?
7. Яким чином під час розв’язання задачі динамічного програмування проводиться безумовна оптимізація?
8. Перелічіть класи задач, розв’язувані за допомогою динамічного програмування.
9. Сформулюйте постановку задачі розподілу ресурсів методом динамічного програмування.
10. Охарактеризуйте основні етапи алгоритму розв’язання задачі розподілу ресурсів методом динамічного програмування.
11. Сформулюйте постановку задачі пошуку найкоротшого шляху на графу методом динамічного програмування.
12. Для розв’язання яких задач застосовується алгоритм Флойда – Уоршелла?
13. Із яких кроків складається алгоритм Флойда – Уоршелла?
14. Яким чином виконується трикутний оператор Флойда?
15. У чому полягають переваги динамічного програмування?

РОЗДІЛ 8
ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

8.1. Загальна постановка задачі оптимізації

Чисельні методи оптимізації відіграють значну роль у прикладних дослідженнях. Це обумовлено рядом причин, головною серед яких є різноманіття форм завдання цільової функції f та функцій обмежень g_i. В окремих випадках навіть не можливо визначити, до якого класу належить та чи інша задача, а також чи існує для неї обґрунтований метод розв’язання.

Пошуки оптимальних розв’язків привели до створення спеціальних математичних методів і вже у XVIII столітті були закладені математичні основи для чисельної оптимізації (варіаційне числення, чисельні методи й інші). Однак до другої половини XX століття чисельні методи оптимізації в багатьох галузях науки і техніки застосовувалися дуже рідко, оскільки практичне використання чисельних методів оптимізації вимагало величезної обчислювальної роботи, що без обчислювальної техніки реалізувати було досить важко, а у ряді випадків – неможливо. Зараз розроблені чисельні методи для задач безумовної та умовної оптимізації, розраховані на використання обчислювальних потужностей обчислювальної техніки.

Якість чисельних методів оптимізації характеризується багатьма факторами: класом задач, швидкістю збіжності, часом виконання однієї ітерації, обсягом пам’яті комп’ютера, який є необхідним для реалізації методу та ін. Розв’язувані задачі дуже різноманітні, вони можуть мати велику чи малу вимірність, бути унімодальними чи багато екстремальними тощо. Один і той самий метод може бути ефективним для розв’язування задач одного типу і також може бути зовсім не придатним для задач іншого типу.

Для порівняння якості чисельних методів оптимізації використовують тестування їх для знаходження екстремуму тестових функцій (функції Розенброка та Пауела). Будь-яка серйозна оптимізаційна процедура повинна ефективно знаходити екстремум тестових функцій та інших тестових задач.

Чисельні методи безумовної оптимізації поділяють на класи залежно від інформації, що використовується під час обчислення.

8.2. Класифікація методів оптимізації

Основними методами оптимізації є пошукові методи, засновані на покроковій зміні керованих параметрів,

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{X}_k + \Delta \boldsymbol{X}_k \, , \tag{8.1}$$

де в більшості методів приріст $\Delta \boldsymbol{X}_k$ вектора керованих параметрів обчислюється за формулою

$$\Delta X_k = hg\left(X_k\right). \tag{8.2}$$

Тут $X_к$ – значення вектора керованих параметрів на *k*-му кроці; *h* – крок; $g(X_k)$ – напрямок пошуку. Отже, якщо виконуються умови збіжності, то реалізується покрокове (ітераційне) наближення до екстремуму.

Методи оптимізації класифікують за рядом ознак.

Залежно від кількості керованих параметрів розрізняють методи одномірної та багатомірної оптимізації, у перших із них керований параметр єдиний, у других розмір вектора *X* не менше двох.

Розрізняють методи умовної та безумовної оптимізації за наявності або відсутності обмежень. Для реальних задач характерна наявність обмежень, однак методи безумовної оптимізації також становлять інтерес, оскільки задачі умовної оптимізації за допомогою спеціальних методів можуть бути зведені до задач без обмежень.

Залежно від кількості екстремумів розрізняють задачі одно- і багатоекстремальні. Якщо метод орієнтований на визначення якого-небудь локального екстремуму, то такий метод належить до локальних методів. Якщо ж результатом є глобальний екстремум, то метод називають методом глобального пошуку. Задовільні за обчислювальною ефективністю методи глобального пошуку для загального випадку відсутні, і тому на практиці використають методи пошуку локальних екстремумів.

Залежно від того, використовують під час пошуку похідні цільової функції за керованими параметрами чи ні, розрізняють методи декількох порядків. Якщо похідні не використовують, то має місце метод нульового порядку, якщо використовують перші або другі похідні, то відповідно метод першого або другого порядку. Методи першого порядку називають також градієнтними, оскільки вектор перших похідних F(X) за X є градієнтом цільової функції

$$gradF(X) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

Конкретні методи визначають такими факторами:

1) способом обчислення напрямку пошуку $g(X_k)$ у формулі (8.2);
2) способом вибору кроку *h*;
3) способом визначення закінчення пошуку.

Визначальним фактором є перший із перелічених у цьому списку, він докладно описаний далі.

Крок може або бути постійним, або вибиратися виходячи з одномірної оптимізації – пошуку мінімуму цільової функції в обраному напрямку $g(X_k)$. В останньому випадку крок будемо називати оптимальним.

Закінчення пошуку звичайно здійснюють за правилом: якщо впродовж *r* підряд кроків траєкторія пошуку залишається в малій ε-околиці поточної точки пошуку X_k, то пошук варто припинити, отже, умова закінчення пошуку має вигляд $|X_k - X_{k-r}| < \varepsilon$.

8.3. Методи оптимізації для недиференційовних функцій

8.3.1. Методи виключення інтервалів

Методи пошуку, що дозволяють визначити оптимум функції однієї змінної шляхом зменшення інтервалу пошуку, називають методами виключення інтервалів.

Усі методи одновимірної оптимізації базуються на припущенні, що досліджувана цільова функція в припустимій області принаймні має властивість *унімодальності*, тобто має лише один локальний мінімум, тому що для унімодальної функції $f\,(x)$ порівняння значень у двох різних точках інтервалу пошуку дозволяє визначити, у якому із заданих двома зазначеними точками підінтервалів точки оптимуму відсутні.

Правило виключення інтервалів. Припустимо, точки a та b окреслюють інтервал, який містить справжню точку мінімуму, і всередині цього інтервалу $[a,\ b]$ функція є $f\,(x)$ *унімодальною*, тобто має один мінімум у точці x^*. Розглянемо точки x_1 і x_2, розміщені в інтервалі таким чином, що $a < x_1 < x_2 < b$. Порівнюючи значення функції в точках x_1 та x_2, можна зробити такі висновки.

Якщо $f\,(x_1) > f\,(x_2)$, то точка мінімуму $f\,(x)$ не розміщена в інтервалі $(a,\ x_1)$, тобто x^* належить $(x_1,\ b)$.

Якщо $f\,(x_1) < f\,(x_2)$, то точка мінімуму $f\,(x)$ не розміщена в інтервалі $(x_2,\ b)$, тобто x^* належить $(a,\ x_2)$.

Це правило дозволяє реалізувати процедуру пошуку шляхом послідовного виключення частин вихідного обмеженого інтервалу. Пошук завершується тоді, якщо підінтервал, що залишився, зменшується до досить малих розмірів.

Головна перевага таких пошукових методів – вони ґрунтуються на обчисленні лише значень функції і, отже, не вимагають виконання умови диференційовності і запису в аналітичному вигляді. Остання властивість особливо цінна під час імітаційного моделювання.

Процес застосовування методів пошуку на основі виключення інтервалів передбачає два етапи:

1) *етап установлення границь інтервалу*, на якому реалізується процедура пошуку меж достатньо широкого інтервалу, що містить точку оптимуму;

2) *етап зменшення інтервалу*, на якому реалізується кінцева послідовність перетворень початкового інтервалу з тим, щоб зменшити його довжину до заздалегідь встановленої величини.

Перший етап установлення границь інтервалу

На цьому етапі спочатку вибирається вихідна точка, а потім на основі правила виключення будується відносно широкий інтервал, що містить точку оптимуму. Звичайно використовують евристичний метод, наприклад, Свенна, згідно з яким *(k + 1)* спробна точка визначається за рекурентною формулою

$$x_{k+1} = x_k + 2^k\,\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8.3}$$

де x_0 – довільно обрана початкова точка;

Δ – величина кроку, що підбирається певним чином.

Знак Δ визначається шляхом порівняння значень $f(x_0)$, $f(x_0 + |\Delta|)$ та $f(x_0 - |\Delta|)$.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) > f(x_0) > f(x_0 + |\Delta|)$, то, згідно з припущенням про унімодальність точка мінімуму повинна розміщуватися правіше точки x_0, і величина Δ повинна мати додатне значення.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) < f(x_0) < f(x_0 + |\Delta|)$, то Δ має від'ємне значення.

Якщо ж $f(x_0 - |\Delta|) > f(x_0) < f(x_0 + |\Delta|)$, то точка мінімуму лежить між $x_0 - |\Delta|$ і $x_0 + |\Delta|$, і пошук граничних точок завершено.

Якщо $f(x_0 - |\Delta|) < f(x_0) > f(x_0 + |\Delta|)$, то маємо суперечність припущенню про унімодальність.

Другий етап зменшення інтервалу

Після того як встановлено межі інтервалу, що містить точку оптимуму, можна застосовувати більш складну процедуру зменшення інтервалу пошуку для одержання уточнених оцінок координат оптимуму. Величина підінтервалу, що виключається на кожному кроці, залежить від розміщення пробних точок x_1 та x_2 всередині інтервалу пошуку. Оскільки розміщення точки оптимуму апріорі невідоме, доцільно припустити, що розміщення пробних точок повинне забезпечувати зменшення інтервалу в одному й тому самому співвідношенні. Крім того, для підвищення ефективності алгоритму необхідно прагнути, щоб це співвідношення було максимальним.

Приклад 8.1. Застосувавши формулу Свенна, визначити інтервал пошуку мінімуму функції $f(x) = (100 - x)^2$ при заданій початковій точці $x_0 = 30$ та величині кроку $|\Delta| = 5$.

Обчислюємо значення функції $f(x_0)$, $f(x_0 + |\Delta|)$ і $f(x_0 - |\Delta|)$:

$$f(x_0) = f(30) = 4\,900; \qquad f(x_0 + |\Delta|) = f(35) = 4\,225;$$

$$f(x_0 - |\Delta|) = f(25) = 5\,625.$$

Оскільки $f(x_0 - |\Delta|) > f(x_0) > f(x_0 + |\Delta|)$, то величина Δ повинна бути додатною, а координата точки мінімуму x^* повинна бути більша ніж 30.

Застосовуємо формулу (7.1):

$x_1 = x_0 + \Delta = 30 + 5 = 35; \quad f(x_1) = f(35) = 4\,225 < f(x_0);$
$x_2 = x_1 + 2\Delta = 35 + 2 * 5 = 45; \quad f(x_2) = f(45) = 3\,025 < f(x_1);$
$x_3 = x_2 + 2^2\Delta = 45 + 4 \cdot 5 = 65; \quad f(x_3) = f(65) = 1\,225 < f(x_2);$
$x_4 = x_3 + 2^3\Delta = 65 + 8 \cdot 5 = 105; \quad f(x_4) = f(105) = 25 < f(x_3);$
$x_5 = x_4 + 2^4\Delta = 105 + 16 \cdot 5 = 185; \quad f(x_5) = f(185) = 7\,225 > f(x_4).$

У останній точці значення функції вже перевищує попереднє. Отже, точка мінімуму міститься в такому інтервалі невизначеності: $65 < x^* < 185$.

8.3.1.1. Метод поділу інтервалу навпіл (метод дихотомічного поділу)

Цей метод дозволяє виключити з розглядання в точності половину інтервалу на кожній ітерації. Алгоритм розрахунку наведений нижче.

Завдання. Знайти мінімальне значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Крок 1. Покласти $x_m = (a + b) / 2$; довжина інтервалу $L = b – a$. Обчислити значення $f(x_m)$.

Крок 2. Покласти $x_1 = a + L / 4$; $x_2 = b – L / 4$. Обчислити значення $f(x_1)$ і $f(x_2)$.

Крок 3. Порівняти $f(x_1)$ і $f(x_m)$.

Якщо $f(x_1) < f(x_m)$, то виключити інтервал $(x_m, b]$, далі покласти $b = x_m$, $x_m = x_1$. Отже, середньою точкою нового інтервалу пошуку стає колишня точка x_1.

Перейти до кроку 5.

Якщо $f(x_1) \geq f(x_m)$, то перейти до кроку 4.

Крок 4. Порівняти $f(x_2)$ та $f(x_m)$.

Якщо $f(x_2) < f(x_m)$, то виключити інтервал $[a, x_m)$, далі покласти $a = x_m$, $x_m = x_2$.

Перейти до кроку 5.

Якщо $f(x_2) \geq f(x_m)$, то виключити $[a, x_1)$ та $(x_2, b]$, покласти $a = x_1$, $b = x_2$.

Перейти до кроку 5.

Крок 5. Обчислити $L = b – a$. Якщо величина |L| менша за заздалегідь встановлену точність ε, тобто достатньо мала, то закінчити пошук. У протилежному разі повернутися до кроку 2.

Зауваження

1. Середня точка інтервалів, що послідовно виключаються, завжди збігається з однією з пробних точок x_1, x_2 або x_m, знайдених на попередній ітерації. Отже, на кожній ітерації потрібно не більше двох обчислень значень функції.

2. Як бачимо з алгоритму, з кожних трьох значень цільової функції f, обчислених в інтервалі пошуку, надалі використовується лише два, а третє не дає додаткової інформації й надалі не використовується.

3. Якщо проведено n обчислень значень функції, то довжина одержаного інтервалу невизначеності становить $(1/2)^{n/2}$ довжини вихідного інтервалу.

Приклад 8.2. Знайти мінімум функції $f(x) = (100 – x)^2$ методом поділу інтервалу навпіл. Інтервал пошуку $60 \leq x \leq 150$.

Ітерація 1

Крок 1. Тут a = 60; b = 150; L = 150 – 60 = 90;

$x_m = (60 + 90) / 2 = 105$; $f(x_m) = 25$.

Крок 2. Обчислюємо $x_1 = 60 + 90 / 4 = 82.5$; $x_2 = 150 – 90 / 4 = 127,5$.

Крок 3. Маємо $f(x_1) = 306,25 < f(x_m)$; $f(x_2) = 756,25 > f(x_m)$.

Кроки 4 – 5. Отже, виключаємо з розгляду інтервали (60; 82,5) та (127,5; 150). Довжина інтервалу пошуку зменшується з 90 до 45.

Ітерація 2

Беремо a = 82,5; b = 127,5; $x_m = 105$.

Обчислюємо $x_1 = 82{,}5 + 45/4 = 93{,}75$; $x_2 = 127{,}5 – 45/4 = 116.25$.

Маємо $f(x_1) = 39{,}06 > f(x_m)$; $f(x_2) = 264{,}06 > f(x_m)$.

Новий інтервал невизначеності становить від 93,75 до 116,25. Довжина інтервалу становить 22,5.

Ітерація 3

Беремо $a = 93{,}75$; $b = 116{,}25$; $x_m = 105$.

Обчислюємо $x_1 = 93{,}75 + 22{,}5/4 = 99{,}38$; $x_2 = 116{,}25 – 22{,}5/4 = 110{,}63$.

Маємо $f(x_1) = 0{,}39 < f(x_m)$; $f(x_2) = 113{,}00 > f(x_m)$.

Новий інтервал невизначеності становить від 99,38 до 110,63. Довжина інтервалу становить 11,25, тобто 1/8 початкового інтервалу невизначеності.

8.3.1.2. Метод Фібоначчі

Назва методу походить від відомого ряду Фібоначчі, тобто ряду натуральних чисел, в якому кожен наступний член ряду є сумою двох попередніх членів: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, і т. д.

Припустимо, що потрібно визначити мінімум якомога точніше, тобто з найменшим можливим інтервалом невизначеності, але при цьому можна виконати лише *n* обчислень функції. Із першого погляду здається зрозумілим, що не потрібно шукати розв’язання для всіх точок, одержаних у результаті експерименту. Навпаки, варто спробувати зробити так, щоб значення функції, одержані в попередніх експериментах, визначали положення подальших точок. Дійсно, знаючи значення функції, ми тим самим маємо інформацію про саму функцію і положення її мінімуму та використовуємо цю інформацію надалі.

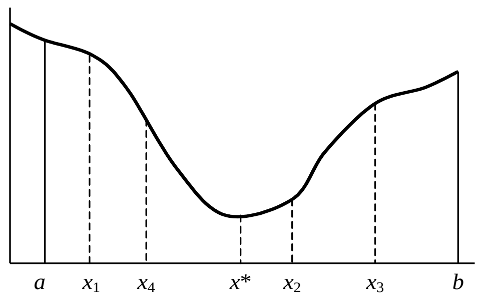


Рисунок 8.1 – Графічне подання функції

Припустимо, що існує інтервал невизначеності (x_1, x_3) і відоме значення функції $f(x_2)$ всередині цього інтервалу (рис. 7.1). Якщо можна обчислити функцію всього один раз у точці x_4, то де варто помістити точку x_4, для того, щоб одержати найменший можливий інтервал невизначеності?

Будемо вважати $x_2 – x_1 = L$ і $x_3 – x_2 = R$, причому $L > R$, як показано на рис. 8.2, і ці значення будуть фіксованими, якщо відомі x_1, x_2 та x_3. Якщо x_4 знаходиться в інтервалі (x_1, x_2), то:

1) якщо $f(x_4) < f(x_2)$, то новим інтервалом невизначеності буде (x_1, x_2) довжиною $x_2 – x_1 = L$;

2) якщо $f(x_4) > f(x_2)$, то новим інтервалом невизначеності буде (x_4, x_3) довжиною $x_3 – x_4$.

Оскільки невідомо, яка з цих ситуацій буде мати місце, виберемо x_4 таким чином, щоб мінімізувати найбільшу з довжин $x_3 - x_4$ і $x_2 - x_1$. Досягти цього можна, зробивши довжини $x_3 - x_4$ і $x_2 - x_1$ однаковими, тобто помістивши x_4 всередині інтервалу симетрично відносно точки x_2, що вже є усередині інтервалу. Будь-яке інше положення точки x_4 може призвести до того, що одержаний інтервал буде більшим за L. Поміщаючи x_4 симетрично відносно x_2, ми нічим не ризикуємо в будь-якому випадку.

Якщо виявиться, що можна виконати ще одне обчислення функції, то варто застосувати описану процедуру до інтервалу (x_1, x_2), у якому вже є значення функції, обчислене в точці x_4, або до інтервалу (x_4, x_3), у якому вже є значення функції, обчислене в точці x_2. Отже, стратегія зрозуміла із самого початку. Потрібно помістити наступну точку усередині інтервалу невизначеності симетрично відносно точки, що вже знаходиться там. Парадоксально, але щоб зрозуміти, як варто починати обчислення, необхідно розібратися у тому, як його потрібно закінчити.

На n-му обчисленні n-ту точку варто помістити симетрично відносно $(n-1)$-ї точки. Положення цієї останньої точки в принципі залежить від нас. Для того щоб одержати найбільше зменшення інтервалу на цьому етапі, необхідно поділити навпіл попередній інтервал. Тоді точка x_n буде збігатися з точкою x_{n-1}. Однак при цьому ми не одержуємо ніякої нової інформації. Звичайно точки x_{n-1} і x_n віддалені одна від одної на достатню відстань, щоб визначити, у якій половині, лівій чи правій, знаходиться інтервал невизначеності. Вони розміщуються на відстані $\varepsilon/2$ по обидва боки від середини відрізка L_{n-1}; можна самим задати величину ε чи вибрати цю величину рівною мінімально можливій відстані між двома точками.

Інтервал невизначеності буде мати довжину L_n, отже, $L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon$ (рис. 8.2, нижня частина).

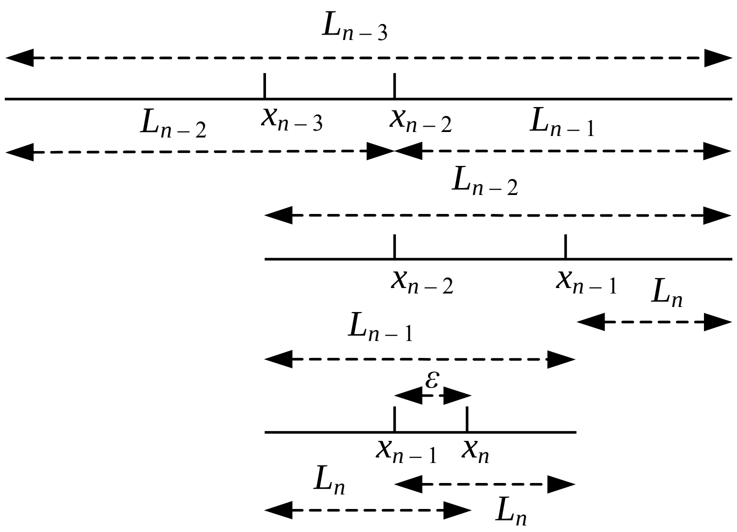


Рисунок 8.2 – Ілюстрація до методу Фібоначчі

На попередньому етапі точки x_{n-1} і x_{n-2} повинні бути розміщені симетрично усередині інтервалу L_{n-2} на відстані L_{n-1} від кінців цього інтервалу. Отже,

$L_{n-2} = L_{n-1} + L_n$ (рис. 8.2, середня частина).

Зауваження. Із рисунка зрозуміло, що на передостанньому етапі x_{n-2} залишається як внутрішня точка.

Аналогічно

$L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1}$ (рис. 8.2, верхня частина).

У загальному випадку

$$L_{j-1} = L_j + L_{j+1} \quad \text{при } 1 < j < n. \tag{8.4}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
&L_{n-1} = 2\,L_n - \varepsilon,\\
&L_{n-2} = L_{n-1} + L_n = 3\,L_n - \varepsilon,\\
&L_{n-3} = L_{n-2} + L_{n-1} = 5\,L_n - 2\,\varepsilon,\\
&L_{n-4} = L_{n-3} + L_{n-2} = 8\,L_n - 3\,\varepsilon \quad \text{і т. д.}
\end{aligned}$$

Якщо визначити послідовність чисел Фібоначчі у такий спосіб:

$F_0 = 1$, $F_1 = 1$ та $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ для $k = 2, 3, \ldots$, то

$$L_{n-j} = F_{j+1}\,L_n - F_{j-1}\,\varepsilon, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8.5}$$

Якщо початковий інтервал (a, b) має довжину L_1 $(= b - a)$, то

$$L_1 = F_n \cdot L_n - \varepsilon \cdot F_{n-2}, \quad \text{тобто}$$

$$L_n = \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon \frac{F_{n-2}}{F_n}. \tag{8.6}$$

Отже, зробивши n обчислень функції, ми зменшимо початковий інтервал невизначеності в $1/F_n$ раз порівняно з його початковою довжиною (зневажаючи ε), і це – найкращий результат.

Якщо пошук почато, то його нескладно продовжити, використовуючи описане вище правило симетрії. Отже, необхідно знайти положення першої точки, що міститься на відстані L_2 від одного з кінців початкового інтервалу, причому не важливо, від якого кінця, оскільки друга точка розміщується згідно з правилом симетрії на відстані L_2 від другого кінця інтервалу:

$$L_2 = F_{n-1} \cdot L_n - \varepsilon \cdot F_{n-3} = F_{n-1} \frac{L_1}{F_n} + \varepsilon \frac{\left(F_{n-1}F_{n-2} - F_nF_{n-3}\right)}{F_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n} L_1 + \frac{(-1)^n \varepsilon}{F_n}. \tag{8.7}$$

Після того як знайдене положення першої точки, числа Фібоначчі більше не потрібні. Використовуване значення ε може визначатися з практичних міркувань. Воно повинне бути меншим за L_1 / F_{n+1}, у протилежному разі ми будемо дарма витрачати час на обчислення функції.

Таким чином, пошук методом Фібоначчі, названий так через появу під час пошуку чисел Фібоначчі, є ітераційною процедурою. У процесі пошуку інтервалу (x_1, x_2) з точкою x_2, що вже лежить у цьому інтервалі, наступна точка x_4 завжди вибирається такою, що $x_3 - x_4 = x_2 - x_1$ або $x_4 - x_1 = x_3 - x_2$, тобто

$$x_4 = x_1 - x_2 + x_3. \tag{8.8}$$

Якщо $f(x_2) = f_2$ і $f(x_4) = f_4$, то можна розглянути чотири випадки (рис. 8.3):

а) $x_4 < x_2$,
$f_4 < f_2$.
Новий інтервал (x_1, x_2) містить точку x_4;
б) $x_4 > x_2$,
$f_4 < f_2$.
Новий інтервал (x_2, x_3) містить точку x_4;

в) $x_4 < x_2$,
$f_4 > f_2$.
Новий інтервал (x_4, x_3) містить точку x_2;
г) $x_4 > x_2$,
$f_4 > f_2$.
Новий інтервал (x_1, x_4) містить точку x_2.

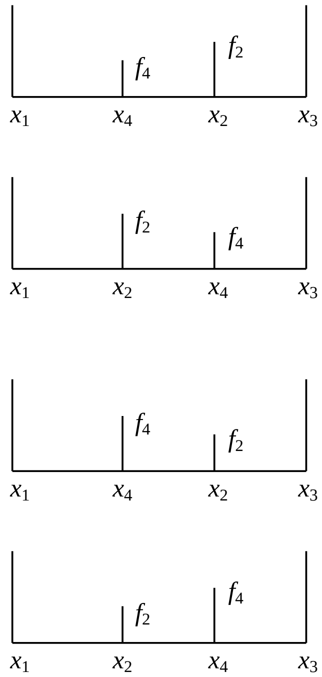


Рисунок 8.3 – Ілюстрація до методу Фібоначчі

Приклад 8.3. Знайти мінімум функції $f(x) = (100 - x)^2$ методом Фібоначчі. Інтервал пошуку $60 \le x \le 150$. Дозволяється зробити 6 обчислень значень функції (з урахуванням значень функції на границях інтервалу пошуку).

Для зручності розрахунків перейдемо до інтервалу одиничної довжини. Введемо змінну $x = 90\omega + 60$, тобто $\omega = (x - 60) / 90$. Тоді задача полягає у відшукуванні мінімуму функції $f(\omega) = (40 - 90\omega)^2$ при обмеженні $0 \le \omega \le 1$.

Ряд Фібоначчі $F_0 = F_1 = 1$; $F_2 = 2$; $F_3 = 3$; $F_4 = 5$; $F_5 = 8$; $F_6 = 13$ і т. д.

Оскільки дозволяється зробити 6 обчислень, $n = 6$, а шостий член ряду Фібоначчі F_n дорівнює 13. Початкова довжина інтервалу невизначеності L_1 дорівнює 1.

Спочатку одержуємо значення функції на краях інтервалу

$$f(0) = 1\,600, \qquad f(1) = 2\,500.$$

Ітерація 1 (обчислення 3)

За формулою (8.5), вважаючи $\varepsilon = 0$, відшукуємо положення нової точки, в якій необхідно обчислити значення функції

$$L_2 = \frac{F_5}{F_6} L_1 = \frac{8}{13} \cdot 1 = 0{,}615.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}615) = 236{,}7$.

Введемо позначення $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0{,}615$, $\omega_3 = 1$.

Ітерація 2 (обчислення 4)

Згідно з формулою (8.6) та рис. 7.3 положення нової точки ω_4 вибираємо таким чином, щоб вона розміщувалася симетрично відносно точки ω_2 (щоб нові інтервали невизначеності були однаковими) (див. рис. 8.4):

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_4,$$

$$\omega 4 = \omega 3 - \omega 2 + \omega 1 = 1 - 0{,}615 + 0 = 0{,}385.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}385) = 29{,}0$.

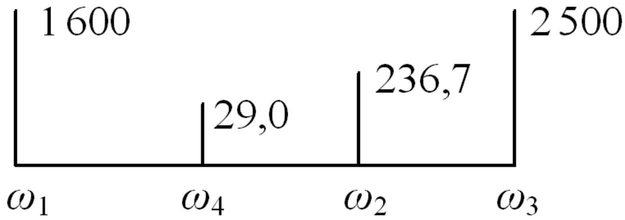


Рисунок 8.4 – Ілюстрація до прикладу методу Фібоначчі

Точку ω_3 відкидаємо, оскільки значення функції в цій точці є найбільшим. Отже, новий інтервал невизначеності $L_2 = \omega_2 - \omega_1 = 0{,}615$.

Ітерація 3 (обчислення 5)

Точку ω_5 розміщуємо симетрично відносно точки ω_4, щоб нові інтервали невизначеності були однаковими:

$$\omega 4 - \omega 1 = \omega 2 - \omega 5,$$

$$\omega 5 = \omega 2 - \omega 4 + \omega 1 = 0{,}615 - 0{,}385 + 0 = 0{,}23.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}23) = 369{,}8$.

Точку ω_1 відкидаємо, оскільки значення функції в цій точці є найбільшим. Отже, новий інтервал невизначеності $L_3 = \omega_2 - \omega_5 = 0{,}385$.

Ітерація 4 (обчислення 6)

Точку ω_6 розміщуємо симетрично відносно точки ω_4, щоб нові інтервали невизначеності були однаковими:

$$\omega_6 - \omega_5 = \omega_2 - \omega_4,$$

$$\omega_6 = \omega_2 - \omega_4 + \omega_5 = 0{,}615 - 0{,}385 + 0{,}23 = 0{,}46.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}46) = 2{,}37$.

Точку ω_5 відкидаємо, оскільки значення функції в цій точці є найбільшим. Отже, новий інтервал невизначеності $0{,}385 \le \omega \le 0{,}615$. Довжина інтервалу невизначеності $L_4 = \omega_2 - \omega_4 = 0{,}23$.

Відповідно довжина інтервалу невизначеності функції $f(x)$ після шести обчислень становить $(150 - 60) / F_6 = 90 / 13 = 6{,}92$.

Одержана точка мінімального значення функції $x = 90 \cdot 0{,}46 + 60 = 101{,}4$.

8.3.1.3. Метод «золотого перетину»

Не завжди можна заздалегідь визначити, скільки разів доведеться обчислювати функцію. У методі Фібоначчі це потрібно знати для визначення L_2, тобто положення початкової точки (див. рівняння (8.5)).

Метод «золотого перетину» майже настільки ж ефективний, як і метод Фібоначчі, однак при цьому не потрібно знати n – кількість обчислень функції, що визначається спочатку. Після того як виконано j обчислень, виходячи з тих самих міркувань, що і раніше (див. рівняння (8.5)), записуємо

$$L_{j-1} = L_j + L_{j+1}. \tag{8.8}$$

Однак якщо n є невідомим, то ми не можемо використовувати умову $L_{n-1} = 2L_n - \varepsilon$. Якщо відношення наступних інтервалів буде постійним, тобто

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} = \frac{L_j}{L_{j+1}} = \frac{L_{j+1}}{L_{j+2}} = \ldots = \tau, \tag{8.9}$$

то

$$\frac{L_{j-1}}{L_j} = 1 + \frac{L_{j+1}}{L_j},$$

тобто $\tau = 1 + 1/\tau$.

Таким чином, $\tau^2 - \tau - 1 = 0$, звідки $\tau = (1 + 5^{1/2}) / 2 \approx 1{,}618033989$. Тоді

$$\frac{L_{j-1}}{L_{j+1}} = \tau^2, \qquad \frac{L_{j-2}}{L_{j+1}} = \tau^3 \qquad \text{і т.д.}$$

Отже, $\frac{L_1}{L_n} = \tau^{n-1}$, тобто

$$L_n = \frac{L_1}{\tau^{n-1}}. \tag{8.10}$$

У результаті аналізу двох розглянутих значень функції буде визначений той інтервал, що має досліджуватися надалі. Цей інтервал буде містити одну з попередніх точок і наступну точку, що розміщуються симетрично їй. Перша точка знаходиться на відстані L_1 / τ від одного кінця інтервалу, друга – на такій самій відстані від іншого. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n-1} / F_n = 1/n$, то з рівняння (8.6) бачимо, що пошук методом «золотого перетину» є граничною формою пошуку методом Фібоначчі. Назва «золотий перетин» походить від назви відношення в рівнянні (8.9). Бачимо, що L_{j-1} поділяється на дві частини так, що відношення цілого до більшої частини дорівнює відношенню більшої частини до меншої, тобто дорівнює так званому «золотому відношенню».

Таким чином, якщо відшукується інтервал (x_0, x_3) і є два значення функції f_1 і f_2 у точках x_1 і x_2, то варто розглянути два випадки (рис. 8.5):

а) $f_1 < f_2$.
Новий інтервал (x_0, x_2);

б) $f_1 > f_2$.
Новий інтервал (x_1, x_3).

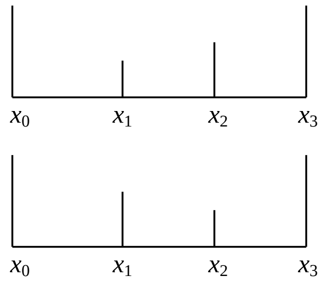


Рисунок 8.5 – Ілюстрація до методу «золотого перетину»

Покроковий алгоритм методу пошуку мінімуму на відрізку $[a, b]$:

Крок 1. Обчислюємо коефіцієнт розбиття відрізка $\tau \approx 1{,}618$.

Крок 2. $x_1 = a + (1 - 1 / \tau)(b - a)$, обчислити $f(x_1)$.

Крок 3. $x_2 = a + 1 / \tau (b - a)$, обчислити $f(x_2)$.

Крок 4. Якщо $|x_2 - x_1| < \varepsilon$, де ε – задане відхилення, то $x_m = (x_1 + x_2) / 2$, обчислити $f(x_m)$ і закінчити пошук.

Якщо $|x_2 - x_1| > \varepsilon$, то перейти до кроку 5.

Крок 5. Якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то виключити з розгляду інтервал (a, x_1), далі встановити $a = x_1$, $x_1 = x_2$ і $f(x_1) = f(x_2)$. Перейти до кроку 3, потім до кроку 4.

Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то виключити з розгляду інтервал (x_2, b), далі встановити $b = x_2$, $x_2 = x_1$ і $f(x_2) = f(x_1)$. Перейти до кроків 2 і 4.

Відзначимо, що після перших двох обчислень значень функції кожне наступне обчислення дозволяє виключити підінтервал, величина якого становить $(1 - 1/\tau)$-у частку довжини інтревалу пошуку. Отже, якщо початковий інтервал має одиничну довжину, то довжина інтервалу невизначеності після n обчислень значень функції становить $(1/\tau)^{n-1}$.

Таким чином, застосовування методів виключення інтервалів накладає єдине обмеження на досліджувану цільову функцію – унімодальність.

Отже, розглянуті методи можна використовувати для аналізу як неперервних, так і розривних, і дискретних функцій. Логічна структура пошуку ґрунтується на простому порівнянні значень функції в двох пробних точках.

Приклад 8.4. Знайти мінімум функції $f(x) = (100 - x)^2$ методом «золотого перетину». Інтервал пошуку: $60 \le x \le 150$, $\varepsilon = 0{,}1$.

Як і в попередньому прикладі, для зручності розрахунків перейдемо до інтервалу одиничної довжини. Введемо змінну $x = 90\omega + 60$, тобто $\omega = (x - 60) / 90$. Тоді задача полягає у відшукуванні мінімуму функції $f(\omega) = (40 - 90\omega)^2$ при обмеженні $0 \le \omega \le 1$.

Спочатку одержуємо значення функції на краях інтервалу:

$$f(0) = 1\,600, \quad f(1) = 2\,500.$$

Ітерація 1 та 2 (обчислення 3 та 4).

За формулою (8.9) відшукуємо довжину нового інтервалу невизначеності:

$$L_2 = \frac{L_1}{\tau} = \frac{1}{1{,}618} = 0{,}618\,.$$

Положення нових точок (див. крок 2 та крок 3),

$$\omega 1 = a + (1 - 1 / \tau)\,(b - a) = 0 + (1 - 0{,}618) \cdot 1 = 0{,}382.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}382) = 31{,}6$,

$$\omega 2 = a + 1 / \tau\,(b - a) = 0 + 0{,}618 \cdot 1 = 0{,}618.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}618) = 244{,}0$.

Введемо позначення $\omega_0 = 0$, $\omega_3 = 1$.

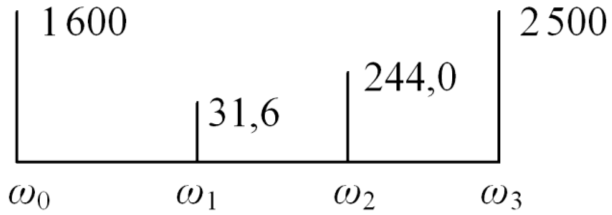


Рисунок 8.6 – Ілюстрація до прикладу методу «золотого перетину»

Оскільки $|w_2 - w_1| = |0{,}618 - 0{,}382| = 0{,}236 > \varepsilon$, то переходимо до кроку 5.

Дивись крок 5. Інтервал (ω_2, ω_3) відкидаємо. Отже, новий інтервал невизначеності $L_2 = \omega_2 - \omega_0 = 0{,}618$.

Ітерація 3 (обчислення 5).

Положення нової точки (див. крок 2),

$$\omega 4 = a + (1 - 1 / \tau)\,(b - \mathrm{a}) = 0 + (1 - 0{,}618) * 0{,}618 = 0{,}236.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}236) = 352$.

