УДК 539.3
КП
№ госрегистрации 0110U004791
Ин. №

Министерство образования и науки Украины
Сумской государственный университет

40007, г.Сумы, ул.Римского-Корсакова,2
тел. (0542) 33-40-49, факс (0542) 33-40-58,
e-mail: info@sci.sumdu.edu.ua

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
д.ф.-м.н., профессор
_______________А. Н. Черноус

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ПРОЦЕССЕ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ МАТЕРИАЛА

(заключительный)

Начальник НИЧ
к.ф.-м.н., снс Д. И. Курбатов

Руководитель НИР
к.ф.-м.н., доцент В. А. Ячменёв

2015

Рупись закончена 25 листопада 2015 г.

Результаты этой работы рассмотрены научным советом,
протокол от 2015.11.26 № 3

Список авторов

Руководитель НИР к.ф.-м.н., доцент	В. А. Ячменёв
ст. преподаватель	В. А. Клименко
ст. преподаватель	В. В. Николенко

РЕФЕРАТ

Отчет о НИР: Цель работы состояла в разработке методов исследования и расчета тепловых полей в материалах, обладающих сложной структурой (в частности, в наноматериалах и тонких плёнках) с учетом наличия в них подвижных границ.

Вначале поставлены и решены две вспомогательные задачи: задача о расчёте тепловых полей в ограниченном стержне в условиях аномальной теплопроводности и задача о расчёте тепловых полей в составном полуограниченном стержне.

Обе задачи описываются дифференциальными уравнениями с дробными производными. В обоих случаях решения получены в конечном виде.

В заключении работы сформулирована и поставлена задача Стефана для двухфазной среды (то есть задача с подвижной границей) в случае аномальной теплопроводности и намечены пути её решения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

Изучение физических полей в процессе фазовых превращений в математическом смысле сводится к решению краевых задач математической физики с подвижными границами. Между тем построение аналитических решений для краевых задач теплообмена в системах со свободными границами является одной из труднейших проблем в современной теории математической физики.

Ввиду зависимости положения границы раздела от времени к этому классу задач неприменимы классические методы матфизики, так как не удается согласовать решения уравнений теплопроводности с движением границы фазового перехода.

Одним из первых шагов в решении задач такого рода было решение задачи для системы «лёд-вода» в известных работах И.Стефана, представленное нами в первом разделе.

Задача становится более трудной при изучении материалов, обладающих усложнённой структурой, (например, фрактальной) или эффектом памяти, т.е. в случае, когда классический закон Фурье не выполняется.

В этом случае исследование температурных полей сводится к решению дифференциальных уравнений с дробными производными.

Цель работы – получение аналитических решений ряда краевых задач для уравнений с дробными производными и построение математической модели описывающей процесс движения фазовой границы в случае аномальной диффузии т.е в том случае, когда процесс описывается уравнениями с дробными производными.

1. ЗАДАЧА СТЕФАНА В КЛАССИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

При изменении температуры тела, в частности, при переходе через точку плавления может происходить переход от твердой фазы в жидкую и наоборот.

При построении математической модели для плоской задачи принимаются во внимание следующее:

а) агрегатное состояние вещества (среды) изменяется вследствии теплопроводности среды;

б) передача тепла описывается уравнением теплопроводности;

в) на границе $x = \xi(t)$ фазового перехода выполняется условие Стефана то есть

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

где λ – скрытая теплота кристаллизации,

ρ – плотность образующейся фазы,

k_1 и k_2 – коэффициенты теплопроводности соответственно твердой и жидкой фазы.

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового перехода равна нулю. Будем рассматривать массу воды $x \geq 0$, ограниченную с одной стороны плоскостью $x = 0$. В начальный момент $t = 0$ вода имеет постоянную температуру $c > 0$. Если на поверхности

$x = 0$ все время поддерживается постоянная температура $c_1 < 0$, то граница замерзания $x = \xi$ будет со временем проникать в глубь жидкости.

Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз (например, внутри замерзающей воды) сводится к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \ \text{для}\ 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \ \text{для}\ \xi < x < \infty. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u_1 = c_1 \ \text{при}\ x = 0 \\ u_2 = c \ \text{при}\ t = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

и условиями на границе замерзания

$$u_1 = u_2 = 0 \ \text{при}\ x = \xi, \qquad (1.3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad (1.4)$$

где k_1, k_2, a_1^2, a_2^2 – коэффициенты теплопроводности твердой и, соответственно, жидкой фазы. Изложение решения проведём следуя работе [1].

