

## СВЧ теория эффективной среды для метаматериала с цилиндрическими ферромагнитными включениями с произвольной формой поперечного сечения

О.Н. Рыбин\*, С.Н. Шульга, О.В. Багацкая

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, пл. Свободы, 4, 61022 Харьков, Украина

(Получено 27.11.2017; опубликовано online 29.04.2018)

Получены СВЧ приближения для тензора эффективной магнитной проницаемости для двухкомпонентного магнитного метаматериала. Метаматериал представляет собой изотропный однородный диэлектрик с периодически внедренными в него бесконечно длинными ферромагнитными металлическими цилиндрами произвольного поперечного сечения. Рассмотрены как случай частично, так и случай полностью намагниченных цилиндров под воздействием внешнего постоянного магнитного поля.

Рассмотрено волновое распространение как в направлении внешнего магнитного поля, так и перпендикулярно ему. Получены границы частотных диапазонов для различных режимов волнового распространения.

**Ключевые слова:** Метаматериал, Теория эффективной среды, СВЧ диапазон, Ферриты.

DOI: [10.21272/jnep.10\(2\).02013](https://doi.org/10.21272/jnep.10(2).02013)

PACS numbers: 41.20. – q, 81.05.Zx, 92.60.Ta

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение эффективного магнитного СВЧ отклика двухкомпонентного металлодиэлектрических метаматериалов с ферромагнитными металлическими включениями являются многообещающими с точки зрения создания метаферритов [1], поскольку свойства современных ферритов заметно деградировали в СВЧ диапазоне [2]. Эффективные магнитные отклики таких искусственных ферритов хорошо изучены лишь для простейших форм включений - в виде металлических сфер и круговых цилиндров [3-7]. Первый вид включений характеризуется относительно бедным набором рабочих режимов, в то время как переход к другим формам поперечного сечения в случае цилиндрических включений представляет интерес с точки зрения использования таких метаматериалов при создании компактных микрополосковых СВЧ антенн [8], что особенно актуально в различных медицинских приложениях [9-12].

Данная работа посвящена получению СВЧ приближений для тензоров эффективной магнитной проницаемости двухкомпонентного магнитного метаматериала, представляющего собой безграничный однородный изотропный диэлектрик с периодически внедренными металлическими бесконечно длинными ферромагнитными цилиндрическими включениями с произвольной формой поперечного сечения. Предполагается, что включения частично или полностью намагничены внешним постоянным магнитным полем. Исследованы эффективные магнитные отклики как в направлении внешнего намагничивания, так и перпендикулярно ему. Получены границы для частотных областей для разных рабочих режимов метаматериала.

### 2. СЛУЧАЙ ПОЛНОСТЬЮ НАМАГНИЧЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассмотрим однородный изотропный диэлектрик

(который здесь и далее в статье будем именовать матрицей) с периодически внедренными в него одинаковыми металлическими ферромагнитными включениями цилиндрической формы с произвольным поперечным сечением. На рис. 1. представлена элементарная ячейка такого композитного материала (магнитного метаматериала), где  $a$  – постоянная элементарной ячейки,  $S$  – площадь поперечного сечения включений,  $L$  – периметр поперечного сечения включений,  $\mu_m$  – относительная магнитная проницаемость матрицы,  $\varepsilon_m$  – относительная диэлектрическая проницаемость матрицы,  $\mu_i$  – относительная магнитная проницаемость включений,  $\varepsilon_i$  – относительная диэлектрическая проницаемость включений. При этом будем предполагать для определенности, что внешнее магнитное поле направлено вдоль оси  $Oy$ .

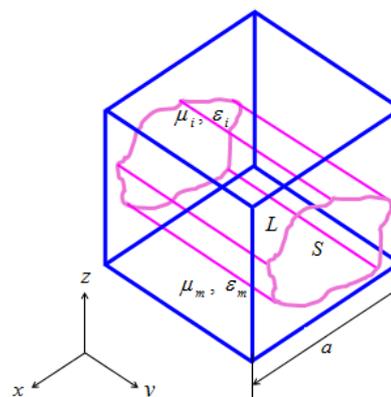


Рис. 1 – Элементарная ячейка метаматериала

В работе [1] рассматривался подобный метаматериал с тем лишь отличием, что поперечное сечение представляло собой окружность некоторого радиуса. Этот метаматериал гипотетически представлялся в

\* [oleg.rybin@karazin.ua](mailto:oleg.rybin@karazin.ua)

работе в виде поликристаллического феррита с цилиндрической формой домена, совпадающей с формой включений. В этом случае структура выражения для тензора эффективной магнитной проницаемости магнитного метаматериала с цилиндрическими включениями оказалась явно независимой от формы поперечного сечения включения, - от нее явно зависит выражение для эффективной относительной магнитной проницаемости метаматериала в полностью размагниченном состоянии и объемная доля включений.