Оскільки $|w_4 - w_1| = |0{,}236 - 0{,}382| = 0{,}146 > \varepsilon$, то переходимо до кроку 5.

Дивись крок 5. Інтервал (ω_0, ω_4) відкидаємо. Отже, новий інтервал невизначеності $L_3 = \omega_2 - \omega_4 = 0{,}382$.

Ітерація 4 (обчислення 6).

Положення нової точки (див. крок 3),

$$\omega 5 = a + 1 / \tau (b - \text{a}) = 0{,}236 + 0{,}618 \cdot 0{,}382 = 0{,}472.$$

Відповідне значення функції $f(0{,}472) = 6{,}15$.

Оскільки $|w_5 - w_1| = |0{,}472 – 0{,}382| = 0{,}09 < \varepsilon$, то закінчуємо пошук.

Відповідно $w_m = (w_1 + w_5)/2 = 0{,}427$. Одержана точка мінімального значення функції $x = 90 \cdot 0{,}427 + 60 = 98{,}43$.

8.3.1.4. Порівняння методів виключення інтервалів

Позначимо довжину початкового інтервалу невизначеності через L_1, а довжину інтервалу, одержаного в результаті n обчислень значень функції, – через L_n. Як показник ефективності того чи іншого методу виключення інтервалів введемо до розгляду характеристику відносного зменшення вихідного інтервалу $Fr(n) = L_n/L_1$.

Нагадаємо, що при використанні методу ділення інтервалу навпіл, довжина одержаного інтервалу становить $L_1 \cdot (0.5)^{n/2}$, у методі «золотого перетину» – $L_1/(1{,}618)^{n-1}$, у методі Фібоначчі – L_1/F_n.

Отже, відносне зменшення інтервалу після n обчислень значень функції дорівнює:

$Fr(n) = (0.5)^{n/2}$ – метод ділення інтервалу навпіл;

$Fr(n) = L_1/(1{,}618)^{n-1}$ – метод «золотого перетину»;

$Fr(n) = L_1/F_n$ – метод Фібоначчі.

Результати розрахунку за цими формулами наведено у таблиці 8.1.

Таблиця 8.1 – Величини відносного зменшення інтервалу невизначеності

Метод пошуку	**Кількість обчислень функції**				
	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
Метод ділення інтервалу навпіл	0,5	0,25	0,125	0,063	0,031
Метод «золотого перетину»	0,618	0,236	0,090	0,034	0,013
Метод Фібоначчі	0,5	0,2	0,077	0,029	0,011

Із таблиці бачимо, що пошук за допомогою методу Фібоначчі забезпечує найбільше відносне зменшення вихідного інтервалу при одній і тій самій кількості обчислень значень функції.

8.3.2. Методи поліноміальної інтерполяції

У попередніх підрозділах була зроблена спроба знайти малий інтервал, у якому знаходиться мінімум функції. У наступних підрозділах застосовується інший підхід. Використовується кілька значень функції у визначених точках для апроксимації функції звичайним поліномом принаймні в невеликій області значень. Потім положення мінімуму функції апроксимується положенням мінімуму полінома, оскільки останній обчислити простіше.

8.3.2.1. Квадратична інтерполяція

Якщо відомі значення функції $f\ (x)$ у трьох різних точках $a,\ b,\ c,$ що дорівнюють відповідно $f_a,\ f_b,\ f_c$, то функція $f\ (x)$ може бути апроксимована квадратичною функцією

$$\varphi\ (x) = A\ x^2 + B\ x + C, \tag{8.10}$$

де коефіцієнти $A,\ B$ і C визначаються з рівнянь

$$\begin{aligned} A\ a^2 + B\ a + C &= f_a, \\ A\ b^2 + B\ b + C &= f_b, \\ A\ c^2 + B\ c + C &= f_c. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Після перетворень цих рівнянь маємо

$$\begin{aligned} A &= [(c-b)\ f_a + (a-c)\ f_b + (b-a)\ f_c]\ /\ \Delta, \\ B &= [(b^2-c^2)\ f_a + (c^2-a^2)\ f_b + (a^2-b^2)\ f_c]\ /\ \Delta, \\ C &= [b\ c\ (c-b)\ f_a + c\ a\ (a-c)\ f_b + a\ b\ (b-a)\ f_c]\ /\ \Delta, \end{aligned} \tag{8.12}$$

де $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$. Зрозуміло, що $\varphi\ (x)$ буде мати мінімум у точці $x = -B\ /\ 2A$, якщо A > 0. Отже, можна апроксимувати точку мінімуму функції $f\ (x)$ значенням

$$\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{(b^2-c^2)f_a + (c^2-a^2)f_b + (a^2-b^2)f_c}{(b-c)f_a + (c-a)f_b + (a-b)f_c}\right]. \tag{8.13}$$

Цей метод може безпосередньо застосовуватися до функцій однієї змінної. Припустимо, що задано унімодальну функцію однієї змінної $f\ (x)$, початкова апроксимація положення мінімуму і довжина кроку H, що є величиною того самого порядку, що і відстань від точки A до точки дійсного мінімуму x^* (умова, яку не завжди просто задовольнити).

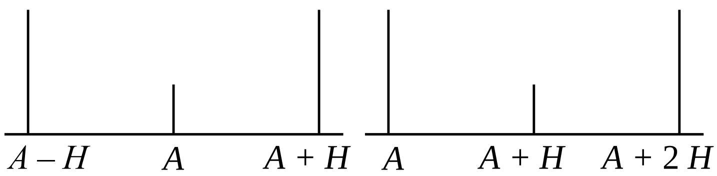


Рисунок 8.7

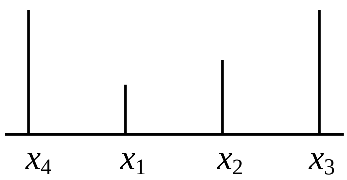


Рисунок 8.8

Обчислювальна процедура має такі кроки:

1. Обчислити $f\,(A)$ і $f\,(A + H)$.

2. Якщо $f\,(A) < f\,(A + H)$, то взяти за третю точку $A - H$ і обчислити $f\,(A - H)$. У протилежному разі за третю точку взяти $A + 2H$ і знайти $f\,(A + 2H)$ (рис. 8.5).

3. Використовуючи ці три точки, знайти δ з рівняння (8.13) і обчислити $f\,(\delta)$.

4. Якщо різниця між найменшим значенням функції і наступним найменшим значенням функції менша ніж задана точність, то процедура закінчується.

5. Якщо процедура не була завершена на кроці 4, то точка з найбільшим значенням звичайно відкидається, і ми повертаємося на крок 3. Але якщо залишивши точку з найбільшим значенням функції ми визначимо кінцеві межі інтервалу, у якому є мінімум, то варто дійсно залишити це значення і потім повернутися на крок 3. Наприклад, на рис. 8.8 залишені точки x_1, x_2 і x_4, а не точки x_1, x_2 і x_3.

Якщо точність є задана занадто малою, то a, b, c, а також f_a, f_b, f_c будуть дуже близькими одна до одної, й значення δ (див. рівняння (8.13)) може стати взагалі недосяжним. Щоб подолати ці труднощі, перепишемо рівняння (8.13) для другої та наступної інтерполяцій:

$$\delta = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{0.5\,(f_a - f_b)(b-c)(c-a)}{(b-c)f_a + (c-a)f_b + (a-b)f_c}\,. \qquad (8.14)$$

Вищеописаний метод часто називають методом Пауела.

8.3.3. Інтерполяція вищих порядків

У загальному випадку функцію, що підлягає оптимізації, можна апроксимувати не лише квадратичним поліномом, але й поліномом n-го ступеня. Якщо значення функції f (x) у n різних точках $a, b, c, \ldots, n$, є відомими і дорівнюють відповідно $f_a, f_b, f_c, \ldots, f_n$, то функція $f\,(x)$ може бути апроксимована поліномом такого вигляду:

$$\varphi\,(x) = A\,x^n + B\,x^{n-1} + C\,x^{n-2} + \ldots + D\,x^2 + E\,x + F. \qquad (8.15)$$

Невідомі коефіцієнти $A, B, C, \ldots, D, E$ і F можна визначити з такої системи рівнянь:

$$\begin{gathered}
A\,a^n + B\,a^{n-1} + C\,a^{n-2} + \ldots + D\,a^2 + E\,a + F = f_a,\\
A\,b^n + B\,b^{n-1} + C\,b^{n-2} + \ldots + D\,b^2 + E\,b + F = f_b,\\
A\,c^n + B\,c^{n-1} + C\,c^{n-2} + \ldots + D\,c^2 + E\,c + F = f_c,\\
\ldots\\
A\,f^{\,n} + B\,f^{\,n-1} + C\,f^{\,n-2} + \ldots + D\,f^{\,2} + E\,f + F = f_f.
\end{gathered}$$

Цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь (n рівнянь, n невідомих) можна розв’язати, наприклад, за допомогою відомого методу Гаусса. Далі процедура пошуку мінімуму має відбуватися аналогічно методу Пауела, описаному у попередньому підрозділі.

Відзначимо, однак, що інтерполяція вищих порядків є неекономічною через необхідність обчислень великої кількості значень функції. На практиці інтерполяція поліномом ступеня вище ніж 3 використовується рідко.

Перевага методів інтерполяції вищих порядків – можливість відшукувати мінімуми функції навіть у тому разі, якщо функція не є унімодальною.

8.3.4. Метод покоординатного спуску

Одним із методів знаходження мінімуму функції *n* змінних є методи прямого пошуку. Методи прямого пошуку є методами, у яких використовують лише значення функції. Розглянемо деякі з таких методів. Практика показала, що ці два методи є ефективними та можуть бути застосованими для великої кількості прикладних задач.

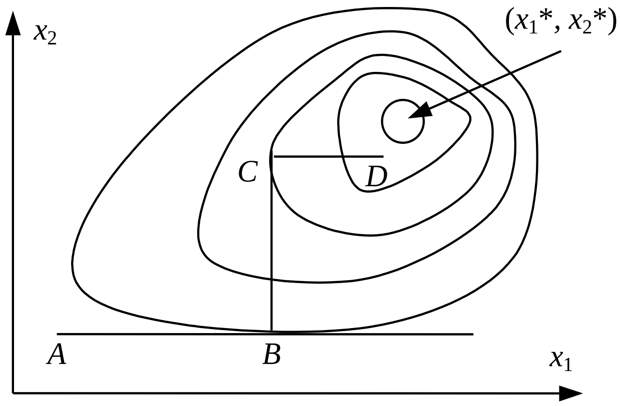


Рисунок 8.9 – Метод покоординатного спуску

Розглянемо функцію двох змінних. Її лінії рівня подані на рис. 8.9, а мінімум лежить у точці (x_1*, x_2*). Найпростішим методом пошуку є метод покоординатного спуску. Із точки *A* робимо пошук мінімуму уздовж напрямку осі x_1 і таким чином знаходимо точку *B*, у якій дотична до лінії постійного рівня паралельна осі x_1. Потім, роблячи пошук із точки *B* у напрямку осі x_2, одержимо точку *C*, роблячи пошук паралельно осі x_2 – точку *D* і таке інше. Таким чином, ми доходимо до оптимальної точки. Цю ідею можна застосувати для функції *n* змінних.

Теоретично цей метод є ефективним у разі єдиного мінімуму функції, а на практиці він виявляється занадто повільним. Тому були розроблені більш складні методи, що використовують більше інформації на підставі вже одержаних значень функції.

8.3.5. Метод Хука – Дживса

Суть методів прямого пошуку полягає в переборі пробних точок. Зрозуміло, що основна мета побудови безлічі таких точок полягає у визначенні напрямку, де повинен проходити пошук. Найпростіший підхід полягає в тому, що пошук проводиться на основі рекурсивного перебору напрямків із довільно заданої безлічі. З іншого боку, можна побудувати стратегію пошуку, в рамках якої один чи декілька напрямків пошуку уточнюється на кожній ітерації. До того ж необхідно гарантувати проведення пошуку по всій розглядуваній області.

Елементарним прикладом методу рекурсивного перебору на безлічі напрямків пошуку є метод циклічної зміни змінних, відповідно до якого кожного разу змінюється лише одна змінна. При цьому підході безліч напрямків пошуку вибирається у вигляді безлічі координатних напрямків у просторі змінних задачі. Але така стратегія може виявитися не лише не ефективною, а й призвести до відсутності збіжності до точки локального оптимуму навіть при нескінченній кількості ітерацій. Підвищення ефективності цього методу пов’язано з тією обставиною, що пошук, проведений у напрямку $(x_{i+1} - x_i)$, де $f(x_{i+1}) < f(x_i)$, дозволяє істотно прискорити збіжність.

Ця умова була покладена в основу методу, розробленого Хуком і Дживсом у 1961 році. Дотепер цей метод є дуже ефективним і оригінальним. Метод Хука – Дживса характеризується нескладною стратегією пошуку, відносною простотою обчислень і невисоким рівнем вимог до пам’яті комп’ютера. До того ж це один із перших алгоритмів, у якому під час визначення нового напрямку пошуку враховується інформація, одержана на попередніх ітераціях.

Алгоритм, що реалізує метод Хука – Дживса (рис. 8.10), являє собою комбінацію досліджувального пошуку з циклічною зміною змінних та прискорювального пошуку за зразком.

Досліджувальний пошук орієнтований на виявлення характеру локального поводження цільової функції та визначення напрямку подальшого дослідження. Для проведення дослідницького пошуку необхідно знати величину кроку, що може бути неоднаковою для різних координатних напрямків і змінюватися в процесі пошуку.

Досліджувальний пошук починається у певній вихідній точці (рис. 8.11). Якщо значення цільової функції в пробній точці не перевищує значення у вихідній точці, то крок пошуку розглядається як успішний. У протилежному разі необхідно повернутися до попередньої точки і зробити крок у протилежному напрямку з подальшою перевіркою значення цільової функції. Після перебору всіх n координат досліджувальний пошук закінчується. Одержану в результаті точку називають базовою точкою.

Пошук за зразком. Пошук за зразком полягає в реалізації єдиного кроку з одержаної базової точки вздовж прямої, що з’єднує цю точку з попередньою базовою точкою. Нова точка зразка визначається відповідно до формули

$$P_i = b_i + 2\,(b_{i+1} - b_i). \tag{8.16}$$

Як тільки рух за зразком не приводить до зменшення цільової функції, точка P_i фіксується як тимчасова базова точка і знову проводиться досліджувальний пошук. Якщо в результаті виходить точка з меншим значенням цільової функції, ніж у точці b_{i+1}, то вона розглядається як нова базова точка.

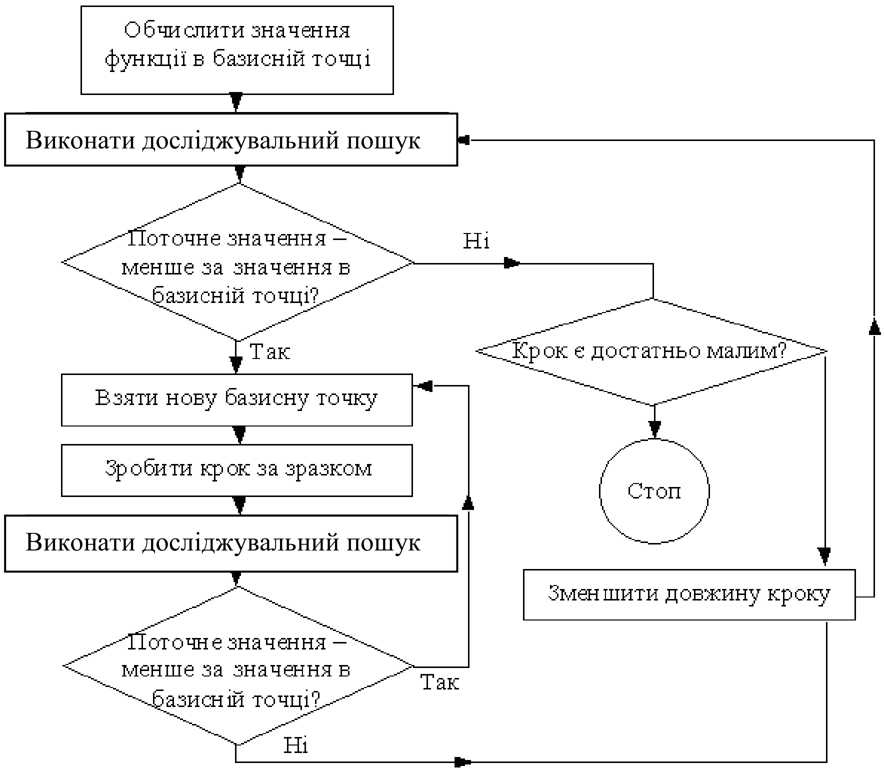


Рисунок 8.10 – Блок-схема алгоритму методу Хука – Дживса

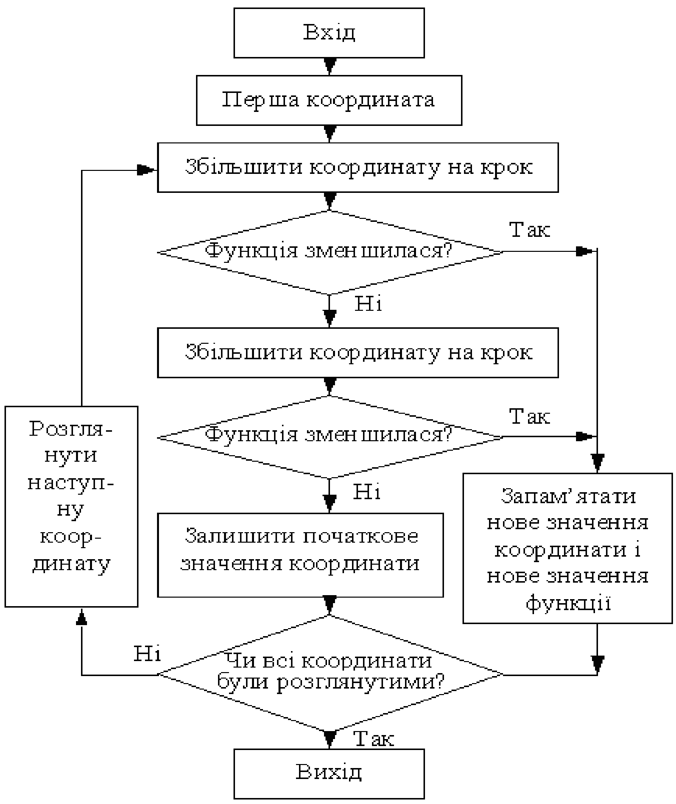


Рисунок 8.11 – Блок-схема алгоритму досліджувального пошуку в методі Хука – Дживса

З іншого боку, якщо досліджувальний пошук виявиться невдалим, необхідно повернутися в точку b_{i+1} і провести досліджувальний пошук для виявлення нового напрямку мінімізації. У результаті виникає ситуація, де такий пошук не приводить до успіху. У цьому разі потрібно зменшити величину кроку шляхом введення деякого множника і відновити досліджувальний пошук. Пошук завершується, якщо величина кроку стає досить малою.

Опис алгоритму методу Хука – Дживса:

А. Вибрати:

початкову базову точку b_1 із координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

крок довжиною h_j для кожної змінної x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$; крок для всіх змінних може бути взятим одним і тим самим;

коефіцієнт зменшення кроку $a > 1$;

параметр закінчення пошуку $\varepsilon > 0$.

Б. 1) обчислити $f(x)$ у базовій точці b_1 для одержання відомостей про локальну поведінку функції $f(x)$ – одержуємо $f(b_1)$;

2) кожна змінна по черзі змінюється додаванням довжини кроку. Таким чином, ми обчислюємо значення функції $f(b_1 + h_1 \cdot e_1)$, де e_1 – одиничний вектор у напрямку осі x_1.

Якщо це призводить до зменшення значення функції, то b_1 замінюється на $b_1 + h_1 \cdot e_1$. У протилежному разі обчислюється значення функції $f(b_1 - h_1 \cdot e_1)$, і якщо її значення зменшилося, то b_1 замінюємо на $b_1 - h_1 \cdot e_1$.

Якщо жоден із виконаних кроків не приводить до зменшення значення функції, то точка b_1 залишається незмінною і розглядаються зміни в напрямку осі x_2, тобто обчислюємо значення функції $f(b_1 + h_2 \cdot e_2)$ і т. д. Якщо будуть розглянутими всі n змінних, ми будемо мати нову базову точку b_2;

3) якщо $b_2 = b_1$, тобто зменшення функції не було досягнуто, то дослідження повторюється навколо тієї самої базової точки b_2, але зі зменшеною довжиною кроку: $h_j = h_j/a$;

4) якщо $b_2 \neq b_1$, то виконується пошук за зразком.

В. Під час пошуку за зразком використовується інформація, одержана в процесі дослідження, і мінімізація функції закінчується пошуком у напрямку, заданому зразком. Ця процедура проводиться таким чином:

1. Розумно рухатися з базової точки b_2 у напрямку $b_2 - b_1$, оскільки пошук у цьому напрямку вже призвів до зменшення значення функції. Тому обчислимо функцію в точці зразка

$$P_1 = b_1 + 2\,(b_2 - b_1). \tag{8.17}$$

У загальному випадку

$$P_i = b_i + 2\,(b_{i+1} - b_i). \tag{8.18}$$

2. Потім дослідження варто продовжувати навколо точки P_1 (P_i).

3. Якщо найменше значення на кроці В2 менше за значення в базовій точці b_2 (у загальному випадку b_{i+1}), то одержують нову базову точку

b_2 (b_{i+2}), після цього варто повторити крок В1. У протилежному разі не проводити пошук за зразком з точки b_2 (b_{i+1}), а продовжувати дослідження в точці b_2 (b_{i+1}).

Г. Завершити цей процес, якщо довжини кроків h_j не будуть перевищувати заданого малого значення ε.

Приклад 8.5. Знайти мінімум функції $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 + (x_3 + 2)^4$ з точністю до $\varepsilon = 0{,}1$. Використати як початкову точку (4, –2, 3). Взяти початковий крок $h = 1$.

А. Початкова точка: x_0 (4, –2, 3).

Ітерація 1

Б. 1. Обчислимо значення функції в початковій точці b_1:

$$f(b1) = (4 - 2)2 + ((-2) - 5)2 + (3 + 2)4 = 678.$$

2. Виконаємо досліджувальний пошук, змінюючи по черзі кожну змінну додаванням довжини кроку. Обчислимо відповідні значення функції.

$$f(4 + 1, -2, 3) = f(5, -2, 3) = (5 - 2)^2 + ((-2) - 5)^2 + (3 + 2)^4 = 683 > f(b_1);$$

$$f(4 - 1, -2, 3) = f(3, -2, 3) = (3 - 2)^2 + ((-2) - 5)^2 + (3 + 2)^4 = 675 < f(b_1).$$

Продовжимо пошук від нової точки b1* = b1 – h1 · e1, тобто (3, –2, 3),

$$f(3, -2 + 1, 3) = f(3, -1, 3) = (3 - 2)^2 + ((-1) - 5)^2 + (3 + 2)^4 = 662 < f(b_1^*);$$

$$f(3, -2 - 1, 3) = f(3, -3, 3) = (3 - 2)^2 + ((-3) - 5)^2 + (3 + 2)^4 = 690 > f(b_1^*).$$

Продовжимо пошук від нової точки b1* = b1* + h2 · e2, тобто (3, –1, 3),

$$f(3, -1, 3 + 1) = f(3, -1, 4) = (3 - 2)^2 + ((-1) - 5)^2 + (4 + 2)^4 = 1333 > f(b_1^*);$$

$$f(3, -1, 3 - 1) = f(3, -1, 2) = (3 - 2)^2 + ((-1) - 5)^2 + (2 + 2)^4 = 293 < f(b_1^*).$$

Одержимо точку b_2 (3, –1, 2), в якій було досягнуто найменшого значення функції на даному кроці.

В. Виконаємо пошук за зразком.

За формулою (7.16) одержимо координати точки P_1 (4 + 2 (3 – 4); –2 + 2 (–1 – (–2)); 3 + 2 (2 – 3)). Маємо точку P_1 (2, 0, 1).

Відповідне значення функції

$$f(P1) = (2 - 2)2 + (0 - 5)2 + (1 + 2)4 = 106 < f(b2).$$

Досягнуто зменшення значення функції порівняно з точкою b_2.

Встановимо нові координати $b_2 = P_1$, і далі переходимо на наступну ітерацію.

Ітерація 2

Досліджувальний пошук навколо точки b_2 (2, 0, 1),

$$f(2+1, 0, 1) = f(3, 0, 1) = (3-2)2 + (0-5)2 + (1+2)4 = 107 > f(b2);$$
$$f(2-1, 0, 1) = f(1, 0, 1) = (1-2)2 + (0-5)2 + (1+2)4 = 107 > f(b2).$$

Зменшення функції не досягнуто.

$$f(2, 0+1, 1) = f(2, 1, 1) = (2-2)2 + (1-5)2 + (1+2)4 = 97 < f(b2);$$
$$f(2, 0-1, 1) = f(2, -1, 1) = (2-2)2 + (-1-5)2 + (1+2)4 = 117 > f(b2).$$

Продовжимо пошук від нової точки $b_2^* = b_2^* + h_2 \cdot e_2$, тобто (2, 1, 1),

$$f(2, 1, 1+1) = f(2, 1, 2) = (2-2)2 + (1-5)2 + (2+2)4 = 272 > f(b2^*);$$
$$f(2, 1, 1-1) = f(2, 1, 0) = (2-2)2 + (1-5)2 + (0+2)4 = 32 < f(b2^*).$$

Одержимо точку b_3 (2, 1, 0), в якій було досягнуто найменшого значення функції на даному кроці.

В. Виконаємо пошук за зразком.

За формулою (7.16) одержимо координати точки P_2 (3 + 2 (2 – 3); –1 + 2 (1 – (–1)); 2 + 2 (0 – 2)). Маємо точку P_2 (1, 3, –2).

Відповідне значення функції

$$f(P2) = (1-2)2 + (3-5)2 + (-2+2)4 = 5 < f(b3).$$

Досягнуто зменшення значення функції порівняно з точкою b_3.

Встановимо нові координати $b_3 = P_2$, і далі перейдемо на наступну ітерацію.

Для наступних ітерацій наведемо лише основні проміжні результати.

Ітерація 3

Досліджувальний пошук навколо точки b_3 (1, 3, –2).

Знайдемо точку b_4 (2, 4, –2), значення функції в якій становить $f(b_4) = 1 < f(b_3)$.

Пошук за зразком: одержимо точку P_3 (2, 7, –4), значення функції в якій становить $f(P_3) = 20 > f(b_4)$. Відкинемо цю точку.

Ітерація 4

Досліджувальний пошук навколо точки b_4 (2, 4, –2).

Знайдемо точку b_5 (2, 5, –2), значення функції в якій становить $f(b_5) = 0 < f(b_4)$.

Пошук за зразком: одержимо точку P_4 (2, 6, –2), значення функції в якій становить $f(P_4) = 1 > f(b_5)$. Відкинемо цю точку.

Ітерація 5

Досліджувальний пошук навколо точки b_5 (2, 5, –2).

Використовуючи задану довжину кроку ($h = 1$), не вдається знайти точку, значення функції в якій менше, ніж у b_5.

Перейдемо на крок Б3.

Зменшимо довжину кроку, встановлюємо $h = 0{,}5$.

Ітерація 6

Досліджувальний пошук навколо точки b_5 (2, 5, –2).

Використовуючи задану довжину кроку ($h = 0{,}5$), не вдається знайти точку, значення функції в якій менше, ніж у b_5.

Зменшимо довжину кроку, встановимо $h = 0{,}25$.

Ітерація 7

Досліджувальний пошук навколо точки b_5 (2, 5, –2).

Використовуючи задану довжину кроку ($h = 0{,}25$), не вдається знайти точку, значення функції в якій менше, ніж у b_5.

Зменшимо довжину кроку, встановимо $h = 0{,}1$.

Ітерація 8

Досліджувальний пошук навколо точки b_5 (2, 5, –2).

Використовуючи задану довжину кроку ($h = 0{,}1$), не вдається знайти точку, значення функції в якій менше, ніж у b_5.

Оскільки довжина кроку $h = \varepsilon$, закінчимо розрахунок.

Отже, мінімум функції (з точністю до заданого значення ε) має місце в точці (2, 5, –2) та становить 0.

8.3.6. Методи випадкового пошуку

У методах випадкового пошуку напрямок пошуку на кожному кроці вибирається випадково. У цьому підрозділі розглянемо один такий метод, що має назву адаптивного методу випадкового пошуку.

Задається початкова точка x_0. Кожна наступна точка x_{k+1} обчислюється за формулою

$$x_{k+1} = x_k + h_k e_k,$$

де $h_k > 0$ – величина кроку; e_k – випадковий вектор одиничної довжини, що визначає напрямок пошуку; k – номер ітерації.

На поточній ітерації шляхом генерування випадкових векторів e_k одержуються точки, розміщені на гіперсфері радіуса h_k із центром у точці x_k (рис. 8.12).

Якщо значення функції в одержаній точці не менше, ніж у центрі, крок вважається невдалим (точки y_1, y_2 при пошуку з x_0; y_1, y_3 при пошуку з x_1). Якщо кількість невдалих кроків із поточної точки сягає певного числа M, подальший пошук продовжується з тієї самої точки, але з меншим кроком до того часу, поки він не стане меншим заздалегідь заданої величини ε.

Якщо ж значення функції в одержаній точці менше, ніж у центрі, крок вважається вдалим, і в знайденому напрямку робиться збільшений крок, що відіграє роль прискорювального кроку (як при пошуку за методом Хука – Дживса).

Якщо при цьому значення функції знов менше, ніж у центрі, напрямок вважається вдалим, і подальший пошук продовжується з цієї точки (точки $z_3 = x_1$ при пошуку з x_0, $z_4 = x_2$ при пошуку з x_1).

Якщо ж значення функції стало не менше, ніж у центрі, напрямок вважається невдалим, і пошук продовжується зі старого центра (у точці y_2 при пошуку з x_1 функція менша, ніж у x_1, а в точці z_2 вже не менша, тому напрямок $(z_2 - x_1)$ є невдалим).

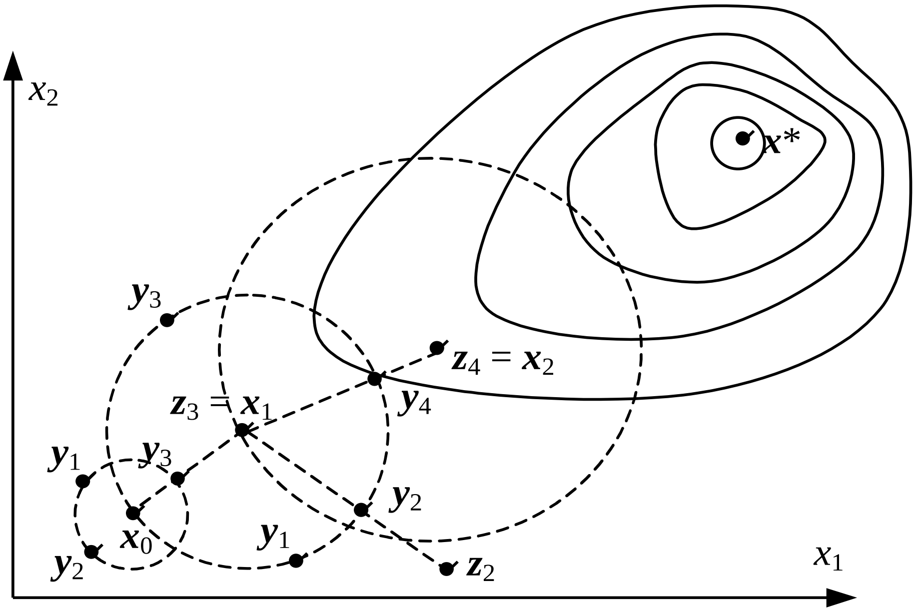


Рисунок 8.12 – Адаптивний метод випадкового пошуку

8.3.7. Метод Нелдера – Міда

Перші спроби розв’язання оптимізаційних задач без обмежень на основі прямого пошуку пов’язані з використанням одномірних методів оптимізації. Як правило, припустима область визначення цільової функції замінюється дискретною множиною (решіткою) точок простору змінних, а потім використовуються різні стратегії зменшення області, що містить розв’язок задачі.

Одна із стратегій пошуку, що викликає особливий інтерес, покладена в основу методу пошуку за симплексом, запропонованого Спендлі, Хекстом і Хімсвортом. Процедура симплексного пошуку базується на тому, що експериментальним зразком, що містить найменшу кількість точок, є регулярний симплекс. Регулярний симплекс у n-мірному просторі являє собою багатогранник, утворений $n + 1$ рівновіддаленими одна від одної точками-вершинами. Наприклад, у разі двох змінних симплексом є трикутник; у тривимірному просторі симплекс являє собою тетраедр. Ідея методу полягає в порівнянні значень функції в $(n + 1)$ вершинах симплекса і переміщенні в напрямку оптимальної точки за допомогою ітераційної процедури.

Метод Нелдера – Міда (пошук за багатогранником, що деформується) є розвитком симплексного методу Спендлі, Хекста і Хімсворта. У симплексному методі, запропонованому спочатку, регулярний симплекс використовувався на кожному етапі. Нелдер і Мід запропонували кілька модифікацій цього методу, які допускають, щоб симплекси були неправильними. У результаті вийшов дуже надійний метод прямого пошуку, що є одним з найефективніших, якщо $n \le 6$.

Результати окремих чисельних випробувань показують, що метод Нелдера – Міда має достатню ефективність і високу надійність за умов наявності випадкових збурювань чи помилок під час визначення значень цільової функції.

У методі Спендлі, Хекста і Хімсворта симплекс пересувається за допомогою трьох основних операцій: *відбиття*, *розтягування* і *стискання*. Зміст цих операцій стане зрозумілим під час розгляду кроків процедури.

Алгоритм методу

А. Знайдемо значення функції $f_1 = f(x_1)$, $f_1 = f(x_2)$, ..., $f_{n+1} = f(x_{n+1})$ у вершинах симплекса.

Початковий симплекс (координати його вершин) можна вибрати довільно, на розсуд користувача. Формули, наведені нижче, дозволяють побудувати регулярний симплекс навколо початкової (базової) точки $x^{(0)}$ із масштабним множником h. Координати решти n вершин симплекса у n-вимірному просторі обчислюються так:

$$x^i = \begin{cases} x_j^{(0)} + \delta_1, & \text{якщо } i \ne j, \\ x_j^{(0)} + \delta_2, & \text{якщо } i = j, \end{cases}$$

де i та $j = 1, 2, 3, \ldots, n$; i – номер точки; j – індекс змінної.

Прирощення δ_1 та δ_2 залежать лише від n та вибраного масштабного множника h і визначаються за формулами:

$$\delta_1 = \left[\frac{\sqrt{n+1} + n - 1}{n\sqrt{2}}\right] h,$$

$$\delta_2 = \left[\frac{\sqrt{n+1} - 1}{n\sqrt{2}}\right] h.$$

Б. Знайдемо найбільше серед f_i значення функції f_h, наступне за найбільшим значенням функції f_g, найменше значення функції f_l і відповідні до них точки x_h, x_g та x_l.

В. Знайдемо центр тяжіння всіх точок, за винятком точки x_h. Нехай центром тяжіння буде

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i \ne h} x_i \tag{8.19}$$

і обчислимо $f(x_0) = f_0$.

Г. Зручніше за все почати переміщення від точки x_h. Відбивши точку x_h відносно точки x_0, одержимо нову точку x_r і знайдемо $f_r = f(x_r)$.

Операція відбиття ілюструється на рис. 8.13. Якщо $\alpha > 0$ – це коефіцієнт відбиття, то положення x_r визначається таким способом:

$$x_r - x_0 = \alpha\,(x_0 - x_h),$$

тобто

$$x_r = (1 + \alpha)\,x_0 - \alpha\,x_h \tag{8.20}$$

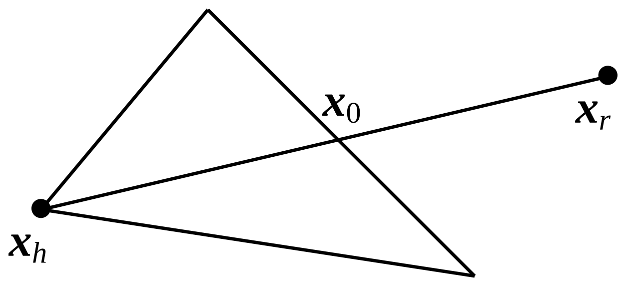


Рисунок 8.13 – Операція відбиття

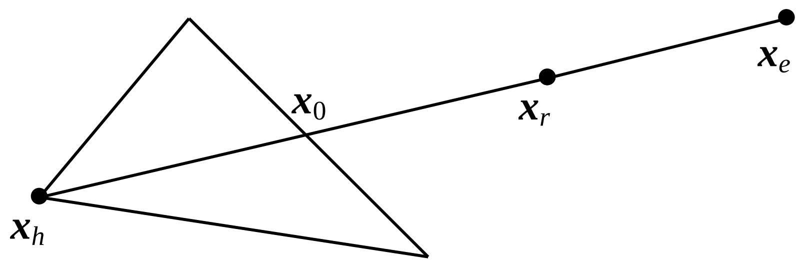


Рисунок 8.14 – Операція розтягування

Д. Порівняємо значення функцій f_r і f_l.