Задачу (1.1) – (1.4) часто называют задачей Стефана, задачей о фазовом переходе или задачей о промерзании.

Итак, решение задачи будем искать в виде

где $A_1, B_1, A_2,$ B_2 – пока неопределенные постоянные, а Ф – интеграл ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Удовлетворяя условиям (1.2), получим:

$$A_1 = c_1, \qquad A_2 + B_2 = c,$$

а из условия (1.3) имеем

Последнее условие должно иметь место для любых значений t. Это возможно лишь при выполнении соотношения

$$\xi = \alpha\sqrt{t}\,, \qquad (1.5)$$

где α – некоторая постоянная. Соотношение (1.5) определяет закон движения границы замерзания.

Для постоянных $A_1, B_1, A_2,$ B_2 и α получаются выражения

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = c_1, && B_1 = -\frac{c_1}{\quad} \\ & && \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right) \\ &A_2 = -\frac{c\,\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, && B_2 = -\frac{c}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

Чтобы определить постоянную α, надо воспользоваться соотношением (1.4)

$$\frac{k_1 c_1\; e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{\quad} + \frac{k_2 c\;\; e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left(1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right)} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (1.7)$$

$$a_1\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)$$

Решение этого трансцендентного уравнения и дает значение α. Наличие хотя бы одного решения при $c_1 < 0,$ $c > 0$ следует уже из того, что при изменении α от 0 до ∞ левая часть уравнения изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а правая – от 0 до $-\infty$. В случае, если c равно температуре плавления $(c = 0)$, то выражения (1.6) и (1.7) для определения коэффициентов принимают более простой вид:

$$A_2 = B_2 = 0, \qquad A_1 = c_1, \qquad B_1 = -\frac{c_1}{} \tag{1.8}$$

$$\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)$$

и

$$\frac{k_1 c_1\ e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{1.9}$$

$$a_1\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)$$

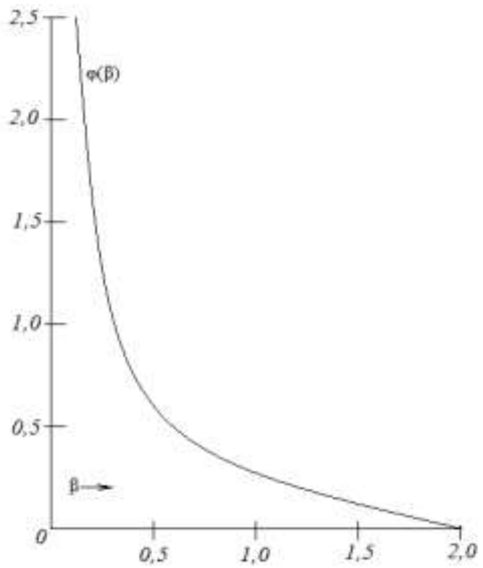
Положив $\frac{\alpha}{2a_1} = \beta$, можем переписать уравнение (1.9) в таком виде:

где постоянная D определяется выражением

$$D = \frac{\lambda\rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Воспользовавшись графиком функции $\varphi(\beta) = \frac{e^{-\beta^2}}{}$

$\sqrt{\pi}\ \Phi(\beta)$ (рис. 1.1) легко графически определить



значение α .

Рисунок 1.1 – Графическое определение параметра α

Четвертой задачей Стефана является задача о процессе плавления слоя льда с нулевой начальной температурой и заданной температурой $f(t)$ на границе $x = 0$.

Ниже вследствие своей неординарности и изящества приводится идея приближенного решения четвертой задачи [2].

И. Стефан получил решение этой задачи в аналитически замкнутой форме лишь при $f \equiv const$ следующей процедурой: он предположил, что температура $u(x,t)$ талого слоя представляется в виде ряда

$$u(x,t) = f(t) + \frac{x^2}{2 \cdot a^2} f'(t) + \frac{x^4}{4! \cdot a^4} f''(t) + \cdots + x \cdot F(t) +$$
$$+ \frac{x^3}{3! \cdot a^2} \cdot F'(t) + \frac{x^5}{5! \cdot a^4} \cdot F''(t) + \cdots,$$

где a^2 есть коэффициент температуропроводности талого слоя.