Тогда СВЧ приближение ( $\omega < \omega_0$ ) для тензора эффективной магнитной проницаемости имеет вид [1]

$$\hat{\mu}_{eff} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & -ik \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ ik & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$M_{\Sigma} = \frac{\omega_0(\mu_{\xi}^2 - 3\mu_{\xi} - 2) + \sqrt{\omega_0^2(1 + 16\mu_{\xi}^4 + 2\mu_{\xi}^3 - 3\mu_{\xi}^2) + \omega^2(3 - 15\mu_{\xi}^4 - 8\mu_{\xi}^3 + 8\mu_{\xi}^2 + 12\mu_{\xi})}}{\gamma(1 + 3\mu_{\xi})}, \quad (2)$$

где  $\mu_{\xi}$  – эффективная относительная магнитная проницаемость метаматериала в полностью размагниченном состоянии (включения не намагничены), определяемая выражением [3], которое легко обобщается до вида

$$\mu_{\xi} = \mu_m \left( 1 - \frac{F}{1 + i \frac{\delta \cdot L}{\omega S \mu_m \mu_0}} \right),$$

где  $\delta$  – сопротивление боковой поверхности включений, приходящейся на единицу площади и определяемое выражением [14]

$$\delta = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{\omega \mu_i}{2\sigma_i}},$$

где  $\sigma_i$  – удельная проводимость включений.

Отметим, что частота  $\omega_0$  фактически является верхней границей частотного диапазона применимости предложенных в данной работе теории эффективной среды.

При распространении первичной плоской монохроматической электромагнитной волны (ЭМВ) в направлении внешнего магнитного поля намагничивания, эффективный коэффициент преломления определяется выражением [15]

$$\mu_{eff} = (\mu \pm k) / \mu_0, \quad (2)$$

где знак “+” соответствует ЭМВ с правой круговой

$$\omega > \omega_1 = \frac{F \omega_{\Sigma} \omega_{in} + 2\omega_0 + \sqrt{(F \omega_{\Sigma} \omega_{in} + 2\omega_0)^2 - 4\omega_0(1 + F^2 \alpha_{in}^2)(\omega_0 + F \omega_{\Sigma})}}{2(1 + F^2 \alpha_{in}^2)},$$

где подразумевается, что  $\omega_{\Sigma} = \omega_{\Sigma} + i \omega_{\Sigma}''$ .

Таким образом рассмотренный метаматериал при

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_0 \left( 1 + F \frac{(\omega_0 + iF \alpha_n \omega) \gamma \mu_0 M_{\Sigma}}{(\omega_0 + iF \alpha_n \omega)^2 - \omega^2} \right), \\ k &= \mu_0 F \frac{\omega \gamma \mu_0 M_{\Sigma}}{(\omega_0 + iF \alpha_n \omega)^2 - \omega^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума,  $\omega$  – круговая частота первичной волны,  $F = S/\alpha^2$  – объемная доля металла (включений),  $\omega_0 = \gamma \mu_0 H_0$  – ларморовская частота,  $H_0$  – напряженность внешнего магнитного поля,  $\alpha_n$  – коэффициент затухания материала включения,  $\gamma$  – гиромагнитное отношение,  $\omega_m = \gamma \mu_0 M_{\Sigma}$  – эффективная внутренняя частота прецессии,  $M_{\Sigma}$  – эффективная намагниченность насыщения, определяемая равенством [1]:

поляризацией (ВПКП), а знак “-” соответствует ЭМВ с левой круговой поляризацией (ВЛКП).