1. Якщо $f_r < f_l$, то ми одержали найменше значення функції. Напрямок із точки x_0 у точку x_r найбільш зручний для переміщення. Таким чином, ми проводимо розтягування у цьому напрямку і знаходимо точку x_e, і значення функції $f_e = f\,(x_e)$. Рисунок 8.14 ілюструє операцію розтягування симплекса. Коефіцієнт розтягування $\gamma > 1$ можна знайти з таких співвідношень:

$$x_e - x_0 = \gamma\,(x_r - x_0),$$

тобто

$$x_e = \gamma\,x_r + (1 - \gamma)\,x_0. \tag{8.21}$$

Зауваження $\gamma = |x_e - x_0| \,/\, |x_r - x_0|$:

а) якщо $f_e < f_l$, то замінюємо точку x_h на точку x_e (відповідно f_h на f_e) і перевіряємо точки симплекса на збіжність до мінімуму (див. крок І). Якщо збіжність досягнута, то процес зупиняється; у протилежному разі повертаємося на крок Б (обчислюємо нові значення f_h, f_l, f_g і відповідні їм точки x_h, x_l, x_g);

б) якщо $f_e \geq f_l$, то відкидаємо точку x_e. Очевидно, ми перемістилися занадто далеко від точки x_0 до точки x_r. Тому варто замінити точку x_h на точку x_r, у якій було одержане поліпшення (крок Д.1), перевірити збіжність і, якщо вона не досягнута, повернутися на крок Б (визначити нові значення f_h, f_l, f_g і відповідні їм значення x_h, x_l, x_g).

2. Якщо $f_r > f_l$, але $f_r \leq f_g$, то x_r є кращою точкою порівняно з іншими двома точками симплекса і ми замінюємо точку x_h на точку x_r і, якщо збіжність не досягнута, повертаємося на крок Б, тобто виконуємо описаний вище пункт Б.1.

3. Якщо $f_r > f_l$ та $f_r > f_g$, то перейдемо на крок Е.

Е. Порівняємо значення функцій f_r і f_h.

1. Якщо $f_r > f_h$, то переходимо безпосередньо до кроку стискання Е.2.

Якщо $f_r < f_h$, то замінюємо точку x_h на точку x_r і значення функції f_h на значення функції f_r. Запам'ятовуємо значення $f_r > f_g$ із кроку Д.2, наведеного вище. Потім переходимо на крок Е.2.

2. У цьому разі $f_r > f_h$, зрозуміло, що ми перемістилися надто далеко від точки x_h до точки x_0. Намагаємося виправити це, знайшовши точку x_c (а потім і f_c) за допомогою кроку стискання, показаного на рис. 8.15.

Якщо $f_r > f_h$, то відразу переходимо до кроку стискання і знаходимо точку x_c із співвідношення

$$x_c - x_0 = \beta\,(x_h - x_0),$$

де β $(0 < \beta < 1)$ – коефіцієнт стискання. Тоді

$$x_c = \beta\, x_h + (1 - \beta)\, x_0. \tag{8.22}$$

Якщо $f_r < f_h$, то спочатку замінимо точку x_h на точку x_r, а потім проводимо стискання (рис. 8.16). Тоді точку x_c знайдемо із співвідношення

$$x_c - x_0 = \beta\,(x_r - x_0),$$

тобто

$$x_c = \beta\, x_r + (1 - \beta)\, x_0 \tag{8.23}$$

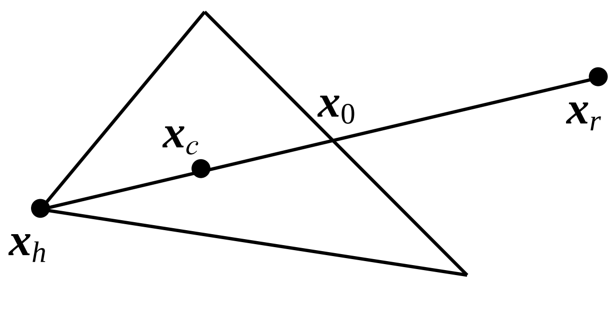


Рисунок 8.15 – Крок стискання для $f_r > f_h$

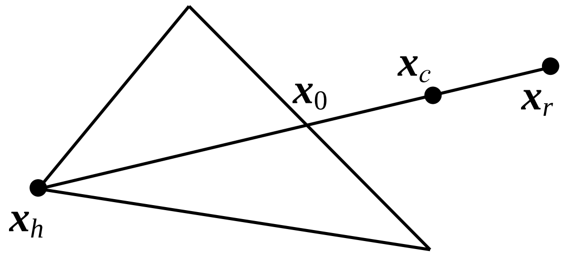


Рисунок 8.16 – Крок стискання для $f_r < f_h$

Ж. Порівнюємо значення функцій f_c і f_h.

1. Якщо $f_c < f_h$, то замінюємо точку x_h на точку x_c, і якщо збіжність не досягнута, то повертаємося на крок Б (виконуємо перевизначення значень f_h, f_l, f_g і відповідних їм значень x_h, x_l, x_g).

2. Якщо $f_c > f_h$, то очевидно, що всі наші спроби знайти значення менше ніж f_h закінчилися поразкою, тому ми переходимо на крок З.

3. На цьому кроці ми зменшуємо розмірність симплекса поділом навпіл відстані від кожної точки симплекса до x_l – точки, в якій одержане найменше значення функції.

Таким чином, точка x_i замінюється на точку $x_i + (x_l - x_i) / 2$, тобто заміняємо точку x_i точкою

$$x_i = (x_i + x_l) / 2. \tag{8.24}$$

Потім обчислюємо f_i для $i = 1, 2, ..., n + 1$, перевіряємо збіжність і, якщо вона не досягнута, повертаємося на крок Б.

І. Перевірка збіжності базується на тому, щоб стандартне відхилення σ $(n + 1)$-го значення функції було менше деякого заданого малого значення ε. У цьому випадку обчислюється

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (f_i - \bar{f})^2 \Big/ (n+1), \tag{8.25}$$

де $\bar{f} = \sum_{i=1}^{n} f_i \Big/ (n+1)$.

Якщо $\sigma < \varepsilon$, то всі значення функції дуже близькі одне до одного, і тому вони, можливо, знаходяться поблизу точки мінімуму функції x^*. Виходячи з цього, такий критерій збіжності є розумним.

Коефіцієнти α, β, γ у вищенаведеному алгоритмі є відповідно коефіцієнтами відбиття, стискання і розтягування. Нелдер і Мід рекомендують брати $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 2$. Рекомендація ґрунтується на результатах експериментів із різними комбінаціями значень. Ці значення параметрів дозволяють методу бути ефективним.

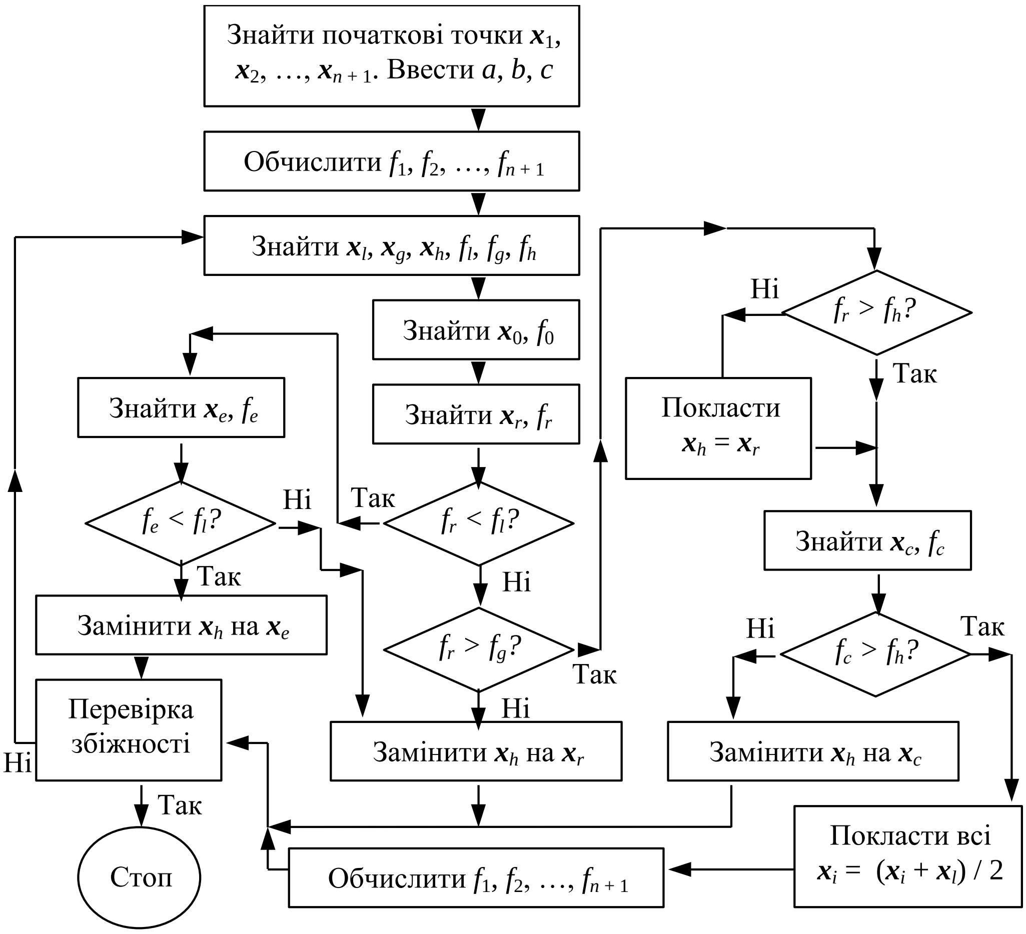


Рисунок 8.17 – Блок-схема методу Нелдера – Міда

Приклад 8.6. Знайти мінімум функції $f\ (x) = (1 - x_1)^2 + (2 - x_2)^2$ із точністю до $\varepsilon = 0{,}01$. Використати як початкову точку (0, 0). Взяти початковий крок $h = 2$. Використати значення $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}5$, $\gamma = 2$.

А. Побудуємо початковий симплекс.

$$\delta_1 = \left[\frac{\sqrt{2+1}+2-1}{2\sqrt{2}}\right] 2 = 1.9318,$$

$$\delta_2 = \left[\frac{\sqrt{2+1}-1}{2\sqrt{2}}\right] 2 = 0.5176.$$

Використовуючи ці два параметри, одержимо дві інші точки початкового симплекса.

$x(1) = (0 + 0{,}5176;\ 0 + 1{,}9318) = (0{,}5176;\ 1{,}9318);$
$x(2) = (0 + 1{,}9318;\ 0 + 0{,}5176) = (1{,}9318;\ 0{,}5176).$

Ітерація 1

Б. Обчислюємо значення функції в точках початкового симплекса:

$f\,(x(0)) = 5;\ f\,(x(1)) = 0{,}2374;\ f\,(x(2)) = 3{,}0658.$

Отже, $x^{(0)} = x_h$ – найбільше значення функції, $x^{(1)} = x_g$ – наступне за найбільшим значення функції, $x^{(2)} = x_l$ – найменше значення функції.

В. Знайдемо за формулою (3.3) центр тяжіння x_0 всіх точок, за винятком точки x_h,

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i \neq h} x_i =$$

$$= 1/2\ (x_g + x_l) = ((0{,}5176 + 1{,}9318) / 2;$$
$$(1{,}9318 + 0{,}5176) / 2) = (1{,}2247;\ 1{,}2247).$$

Обчислимо $f(x_0) = f_0 = (1 - 1{,}2247)^2 + (1 - 1{,}2247)^2 = 0{,}6516$.

Г. Зручніше за все почати переміщення від точки x_h, Відбивши точку x_h відносно точки x_0, одержимо нову точку x_r і знайдемо $f_r = f(x_r)$ (формула 7.19),

$$x_r = (1 + \alpha)\ \mathrm{x}_0 - \alpha\ x_h = (1 + 1)\ x_0 - x_h =$$
$$= (2 \cdot 1{,}2247 - 0;\ 2 \cdot 1{,}2247 - 0) = = (2{,}4494;\ 2{,}4494),$$

Обчислимо $f(x_r) = f_r = (1 - 2{,}4494)^2 + (1 - 2{,}4494)^2 = 2{,}3027$.

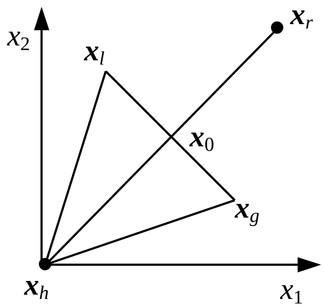


Рисунок 8.18 – Ітерація 1, операція розтягування

Маємо $f_r > f_l$, проте $f_r < f_g$, тобто x_r є кращою точкою порівняно з двома іншими точками, і ми замінюємо точку x_h на точку x_r,

І. Перевіряємо збіжність за формулою (8.25):

$$\overline{f} = \sum_{i=1}^{n} f_i \big/ (n+1) = (0{,}2374 + 3{,}0658 + 2{,}3027) / (2+1) = 1{,}8686\,;$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+1} \left(f_i - \overline{f}\right)^2 \big/ (n+1) =$$
$$= ((0{,}2374\ \text{-}\ 1{,}8686) \cdot 2 + (3{,}0658\ \text{-}\ 1{,}8686) \cdot 2 + (2{,}3027\ \text{-}\ 1{,}8686) \cdot 2)/(2+1) = 1{,}4275$$

$$\sigma = 1{,}1948 > \varepsilon,$$

Оскільки збіжність не досягнуто, починаємо другу ітерацію і переходимо на крок Б.

Для стислості наведемо на другій і наступних ітераціях лише основні результати.

Ітерація 2

$$x_l\ (0{,}5176;\ 1{,}9318);\ f_l = 0{,}2374;$$
$$x_g\ (2{,}4494;\ 2{,}4494);\ f_g = 2{,}3027;$$
$$x_h\ (1{,}9318;\ 0{,}5176);\ f_h = 3{,}0658.$$

Виконавши операцію відбиття, одержимо точку x_r (1,0352; 3,8636); $f_r = 3{,}4742$. Оскільки $f_r > f_l$ та $f_r > f_g$, переходимо на крок Е.

Виконавши операцію стискання, одержимо точку x_c (1,7077; 1,3541); $f_c = 0{,}9180$.

Перевірка збіжності $\sigma = 0{,}859 > \varepsilon$, збіжність не досягнуто.

Ітерація 3

$$x_{\mathrm{l}}\ (0{,}5176;\ 1{,}9318);\ f_l = 0{,}2374;$$
$$x_g\ (1{,}7077;\ 1{,}3541);\ f_g = 0{,}9180;$$
$$x_h\ (2{,}4494;\ 2{,}4494);\ f_h = 2{,}3027.$$

Виконавши операцію відбиття, одержимо точку x_r (–0,224; 0,8366); $f_r = 2{,}8517$. Оскільки $f_r > f_l$ та $f_r > f_g$, переходимо на крок Е.

Виконавши операцію стискання, одержимо точку x_c (1,7810; 2,0462); $f_c = 0{,}6121$.

Перевірка збіжності $\sigma = 0{,}278 > \varepsilon$, збіжність не досягнуто.

Ітерація 4

$$x_{\mathrm{l}}\ (0{,}5176;\ 1{,}9318);\ f_l = 0{,}2374;$$
$$x_g\ (1{,}7810;\ 2{,}0462);\ f_g = 0{,}6121;$$
$$x_h\ (1{,}7077;\ 1{,}3541);\ f_h = 0{,}9180.$$

Виконавши операцію відбиття, одержимо точку x_r (0,5909; 2,6239); $f_r = 0{,}5566$. Маємо $f_r > f_l$, $f_r < f_g$, тобто точка x_r є кращою порівняно з двома іншими точками симплекса, і ми замінюємо точку x_h на x_r.

Перевірка збіжності $\sigma = 0{,}278 > \varepsilon$, збіжність не досягнуто.

Ітерація 5

$$x_l\ (0{,}5176;\ 1{,}9318);\ f_l = 0{,}2374;$$
$$x_g\ (0{,}5909;\ 2{,}6239);\ f_g = 0{,}5566;$$
$$x_h\ (1{,}7810;\ 2{,}0462);\ f_h = 0.6121.$$

Виконавши операцію відбиття, одержимо точку x_r (–0,6725; 2,5095); $f_r = 3{,}0569$. Оскільки $f_r > f_l$ та $f_r > f_g$, переходимо на крок Е.

Виконавши операцію стискання, одержимо точку x_c (1,1676; 2,1620); $f_c = 0{,}0543$.

Перевірка збіжності $\sigma = 0{,}2075 > \varepsilon$, збіжність не досягнуто.

Ітерація 6

$$\mathrm{x_l}\ (1{,}1676;\ 2{,}1620);\ \mathrm{f_l} = 0{,}0543;$$
$$\mathrm{x_g}\ (0{,}5176;\ 1{,}9318);\ \mathrm{f_g} = 0{,}2374;$$
$$\mathrm{x_h}\ (0{,}5909;\ 2{,}6239);\ \mathrm{f_h} = 0{,}5566.$$

Виконавши операцію відбиття, одержимо точку x_r (1,0943; 1,4699); f_r = 0,29. Оскільки $f_r > f_l$ та $f_r > f_g$, переходимо на крок Е.

Виконавши операцію стискання, одержимо точку x_c (0,9685; 1,7584); f_c = 0,0594.

Перевірка збіжності σ = 0,085 > ε, збіжність не досягнуто.

Ітерація 7

$$x_l\,(1{,}1676;\ 2{,}1620);\ f_l = 0{,}0543;$$
$$x_g\,(0{,}9685;\ 1{,}7584);\ f_g = 0.0594;$$
$$x_h\,(0{,}5176;\ 1{,}9318);\ f_h = 0{,}2374.$$

Виконавши операцію відбиття, одержимо точку x_r (1,6185; 1,9886); f_r = 0,3827. Оскільки $f_r > f_l$ та $f_r > f_g$, переходимо на крок Е.

Виконавши операцію стискання, одержимо точку x_c (0,7928; 1,946); f_c = 0,0458.

Перевірка збіжності σ = 0,0097 < ε, збіжність досягнуто.

Отже, мінімум функції (з точністю до заданого значення ε) має місце в точці (0,7928; 1,946) та становить 0,0458.

8.4. Методи оптимізації для диференційовних функцій

8.4.1. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції

Функція з однією змінною

Функція $f\,(x)$ має локальний мінімум у точці x_0, якщо існує деяка додатна величина δ, така, що якщо $|x - x_0| < \delta$, то $f\,(x) \geq f\,(x_0)$, тобто якщо існує окіл точки x_0, такий, що для всіх значень x у цьому околі $f\,(x)$ більше ніж $f\,(x_0)$.

Функція $f\,(x)$ має глобальний мінімум у точці x^*, якщо для всіх x справедлива нерівність $f\,(x) \geq f\,(x^*)$.

На рисунку 8.19 подане графічне зображення функції $f\,(x)$, що має локальний мінімум у точці x_0 і глобальний мінімум у точці x^*.

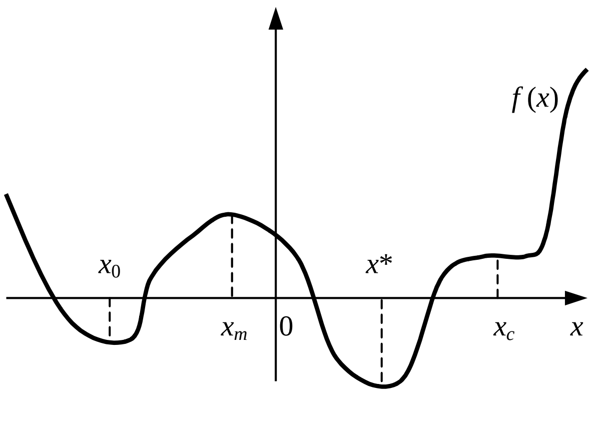


Рисунок 8.19 – Графічне зображення функції

Класичний підхід до задачі знаходження значень x_0 і x^* полягає у пошуку рівнянь, які вони повинні задовольняти. Подана на рис. 1.1 функція та її похідні неперервні, і бачимо, що в точках x_0 і x^* похідна $f'(x)$ (градієнт функції) дорівнює нулю. Отже, x_0 та x^* будуть розв'язками рівняння

$$f'(x) = 0. \tag{8.26}$$

Точка x_m, в якій досягається локальний мінімум, і точка x_c, в якій є точка горизонтального перегину функції, також задовольняє це рівняння. Отже, рівняння (8.26) є лише *необхідною* умовою мінімуму, але не є *достатньою* умовою мінімуму.

Відзначимо, однак, що в точках x_0 і x^* похідна $f'(x)$ змінює знак з від'ємного на додатний. У точці x_m знак змінюється з додатного на від'ємний, у той час як у точці x_c він не змінюється. Отже, похідна в мінімумі є зростаючою функцією, а оскільки ступінь зростання $f'(x)$ вимірюється другою похідною, можна очікувати, що $f''(x_0) > 0$, $f''(x^*) > 0$, тоді як $f''(x_m) < 0$.

Якщо, однак, друга похідна дорівнює нулю, ситуація залишається невизначеною.

Одержані вище результати можуть знайти надійне обґрунтування, якщо розглянути розкладання функції $f(x)$ у ряд Тейлора в околі точки x_0 (чи x^*, або x_m), що звичайно, вимагає неперервності функції $f(x)$ та її похідних:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \ldots. \tag{8.27}$$

Якщо в точці x_0 досягається мінімум, то ліва частина (8.27) буде невід'ємною для будь-якого досить малого h ($|h| < \delta$). Отже, перша похідна $f'(x_0)$ повинна дорівнювати нулю, і це є достатньою умовою (див. рівняння 8.26). Якби вона була додатною, то достатньо мале від'ємне значення h робило б праву частину (8.27) від'ємною, а якби вона була від'ємною, то достатньо мале додатне значення h робило б праву частину від'ємною.

Оскільки в наступному члені (8.27) завжди $h^2 > 0$, то, якщо

$$f''(x_0) > 0, \tag{8.28}$$

у точці x_0 досягається мінімум. Якщо $f'(x_m) = 0$ і $f''(x_m) < 0$, то з аналогічних міркувань у точці x_m досягається максимум. Для визначення розходження між локальним і глобальним мінімумами необхідно порівняти значення функцій $f(x_0)$ і $f(x^*)$.

Приклад 8.7. Дослідити характер точок перегину функції $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$:

$$f'(x) = 3x2 - 4x + 1 = 0,$$

тоді $(3x - 1)(x - 1) = 0$, тобто $x = 1/3$ або $x = 1$.

При $x = 1/3$ похідна $f'(x)$ змінює знак із додатного на від'ємний, а при $x = 1$ – із від'ємного на додатний. Отже, в точці $x = 1/3$ досягається максимум, а в точці $x = 1$ – мінімум.

Функція N змінних

Розглянемо функцію n дійсних змінних

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(\boldsymbol{x}).$$

Точка в n-мірному евклідовому просторі з координатами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ позначається вектором-стовпцем $\boldsymbol{x}$. Градієнт функції, тобто вектор з компонентами $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \ldots, \partial f / \partial x_n$, позначається grad $f(\boldsymbol{x})$ або іноді $g(x)$. Матриця Гессе (гессіан) функції $f(\boldsymbol{x})$ позначається як $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ і являє собою симетричну матрицю n х n елементів вигляду

$$G_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Тобто, матриця $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})$ набирає вигляду

$$G(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Функція $f(\boldsymbol{x})$ має локальний мінімум у точці $\boldsymbol{x}_0$, якщо існує окіл точки $\boldsymbol{x}_0$ такий, що $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0)$ у всіх точках цього околу, тобто існує додатна величина δ, така, що для $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ справедлива нерівність $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0)$.

У разі глобального мінімуму в точці $\boldsymbol{x}^*$ для всіх $\boldsymbol{x}$ справедливою є нерівність $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*)$.

При таких визначеннях і очевидних припущеннях щодо диференційованості можна узагальнити рівняння (7.26) і одержати:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots =$$
$$= \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) + 0.5\, \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{h} + \ldots \quad (8.28)$$

Тоді, якщо $\boldsymbol{x}_0$ є точкою мінімуму функції $f(\boldsymbol{x})$, то кожна перша часткова похідна $\partial f / \partial x_i$ ($i = 1, \ldots, n$) повинна обертатися в нуль у точці $\boldsymbol{x}_0$. Якщо це не так, то відповідним вибором h_i можна домогтися того, що різниця $f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0)$ буде від'ємною.

Отже необхідною умовою мінімуму в точці $\boldsymbol{x}_0$ є рівняння

$$\text{grad}\, f\,(\boldsymbol{x}_0) = 0 \tag{8.29}$$

тобто

$$\frac{\partial f\,(x_0)}{\partial x_i} = 0 \qquad (\text{i} = 1, \ldots, \text{n}). \tag{8.30}$$

Тоді знак різниці $f\,(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f\,(\boldsymbol{x}_0)$ визначається членом

$$0{,}5\, \boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{h}. \tag{8.31}$$

Якщо матриця $\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0)$ додатно визначена, то цей член є додатним для всіх $\boldsymbol{h}$. Отже, необхідними і достатніми умовами мінімуму є

$$\text{grad}\, f\,(\boldsymbol{x}_0) = 0,\ \boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0)\ \text{додатно визначена.} \tag{8.32}$$

Матриця називається додатно визначеною ($\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0) > 0$), якщо для будь-якого ненульового $\boldsymbol{h}$ виконується нерівність $\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{h} > 0$.

Необхідними і достатніми умовами максимуму є

$$\text{grad f (xm)} = 0,\ \text{G (xm) від'ємно визначена.} \tag{8.33}$$

Приклад 8.8. Дослідити екстремальну точку (точки) функції $f\,(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 100$:

$$\text{grad}\, f\,(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4 \\ 2x_2 - 8 \\ 2x_3 - 12 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{при } x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6.$$

Маємо матрицю $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Визначимо, чи є вона додатно визначеною:

$$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0)\, \boldsymbol{h} = [h_1\ h_2\ h_3] \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = 2\,h_1^2 + 2\,h_2^2 + 2\,h_3^2 > 0.$$

Тобто матриця $\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{x}_0)$ дійсно є додатно визначеною. Всі власні значення додатні та дорівнюють 2.

Отже, в точці (2; 4; 6) функція $f\,(\boldsymbol{x})$ сягає мінімуму.

8.4.2. Метод Ньютона

Доцільно допустити, що ефективність пошукових процедур істотно підвищиться, якщо на додаток до умови безперервності ввести вимогу диференційовності цільової функції. Для функцій однієї змінної класичний підхід при пошуку значень x в точках перегину функції $f\,(x)$ полягає у розв'язуванні рівняння $f\,'(x) = 0$.

У тому разі, якщо цільова функція має члени, що містять, наприклад, x у третій і більш високих степенях, то одержати аналітичне розв'язання рівняння

$f\,'(x) = 0$ важко. У цих випадках доцільно використовувати чисельні методи знаходження коренів нелінійних рівнянь. У цьому підрозділі ми розглянемо один з таких методів – метод Ньютона, відомий також як метод дотичних.

Цей метод орієнтований на знаходження кореня рівняння $f\,'(x) = 0$ в інтервалі $[a, b]$, такому, що знаки похідних $f\,'(a)$ та $f\,'(b)$ є протилежними. Тоді, внаслідок очевидних припущень про безперервність, буде існувати корінь x^* цього рівняння, причому $a < x^* < b$ (рис. 8.20).

Робота алгоритму починається з точки x_0, що являє початкове наближення кореня рівняння $f\,'(x) = 0$. Далі будується лінійна апроксимація функції $f\,'(x)$ у точці x_1, і точка, у якій апроксимувальна лінійна функція обертається в нуль, береться як наступне наближення (рис. 8.21.). Якщо точка x_k взята як поточне наближення до оптимальної точки, то лінійна функція, що апроксимує функцію $f\,'(x)$ у точці x_k, записується у вигляді

$$f\,'(x - x_k) = f\,'(x_k) + f\,''(x_k)\,(x - x_k).$$

Прирівнявши праву частину рівняння до нуля, одержимо наступне наближення до шуканої точки.

Крок 1. Наступне наближення до стаціонарної точки x^* визначається за формулою $x_{k+1} = x_k - [f\,'(x_k) / f\,''(x_k)]$.

Крок 2. Обчислити $f\,'(x_{k+1})$, $f\,''(x_{k+1})$.

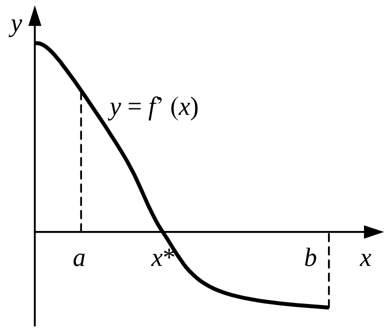


Рисунок 8.20

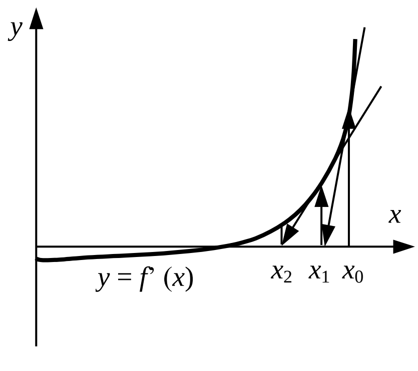


Рисунок 8.21

Крок 3. Якщо $|f'(x_{k+1})| < \varepsilon$, то закінчити пошук. У протилежному разі необхідно повернутися до кроку 1.

Як виявляється з алгоритму, цільова функція $f\ (x)$ повинна бути двічі диференційовною.

Приклад 8.9. Використовуючи метод Ньютона, відшукати мінімум функції $f\,(x) = 2x^2 + 16/x$. Початкова точка $x_1 = 1$. Потрібна точність $\varepsilon = 0{,}1$.

Знаходимо першу та другу похідні функції $f\,(x)$:

$$f\,'(x) = 4x - \frac{16}{x^2}, \quad f\,''(x) = 4 + \frac{32}{x^3}.$$

Ітерація 1. $x_1 = 1$; $f\,'(x_1) = -12$; $f\,''(x_1) = 36$.
Ітерація 2. $x_2 = x_1 - f\,'(x_1) / f\,''(x_1) = 1{,}33$; $f\,'(x_2) = -3{,}73$; $f\,''(x_2) = 17{,}6$.
Ітерація 3. $x_3 = x_2 - f\,'(x_2) / f\,''(x_2) = 1{,}54$; $f\,'(x_3) = -4{,}23$; $f\,''(x_3) = 12{,}7$.
Ітерація 4. $x_4 = x_3 - f\,'(x_3) / f\,''(x_3) = 1{,}87$; $f\,'(x_4) = -1{,}07$; $f\,''(x_4) = 8{,}89$.
Ітерація 5. $x_5 = x_4 - f\,'(x_4) / f\,''(x_4) = 1{,}99$; $f\,'(x_5) = -0{,}07$; $f\,''(x_5) = 8{,}05$.

Розрахунок можна припинити, оскільки $|f\,'(x_5)| < \varepsilon$.

8.4.3. Метод найшвидшого спуску

За допомогою розглянутого у попередньому підрозділі методу покоординатного спуску здійснюється пошук із заданої точки у напрямку, паралельному одній із осей, до точки мінімуму у даному напрямку. Далі пошук проводиться у напрямку, паралельному другій осі й т. п. Напрямки, звичайно, фіксовані. Здається доцільним модифікувати цей метод таким чином, щоб на кожному етапі пошук точки мінімуму здійснювався вздовж «найкращого» напрямку. Не зрозуміло, який напрямок є «найкращим», але відомо, що напрямок градієнта $grad\ f\ (x)$ є напрямком найшвидшого зростання функції $f\ (x)$. Отже, протилежний напрямок є напрямком найшвидшого спадання функції.

Метод оптимізації, в якому довжину кроку λ вибирають з умови мінімізації функції вздовж напрямку антиградієнта, одержав назву методу найшвидшого спуску. Цей варіант градієнтного методу ґрунтується на використанні лінійної частини розкладення функції, що мінімізується, в околі точки в ряд Тейлора.

Алгоритм методу найшвидшого спуску описано нижче.

А. Пошук мінімуму функції $f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ починається із заданої точки x_0 з координатами $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_0$. Визначається початкове значення функції $f\ (x_0)$ (вважаючи $\lambda = 0$).

Б. Визначити часткові похідні функції (проекції градієнта на координатні напрямки) $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \ldots, \partial f / \partial x_n$.

Взяти за напрямок пошуку напрямок

$$d = -\,grad\,f\,(x) = -\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\bar{j} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\bar{n}\right].$$

Обчислити d у початковій точці $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_0$, тобто одержати d_0.

В. Знайти значення λ_i, що мінімізує функцію

$$\varphi\,(\lambda i) = f\,(xi + \lambda i\; di),$$

де i – номер ітерації.

Для пошуку мінімуму функції $\varphi\ (\lambda_i)$ у напрямі d_i з точки x_i можна використовувати методи одновимірного пошуку. Як показує досвід, гарні результати дає застосовування методу квадратичної інтерполяції. Довжина кроку λ_i вибирається таким чином, щоб крок «перекрив» мінімум функції $\varphi\ (\lambda)$. Умова «перекриття» мінімуму виконується, якщо $\varphi\ (\lambda) \geq \varphi\ (0)$.

Якщо мінімум не потрапив у відрізок $(0,\ \lambda)$, то λ подвоюється, і це повторюється стільки разів, скільки необхідно для виконання умови «перекриття».

Переконавшись, що відрізок $(0,\ \lambda)$ містить мінімум, за третю точку беруть точку $\lambda / 2$. Мінімальну точку згладжувального квадратичного полінома знаходять за формулою (8.13). Не обов'язково проводити одновимірний пошук із великою точністю, як правило, достатньо досягти спадання функції $\varphi\ (\lambda)$. Для цього необхідно виконати 2 – 3 квадратичних ітерації.

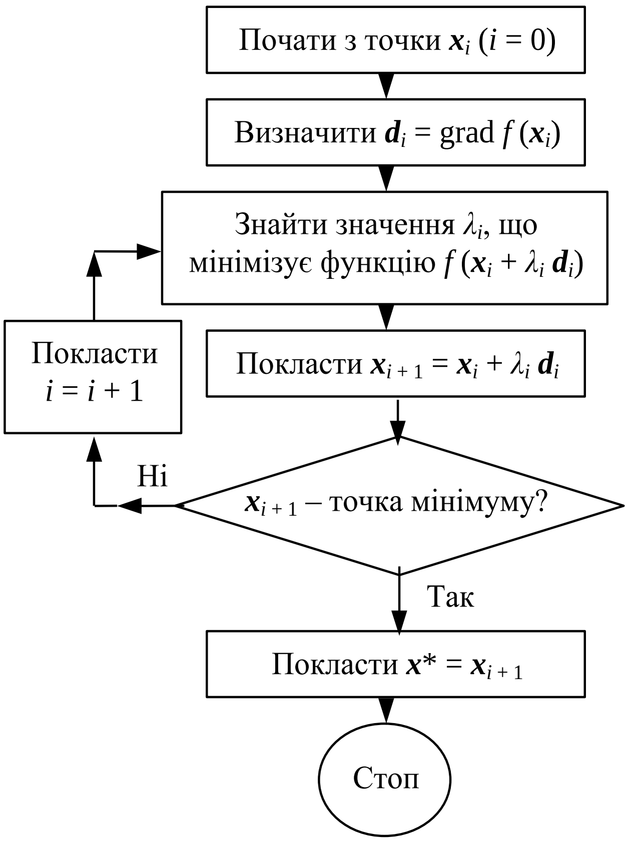


Рисунок 8.22 – Блок-схема алгоритму методу найшвидшого спуску

Г. Присвоїти $x_{i+1} = x_i$, і якщо $\left| grad\ f\ (x_{i+1}) \right|$ є достатньо малим, то процес закінчується. У протилежному разі необхідно повернутися на крок Б. Враховуючи, що в процесі пошуку відбувається наближення до екстремуму, для підвищення ефективності процедури доцільно після кожної ітерації зменшувати довжину кроку λ.

Варто відзначити, що метод найшвидшого спуску не рекомендується у як серйозна оптимізаційна процедура. На перший погляд він є привабливим, проте для практичного застосування «працює» надто повільно. Справа в тому, що властивість найшвидшого спуску є лише локальною властивістю, і тому у ряді випадків доводиться часто змінювати напрям пошуку, що й призводить у підсумку до неефективної обчислювальної процедури. Метод найшвидшого спуску не використовує другі похідні цільової функції. Існують більш досконалі градієнтні методи, зокрема, метод Ньютона – Рафсона, Давидона – Флетчера – Пауєлла та Флетчера – Рівса, але через складність алгоритмів цих методів їх розгляд не внесено до цього курсу.

Приклад 8.10. Знайти мінімум функції f (x) = (x1 – 1)2 + (x2 – 3)2 + + 4 (x3 + 5)2 з точністю до ε = 0,1. Використати як початкову точку (4, –1, 2). Взяти початковий крок λ = 4.

