

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра прикладної математики та
моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

тема роботи: **МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕСУ У БАГАТОШАРОВІЙ СИСТЕМІ ІЗ ЗАДАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ**

Завідувач випускової

кафедри:

д. ф.-м. н., проф. О. В. Лисенко

Керівник роботи:

д. ф.-м. н., проф. О. А. Гончаров

Виконавець:

Студент факультету ЕлІТ,

гр. ПМ – 41

Д. О. Білоус

Затверджено на засіданні кафедри " __ " _____ 2018 року, протокол №

Суми – 2018

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота бакалавра складається з 53 сторінок, 12 малюнків, 2 таблиць, 38 використаних літературних джерел.

Об'єкт дослідження – процес розповсюдження тепла в плоскій пластині ріжучого інструменту з нанесеним на неї захисним покриттям.

Мета роботи – моделювання нестационарного температурного поля в ріжучій пластині з нанесеним на неї багат шаровим покриттям при заданих граничних умовах у визначені моменти часу.

Методи дослідження – методи математичного аналізу для опису теплового процесу, метод кінцевих різниць дискретизація математичної моделі на основі локально одновимірної схеми А. А. Самарського, послідовне застосування метода прогонки для програмної реалізації математичної моделі.

Наукова новизна одержаних результатів міститься в тому, що вперше сформована математична модель, яка дозволяє досліджувати теплові процеси у об'єкті із двошаровим покриттям.

З метою апробації розробленої математичної моделі досліджується температурне поле для пластини із сталі 42CrMo4(38XM) без покриття, із одношаровим покриттям TiN/42CrMo4 та двошаровим покриттям TiN/ α -Al₂O₃/42CrMo4 під дією зовнішнього теплового навантаження.

Практичне значення одержаних результатів міститься в тому, що розроблена та реалізована математична модель дозволяє проводити розрахунки та прогнозування теплових процесів, за результатами яких можна значно знижувати температурне навантаження на матеріал ріжучого інструмента, тим самим підвищуючи його зносостійкість та термостабільність.

Апробація отриманих результатів була проведена на конференціях: IEEE 7-th International Conference Nanomaterials: Application & Properties (2017) м. Затока і "HEUREKA-2018" м. Львів.

Ключові слова: математична модель, температурне поле пластини, ріжуча пластина, двошарове захисне покриття.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1	6
ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД	6
Висновки до розділу 1	7
РОЗДІЛ 2	18
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЯ	18
2.1. Загальний метод виведення рівняння теплопровідності	18
2.2. Умови протікання процесу	22
2.2.1. Початкові умови	22
2.2.2. Граничні умови	24
2.3. Математична модель.....	25
Висновки до розділу 2.....	26
РОЗДІЛ 3	27
РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ	27
3.1. Метод змінних напрямків (поздовжньо-поперечна схема)	28
3.2. Результат роботи програми	
Висновки до розділу 3.....	37
ВИСНОВКИ	38
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	39
Додаток 1	44
Додаток 2	52

ВСТУП

Сучасні темпи розвитку машинобудування висувають вимоги щодо якісних показників елементів металообробки, в тому числі до зносостійкості, термостабільності та довготривалості. Так, різальний інструмент працює в складних умовах нерівномірного нагрівання, яке спричиняє значні температурні напруження що суттєво впливають на технологічність конструкції в цілому та можуть призвести до передчасного його руйнування. З метою зміцнення, підвищення термічної стабільності, захисту від впливу агресивного середовища, теплоізоляції та ін. ріжучі інструменти покривають тонкими шарами інших матеріалів [1-5]. Тому, одне з сучасних напрямків металообробки є розробка та створення покриттів для ріжучого інструменту, які витримують достатньо великі теплові та механічні навантаження з малим коефіцієнтом зносу та деформації. Такі покриття забезпечують значну термічну стабільність при високих швидкостях різання та достатню зносостійкість інструменту, що значно підвищує робочий ресурс ріжучої насадки. Робочі характеристики таких конструкційних елементів залежать від впливу температури [2-9]. Величина і закон розподілу температурних напружень в матеріалі обумовлені характером температурного поля. Тому вдосконалення методів його розрахунку у багатокомпонентних системах є актуальною задачею і має великий практичний інтерес.

На даний час математичне моделювання є ефективним методом вивчення та прогнозування фізичних процесів. Побудова та реалізація математичних моделей нестационарних процесів теплопровідності в пластинах з багат шаровим покриттям дозволяє враховувати розподіл температур, вивчити процес теплоперенесення, спрогнозувати теплофізичний характер змін механічних характеристик матеріалів. Моделюванню процесу теплопровідності в пластинах з багат шаровим покриттям присвячено багато наукових праць.

Слід відзначити, що частина розрахунків температурних характеристик пов'язана із застосуванням відомих математичних пакетів, в роботу яких

вкладені певні умови проведення та реалізації експерименту, що іноді не відповідає геометричним параметрам та технологічним характеристикам об'єктів дослідження. Наприклад, математичний пакет Thirdwave AdvantEdge [4] використовується для моделювання процесів тільки ортогонального різання інструментом з одношаровим покриттям та інструментом без покриття. Програмне забезпечення ANSYS® CFX [10] дозволяє вивчати вплив тепла в ріжучих інструментах на фізико-механічні параметри різання з урахуванням зміни товщини покриття і геометрії поширення теплового потоку. В той же час, стандартні математичні пакети та розроблене програмне забезпечення не завжди дозволяють охопити проблеми що вивчаються під час процесу різання інструментом із багатошаровим покриттям, тому розробка математичної моделі та її реалізації в рамках конкретної задачі із специфічним способом подачі теплового навантаження в ріжучу пластину із модифікованою поверхнею є актуальною на даний час.

Метою даної роботи є розробка та програмна реалізація математичної моделі що враховує розподіл температури на поверхні пластини на одній стороні якої нанесено одно- або двошарове покриття. Крім того, з метою апробації отриманих результатів, досліджується поширення теплового потоку у пластині із трьома варіантами модифікованої поверхні, які є актуальними при прогнозуванні процесів різання на даний час. Так розглядається пластина із сталі 42CrMo4(38XM) без покриття, із одношаровим покриттям TiN/42CrMo4 та двошаровим покриттям TiN/ α -Al₂O₃/42CrMo4 під дією зовнішнього теплового навантаження. Дослідження передбачає аналіз показників теплового захисту матеріалу різця в залежності від кількості захисних шарів та їх термофізичних характеристик матеріалів в їх структурі.

Практичне значення одержаних результатів міститься в тому, що розроблена та реалізована математична модель зволяє проводити розрахунки та прогнозування теплових процесів за результатами яких можна значно знижувати температурне навантаження на матеріал ріжучого інструмента тим самим подовжуючи його зносостійкість та термостабільність.

РОЗДІЛ 1

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД

На даний час металеві пластини широко використовуються як конструктивні елементи в різних областях сучасної техніки (деталі ріжучих інструментів, в парових і газових турбінах, у хімічних та ядерних реакторах, у реактивних двигунах тощо). Як правило, ці елементи працюють в умовах нерівномірного нагрівання, яке призводить до значних температурних напружень і, тим самим, система відчуває негативний вплив на технологічність конструкції що може призвести до передчасного руйнування покриттів.

З метою зміцнення поверхні, підвищення її термічної стабільності, захисту від впливу агресивного середовища, теплоізоляції та ін. її покривають тонкими шарами інших матеріалів [3-7]. Так, одне з сучасних напрямків металообробки є розробка та створення покриттів для ріжучого інструменту, які витримують достатньо великі теплові та механічні навантаження з малим коефіцієнтом зносу та деформації [13-15]. Актуальним вважається двохшарове покриття на робочій частині ріжучого інструменту, де верхній шар виконаний з твердого аморфного алмазоподібного вуглецю, а нижній шар покриття – у відповідності до технічних характеристик є карбідом титана. Такі покриття забезпечують високу термічну стабільність при високих швидкостях різання та достатню зносостійкість інструменту, що значно підвищує робочий ресурс ріжучої насадки [18, 20].

Робочі характеристики таких конструкційних елементів залежать від впливу температури [22, 24, 30]. Величина і закон розподілу температурних напружень в матеріалі обумовлені характером температурного поля. Тому вдосконалення методів його розрахунку у багатокомпонентних системах є актуальною задачею і має великий практичний інтерес.

На даний час моделювання із застосуванням математичних співвідношень є ефективним методом вивчення та прогнозування фізичних процесів. Побудова та реалізація математичних моделей нестационарних процесів

теплопровідності в пластинах з багат шаровим покриттям дозволяє враховувати розподіл температур, вивчити процес теплоперенесення, спрогнозувати теплофізичний характер змін механічних характеристик матеріалів [32, 34]. Моделюванню процесу теплопровідності в пластинах з багат шаровим покриттям присвячено багато наукових праць [30-38].

Так автори роботи [4] застосовували різні імітаційні моделі для отримання при різних силах різання конкретних енергій різання і розподілу поля адекватних температур для ряду матеріалів інструментів з покриттям і певними умовами різання методом кінцевих елементів. Код програми Thirdwave AdvantEdge використовувався для моделювання процесів ортогонального різання, що виконуються за допомогою інструменту без покриття та з покриттям. Інструменти для обробки матеріалів були оснащені поступово зростаючою кількістю тонких шарів, включаючи плівки TiC, TiN і Al_2O_3 які були нанесені на основу-підкладку із сталі марки ISO P20.

В роботі [7], модель, яка базується на методі кінцевих елементів, що використовується для моделювання плоского ортогонального різання металу, заснована на співвідношенні Лагранжа та явній динаміці процесу різання із застосуванням програмного забезпечення для моделювання термомеханічного сполучення одночасно із адаптивною перебудовою сітки. Це означає, що початкова мережа, що створена вузлами сітки, стає сформованою після певної довжини розтину, як показано на рисунку 1, знову створюючи регулярну сітку. Моделювання виконано в середовищі Thirdwave AdvantEdge. Первинне розташування як заготовки, так і інструменту в імітаційній моделі показано на рисунку 1а. Верхня частина сітки, в цій роботі складається з видаленого матеріалу заготовки, більш тонкого, щоб забезпечити напругу, деформацію, швидкість деформації і температуру та відповідний режим насадки інструмента для точного прогнозування.

Загалом, чисельне моделювання розподілу тепла в зоні різання, включаючи інструмент і чіп, були виконані для постійних параметрів різання, тобто швидкості різання від 103,2 м / хв, швидкості подачі 0,16 мм / об. і

глибина розрізу 2 мм. Всі умови різання були обрані на основі отриманих власних експериментальних даних [9].

Розподіл температури в деталі та інструменті після зняття інструментом товщини матеріалу 4,0 мм, показаний на рисунку 3. Крім того, рисунок 4 ілюструє збільшення розподілу температури в околі ріжучої кромки. Оцінку значень максимальної температури в зонах що досліджуються представлені в таблиці 1. Всі проведені авторами [4] результати моделювання показали, що різка інструментами з покриттями змінює інтенсивність теплових взаємодій, що виникають в зоні різання. Зокрема, покриття змінюють як теплопередачу, так і розподіл тепла в зоні різання, як показано на рисунку 3(d).