Подставляя равенства (1) в выражение (2), в итоге даст:

$$\mu_{eff} = \begin{cases} 1 + \frac{F \omega_m}{\omega_0 + iF \alpha_{in} \omega + \omega}, & \text{для ВЛКП,} \\ 1 + \frac{F \omega_m}{\omega_0 + iF \alpha_{in} \omega - \omega}, & \text{для ВПКП.} \end{cases} \quad (3)$$

Из первой строки равенства (3) видно, что  $\text{Re}(\mu_{eff}) > 0$  для ВЛКП, поскольку  $\text{Re}(M_{\Sigma}) > 0$ . Это означает, что рассмотренный метаматериал при распространении ВЛКП в направлении внешнего магнитного поля характеризуется приростом эффективной относительной магнитной проницаемости и ведет себя как феррит, поскольку в рассматриваемом частотном диапазоне эффективная относительная диэлектрическая проницаемость рассматриваемого метаматериала также характеризуется приростом [13].

Как видно из второй строки равенства (3),  $\text{Re}(\mu_{eff}) < 0$  может иметь место для ВПКП. Получим границы для соответствующего частотного диапазона из неравенства

$$\text{Re} \left\{ 1 + \frac{F \omega_{\Sigma}}{\omega_0 + iF \alpha_{in} \omega - \omega} \right\} < 0,$$

которое эквивалентно неравенству:

распространении ВПКП в направлении внешнего магнитного поля является мю-материалом для ча-

стот, ограниченных неравенством:  $\omega > \omega_1$ . Такое заключение делается по причине, что действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости в рассмотренном диапазоне имеет положительные значения [13].

Чтобы получить границу частотного диапазона, который соответствует малым значениям действительной части эффективной относительной магнитной проницаемости ( $0 < \text{Re}(\mu_{eff}) < 1$ ), необходимо решить двойное неравенство:

$$\text{Re} \left\{ 1 + \frac{F \omega_\Sigma}{\omega_0 + iF \alpha_{in} \omega - \omega} \right\} < 0.$$

Решая последние два неравенства относительно частоты  $\omega$ , получим, что в частотном диапазоне, выраженном неравенствами

$$\mu_{eff} = \begin{cases} 1, & \text{распространение вдоль оси } x, \quad E_{0x} = E_{0y} = H_{0x} = H_{0z} = 0; \\ 1, & \text{распространение вдоль оси } z, \quad E_{0y} = E_{0z} = H_{0x} = H_{0z} = 0; \\ \frac{\mu^2 - k^2}{\mu_0 \mu}, & \text{распространение вдоль оси } x, \quad E_{0x} = E_{0z} = H_{0y} = 0; \\ \frac{\mu^2 - k^2}{\mu_0 \mu}, & \text{распространение вдоль оси } z, \quad E_{0x} = E_{0z} = H_{0y} = 0; \end{cases} \quad (4)$$

где первые две строки относятся к распространению ординарной ЭМВ, а последние две - к распространению экстраординарной ЭМВ.

$$\frac{\omega_\Sigma'}{\omega_\Sigma' - F \omega_\Sigma \alpha_{in}} = \omega_2 < \omega < \omega_1,$$

метаматериал для ВЛКП, распространяющейся в направлении внешнего магнитного поля имеет малое значение действительной части эффективной относительной магнитной проницаемости, а значит, ведет себя как диэлектрик с ультра низким значением (эффективного) коэффициента преломления. Такое (как и выше) заключение делается по причине, что действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости в рассмотренном диапазоне имеет положительные значения [13].

При распространении первичной плоской монохроматической ЭМВ в направлении, перпендикулярном направлению внешнего магнитного поля, эффективный коэффициент преломления определяется выражением [15]:

Подставляя равенства (1) в выражение (4), в итоге даст:

$$\mu_{eff} = \begin{cases} 1, & \text{ординарная волна,} \\ 1 + \frac{F \omega_\Sigma}{\omega_0 + iF \alpha_{in} \omega}, & \text{экстраординарная волна.} \end{cases} \quad (5)$$

Как видно из выражения (5), при распространении в метаматериале ординарной ЭМВ перпендикулярно внешнему магнитному полю намагничивания волна "воспринимает" метаматериал как обычный диэлектрик. А при распространении экстраординарной волны в том же направлении, рассматриваемый метаматериал характеризуется притоком действительной части эффективной относительной магнитной проницаемости и ведет себя как феррит.