Ітерація 1

А. Обчислимо значення функції в початковій точці x_0:

$$f\,(x_0) = (4-1)^2 + ((-1)-3)^2 + 4\,(2+5)^2 = 221.$$

Б. Похідні функції знайдемо аналітично:

$$\partial f / \partial x1 = 2x1 - 2, \quad \partial f / \partial x2 = 2x2 - 6, \quad \partial f / \partial x3 = 8x3 + 40.$$

Одержимо вираз для градієнта функції:

$$d = -\,grad\,f\,(x) = (-2x1 + 2)\ i + (-2x2 + 6)\ j + (-8x3 - 40)\ k.$$

У початковій точці $d_0 = (-2 \cdot 4 + 2)\ i + (-2 \cdot (-1) + 6)\ j + (-8 \cdot 2 - 40)\ k =$ $= -6\ i + 8\ j - 56\ k,$

$$|d0| = |-\,grad\,f\,(x0)| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 56^2} = 56{,}89.$$

В. Одержимо вираз для $\varphi\ (\lambda) = f\,(x + \lambda\ d)$:

$$\varphi\ (\lambda) = (x1 + \lambda\ (-2x1 + 2) - 1)2 + (x2 + \lambda\ (-2x2 + 6) - 3)2 + \\ + 4\ (x3 + \lambda\ (-8x3 - 40) + 5)2.$$

У точці x_0 маємо

$$\varphi\ (\lambda) = (4 + \lambda\ (-2 \cdot 4 + 2) - 1)2 + (-1 + \lambda\ ((-2) \cdot (-1) + 6) - 3)2 + 4\ (2 + \\ + \lambda\ ((-8) \cdot 2 - 40) + 5)2 = (3 - 6\ \lambda)2 + (-4 + 8\ \lambda)2 + 4\ (7 - 56\ \lambda)2.$$

Знайдемо значення φ (λ) при $\lambda = 0,\ \lambda / 2$ та λ (де $\lambda = 4$):

$$\varphi\ (4) = (3 - 6 \cdot 4)2 + (-4 + 8 \cdot 4)2 + 4\ (7 - 56 \cdot 4)2 = 48\ 314,$$
$$\varphi\ (2) = (3 - 6 \cdot 2)2 + (-4 + 8 \cdot 2)2 + 4\ (7 - 56 \cdot 2)2 = 11\ 250,$$
$$\varphi\ (0) = (3 - 6 \cdot 0)2 + (-4 + 8 \cdot 0)2 + 4\ (7 - 56 \cdot 0)2 = 221.$$

Знайдемо мінімум функції φ (λ), скориставшись методом квадратичної інтерполяції.

Внутрішня ітерація 1

Вважаючи $a = 0,\ b = 2,\ c = 4,\ f_a = 221,\ f_b = 11250,\ f_c = 48314$, скористаємось формулою (8.13):

$$\delta = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(2^2 - 4^2\right)\cdot 221 + \left(4^2 - 0^2\right)\cdot 11\ 250 + \left(0^2 - 2^2\right)\cdot 48\ 314}{(2-4)\cdot 221 + (4-0)\cdot 11\ 250 - (0-2)\cdot 48\ 314}\right] = 0{,}1528\,.$$

Відповідне значення функції $\varphi\ (0{,}1528) = 21{,}72$.

Відкидаючи точку $\lambda = 4$, переходимо до наступної ітерації.

Внутрішня ітерація 2

Вважаючи $a = 0,\ b = 0{,}1528,\ c = 2,\ f_a = 221,\ f_b = 21{,}72,\ f_c = 11\ 250$, аналогічно знаходимо нове значення $\delta = 0{,}2531$ та відповідне значення $\varphi\ (0{,}2531) = 211{,}87$. Відкидаючи точку $\lambda = 2$, переходимо до наступної ітерації.

Внутрішня ітерація 3

Вважаючи $a = 0,\ b = 0{,}1528,\ c = 0{,}2531,\ f_a = 221,\ f_b = 21{,}72,\ f_c = 211{,}87$, аналогічно знаходимо нове значення $\delta = 0.1280$ та відповідне значення $\varphi\ (0{,}1280)$ = 13,95. На цьому закінчуємо метод квадратичної інтерполяції, оскільки 3 ітерацій звичайно достатньо. Встановлюємо $\lambda_{min} = 0{,}1280$.

Г. Маємо координати нової точки $x_1\ (x_1, x_2, x_3)$:

$$x1 = x1 + \lambda min\ (-2x1 + 2) = 4 + 0{,}128 \cdot (-2 \cdot 4 + 2) = 3{,}232,$$
$$x2 = x2 + \lambda min\ (-2x2 + 6) = -1 + 0{,}128 \cdot (-2 \cdot (-1) + 6) = 0{,}024,$$
$$x3 = x3 + \lambda min\ (-8x3 - 40) = 2 + 0{,}128 \cdot (-8 \cdot 2 - 40) = -5{,}166.$$

Обчислимо значення функції в новій точці x_1 та значення градієнта в цій точці:

$$f\ (x1) = (3{,}232 - 1)2 + (0{,}024 - 3)2 + 4\ (-5{,}166 + 5)2 = 13{,}96,$$

$$|d1| = |-grad\ f\ (x1)| =$$
$$= \sqrt{(-2\cdot 3{,}232 + 2)^2 + (-2\cdot 0{,}024 + 6)^2 + (-8\cdot(-5{,}166) - 40)^2} = 7{,}56$$

Відзначимо, що значення і $f\ (x_1)$, і $|d_1|$ стали значно меншими, ніж вони були в початковій точці. Все ж вони ще є досить великими і пошук необхідно продовжувати. Для наступних ітерацій наведемо лише основні проміжні результати.

Ітерація 2

Зменшимо початковий крок удвічі, встановимо $\lambda = 2$.

Після застосовування методу квадратичної інтерполяції (одна внутрішня ітерація) одержимо значення $\lambda_{min} = 0{,}4576$ та відповідне $\varphi\,(\lambda_{min}) = 0{,}88$.

Маємо координати нової точки $x_2\ (1{,}189,\ 2{,}747,\ –4{,}558)$.

Одержимо значення функції в новій точці x_2 та значення градієнта в цій точці:

$$f\,(x2) = (1{,}189 – 1)2 + (2{,}747 – 3)2 + 4\,(–4{,}558 + 5)2 = 0{,}88.$$

$$|d_2| = |-grad\ f(x_2)| = \sqrt{(-2\cdot 1{,}189 + 2)^2 + (-2\cdot 2{,}747 + 6)^2 + (-8\cdot(-4{,}558) - 40)^2} = 3{,}59.$$

Ітерація 3

Зменшимо початковий крок удвічі, встановлюємо $\lambda = 1$.

Після застосовування методу квадратичної інтерполяції (1 внутрішня ітерація) одержимо значення $\lambda_{min} = 0{,}1280$ та відповідне $\varphi\,(\lambda_{min}) = 0{,}056$.

Маємо координати нової точки x_3 (1,141, 2,812, –5,011).

Одержимо значення функції в новій точці x_3 та значення градієнта в цій точці:

$$f\,(x2) = (1{,}141 – 1)2 + (2{,}812 – 3)2 + 4\,(–5{,}011 + 5)2 = 0{,}06,$$

$$|d2| = |– grad\,f\,(x2)| =$$

$$= \sqrt{(-2\cdot 1{,}141 + 2)^2 + (-2\cdot 2{,}812 + 6)^2 + (-8\cdot(-5{,}011) - 40)^2} = 0{,}48$$

і так далі. Відзначимо, що з кожною ітерацією значення як функції, так й її градієнта стрімко зменшується.

Вже після трьох ітерацій маємо точки (1,141, 2,812, –5,011), значення функції в якій становить 0,06, що майже збігається зі справжнім мінімумом функції. Справжній мінімум цієї функції $f\,(x)$ має місце в точці (1, 3, –5), у чому можна переконатися, прирівнявши до нуля перші похідні функції $f(x)$. Значення функції $f\,(x)$ у цій точці дорівнює нулю.

8.5. Методи оптимізації за наявності обмежень

8.5.1. Обмеження у вигляді рівностей

У багатьох задачах на пошук найбільших та найменших значень функції питання зводять до пошуку екстремумів функції від декількох змінних, які не є незалежними, а пов’язані одна з одною деякими додатковими умовами (наприклад, рівнянням). Такий екстремум називають умовним.

За допомогою методу множників Лагранжа, по суті, встановлюють необхідні умови, що дозволяють ідентифікувати точки оптимуму в задачах оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей. При цьому задача з обмеженнями перетворюється в еквівалентну задачу безумовної оптимізації, в якій фігурують певні невідомі параметри, називані *множниками Лагранжа*.

Розглянемо задачу мінімізації функції двох змінних

$$z = f(x, y),$$

де на x та y накладене обмеження, задане рівнянням

$$g(x, y) = 0 \tag{8.34}$$

Узагалі, рівняння $g(x, y) = 0$ можна розв'язувати відносно y як функцію від x, тобто $y = h(x)$. Звичайно, на практиці може виявитися складним або навіть неможливим знайти явний вигляд функції $h(x)$. У разі виконання певних умов диференційовності похідна функції $h(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}h(x) = -\frac{\partial g}{\partial x} \Big/ \frac{\partial g}{\partial y} \,. \tag{8.35}$$

Тоді функцію

$$z = f(x, h(x)) \tag{8.36}$$

можна записати як функцію однієї незалежної змінної x. Необхідною умовою мінімуму функції z буде співвідношення

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \,,$$

тобто

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} \right) \frac{\partial g}{\partial x} = 0. \tag{8.37}$$

Співвідношення (8.34) та (8.35) можуть бути розв'язаними для одержання значень x^*, y^* в точці мінімуму.

Цей результат може бути поданий у такій формі. Якщо покласти

$$\lambda = \frac{-\partial f}{\partial y}(x, y) \Big/ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \tag{8.38}$$

при $x = x^*$, $y = y^*$, то в точці мінімуму виконуються співвідношення

$$g(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0,$$

причому останнє випливає безпосередньо із співвідношення (8.38).

Одержати ці три необхідні умови можна, використовуючи *функцію Лагранжа*, записану у такому вигляді:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y), \tag{8.39}$$

що являє собою суму цільової функції та добутку множника Лагранжа λ на функцію обмеження.

Тоді необхідні умови мінімуму функції $f(x, y)$ за наявності обмежень можуть бути записані у такому вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, \lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = 0. \end{cases} \tag{8.40}$$

Це система трьох рівнянь, розв’язком якої є значення x^*, y^* та λ^* у точці мінімуму.

Необхідні умови мінімуму можуть бути узагальнені для функції n змінних за наявності m обмежень у вигляді рівностей.

Розглянемо задачу мінімізації функції

$$z = f(x) = f(x1, x2, \ldots, xn),$$

де на змінну x накладені обмеження

$$g_1(x) = 0,\ g_2(x) = 0,\ \ldots,\ g_m(x) = 0. \tag{8.41}$$

Обмеження можна використати для того, щоб виразити m змінних (без обмеження загальності їх можна позначити $x_1, x_2, \ldots, x_m$) через решту $(n - m)$ змінних, які можна розглядати як незалежні змінні. У точці мінімуму за наявності обмежень $f(x + h) - f(x) \geq 0$ для всіх h, що задовольняють умову $g_i(x + h) = g_i(x) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$.

Тоді з точністю до першого порядку h_j будемо мати

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$$

де

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{при i = 1, 2, …, m.}$$

Цю умову можна записати інакше:

$$\sum_{j=1}^{n} h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = 0, \tag{8.42}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – множники Лагранжа.

Звідси випливає

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{при } j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8.43}$$

Отже, якщо визначити функцію Лагранжа у вигляді

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \tag{8. 44}$$

то необхідні умови мінімуму функції $f(x)$ за наявності обмежень можна записати таким чином:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.45}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x) = 0 \qquad \text{при } i = 1, 2, \ldots, m \tag{8.46}$$

Розв’язання цієї розширеної системи, складеної з $n + m$ рівнянь, що містять $n + m$ невідомих, визначає стаціонарну точку функції $F(x, \lambda)$. Далі реалізується процедура перевірки на мінімум або максимум, що проводиться на основі обчислення елементів матриці Гессе функції $F(x, \lambda)$.

Приклад 8.11. Знайти мінімум функції $f(x, y) = x^2 + y^2$ при обмеженні $x + y = 4$.

Функція Лагранжа набере вигляду

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(4 - x - y).$$

Відповідні умови мінімуму можна записати таким чином:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 4 - x - y = 0.$$

Розв’язанням цієї системи рівнянь є $x = y = 2$, $\lambda = 4$. Матриця Гессе функції F має вигляд $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ і, отже, є додатно визначеною, а це доводить, що точка (2, 2) є точкою мінімуму.

8.5.2. Обмеження у вигляді нерівностей

У цьому підрозділі метод множників Лагранжа буде поширений на обмеження у вигляді нерівностей. Розглянемо загальну задачу математичного програмування: мінімізувати функцію $f(x)$ за наявності m обмежень $g_i(x) \le b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$).

Обмеження у вигляді нерівностей можуть бути перетворені в обмеження у вигляді рівностей доданням до кожного з них невід’ємної послаблювальної змінної u_i^2:

$$g_i(x) + u_i^2 = b_i,$$

або

$$g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0. \tag{8.47}$$

Таким чином, задача зводиться до мінімізації функції $f(x)$ за наявності m обмежень у вигляді рівності $g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0$. Відповідно до викладеного методу у попередньому підрозділі, сформуємо функцію Лагранжа

$$F(x, \lambda, u) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) + u_i^2 - b_i]. \tag{8.48}$$

У стаціонарній точці повинні виконуватися такі умови:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \ldots, n, \tag{8.49}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i(x) + u_i^2 - b_i = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, m, \tag{8.50}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = 2\lambda_i u_i = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8.51}$$

Помноживши останнє рівняння на $u_i / 2$, одержимо $\lambda_i u_i^2 = 0$, тобто

$$\lambda_i [b_i - g_i(x)] = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8.52}$$

Ще одна додаткова умова повиннна бути виконана в точці мінімуму за наявності обмежень $\lambda_i \geq 0$.

Отже, необхідні умови мінімуму функції $f\ (x)$ за наявності обмежень $g_i\ (x) \leq b_i\ (i = 1, 2, \ldots, m)$ мають такий вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \text{при } j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$g_i\,(x) \leq b_i \quad \text{при i} = 1, 2, \ldots, \text{m},$$

$$\lambda_i\,[b_i - g_i\,(x)] = 0 \quad \text{при i} = 1, 2, \ldots, \text{m}, \tag{8.53}$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Знак λ_i змінюється на протилежний, якщо розглядається максимум. Ці умови відомі як умови Куна – Такера.

Загальна задача математичного програмування, сформульована на початку попереднього розділу, є дуже складною й до цього часу не має повного розв'язання. Можливо, що наявність обмежень буде призводити до появи локального мінімуму. Це може відбутися навіть у разі, якщо функція має лише одну точку мінімуму за відсутності обмежень. Таку ситуацію ілюструє рис. 8.22.

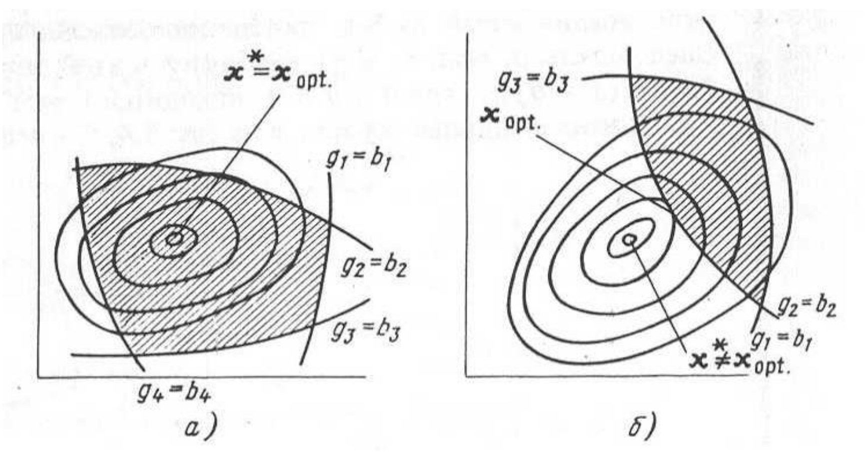


Рисунок 8.22 – Функція й області обмеження

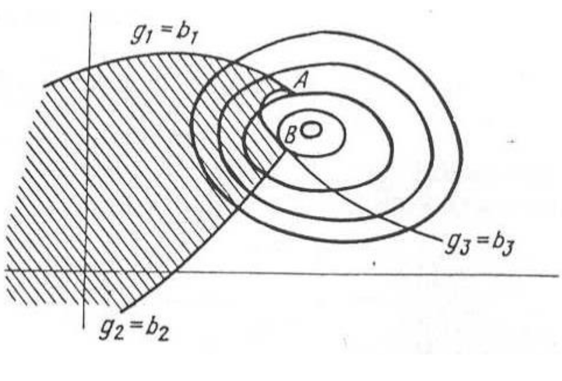


Рисунок 8.23 – Функція й області обмеження.
Локальний мінімум у точці А

Приклад 8.12. Записати умови Куна – Такера для мінімуму функції $f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ при обмеженнях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ та $x_1 + x_2 \geq 4$.

Цю задачу можна подати таким чином:
мінімізувати функцію $f(x) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$
при обмеженнях $-x_1 \leq 0$, $-x_2 \leq 0$, $-x_1 - x_2 \leq 4$. Функція Лагранжа $F(x, \lambda, u)$ матиме вигляд

$$F = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + \lambda_1 (u_1^2 - x_1) + \lambda_2 (u_2^2 - x_2) + \lambda_3 (u_3^2 - x_1 - x_2 + 4).$$

Необхідними умовами мінімуму є

$$\begin{gathered} 6x_1 + 4x_2 - \lambda_1 - \lambda_3 = 0, \\ 4x_1 + 10x_2 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, -x_1 - x_2 \leq 4, \\ \lambda_1 x_1 = 0, \lambda_2 x_2 = 0, \lambda_3 (4 - x_1 - x_2) = 0, \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{gathered}$$

Нескладно перевірити, що цих умови додержуються при $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ та $\lambda_3 = 22$, і функція має мінімум, що дорівнює 44, у точці A з координатами (3, 1) (рис. 7.24).

Лініями постійного рівня функції $f(x)$ є еліпси $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = c$.

Мінімум функції $f(x)$ за відсутності обмежень дорівнює нулю та розміщена на початку координат. Область обмежень на рис. 8.24 заштрихована.

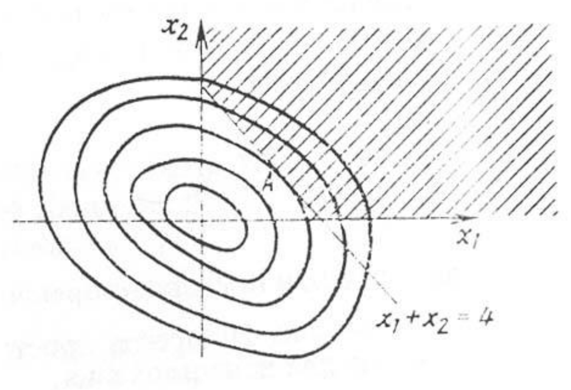


Рисунок 8.24 – Приклад функції й області обмеження

8.5.3. Метод штрафних функцій

Основна ідея методу штрафної функції полягає в перетворенні задачі мінімізації функції $z = f(x)$ із відповідними обмеженнями, накладеними на x, в задачу пошуку мінімуму *без обмежень* функції

$$Z = f(x) + P(x).$$

Функція $P(x)$ є штрафною. Необхідно, щоб під час порушення обмежень вона штрафувала функцію Z, тобто збільшувала її значення. У цьому разі мінімум Z буде розміщуватися всередині області обмежень. Фунція $P(x)$, що задовольняє цю умову, може бути не єдиною.

Задачу мінімізації можна сформулювати таким чином: мінімізувати функцію $z = f(x)$ при обмеженнях $c_j(x) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Зауваження. Обмеження вигляду «менше або дорівнює», $h(x) \le 0$, завжди може бути записане як «більше або дорівнює», $-h(x) \ge 0$, тому в наведеному формулюванні немає втрати загальності.

Функцію $P(x)$ зручно записати таким чином:

$$P(x) = r \sum_{j=1}^{m} (1 / c_j(x)), \tag{8.54}$$

де r – додатна величина. Тоді функція $Z = \varphi(x, r)$ набере вигляду

$$Z = \varphi(x, r) = f(x) + r \sum_{j=1}^{m} (1 / c_j(x)). \tag{8.55}$$

Якщо x набуває допустимих значень, тобто значень, для яких $c_j(x) \ge 0$, то Z набуває значення, більші ніж відповідні значення $f(x)$ (справжньої цільової функції даної задачі), і різницю можна зменшити за рахунок того, що r може бути дуже малою величиною. Але якщо x набуває значення, що є хоча і допустимими, проте близькими до границі області обмеження, і щонайменше одна з функцій $c_j(x)$ близька до нуля, то значення функції $P(x)$ і, отже, значення функції Z стають дуже великими. Таким чином, вплив функції $P(x)$ полягає у створенні «гребеня з крутими краями» вздовж кожної границі області обмежень. Отже, якщо пошук починається з допустимої точки і здійснюється пошук мінімуму функції $\varphi(x, r)$ без обмежень, то мінімум, звичайно, буде досягатися всередині допустимої області для задачі з обмеженнями. Вважаючи r достатньо малою величиною для того, щоб вплив $P(x)$ був малим у точці мінімуму, ми можемо зробити точку мінімуму функції $\varphi(x, r)$ без обмежень такою, що збігається з точкою мінімуму функції $f(x)$ з обмеженнями.

Приклад 8.13. Використовуючи штрафну функцію, задану рівнянням (8.44), мінімізувати функцію $f(x) = x$ при обмеженні $x \ge 2$, тобто $x - 2 \ge 0$. Мінімальним значенням функції є 2 при $x = 2$. Як за допомогою штрафної функції можна знайти рішення? Розглянемо функцію

$$\varphi(x, r) = x + \frac{r}{x-2}.$$

На рисунку 8.25 зображений графік функції $\varphi(x, r)$ та показане положення точок її мінімуму для різних значень r (1; 0,25 та 0,01).

Область обмежень лежить справа від вертикальної прямої $x = 2$. Нескладно побачити, що послідовність точок Q_1, Q_2, Q_3 прагне до точки Q – мінімуму функції за наявності обмежень. Дійсно, знайдемо першу похідну функції $\varphi(x, r)$:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 1 - \frac{r}{(x-2)^2}.$$

Отже, якщо $d\varphi / dx = 0$, $(x-2)^2 = r$, то $x = 2 \pm \sqrt{r}$, тоді $\dfrac{d^2\varphi}{dx^2} = \dfrac{2r}{(x-2)^3}$,

і мінімум досягається при $x = 2 + \sqrt{r}$ всередині області обмежень.

Отже, функція φ (x, r) має мінімум, що дорівнює $2 + 2\sqrt{r}$ при $x = 2 + \sqrt{r}$. Тоді Q_1 є точкою з координатами (3, 4), Q_2 – точкою з координатами (2,5, 3), Q_3 – точкою з координатами (2,1, 2,2).

Очевидно, що при $r \to 0$ мінімум без обмежень функції φ (x, r) наближається до значення 2 і мінімальною точкою є точка $x = 2$.

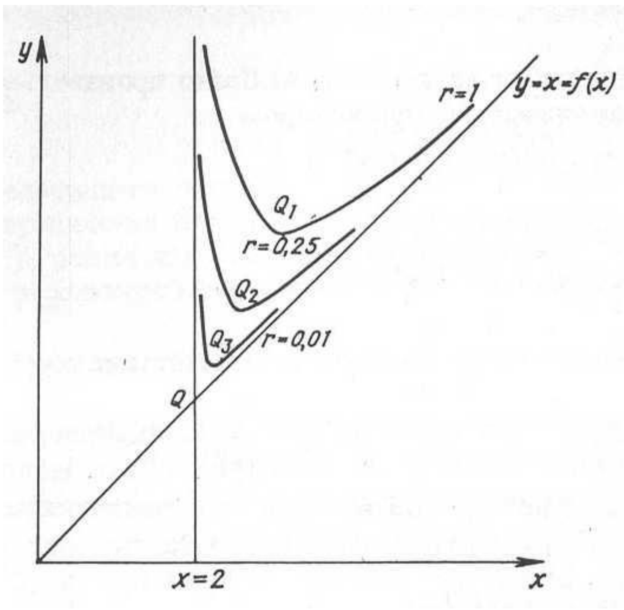


Рисунок 8.25 – Приклад застосовування штрафної функції

8.6. Розв'язування задач багатокритеріальної оптимізації

Задача багатокритеріальної оптимізації – така задача, що має декілька цільових функцій. При цьому обмеження можуть бути як наявними, так і відсутніми. Задача багатокритеріальної оптимізації без обмежень є окремим випадком відповідної задачі з обмеженнями, тому у подальшому розглядатимемо останні.

У загальному вигляді математична постановка задачі багатокритеріальної оптимізації з однією змінною складається з визначення найбільшого або найменшого значення цільових функцій

$$f_k(x), \ (k = \overline{1:l}) \tag{8.56}$$

за умов

$$g_i(x) \le b_i,\ i = \overline{1:m}, \tag{8.57}$$

де f_k і g_i – задані функції, а b_i – деякі дійсні числа.

Під час формулювання та аналізу задач багатокритеріальної оптимізації поняття розв’язування у традиційному розумінні може бути відсутнім або не мати сенсу. У практичних задачах знаходження оптимального розв’язку за одним із критеріїв зазвичай не відповідає оптимальному розв’язку за іншими критеріями. Отже, на практиці має місце суперечність критеріальних функцій, пов’язана з неможливістю знайти оптимально припустимий розв’язок початкової задачі одразу за всіма цільовими функціями.

У загальному випадку поняття розв’язування задачі багатокритеріальної оптимізації тісно пов’язано з аналізом множини припустимих альтернатив. Із цією метою на множині припустимих альтернатив вводять деяке спеціальне відношення, яке називають *відношенням домінування за Парето*. Припустимі альтернативи, що домінують за Парето, можуть бути вилучені з розгляду, оскільки для будь-якої з них завжди знайдеться припустима альтернатива із значеннями цільових функцій не меншими, ніж значення цих функцій для домінуючих альтернатив. Найбільш цікавими для розгляду є саме ті альтернативи, які не можна порівняти між собою за деяким даним відношенням. Множина цих альтернатив у множині припустимих альтернатив утворює власну підмножину – множину недомінуючих альтернатив.

Узагалі всі недомінуючі за Парето альтернативи еквівалентні між собою з точки зору початкової постановки задачі багатокритеріальної оптимізації. Для вибору єдиної альтернативи, що буде кінцевим розв’язком задачі, необхідно мати деякі додаткові припущення про властивості майбутнього розв’язку або про уподобання осіб та експертів, що ухвалюватимуть остаточне рішення. В окремих випадках ці припущення можуть бути внесені до початкової постановки задачі.

Поняття розв’язання задачі багатокритеріальної оптимізації у загальному випадку передбачає попереднє визначення множини недомінуючих альтернатив і наступний аналіз цієї множини з метою вибору кінцевої єдиної альтернативи. За базовий розв’язок задачі багатокритеріальної оптимізації обирають множину недомінуючих альтернатив. Таким чином, множина недомінуючих альтернатив може бути як кінцевим розв’язком задачі багатокритеріальної оптимізації у разі відсутності додаткових припущень про властивості кінцевого розв’язку, так і основою для прийняття остаточного рішення за наявності таких припущень.

Відомо три підходи до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації – графічний, аналітичний і алгоритмічний – кожен з яких має кілька методів (рис. 8.26).

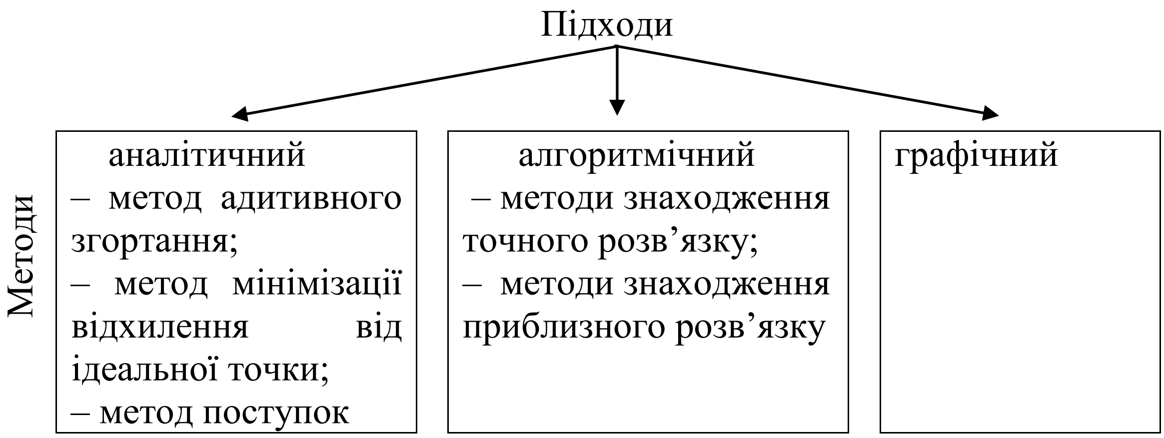


Рисунок 8.26 – Підходи і методи розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації

Графічний підхід може бути застосованим до найпростіших задач багатокритеріальної оптимізації. Він ґрунтується на зображенні графіків цільових функцій і обмежень на площині або у тривимірному просторі з наступним візуальним знаходженням множини недомінуючих альтернатив або остаточного розв'язку. Найчастіше графічний спосіб розв'язання використовується для ілюстрації особливостей тих чи інших методів розв'язання задач багатокритеріального лінійного й цілочислового програмування.

Під *аналітичним* розв'язанням задач багатокритеріальної оптимізації розуміють встановлення деякої функціональної залежності між вихідними даними задачі й точним її розв'язанням у вигляді множини недомінуючих альтернатив або остаточного розв'язку, що припускає знаходження множини недомінуючих розв'язків або остаточного рішення за відомими значеннями аргументів.

Наприклад, базовим способом знаходження аналітичних розв'язків у вигляді множини недомінуючих альтернатив для задач багатокритеріальної оптимізації вигляду (8.56)–(8.57) є розв'язання задачі однокритеріальної оптимізації типу

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_l f_l(x) \to \max \tag{8.58}$$

за умов

$$g_з(x) \le b_з,\ i = \overline{1:m}. \tag{8.59}$$

Значення $\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_l\}$, що називають *ваговими коефіцієнтами цільових функцій*, повинні задовольняти умови

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_l \in [0, 1], \tag{8.60}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l = 1. \tag{8.61}$$

При цьому множину недомінуючих альтернатив для задачі багатокритеріальної оптимізації у загальній постановці (8.56)–(8.57) з неперервними та опуклими цільовими функціями, а також компактною і опуклою множиною припустимих альтернатив можна буде одержати в результаті розв'язання задачі однокритеріальної оптимізації (8.58)–(8.59) для всіх можливих комбінацій вагових коефіцієнтів цільових функцій, тобто для всіх можливих дійсних значень $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_l \in [0,1]$, таких, що $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_l = 1$.

На жаль, цей спосіб знаходження недомінуючих альтернатив не дістав практичного застосовування, оскільки є доволі складним з точки зору виконання необхідних обчислень. Однак він є основою для *методу адитивного згортання цільових функцій*.

Серед інших методів аналітичного розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації найбільшого застосування дістали *метод поступок* і *метод мінімізації відхилення від ідеальної точки*, які за характером можуть бути застосовні для розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації різних типів.

Однак аналітичний підхід розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації застосовується лише для найпростіших задач із додатковими припущеннями про характер цільової функції та обмежень. Альтернативою до нього є алгоритмічний (обчислювальний) метод.

Під *алгоритмічним розв'язанням* задачі багатокритеріальної оптимізації розуміють розроблення або конструювання такої обчислювальної процедури, що дозволяє на основі відомих початкових даних задачі знаходити її розв'язання у вигляді множини недомінуючих альтернатив або остаточного розв'язку. Відповідна процедура може бути описана деяким формальним чином і зафіксована у вигляді алгоритму, тобто формальної вказівки виконати точно визначену певну послідовність дій, спрямованих на розв'язання поставленої задачі багатокритеріальної оптимізації. Сучасні методи алгоритмічного розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації передбачають використання обчислювальної техніки і відповідного програмного забезпечення.

Методи алгоритмічного розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації поділяють на дві категорії: методи знаходження точного розв'язку і методи знаходження наближеного розв'язку. Методи і алгоритми першої групи дозволяють за скінченний час знайти точний розв'язок задачі багатокритеріальної оптимізації. Методи й алгоритми наближеного розв'язку задач багатокритеріальної оптимізації дозволяють знаходити деяку апроксимацію множини недомінуючих альтернатив, один або кілька локально-оптимальних кінцевих розв'язків.

Знаходження точного розв'язку задачі багатокритеріальної оптимізації для будь-якого випадку є найкращим, але якщо точний розв'язок з яких-небудь причин знайти неможливо, намагаються знайти наближений розв'язок.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Побудувати за допомогою пакета Microsoft Excel графік функції $f\ (x) = 3x\ /\ (x^2 + 1)$. Залежно від його вигляду знайти точку мінімуму або максимуму цієї функції на відрізку [0; 5] за методом Фібоначчі.

2. Побудувати за допомогою пакета Microsoft Excel графік функції $f\ (x) = (x^3 + 4)\ /\ x^2$. Залежно від його вигляду знайти точку мінімуму або максимуму цієї функції на відрізку [1; 2] за методом золотого перетину.

3. Знайти точку мінімуму або максимуму функції $f\ (x) = ((x + 1)\ /\ x)^3$ на відрізку [1; 2] за методом квадратичної інтерполяції.

4. Побудувати за допомогою пакета Microsoft Excel графік функції $f\ (x) = (2x - 1)\ /\ (x - 1)^2$. Залежно від його вигляду знайти точку мінімуму або максимуму цієї функції на відрізку [–1/2; 0] за методом Ньютона.

5. Побудувати графік функції $f\ (x,\ y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ і знайти точку мінімуму (f_{min})) цієї функції за методом Хука – Дживса. Почати пошук із точки (3, 3).

6. Побудувати функцію $f\ (x,\ y) = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$ і знайти точку мінімуму (f_{min}) цієї функції за методом Нелдера – Міда. Почати пошук із точки (3, 3).

7. Побудувати функцію $f\ (x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ і знайти точку мінімуму (f_{min}) цієї функції за методом найшвидшого спуску. Почати пошук із точки (3, 3).

8. Побудувати функцію $f\ (x, y) = 4\ (x - y) - x^2 - y^2$ і знайти найбільше та найменше значення функції в області D: $x + 2y = 4$, $x - 2y = 4$, $x = 0$, обмеженій заданими лініями.

Питання для самоперевірки

1. Які методи оптимізації залежно від кількості керованих параметрів вам відомі?

2. Які методи оптимізації залежно від наявності чи відсутності обмежень вам відомі?

3. Як називають метод оптимізації, орієнтований на пошук локального екстремуму?

4. Як називають метод оптимізації, застосовуваний для пошуку глобального екстремуму?

5. Від чого залежить вибір методу оптимізації?

6. Що зазвичай при розв'язанні задачі оптимізації є критерієм закінчення пошуку?

7. Перелічіть методи оптимізації, які можна застосовувати для функцій, що не диференціюються.

8. Перелічіть методи оптимізації, які можна застосовувати для функцій, що диференціюються.

9. Які методи виключення інтервалів вам відомі?

10. Яку функцію називають унімодальною?

11. Сформулюйте правило виключення інтервалів.

12. Із яких етапів складається процес застосовування методів пошуку на основі виключення інтервалів?

13. У чому полягає перевага методів виключення інтервалів?

14. Із яких етапів складається алгоритм методу дихотомічного ділення?

15. Із яких етапів складається алгоритм методу Фібоначчі?

16. Із яких етапів складається алгоритм методу золотого перетину?

17. Який метод виключення інтервалів є найбільш ефективним і чому?

18. У чому полягає метод поліноміальної інтерполяції?

19. Із яких етапів складається алгоритм методу Пауела?

20. У чому полягає суть методу покоординатного спуску?

21. Із яких етапів складається алгоритм методу Хука – Дживса?

22. У чому полягає суть методів випадкового пошуку?

23. Із яких етапів складається алгоритм методу Нелдера – Міда?

24. Сформулюйте необхідні й достатні умови існування екстремуму.

25. Із яких етапів складається алгоритм методу Ньютона?

26. Із яких етапів складається алгоритм методу найшвидшого спуску?

27. У чому полягає метод штрафних функцій?

28. Які задачі оптимізації називають багатокритеріальними?

29. Сформулюйте постановку задачі багатокритеріальної оптимізації у загальному вигляді.

30. Які підходи до до розв’язання задач багатокритеріальної оптимізації вам відомі?

РОЗДІЛ 9
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КЛАСИЧНИХ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

У математичному програмуванні сформовано певний набір класичних постановок задач, математичні моделі яких широко використовуються на практиці у різних галузях людської діяльності. До класичних задач математичного програмування можна віднести транспортну задачу, задачу про призначення, задачу про розкрій матеріалів, які нижче будуть розглянуті більш детально, а також задачу оптимального розподілу ресурсів (капіталовкладень), задачу про дієту (суміш) та ін.

9.1. Транспортна задача

9.1.1. Математична постановка транспортної задачі

Нехай із деяких m пунктів відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ (постачальники) потрібно перевезти вантаж у n пунктів призначення $B_1, B_2, \dots, B_n$ (споживачі). Відомі запаси пунктів відправлення й потреби у вантажу пунктів призначення, а також витрати на доставку одиниці вантажу від постачальника до споживача. Знайти такий план перевезень, щоб був вивезений весь вантаж, задоволені всі споживачі і загальні витрати на перевезення вантажу були мінімальними.