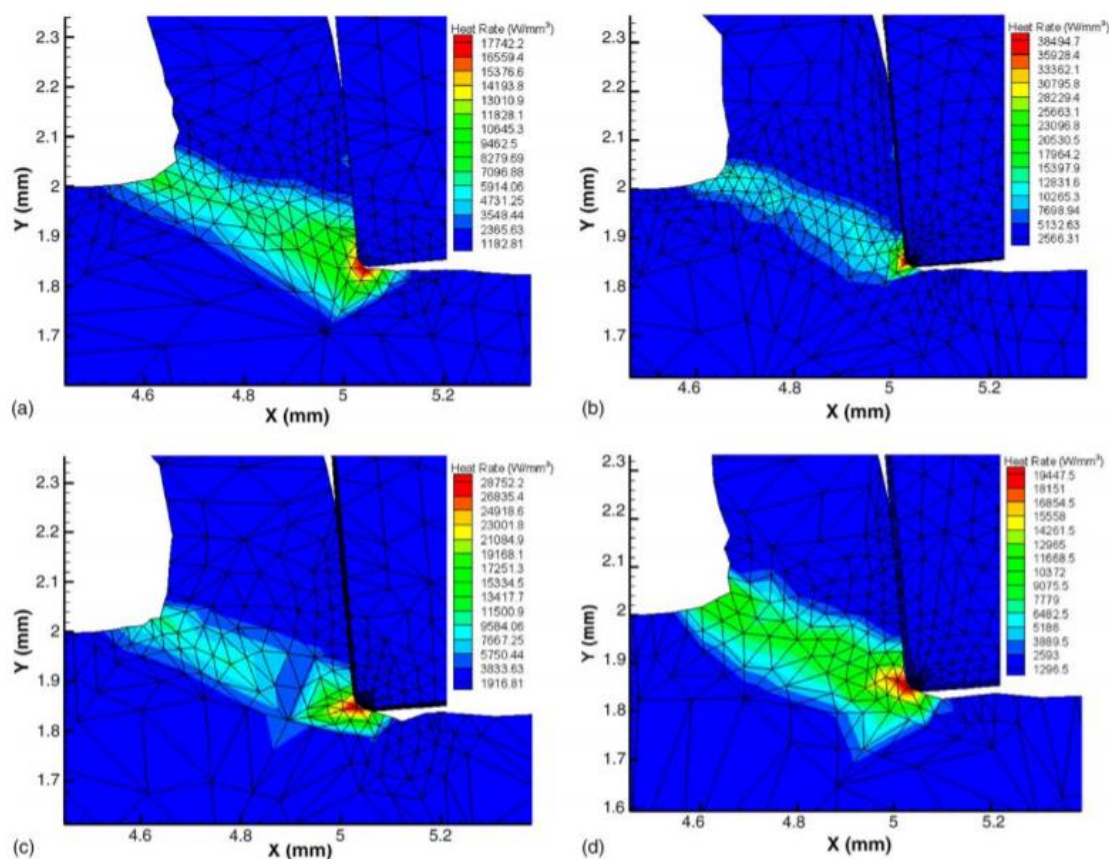


Рисунок 1. Розподіл джерел тепла для інструментів із твёрдосплавним покриттям: без покриття (a), TiC (b), TiC / TiN (c) та TiC / Al₂O₃ / TiN (d). Робочий матеріал: сталь С45; параметри різання: швидкість різання $V_c = 103,2$ м / хв, швидкість подачі $f = 0,16$ мм / об.

Таблиця 1 Значення максимальної температури в інструменті (в °C)

Coating/substrate material	Tool	Chip
P20	635.3	679.2
TiC-P20	591.8	679.8
TiC/TiN-P20	565.6	649.5
TiC/Al ₂ O ₃ /TiN-P20	524.5	650.6

Порівняння розподілу температурного поля для інструмента виготовленого з карбіду P20 (дивись рисунок 3) без покриття та для всіх видів покриттів вказує на те, що частка тепла, яка переходить в інструмент зменшується.

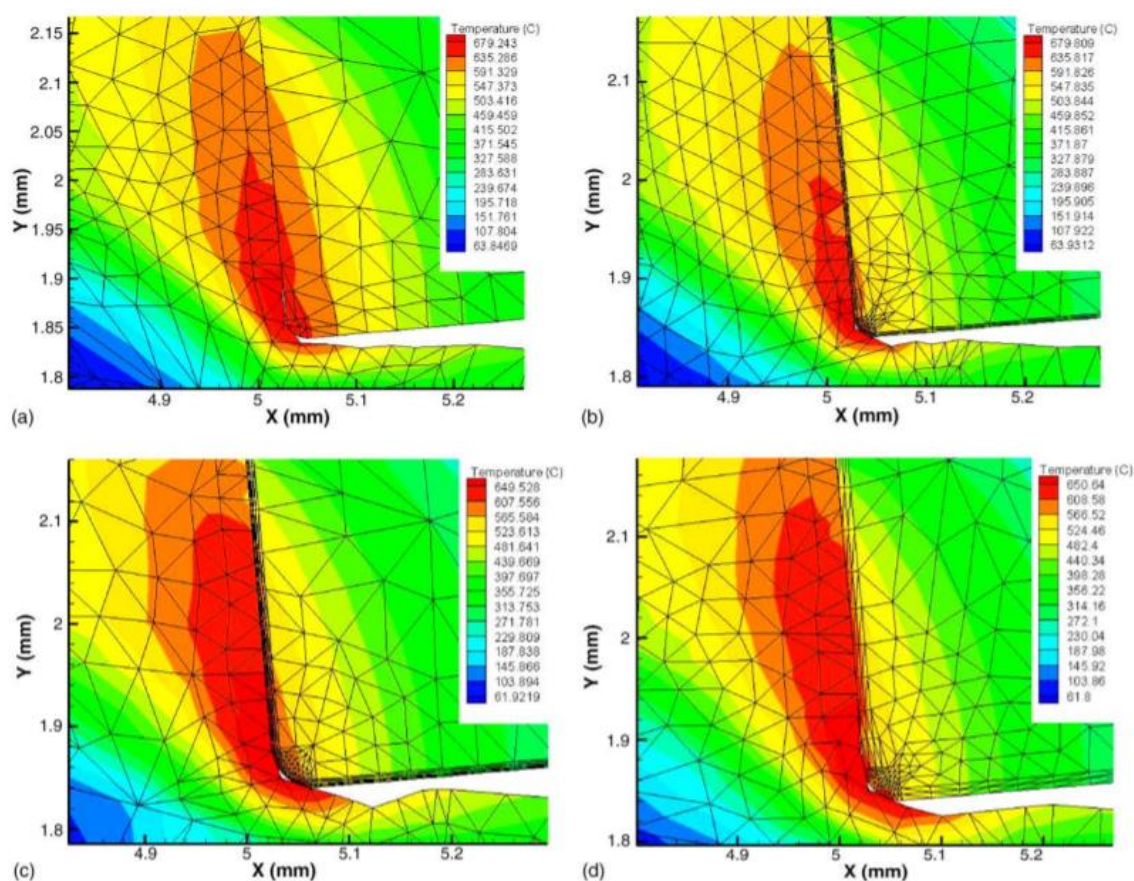


Рисунок 2. Розподіл температурного поля пластини в непокритих зразках із сталі ISO P20 (a) та TiC (b), TiC / TiN (c) та інструментах з твёрдосплавного покриття з TiC / Al₂O₃ / TiN (d).

З іншого боку, можна помітити, що більше тепла передається на чіп і заготовку. Більш того, покриття призводять до того, що області з максимальними температурами локалізовані поблизу ріжучої кромки та поверхні заготовки, тобто в першій частині контакту інструментальної стружки, яка якісно узгоджується з повідомленими модельними і експериментальними результатами [17].

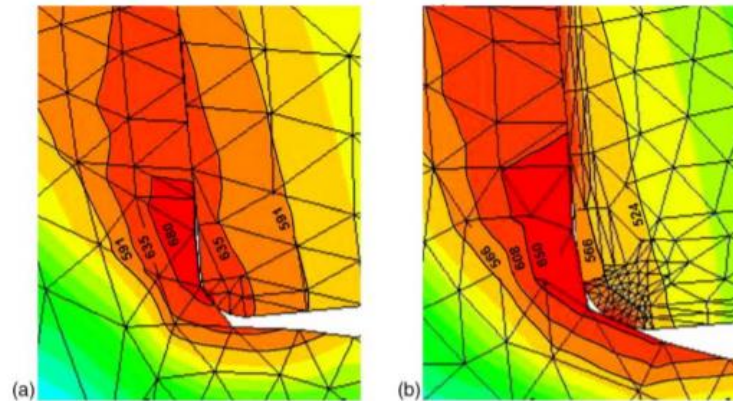


Рисунок 3. Розподіл температури в околі ріжучої кромки: матеріал P20 без покриття (а); з покриттям із TiC / Al₂O₃ / TiN (б).

Оптимізацію процесів видалення металу, які домінують в сучасному виробництві, проводиться шляхом їх моделювання на системному рівні, за допомогою моделей. Останні п'ятдесят років дослідники операцій металообробки розробили безліч методів моделювання, в тому числі аналітичні методи, рішення slip-line, емпіричні підходи і, в тому числі метод кінцевих елементів [22, 27]. Так, метод кінцевих елементів стає основним інструментом для моделювання процесів різання металу. Моделі з методом кінцевих елементів широко використовуються для розрахунку напруги, деформації, швидкості деформації та розподілу температури в первинних, вторинних і третинних зонах підрізування.

В роботі [28] проведено порівняння температурного поля інструменту без покриття і з трьома різними покриттями. Показано, що розрахункові температури на контактних поверхнях є найнижчими для непокритих

інструментів. Причина цього полягає в тому, що інструмент (підкладка) має більш високу теплопровідність, ніж покриття. Як наслідок, зона високих температур всередині інструменту більше для непокритих інструментів, ніж для інструментів з покриттям. Порівнюючи інструменти з покриттям, найбільша зона високої температури, близької до поверхні інструменту виходить для TiCN / α -Al₂O₃. Це очікувано, так як TiCN має найвище значення теплопровідності досліджених покриттів TiAlN і двошаровий TiAlN / α -Al₂O₃ дають найнижчі температури, розраховані в підкладці для інструментів з покриттям і не суттєво відрізняються від обчисленої температури поля, обидва матеріали покриття характеризуються близькими значеннями теплопровідності.

Автори статті [9] встановили, що імітаційна модель на основі метода кінцевих елементів з нестационарним тепловим потоком дозволяє просто, швидко і правильно моделювати розподіл температури в зоні різання. Крім того, в роботі розглядався вплив форм джерела тепла на розподіл температури в інструменті.

Детально процес впливу теплового навантаження на поверхню із покриттями представлено в роботі [10]. Ця робота досліджує вплив теплової енергії на ріжучі інструменти, враховуючи варіацію товщини покриття та теплового потоку. Використовують підкладку K10 та алмазні інструменти з покриттями TiN та Al₂O₃. Проблема реалізована чисельним методом. Відомі граничні умови та постійні термофізичні властивості твердих речовин, що беруть участь у чисельному аналізі. Для перевірки запропонованої методології використовуються експериментальні дані. В роботі авторів покриття TiN та Al₂O₃ не показали задовільних результатів під час процесу безперервного різання. Отримано незначне зменшення теплового потоку для покриттів TiN та Al₂O₃ товщиною 10 (мкм). На думку авторів, можлива варіація товщини відповідних покриттів для отримання задовільних результатів.