Отметим, что метаматериал при вышеупомянутых режимах распространения ЭМВ в большей части СВЧ диапазона обладает не высокими магнитными потерями в направлении внешнего намагничивания ( $\text{Im}(\mu_{eff})/\text{Re}(\mu_{eff}) \sim 10^{-3} \div 10^{-1}$ ) и относительно высокими магнитными потерям в направлении, перпендикулярном направлению внешнего намагничивания ( $\text{Im}(\mu_{eff})/\text{Re}(\mu_{eff}) \sim 10^{-1} \div 10^2$ ), [1].

### 3. СЛУЧАЙ ЧАСТИЧНО НАМАГНИЧЕННЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Очевидно, что если в случае полностью намагниченных включений исследуемого метаматериала структура тензора эффективной магнитной проницаемости явно не зависит от формы поперечного сечения цилиндрических включений, то такой же

самый вывод можно сделать и о структуре тензора эффективной магнитной проницаемости при частичной намагниченности его включений. Тогда согласно результатам работы [7], СВЧ приближение для этого тензора в случае частичного намагничивания включений исследуемого метаматериала в направлении оси  $Oy$  будет иметь следующий вид

$$\hat{\mu}_{eff} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & -ik \\ 0 & \mu_y & 0 \\ ik & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

$$\mu = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left[ \sqrt{\mu_1 \mu_2} (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) + \tilde{\mu} \langle \alpha_3 \rangle^2 \right],$$

$$\mu_1 = \mu_0 \left( 1 + F \frac{\gamma \mu_0 M_\Sigma}{\omega_0 + i \omega F \alpha_{in} - \omega} \right),$$

$$\mu_2 = \mu_0 \left( 1 + F \frac{\gamma \mu_0 M_\Sigma}{\omega_0 + i \omega F \alpha_{in} + \omega} \right),$$

$$\tilde{\mu} = \mu_0 \left( 1 + F \frac{\gamma \mu_0 M_\Sigma (\omega_0 + i \omega F \alpha_{in})}{(\omega_0 + i \omega F \alpha_{in})^2 - \omega^2} \right),$$

$$\mu_y = \mu_0 \left( 1 + F \frac{\gamma \mu_0 M_\Sigma (\omega_0 + i \omega F \alpha_{in})}{(\omega_0 + i \omega F \alpha_{in})^2 - \omega^2} (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) \right), \quad (6)$$

$$k = \langle \alpha_3 \rangle \mu_0 F \frac{\gamma \mu_0 M_\Sigma \omega}{(\omega_0 + i \omega F \alpha_{in})^2 - \omega^2},$$

$$\langle \alpha_3 \rangle = \begin{cases} \frac{M}{M_\Sigma}, & M \neq M_s, \\ 1, & M = M_s, \end{cases}$$

где  $M$  – намагниченность материала включений,  $M_s$  – намагниченность насыщения (ферромагнитного) материала включений.

Вне зависимости от формы поперечного сечения ферромагнитных включений, можно сформулировать для рассматриваемого метаматериала условия отсутствия потерь в слабом поле в форме [7]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_\Sigma'}{\omega} &\leq \frac{3}{\sqrt{13}}, \\ \frac{\omega_\Sigma''}{\omega} &< \alpha_{in}. \end{aligned} \right\},$$

Как и в предыдущем параграфе, проведем рассмотрение эффективного магнитного отклика метаматериала в направлении внешнего магнитного поля намаг-

$$\omega < \omega_\pm = \frac{\pm \langle \alpha_3 \rangle \omega_\Sigma' + \sqrt{(\langle \alpha_3 \rangle \omega_\Sigma')^2 + 4\omega_0^2 - (4/3)F \left[ (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) (F |\omega_\Sigma|^2 + 2\omega_0 \omega_\Sigma') + \omega_\Sigma' \omega_0 \langle \alpha_3 \rangle^2 \right]}}{2}.$$

Теперь определим частотный диапазон, где  $0 < \text{Re}(\mu_{eff}) < 1$ , т.е. такой частотный диапазон, в котором рассматриваемый метаматериал ведет себя

$$0 < \text{Re} \left( \frac{1}{3} + \frac{2 \left[ \sqrt{\mu_1 \mu_2} (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) + \tilde{\mu} \langle \alpha_3 \rangle^2 \right] \pm 3k}{3\mu_0} \right) < 1,$$