Для запису математичної моделі транспортної задачі введемо такі позначення:

a_i – запаси вантажу в i-му пункті відправлення ($i = 1, 2, 3,\dots, m$);

b_j – потреба у вантажі в j-му пункті призначення ($j = 1, 2, 3,\dots, n$);

X_{ij} – кількість одиниць вантажу, перевезеного від i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення;

c_{ij} – тарифи перевезення одиниці вантажу від i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення.

Математична постановка задачі зводиться до знаходження мінімального значення функції

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \qquad (9.1)$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}), \qquad (9.2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}), \qquad (9.3)$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}) \qquad (9.4)$$

Оскільки змінні x_{ij} $(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$ задовольняють систему лінійних рівнянь (9.2) і (9.3) й умови невід'ємності (9.4), то забезпечується доставка необхідної кількості вантажу в кожний із пунктів призначення, вивезення наявного вантажу з усіх пунктів відправлення, а також не допускаються зворотні перевезення.

Будь-який невід'ємний розв'язок системи лінійних рівнянь (9.2) і (9.3), що визначається матрицею $X=(x_{ij})\ (i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$, називається ***планом транспортної задачі***.

План $X^*=(x_{ij}^*)\ (i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n})$, за якого функція (9.1) набуває свого мінімального значення, називається ***оптимальним планом транспортної задачі***.

Вхідні дані транспортної задачі оформляють у вигляді таблиці (табл. 9.1).

У правому верхньому куті клітинок A_iB_j записують вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення. Посередині кожної клітинки A_iB_j вносять кількість перевезеного вантажу з i-го пункту відправлення до j-го пункту призначення.

Таблиця 9.1

Пункт відправлення	**Пункт призначення**					**Запас**
	B_1	B_2	B_3	…	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
A_3	C_{31} X_{31}	C_{32} X_{32}	C_{33} X_{33}	…	C_{3n} X_{3n}	a_3
…	…	…	…	…	…	…
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потреба	b_1	B_2	b_3	…	b_n	

Етапи розв’язання транспортної задачі:

1. Визначається опорний план (допустиме базисне рішення) транспортної задачі.
2. Виконується перевірка опорного плану на оптимальність.
3. Виконується перехід від одного опорного плану до іншого або завершується задача оптимізації, якщо оптимальний план знайдено.

Існує багато методів знаходження оптимального плану транспортної задачі, серед яких широкого використання набули метод північно-західного кута і метод потенціалів.

9.1.2. Типи транспортних задач

Якщо загальна потреба вантажу в пунктах призначення дорівнює загальним запасам вантажу у пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j , \qquad (9.5)$$

то модель такої транспортної задачі називається *закритою*.

Якщо зазначена умова не виконується, то модель транспортної задачі називається *відкритою*.

Теорема 9.1. Для розв'язання транспортної задачі необхідно й досить, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення дорівнювали потребам у вантажі у пунктах призначення, тобто щоб виконувалася рівність (9.5).

У разі, якщо запаси перевищують потреби, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводиться фіктивний $(n + 1)$*-й* пункт призначення із потребою $b_{n=1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, і відповідні тарифи вважаються такими, що дорівнюють нулю: $c_{i\,n+1} = 0, \ \ (i = \overline{1,m})$. Одержана задача є транспортною задачею, для якої виконується рівність (9.5).

Аналогічно при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ вводиться фіктивний $(m + 1)$-й пункт відправлення із запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, і тарифи вважаються такими, що дорівнюють нулю: $c_{m+1\,j} = 0 \ (j = \overline{1,n})$.

9.1.3. Методи побудови опорного плану транспортної задачі

Найбільш поширеними і простими у застосуванні методами складання опорного плану транспортної задачі є:

– метод північно-західного кута;
– метод найменшої вартості;
– метод подвійної переваги.

Сутність цих методів полягає у тому, що опорний план знаходять послідовно за $(n + m - 1)$ кроків, на кожному з яких у початковій таблиці задачі заповнюють одну клітинку, яку називають *зайнятою.* Заповнення однієї із клітинок повністю забезпечує задоволення потреб у вантажі одного з пунктів призначення або вивезення вантажу з одного із пунктів відправлення. У першому випадку тимчасово вилучається з подальшого розгляду стовпчик, що містить заповнену на даному кроці клітинку. У другому випадку тимчасово вилучається із розгляду рядок, що містить заповнену клітинку.

Після виконання $(n + m - 2)$ кроків повинна залишитися вільною лише одна клітинка, причому для неї запаси пункту відправлення дорівнюватимуть потребам пункту призначення. Заповнивши цю клітинку ($(n + m - 1)$-й крок), отримують шуканий опорний план.

Метод північно-західного кута. Під час знаходження опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута на кожному кроці розглядають перший пункт відправлення і перший пункт призначення з тих, що залишилися. Заповнення клітинок таблиці умов починають із лівої верхньої клітинки для невідомого x_{11} (північно-західний кут) і закінчують для невідомого x_{mn}.

Метод найменшої вартості. Під час знаходження опорного плану транспортної задачі методом найменшої (мінімальної) вартості першою заповнюють клітинку з найменшою вартістю перевезення. Якщо таких клітинок декілька – обирають ту з них, що має більші потреби. Серед клітинок, що залишились, знову обирають клітинку з найменшою вартістю перевезення тощо.

Метод подвійної переваги. Під час знаходження опорного плану транспортної задачі методом подвійної переваги спочатку в кожному рядку і кожному стовпчику помічають клітинку з найменшою вартістю перевезення і позначають, наприклад, знаком «v». Потім за описаним вище правилом у першу чергу заповнюють клітинки, позначені подвійним знаком «vv», потім ті, що мають один знак «v», в останню чергу – всі інші у порядку зростання вартості перевезення.

9.1.4. Розв’язування транспортної задачі методом північно-західного кута

Розглянемо метод північно-західного кута побудови опорного плану транспортної задачі.

Цей метод ґрунтується на тому, що заповнення таблиці починають, не враховуючи вартостей перевезень, з лівого верхнього (північно-західного) кута. У клітинку записують менше з двох чисел A_1 та B_1. Далі переходять до наступної клітинки в цьому самому рядку або у стовпчику і заповнюють її, і т.д. Закінчують заповнення таблиці у правій нижній клітинці. У такий спосіб значення поставок будуть розміщені по діагоналі таблиці.

Приклад 9.1. Нехай умови конкретної транспортної задачі подані в табл. 9.2.

Спочатку, не враховуючи вартості перевезень, завжди задовольняють потреби першого споживача B_1, використовуючи запаси першого постачальника A_1. У нашому прикладі (табл. 9.2) потреби споживача B_1 становлять $b_1 = 110$, а запаси постачальника – $a_1 = 150$ одиниць (тобто із запасів першого постачальника можна повністю задовольнити потреби першого споживача), тому в клітинку $A_1 B_1$ записуємо менше зі значень a_1, b_1, тобто 110. Тепер потреби першого споживача повністю задоволені, переходимо до задоволення потреб наступного (другого) споживача B_2. Обсяг його потреб $b_2 = 50$.

Після задоволення потреб першого споживача залишок запасів першого постачальника становить $150 - 110 = 40$. Отже, від першого виробника другому споживачеві можна перевезти лише 40 одиниць продукції, тому в клітинку $A_1 B_2$ записуємо число 40. Після цього, оскільки запаси першого постачальника повністю вичерпані, переходимо до використання запасів наступного постачальника A_2. Його запаси $a_2 = 60$, а незадоволені потреби другого споживача $50-40=10$, тому в клітинку $A_2\,B_2$ записуємо число 10, і другий споживач у такий спосіб також повністю отримав необхідну кількість продукції.

Таблиця 9.2

Постачальник	**Споживач**				**Запаси вантажу**
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	*4*	*4*	*2*	*5*	*150*
A_2	*5*	*3*	*1*	*2*	*60*
A_3	*2*	*1*	*4*	*2*	*90*
Потреба	*110*	*50*	*60*	*80*	

Переходимо до задоволення потреб наступного споживача B_3. У результаті часткового використання запасів другого постачальника його залишок продукції становить $60-10=50$. Отже, від другого виробника до третього споживача можна перевезти 50 одиниць продукції. Клітинка $A_2\,B_3$ міститиме зазначене число 50, і цим запаси постачальника A_2 будуть повністю вичерпані. Переходимо до розподілу запасів останнього (третього) постачальника A_3. Залишилися незадоволеними потреби третього споживача в обсязі $60-50=10$. Для їх задоволення скористаємося запасами постачальника A_3 . У клітинку $A_3\,B_3$ записуємо число 10, отже, потреби споживача B_3 також повністю задоволені. Переходимо до останнього споживача B_4 з потребами $b_4=80$, які повністю задовольняються за рахунок залишку запасів третього постачальника: $90-10=80$.

Отже, в таблиці 9.3 у заповнених клітинках розміщені числа, що означають можливий план перевезень продукції. Сума чисел (перевезень) у рядках дорівнює обсягам запасів постачальників, а сума чисел у стовпчиках – обсягам потреб відповідних споживачів.

Аналогічний результат можна одержати, якщо почати з правого нижнього кута таблиці 9.3, рухаючись до лівого верхнього. Процедуру методу можна застосовувати також, починаючи розподіл поставок із лівого нижнього кута і рухаючись до правого верхнього по діагоналі. В такому разі спосіб розподілу перевезень можна було б назвати методом південно-західного кута, тому цей метод ще називають діагональним. Метод північно-західного кута є найпростішим, однак і найменш ефективним. Процес відшукання оптимального плану після початкового опорного, визначеного методом північно-західного кута, пов'язаний зі значним обсягом обчислювальних робіт, тому його реалізують на комп’ютері.

Таблиця 9.3

Постачальник	Запас	Споживач			
		B_1	B_2	B_3	B_4
		Потреба			
		$b_1 = 110$	$b_2 = 50$	$b_3 = 60$	$b_4 = 80$
A_1	$a_1 = 150$	4 110	4 40	2	5
A_2	$a_2 = 60$	5	3 10	1 50	2
A_3	$a_3 = 90$	2	1	4 10	2 80

Визначимо загальну вартість перевезень згідно з початковим опорним планом. Від першого постачальника до першого споживача необхідно перевезти 110 одиниць продукції за ціною 4 грош. од. (ціна записана в правому верхньому куті кожної клітинки), отже коштуватиме $110 \cdot 4 = 440$ грош. од. Крім того, необхідно перевезти від першого постачальника 40 одиниць продукції до другого споживача за ціною 4 грош. од. і т. д. У такий спосіб визначимо загальну вартість усіх перевезень: $F = 110 \cdot 4 + 40 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 10 \cdot 4 + 80 \cdot 2 = 880$ (грош. од.).

9.1.5. Розв'язування транспортної задачі методом потенціалів

Розв'язання транспортної задачі, як і розв'язання будь-якої іншої задачі лінійного програмування, наприклад симплексним методом, передбачає: складання опорного плану; перевірку опорного плану на оптимальність і, в разі неоптимальності цього плану, перехід до іншого; перевірку покращеного плану на оптимальність і т. д. доти, поки не буде знайдено оптимальний розв'язок або поки не буде встановлена неможливість розв'язання цієї задачі.

Для перевірки складеного плану на оптимальність під час розв'язання транспортної задачі методом потенціалів використовують систему оцінок (потенціалів) рядків і стовпчиків.

Потенціали – це деякі числа, що ставляться у відповідність кожному рядку та стовпчику.

Позначимо потенціали рядків як $U_i, i = \overline{1,m};$, а потенціали стовпчиків – $V_j, j = \overline{1,n}$.

Алгоритм розрахунку потенціалів

1. Потенціал першого рядка дорівнює нулю, тобто $U_1 = 0$.

2. Усі інші потенціали розраховують за таким правилом: для кожної заповненої клітинки сума потенціалів відповідного рядка і стовпчика повинна

дорівнюватися оцінці (вартість перевезення одиниці вантажу) цієї клітинки: $U_i + V_j = C_{ij}$.

Критерій оптимальності складеного плану. Задача має оптимальний розв’язок, коли сума потенціалів в усіх клітинках таблиці не перевищує оцінок, тобто під час розв’язання задачі на мінімум план вважається оптимальним у тому разі, якщо для всіх вільних клітинок дотримується вимога $U_i + V_j \leq C_{ij}$ (для зайнятих клітинок $U_i + V_j = C_{ij}$ згідно з алгоритмом розрахунку потенціалів).

Розв’язання транспортних задач методом потенціалів розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 9.2. У трьох пунктах відправлення A_1, A_2, A_3 зосереджено однорідний вантаж у кількості 26, 33 і 45 т відповідно. Його потрібно перевезти до чотирьох пунктів призначення B_1, B_2, B_3, B_4 у кількості 14, 19, 20 і 5 т відповідно. Вартість перевезення одиниці вантажу з кожного пункту відправлення до кожного пункту призначення задана матрицею

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 15 & 19 \\ 13 & 17 & 28 & 3 \\ 5 & 20 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Знайти оптимальний план перевезень вантажу.

Розв’язання

1. З’ясовують тип транспортної задачі.

Загальні запаси становлять 26 + 33 + 45 = 104 т; загальні потреби 14 + 19 + 20 + 5 = 58 т. Задача відкритого типу, причому запаси перевищують потреби, тому необхідно ввести фіктивного споживача, потужність якого $B_{фікт} = 104 - 58 = 46$ т.

2. Складають опорний план методом північно-західного кута (табл. 9.4). У правих верхніх кутах кожної клітинки записана вартість перевезення одиниці вантажу з відповідного пункту відправлення до відповідного пункту призначення. У саму клітинку записують кількість перевезеного вантажу. Якщо з деякого пункту відправлення до певного пункту призначення вантаж не перевозиться, то клітинку залишають порожньою.

Клітинки з фіктивним споживачем (постачальником) заповнюють останніми, порушення умови оптимальності у цих клітинках розглядається лише після того, як в основних клітинках порушення умови оптимальності не спостерігається.

Для наведеного прикладу першою заповнюємо верхню ліву клітинку X_{11}, в яку заносимо розмір запасу A_1 або розмір потреби B_1 залежно від того, що менше. У нашому прикладі A_1 = 26, B_1 = 14, тому записуємо 14. Потребу у вантажі першого споживача задоволено за рахунок першого постачальника, у якого залишається вантаж у кількості 26 – 14 = 12 т. У подальшій побудові опорного плану не розглядається стовпець B_1, оскільки потреби цього пункту призначення задоволено.

На кожному наступному кроці розглядають перший із тих, що залишилися, пункт призначення або пункт відправлення. У нашому прикладі потреба другого пункту призначення B_2 становить 19 т, а за рахунок першого постачальника A_1 можна завезти лише 12 т, 7 т завозиться з другого пункту відправлення. У подальшій побудові опорного плану не розглядається рядок A_1.

У постачальника A_2 було 33 т, з яких 7 т перевезено до пункту споживання B_2, 20 т – до пункту споживання B_3, 1 т – до фіктивного пункту споживання $B_{фікт}$. Потреба фіктивного пункту споживання задовольняється за рахунок другого і третього постачальників.

Аналогічно заповнюють усі клітинки таблиці з X_{11} по X_{mn}. Це заповнення має вигляд сходинок по діагоналі (табл. 9.4).

Таблиця 9.4

Пункт відправлення	**Пункт призначення**					**Запас**
	B₁	***B₂***	***B₃***	***B₄***	***B_{фікт}***	
A_1	*6* **14**	*4* **12**	*15*	*19*	*0*	26
A_2	*13*	*17* **7**	*28* **20**	*3* **5**	*0* **1**	33
A_3	*5*	*20*	*6*	*10*	*0* **45**	45
Потреба	14	19	20	5	46	104

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення становитиме

$$F_{min}=14\cdot6 + 12\cdot4 + 7\cdot17 + 20\cdot28 + 5\cdot3 + 1\cdot0 + 45\cdot0=826 \text{ грош. од.}$$

3. Розраховують потенціали рядків і стовпчиків (табл. 9.5).

Нехай $U_1 =0$, тоді потенціали першого і другого стовпчиків (оскільки вони містять заповнені клітинки у рядку A_1) становитимуть:

$$V_1 = C_{11} - U_1 = 6 - 0 = 6 \qquad \text{для } B_1,$$
$$V_2 = C_{12} - U_1 = 4 - 0 = 4 \qquad \text{для } B_2.$$

Потенціал другого рядка:

$$U2 = C22 - V2 = 17 - 4 = 13.$$

Потенціали для стовпчиків B_3 , B_4 і $B_{фікт}$:

$$V3 = C23 - U2 = 28 - 13 = 15 \qquad \text{для B3,}$$
$$V2 = C24 - U2 = 3 - 13 = - 10 \qquad \text{для B4,}$$
$$V2 = C25 - U2 = 0 -13 = - 13 \qquad \text{для Вфікт.}$$

Потенціал рядка A_3:

$$U3 = C35 - V5 = 0 - (-13) = 13.$$

Таблиця 9.5

Пункт відправлен-ня	Пункт призначення					Запас	Потенціал
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{фікт}$		
A_1	*6* **14**	*4* **12**	*15*	*19*	*0*	26	0
A_2	*13*	*17* **7**	*28* **20**	*3* **5**	*0* **1**	33	13
A_3	*5*	*20*	*6*	*10*	*0* **45**	45	13
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціал	6	4	15	–10	–13		

4. Перевіряють складений план на оптимальність.

Для A_1B_3 сума потенціалів $U_1 + V_3 = 0 + 15 = 15$, що ≤ 15.

Для A_1B_4 сума потенціалів $U_1 + V_4 = 0 + (–10) = –10$, що ≤ 19.

Для A_1B_5 сума потенціалів $U_1 + V_5 = 0 + (–13) = –13$, що ≤ 0.

Для A_2B_1 сума потенціалів $U_2 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 13 (умова оптимальності порушена).

Таблиця 9.6

Пункт відправлення	Пункт призначення					Запас	Потен-ціал Ui
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{фікт}$		
A_1	*6* **14**	*4* **12**	*15*	*19*	*0*	26	0
A_2	*13* 6	*17* **7**	*28* - **20**	*3* **5**	*0* **1** +	33	13
A_3	*5* 14	*20*	*6* + 22	*10*	*0* - **45**	45	13
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціал Vj	6	4	15	–10	–13		

Для A_3B_1 сума потенціалів $U_3 + V_1 = 13 + 6 = 19$, що > 5 (умова оптимальності порушена).

Для A_3B_2 сума потенціалів $U_3 + V_2 = 13 + 4 = 17$, що ≤ 20.

Для A_3B_3 сума потенціалів $U_3 + V_3 = 13 + 15 = 28$, що > 6 (умова оптимальності порушена).

Для A_3B_4 сума потенціалів $U_3 + V_4 = 13 + (-10) = 3$, що ≤ 10.

Отже, цей план перевезень не є оптимальним, оскільки в клітинках A_2B_1, A_3B_1, A_3B_3 не виконується вимога $U_i + V_j \leq C_{ij}$.

У ці клітинки у нижній лівий кут записуємо перевищення вартості перевезення (табл. 9.6).

У клітинку A_2B_1 – число $19 - 13 = 6$, у клітинку A_3B_1 – число $19 - 5 = 14$, у клітинку A_3B_3 – число $28 - 6 = 22$.

Переходять до наступного плану.

5. Перехід до нового опорного плану.

Вибирають клітинку, в якій сума потенціалів найбільше перевищує оцінку, і позначають її знаком «+» (табл. 9.6). Це клітинка A_3B_3, і вона називається клітинкою перерахунку. Починаючи з клітинки перерахунку, будують фігуру перерахунку.

Фігура перерахунку – замкнений контур, вершини якого знаходяться в зайнятих клітинках (крім першої). Причому лінії цього контуру можуть бути строго вертикальними або горизонтальними. Деякі варіанти фігури перерахунку зображено на рис. 9.1.

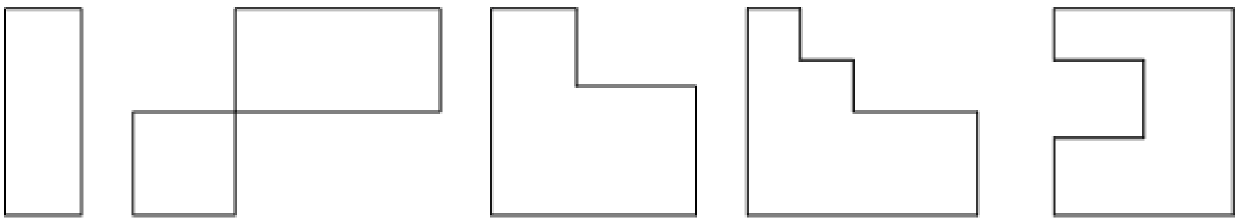


Рисунок 9.1 – Приклади фігур перерахунку

Клітинки, що ввійшли до фігури перерахунку, позначають по черзі знаками «+», «–», «+», «–», ..., починаючи з клітинки перерахунку.

Правила заповнення нової транспортної таблиці:

– кількість вантажу в клітинках, що не ввійшли до фігури перерахунку, переносять до нової таблиці без змін;

– щодо клітинок фігури перерахунку, то кількість вантажу в клітинках зі знаком «+» збільшують, а в клітинках зі знаком «–» зменшують на одну й ту саму величину, а саме на найменшу кількість вантажу в клітинках, позначених знаком «–».

Виправлений таким чином план перевезень записують у відповідну таблицю (табл. 9.7) і досліджують на оптимальність, як і попередній.

Таблиця 9.7

Пункт відправлення	**Пункт призначення**					**Запас**	**Потен-ціал Ui**
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{фікт}$		
A_1	*6* **14**	*4* **12**	*15*	*19*	*0*	26	0
A_2	*13* 6	*17* **7**	*28*	*3* **5**	*0* **21**	33	13
A_3	*5* 14	*20*	*6* **20**	*10*	*0* **25**	45	13
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціал Vj	6	4	–7	–10	м13		

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення становитиме:

$F_{\min}$ =14 · 6 + 12 · 4 + 7 · 17 + 5 · 3 + 21 · 0 + 20 · 6 + 25 · 0 = 386 грош. од.

Обчислимо потенціали за правилом, описаним вище, і перевіримо складений план на оптимальність. Як бачимо з табл. 9.7, порушення оптимальності відбулося в клітинках A_2B_1 і A_3B_1, причому найбільше – у A_3B_1.

Фігура перерахунку елементів нової транспортної таблиці зображена у табл. 9.7, а нова таблиця – це табл. 9.8.

Таблиця 9.8

Пункт відправлення	**Пункт призначення**					**Запас**	**Потен-ціал Ui**
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{фікт}$		
A_1	*6* **7**	*4* **19**	*15*	*19*	*0* *1*	26	0
A_2	*13*	*17*	*28*	*3* **5**	*0* **28**	33	–1
A_3	*5* **7**	*20*	*6* **20**	*10*	*0* **18**	45	–1
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціал Vj	6	4	7	4	1		

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення становитиме

$F_{\min} = 7 \cdot 6 + 19 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 28 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 18 \cdot 0 = 288$ грош. од.

У таблиці 6.8 порушення умови оптимальності спостерігається у клітинці $A_1B_{фікт}$. Виконуючи описані вище кроки переходу до нової транспортної таблиці, одержуємо табл. 9.9, яка містить оптимальний план перевезення вантажу.

Таблиця 9.9

Пункт відправлення	**Пункт призначення**					**Запас**	**Потен-ціал Ui**
	B_1	B_2	B_3	B_4	$B_{фікт}$		
A_1	*6*	*4* **19**	*15*	*19*	*0* **7**	26	0
A_2	*13*	*17*	*28*	*3* **5**	*0* **28**	33	0
Потреба	14	19	20	5	46	104	
Потенціал Vj	5	4	6	3	0		

При такому плані перевезень загальна вартість перевезення становитиме

$F_{\min} = 7 \cdot 6 + 19 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 28 \cdot 0 + 7 \cdot 5 + 20 \cdot 6 + 18 \cdot 0 = 281$ грош. од.

План перевезення вантажу можна описати матрицею

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 14 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix},$$

або словами:

– із пункту А1 до пункту В2 необхідно перевезти 19 т;
– із пункту А2 до пункту В4 необхідно перевезти 5 т;
– із пункту А3 до пункту В1 необхідно перевезти 14 т, до пункту В3 – 20 т.

Фіктивний споживач показує залишки вантажу в пунктах відправлення. Так, у пункті A_1 залишилося 7 одиниць вантажу, в пункті A_2 – 28 одиниць вантажу, в пункті A_3 – 11 одиниць вантажу.

9.2. Задача про призначення

9.2.1. Математична постановка задачі про призначення

Нехай маємо n видів робіт і стільки ж робітників. Кожен робітник може виконати будь-яку роботу, але з різним ступенем майстерності. Якщо на деяку роботу призначають робітника саме тієї кваліфікації, яка необхідна для її виконання, тоді вартість виконання цієї роботи буде нижчою, ніж при призначенні на цю роботу робітника іншої кваліфікації. Мета – знайти оптимальний розподіл робітників по всіх роботах, що є у наявності. Тобто такий розподіл, щоб загальна вартість виконання комплексу робіт була мінімальною. Загальна задача про призначення n робітників на n робіт наведена на рис. 9.2.

Роботи

Робітники	1	2	...	n	
1	c_{11}	c_{12}	$\dots$	c_{1n}	**1**
2	c_{21}	c_{22}	$\dots$	c_{2n}	**1**
.	.	.	.	.	**1**
.	.	.	.	.	**1**
.	.	.	.	.	**1**
n	c_{n1}	c_{n2}		c_{nn}	**1**
	1	**1**	**1**	**1**	

Рисунок 9.2 – Табличний вигляд задачі про призначення

Коефіцієнт c_{ij} показує вартість призначення робітника i на роботу $j\,(i, j = 1,2,\dots,n)$. Якщо кількість робітників не дорівнює кількості робіт, то у модель вводять фіктивних робітників або фіктивні роботи.

Задача про призначення є окремим випадком транспортної задачі. Робітники відповідають пунктам відправлення, а роботи – пунктам призначення. Всі величини попиту та пропозиції дорівнюють одиниці.

Якщо ввести позначення

$$x_{ij} = \begin{cases} 1,\ якщо\ робітник\ i\ призначений\ на\ роботу\ j, \\ 0,\ у\ протилежному\ разі, \end{cases}$$

то математична модель цієї задачі буде мати такий вигляд:
знайти мінімум функції

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = 1,2,\dots,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = 1,2,\dots,n..$$

З урахуванням специфічних особливостей задачі про призначення існують специфічні алгоритми її розв'язання, одним з яких є так званий угорський метод.

9.2.2. Алгоритм угорського методу

Приклад 9.2. До проектної фірми надійшло замовлення на складання проектів перебудови трьох споруд. Виконати кожен із цих проектів може один із трьох проектантів фірми, однак час виконання роботи кожним робітником буде різним (табл. 9.10).

Розподілити роботи між проектантами таким чином, щоб замовлення було виконане якомога раніше.

Таблиця 9.10

	1-й проект	**2-й проект**	**3-й проект**
1-й робітник	15 діб	10 діб	9 діб
2-й робітник	9 діб	15 діб	10 діб
3-й робітник	10 діб	12 діб	8 діб

Розв'яжемо задачу угорським методом.

Знайдемо мінімальні елементи в кожному стовпчику та рядку таблиці 9.11.

Таблиця 9.11

	1-й проект	**2-й проект**	**3-й проект**	*min*
1-й робітник	15	10	9	**9**
2-й робітник	9	15	10	**9**
3-й робітник	10	12	8	**8**
min	**0**	**10**	**0**	

1. У кожному рядку знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів рядка (табл. 9.12).

Таблиця 9.12

	1-й проект	**2-й проект**	**3-й проект**
1-й робітник	6	1	0
2-й робітник	0	6	1
3-й робітник	2	4	0

2. В одержаній матриці у кожному стовпчику знаходять мінімальний елемент і віднімають його від інших елементів відповідних стовпчиків (табл. 9.13).

У таблиці 9.13 підкреслені нульові елементи визначають оптимальний розв'язок: перший проект виконає 2-й робітник, 2-й проект – 1-й робітник, 3-й проект – 3-й робітник. Усі ці проекти виконаються за мінімально можливий термін $\max\{9, 10, 8\} = 10$ діб.

Таблиця 9.13

	1-й проект	2-й проект	3-й проект
1-й робітник	6	**0**	0
2-й робітник	**0**	5	1
3-й робітник	2	3	**0**

У деяких випадках нульові елементи, одержані на першому та другому кроках алгоритму угорського методу, не дозволяють безпосередньо визначити припустимий розв'язок. У таких випадках застосовують додаткові кроки для одержання оптимального розв'язку.

Приклад 9.6. Припустимо, що в попередньому прикладі представлено чотири робітники та замовлення на виконання чотирьох проектів (табл. 9.14):

Таблиця 9.14

	1-й проект	2-й проект	3-й проект	4-й проект
1-й робітник	1 діб	4 діб	6 діб	3 доби
2-й робітник	9 діб	7 діб	10 діб	9 діб
3-й робітник	4 діб	5 діб	11 діб	7 діб
4-й робітник	8 діб	7 діб	8 діб	5 діб

У результаті виконання перших двох кроків алгоритму угорського методу одержуємо таблицю 9.15.

Таблиця 9.15

	1-й проект	2-й проект	3-й проект	4-й проект
1-й робітник	**0**	3	2	2
2-й робітник	2	**0**	**0**	2
3-й робітник	**0**	1	4	3
4-й робітник	3	2	**0**	**0**

Нульові елементи цієї таблиці не дозволяють призначити кожному робітнику певний проект. Так, наприклад, якщо ми призначимо першому виконавцю роботу 1, з подальшого розгляду виключається перший стовпчик, тоді в рядку для третього робітника не залишиться нульових елементів. У таких випадках виконують ***додаткові кроки***:

1. У таблиці 9.15 проводять мінімальну кількість горизонтальних і вертикальних по рядках прямих для закреслення всіх нульових елементів.

У результаті одержуємо табл. 9.16.

Таблиця 9.16

	1-й проект	2-й проект	3-й проект	4-й проект
1-й робітник	**0**	3	2	2
2-й робітник	2	**0**	**0**	2
3-й робітник	**0**	1	4	3
4-й робітник	3	2	**0**	**0**

2. Знаходять найменший невикреслений елемент: віднімають його від інших невикреслених елементів і додають до елементів, що знаходяться на перетині проведених на попередньому кроці прямих.

У нашому прикладі це елемент 1 (перетин рядка 3-го робітника і стовпчика 2-го проекту). Результатом описаних вище дій є табл. 9.17:

Оптимальний розв'язок показаний підкресленими нулями. Отже, ми одержали такий розподіл робіт між працівниками (табл. 9.18):

Таблиця 9.17

	1-й проект	**2-й проект**	**3-й проект**	**4-й проект**
1-й робітник	**<u>0</u>**	2	1	1
2-й робітник	3	0	**<u>0</u>**	2
3-й робітник	0	**<u>0</u>**	3	2
4-й робітник	4	2	0	**<u>0</u>**

Таблиця 9.18

№ проекту	**Виконавець**
1	1
2	3
3	2
4	4

Якщо нова одержана таблиця не дозволяє побудувати припустимий розв'язок, повторюють кроки додаткового алгоритму.

Розв'язування задачі про призначення методом гілок і меж

Знайдемо розв'язок задачі про призначення розмірності n = 4 заданою матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 8 & 8 \\ 6 & 8 & 0 & 7 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

де c_{ij} – ефективність виконання і-м робітником j-ої роботи.

Нехай *α, β, γ, δ* – робітники, яких необхідно розподілити по чотирьох роботах з номерами 1, 2, 3, 4. Допустима множина X складається з 4!=24 перестановок символів *α, β, γ, δ*. Наприклад, $x^1 = (\delta, \gamma, \alpha, \beta)$ означає, що робітник δ виконує першу роботу, робітник γ – другу і т. д.

Оцінку можна здійснювати шляхом відкидання умови однозначності. Розглянемо безліч $\bar{X}$, що складається з векторів x, в яких робітник може бути розподілений більш ніж на одну роботу. Множина $\bar{X} \supset X$ містить 4^4 = 256 розв'язків. Тоді $d(X) = \max\limits_{X \subseteq \bar{X}} f(x) = f(\bar{x})$ = 9+8+8+8 = 33, $\bar{x} = (\alpha, \gamma, \beta, \delta)$,

$x^* \notin X$. Отриманий розв’язок не є допустимим у вихідній задачі (робочий δ виконує дві роботи), тому потрібно виконати розгалуження задачі на підзадачі.

Нехай $X = X_\alpha = \{x \in X : x_1 = \alpha\}$. Інакше при $x \in X_\alpha$ робітник α призначається на першу роботу. Аналогічно визначаються множини X_β, X_γ, X_δ, $X_{\alpha\beta}$ і т. п. Тоді $X = X_\alpha \cup X_\beta \cup X_\gamma \cup X_\delta$.

Одержимо оцінки $d(X_\alpha) = 33$, $d(X_\beta) = 27$, $d(X_\gamma) = 29$, $d(X_\delta) = 25$.

На другому кроці розгалуження здійснюється по робітнику, що виконує другу роботу ($X_\alpha = X_{\alpha\beta} \cup X_{\alpha\gamma} \cup X_{\alpha\delta}$), на третьому кроці – по третій роботі і т. д. На n-1 кроці розгалуження в кожному разі закінчується, так як отримана множина складається з одного елемента, наприклад $X_{\delta,\gamma,\alpha} = \{(\delta,\gamma,\alpha,\beta)\}$, і визначається не оцінка, а точний розв’язок задачі. Таким чином, дерево розв’язків складається з, максимум, n рівнів, включаючи вершину. Для розгалуження вибираємо множину з найкращою (тут найбільшою) оцінкою. У розглянутому прикладі на другому кроці обчислюємо оцінки $d(X_{\alpha\beta}) = 21$, $d(X_{\alpha\gamma}) = 33$, $d(X_{\alpha\delta}) = 32$.

На третьому кроці одержимо точні рішення зі значеннями $f(X_{\alpha\gamma\beta}) = 27$, $f(X_{\alpha\gamma\delta}) = 28$, $f(X_{\alpha\delta\beta}) = 31$, $f(X_{\alpha\delta\gamma}) = 34$.

Призначення з найбільшим значенням $x^* = (\alpha\delta\beta\gamma)$, $f(x^*) = 31$ є рішенням задачі бо решта підзадач мають оцінки, менші 31.

9.3. Задача про розкрій матеріалу

9.3.1 Математична постановка задачі про розкрій матеріалу

Модель цієї задачі має важливе значення для економії матеріалів та сировини. Розглянемо постановку задачі. Значна частина матеріалів надходить на підприємство у вигляді певних одиниць стандартних розмірів. Для виробничого використання його доводиться розрізати на частини, щоб одержати заготовки необхідної величини та форми. Виникає проблема мінімізації відходів матеріалів.

Завдання оптимального розкрою полягає в тому, щоб вибрати один або кілька способів розкрою матеріалу і визначити, яку кількість матеріалу необхідно розкроювати, застосовуючи кожен з обраних способів.

Виділяють два етапи розв’язання задачі оптимального розкрою. На першому етапі визначаються раціональні способи розкрою матеріалу, на другому – вирішується завдання лінійного програмування для визначення інтенсивності використання раціональних способів розкрою.

У задачах оптимального розкрою розглядаються так звані раціональні (оптимальні за Парето) способи розкрою. Припустимо, що з одиниці матеріалу можна виготовити заготовки декількох видів.

Спосіб розкрою одиниці матеріалу називається раціональним (оптимальним за Парето), якщо збільшення числа заготовок одного виду можливе лише за рахунок скорочення числа заготовок іншого виду.

Нехай k – індекс виду заготовки, $k = 1, ... q$; i – індекс способу розкрою одиниці матеріалу, $i = 1, ..., p$; a_{ik} – кількість (ціле число) заготовок виду k, одержаних при розкрої одиниці матеріалу і-м способом.

Наведене визначення раціонального способу розкрою може бути формалізоване так.

Спосіб розкрою v називається раціональним (оптимальним за Парето), якщо для будь-якого іншого способу розкрою i зі співвідношень $a_{ik} \geq a_{vk}$, $k = 1, ..., q$ випливають співвідношення $a_{ik} = a_{vk}$, $k = 1, ..., q$.

9.3.2. Типи моделей задачі розкрою матеріалів

Розглянемо різні варіанти постановки задачі про розкрій матеріалів для різних типів моделей задач. Введемо позначення:

J – індекс матеріалу, $j = 1, ..., p$;

k – індекс виду заготовки, $k = 1, ..., q$;

i – індекс способу розкрою одиниці матеріалу, $i = 1, ..., p$;

a_{ijk} – кількість (ціле число) заготовок виду k, отриманих при розкрої одиниці j-го матеріалу i-м способом;

b_k – число заготовок виду k у комплекті, що постачається замовнику;

d_j – кількість матеріалу j-го виду;

x_{ji} – кількість одиницю j-го матеріалу розкроюємо за i-м способом (інтенсивність використання способу розкрою);

c_{ji} – величина відходів, отриманих при розкрої одиниці j-го матеріалу i-м способом;

y – число комплектів заготовок різного виду, що поставляються замовнику.

Модель А розкрою з мінімальною витратою матеріалів:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \rightarrow min, \tag{9.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}x_{ji} \geq b_k, \qquad k = 1, \dots, q. \tag{9.7}$$

$$x_{ji} \geq 0, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, p. \tag{9.8}$$

Тут (9.9) – цільова функція (мінімум кількості використовуваних матеріалів);

(9.7) – система обмежень, що визначають кількість заготовок, необхідних для виконання замовлення;

(9.8) – умови невід'ємності змінних.