На основі проведеного аналізу, задача розробки математичної моделі для ріжучої пластини із одношаровим та двошаровим покриттям та її реалізація одним з чисельних методів в двовимірному випадку постійно залишається в

полі зору науковців. Незважаючи на значний інтерес вчених до цієї проблеми питання впливу модифікованої поверхні на фізико-термічні властивості різального інструменту є актуальним на даний час

Результати, що показують міжфазне тертя інструментальних чипів, що впливають на поля розподілу температури, як наслідок використання інструментів з покриттям, є основними і новими висновками цієї статті. Результати різних досліджень теплового моделювання порівнювалися з вимірами температури різання і обговорювалися з точки зору літературних даних.

В роботі [15] автори виконують моделювання теплових ефектів в зоні різання при механічній обробці вуглецевої сталі AISI 1045 ріжучими інструментами з карбиду з різними покриттями. У цьому дослідженні експерименти з різання були проведені з використанням багат шарових покриттів з проміжним керамічним шаром: CVDTiC / Al₂O₃ / TiN товщиною 10 мкм, що нанесені на основу з цементованого карбиду ISO-P20.

Для обробки була обрана нелегована сталь С45, що еквівалентна вуглецевої сталі AISI 1045. Протягом експерименту, параметри різання були обрані таким чином: швидкість різання від 50 до 210 м / хв, постійна подача $f = 0,16$ мм / об і глибина розрізу $a_p = 2$ мм.

Методи вимірювання були в основному аналогічні тим, які використовувалися в попередніх авторські дослідження по покриттях ріжучого інструменту. Ріжуча сила F_c і сила подання F_f інструмента вимірювалися з використанням двокomпонентного динамометра з фіксованою деформацією на стовпі токарного верстата.

Сигнали теплової е.р.с. реєструвалися за допомогою класичної інструментальної термопари і автоматично перетворювалися в еквівалентні температурні значення. Похибка вимірювання термопарою коливалась з точністю до 10 %. Після різання контактні частини торцевих поверхонь інструменту були виміряні за допомогою комп'ютерної системи обробки оптичного зображення.

Автори цієї роботи запропонували концепцію складеного шару (дивись рисунок 4), в якій всі компоненти замінені на один однорідний товстий шар, при цьому введені його еквівалентні теплові властивості. Так для тришарового покриття теплова властивість обчислювалась за допомогою термодінамічної формули

$$\frac{\sum x_i}{\lambda_{eq}} = \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2} + \frac{x_3}{\lambda_3}. \quad (1.1)$$

де x_i – значення товщини обраного i -шару ($i = 1, 2, 3$), λ_i – теплова провідність i -шару, $\sum x_i$ – загальна товщина стека (композитний шар), λ_{eq} є еквівалентною теплопровідністю композитного шару.

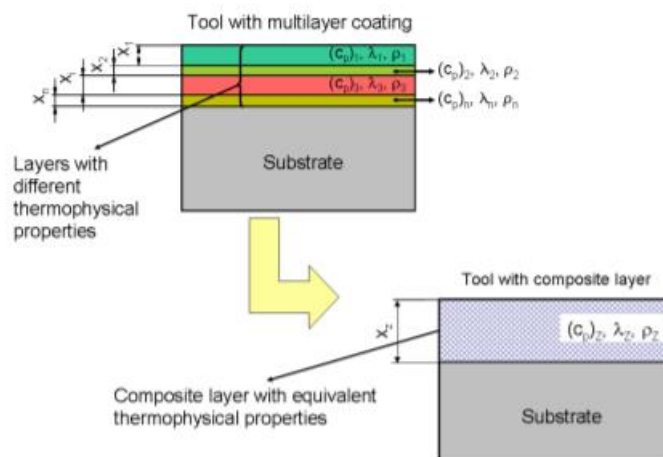


Рисунок 4. Схема концепції композитного шару

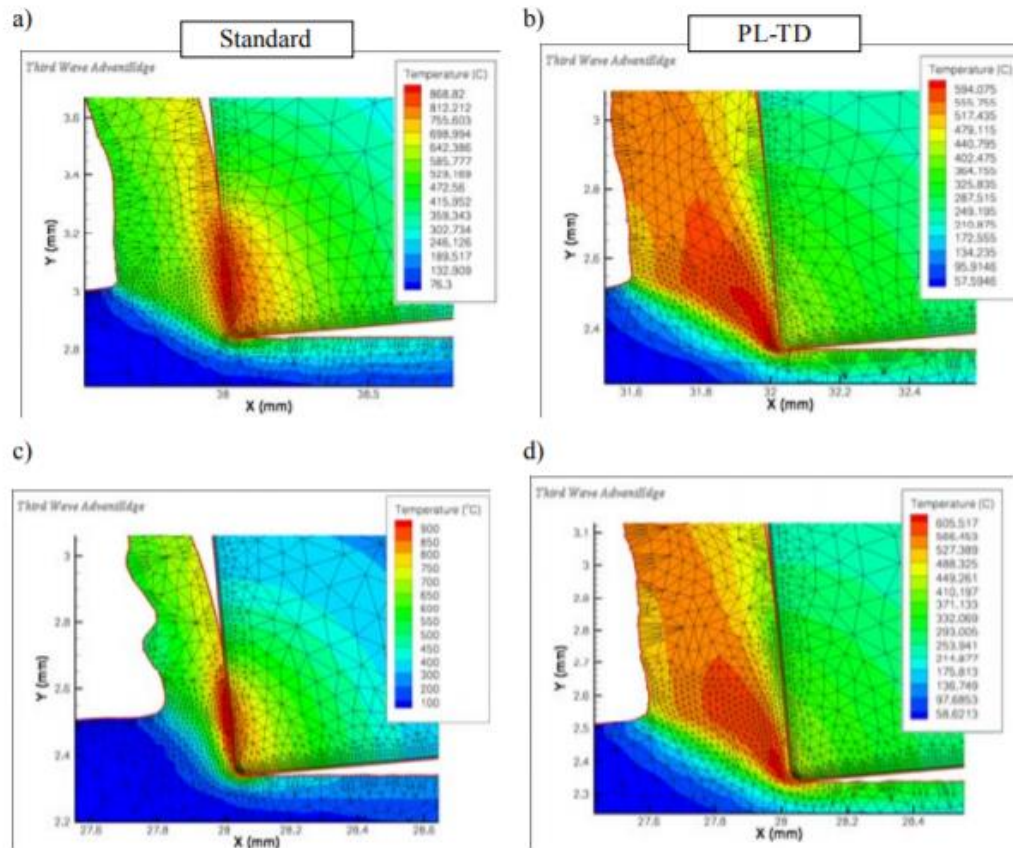


Рисунок 5. Теплові карти, що отримані стандартним методом кінцевих різниць (FEM) і за допомогою PL-TD моделювання : а), б) інструмент з матеріалу ISO-P20 без без покриття, с), д) інструмент з трешаровим покриттям (швидкість різання $V_c = 103,2$ м / хв).

Експериментально визначали теплофізичні властивості оброблюваної деталі (дивись рисунок 5) та випробувані матеріали різального інструменту.

Для багатшарових покриттів, нанесених на карбідні інструменти, застосовувався композитний шар із еквівалентними теплофізичними властивостями. Моделювання теплових ефектів в роботі [17] відбувалось трьома способами а саме: за допомогою аналітичного алгоритму, а також чисельне моделювання FEM та PL-TD. В роботі зроблений порівняльний аналіз результатів дослідження вибраними методами. Так, ці методи випробування були розглянуті з точки зору їх придатності для оцінки оптимальної термічної стійкості структур захисного покриття різального інструменту та їх практичного застосування.

Автори [16] розглянули процес виділення тепла в процесі обробки металів різанням. Розроблено математичну модель розподілу температури в ріжучій пластині. Проведена дискретизація математичної моделі на основі локально одновимірної схеми О. А. Самарського. Реалізовано чисельний розрахунок температурного поля пластини. На рисунку 6 представлений розподіл температур в різні моменти часу від початку обробки при заглибленні різця на 50%.

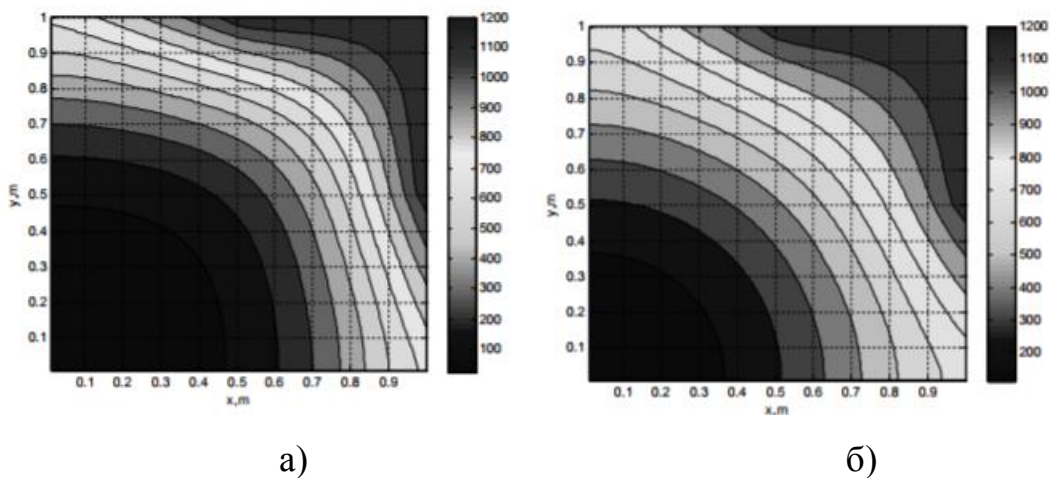


Рисунок 6. Розподіл температури в 0,5t (а) та кінцевий момент (б) часу при заглибленні різця на 50%

Завдяки введенню допоміжних дрібних кроків науковці отримали стійку схему, завдяки чому замість однієї матричної прогонки застосовувати дві звичайні, що значно зменшує, на думку вчених, обсяг обчислень. Даний метод дозволяє частково знизити витрати на проведення експериментальних досліджень.

У дослідженні [11] розподіл температури в зоні різання визначався шляхом інтеграції термічних аналітичних і імітаційних моделей ортогонального процесу різання з використанням інструментів без покриття і з карбідним покриттям. В першу чергу, моделювання за допомогою 2D FEM метода проводилося для забезпечення численних рішень температурного поля, що

виникає в різних точках області контакту кристала / інструменту і на кордоні покриття / підкладки при заданих умовах різання (дивись рисунок 7).