которое на случай относительно малых магнитных потерь ( $\alpha_{in} F^2 \ll 1$ ) для ВЛКП эквивалентно нера-

$$\left. \begin{aligned} \omega_- < \omega < \varpi, \\ \varpi &= \frac{2}{3} \frac{1 - \langle \alpha_3 \rangle^2}{\langle \alpha_3 \rangle} \left( F \frac{|\omega_\Sigma|^2}{\omega_\Sigma'} + 2\omega_0 \right) + \frac{2}{3} \langle \alpha_3 \rangle^2 \omega_\Sigma' \omega_0. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, при частичном намагничивании рассмотренного метаматериала при распространении ВЛКП в направлении внешнего намагничивания на частотах  $\omega < \omega_\pm$  метаматериал ведет себя как мю-материал, в то время как в частотном диапазоне  $\omega \in (\omega_-, \varpi)$  в том же направлении плоская ВЛКП “воспринимает” метаматериал как диэлектрик с ультра низким значением коэффициента преломления. На остальных частотах СВЧ диапазона ( $\omega < \omega_0$ ) метаматериал ведет себя как обычный диэлектрик.

При распространении первичной плоской монохро-

ничивания и перпендикулярно ему.

При распространении первичной плоской монохроматической ЭМВ в направлении внешнего магнитного поля намагничивания, эффективный коэффициент преломления определяется следующим выражением [16]

$$\mu_{eff} = \frac{1}{3} + \frac{2 \left[ \sqrt{\mu_1 \mu_2} (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) + \tilde{\mu} \langle \alpha_3 \rangle^2 \right] \pm 3k}{3\mu_0}, \quad (7)$$

где знак “+” соответствует ВПКП, а знак “-” соответствует ВЛКП.

Как видно из равенства (7),  $\text{Re}(\mu_{eff})$  может быть как положительной, так и отрицательной. Сначала определим частотный диапазон, где  $\text{Re}(\mu_{eff}) < 0$ , т.е. такой частотный диапазон, в котором рассматриваемый метаматериал ведет как мю-материал. Такой диапазон соответствует условию

$$\text{Re} \left( \frac{2 \left[ \sqrt{\mu_1 \mu_2} (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) + \tilde{\mu} \langle \alpha_3 \rangle^2 \right] \pm 3k}{3\mu_0} \right) < -\frac{1}{3},$$

которое на случай относительно малых магнитных потерь ( $\alpha_{in} F^2 \ll 1$ ) эквивалентно неравенствам:

как диэлектрик с ультра низким значением (эффективного) коэффициента преломления. Такой диапазон соответствует двойному неравенству:

венствам:

матической ЭМВ в направлении, перпендикулярном направлению внешнего намагничивания, эффективный коэффициент преломления определяется выражением [7].

$$\mu_{eff} = \mu_y / \mu_0.$$

Получим частотный диапазон, при котором распространение плоской ЭМВ в направлении, перпендикулярном направлению внешнего намагничивания происходит подобно распространению волны в мю-материале ( $\text{Re}(\mu_{eff}) < 0$ ). Данный диапазон на случай

относительно малых магнитных потерь ( $\alpha_m F^2 \ll 1$ ) согласно равенству (6) может быть получен из неравенства

$$1 + F \frac{\omega_s \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (1 - \langle \alpha_3 \rangle^2) < 0,$$

решая которое относительно частоты, окончательно получим:

$$\omega > \sqrt{\omega_0 \left( \omega_0 + \left[ 1 - \langle \alpha_3 \rangle^2 \right] F \omega_s' \right)},$$

что приближает нас к верхней границе предложенной в данной работе теории. Последнее позволяет заключить, что при распространении плоской ЭМВ перпендикулярно внешнему магнитному полю, которое лишь частично намагничивает включения метаматериала, последний характеризуется приростом эффективной относительной магнитной проницаемости и ведет себя как ферритоподобный материал.

Отметим, что метаматериал с частично намагниченными включениями при вышеупомянутом волновом распространении в большей части СВЧ диапазона обладает более высокими магнитными потерями, чем в случае намагниченных до насыщения включений [7].