Специфічними для цієї галузі застосування моделі лінійного програмування є обмеження (9.7).

Модель В розкрою з мінімальними відходами:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} c_{ji}x_{ji} \to min, \tag{9.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}x_{ji} = b_k, \qquad k = 1, \dots, q. \tag{9.10}$$

$$x_{ji} \geq 0, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, p. \tag{9.11}$$

Тут (9.9) – цільова функція (мінімум відходів при розкрої матеріалів);

(9.10) – система обмежень, що визначають кількість заготовок, необхідних для виконання замовлення;

(9.11) – умови невід'ємності змінних.

Модель С розкрою з урахуванням комплектації:

$$y \to \max, \tag{9.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_{ji} \leq d_j, j = 1, \dots, n. \tag{9.13}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} a_{jik}x_{ji} \geq b_k y, \qquad k = 1, \dots, q. \tag{9.14}$$

$$y \geq 0, x_{ji} \geq 0, j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, p. \tag{9.15}$$

Тут (9.12) – цільова функція (максимум комплектів, що включають заготовки різних видів);

(9.13) – обмеження за кількістю матеріалів;

(9.14) – система обмежень, що визначають кількість заготовок, необхідних для формування комплектів;

(9.15) – умови невід'ємності змінних.

Розглянемо приклади постановки задач про оптимальний розкрій матеріалів.

Приклад 9.3. Підприємство одержує прут сталевого прокату довжиною l = 800 см.

Треба виготовити деталі трьох (і) різновидів: l_1 = 250 см, a_1 = 150 штук; l_2 = 190 см, a_2 = 140 од.; l_3 = 100 см, a_3 = 48 штук. Скласти раціональний план розкрою вихідного матеріалу (деталей) із найменшими відходами (залишками).

Розв'язання задачі

Позначимо: «x_j» – кількість одиниць (прутків) певного матеріалу, який буде розкроєно за «j» варіантом (способом); a_i – потрібна кількість деталей «i»-го різновиду (l_i – довжини); C_j – залишок при розкрої одиниці певного матеріалу (прутка) за «j»-м способом (варіантом); b_{ij} – кількість деталей «i»-го вигляду, яку одержують при виготовленні з одиниці первинного матеріалу (прутка) за «*j*»-м варіантом (способом).

Побудуємо таблицю можливих варіантів розкрою (див. табл. 9.19).

Цільова функція

$$z = 50x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 50x_6 + 40x_7 + 30x_8 + \\ + 20x_9 + 10x_{10} + 0x_{11} \rightarrow min$$

Обмеження:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \gg 150; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} \gg 140; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_8 + 4x_9 + 6x_{10} + 8x_{11} \gg 48; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,\ldots,11.$$

Таблиця 9.19

Номер способу j	b_{ij}			**Залишок C_j**	**Кількість прибутків за «j»-м способом**
	$l_1 = 250$	$l_2 = 190$	$l_3 = 100$		
1	3	0	0	50	x_1
2	2	1	1	10	x_2
3	2	0	3	0	x_3
4	1	2	1	70	x_4
5	1	1	3	60	x_5
6	1	0	5	50	x_6
7	0	4	0	40	x_7
8	0	3	2	30	x_8
9	0	2	4	20	x_9
10	0	1	6	10	x_{10}
11	0	0	8	0	x_{11}
Потрібна кількість деталей a_i	150	140	48	–	–
	i = 1	i = 2	i = 3		

Приклад 9.4. Із листків розміром 6×13 необхідно виготовити 800 деталей розміром 4×5 і 400 деталей розміром 2×3.

Скласти модель оптимізації розкрою матеріалу за:

а) min сумарних відходів;

б) min кількості використаних листків.

На першому етапі наведемо можливі варіанти розкрою матеріалу (рис. 9.3):

Складемо таблицю, що характеризує кожний з одержаних результатів (табл. 9.19).

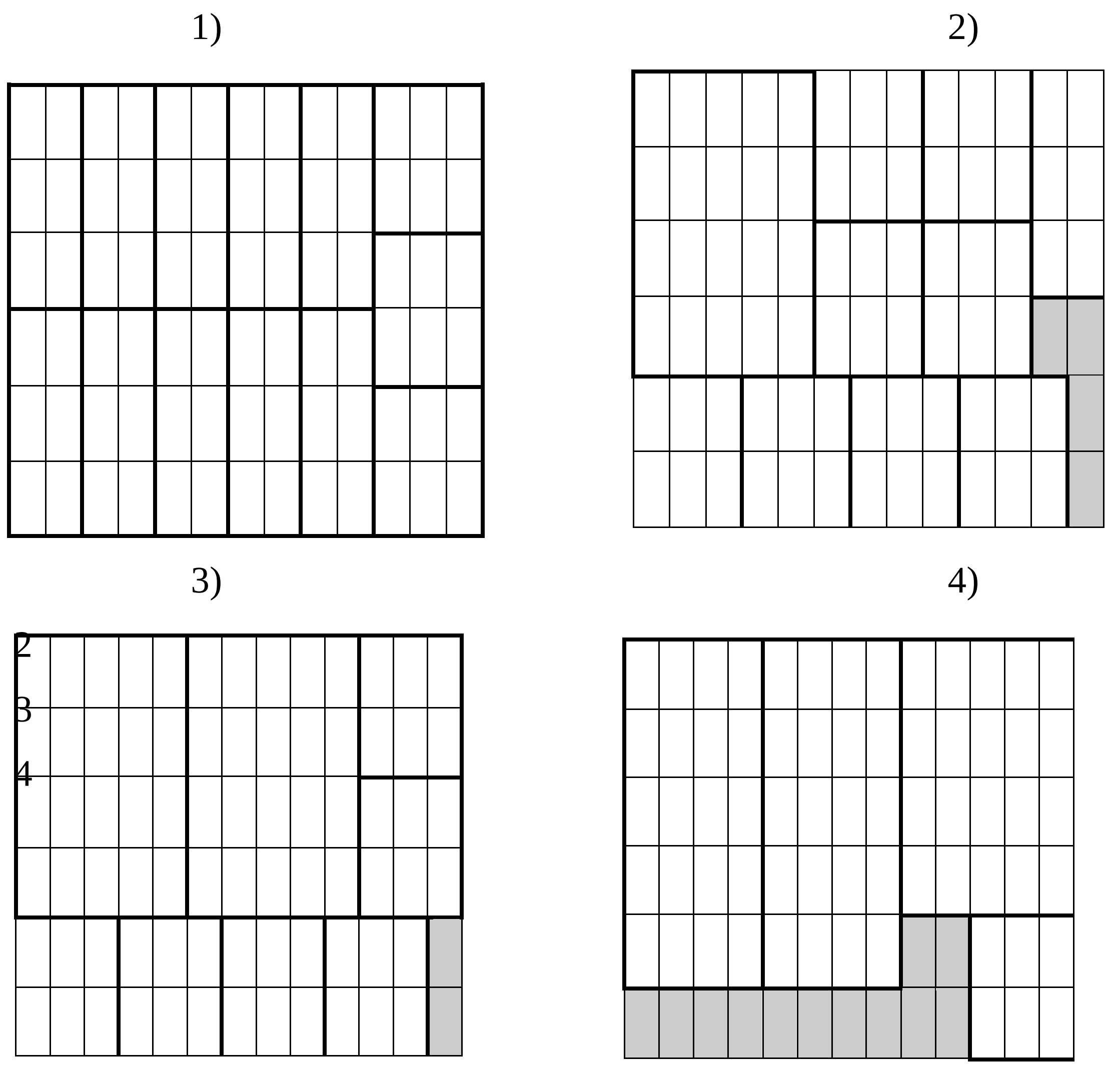


Рисунок 9.19 – Варіанти розкрою матеріалу:
– жирним контуром позначено межі деталей,
– сірим кольором позначено залишки матеріалу

Таблиця 9.20

Номер варіанта	**Кількість деталей**		**Відходи**
	4×5	2×3	
1	0	13	0
2	1	9	4
3	2	6	2
4	3	1	2
Кількість деталей	800	400	

На другому етапі складемо математичну модель задачі.

1. Задача оптимізації за мінімумом сумарних відходів

Для складання математичної моделі введемо змінні x_1, x_2, x_3, x_4. Кожна з них відповідає кількості листків розміром 6×13, які повинні розрізатися відповідним способом (1, 2, 3, 4). У цьому випадку функція мети, що визначає мінімум відходів при відповідному розкрої, має вигляд

$$F = 4x_2 + 2x_3 + 12x_4 \to \min;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 800; \\ 13x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 400; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4};$$

$$x_j => \text{цілі}; \quad j = \overline{1,4}.$$

2. Задача оптимізації за мінімумом числа використаних листків

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 \geq 800; \\ 13x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 \geq 400; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4};$$

$$x_j => \text{цілі}; \quad j = \overline{1,4}.$$

Задачі оптимізації за мінімумом сумарних відходів та числом використаних листків є задачами лінійного програмування і можуть бути розв’язані графічним або симплексним методом.

9.4. Задача комівояжера

Задача комівояжера має широке прикладне застосування у транспортних системах, автоматизованому проектуванні, тестуванні та виготовленні інтегрованих схем, виробництві друкованих плат, лазерній нарізці пластмас і металів, дослідженні структури білка, технологіях вишивання, зварювання та малювання неперервною лінією та інших галузях.

Вона формулюється таким чином: комівояжер повинен відвідати ряд міст, відстані між якими відомі. Комівояжер вибирає найкоротший замкнений маршрут, що починається й закінчується у місті його проживання, при цьому він повинен відвідати необхідне місто один і лише один раз.

9.4.1. Математична постановка задачі комівояжера

Розглянемо постановку задачі комівояжера на прикладі транспортної системи. Транспортна мережа налічує *(n + 1)* пункт. Відомі відстані між пунктами c_{ij}, $i,\ j = 0, n$. Виїжджаючи з початкового пункту (йому приписується номер 0), комівояжер повинен побувати в усіх інших пунктах лише один раз і повернутися в пункт 0. Задача комівояжера знаходить відповідь на питання: в якому порядку потрібно об'їжджати пункти, щоб пройдена сумарна відстань була мінімальною?

Задачу комівояжера можна сформулювати як задачу цілочислового лінійного програмування. Введемо змінні $x_{ij}, i = \overline{0,n}, j = \overline{0,n}; i \neq j$, що мають такий зміст:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо комівояжер після пункту } i \text{ потрапляє в пункт } j, \\ 0, \text{ у протилежному } \textbf{разі.} \end{cases}$$

Також введемо змінні $u_i, u_j\ (i, j = \overline{1,n})$, що дозволять сформулювати умову зв'язності маршруту комівояжера: виключити розпадання маршруту на підцикли. Тоді математична модель задачі набирає вигляду:

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}, \tag{9.16}$$

$$\Omega: \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} \to 1, i = \overline{0,n}, \tag{9.17}$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} \to 1, j = \overline{0,n}, \tag{9.18}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \le n - 1, i, j = \overline{1..n}, \tag{9.19}$$

$$u_i, u_j = \text{int}, j, i = \overline{1..n}. \tag{9.20}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \le 1, i, j = \overline{0..n}, i \neq j. \tag{9.21}$$

Формула (9.16) визначає цільову функцію як сумарну довжину маршруту комівояжера. В умові (9.17) зазначено, що комівояжер в'їжджає у кожний пункт лише один раз, умова (9.18) – що комівояжер виїжджає з кожного пункту лише один раз. Обмеження (9.19) вимагає, щоб будь-який маршрут комівояжера складався з одного циклу. Система рівностей (9.20) обмежує область допустимих значень додаткових змінних цілими числами (додатними чи від'ємними). Останнє обмеження (9.21) виключає повернення комівояжера до пункту, в якому він уже побував.

Розглянемо математичну постановку задачі комівояжера на прикладі.

Комівояжеру потрібно об’їхати п’ять пунктів. Виїжджаючи з пункту 0, комівояжер повинен побувати у всіх інших пунктах лише один раз та повернутися до пункту 0.

Необхідно з’ясувати, в якому порядку треба об'їжджати пункти, щоб пройдена сумарна відстань була мінімальною. Відстані між пунктами задані у вигляді матриці:

$$C=[c_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 12 & 4 & 9 & 10 \\ 12 & 0 & 11 & 6 & 8 \\ 4 & 11 & 0 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 13 & 0 & 7 \\ 10 & 8 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Постановка даної задачі з використанням формул (9.16) – (9.21) така.

Цільова функція:

$$y=12x_{01}+4x_{02}+9x_{03}+10x_{04}+12x_{10}+11x_{12}+6x_{13}+8x_{14}+4x_{20}+11x_{21}+$$
$$+13x_{23}+5x_{24}+9x_{30}+6x_{31}+13x_{32}+7x_{34}+10x_{40}+8x_{41}+5x_{42}+7x_{43}\to \min_{x_{ij}\subset\Omega}.$$

При обмеженнях:

$$\Omega:\quad f_0=x_{01}+x_{02}+x_{03}+x_{04}=1$$
$$f_1=x_{10}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$
$$f_2=x_{20}+x_{21}+x_{23}+x_{24}=1$$
$$f_3=x_{30}+x_{31}+x_{32}+x_{34}=1$$
$$f_4=x_{40}+x_{41}+x_{42}+x_{43}=1$$
$$f_5=x_{10}+x_{20}+x_{30}+x_{40}=1$$
$$f_6=x_{01}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1$$
$$f_7=x_{02}+x_{12}+x_{32}+x_{42}=1$$
$$f_8=x_{03}+x_{13}+x_{23}+x_{43}=1$$
$$f_9=x_{04}+x_{14}+x_{24}+x_{34}=1$$
$$u_i-u_j+4x_{ij}\le 3, i,j=\overline{1,4}, i\ne j$$
$$u_i,u_j=\text{int}, j,i=\overline{1,4}$$
$$x_{ij}+x_{ji}\le 1, i,j=\overline{0..4}, i\ne j.$$

9.4.2. Розв’язання задачі комівояжера методом гілок і меж

Розглянемо повний симетричний орієнтований граф *(X,U)*, де *X={0,1,…,n}* – множина вершин; *U* – множина дуг. Кожній дузі *(i, j)* графа приписане число σ_{ij} довжини дуги. Потрібно знайти контур, що проходить через кожну вершину лише один раз (гамільтоновий контур), який має найменшу довжину. Під довжиною контура розуміємо величину, що дорівнює сумі довжин дуг σ_{ij}. Це і буде маршрут комівояжера.

Спочатку для безлічі всіх гамільтонових контурів R визначається деяка оцінка знизу (нижня межа) $\varphi_{(R)}$ довжини контура. Потім безліч усіх гамільтонових контурів розбивається на дві підмножини. Перша підмножина складається з гамільтонових контурів, які включають певну дугу *(i, j)*. Позначимо цю множину {(i, j)}. Друга множина складається з гамільтонових контурів, які не включають цю дугу. Позначимо її $\overline{(\{(i, j)\})}$. Для кожної з підмножин {(i, j)} і $\overline{(\{(i, j)\})}$ визначається нижня межа довжини гамільтонових контурів $\varphi_{(i,j)}$ і $\varphi_{\overline{(i,j)}}$. Кожна нова межа виявляється не меншою від нижньої межі всієї множини гамільтонових контурів $\varphi_{(R)}$.

Серед двох підмножин контурів {(i, j)} і $\overline{(\{(i, j)\})}$ вибирається підмножина з меншою нижньою межею. Ця підмножина знову розбивається на дві підмножини. Для новостворених підмножин знаходиться нижня межа. Процес розбиття підмножин аналогічним чином продовжується до того часу, поки не буде виділено підмножину, що містить єдиний гамільтонів контур. Взаємозв'язок підмножин, одержаних у результаті розбиття, зображується у вигляді дерева, вершинам якого приписуються нижні межі.

Одержавши гамільтонів контур, переглядають обірвані гілки дерева і порівнюють нижні межі множин, що відповідають обірваним гілкам, із довжиною одержаного гамільтонового контура (рекорду). Якщо нижні межі підмножин, що відповідають обірваним гілкам, виявляться меншими від рекорду, то ці гілки розвивають за тим самим правилом. У результаті розвитку гілок можуть бути одержані нові гамільтонові контури. У цьому разі рекорд береться таким, що дорівнює найменшій із довжин гамільтонових контурів. Розв’язання задачі вважається закінченим, якщо нижні межі названих гілок виявляються не меншими від рекорду. Як оптимальний контур вибирається контур із найменшою довжиною.

Розрахунок нижніх меж ґрунтується на такій властивості. Якщо знайти довжину оптимального контура з матрицею відстаней А, а потім з елементів деякого рядка або стовпця матриці А відняти деяке число *a* і знову розв’язати задачу з новою матрицею, то контур не зміниться, а довжина його зменшиться на це число *a*. Зміна всіх елементів рядка або стовпця на одне й те саме число не впливає на оптимальне розв’язання задачі. Якщо операцію віднімання пробити й для інших рядків та стовпців, то довжина оптимального контура зі зміненою матрицею буде відрізнятися від довжини оптимального контура з вихідною матрицею на суму чисел, що віднімаються від елементів рядків і стовпців.

Тому для визначення нижньої межі множини всіх гамільтонових контурів необхідно в кожному рядку матриці А знайти

$$\alpha_{\mathbf{i}} = \min_{1 \le i \le n} \{a_{ij}\}.$$

Потім необхідно відняти це значення від усіх елементів цього рядка (операція зведення матриці відстаней по рядках). У результаті зведення матриці в кожному її рядку буде принаймні по одному нулю (одержана матриця A*). Потім у матриці, зведеній по рядках, знаходимо найменший елемент

$$\beta_j = \min_{1 \le j \le n} \{a^*_{ij}\}$$

в кожному стовпці матриці A* (операція зведення матриці відстаней за стовпцями), α_i, β_j – константи зведення. Повністю зведена матриця містить, принаймні, по одному нулю в кожному рядку і кожному стовпці.

Оскільки довжина оптимального контура L_1 в задачі з повністю зведеною матрицею відрізняється від довжини оптимального контура L в задачі з незведеною матрицею на суму констант зведення

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j ,$$

то $L = L_1 + \gamma$.

У повністю зведеній матриці всі елементи невід'ємні, тому $L_1 > 0$, а γ можна вибрати як нижню межу гамільтонового контура, тобто припустити, що $\varphi_{(R)} = \gamma$.

Розглянемо спосіб вибору дуги *(i, j)*, включення або невключення якої в контур розбиває безліч гамільтонових контурів на підмножини {(i, j)} та $\left(\overline{\{(i, j)\}}\right)$. Виключення дуги *(i, j)* з гамільтонова контура здійснюється заміною відповідного елемента матриці відстаней на ∞. У результаті виключення з'являється можливість виконати додаткове зведення в матриці і покращити межу.

Включення дуги *(i, j)* в гамільтонів контур дозволяє скоротити розмір матриці за рахунок викреслювання i-го рядка та j-го стовпця. Крім того, при включенні дуги *(i, j)* в гамільтонів контур з'являється можливість утворення негамільтонового контура, тобто контура, що проходить через частину вершин. Тому з метою запобігання утворенню такого контура необхідно виключити з розгляду одну з дуг. У найпростішому випадку при включенні дуги *(i, j)* у гамільтонів контур необхідно виключити з розгляду дугу *(j, i)*. Після цієї операції потрібно виконати операцію додаткового зведення матриці і покращити нижню межу.

Найбільш імовірно, що в оптимальний контур увійдуть дуги, яким у наведеній матриці відповідають нульові елементи. Тому вибір необхідно здійснювати так. У зведеній матриці елемент $\alpha_{ij} = 0$ умовно замінюють на ∞. Цим самим дуга *(i, j)* буде виключатися з гамільтонового контура.

Щоб визначити суму констант зведення одержаної матриці, необхідно скласти найменший елемент α_i i-го рядка з мінімальним елементом β_j j-го стовпця, оскільки решта рядків і стовпців містять принаймні по одному нульовому елементу. Позначимо суму констант зведення матриці з виключеною дугою *(i, j)* через

$$\gamma_{(\overline{i,j})} = \alpha_i + \beta_j.$$

Аналогічний розрахунок проводиться для всіх інших нульових елементів наведеної матриці, умовно замінюючи їх на ∞.

Насамперед будемо виключати з контура ту дугу *(i, j),* для якої сума констант зведення $\gamma_{(\overline{i,j})}$ є найбільшою, оскільки в цьому разі відбудеться найбільш різке змінювання оцінки.

Алгоритм розв'язування задачі комівояжера методом гілок і меж:

1. Звести матрицю відстаней по рядках і стовпцях. Знайти нижню межу всіх гамільтонових контурів:
$$\varphi_{(R)} = \gamma = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j.$$
2. Кожен нуль у зведеній матриці умовно замінити на ∞ і знайти суму констант зведення $\gamma_{(\overline{i,j})} = \alpha_i + \beta_j$. Значення $\gamma_{(\overline{i,j})}$ записати у відповідних рядках і стовпцях зведеної матриці поряд із нулями.
3. Виключити ту дугу *(i, j),* для якої сума констант зведення $\gamma_{(\overline{i,j})}$ є найбільшою (виняток дуги *(i, j)* досягається заміною відповідного елемента матриці на ∞). У результаті буде утворена підмножина гамільтонових контурів $\overline{(\{(i,j)\})}$.
4. Звести одержану матрицю відстаней і визначити нижню межу $\varphi_{(\overline{i,j})}$ підмножини контурів $\overline{(\{(i,j)\})}$.
5. Включити дугу *(i, j)* в контур, що зведений до виключення з матриці, одержаної після виконання п. 2, *i*-го рядка і *j*-го стовпця. Замінити один з елементів одержаної матриці на ∞ для запобігання утворенню негамільтонового контура.
6. Привести отриману матрицю відстаней і визначити нижню межу $\varphi_{(i,j)}$ підмножини контурів {(i, j)}.
7. Перевірити розмірність скороченої матриці. Якщо скорочена матриця має розмірність 2×2, то перейти до п. 9.
8. Порівняти нижні межі підмножин контурів $\varphi_{(\overline{i,j})}$ і $\varphi_{(i,j)}$ і перейти до кроку 2. Якщо при цьому $\varphi_{(\overline{i,j})} < \varphi_{(i,j)}$, то розбиттю підлягає підмножина $\{(\overline{i,j})\}$, в іншому випадку – підмножина {(i, j)}.
9. Визначити гамільтонів контур і його довжину.
10. Порівняти довжину одержаного контура з нижніми межами обірваних гілок. Якщо довжина контура не перевищує нижніх меж обірваних гілок дерева розв'язків, то одержано оптимальний гамільтонів контур. Якщо довжина одержаного гамільтонового контура більша від межі деяких гілок, то, діючи за алгоритмом, розвиваємо ці гілки до того часу, поки не одержимо контур із меншою довжиною або переконаємося, що такого не існує.

Приклад розв'язування задачі комівояжера методом гілок і меж.

Дано матрицю відстаней між дорогами, що з’єднують міста, які повинен відвідати комівояжер (табл. 9.21):

Таблиця 9.21

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	M	18	12	7	13	9
2	22	M	18	11	19	15
3	19	8	M	15	17	10
4	22	14	18	M	15	17
5	11	10	21	9	M	19
6	18	12	15	10	14	M

Відстань від міста до того самого міста позначено літерою М. Також можна використовувати знак безкінечності. Це зроблено для того, щоб цей відрізок було умовно прийнято за нескінченно довгий. Тоді не буде сенсу обрати рух від міста до того самого міста як відрізок маршруту.

Виконаємо зведення матриці по рядках. У кожному рядку знаходимо мінімальне значення d_i і виписуємо його в окремий стовпець.

Таблиця 9.22

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**d_i**
1	M	18	12	7	13	9	7
2	22	M	18	11	19	15	11
3	19	8	M	15	17	10	8
4	22	14	18	M	15	17	14
5	11	10	21	9	M	19	9
6	18	12	15	10	14	M	10

Проводимо редукцію рядків – від кожного елемента в рядку віднімаємо відповідне значення знайденого мінімуму d_i. У результаті в кожному рядку буде як мінімум одна нульова клітинка.

Таблиця 9.23

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**d_i**
1	M	11	5	0	6	2	7
2	11	M	7	0	8	4	11
3	11	0	M	7	9	2	8
4	8	0	4	M	1	3	14
5	2	1	12	0	M	10	9
6	8	2	5	0	4	M	10

Далі в кожному стовпці знаходимо мінімальне значення d_j. Виписуємо знайдені значення в окремий рядок.

Таблиця 9.24

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\mathbf{d_i}$
1	M	11	5	0	6	2	7
2	11	M	7	0	8	4	11
3	11	0	M	7	9	2	8
4	8	0	4	M	1	3	14
5	2	1	12	0	M	10	9
6	8	2	5	0	4	M	10
$\mathbf{d_j}$	2	0	4	0	1	2	

Проводимо редукцію стовпців – віднімаємо від кожного елемента матриці відповідне йому значення d_j. У результаті в кожному стовпці теж буде як мінімум одна нульова клітинка.

Таблиця 9.25

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\mathbf{d_i}$
1	M	11	1	0	5	0	7
2	9	M	3	0	7	2	11
3	9	0	M	7	8	0	8
4	6	0	0	M	0	1	14
5	0	1	8	0	M	8	9
6	6	2	1	0	3	M	10
$\mathbf{d_j}$	2	0	4	0	1	2	

Обчислюємо оцінки нульових клітинок. Для цього для кожної нульової клітинки одержаної матриці знаходимо оцінку. Нею буде сума мінімального елемента у рядку та мінімального елемента у стовпці, в яких розміщено цю нульову клітинку. Сама вона при цьому не враховується. Одержану оцінку запишемо поряд із нулем у дужках.

Таблиця 9.26

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	M	11	1	0(0)	M	0(0)
2	9	M	3	0(2)	7	2
3	9	0(0)	M	7	8	0(0)
4	6	0(0)	0(1)	M	0(3)	1
5	0(6)	1	8	0(0)	M	8
6	6	2	1	0(1)	3	M

Далі проводимо редукцію всієї матриці. Обираємо нульову клітинку з найбільшою оцінкою. Замінимо її на М. Ми знайшли один із відрізків шляху. Випишемо відрізок шляху від 5 до 1.

Таблиця 9.27

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	М	11	1	0(0)	М	0(0)
2	9	М	3	0(2)	7	2
3	9	0(0)	М	7	8	0(0)
4	6	0(0)	0(1)	М	0(3)	1
5	М	1	8	0(0)	М	8
6	6	2	1	0(1)	3	М

Той рядок і той стовпець, де утворилися дві «М», повністю викреслюємо. У клітинку, яка відповідає шляху назад, теж ставимо «М», оскільки повертатися назад не будемо. Повний шлях не знайдено. Проведемо редукцію скороченої матриці.

Таблиця 9.28

	2	**3**	**4**	**5**	**6**
1	11	1	0(0)	М	0(0)
2	М	3	0(2)	7	2
3	0(0)	М	7	8	0(0)
4	0(0)	0(1)	М	0(3)	1
6	2	1	0(1)	3	М

Перераховуємо оцінки нульових клітинок скороченої матриці. Випишемо наступний відрізок шляху від 4 до 5. Викреслимо четвертий рядок і п’ятий стовцець. Повний шлях не знайдено. Проведемо редукцію скороченої матриці.

Таблиця 9.29

	2	**3**	**4**	**6**
1	11	1	0(0)	0(0)
2	М	3	0(2)	2
3	0(2)	М	7	0(0)
6	2	1	0(1)	М

Перераховуємо оцінки нульових клітинок скороченої матриці. Випишемо наступний відрізок шляху від 3 до 2. Викреслимо третій рядок і другий стовцець. Повний шлях не знайдено. Проведемо редукцію скороченої матриці.

Таблиця 9.30

	3	**4**	**6**
1	1	0(0)	0(2)
2	M	0(2)	2
6	1	0(1)	M

Перераховуємо оцінки нульових клітинок скороченої матриці. Випишемо наступний відрізок шляху від 2 до 4. Викреслимо другий рядок і четвертий стовцець. Повний шлях не знайдено. Проведемо редукцію скороченої матриці.

Таблиця 9.31

	3	**6**
1	1	0(1)
6	1	M

Перераховуємо оцінки нульових клітинок скороченої матриці. Випишемо наступний відрізок шляху від 1 до 6. Викреслимо перший рядок і шостий стовпець. Повний шлях знайдено. Останній відрізок шляху буде від 6 до 3.

Повний шлях (5 – 1)(4 – 5)(3 – 2)(2 – 4)(1 – 6)(6 – 3).

Обчислимо остаточну довжину маршруту. Для цього згідно з одержаним шляхом беремо відповідну відстань із початкової матриці.

L = 11 + 15 + 8 + 11 + 9 + 15 = 69.

9.4.3. Розв’язування задачі комівояжера методом динамічного програмування

Згідно з методом динамічного програмування розв’язування задачі комівояжера починається з останнього етапу. Зафіксуємо M_n – кінцеве місто, куди повинен потрапити комівояжер. При цьому комівояжер може знаходитися в M_1, M_2, M_3, …, M_{n-1} місті.

Стан системи будемо подавати у формі M_i {0}, де A_i – місто, в якому знаходиться комівояжер перед прийняттям рішення; {0} – означає, що між кінцевим і цим містом відсутні проміжні міста.

Кожному стану системи (місцю перебування комівояжера) відповідає певний локальний прибуток, що обчислюється як відстань D_{MiMn} від M_i до M_n міста.

Передостанній етап – комівояжеру потрібно потрапити в кінцеве місто, за умови, коли є одне проміжне місто. Тобто комівояжеру з міста M_i необхідно заїхати в проміжне місто, а звідти – в M_n.

І так далі для всіх етапів доти, поки кількість проміжних міст не буде дорівнювати загальній кількості міст.

Приклад 9. Нехай маємо 4 міста, які описуються такою матрицею відстаней між ними:

$$D = \begin{pmatrix} \infty & 8 & 8 & 5 \\ 9 & \infty & 1 & 6 \\ 11 & 4 & \infty & 4 \\ 6 & 3 & 2 & \infty \end{pmatrix}.$$

Етап 1. Комівояжер повинен потрапити в останнє місто. При цьому він може знаходитися в містах 1, 2, 3. Локальний дохід розраховуємо за формулою

$$W_4\ (M_i\ \{0\}) = D_{MiM4}. \tag{9.22}$$

Для кожного з міст маємо:

$$W_4\ (M_1\ \{0\}) = 5,$$
$$W_4\ (M_2\ \{0\}) = 6,$$
$$W_4\ (M_3\ \{0\}) = 4.$$

Етап 2. Комівояжер повинен потрапити в останнє місто, відвідавши перед цим ще одне місто. Локальний дохід розраховуємо за формулою 9.22.

Для кожного з міст:

$$W_3\ (M_1\ \{M_2\}) = D_{12} + W_4\ (M_2\ \{0\}) = 8 + 6 = 14,$$
$$W_3\ (M_1\ \{M_3\}) = D_{13} + W_4\ (M_3\ \{0\}) = 8 + 4 = 12,$$
$$W_3\ (M_1\ \{A_1\}) = D_{21} + W_4\ (M_1\ \{0\}) = 9 + 5 = 14,$$
$$W_3\ (M_1\ \{A_3\}) = D_{23} + W_4\ (M_3\ \{0\}) = 1 + 4 = 5,$$
$$W_3\ (M_1\ \{A_1\}) = D_{31} + W_4\ (M_1\ \{0\}) = 11 + 5 = 16,$$
$$W_3\ (M_1\ \{A_2\}) = D_{32} + W_4\ (M_2\ \{0\}) = 4 + 6 = 10.$$

Етап 3. Комівояжер повинен потрапити в останнє місто, відвідавши при цьому два проміжних міста. Локальний дохід на цьому етапі визначається:

$$W_2\ (M_1\{M_2M_3\}) = min\ (D_{12} + W_3\ (M_2\ \{M_3\}),$$
$$D_{13} + W_3\ (M_3\ \{M_2\})) = min\ (8+ +16{,}8 + 10) = 18,$$

$$W_2\ (M_1\{M_2M_3\}) = min\ (D_{21} + W_3\ (M_1\ \{M_3\}),$$
$$D_{23} + W_3\ (M_3\ \{M_1\})) = min\ (9+ +12{,}1 + 16) = 17,$$

$$W_2\ (M_3\{M_1M_2\}) = min\ (D_{31} + W_3\ (M_1\ \{M_2\}),$$
$$D_{32} + W_3\ (M_2\ \{M_1\})) = min\ (11+ +14{,}4 + 14) = 18.$$

Етап 4. Комівояжер знаходиться в останньому місті, повинен об'їхати всі міста і повернутися в те саме місто. Локальний дохід визначається таким чином:

$$W_1\ (M_4\{M_1M_2M_3\}) = min\ (D_{41} + W_2\,(M_1\{M_2M_3\}), \qquad D_{42} + W_2\,(M_2\{M_1M_3\}),$$
$$D_{43} + W_2\,(M_3\{M_1M_2\})) = min\ (6 + 13{,}3 + 17{,}2 + 18) = 19.$$

Таким чином, оптимальний маршрут, який пов'язує всі міста, буде W = 4→1→3→2→4, з довжиною шляху 19.

Задачі для самостійного розв'язування

1. У пунктах відправлення A_1, A_2, A_3, ... знаходиться однорідний вантаж у кількості a_1, a_2, a_3, ... відповідно, який необхідно перевезти до пунктів призначення B_1, B_2, B_3, ..., потреба кожного з яких становить b_1, b_2, b_3, ... Відома відстань між пунктами перевезень.

Визначити такий план перевезень, при якому загальна кількість тонно-кілометрів буде мінімальною.

Вхідні дані згідно з варіантом наведено у табл. 9.21.

Необхідно:

1) скласти опорний план задачі різними відомими вам методами;

2) розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, а за опорний план обрати той, що складений методом північно-західного кута.

Таблиця 9.21

Варіант	Відстань між пунктами перевезень, км	Запаси пунктів відправлення, т	Потреба пунктів призначення, т
1	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1 = 6$ $a_2 = 8$ $a_3 = 5$ $a_4 = 6$	$в_1 = 9$ $в_2 = 8$ $в_3 = 4$
2	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 12 & 15 & 39 \\ 45 & 22 & 31 \\ 28 & 16 & 12 \\ 33 & 18 & 35 \end{vmatrix}$	$a_1 = 60$ $a_2 = 85$ $a_3 = 52$ $a_4 = 66$	$в_1 = 92$ $в_2 = 81$ $в_3 = 43$
3	$C_{ij} = \begin{vmatrix} 14 & 15 & 39 \\ 25 & 12 & 31 \\ 27 & 26 & 12 \\ 13 & 18 & 32 \end{vmatrix}$	$a_1 = 26$ $a_2 = 28$ $a_3 = 25$ $a_4 = 26$	$в_1 = 29$ $в_2 = 28$ $в_3 = 34$

2. Для задачі вашого варіанта:

1) скласти опорний план задачі різними відомими вам методами;

2) розв'язати транспортну задачу методом потенціалів; за опорний план обрати той, що складений методом північно-західного кута.

Варіант 1

Постачальник	Споживач	
I – 120	I – 120	$C_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 10 \\ 6 & 12 & 9 \\ 9 & 8 & 12 \\ 10 & 9 & 11 \end{pmatrix}$
II – 200	II – 245	
III – 130	III – 235	
IV – 150		

Варіант 2

Постачальник	**Споживач**
I – 160	I – 80
II – 200	II – 140
III – 140	III – 200
IV – 150	IV – 80
	V – 150

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 25 & 19 & 26 \\ 23 & 24 & 23 & 20 & 28 \\ 29 & 27 & 28 & 15 & 27 \\ 25 & 20 & 17 & 19 & 29 \end{pmatrix}$$

Варіант 3

Постачальник	**Споживач**
I – 5	I – 4
II – 4	II – 9
III – 8	III – 10
IV – 7	

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} 55 & 47 & 48 \\ 54 & 48 & 47 \\ 61 & 53 & 55 \\ 60 & 56 & 52 \end{pmatrix}$$

3. Розв'язати запропоновану задачу угорським методом.

Наведена матриця витрат виконання 7 робітниками певних робіт. Розподілити роботи між робітниками, щоб сумарні витрати на виконання робіт були мінімальними.

Варіант 1

Роботи

Робітники	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	*5*	*17*	*5*	*12*	*11*	*6*	*4*
2	*10*	*9*	*6*	*10*	*12*	*16*	*4*
3	*9*	*3*	*2*	*8*	*13*	*14*	*8*
4	*13*	*1*	*7*	*11*	*7*	*18*	*19*
5	*1*	*7*	*12*	*8*	*3*	*1*	*5*
6	*3*	*11*	*13*	*9*	*14*	*20*	*21*
7	*10*	*2*	*6*	*6*	*15*	*15*	*22*

Варіант 2

Роботи

Робітники	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	*21*	*7*	*2*	*12*	*15*	*2*	*17*
2	*23*	*15*	*24*	*20*	*12*	*5*	*11*
3	*17*	*24*	*4*	*17*	*2*	*22*	*15*
4	*19*	*7*	*8*	*1*	*13*	*14*	*4*
5	*15*	*6*	*6*	*14*	*19*	*3*	*16*
6	*23*	*6*	*5*	*19*	*15*	*11*	*19*
7	*16*	*18*	*22*	*22*	*1*	*1*	*7*

Варіант 3

		Роботи						
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Робітники	**1**	*2*	*4*	*5*	*10*	*4*	*6*	*8*
	2	*3*	*6*	*4*	*13*	*6*	*7*	*9*
	3	*4*	*7*	*10*	*5*	*10*	*4*	*5*
	4	*6*	*5*	*12*	*4*	*7*	*5*	*4*
	5	*7*	*4*	*13*	*6*	*6*	*7*	*5*
	6	*10*	*8*	*5*	*2*	*8*	*9*	*10*
	7	*11*	*9*	*4*	*8*	*4*	*5*	*4*

4. Нехай у попередньому прикладі маємо ще одного, восьмого, робітника, який може виконати будь-який вид робіт вартістю відповідно 10, 13, 15, 11, 8, 7, 9 грош. од. Чи буде економічно вигідним замінити ним одного з працівників?