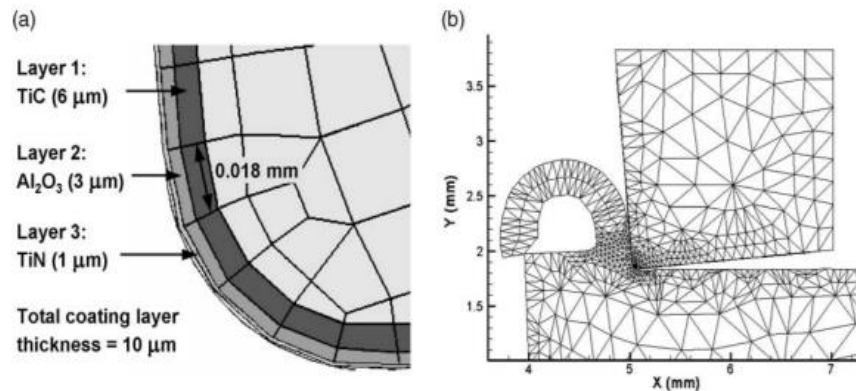


Рисунок 7. Модель сітки для інструменту з покриттям з TiC / Al_2O_3 / TiN , (а) і форми деформованого елемента після обробки інструментом з траєкторією в 4,0 мм та з радіусом ріжучої кромки 33 мм і сіткою у 1460 вузлів, отриманих в цьому дослідженні (б).

Аналітична модель теплообміну в ріжучому інструменті і його розбиття на відповідні ділянки, заснована на фізиці моделювання температур розділу при механічній обробці з використанням багатошарового інструменту з помірною швидкістю різання. Розрахунковий підхід для оцінки перепаду температур і тепла при механічній обробці з використанням інструментів з багатошаровим покриттям був використаний для генерації вхідних даних для обчислення температури інтерфейсу інструменту-чіпа. Зміни полів температурного розподілу, що виникають в результаті зміни теплового потоку є основними результатами моделювання FEM. Нарешті, аналітично і чисельно передбачені середні температури були перевірені на основі вимірів за допомогою термопари на інструментальній основі і обговорювалися з точки зору відповідних літературних даних.

Розподіл температури в заготівлі та інструменті ближче до ріжучої кромці після траєкторії інструменту 4,0 мм, показаний у вигляді збільшених зображень на рисунку 8(a) і 8(b). В роботі також представлені максимальні температури які розраховані аналітично та визначені за допомогою теплових

карт.

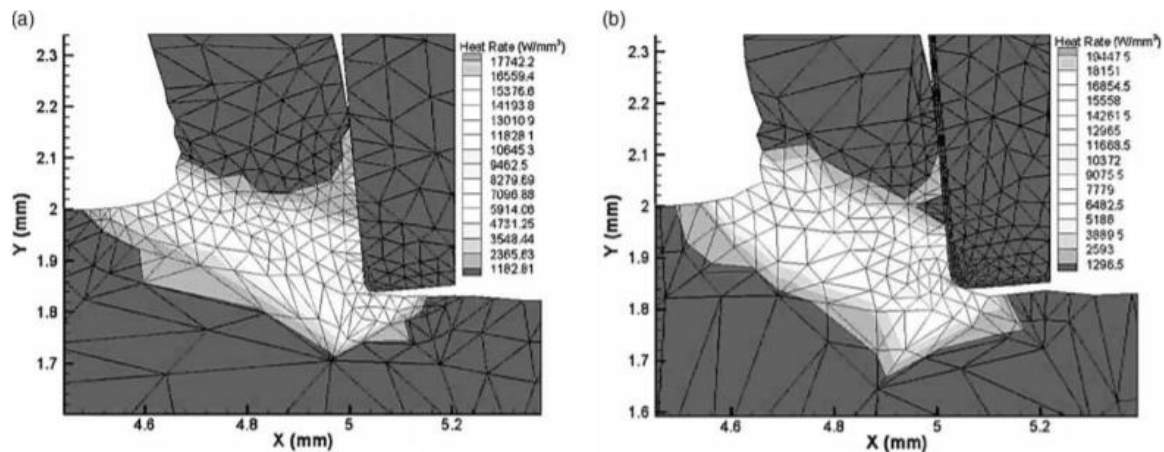


Рисунок 8. Розподіл джерел тепла для інструментів з покриттям з нержавіючої сталі ISO P20 (a) і TiC / Al₂O₃ / TiN (b).

Слід зазначити, що автори роботи отримали максимальні температури, існуючі в інструменті, які були визначені методом FEM і за допомогою аналітичного методу і встановили, що вони розрізняються по суті, для обох матеріалів ріжучого інструменту. Так різниця складає близько 150°C. Зокрема, було зафіксовано, що області з максимальними температурами локалізовані поблизу кристала і заготовки. Зроблений висновок, що підкладка під тонким покриттям помітно більш холодна в порівнянні з нагрівом інструмента без покриття.

Висновки до розділу 1

Літературний огляд вказує на те, що питання моделювання теплового поля ріжучих інструментів є актуальним і постійно знаходиться в полі зору науковців. В той же час, аналіз літературних джерел вказує на те, що для моделювання процесів тепло перенесення використовуються стандартні математичні пакети, які не завжди можуть врахувати геометрію процесу різання та розташування зони поширення теплового потоку. Розробка математичної моделі для теплового поля ріжучого інструменту із багат шаровим покриттям є актуальною на даний час.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РЕАЛІЗАЦІЯ

2.1. Загальний метод виведення рівняння теплопровідності

Звернемось до об'єкту D – тривимірному ізотропному тілу, температура в кожній точці (x, y, z) в довільний момент часу t визначається за допомогою функції $u(x, y, z, t)$. Розглянемо ситуацію, коли різні елементи такого тіла знаходяться при різній температурі. При таких умовах в тілі буде відбуватися переміщення теплового потоку від більш теплих частин до менш нагрітих. Для виведення рівняння поширення теплового поля розглянемо всередині тіла довільний об'єм V , обмежений гладкою замкнутою поверхнею Σ . Розглянемо зміну кількості тепла в цьому обсязі за довільний проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3, \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називають рівнянням теплового балансу. Причому, Q_1 – кількість тепла, що входить в об'єм V через його поверхню Σ за час $[t_1, t_2]$, Q_2 – тепло, яке виробляється об'ємом V за проміжок часу $[t_1, t_2]$, Q_3 – теплота, витрачена на нагрівання V . Обчислимо величини, Q_1 , Q_2 і Q_3 . Візьмемо на поверхні Σ всередині тіла малий елемент ΔS в околі точки $M(x, y, z)$, n_i – внутрішня нормаль, n_l – зовнішня нормаль. В даному випадку має місце закон Фур'є в якому йде про те, що кількість теплоти, що проходить через площадку ΔS за час Δt пропорційно $\Delta S \cdot \Delta t$ зміни температури вздовж нормалі:

$$\Delta Q = -k \Delta S \Delta t \frac{\partial u}{\partial n_i} \quad (2.2)$$

Тут k – коефіцієнт теплопровідності. Будемо вважати, що тіло ізотропно щодо теплопровідності, якщо коефіцієнт теплопровідності k залежить тільки

від точки тіла (x, y, z) і не залежить від напрямку нормалі до поверхні Σ в цій точці.

Покажемо, що в тому випадку, коли тепло йде всередину тіла, потік тепла ΔQ_1 позитивний ($\Delta Q_1 > 0$). Маємо $k > 0$; $\Delta S > 0$; $\Delta t > 0$.

При $\frac{\partial u}{\partial n_i} < 0$ (тепло йде всередину тіла) $\Rightarrow \Delta Q_1 > 0$ температура уздовж нормалі зменшується. В іншому випадку $\frac{\partial u}{\partial n_i} > 0$ (тепло виходить з тіла) температура уздовж нормалі збільшується і маємо $\Delta Q_1 < 0$. Таким чином отримуємо:

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Sigma} (-k) \frac{\partial u}{\partial n_i} ds = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Sigma} k \frac{\partial u}{\partial n_i} ds \quad (2.3)$$

Знайдемо Q_2 . Нехай $p(x, y, z, t)$ – об'ємна щільність розподілу внутрішніх джерел тепла. Тоді кількість тепла, що виробляється об'ємом V за одиницю часу визначиться як:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V p(x, y, z, t) dV \quad (2.4)$$

Розглянемо елемент об'єму ΔV . Для зміни температури цього елемента на Δu за проміжок часу $[t_1, t_2]$ потрібно затратити кількість тепла:

$$\Delta Q_3 = c \Delta m \Delta u \quad (2.5)$$

де c – теплоємність речовини, яка залежить від x, y, z , Δu – різниця температур:

$$\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad (2.6)$$

де Δm – маса речовини $\Delta m = \rho \Delta V$, $\rho = \rho(x, y, z)$ – щільність речовини, яку ми вважаємо що не залежить від часу t . Тоді кількість тепла, що витрачено на нагрівання об'єму ΔV :

$$\Delta Q_3 = c\rho \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \Delta V . \quad (2.6)$$

Таким чином, кількість тепла, яке необхідне для зміни температури об'єму V на Δu , дорівнює:

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (2.7)$$

Підставимо Q_1 , Q_2 і Q_3 в формулу (2.1), але перш за все за формулою Гаусса-Остроградського перетворимо Q_1 :

$$\iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV , \quad (2.8)$$

де $\cos \alpha$, $\cos \beta$ і $\cos \gamma$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі.

1.1.6. З огляду на, що похідна по напрямку вектора l

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(l, Ox) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(l, Oy) + \frac{\partial u}{\partial z} \cos(l, Oz)$$

маємо:

$$\iint_{\Sigma} k \frac{\partial u}{\partial n_1} ds = \iint_{\Sigma} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + k \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + k \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) ds =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) dV = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) dV.$$

Тут визначені дивергенція вектора \bar{a} :

$$\operatorname{div} \bar{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z$$

і градієнт функції:

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}.$$

Таким чином, формула (2.1) набуде вигляду:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left(\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + p(x, y, z, t) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (2.9)$$

Вираз (2.9) являє собою інтегральне рівняння поширення тепла. Так як в (2.9) підінтегральна функція неперервна, об'єм V і проміжок часу $[t_1, t_2]$ довільні, то для будь-якої точки (x, y, z) розглянутого тіла і для будь-якого моменту часу має виконуватися рівність:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + p(x, y, z, t) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (2.10)$$

Вираз (2.10) називається рівнянням теплопровідності неоднорідного ізотропного тіла.

Нехай тіло однорідне, тоді k , c і ρ постійні. У цьому випадку справедливо рівність:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = k \operatorname{div} \operatorname{grad} u = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \equiv k \Delta u. \quad (2.11)$$

і рівняння (2.11) приймає вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad (2.12)$$

– рівняння поширення тепла в однорідному тілі, де позначено $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $f = \frac{p}{c\rho}$.

Якщо в розглянутому однорідному тілі немає джерел тепла $f(x, y, z, t) \equiv 0$, то отримуємо однорідне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u. \quad (2.13)$$

В окремому випадку, коли температура залежить тільки від координат x , y і часу t , що, наприклад, має місце при поширенні тепла в дуже тонкій пластинці, отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (2.14)$$

Цей вираз називається рівнянням поширення тепла в двовимірному тілі.

2.2 Умови протікання процесу

2.2.1 Початкові умови

Диференціальне рівняння теплопровідності (2.14) дозволяє встановити співвідношення між тимчасовими і просторовими змінами температури тіла; воно дозволяє за допомогою математичних співвідношень описати перенесення тепла що відбувається всередині тіла. Для того щоб описати або визначити температурне поле всередині об'єкта що досліджується в будь-який визначений момент часу, тобто, щоб знайти розв'язок диференціального рівняння, треба

знати розподіл температури всередині тіла у визначені моменти часу. Наприклад, у початковий момент часу, так звана початкова умова. Крім того, на розподіл температури впливає геометрична форма тіла або пластини і закон обміну теплотою між навколишнім середовищем та поверхнею тіла .