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была представлена СВЧ теория эффективной среды для магнитного метаматериала в виде однородного и изотропного диэлектрика с периодически встроенными в него частично или полностью намагниченными цилиндрическими ферромагнитными металлическими включениями. Структура тензора эффективной магнитной проницаемости такого метаматериала явно не зависит от формы поперечного сечения включений.

В зависимости от степени намагниченности включений метаматериала, получены частотные диапазоны режимов работы, при которых метаматериал ведет себя как мю-материал, обычный диэлектрик, диэлектрик с ультра-низким значением коэффициента преломления и ферритоподобный материал.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность профессору Георгиусу Зуганелису (Dr. Georgios Zouganelis) за ряд плодотворных научных дискуссий, организованных им по тематике статьи.

### Microwave Effective Medium Theory for Metamaterial with Cylindrical Ferric Inclusions with an Arbitrary Cross Section Form

O. Rybin, S. Shulga, O Bagatska

*V.N. Karazin Kharkov National University, 4, Svobody Sq., 61002 Kharkov, Ukraine*

Microwave approximations for the tensor of the effective permeability of two-component metmaterial are obtained. The metamaterial is an isotropic homogenous dielectric medium with periodically imbedded infinite ferric cylindrical inclusions of an arbitrary cross section form. The cases of fully and partially magnetized inclusions under an external bias magnetic field are considered.

The wave propagation in the direction of bias magnetic field and transverse to it is considered. The bounds of frequency ranges regarding the different modes of metamaterial is derived.

**Keywords:** Metamaterial, Effective Medium Theory, Microwaves, Ferrites.

### НВЧ теорія ефективного середовища для метаматеріала з циліндричними феромагнітними включеннями з довільною формою поперечного перерізу

О.М. Рибін, С.М. Шульга, О.В. Багацька

*Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, 61022 Харків, Україна*

Отримані НВЧ наближення для тензора ефективної магнітної проникності для двокомпонентного магнітного метаматеріала. Метаматеріал є ізотропний однорідний діелектрик із періодично вбудованих в нього нескінченно довгими феромагнітними металічними циліндрами довільного поперечного перерізу. Розглянуті як випадок часткового, так і випадок повністю намагнічених циліндрів під впливом зовнішнього постійного магнітного поля.

Розглянуто хвильове розповсюдження як у напрямку зовнішнього магнітного поля, так і перпендикулярно до нього. Отримані межі частотних діапазонів для різноманітних режимів хвильового розповсюдження.

**Ключові слова:** Метаматеріал, Теорія ефективного середовища, НВЧ діапазон, Ферити.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. O. Rybin, *Int. J. Appl. Electromagnetics and Mech.* **46** No 3, 519 (2014).
2. D.J. Kern, D.H. Werner, and M. Lisovich, *IEEE T. Antennas Propag.* **53** No 4, 1382 (2005).
3. S. Tretyakov, *Analytical modeling in applied electromagnetics* (Artech House Publishing: 2003).
4. И.А. Дерюгин, М.А. Сигал, *ЖТФ* **31** No 1, 100 (1960).
5. V. Yannopoulos, *Appl. Phys. A* **87**, 259 (2007).
6. N. Garcia, E.V. Ponzovskaia, *Phys. Rev. E* **71**, 046611 (2005).
7. O. Rybin, S. Shulga, *PIER M* **56**, 63 (2017).
8. H. Mosallaei, K. Sarabandi, *IEEE T. Antennas Propag.* **52** No 6, 1558 (2004).
9. Asimina Kiourti and Konstantina S. Nikita, *IEEE T. Antennas Propag.* **54** No 3, 210 (June 2012).
10. S. Ashok Kumar, T. Shanmuganatham, *J. Circuit. Syst Comp.* **24** No 1, 1550014 (2015).
11. Parisa Shirvani, Hamidreza Shirzadfar, *J. Nano- Electron. Phys.* **8** No 3, 03028 (2016).
12. Shikha Sukhija, R.K. Sarin, *J. Electr. Sys. Inf. Tech.* **4**, 49 (2017).
13. Won Woo Cho, Georgios Zouganelis, Hitoshi Oshato, *J. Appl. Phys.* **45** No 3a, 1694 (2006).
14. David K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics* (Edison Wesley Publishing Co: 1983).
15. S.J. Orfanidis, *Electromagnetic waves and antennas* (Rutgers University: 2004).