5. Нехай у задачі 3 маємо ще одну роботу, яку може виконати будь-який робітник. Вартість виконання цієї роботи кожним із них відповідно 9, 13, 11, 8, 3, 15, 11 грош. од. Чи є нова робота більш вигідною порівняно з іншими роботами?

Питання для самоперевірки

1. Наведіть словесну постановку транспортної задачі.
2. Наведіть математичну постановку транспортної задачі.
3. Який план транспортної задачі називається оптимальним?
4. Яка умова закритості транспортної задачі?
5. Які транспортні задачі називають відкритими?
6. Яким чином можна від відкритої транспортної задачі перейти до закритої?
7. Яким обирається тариф перевезення від фіктивного постачальника?
8. Чому дорівнюють запаси фіктивного постачальника?
9. Чому дорівнюють потреби фіктивного споживача?
10. Сформулюйте сутність методів побудови опорного плану транспортної задачі.
11. Сформулюйте алгоритм методу північно-західного кута.
12. Сформулюйте алгоритм методу найменшої вартості.
13. Сформулюйте алгоритм методу подвійної переваги.
14. Дайте визначення потенціалу.
15. Сформулюйте критерій оптимальності складеного плану транспортної задачі, якщо вона розв'язується за методом потенціалів.
16. Наведіть словесне формулювання постановки задачі про призначення.
17. Наведіть математичну постановку задачі про призначення.
18. У якому випадку в модель уводять фіктивного працівника?
19. У якому випадку в модель уводять фіктивну роботу?
20. Яких значень можуть набувати змінні задачі про призначення?
21. До якого типу задач належить задача про призначення?

22. Сформулюйте основні кроки алгоритму угорського методу.
23. Сформулюйте додаткові кроки алгоритму угорського методу.
24. Як визначають оптимальний розв'язок задачі про призначення?
25. Яким чином може бути сформульовано критерій оптимальності у задачі про призначення?
26. З яких етапів складається алгоритм розв'язання задачі про призначення методом гілок і меж?
27. Наведіть словесне формулювання постановки задачі про розкрій матеріалу.
28. Який спосіб розкрою матеріалу називають раціональним?
29. Наведіть математичну постановку задачі про розкрій із мінімальною витратою матеріалів.
30. Наведіть математичну постановку задачі про розкрій із мінімальними відходами при розкрої матеріалів.
31. Наведіть математичну постановку задачі про розкрій з урахуванням комплектації.
32. У чому полягає суть задачі комівояжера?
33. Наведіть математичну постановку задачі комівояжера.
34. З яких етапів складається алгоритм розв'язування задачі комівояжера методом гілок і меж?
35. З яких етапів складається алгоритм розв'язування задачі комівояжера методом динамічного програмування?

РОЗДІЛ 10
РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ЗАСОБАМИ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА EXCEL

10.1. Призначення надбудови Microsoft Excel Поиск решения

Поиск решения – це надбудова Microsoft Excel, що дозволяє розв’язувати задачі дослідження операцій. Фактично ***Поиск решения*** є одним із досить складних засобів Excel, тому потребує уваги і певних зусиль щодо опанування ним.

Після відповідної підготовки робочого аркуша можна використовувати процедуру пошуку рішення для підбору значень у змінюваних клітинках і одержання у цільовій клітинці потрібного результату, який задовольнить усі задані обмеження.

Надбудова Microsoft Excel ***Поиск решения***, починаючи з версії Microsoft Office Excel 2010, викликається за допомогою вкладки *ДАННЫЕ* стрічки головного меню. Зовнішній вигляд вікна ***Поиск решения*** подано на рис. 10.1, а в табл. 10.1 наведено характеристики основних його елементів.

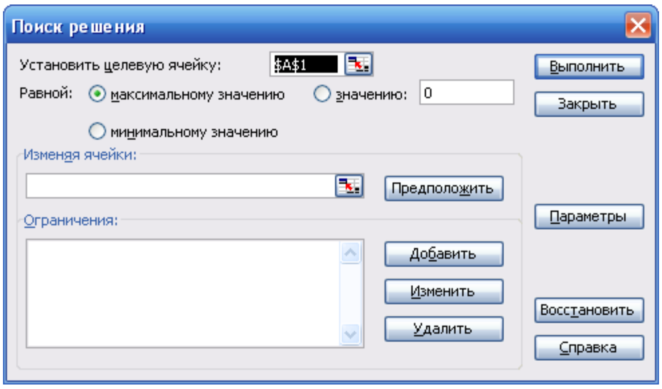


Рисунок 10.1 – Діалогове вікно надбудови ***Поиск решения***

Таблиця 10.1

Назва елемента	**Призначення елемента**
Поле ***Установить целевую ячейку***	Використовується для встановлення посилання на клітинку, у якій записана формула з розрахунком значення цільової функції оптимізаційної задачі
Перемикачі у групі ***Равной:*** – ***максимальному значению;*** – ***минимальному значению;*** – ***значению***	Визначають характер оптимізаційної задачі. Знаходження розв’язку з максимальним значенням цільової функції; знаходження розв’язку з мінімальним значенням цільової функції; знаходження розв’язку, за якого цільова функція набуває деякого фіксованого значення, що вписується у чисте поле справа від перемикача

Продовження таблиці 10.1

Назва елемента	Призначення елемента
Поле ***Изменяя ячейки***	Призначено для фіксування адрес клітинок, які повинні змінюватися у процесі розв'язання задачі; саме у цих клітинках знаходяться змінні оптимізаційної задачі
Багаторядкове поле ***Ограничения***	Відображає обмеження оптимізаційної задачі; для введення обмежень використовують додаткове вікно ***Добавление ограничения*** (рис. 10.2, табл. 10.2)
Кнопка ***Предположить***	Призначена для автоматичного заповнення поля ***Изменяя ячейки*** адресами тих клітинок, які вписані у формулу обчислення значення цільової функції
Кнопка ***Добавить***	Викликає додаткове вікно ***Добавление ограничения*** (рис. 10.2)
Кнопка ***Изменить***	Викликає додаткове вікно ***Добавление ограничения***, у якому буде відображено обмеження, що попередньо виділено у багаторядковому полі ***Ограничения***
Кнопка ***Удалить***	Видаляє обмеження, що попередньо виділено у багаторядковому полі ***Ограничения***
Кнопка ***Выполнить***	Запускає процес знаходження оптимального розв'язку після специфікації усіх параметрів ***Поиска решений***
Кнопка ***Закрыть***	Закриває діалогове вікно ***Поиск решения***
Кнопка ***Параметры***	Викликає додаткове вікно ***Параметры поиска решения*** (рис. 10.3) для специфікації додаткових параметрів пошуку рішення, частина яких вже введена за замовчуванням
Кнопка ***Восстановить***	Видаляє значення полів даного діалогового вікна і встановлює їх значення за замовчуванням
Кнопка ***Справка***	Надає довідкову інформацію про елементи діалогового вікна ***Поиск решения***

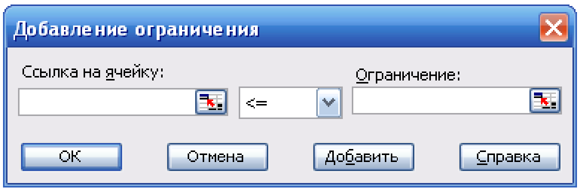


Рисунок 10.2 – Діалогове вікно ***Добавление ограничения***

Характеристику елементів діалогового вікна ***Добавление ограничения*** наведено у табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Назва елемента	**Призначення елемента**
Поле ***Ссылка на ячейку***	Використовується для встановлення посилання на клітинку або діапазон клітинок, у яких записані формули для розрахунку лівих частин обмежень
Випадний список у центрі вікна	Містить перелік можливих знаків обмежень, а також можливість специфікації вимог цілочисловості або двоїстості значень змінних
Поле ***Ограничение***	Призначено для зазначення клітинки, діапазону клітинок або конкретного числа, що задають праву частину обмежень
Кнопка ***Ок***	Додає обмеження до параметрів пошуку рішення і закриває вікно ***добавление ограничения***
Кнопка ***Отмена***	Закриває вікно ***добавление ограничения*** без додавання обмеження до параметрів пошуку рішення
Кнопка ***Добавить***	Додає обмеження до параметрів пошуку рішення без закриття вікна ***добавление ограничения***
Кнопка ***Справка***	Надає довідкову інформацію про елементи діалогового вікна ***добавление ограничения***

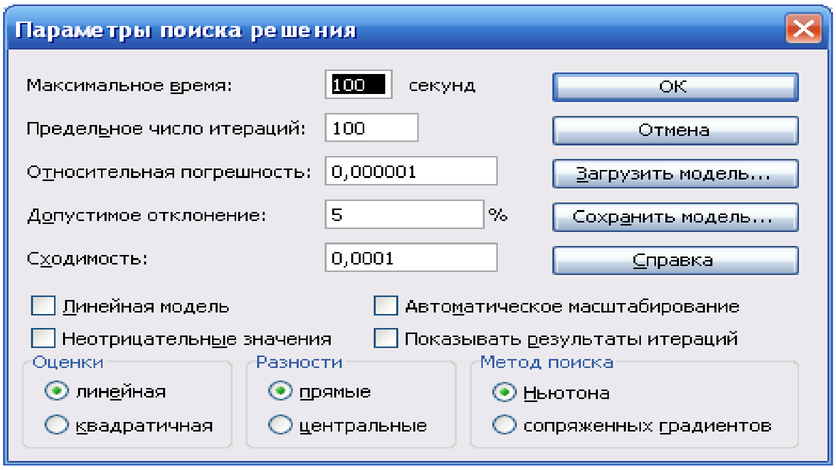


Рисунок 10.3 – Діалогове вікно ***Параметры поиска решения***

Характеристику елементів діалогового вікна ***Параметры поиска решения*** наведено у табл. 10.3.

Таблиця 10.3

Назва елемента	Призначення елемента
Поле ***Максимальное время***	Використовується для обмеження часу, що відводиться на розв'язування задачі; час вводиться у секундах (не більше ніж 32 767); за замовчуванням поле містить значення *100*
Поле ***Предельное число итераций***	Обмежує час розв'язування задачі через завдання максимально можливої кількості проміжних обчислень; за замовченням поле містить значення *100*
Поле ***Относительная погрешность***	Задає точність, з якою буде виконуватись пошук рішення
Поле ***Допустимое отклонение***	Задає точність, з якою буде виконуватись пошук рішення
Прапорець ***Линейная модель***	Дозволяє прискорити пошук рішення оптимізаційної лінійної задачі; під час розв'язування задач нелінійної оптимізації цей прапорець повинен бути відключений, а для задач лінійної оптимізації – обов'язково включений; недотримання цих вимог може призвести до одержання хибного результату
Прапорець ***Показывать результаты итераций***	Призупиняє пошук рішення для перегляду результатів окремих ітерацій
Прапорець ***Автоматическое масштабирование***	Вмикає і вимикає автоматичну нормалізацію вхідних і вихідних значень, що якісно різняться за величиною, наприклад, максимізація прибутку у відсотках щодо витрат, які обчислюються у грош. од.
Прапорець ***Неотрицательные значения***	Дозволяє установити нижню нульову межу для тих клітинок, для яких вона не була зазначена у полі ***ограничение*** діалогового вікна ***добавить ограничение***
Параметри групи ***Разности*** Перемикач ***Прямые*** Перемикач ***Центральные***	Задають метод чисельного диференціювання (прямі або центральні похідні), який використовується для обчислення частинних похідних цільової функції та функцій обмежень. Використовується у більшості задач, у яких швидкість зміни обмежень відносно мала. Використовується для функцій, що мають розривну похідну
Параметри групи ***Оценки*** Перемикач ***Линейная*** Перемикач ***Квадратичная***	Призначені для вибору методу екстраполяції (лінійна або квадратична), який використовується для одержання вихідних оцінок значень змінних при кожному одновимірному пошуку. Підключає лінійну екстраполяцію вздовж дотичного вектора, що дає найкращий результат під час розв'язування лінійних задач Підключає квадратичну екстраполяцію вздовж дотичного вектора, що дає найкращий результат під час розв'язування нелінійних задач

Продовження таблиці 10.3

Назва елемента	Призначення елемента
Параметри групи ***Метод поиска***	Дозволяють вибрати алгоритм оптимізації (метод ньютона або метод спряжених градієнтів) для задання напрямку пошуку.
Перемикач ***Ньютона***	Задає квазіньютонівський метод для знаходження розв'язку задачі, що вимагає більшої пам'яті, але виконується за меншу кількість ітерацій, ніж метод спряжених градієнтів.
Перемикач ***Сопряженных градиентов***	Задає метод спряжених градієнтів для знаходження розв'язку задачі, що вимагає меншої пам'яті, але виконується за більшу кількість ітерацій, ніж квазіньютонівський метод
Кнопка ***ОК***	Додає додаткові параметри і закриває вікно ***Параметры поиска решения***
Кнопка ***Отмена***	Закриває вікно ***Параметры поиска решения*** без зміни додаткових параметрів пошуку рішення
Кнопка ***Загрузить модель***	Викликає діалогове вікно ***Загрузить модель***, в якому можна задати посилання на клітинки, що містять необхідну для завантаження модель
Кнопка ***Сохранить модель***	Викликає діалогове вікно ***Сохранить модель***, в якому можна задати посилання на клітинки, призначені для збереження моделі оптимізації; цей варіант передбачено для зберігання на робочому аркуші більше однієї моделі, причому перша модель зберігається автоматично
Кнопка ***Справка***	Надає довідкову інформацію про елементи діалогового вікна ***Параметры поиска решения***

10.2. Розв'язування задач лінійного програмування

Алгоритм розв'язування задач лінійного програмування засобами табличного процесора Excel розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 10.1. Засобами табличного процесора Excel розв'язати задачу прикладу 1.1.

Розв'язання

Пригадаємо математичну модель цієї задачі:

$$F = 16x_1 + 6x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 180, \\ 4x_1 + x_2 \le 240, \\ 6x_1 + 7x_2 \le 426, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Алгоритм розв’язування задач лінійного програмування засобами табличного процесора Excel:

1. Вводять умову задачі:

1.1. Створюють форму для введення умов задачі (рис. 7.4).

Примітка. Під заголовком таблиці і перед колонкою «Тип обмеження» залишають відповідно порожній рядок і порожній стовпчик

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	№ пор.	Обмеження	x1	x2		Тип обмеження	Розмір обмеження
3							
4	1						
5	2						
6	3						
7	F						

Рисунок 10.4 – Форма для введення умов задачі

1.2. Вводять вхідні дані (рис. 10.5):

A	B	C	D	E	F	G
№ пор.	Обмеження	x1	x2		Тип обмеження	Розмір обмеження
1	Витрати корму 1-го виду	2	3		<=	180
2	Витрати корму 1-го виду	4	1		<=	240
3	Витрати корму 1-го виду	6	7		<=	426
F	Прибуток	16	16		max	

Рисунок 10.5 – Введення вхідних даних

1.2.1. Вводять залежності математичної моделі: у рядки обмежень заносять числові коефіцієнти при змінних, що відповідають назвам стовпчиків. Якщо деяка змінна в обмеженні відсутня, її стовпчик залишають пустим.

1.2.2. Вводять коефіцієнти цільової функції (рядок F на рис. 10.5). Максимізація чи мінімізація функції позначається у цьому рядку в стовпчику «Тип обмеження».

1.2.3. Вводять типи обмежень у стовпчик «Тип обмеження». Введення типу обмеження «=» повинно закінчуватися натисканням клавіші Enter.

1.2.4. Вводять граничні умови, тобто праві частини обмежень у стовпчик «Розмір обмеження».

2. Оформлюють умову задачі у вигляді моделі.

2.1. На перетині рядка, що відповідає і-му обмеженню, і пустого стовпчика вписують функцію =***СУММПРОИЗВ (массив1; массив2)***, де массив1 – діапазон пустих клітинок під змінними $x_1, x_2, \ldots$; массив2 – діапазон коефіцієнтів і-го обмеження. Так, у нашому прикладі у клітинці **Е4** запишеться функція **=*СУММПРОИЗВ($C$3:$D$3;C4:D4)***.

Примітка. Функція ***СУММПРОИЗВ*** використовується для обчислення суми добутків відповідних елементів числових масивів однакової розмірності Синтаксис функції:

=СУММПРОИЗВ (массив1; массив2; массив3; ...) де массив1, массив2, массив3,... – від 2 до 30 числових масивів.

Результат виконання даної функції – число, яке є сумою добутків відповідних елементів числових масивів.

Необхідно пам'ятати, що:

– масиви повинні мати однакові розмірності;
– нечислові елементи масивів сприймаються як нульові.

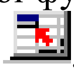
2.2. Аналогічну функцію записують у рядок цільової функції. У режимі перегляду формул модель задачі набере вигляду, наведеному на рис. 10.6.

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Обмеження				Тип	Розмір
2	пор.		**x1**	**x2**		обмеженя	обмеження
3							
4	1	Витрати корму 1-го виду	2	*3*	=СУММПРОИЗВ($C$3:$P$3;C4:04)	<=	180
5	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	=СУММПРОИЗВ($C$3: $D$3; C5: D5)	<=	240
6	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	=СУММПРОИЗВ($C$3: $D$3; C6: D6)	<=	426
7	**F**	**Прибуток**	16	6	=СУММПРОИЗВ($C$3:$P$3;C7:07)	max	

Рисунок 10.6 – Оптимізаційна модель у режимі перегляду формул

3. Застосовують елемент надбудови табличного процесора Excel ***Поиск решения***.

3.1. Викликають пункти меню ***Сервис→Поиск решения***. На екран виводиться діалогове вікно, зовнішній вигляд якого подано на рис. 10.1.

3.2. У полі ***Установить целевую ячейку*** вводять адресу клітинки, що містить формулу для обчислення значення цільової функції. Це можна зробити вручну (з клавіатури) або за допомогою кнопки , що дозволяє перейти в робочу таблицю, зображену на рис. 10.6, і виділити потрібну клітинку. Повернення до вікна ***Поиск решения*** здійснюється за допомогою кнопки .

Примітка. У полі ***Установить целевую ячейку*** автоматично вводиться адреса тієї клітинки, на якій знаходився курсор перед викликом вікна ***Поиск решения***

У нашому прикладі адреса цільової клітинки **Е7** установлена автоматично.

3.3. Установлюють перемикач ***Равной*** у положення, що відповідає спрямованості цільової функції (максимум, мінімум, деяке конкретне значення).

У нашому прикладі перемикач установлено на ***Максимальном значении***.

3.4. У полі ***Изменяя ячейки*** вводять адреси клітинок пустого рядка, що повинні містити значення змінних $x_1, x_2, \ldots$ У нашому прикладі це клітинки **$C$3:$D$3**.

3.5. Натискають кнопку ***Добавить***. На екрані з'являється діалогове вікно ***Добавление ограничения***, зовнішній вигляд якого подано на рис. 10.2.

3.6. Для кожного обмеження в полі ***Ссылка на ячейку*** вводять адресу клітинки, що містить значення функції ***СУММПРОИЗВ***. У нашому прикладі для першого обмеження у полі ***Ссылка на ячейку*** введена адреса **$E$4**.

3.7. Із списку, що розкривається, обирають тип обмеження.

3.8. У полі **Ограничение** вводять адресу клітинки, що містить числове значення з колонки «Розмір обмеження». Введення першого обмеження прикладу 10.1 подано на рис. 10.7.

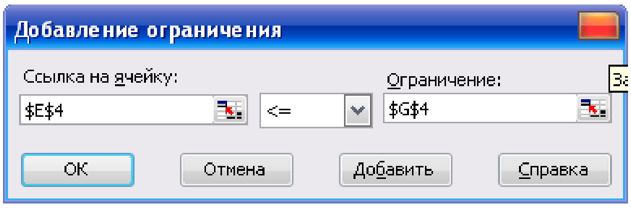


Рисунок 10.7 – Введення першого обмеження

Примітка. Для введення наступного обмеження натискають кнопку ***Добавить***. Після введення останнього обмеження натискають кнопку ***OK*** Обмеження, що мають однаковий знак, можна вводити групами (рис. 10.8).

3.9. У вікні ***Поиск решения*** натискають кнопку ***Параметры***.

3.10. У вікні ***Параметры поиска решения*** (рис. 10.3) встановлюють опції ***Линейная модель*** і ***Неотрицательные значения*** і натискають кнопку ***OK***.

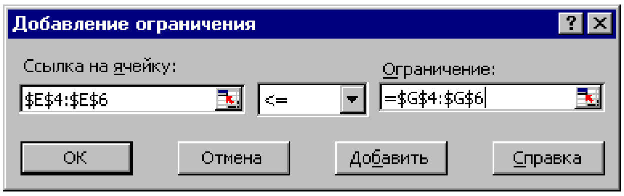


Рисунок 10.8 – Введення групи обмежень

3.11. У вікні ***Поиск решения*** (рис. 10.1) натискають кнопку ***Выполнить***.

На екран виведеться вікно ***Результаты поиска решения***, що може містити такі повідомлення:

1. «Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены». Це означає, що знайдено оптимальний розв'язок моделі. Після натискання кнопки ***OK*** на робочомуаркуші у клітинці, що містила формулу для обчислення цільової функції, та під змінними $x_1, x_2, \ldots$ будуть виведені їх значення.

2. «Значения целевой ячейки не сходятся». Це означає, що значення цільової функції прямує до нескінченості.

3. «Поиск не может найти подходящего решения». У цьому випадку система обмежень несумісна і задача не має розв'язку.

Результат розв'язування задачі прикладу 1.1 наведено на рис. 10.9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	No	Обмеження	К-сть	К-сть		Тип	Розмір
2	пор.		норок	нутрій		обмеженя	обмеження
3			x1	x2			
4			57	12			
5	1	Витрати корму 1-го виду	2	3	150	<=	180
6	2	Витрати корму 2-го виду	4	1	240	<=	240
7	3	Витрати корму 3-го виду	6	7	426	<=	426
8	F	Прибуток	16	6	984	max	

Рисунок 10.9 – Результат розв'язування задачі

3.12. Тлумачать одержаний розв'язок. Так, як бачимо з рис. 10.9, для одержання максимального прибутку розміром 984 грош. од. фермер повинен вирощувати 57 тварин виду А і 12 тварин виду В.

10.3. Розв'язування транспортної задачі

Алгоритм розв'язування транспортної задачі за допомогою табличного процесора Excel розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 10.2. Нехай маємо три постачальники із запасами вантажу 26, 33, 45 т відповідно і чотири споживачі з потребами на цей вантаж кількістю 14, 29, 20, 41 т відповідно. Вартість перевезення 1 т вантажу задана табл. 10.4.

Таблиця 10.4

Постачальник	Споживач			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	6	4	15	19
A_2	13	17	28	3
A_3	5	20	6	10

Знайти кількість вантажу, яку повинен отримати кожен споживач від того або іншого постачальника, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною. Розв'язати задачу засобами табличного процесора Excel.

Розв'язання

1. Створюють підготовчу форму для розв'язування задачі (рис. 10.10).

Відстань між пунктами перевезень зазначають у клітинках **B4:E6**. У клітинках **B11:E13** після застосування ***Поиска решения*** з'являться шукані значення змінних. Клітинка **B17** буде містити вартість перевезення. У клітинки **B14:E14** та **F11:F13** вводять формули для лівих частин обмежень, значення правих частин обмежень – у клітинки **B15:E15**, **G11:G13**. Клітинка **B17** містить формулу для розрахунку значення цільової функції.

	A	B	C	D	E	F	G
1			**Вхідні дані**				
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		
4	**A1**	6	4	15	19		
5	**A2**	13	17	28	3		
6	**A3**	5	20	6	10		
7							
8			**Результати**				
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**Запаси**
11	**A1**					=СУММ(B11:E11)	26
12	**A2**					=СУММ(B12:E12)	33
13	**A3**					=СУММ(B13:E13)	45
14		=СУММ(B11:B13)	=СУММ(C11:C13)	=СУММ(D11:D13)	=СУММ(E11:E13)		
15	**Потреби**	14	29	20	41		
16							
17	**Вартість переве-зення**	=СУММПРОИЗВ(B4:E6;B11:E13)					

Рисунок 10.10 – Підготовча форма для розв'язування транспортної задачі

2. Виконують пункти головного меню ***Сервис→Поиск решения***. На екрані з'являється діалогове вікно ***Поиск решения***, у якому встановлюють такі параметри (рис. 10.11):

а) у полі ***Установить целевую ячейку*** вводять адресу клітинки, що містить цільову функцію (у нашому прикладі **B17**);

б) у полі ***Равной*** установлюють перемикач у положення ***минимальному значению*** (за спрямованістю цільової функції);

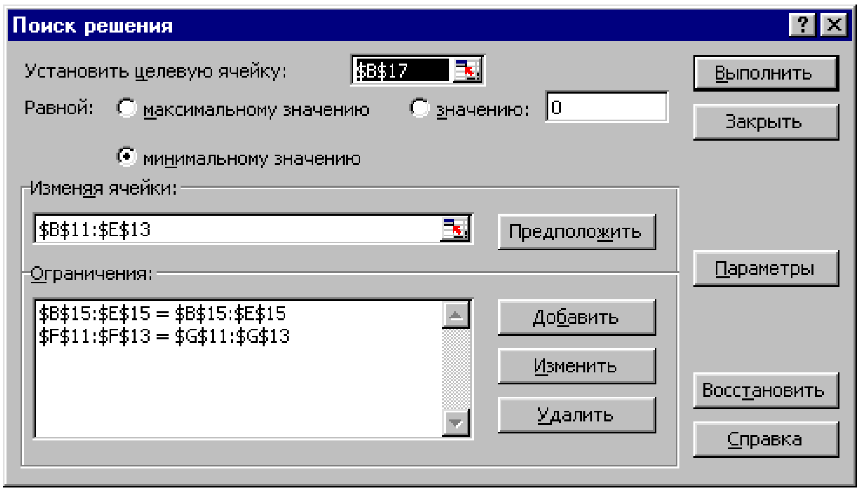


Рисунок 10.11 – Діалогове вікно ***Поиск решения*** під час розв'язування транспортної задачі

в) у полі ***Изменяя ячейки*** вводять діапазон комірок для шуканих змінних **B11:E13**;

г) задають праві частини обмежень таким чином:

– у діалоговому вікні ***Поиск решения*** клацають на кнопці ***Добавить.*** Відкривається діалогове вікно ***Добавление ограничения*** (рис. 10.12);

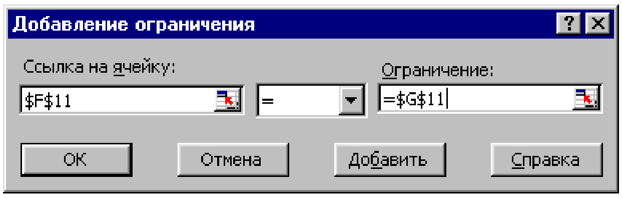


Рисунок 10.12 – Діалогове вікно ***Добавление ограничения*** під час розв’язання транспортної задачі

– у полі ***Ссылка на ячейку*** вводять адреси комірок із формулами для обчислення лівих частин обмежень. Обмеження, що записані одне за одним і мають однаковий знак, можна вводити групою (рис. 10.13).

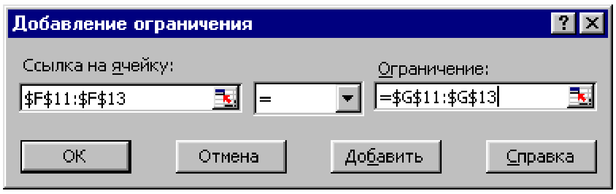


Рисунок 10.13 – Введення обмежень моделі транспортної задачі групою

ґ) установлюють параметри пошуку рішень. Для цього в діалоговому вікні ***Поиск решения*** клацають на кнопці ***Параметры***. Відкривається діалогове вікно ***Параметры поиска решения*** (рис. 10.14), в якому необхідно встановити прапорці у полях ***Линейная модель*** і ***Неотрицательные значения***. Після встановлення необхідних параметрів клацають на кнопці ***ОК*** і потрапляють знов у вікно ***Поиск решения***.

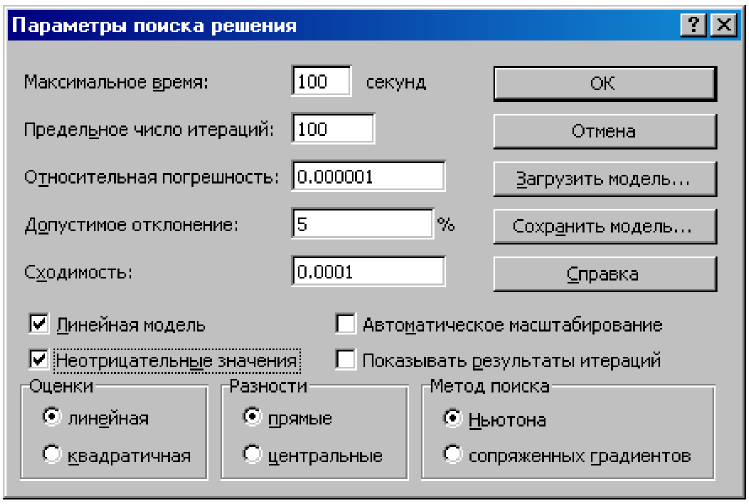


Рисунок 10.14 – Діалогове вікно ***Параметры поиска решения***

д) клацають на кнопці ***Выполнить*** діалогового вікна ***Поиск решения***, після цього на екрані з’являється вікно ***Результаты поиска решения*** (рис. 10.15).

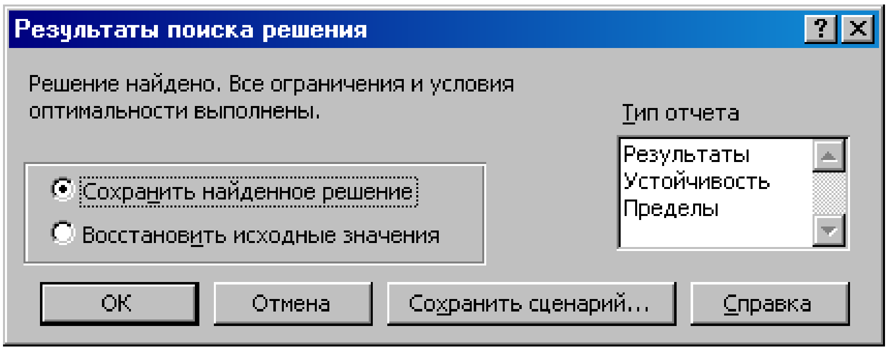


Рисунок 10.15 – Діалогове вікно ***Результаты поиска решения***

Можна зберегти знайдений розв'язок, якщо обрати опцію ***Сохранить найденное решение***, або ***Восстановить исходные значения***, якщо потрібно перейти до розв'язування іншої задачі.

3. Описують (тлумачать) одержані результати (рис. 10.16), які знаходяться у клітинках **B11:E13** і **B17**.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Вхідні дані**					
2							
3		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		
4	**A1**	6	4	15	19		
5	**A2**	13	17	28	3		
6	**A3**	5	20	6	10		
7							
8		**Результати**					
9							
10		**B1**	**B2**	**B3**	**B4**		**Запаси**
11	**A1**	0	26	0	0	26	26
12	**A2**	0	0	0	33	33	33
13	**A3**	14	3	20	8	45	45
14		14	29	20	41		
15	**Потреби**	14	29	20	41		
16							
17	**Вартість переве-зення**	533					

Рисунок 10.16 – Результати розв'язування транспортної задачі

У ході розв'язування транспортної задачі одержано такі результати:

1) мінімальна вартість перевезення вантажу становить 533 грош. од.

2) матриця перевезень $X_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 33 \\ 14 & 3 & 20 & 8 \end{pmatrix}$. Це означає, що 26 одиниць вантажу перевозять від першого постачальника до другого споживача, 33 одиниці – від другого постачальника до четвертого споживача, від третього постачальника перевозять 14, 3, 20, 8 одиниць вантажу відповідно у перший, другий, третій та четвертий пункти призначення.

10.4. Розв’язування задачі про розкрій матеріалу

Приклад 10.3. Нехай необхідно металеві прути довжиною 26 см розрізати на заготовки по 7, 9 і 13 см. Останніх потрібно по 30 шт. Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план, за якого кількість розрізаних прутів найменша.

Розв’язання. Спочатку визначають усі можливі варіанти розрізування матеріалу, наприклад, прут довжиною 26 см на заготовки відповідно 7, 9 та 13 см можна розрізати такими способами:

1) 3 заготовки довжиною 7 см;
2) 2 заготовки довжиною 7 см та 1 заготовка довжиною 9 см;
3) 1 заготовка довжиною 7 см та 2 заготовки довжиною 9 см;
4) 1 заготовка довжиною 7 см та 1 заготовка довжиною 13 см;
5) 1 заготовка довжиною 9 см та 1 заготовка довжиною 13 см;
6) 2 заготовки довжиною 13 см.

Уводимо позначення: нехай x_i – кількість прутів, розрізаних і-м способом, тоді загальна кількість розрізаних прутів буде дорівнювати $\sum_{i=1}^{6} x_i$, це й буде наша цільова функція.

За умовою заготовок кожного виду необхідно по 30 штук. Звідси будуємо обмеження:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 30,$$
$$x_2 + 2x_3 + x_5 = 30,$$
$$x_4 + x_5 + 2x_6 = 30.$$

Крім того, обмеженнями будуть умови: x_i – цілі та $x_i \geq 0$, i = 1, 2, ..., 6.

Вносимо дані до таблиці (рис. 10.17):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N_var	1	2	3	4	5	6	potribno
2	7 cm.	3	2	1	1	0	0	30
3	9 cm.	0	1	2	0	1	0	30
4	13 cm.	0	0	0	1	1	2	30

Рисунок 10.17 – Умова задачі у Microsoft Excel

Клітинки **B11:G11** резервуємо для x_i – результатів розв’язування задачі (рис. 10.18):

	A	B	C	D	E	F	G
10		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
11							

Рисунок 10.18 – Комірки для виведення результатів розв’язування задачі

Будуємо допоміжну таблицю (рис. 10.19), у кожній клітинці **B6:G8** якої обчислюється кількість заготовок кожного виду за кожним варіантом розкрою, а в клітинках **H6:H8** – сумарна їх кількість:

	A	B	C	D	E	F	G	H
6		=B2*B11	=C2*C11	=D2*D11	=E2*E11	=F2*F11	=G2*G11	=СУММ(B6:G6)
7		=B3*B11	=C3*C11	=D3*D11	=E3*E11	=F3*F11	=G3*G11	=СУММ(B7:G7)
8		=B4*B11	=C4*C11	=D4*D11	=E4*E11	=F4*F11	=G4*G11	=СУММ(B8:G8)

Рисунок 10.19 – Допоміжна таблиця

До клітинки **H11** вносимо формулу для обчислення цільової функції = ***СУММ(B11:G11)***. Для формули цільової функції можна використати функцію ***СУММПРОИЗВ***.

Звертаємося до опції ***Поиск решения***. Заповнюємо відповідні поля:

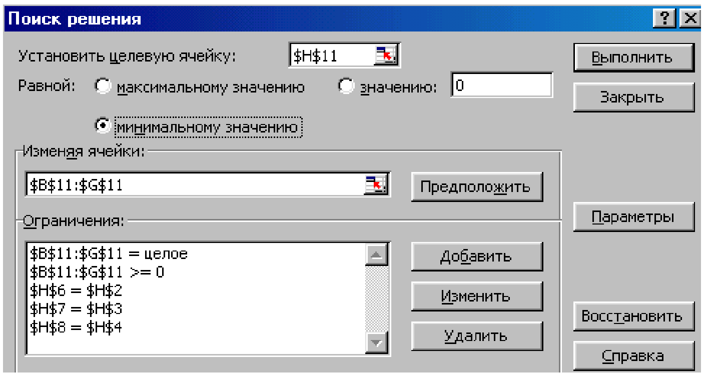


Рисунок 10.20 – Введення умов задачі про оптимальний розкрій матеріалу для пошуку розв'язування

У вкладці ***Параметры поиска решения*** (рис. 10.21) установлюємо максимальний час та максимальну кількість ітерацій, оскільки у нас і цільова функція, і обмеження задані лінійними виразами, то відзначаємо, що це лінійна модель, а оскільки параметри нашої задачі не можуть набувати від'ємних значень, то відзначаємо і це (тоді обмеження $x_i \geq 0$ у попередньому вікні можна не вводити):

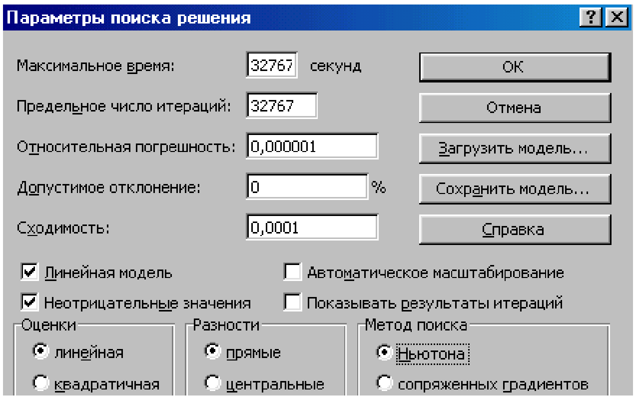


Рисунок 10.21 – Установлення параметрів пошуку розв'язування

Після натискування клавіші ***ОК*** переходимо до попереднього вікна і вибираємо ***Выполнить***. Програма знаходить оптимальне розв'язування задачі, значення x_i розміщуються у клітинках **B11:G11**, а значення цільової функції – у клітинці **H11** (табл. 10.5):

Таблиця 10.5 – Результати розв’язування задачі про розкрій матеріалу

x1	x2	x3	x4	x5	x6	Цільова функція
5	0	15	0	0	15	35

Отже, для отримання необхідної кількості заготовок кожного виду найменша кількість розрізаних прутів дорівнює 35, їх потрібно розрізати таким чином:

– від 5 прутів відрізати по 3 шт. довжиною 7 см кожен;
– від 15 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 7 см та 2 шт. довжиною 9 см кожен;
– 15 прутів розрізати на 2 шт. довжиною 13 см кожен.