Сукупність початкової і граничної умов називається крайовими умовами; початкова умова називається часовою крайовою умовою, а гранична умова - просторовою крайовою умовою. Початкова умова визначається завданням закону розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу, т. е

$$t=0: T = f(x, y, z) . \quad (2.15)$$

де $f(x, y, z)$ – невідома функція.

При рівномірному розподілу температури в тілі початкова умова спрощується: $t=0: T = T_0 = const$.

2.2.2 Граничні умови

Граничні умови задають або дозволяють описати особливі моменти протікання процесу теплообміну на поверхні тіла і можуть бути задані декількома способами.

1. Граничні умови першого роду – за допомогою них задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$T=T_w(x,y,z,t) \quad (2.16)$$

T – температура на поверхні тіла .

Припускається, що температура на поверхні не змінюється протягом усього процесу теплообміну. Це може бути здійснено при штучному підтриманні постійної температури або при особливих умовах теплообміну між навколишнім середовищем і поверхнею тіла.

2. Граничні умови другого роду – задається значення теплового потоку для кожної точки поверхні (або межі) тіла в будь-який момент часу:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = q_w(x, y, z, t), \quad (2.17)$$

де \bar{n} – нормаль до поверхні тіла. Найбільш часто використовується умова $q_w = \text{const}$. Такий варіант теплообміну має місце, наприклад, при нагріванні різних виробів в високотемпературних печах.

3. Граничні умови третього роду – встановлюються коли задається взаємозв'язок між потоком тепла за рахунок теплопровідності від твердої стінки і тепловим потоком з навколишнього середовища за рахунок температурного напору (закон Ньютона - Рихмана):

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \alpha(T_w - T^e), \quad (2.18)$$

де α - коефіцієнт теплообміну. Це найбільш широко застосовується умова в задачах теплотехніки.

4. Граничні умови четвертого роду - для визначення теплової взаємодії між елементами, що мають різні теплофізичні характеристики, задають умови рівності температур і теплових потоків по обидва боки від кордону розділу:

$$-\lambda_c \left(\frac{\partial T_c}{\partial n} \right)_r = -\lambda_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_r. \quad (2.19)$$

Ця умова поширюється, наприклад, при вирішенні задач теплопровідності для багатошарових пластин.

2.3 Математична модель

Розглянемо ріжучу пластину з розмірами $Lx \times Ly$ (дивись рисунок 9). Будемо вважати, що по одній із сторін пластини на ділянці T_k структура відчуває вплив теплового навантаження Q . Його інтенсивність рівномірна вздовж вказаної ділянки. На верхню сторону пластини з боку дії зовнішнього теплового впливу нанесено двошарове покриття товщиною $h_1 = Ly - y_1^*$, та $h_2 = y_1^* - y^*$ відповідно. Положивши, що всі інші сторони теплоізовані, а температурне поле не залежить від координати z , сформулюємо математичну постановку задачі.

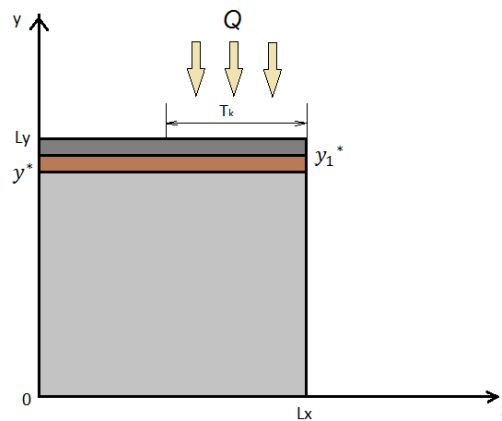


Рисунок 9. Схематичне зображення пластили із двошаровим захисним покриттям що знаходиться під частковим впливом теплового джерела

Математична постановка задачі буде мати вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 c_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad \begin{cases} 0 < x < Lx \\ 0 < y < y^* \end{cases} \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad \begin{cases} 0 < x < Lx \\ y^* < y < y_1^* \end{cases} \\ \rho_3 c_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad \begin{cases} 0 < x < Lx \\ y_1^* < y < Ly \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.20)$$

де c_i – питома теплоємність матеріалу (Дж/кг·°К); ρ_i – густина (кг/м³); λ_i – теплопровідність (Вт/кг·°К).

В початковий момент часу температура ріжучої пластини у всіх її точках дорівнює $T_0 = 20^\circ\text{C}$, що відповідає початковим умовам:

$$t = 0: T = T_0, \quad 0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y \quad (2.21)$$

Встановимо граничні умови задачі. На границі L_y ділянка ріжучої пластини T_k , довжина якої $\frac{L_x}{2}$, безпосередньо стикається з оброблюваною деталлю і зовнішня теплота передається в різець. Це гранична умова третього роду.

$$y = L_y: \frac{L_x}{2} < L_x, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k(T_k - T_0), \quad t > 0. \quad (2.22)$$

На нижній границі пластини встановлюються граничні умови першого роду, так як далі знаходиться державка різця і можна вважати температуру сталюю.

$$y = 0: T = T_0, \quad t > 0. \quad (2.23)$$

На всіх інших зовнішніх границях, задані умови теплообміну третього роду з навколишнім середовищем вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0, x = L_x \\ 0 < x < \frac{L_x}{2}, y = L_y \end{array} \right\}; \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = k(T_c - T_0), \quad t > 0, k > 0. \quad (2.24)$$

На границях y^* та y_1^* використовуються граничні умови четвертого роду, так як це умови на поверхнях трьох тіл, які мають різні коефіцієнти теплопровідності. Припускається, що між пластиною та захисними шарами відбувається ідеальний контакт.

$$\begin{cases} T_1(t, y^*) = T_2(t, y^*) \\ T_2(t, y_1^*) = T_3(t, y_1^*) \\ -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} |_{y=y^*} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} |_{y=y^*} \\ -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} |_{y=y_1^*} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial y} |_{y=y_1^*} \end{cases} \quad (2.25)$$

Отже, сформульована задача пошуку функції теплового поля $T(x, y, t)$, що задовольняє заданим рівнянням та граничним умовам для вказаної структури об'єктів.

Висновки до розділу 2

1. Вивчені математичні співвідношення на основі формули формулою Остроградського-Гаусса, що дозволяють отримати диференціальне рівняння теплопровідності, яке встановлює зв'язок між тимчасовими і просторовими змінами температури тіла та математично описує перенесення тепла всередині тіла.

2. Встановлені граничні умови протікання процесу який досліджується. Розглянуті умови першого роду які описують теплове поле пластини в кожний момент часу. Умовами другого роду задано значення теплового потоку для кожної точки поверхні тіла в будь-який момент часу. Задані умови третього роду, які задають інтенсивність теплообміну системи з навколишнім середовищем. За допомогою умов четвертого роду врахований теплообмін між шарами покриттів, що мають різні теплофізичні показники. При встановленні граничних умов математичної задачі врахований розмірний інтервал на якому відбувається рівномірний нагрів пластини.

3. Складена система диференціальних рівнянь, що описує тепловий стан пластини із нанесеними на неї шарами покриттів в різні моменти часу.

4. Сформульована задача пошуку функції теплового поля $T(x, y, t)$, що задовольняє заданим диференціальним рівнянням та граничним умовам для вказаної структури об'єктів.

РОЗДІЛ 3

РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

3.1 Метод змінних напрямків (поздовжньо-поперечна схема)

Метод кінцевих різниць заснований на заміні похідних їх наближеним значенням, вираженим через різниці значень функції в окремих дискретних точках - вузлах сітки. Диференціальне рівняння в результаті таких перетворень замінюється еквівалентним співвідношенням в кінцевих різницях, рішення якого зводиться до виконання нескладних алгебраїчних операцій. Остаточний результат рішення дається виразом, за яким значення «майбутнього» потенціалу (температури) в даній точці (вузлі) є функцією часу, її «справжнього» потенціалу і «справжнього» потенціалу суміжних вузлових точок. Повторюваність однакових операцій при розрахунку полів температури створює великі зручності для застосування сучасної обчислювальної техніки, завдяки чому ефективність роботи у багато разів збільшується.

Для апроксимації диференціального рівняння (2.20) різницевим введемо просторово-часову сітку з координатами

$$x_i = (i - 1) * h_x, \quad y_j = (j - 1) * h_y, \quad t_n = n * \tau, \quad (3.1)$$

де h_x, h_y – шаг сітки по координатам x, y відповідно; τ -шаг по часу; $i = \overline{1, N_x}$; $j = \overline{1, N_y}$; $n = \overline{0, K}$. вся розрахункова область (дивись рисунок 9) покривається сіткою (дивись рисунок 10).

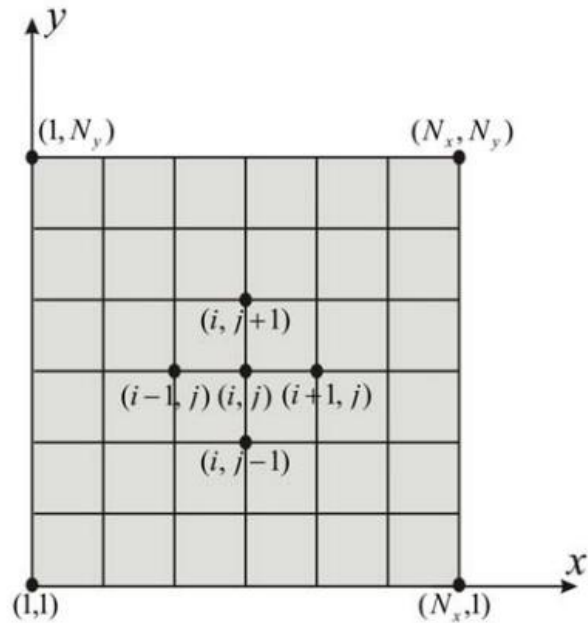


Рисунок 10. Різницева сітка області розв'язку

Введемо наступне позначення:

$$T(x_i, y_j, t_n) = T_{i,j}^n. \quad (3.2)$$

Дискретизацію рівняння (2.13) будемо проводити на основі локально одновимірної схеми А.А. Самарського [11], яка є абсолютно стійкою і має властивість сумарною апроксимації. Сутність цього підходу полягає в тому, що крок за часом реалізується в два етапи – на проміжному часовому кроці проводимо дискретизацію двовимірного рівняння (2.13) тільки в напрямку осі x і отримуємо одновимірний рівняння, після його рішення проводимо знову дискретизацію рівняння (2.13), але вже в напрямку осі y , вирішуючи отримане одновимірне рівняння, визначаємо поле температури на цілому кроці по часу.

