РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Жулёв А., студент; Чаплыгин А.А., аспирант

С использованием функции Грина решаются краевые задачи уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a\nabla^2 T(x, y, \tau) \tag{1}$$

для полуплоскости: $-\infty < y < \infty,\ 0 < x < \infty,\ 0 < \tau < \infty$, с начальным условием $T\big|_{\tau=0} = f(x, y)$. Рассматриваются граничные условия 1-го и 2-го родов:

а) $T\big|_{x=0} = \varphi(y, \tau)$; (2)

б) $-\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = q(y, \tau)$; (3)

В интегральной форме решения уравнения (1) для краевой задачи (2) для полуплоскости имеют соответственно вид:

$$T(x, y, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} G\big|_{\tau'=0} f(x', y')dx'dy' + a\int_{0}^{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y', \tau')\frac{\partial G}{\partial x'}\Big|_{x'=0} dy'd\tau'$$

где, полученная функция Грина имеет вид:

$$G(x, x', y, y', \tau - \tau') = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}}\right)^2 \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4a(\tau-\tau')}}\right] e^{-\frac{(y-y')^2}{4a(\tau-\tau')}}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x'} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi a(\tau - \tau')}}\right)^2 e^{-\frac{(y-y')}{4a(\tau-\tau')}} \left[e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(\tau-\tau')}}(x - x') + e^{-\frac{(x+x')^2}{4a(\tau-\tau')}}(x + x')\right]$$

Построена функция Грина и интегральное решение поставленной краевой задачи для условий 2-го рода. На основании полученных аналитических зависимостей проведены численные эксперименты решения поставленных задач.

Литература:

1.Беляев Н.М., Рядно А.А., Методы теории теплопроводности, М., Высшая школа, 1982.