ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО БИОРЕСУРСА

Ячменёв В.А., доцент

Задача оптимального импульсного управления состоит в минимизации целевого функционала (критерия качества)

$$I(v)=\int_0^T F(t,x,v)dt+G(x(\tau)) \qquad (1)$$

на области допустимых управлений, при этом рассматриваются импульсные управления вида

$$v(t)=u(t)+\sum_{i=0}^{k} c_i\delta(y-\theta_i) \qquad (2)$$

где $u(t)$ – кусочно-непрерывная функция (обычная составляющая управления), θ_i – моменты приложения импульсов, $\delta(y-\theta_i)$ – дельта-функция Дирака, c_i – величины импульсов.

Траектории, соответствующие управлению (2) находятся из системы дифференциальных уравнений

$$x=f(t,x)+g(t,x)\,v\,,\ x(0)=x_0 \qquad (3)$$

и в точках θ_i могут иметь разрывы.

Условия допустимости разрыва в момент θ_i определяться с помощью вспомогательной вектор - функции $z_i(\tau)$, которая удовлетворяет на отрезке $[0;1]$ системе

$$\begin{aligned} &\frac{dz_i}{d\tau}=g(\theta_i;x_i)\,c_i\,,\ \tau\in[0;1]\\ &z_i(0)=x(\theta_i-)\,, \qquad\qquad (4)\\ &z_i(1)=x(\theta_i+)\,. \end{aligned}$$

Далее ведем функцию Понтрягина (гамильтониан)

$$H(t,x,\psi,\upsilon)=<\psi,\ f(t,x)+g(t,x)v>-F(t,x,\upsilon)$$

где ψ - двойственная переменная.

Принцип максимума предъявляет к составляющим оптимального управления u^*, c_i^*, θ_i^* ряд требований; среди которых основными являются:

а) u_t^* за исключением точек разрыва максимизирует линейную функцию $H_v(t,x^*,\psi^*,u)$ на множестве V ;

б) в каждой точке θ_i^* $H_v(\theta_i^*, x^*(\theta_i^*), \psi^*(\theta_i^*)) = 0$, т.е. функция-переключения обращается в ноль в момент импульсов.

Далее рассмотрим эколого-экономическую модель оптимизации затрат на добычу биологической продукции.

Упрощенная модель заключается в отыскании максимума функционала

$I = \int_0^T e^{-pt} K(t, y, u, v)dt$ при условии

$$\begin{cases} \dot{x} = \varphi(x) - kxyv \\ \dot{y} = v - \gamma y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Здесь,

x – численность (масса),

y – запас используемого капитала,

v - инвестиции (импульсное управление),

v – затраты на текущий промысел (обычное управление),

$\varphi(x)$ - функция естественного прироста популяции.

Далее выберем ее такой, как в логистической модели

$$\varphi(x) = a\left(1 - \frac{x}{b}\right)x,$$

а $K(t, x, y, u, v) = pbxyu - qv - cyu$ – текущая прибыль от эксплуатации ресурса, где все параметры p, b, q, c больше нуля.

Для данной задачи достаточно просто выписываются условия принципа максимума, и выполняется его анализ, позволяющий выяснить структуру оптимального управления и сделать ряд практических выводов.

Например, если $x_0 > x^*$ и начальный капитал недостаточно велик, чтобы исключить инвестиции, то возможно оптимальное управление будет иметь трехимпульсную структуру в начальный момент времени, в момент выхода на магистрали и в момент схода с неё. При этом на начальном участке численность популяции будет достигать магистрального уровня дважды: внутри него (убывая) и в конце (возрастая).

Литература:

1. Morray I.M. Existence theorems for optimal control and calculus of variations problems where the state cum jump // SIAM I.Contr.Optim. – 1986. – V.2r.№3 – p 4/2 – 438.