Замінімо диференціальні оператори в (2.13) на їх кінцеворізницеві аналоги

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\tau}; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2 * T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2}; \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau}; \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2 * T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{h_y^2}. \quad (3.6)$$

В результаті апроксимації приватних похідних відповідними кінцевими різницями отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\rho * c * \frac{T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - T_{i,j}^n}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2 * T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right), \quad (3.7)$$

$$\rho * c * \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \lambda \left(\frac{T_{i+1,j}^{n+1} - 2 * T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}}{h_y^2} \right), \quad (3.8)$$

Різницеві рівняння (3.7), (3.8) зводяться до стандартного трьох діагонального виду і вирішуються послідовно методом прогонки. Спочатку для всієї області вирішується рівняння (3.7), після того як його рішення буде знайдено, переходять до вирішення рівняння (3.8). Розглянемо рішення рівняння (3.7) методом [13] прогонки. Наведемо це рівняння до виду

$$A_i T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} = F_i. \quad (3.9)$$

Тоді коефіцієнти A_i, B_i, C_i приймуть вид;

$$A_i = C_i = \frac{\lambda}{h_x^2}, \quad B_i = \frac{2\lambda}{h_x^2} + \frac{\rho * c}{\tau}, \quad F_i = -\frac{\rho * c * T_{i,j}^n}{\tau}. \quad (3.10)$$

Такі рівняння називають трьох точковими різницевиими рівняннями другого порядку. Система (3.9) має трьох діагональну структуру. У зв'язку з тим, що розглядається нестационарна задача, систему (3.10) необхідно вирішувати на кожному кроці за часом.

Припустимо, що існують такі набори чисел α_i и β_i ($i = \overline{1, N-1}$) при яких:

$$T_i^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_i * T_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i \quad (3.11)$$

Тобто трьохточкове рівняння другого порядку (3.9) перетворюється в двохточкове рівняння першого порядку (3.11). Зменшимо в (3.11) індекс на одиницю і отриманий вираз $T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} * T_i^{n+1} + \beta_{i-1}$ підставимо в дане рівняння (3.10)

$$A_i T_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - B_i T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i * \alpha_{i-1} * T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_i * \beta_{i-1} = F_i. \quad (3.12)$$

Звідки отримуємо:

$$T_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} T_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{C_i * \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \quad (3.13)$$

Остання рівність має вигляд (3.12) і буде точно з ним збігатися, якщо при всіх $i = 2, 3, \dots, N-1$ виконуються співвідношенням:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i * \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}. \quad (3.14)$$

Для визначення α_i и β_i по (3.13) необхідно знати α_1 и β_1 , які знаходяться з лівої граничної умови. Далі визначаючи значення $T_{N,x,j}^{n+\frac{1}{2}}$ з правої

граничної умови, знаходимо поле температури $T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ на проміжному часовому шарі за формулами (3.12). Після цього приступаємо до вирішення рівняння (3.11). Етапи рішення рівняння (3.11) аналогічні рішення рівняння (3.10).

Перехід від шару n до шару $n + 1$ відбувається в два етапи з кроками $0,5\tau$;

$$\frac{u^{n+\frac{1}{2}} - u^n}{\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^n), \quad (3.15)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{1}{2}(\Lambda_1 u^{n+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u^{n+1})$$

Покажемо, що схема (3.15) еквівалентна деякій однорідній [21] схемі, є безумовно стійкою і безумовно апроксимуючою рівняння.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

запишемо (3.15) в вигляді:

$$A_1 u^{n+\frac{1}{2}} - B_1 u^n = 0, \quad (3.16a)$$

$$A_2 u^{n+1} - B_2 u^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad (3.16b)$$

$$A_1 = E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_1, \quad A_2 = E - \frac{1}{2}\tau\Lambda_2; \quad (3.17)$$

$$B_1 = E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_2, \quad B_2 = E + \frac{1}{2}\tau\Lambda_1$$

Помножимо рівняння (3.16a) зліва на оператор B_2 , рівняння (3.16b) на A_1 и додамо. В результаті отримуємо:

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_2 B_1 u^n + (B_2 A_1 - A_1 B_2) u^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

Припускаючи комутативність операторів Λ_1, Λ_2 , приходимо до схеми

$$A_1 A_2 u^{n+1} - B_2 B_1 u^n = 0. \quad (3.18)$$

Підставляючи (3.17) в (3.18), після нескладних перетворень отримуємо наступну однорідну схему:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{2} (u^n - u^{n+1}) - \frac{1}{4} \tau \Lambda_1 \Lambda_2 (u^{n+1} - u^n) \quad (3.19)$$

Звідси випливає, що схема (3.19) і еквівалентна їй схема (3.15) апроксимують рівняння теплопровідності з тією ж точністю, що і схема

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

доведемо безумовну стійкість схеми (3.19) або, що те ж є (3.15). Припустимо

$$u^n = \eta_n e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}; \quad u^{n+\frac{1}{2}} = \eta_{n+\frac{1}{2}} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (3.20)$$

Підставляючи (3.20) в (3.15), отримуємо

$$\rho_1 = \frac{\eta_{n+1/2}}{\eta_n} = \frac{1 - \frac{1}{2} a_2}{1 + \frac{1}{2} a_1} \quad (3.20a)$$

$$\rho_2 = \frac{\eta_{n+1}}{\eta_{n+1/2}} = \frac{1 - \frac{1}{2} a_1}{1 + \frac{1}{2} a_2} \quad (3.20б)$$

$$\rho = \frac{1 - \frac{1}{2} a_2}{1 + \frac{1}{2} a_1} * \frac{1 - \frac{1}{2} a_1}{1 + \frac{1}{2} a_2} = \rho_1 \rho_2 \quad (3.20в)$$

$$\text{де } a_s = 4r_s \sin^2 \frac{k_s h_s}{2}, \quad r_s = \frac{a^2}{h_s^2}, \quad s = 1; 2. \quad (3.21)$$

Звідси, випливає

$$|\rho| \leq 1$$

при будь-якому τ . Стійкість схеми (3.15) доведена. Неважко встановити, що з (3.19) виходить той же вираз для ρ . Таким чином, завдяки введенню

допоміжних дрібних кроків ми отримали абсолютно стійку схему. При цьому замість однієї матричної прогонки потрібно застосовувати дві звичайні прогонки, що значно зменшує обсяг обчислень.

Проаналізуємо формули (3.20). Рівність (3.20) означає, що на першому півкроку помилка в напрямку x_1 зменшується в $1 + \frac{1}{2}a_1$ раз, помилка в напрямках x_2 збільшується в $1 - \frac{1}{2}a_2$ раз; ; на другому півкроку, навпаки, помилка в напрямку x_1 зростає в $1 - \frac{1}{2}a_1$ раз, в напрямку x_2 убуває в $1 + \frac{1}{2}a_2$ раз. Отже, необхідно міняти напрямки x_1, x_2 ролями, що і робиться в схемі. У методі поперемінного неявного рахунку інтегрування в кожному напрямку йде поперемінно то за допомогою явної, то за допомогою неявної схеми і зростання помилки в явній схемі компенсується спаданням помилки в неявній схемі.

Як би сильно не виросла помилка в будь-якому напрямку на даному півкроку, на наступному півкроку вона обов'язково зменшиться, так що на двох півкроках вона не зростає по модулю. Звідси відразу видно перевага схеми поздовжньо-поперечної прогонки.

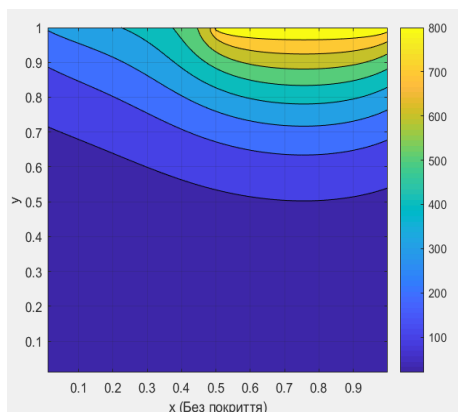
3.2. Результат роботи програми

На основі отриманих математичних залежностей проведено моделювання теплового поля плоскої пластини під час впливу джерела тепла на деталь. Алгоритм роботи комп'ютерної програми представлений в додатку 2. Програма була реалізована в середовищі MATLAB 17. Код програми представлений в додатку 1. Так досліджувалось температурне поле плоскої пластини в трьох варіантах. По-перше, встановлено температурне поле пластини ріжучого інструменту виготовленої з сталі марки 38ХМ (42CrMo4) – традиційної конструкційної лігваної сталі. Отримане температурне поле представлено на рисунку 11 (а). Для отримання відповідних параметрів спиралися на термофізичні властивостей матеріалів основи та покриття представлених в таблиці 2.

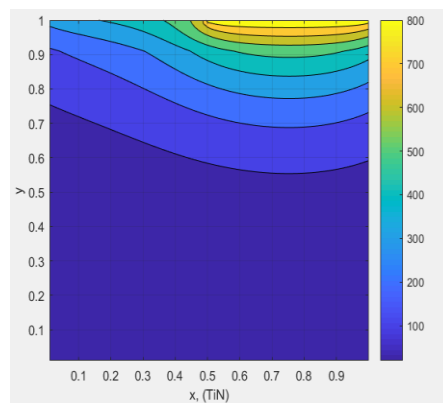
Другий етап дослідження складався з отримання температурного поля пластини з сталі марки 38ХМ (42CrMo4) із зносостійким покриттям з TiN. Так покриття ріжучих інструментів нітридом титану значно знижує абразивний знос інструменту. Крім того хімічна інертність цього неметалевого покриття знижує ймовірність виникнення мікроадгезії між металевою деталлю і резцом, що знижує, в тому числі, і адгезійний знос інструменту.

Порівняння поширення теплового фронту на рисунках 11(а) та 11 (б) показує дещо зменшення теплоти що проходить в середину пластини у моделі із захисним покриттям.

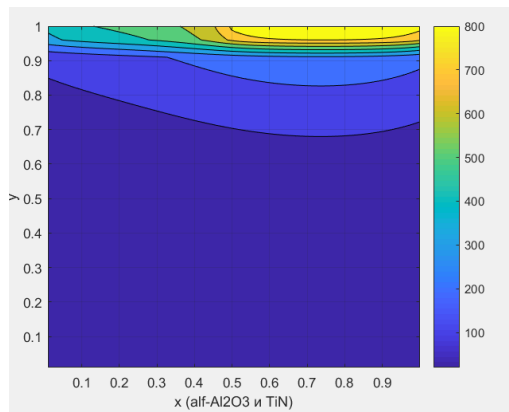
Рисунок 11 (в) формує уявлення про розподіл температури в пластині із двошаровим захисним покриттям нанесеним за схемою TiN/ α -Al₂O₃/42CrMo4. Так, проміжний слой α -Al₂O₃ запобігає дифузії матеріалу основного покриття в ріжучу пластину та підвищує механічну стійкість системи в цілому. Двошарове покриття за своїми термофізичними показниками забезпечує значне зниження температурного потоку в матеріалі різця, тим самим зменшуючи теплове навантаження на різучий інструмент, що приводить до збільшення терміну його використання.