Приклад 10.4. Розглянемо цю задачу з точки зору мінімізації відходів.

Для x_i – розв’язування задачі – резервуємо клітинки **B12:G12**. Будуємо аналогічну допоміжну таблицю, у кожній клітинці якої **B6:G8** обчислюється сумарна довжина заготовок кожного виду за кожним варіантом розкрою, а в клітинках B9:G9 – залишок після розрізування, тобто відходи.

Для цього до клітинки B6:B9 відповідно вносимо такі формули:

=B2·7·B12,
=B3·9·B12,
=B4·13·B12,
=26·B12-B6-B7-B8

та розмножуємо їх на **C6:G9**.

Сумарна кількість відходів є цільовою функцією, розміщуємо її у **H9**: =***СУММ(B9:G9)***. Звертаємося до опції ***Поиск решения***. Заповнюємо відповідні поля та звертаємося до опції ***Параметри*** і знаходимо оптимальне розв’язання (табл. 10.6):

Таблиця 10.6 – Результати розв’язання задачі про розкрій з точки зору мінімізації відходів

x1	x2	x3	x4	x5	x6
5	0	15	0	0	15

Отже, щоб кількість відходів була мінімальною, прути потрібно розрізати таким чином:

– від 5 прутів відрізати по 3 шт. довжиною 7 см кожен;
– від 15 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 7 см та 2 шт. довжиною 9 см кожен;
– 15 прутів розрізати на 2 шт. довжиною 13 см кожен.

Мінімальна сумарна кількість відходів при цьому буде дорівнювати 40 см. Як бачимо, розв’язання одержали таке саме, однак це не завжди так.

Необхідно зазначити, що задачі такого типу за допомогою опції ***Поиск решения*** можна розв’язувати лише тоді, коли в задачі небагато параметрів.

Приклад 10.5. Нехай 50 металевих прутів довжиною 26 см необхідно розрізати на заготовки по 7, 9 і 13 см у комплектності, заданій відношенням

1:3:2. Побудувати математичну модель задачі та знайти оптимальний план, за якого кількість комплектів заготовок максимальна.

Розв'язання. Спочатку визначають всі можливі варіанти розрізування матеріалу (див. приклад 10.2). Вводимо позначення: нехай x_i – кількість прутів, розрізаних і-м способом. Визначаємо загальну кількість заготовок кожного виду, за цільову функцію беремо кількість заготовок по 7 см і максимізуємо її, а в обмеженнях зазначаємо, що заготовок по 9 см повинно бути втричі більше, по 13 см – удвічі, а загальна кількість розрізаних прутів буде дорівнювати 50.

Розміщуємо дані в таблиці таким чином, щоб у клітинках **H6:H8** розмістилися кількості заготовок кожного виду, у клітинці **H11** – загальна кількість розрізаних прутів, значення x_i розміщуються у клітинках **B11:G11**, у клітинках **B6:G8** – допоміжна таблиця (рис. 10.22):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N var	1	2	3	4	5	6	
2	7 cm	3	2	1	1	0	0	
3	9 cm	0	1	2	0	1	0	
4	13 cm	0	0	0	1	1	2	
5	**26 cm**							Цільова функція
6		=B2*B11	=C2*C11	=D2*D11	=E2*E11	=F2*F11	=G2*G11	**=СУММ(B6:G6)**
7		=B3*B11	=C3*C11	=D3*D11	=E3*E11	=F3*F11	=G3*G11	**=СУММ(B7:G7)**
8		=B4*B11	=C4*C11	=D4*D11	=E4*E11	=F4*F11	=G4*G11	**=СУММ(B8:G8)**
9								
10		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	Кількість
11								=СУММ(B11:G11)

Рисунок 10.22 – Допоміжна таблиця

Звертаємося до опції ***Поиск решения***. Заповнюємо відповідні поля (рис. 10.23): Одержимо результат, зображений на рис 10.24:

Отже, для одержання максимальної кількості комплектів заготовок 50 прутів потрібно розрізати таким чином:

– від 20 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 7 см кожен та 2 шт. довжиною 9 см кожен;
– від 20 прутів відрізати по 1 шт. довжиною 9 см та 1 шт. довжиною 13 см кожен;
– 10 прутів розрізати на 2 шт. довжиною 13 см кожен.

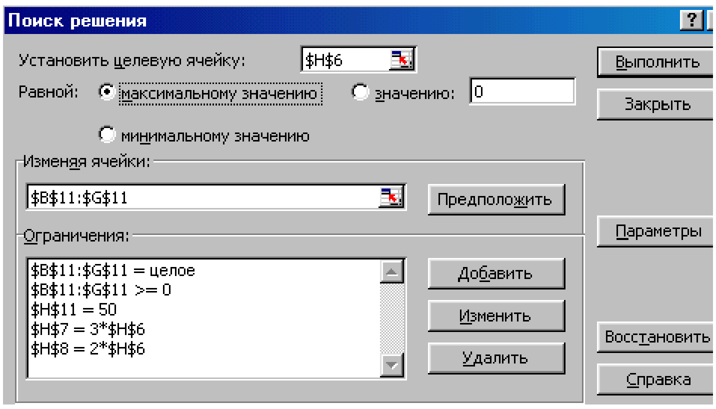


Рисунок 10.23 – Введення умов задачі про оптимальний розкрій металевих прутів

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	N var	1	2	3	4	5	6	
2	7 cm	3	2	1	1	0	0	
3	9 cm	0	1	2	0	1	0	
4	13 cm	0	0	0	1	1	2	
5	**26 cm**							Цільова функція
6		0	0	20	0	0	0	**20**
7		0	0	40	0	20	0	**60**
8		0	0	0	0	20	20	**40**
9								
10		**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	Кількість
11		0	0	20	0	20	10	50

Рисунок 10.24 – Результат розв’язання задачі прикладу 10.4

10.5. Розв’язування задачі про призначення

Розглянемо алгоритм розв’язування задачі про призначення засобами табличного процесора Excel на прикладі задачі, вихідні дані якої наведені в табл. 9.10.

1. Створюють підготовчу форму для розв’язування задачі (рис. 10.25).

	A	B	C	D	E	F
1		**1-й проект**	**2-й проект**	**3-й проект**		
2	**1-й робітник**	15	10	9		
3	**2-й робітник**	9	15	10		
4	**3-й робітник**	10	12	8		
5						
6						
7		**1-й проект**	**2-й проект**	**3-й проект**		
8	**1-й робітник**				=СУММ(B8:D8)	1
9	**2-й робітник**				=СУММ(B9:D9)	1
10	**3-й робітник**				=СУММ(B10:D10)	1
11		=СУММ(B8:B10)	=СУММ(C8:C10)	=СУММ(D8:D10)		
12		1	1	1		
13						
14	**Сумарна тривалість (вартість) робіт**	=СУММПРОИЗВ(B2:D4;B8:D10)				

Рисунок 10.25 – Підготовча форма для розв’язування задачі про призначення

Вартості виконання робіт (або термін їх виконання) зазначають у клітинках **B2:D4**. У клітинках **B8:D10** після застосування ***Поиска решения*** з’являться шукані значення змінних. У клітинки **B11:D11** та **E8:E10** вводять формули для лівих частин обмежень. Значення правих частин обмежень – у клітинках **B12:D12**, **F8:F10**. У комірці **B14** задають формулу для розрахунку значення цільової функції (формула для обчислення загального терміну або загальної вартості виконаних робіт).

2. Виконують пункти головного меню ***Сервис→Поиск решения***. На екрані з’являється діалогове вікно ***Поиск решения***, в якому встановлюють такі параметри (рис. 10.26):

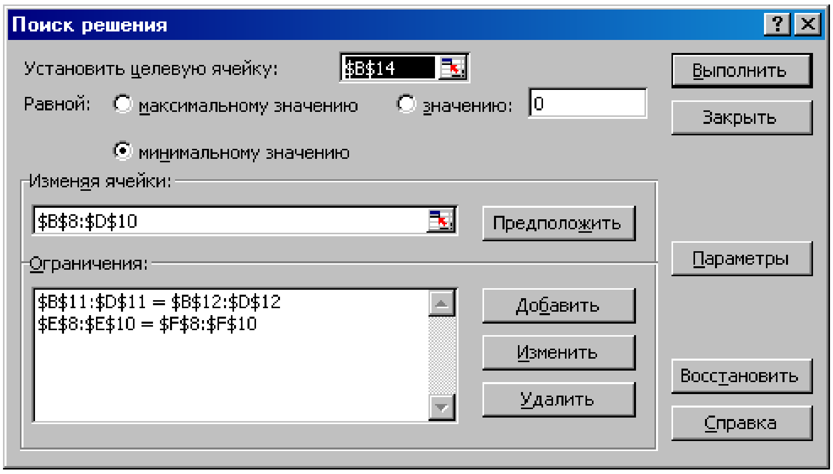


Рисунок 10.26 – Діалогове вікно ***Поиск решения***
при розв’язуванні задачі про призначення

а) у полі ***Установить целевую ячейку*** вводять адресу клітинки, що містить цільову функцію (у нашому прикладі **B14**);
б) у полі ***Равной*** установлюють перемикач у положення ***Минимальному значению*** **(**за спрямованістю цільової функції**)**;
в) у полі ***Изменяя ячейки*** вводять діапазон комірок для шуканих змінних **B8:D10**;
г) задають праві частини обмежень таким чином:

– у діалоговому вікні ***Поиск решения*** клацають на кнопці ***Добавить***. Відкривається діалогове вікно ***Добавление ограничения*** (рис. 10.27);

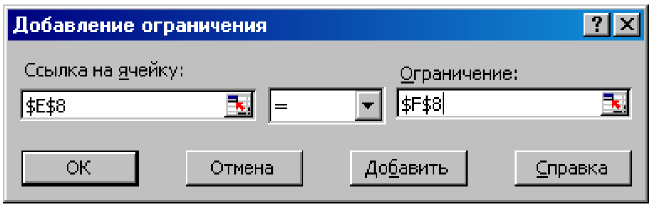


Рисунок 10.27 – Діалогове вікно ***Добавление ограничения***

– у полі ***Ссылка на ячейку*** вводять по черзі адреси комірок із формулами для обчислення лівих частин обмежень. Якщо обмеження, що записані одне за одним, мають однаковий знак, то їх уводять групою (рис. 10.28);

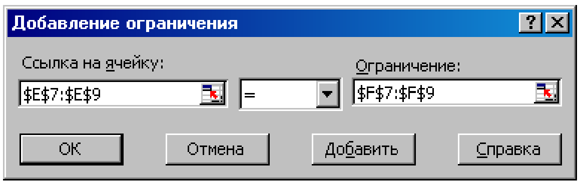


Рисунок 10.28 – Введення обмежень моделі групою

ґ) установлюють параметри пошуку розв'язків. Для цього у діалоговому вікні ***Поиск решения*** клацають на кнопці ***Параметры***. Відкривається діалогове вікно ***Параметры поиска решения***, в якому встановлюють прапорці у полях ***Линейная модель*** і ***Неотрицательные значения***. Після встановлення необхідних параметрів клацають на кнопці ***ОК*** і потрапляють знов у вікно ***Поиск решения***.

д) клацають на кнопці ***Выполнить*** діалогового вікна ***Поиск решения***, після цього на екрані з'являється вікно ***Результаты поиска решения*** (рис. 10.29).

	A	B	C	D	E	F
1		1-й проект	2-й проект	3-й проект		
2	1-й робітник	15	10	9		
3	2-й робітник	9	15	10		
4	3-й робітник	10	12	8		
5						
6						
7		1-й проект	2-й проект	3-й проект		
8	1-й робітник	0	1	0	1	1
9	2-й робітник	1	0	0	1	1
10	3-й робітник	0	0	1	1	1
11		1	1	1		
12		1	1	1		
13						
14	Сумарна тривалість (вартість) робіт	27				

Рисунок 10.29 – Результати розв'язання задачі про призначення. Оптимальний розподіл робіт між працівниками

3. Аналізують одержані результати (рис. 10.29), які знаходяться у клітинках **B7:D9** і **B13**. Одержані у клітинках **B7:D9** одиниці задають оптимальний розподіл робіт між працівниками. Так, першому робітникові необхідно доручити виконання 2-го проекту, другому робітникові – виконання 1-го проекту, третьому робітникові – виконання 3-го проекту (табл. 10.7).

Таблиця 10.7

Номер проекту	**Виконавець**
1	2
2	1
3	2

Оптимальна (мінімальна) тривалість (вартість) виконання робіт становить 27 днів (грош. од.).

10.6. Розв'язування задачі оптимізації вартості прокладання кабелю

Розглянемо задачу мінімізації витрат на прокладання кабелю на прикладі**.** Необхідно прокласти оптичний кабель між пунктами А і В так, щоб сумарні затрати на його монтаж були мінімальними.

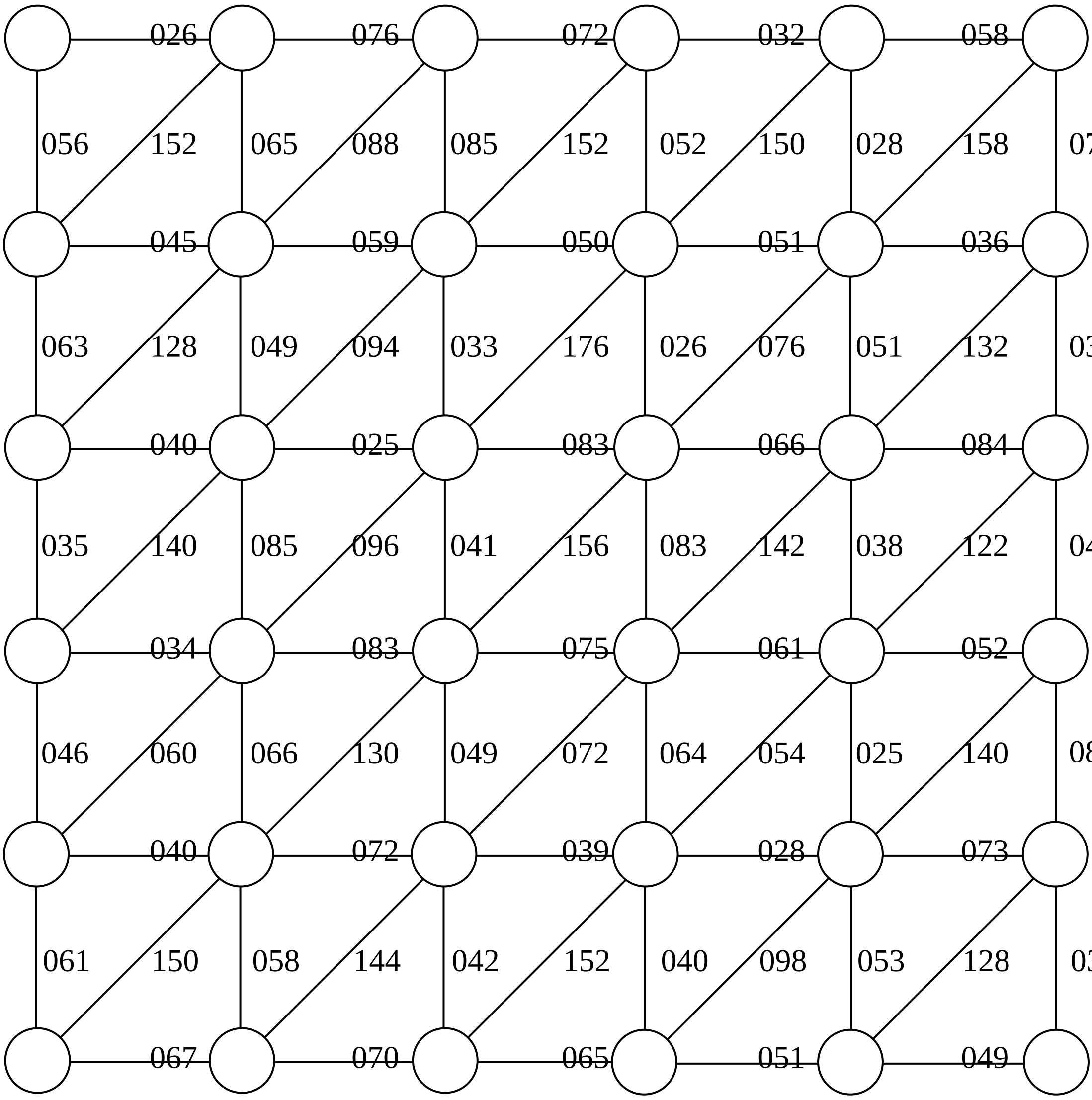


Рисунок 10.30 – Умова задачі

Поділимо відстань між пунктами А і В на відрізки. На кожному кроці можемо рухатися на Північ (по осі Y), Схід (по осі X) або на Північний Схід. Тоді шлях від А до В буде мати вигляд ступінчастої ламаної лінії, відрізки якої паралельні одній із координатних осей, або перетинають їх під кутом.

Процедуру умовної оптимізації проводимо в зворотному напрямку від точки В до точки А.

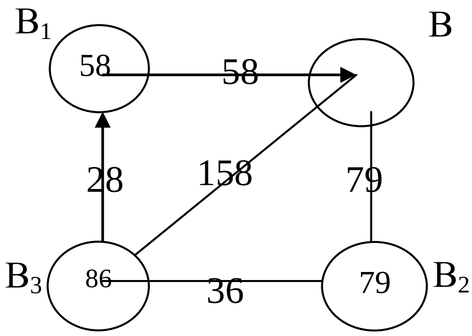


Рисунок 10.31

Знайдемо умовне оптимальне керування на першому кроці. Воно вибирається так, щоб вартість усіх кроків, що залишилися до кінця процесу, була мінімальною. Процедуру умовної оптимізації проводимо в зворотному напрямку, тобто від точки B до точки A.

У точку B можна потрапити з B3 через B1, B2 або безпосередньо на пряму. У вузлах запишемо вартість шляху. Стрілкою покажемо мінімальний шлях. Min (59 + 28, 158, 36 + 79) = min (86, 158, 115) = 86, тобто крок по осі X, крок по осі Y.

За допомогою можливостей Excel запишемо значення економічних затрат для кожного етапу та обчислимо мінімальну вартість.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						Вартість шляху
4			58		північ, схід	=C4+B5
5	1	28	158	79	північний схід	=C5
6			36		схід, північ	=D5+C6
7		=МИН(F4:F6)				
8			51		північ, схід	=C8+B9
9	2	26	76	51	північний схід	=C9
10			66		схід, північ	=D9+C10
11		=B7+МИН(F8:F10)				
12			83		північ, схід	=C12+B13
13	3	41	156	83	північний схід	=C13
14			75		схід, північ	=D13+C14
15		=B11+МИН(F12:F14)				
16			83		північ, схід	=C16+B17
17	4	66	130	49	північний схід	=C17
18			72		схід, північ	=D17+C18
19		=B15+МИН(F16:F18)				
20			40		північ, схід	=C20+B21
21	5	61	150	58	північний схід	=C21
22			67		схід, північ	=D21+C22
23		=B19+МИН(F20:F22)				

Рисунок 10.32 – Формули для обчислення мінімальної вартості

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						Вартість шляху
4			58		північ, схід	86
5	1	28	158	79	північний схід	158
6			36		схід, північ	115
7		86				
8			51		північ, схід	77
9	2	26	76	51	північний схід	76
10			66		схід, північ	117
11		162				
12			83		північ, схід	124
13	3	41	156	83	північний схід	156
14			75		схід, північ	158
15		286				
16			83		північ, схід	149
17	4	66	130	49	північний схід	130
18			72		схід, північ	121
19		407				
20			40		північ, схід	101
21	5	61	150	58	північний схід	150
22			67		схід, північ	125
23		508				

Рисунок 10.33 – Результати розрахунків

У комірці B23 ми одержали значення економічної вартості прокладки кабелю, яка становить 508 одиниць.

Для того щоб одержати оптимальний шлях прокладання і здійснити безумовну оптимізацію, аналізуємо стовпчик F, де зазначена вартість затрат кожного варіанта проходу на кожному етапі.

Починаємо з п'ятого етапу, тобто йдемо знизу вгору. Мінімальна вартість проходу на цьому етапі становить 101 одиницю і відповідає руху на північ, а потім – на схід. Переходимо до четвертого етапу. Тут оптимальним варіантом є рух на схід, а потім – на північ. Аналогічно одержуємо напрями руху на інших етапах.

Після виконання усіх вищенаведених дій одержуємо шлях для прокладання xopt = (п, с, с, п, п, с, пс, п, с).

10.7. Задача про розподіл інвестицій між підприємствами методом динамічного програмування

На розвиток трьох підприємств виділено 5 млн грош. од. Відома ефективність капітальних вкладень у кожне підприємство, млн грош. од., задана значенням нелінійної функції gi(xi), поданої в таблиці 1. Необхідно розподілити виділені кошти між підприємствами таким чином, щоб одержати максимальний сумарний дохід.

Для спрощення розрахунків припускаємо, що розподіл коштів здійснюється в цілих числах xi = {0,1,2,3,4,5} млн грош. од.

Таблиця 10.8 – Вхідні дані

x		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
g1(x)	0	0,2	0,6	1,5	2,4	4,4
g2(x)	0	1	1,5	2	3	4,9
g3(x)	0	1,5	2,2	3,4	4	5,1

Сформуємо таблицю у MS Excel.

xi \ gi	**g1**	**g2**	**g3**
0	0	0	0
1	0,2	1	1,5
2	0,6	1,5	2,2
3	1,5	2	3,4
4	2,4	3	4
5	4,4	4,9	5,1

Рисунок 10.34 – Умова задачі

1-й етап. Умовна оптимізація.

1-й крок: k = 3.

Припустимо, що всі засоби кількістю x3 = 5 млн грош. од. віддані третьому підприємству.

У цьому випадку максимальний дохід можна визначити за формулами, зображеними на рис. 10.35.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
16									
17	x3 / C3	0	1	2	3	4	5	F3(C3)	x*3
18	0	=D4	-	-	-	-	-	=D4	0
19	1	-	=D5	-	-	-	-	=D5	1
20	2	-	-	=D6	-	-	-	=D6	2
21	3	-	-	-	=D7	-	-	=D7	3
22	4	-	-	-	-	=D8	-	=D8	4
23	5	-	-	-	-	-	=D9	=D9	5
24									

Рисунок 10.35

Результат розрахунків зображено на рис. 10.36: F3(C3) = g3(x3).

I30

	A	B	C	D	E	F	G	H
16								
17	x3 / C3	0	1	2	3	4	5	F3(C3)
18	0	0	-	-	-	-	-	0
19	1	-	1,5	-	-	-	-	1,5
20	2	-	-	2,2	-	-	-	2,2
21	3	-	-	-	3,4	-	-	3,4
22	4	-	-	-	-	4	-	4
23	5	-	-	-	-	-	5,1	5,1
24								

Рисунок 10.36

Отже, як бачимо з рис. 10.36, максимальний прибуток g3 (x3) = = 5,1 млн грош. од.

2-й крок: k = 2.

Визначаємо оптимальну стратегію під час розподілу коштів між другим і третім підприємствами. При цьому рекурентне співвідношення Беллмана має вигляд

$$F_2(C_2) = \max_{x_2 \le C_2} \{g_2(x_2) + F_3 (C_2 - x_2)\},$$

на основі якого зроблено розрахунки за формулами, зображеними на рис. 10.37.

Результат розрахунків зображено на рис. 10.38.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
31									
32	x2 / C2	0	1	2	3	4	5	F2(C2)	x*2
33	0	=$C$4+$H18	-	-	-	-	-	=МАКС(B33:G33)	0
34	1	=$C$4+$H19	=$C$5+$H18	-	-	-	-	=МАКС(B34:G34)	0
35	2	=$C$4+$H20	=$C$5+$H19	=$C$6+$H18	-	-	-	=МАКС(B35:G35)	0
36	3	=$C$4+$H21	=$C$5+$H20	=$C$6+$H19	=$C$7+$H18	-	-	=МАКС(B36:G36)	1
37	4	=$C$4+$H22	=$C$5+$H21	=$C$6+$H20	=$C$7+$H19	=$C$8+$H18	-	=МАКС(B37:G37)	2
38	5	=$C$4+$H23	=$C$5+$H22	=$C$6+$H21	=$C$7+$H20	=$C$8+$H19	=$C$9+$H18	=МАКС(B38:G38)	3

Рисунок 10.37

	A	B	C	D	E	F	G	H
31								
32	x2 / C2	0	1	2	3	4	5	F2(C2)
33	0	0	-	-	-	-	-	0
34	1	1,5	1	-	-	-	-	1,5
35	2	2,2	2,5	1,5	-	-	-	2,5
36	3	3,4	3,2	3	2	-	-	3,4
37	4	4	4,4	3,7	3,5	3	-	4,4
38	5	5,1	5	4,9	4,2	4,5	4,9	5,1
39								

Рисунок 10.38

3-й крок: k = 1.

Визначаємо оптимальну стратегію під час розподілу коштів між першим і двома іншими підприємствами, використовуючи таку формулу для розрахунку сумарного прибутку:

$$F_1(C_1) = \max_{x_1 \le C_1}\{g_1(x_1) + F_2(C_1 - x_1)\},$$

на основі якого зроблено розрахунки за формулами, зображеними на рис. 10.39.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
46									
47	x1 / C1	0	1	2	3	4	5	F1(C1)	x*1
48	0	=$B$4+$H33	-	-	-	-	-	=МАКС(B48:G48)	0
49	1	=$B$4+$H34	=$B$5+$H33	-	-	-	-	=МАКС(B49:G49)	0
50	2	=$B$4+$H35	=$B$5+$H34	=$B$6+$H33	-	-	-	=МАКС(B50:G50)	0
51	3	=$B$4+$H36	=$B$5+$H35	=$B$6+$H34	=$B$7+$H33	-	-	=МАКС(B51:G51)	1
52	4	=$B$4+$H37	=$B$5+$H36	=$B$6+$H35	=$B$7+$H34	=$B$8+$H33	-	=МАКС(B52:G52)	1
53	5	=$B$4+$H38	=$B$5+$H37	=$B$6+$H36	=$B$7+$H35	=$B$8+$H34	=$B$9+$H33	=МАКС(B53:G53)	1
54									

Рисунок 10.39

Результат розрахунків зображено на рис. 10.40.

II етап. Безумовна оптимізація.

Визначаємо компоненти оптимальної стратегії.

1-й крок: за даними рисунка 10.40 максимальний дохід під час розподілу 5 млн грош. од. між трьома підприємствами становить: C1 = 5, F1(5) = = 5,1 млн грош. од.

При цьому першому підприємству потрібно виділити $x1^*$ = 0 млн грош. од. x*1 = 0 млн грош. од.

C1 \ x1	0	1	2	3	4	5	F1(C1)
0	0	-	-	-	-	-	0
1	1,5	0,2	-	-	-	-	1,5
2	2,5	1,7	0,6	-	-	-	2,5
3	3,4	2,7	2,1	1,5	-	-	3,4
4	4,4	3,6	3,1	3	2,4	-	4,4
5	5,1	4,6	4	4	3,9	4,4	5,1

Рисунок 10.40

2-й крок: Визначаємо величину грошових коштів, які залишилися, що припадають на частку другого і третього підприємств: $C2 = C1 - x1^* = 5$ млн грош. од.

За даними рис. 10.38 знаходимо, що оптимальний варіант розподілу грошових коштів розміром 5 млн грош. од. між другим і третім підприємствами становить: F2(4) = 5,1 млн грош. од., при виділенні другому підприємству $x2^*$ = = 0 млн грош. од.

3-й крок: Визначаємо величину грошових коштів, які залишилися, що припадають на частку третього підприємства: $C3 = C2 - x2^* = 5$ млн грош. од.

За даними рис. 10.36 знаходимо: F3(2) = 5,1 млн грош. од., $x3^* = 5$ млн грош. од.

Таким чином, оптимальний план інвестування підприємств: X^* = = (0,0,5), який забезпечить максимальний дохід, що дорівнює

F(5) = g1(1) + g2(2) + g3(2) = 5,1 млн грош. од.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Розв'яжіть транспортну задачу з прикладу 6.1, умову якої наведено на с. 68–69 у розділі 6, засобами Microsoft Excel.

2. Розв'яжіть задачу про призначення з прикладу 6.2, умову якої наведено на с. 78 у розділі 6, засобами Microsoft Excel.

3. На заготівельну дільницю меблевої фабрики надійшли листи фанери розміром 150×150 см. Для виготовлення меблів необхідно розрізати їх на заготовки трьох видів по 120×100, 35×75 і 30×20 см. Потреба в них відповідно 300, 200 і 50 шт. Скласти математичну модель задачі розкрою матеріалу з мінімальними відходами. Розв'язати задачу засобами Microsoft Excel.

4. Підприємство може випускати 4 види продукції, що користується необмеженим попитом. Для виготовлення цих товарів використовується 3 види різної сировини. Крім того, задані можливі трудові ресурси (людино-години). Числові дані наведені в табл. 10.9.

Таблиця 10.9

Ресурси	Затрати на 1 одиницю продукції				Запаси сировини
	П1	П2	П3	П4	
1-ша сировина	5	9	7	8	200
2-га сировина	4	3	1	6	750
3-тя сировина	7	2	3	5	900
Трудові ресурси	2	5	1	3	130
Прибуток від реалізації 1 одиниці продукції	15	10	20	5	

Необхідно визначити, яку кількість кожного з видів продукції повинно випускати підприємство, щоб прибуток від реалізації її був максимальним.

Записати математичну модель задачі, яка складається з цільової функції (прибутку), обмежень на сировину, трудових ресурсів. Знайти розв'язок задачі засобами Microsoft Excel.

Питання для самоперевірки

1. Для чого призначена надбудова Microsoft Excel ***Поиск решения***?
2. Як викликати надбудову Microsoft Excel ***Поиск решения***?
3. Охарактеризуйте основні елементи діалогового вікна надбудови ***Поиск решения***.
4. Як задати цільову функцію оптимізаційної задачі під час роботи з надбудовою ***Поиск решения***?
5. Як додати обмеження оптимізаційної задачі під час роботи з надбудовою ***Поиск решения***?
6. Охарактеризуйте основні елементи діалогового вікна ***Параметры поиска решения***.
7. Перелічіть основні етапи алгоритму розв'язування задач лінійного програмування засобами табличного процесора Excel.
8. Які параметри пошуку встановлюють при розв'язуванні задач лінійного програмування засобами табличного процесора Excel?
9. Перелічіть основні етапи алгоритму розв'язування транспортної задачі засобами табличного процесора Excel.
10. Які параметри пошуку встановлюють при розв'язуванні транспортної задачі засобами табличного процесора Excel?
11. Перелічіть основні етапи алгоритму розв'язування задачі про розкрій засобами табличного процесора Excel.
12. Які параметри пошуку встановлюють при розв'язуванні задачі про розкрій засобами табличного процесора Excel?
13. Перелічіть основні етапи алгоритму розв'язування задачі про призначення засобами табличного процесора Excel.
14. Перелічіть основні етапи алгоритму розв'язування задачі оптимізації вартості прокладання кабелю засобами табличного процесора Excel.
15. Перелічіть основні етапи алгоритму розв'язування задачі про розподіл інвестицій між підприємствами методом динамічного програмування засобами табличного процесора Excel.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Акоф Р. Основы исследования операций / Р. Акоф, М. Сасиени. – Москва : Мир, 1971. – 534 с.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах / И. Л. Акулич. – Москва : Высшая школа, 1986. – 319 с.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди ; пер. с англ. – Москва : Радио и связь, 1988. – 128 с.
4. Бех О. В. Математичне програмування : навч. посіб. / О. В. Бех, Т. А. Городня, А. Ф. Щербак. – Львів : Магнолія-2006, 2014. – 200 с.
5. Венцель Е. С. Исследование операций / Е. С. Венцтель. – Москва : Высшая школа, 2000. – 552 с.
6. Венцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е. С. Венцель. – Москва : Высш. шк., 2001. – 208 с.
7. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посіб. для сам. вивчення дисципліни / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – Київ : КНЕУ, 2001. – 248 с.
8. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций / Ю. Б. Гермейер. – Москва : Наука, 1971. – 383 с.
9. Исследование операций в экономике: учеб. пособие для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
10. Детягев Ю. В. Исследование операций / Ю. В. Детягев. – Москва : Высш. шк., 1986. – 320 с.
11. Дзюбан І. Ю. Методи дослідження операцій / І. Ю. Дзюбан, О. Л. Жиров, О. Г. Охріменко. – Київ : ІВЦ «Видавництво «Політехніка », 2005. – 108 с.
12. Дослідження операцій в економіці : підручник / за ред. І. К. Федоренко, О. І. Черняка. – Київ : Знання, 2007. – 558 с. – (Вища освіта XXI століття).
13. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. Підручник / Ю. П. Зайченко. – 7-ме вид., переробл. та допов. – Київ : Видавничий дім «Слово», 2006. – 816 с.
14. Казарєзов А. Я. Дослідження операцій : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. освіти. Ч. 1. Математичне програмування / А. Я. Казарєзов, Ю. Ю. Верланов ; Миколаїв. держ. гуманіт. ун-т ім. П. Могили. – Миколаїв, 2003. – 83 с.
15. Карпенко А. Ф. Практикум по математическому моделированию экономических агропромышленных процессов в сельском хозяйстве / А. Ф. Карпенко. – Москва : Финансы и статистика, 1985. – 136 с.
16. Крушевський А. В. Математичне програмування в економіці та управлінні : навч.-метод. посіб. / А. В. Крушевський, М. Ф. Тимчук. – Київ : ІММБ, 2001. – 107с.
17. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – Санкт-Петербург : BHV – Санкт-Петербург, 1997. – 384с. : ил.

18. Курносов А. П. Вычислительная техника и экономико-математические методы в сельском хозяйстве / А. П. Курносов. – Москва : Финансы и статистика, 1991. – 344 с.
19. Ларіонов Ю. І. Дослідження операцій в інформаційних системах : навч. посібник / Ю. І. Ларіонов, В. М. Левикін, М. А. Хажмурадов. – 2-ге вид. – Харків : Компанія СМІТ, 2005. – 364 с.
20. Леоненков А. В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А. В. Леоненков. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2005. – 704 с.
21. Мазаракі А. А. Математичне програмування в Excel : навч. посібник для студ. екон. спец. вузів / А. А. Мазаракі, Ю. А. Толбатов. – Київ : Четверта хвиля, 1998. – 207 с.
22. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / [А. М. Гатаулин, Г. В. Гаврилов, Т. М. Сорокина и др.] ; под ред. А. М. Гатаулина. – Москва : Агропромиздат, 1990. – 432 с.
23. Лавров Є. А. Математичне програмування : навч. посіб. / Є. А. Лавров, Л. П. Перхун, В. А. Сергієнко ; за ред. Є. А. Лаврова. – Суми : ПП Вінниченко М. Д. ; ФОП Литовченко Є. Б., 2013. – 256 с.
24. Методи синтезу та оптимізації : конспект лекцій для студ. напряму підготовки 6.050101 «Комп'ютерні науки» / В. В. Шендрик, Ю. В. Парфененко. – Суми : СумДУ, 2014. – 148 с.
25. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2003. – 452 с.
26. Нефьодов Ю. М. Методи оптимізації в прикладах і задачах : навчальний посібник / Ю. М. Нефьодов, Т. Ю. Балицька. – Київ : Кондор, 2011. – 324 с.
27. Таха Х. Введение в исследование операций : в 2 кн. / Х. Таха. – Москва : Мир, 1985. – 479 с.
28. Толбатов Ю. А. Математичне програмування : підруч. для студ. вищ. навч. закл. / Ю. А. Толбатов, Є. Ю. Толбатов. – Тернопіль : Підручники і посібники, 2008. – 432 с.
29. Віртуальна лабораторія математичного моделювання [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.mathmod.narod.ru.
30. Електронні підручники з математичного програмування [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.is.svitonline.com/vcg/matersals.html#mathprog.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

І

К

М

Навчальне видання

Лавров Євгеній Анатолійович,
Перхун Лариса Петрівна,
Шендрик Віра Вікторівна та ін.

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Підручник

Художнє оформлення обкладинки М. В. Коваля
Редактори: Н. М. Мажуга, М. Я. Сагун
Комп’ютерне верстання: Ю. В. Парфененко, В. В. Шендрик, Е. Г. Кузнєцов

Формат 60х84/8. Ум. друк. арк. 24,65. Обл.-вид. арк. 19,30. Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.