а)



б)



в)

Рисунок 11. Температурне поле пластини:

а) без покриття;

б) із одношаровим покриттям TiN/42CrMo4;

в) із двошаровим покриттям TiN/α-Al₂O₃/42CrMo4

Таблиця 2

Термофізичні властивості матеріалів при 900 °С [14]

	38ХМ (42CrMo4)	α-Al ₂ O ₃	TiN
Густина (ρ) (кг/м ³)	7800	3780	5420
Питома теплоємність матеріалу (с) (Дж/кг·°К)	476	1252	857,6
Теплопровідність (λ) (Вт/кг·°К)	46	5,5	25,5

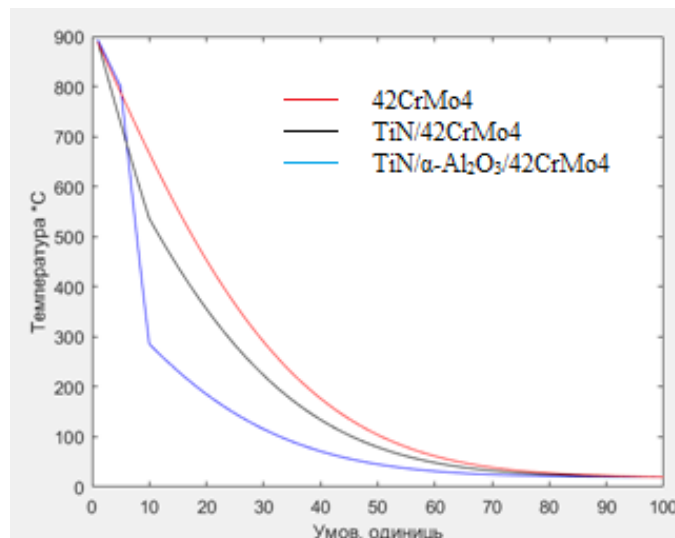


Рисунок 12. Розподіл температури різання уздовж інструменту

Розподіл температури вздовж ріжучого інструменту представлений на рисунку 12. Так в пластині без покриття спостерігається поступове зменшення

температурного показника із віддаленням від лінії теплового навантаження. В той же час, крива, що описує відповідну залежність для пластини із покриттям нітридом титану складається із двох елементів. На першому з них, в розмірних рамках нанесеного шару, в інтервалі температур 900°C– 550°C спостерігається значне зниження температури поверхні, що обумовлено фізико-термічними показниками шару покриття. Далі, із збільшенням відстані від ріжучої кромки пластини, відбувається повільне зменшення температури деталі.

Крива, що описує розподіл температури вздовж пластини із двошаровим покриттям складається із трьох ділянок. На кожній із них відбувається падіння температури. Отримана залежність вказує на те, що при проході шарів покриття теплове навантаження спочатку знижується до 780°C (перший шар TiN), а далі спостерігається падіння до 300 °C (шар α -Al₂O₃).

Графічні результати показують, що при проході через одношарове покриття температура знижується на 38%, в той час як при проході через двошарове покриття аналогічної товщини температурне навантаження зменшується на 60%, що дозволяє значно знижувати температурне навантаження на матеріал ріжучого інструмента тим самим подовжуючи його зносостійкість та термостабільність.

Висновки до розділу 3

Як показують результати моделювання, температура інструменту без покриття і з покриттями на контактних поверхнях є найнижчими для непокритого інструменту. Причина цього полягає в тому, що інструмент має більш високу теплопровідність, ніж покриття. Як наслідок зона високих температур всередині інструменту більше для непокритих інструментів, ніж для інструментів з покриттям. Збільшенні швидкості обробки деталі температура всередині непокритого інструменту суттєво зростає. Можна зробити висновок, що при збільшенні швидкості обробки, збільшується і температура різання, однак покриття виступає в якості теплового бар'єру, що запобігає підвищенню температури в середині інструменту.

ВИСНОВКИ

1. Розглянуто процес тепловиділення при обробці металів різанням. Розроблено математичну модель розподілу температури в ріжучій пластині з захисним покриттям .
2. Проведена дискретизація математичної моделі на основі локально одновимірної схеми А.А. Самарського, яка є абсолютно стійкою і має властивість сумарною апроксимації. Завдяки введенню допоміжних дрібних кроків отримана стійка схема, що дозволяє замість однієї матричної прогонки застосовувати дві звичайні, що значно зменшує обсяг обчислень.
3. В нашому випадку використовувався метод кінцевих різниць, так як розрахункові області мають правильну форму і дозволяють побудувати різницеву сітку, то на перший план виходять переваги цього методу над методом скінчених елементів. Однак якщо геометричні форми сильно відрізняються, перевагою володітиме метод скінчених елементів як метод, незалежний від геометрії.
4. Програмно реалізований чисельний розрахунок температурного поля пластини. Організовано висновок результатів в чисельному і графічному вигляді в задані моменти часу.
5. Дана робота дозволяє частково знизити витрати на проведення експериментальних досліджень при вивченні питання впливу температури в зоні різання на процес зносу ріжучого інструменту.

СПИСОК ВИКРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Максимук О. Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів / О. Максимук, Я. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 126–130.
2. Береснев В. М. Многокомпонентные и многослойные вакуумно-дуговые покрытия для режущего инструмента / В. М. Береснев, М. Ю. Копейкина, С. А. Клименко // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Вакуум, чистые материалы, сверхпроводники (17). – 2008. – № 1. – С. 152–158.
3. Плахотник В. А. Определение температурного поля в поверхностном слое заготовки при термофрикционном резании / В. А. Плахотник, А. А. Конская // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. В. Даля. – 2013. – №4(193). – С. 150 – 152.
4. Grzesik W. Finite element modelling of temperature distribution in the cutting zone in turning processes with differently coated tools / W. Grzesik, M. Bartoszek, P. Nieslony // Journal of Materials Processing Technology. – N. 164–165 (2005). – P. 1204–1211.
5. Чичко А. Н. Моделирование процессов нагрева и охлаждения деталей на основе трехмерного уравнения теплопроводности в САЕ «Протерм-1» / А. Н. Чичко, Д. М. Кукуй, В. Ф. Соболев, С. Г. Лихоузов, О. А. Сачек // Литье и металлургия. – 2012. – №1 (64). – С. 65 – 70.
6. Guemmour M.B. Simulation of the Chip Formation and Temperature Distribution by the Fem / M. B. Guemmour, A. Sahli, S. Kebdani, S. Sahli // Journal of Applied Sciences. – 2015. – №15 (9). – p.1138-1148.
7. Du F. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools / Du F., Lovell M. R., Wu T. W. // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38, No. 26–27. – P. 4557–4570.
8. Grzesik W. Determination of temperature distribution in the cutting zone using hybrid analytical-FEM technique / W. Grzesik // International Journal of Machine Tools and Manufacture 46(6).– 2006. – P. 651-658.

9. Krajinović I. Finite element study of the influence of hard coatings on hard metal toolloading during milling / I. Krajinović, W. Daves, M. Tkadletz, T. Teppernegg, T. Klünsner, N. Schalk // *Surface & Coatings Technology*. – 2016. – № 304. – P. 134-141.
10. Grzesik W. Modelling of the cutting process analytical and simulation methods / W. Grzesik, P. Niesłony, M. Bartoszek // *Advances in Manufacturing Science and Technology*. – 2009 – Vol. 33. – P.5-29.
11. Brito. Thermal analysis in coated cutting tools / R. Brito, S. Carvalho, S. Marcondes de Lima, J. Ferreira // *International Communications in Heat and Mass Transfer*. – 2009. – № 36. – P. 314-321.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. 1977. 656с.
13. Дяконюк Л. М. Комп'ютерне моделювання теплоперенесення у шарі з тонким покриттям / Л. М. Дяконюк, Я. Г. Савула // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.* – 1998. – Вип. 50. – С. 93–95.
14. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решение многомерных задач математической физики. 1967. 197с.
15. Fahad M., Mativenga P., Sheikh M. An investigation of multilayer coated (TiCN/Al₂O₃ -TiN) tungsten carbide tools in high speed cutting using a hybrid finite element and experimental technique / M. Fahad, P. Mativenga, M. Sheikh // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part B Journal of Engineering Manufacture* – 2011.– № 225(10). – P. 1835-1850.
16. Агулов А. В., Бондаренко Р. Ю., Васильева Л. В., Гончаров А. А. Моделирование тепловых процессов в режущей пластине / А. В. Агулов, Р. Ю. Бондаренко, Л. В. Васильева, А. А. Гончаров // *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Мат. моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. – 2015. – Вип. 27. – С. 5 – 12.
17. Grzesik W. Determination of temperature distribution in the cutting zone using hybrid analytical-FEM technique / W. Grzesik // *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 46(6).– 2006. – P. 651-658.

18. Лучко Й. Й. Моделивання теплопровідності тонких плит з багат шаровим покриттям / Й. Й. Лучко, В. М. Гембара, Н. О. Гембара // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. – 2004. – Вип. 6. – С. 65–70.
19. Подстригач Я. С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
20. Бондаренко Н. С. Решение задачи теплопроводности для анизотропных пластин при сосредоточенных температурных воздействиях с использованием полиномов Лежандра / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – Т. 52, № 4. – С. 216-226.
21. Григолюк Э. И. Уравнения поля температур для трехслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П. П. Чулков // Известия СО АН СССР. Серия технических наук. – 1964. – № 6. Вып. 2. – С. 88–92.
22. Вендин С.В. О расчете нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода / С. В. Вендин // Инж.-физ. журнал. – 1993. – 65, № 2. – С. 249–251.
23. Шевчук В. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного теплообміну тіл з багат шаровим покриттям / В. Шевчук, О. Гавриць, П. Шевчук // Машинознавство, – 2010. – №5 (155). – С. 21–25.
24. Дяконюк Л.М. Моделивання і дослідження тепломасоперенесення у багат шарових середовищах з тонкими включеннями / Л. М. Дяконюк, І. С. Муха, Я. Г. Савула // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 101–107.
25. Евдокимов Д. В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д. В. Евдокимов, Д. Я. Ивасишина, А. А. Кочубей, Я. В. Поляков // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т., – 2006. – С. 141–156.

26. Шевчук В. А. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багат шаровим покриттям / В. А. Шевчук // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, №2. – С. 179–185.
27. Кушнір Р. М. Температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну / Р. М. Кушнір, Б. В. Процюк, В. М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 38, № 6. – С. 31–38.
28. Ляшенко Б. А. Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве / Б. А. Ляшенко, В. А. Терлецкий, Я. А. Долгов, Е. Б. Сорока // Проблемы прочности. – 1998. – № 3. – С. 128–133.
29. Подстригач Я. С. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я. С. Подстригач, П. Р. Шевчук // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.
30. Третяченко Г. Я. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий / Г. Я. Третяченко, В. Г. Барило // Проблемы прочности. – 1993. – № 1. – С. 41–49.
31. Флейшман Н. П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями / Н. П. Флейшман // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.
32. Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin coating / V. A. Shevchuk // J. Soviet Math. – 1996. – 81, No. 6. – P. 3099–3102.
33. Лучко Й. Й. Моделі розрахунку напружено-деформованого стану інженерних конструкцій за умов локального термомеханічного навантаження / Й. Й. Лучко, І. М. Добрянський, Є. І. Іваник. – Львів: Каменяр, – 2012. – 311 с.
34. Elperin T. Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating / T. Elperin, G. Rudin // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 1995. – 38, No. 17. – P. 3143–3147.

35. Heijnen L. M. Model description and experiments on carbon diffusion through protective layers / L. M. Heijnen, T. W. Kuijpers, J. A. Klostermann // High Temperature-High Pressures. – 1988. – 20, No. 3. – P. 305–313.
36. Mezin A. An analytical solution for non-steady-state diffusion through thin films / A. Mezin, J. Lepage, P. B. Abel // Thin Solid Films. – 1996. – № 272. – P. 124–131.
37. Sarikaya O. Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications / O. Sarikaya, Y. Islamoglu, E. C. Celik // Mater. and Design. – 2005. – 26. – P. 357–362.
38. Savula Y. H. Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures / Y. H. Savula, I. I. Dyyak, V. V. Krevs // Comput. & Math. Appl. – 2001. – 42. – P. 1201–1216.


```

time=0;

while time<T
    %прямой ход прогонки

    %по оси OX
    for j=1:Ly
        %низ
            alf(1)=0;
            bet(1)=Te;

%alf(1)=2*a*Tau*lamda/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));

%bet(1)=(lamda*h*h*U(1,j)+2*a*Tau*kapa*h*Te)/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));
        for i=2:N1
            ai=lamda/(h*h);
            bi=2*lamda/(h*h)+ro*c/Tau;
            ci=lamda/(h*h);
            fi=-ro*c*U2(i,j)/Tau;
            alf(i)=ai/(bi-ci*alf(i-1));
            bet(i)=(ci*bet(i-1)-fi)/(bi-ci*alf(i-1));
        end;

alf(N1+1)=2*a*a2*Tau*lamda2/(2*a*a2*Tau*(lamda2+lamda*(1-alf(N1)))+h*h*(lamda*a2+lamda2*a));

bet(N1+1)=(2*a*a2*Tau*lamda*bet(N1)+h*h*(lamda*a2+lamda2*a)*U2(N1+1,j))/(2*a*a2*Tau*(lamda2+lamda*(1-alf(N1)))+h*h*(lamda*a2+lamda2*a));
        for i=N1+2:N2
            ai=lamda2/(h*h);
            bi=2*lamda2/(h*h)+ro2*c2/Tau;
            ci=lamda2/(h*h);
            fi=-ro2*c2*U2(i,j)/Tau;
            alf(i)=ai/(bi-ci*alf(i-1));
            bet(i)=(ci*bet(i-1)-fi)/(bi-ci*alf(i-1));
        end;

alf(N2+1)=2*a2*a3*Tau*lamda3/(2*a2*a3*Tau*(lamda3+lamda2*(1-alf(N2)))+h*h*(lamda2*a3+lamda3*a2));

bet(N2+1)=(2*a2*a3*Tau*lamda2*bet(N2)+h*h*(lamda2*a2+lamda3*a2)*U2(N2+1,j))/(2*a2*a3*Tau*(lamda3+lamda2*(1-alf(N2)))+h*h*(lamda2*a3+lamda3*a2));
        for i=N2+2:Lx-1
            ai=lamda3/(h*h);

```

```

        bi=2*lamda3/(h*h)+ro3*c3/Tau;
        ci=lamda3/(h*h);
        fi=-ro3*c3*U2(i,j)/Tau;
        alf(i)=ai/(bi-ci*alf(i-1));
        bet(i)=(ci*bet(i-1)-fi)/(bi-ci*alf(i-1));
    end;
%verh
    if j<zag
U2(end,j)=(lamda3*h*h*U2(end,j)+2*a3*Tau*(lamda3*bet(Ly-
1)+kapa*h*Tk))/(lamda3*h*h+2*a3*Tau*(lamda3*(1-alf(Ly-
1))+kapa*h));
        else
            %U(end,j)=((2*a2*Tau*bet(end-1))-
(2*a2*Tau*h*q)+(h*h*lamda2*U(end,j)))/((lamda2*h*h)+2*a2*Tau*
lamda2*(1-alf(end-1)));
U2(end,j)=(lamda3*h*h*U2(end,j)+2*a3*Tau*(lamda3*bet(Ly-
1)+kapa2*h*Tk))/(lamda3*h*h+2*a3*Tau*(lamda3*(1-alf(Ly-
1))+kapa2*h));
        end;

        for i=Lx-1:-1:1
            U2(i,j) = alf(i)*U2(i+1,j)+bet(i);
        end;
    end;

    %po osi OY
    for i=2:Lx-1
%levoe

alf(1)=2*a*Tau*lamda/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));

bet(1)=(lamda*h*h*U2(i,1)+2*a*Tau*kapa*h*Te)/(lamda*h*h+2*a*T
au*(lamda+kapa*h));

        for j=2:Ly-1
            ai=lamda/(h*h);
            bi=2*lamda/(h*h)+ro*c/Tau;
            ci=lamda/(h*h);
            fi=-ro*c*U2(i,j)/Tau;
            alf(j)=ai/(bi-ci*alf(j-1));
            bet(j)=(ci*bet(j-1)-fi)/(bi-ci*alf(j-1));
        end;
%pravoe

U2(i,end)=(lamda*h*h*U2(i,end)+2*a*Tau*(lamda*bet(Ly-
1)+kapa*h*Te))/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda*(1-alf(Ly-
1))+kapa*h));

```

```

        for j=Ly-1:-1:1
            U2(i,j) = alf(j)*U2(i,j+1)+bet(j);
        end;
    end;
    time=time+Tau;

end;
%
%
% 1 слой
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
%
%
time=0;
alf=zeros(1,Ly);
bet=zeros(1,Ly);
while time<T
    %прямой ход прогонки
    %по оси OX
    for j=1:Ly
        %низ
            alf(1)=0;
            bet(1)=Te;

%alf(1)=2*a*Tau*lamda/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));

%bet(1)=(lamda*h*h*U(1,j)+2*a*Tau*kapa*h*Te)/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));
        for i=2:N1
            ai=lamda/(h*h);
            bi=2*lamda/(h*h)+ro*c/Tau;
            ci=lamda/(h*h);
            fi=-ro*c*U(i,j)/Tau;
            alf(i)=ai/(bi-ci*alf(i-1));
            bet(i)=(ci*bet(i-1)-fi)/(bi-ci*alf(i-1));
        end;

alf(N1+1)=2*a*a3*Tau*lamda3/(2*a*a3*Tau*(lamda3+lamda*(1-alf(N1)))+h*h*(lamda*a3+lamda3*a));

bet(N1+1)=(2*a*a3*Tau*lamda*bet(N1)+h*h*(lamda*a3+lamda3*a)*U(N1+1,j))/(2*a*a3*Tau*(lamda3+lamda*(1-alf(N1)))+h*h*(lamda*a3+lamda3*a));
        for i=N1+2:Lx-1
            ai=lamda3/(h*h);

```

```

        bi=2*lamda3/(h*h)+ro3*c3/Tau;
        ci=lamda3/(h*h);
        fi=-ro3*c3*U(i,j)/Tau;
        alf(i)=ai/(bi-ci*alf(i-1));
        bet(i)=(ci*bet(i-1)-fi)/(bi-ci*alf(i-1));
    end;
%verh
    if j<zag
U(end,j)=(lamda3*h*h*U(end,j)+2*a3*Tau*(lamda3*bet(Ly-
1)+kapa*h*Tk))/(lamda3*h*h+2*a3*Tau*(lamda3*(1-alf(Ly-
1))+kapa*h));
        else
            %U(end,j)=((2*a2*Tau*bet(end-1))-
(2*a2*Tau*h*q)+(h*h*lamda2*U(end,j)))/((lamda2*h*h)+2*a2*Tau*
lamda2*(1-alf(end-1)));
U(end,j)=(lamda3*h*h*U(end,j)+2*a3*Tau*(lamda3*bet(Ly-
1)+kapa2*h*Tk))/(lamda3*h*h+2*a3*Tau*(lamda3*(1-alf(Ly-
1))+kapa2*h));
        end;

        for i=Lx-1:-1:1
            U(i,j) = alf(i)*U(i+1,j)+bet(i);
        end;
    end;

    %po osi OY
    for i=2:Lx-1
%levoe

alf(1)=2*a*Tau*lamda/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));

bet(1)=(lamda*h*h*U(i,1)+2*a*Tau*kapa*h*Te)/(lamda*h*h+2*a*Ta
u*(lamda+kapa*h));

        for j=2:Ly-1
            ai=lamda/(h*h);
            bi=2*lamda/(h*h)+ro*c/Tau;
            ci=lamda/(h*h);
            fi=-ro*c*U(i,j)/Tau;
            alf(j)=ai/(bi-ci*alf(j-1));
            bet(j)=(ci*bet(j-1)-fi)/(bi-ci*alf(j-1));
        end;
%pravoe
        U(i,end)=(lamda*h*h*U(i,end)+2*a*Tau*(lamda*bet(Ly-
1)+kapa*h*Te))/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda*(1-alf(Ly-
1))+kapa*h));
        for j=Ly-1:-1:1

```



```

        %U1(end,j)=(2*a*Tau*bet(end-1))-
        (2*a*Tau*h*q)+(h*h*lamda*U1(end,j))/((lamda*h*h)+2*a*Tau*lam
        da*(1-alf(end-1)));

U1(end,j)=(lamda*h*h*U1(end,j)+2*a*Tau*(lamda*bet(Ly-
1)+kapa2*h*Tk))/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda*(1-alf(Ly-
1))+kapa2*h));
    end;

    for i=Lx-1:-1:1
        U1(i,j) = alf(i)*U1(i+1,j)+bet(i);
    end;
end;

%po osi OY
for i=2:Lx-1
%levoe

alf(1)=2*a*Tau*lamda/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda+kapa*h));

bet(1)=(lamda*h*h*U1(i,1)+2*a*Tau*kapa*h*Te)/(lamda*h*h+2*a*T
au*(lamda+kapa*h));

    for j=2:Ly-1
        ai=lamda/(h*h);
        bi=2*lamda/(h*h)+ro*c/Tau;
        ci=lamda/(h*h);
        fi=-ro*c*U1(i,j)/Tau;
        alf(j)=ai/(bi-ci*alf(j-1));
        bet(j)=(ci*bet(j-1)-fi)/(bi-ci*alf(j-1));
    end;
%pravoe

U1(i,end)=(lamda*h*h*U1(i,end)+2*a*Tau*(lamda*bet(Ly-
1)+kapa*h*Te))/(lamda*h*h+2*a*Tau*(lamda*(1-alf(Ly-
1))+kapa*h));
    for j=Ly-1:-1:1
        U1(i,j) = alf(j)*U1(i,j+1)+bet(j);
    end;
end;
time=time+Tau;

end;

figure;
dd2=U2(:,:);
    plot(dd2(100:-1:1,75),'b');hold on;

dd=U(:,:);

```

```

    plot(dd(100:-1:1,75),'k'); hold on;

    ddl=U1(:,:);
    plot(ddl(100:-1:1,75),'r');

    xlabel('Умов. одиниць')
    ylabel('Температура *C')

%    legend('TiAlN, при v=100','Без захисного шару, при
v=100','TiAlN, при v=222','Без захисного шару, при v=222');
figure;
    %subplot(1,3,1);
    contourf(x,y,U1(:,:));
    grid on
    xlabel('x (Без покриття)')
    ylabel('y')
    colorbar
figure;
    %subplot(1,3,2);
    contourf(x,y,U(:,:));
    grid on
    xlabel('x, (TiN)')
    ylabel('y')
    colorbar

figure;
    %subplot(1,3,3);
    contourf(x,y,U2(:,:));
    grid on
    xlabel('x (alf-Al2O3 и TiN)')
    ylabel('y')
    colorbar
Tmax3=max(U2(88,:));
Tmax1=max(U(88,:));
Tmax2=max(U1(88,:));

```

Блок-схема до задачі, що розглядається