Неизвестная функция $F(t)$ подлежит определению из условия $u(x,t)\big|_{x=y(t)} = 0$, которое в развернутой форме имеет вид

$$f(t)+\frac{y^2(t)}{2\cdot a^2}\cdot f'(t)+\frac{y^4(t)}{4!\,a^4}\cdot f''(t)+\cdots+y(t)\cdot F(t)+$$

$$+\frac{y^3(t)}{3!\cdot a^2}\cdot F'(t)+\frac{y^5(t)}{5!\cdot a^4}\cdot F''(t)+\cdots=0$$

и из условия Стефана, $\lambda\cdot\rho\cdot y'(t)=\left(k_1\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}-k_2\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\right)\Big|_{x=y(t)}$

которое в рассматриваемом случае приобретает вид

$$\frac{\lambda\rho}{k}\cdot y'(t)=-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=y(t)}=$$

$$=-\left\{\frac{y(t)}{a^2}f'(t)+\frac{y^3(t)}{3!\,a^4}f''(t)+\cdots+F(t)+\frac{y^2(t)}{2a^2}F'(t)+\frac{y^4(t)}{4!\,a^4}F''(t)+..\right\}.$$

Из последних двух равенств, исключив функцию $F(t)$, можно получить первое приближение

$$f(t)-\frac{y^2(t)}{2a^2}\cdot f'(t)-\cdots-\frac{y^3(t)}{3a^2}\cdot F'(t)-\square=\frac{\lambda\rho}{k}\cdot y(t)\cdot y'(t) \qquad (1.10)$$

Далее, в правой части (1.10) отбрасывая все члены, за исключением первого, И. Стефан получает следующую окончательную формулу для определения первого приближения решения рассматриваемой задачи:

$$\frac{\lambda\rho}{k}\cdot y(t)\cdot y'(t)=f(t) \qquad (1.11)$$

Для получения второго приближения И. Стефан используют элементарное равенство

$$\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+y'(t)\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\Big|_{x=y(t)}=0,$$

которое в развернутой форме означает следующее равенство:

$$f'(t)+\frac{y^2(t)}{2a^2}f''(t)+\cdots+y(t)F'(t)+\frac{y^3(t)}{3!\,a^4}F'''(t)+\cdots=\frac{\lambda\rho}{k}(y'(t))^2 \qquad (1.12)$$

Исключая функции $F'(t)$ из первого приближения Стефана (1) и (3), а затем и пренебрегая всеми членами, содержащими производные порядка $k \geq 2$ от функций $f(t)$ и $F(t)$, И. Стефан получает, что

$$\frac{\lambda\cdot\rho}{k}\cdot y(t)\cdot y'(t)\cdot\left\{1+\frac{y(t)\cdot y'(t)}{3\cdot a^2}\right\}=f(t)-\frac{y^2(t)}{6\cdot a^2}\cdot f'(t)$$

Далее И.Стефан предлагает продолжать эту процедуру для определения искомой функции $u(x,t)$. Очевидно, что невозможно построить точного решения рассматриваемой задачи подобным способом. Однако, уже первое приближение (1.11) дает неплохую аппроксимацию решения. А именно, предполагая, что $f'(t) \geq 0$ в малой окрестности $U_\varepsilon(t=0)$, можно на основании принципа максимума показать, что

$$\lambda\cdot\rho\cdot y(t)\cdot y'(t)\leq k\cdot f(t),$$

причем

$$\lim_{t\to 0}\frac{\lambda\cdot\rho\cdot y(t)\cdot y'(t)}{k\cdot f(t)}=1, \qquad \text{т. е. } \lambda\cdot\rho\cdot y(t)\cdot y'(t)\Leftrightarrow k\cdot f(t).$$

2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

2.1 Введение

Давно было замечено, что поведение некоторых процессов, таких как распространение тепла, диффузия и др. не укладывается в рамки классического описания с помощью дифференциальных уравнений с производными целого порядка. Однако, оказалось, что процессы, проходящие, в частности, во фрактальных средах, можно моделировать дифференциальными уравнениями, содержащими дробные производные [2, 3].

Отметим, что дробная производная по времени возникает при учете нелокальности по времени, которая связана с прилипанием диффундирующих атомов к стенкам пор [4].

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных решению различного рода краевых задач для уравнений дробного порядка, но в основном численными методами [5–8]. Тем не менее, для проведения достаточно полного «качественного» исследования изучаемой проблемы, желательно использование точных решений.

В данной работе получено точное решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии с дробной производной по времени.

2.2 Постановка задачи и математическая модель

Будем изучать аномальную диффузию в ограниченном стержне $0<x<l$. Будем считать, что вещество равномерно распределено внутри интервала $(0,l)$, на одном из торцов поддерживается постоянная температура, а другой конец изолирован. Задача сводится к решению уравнения

$$\left(D_{0+t}^{\alpha}u\right)(x,t)=\lambda^2\frac{\partial^2 u(\alpha,t)}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0}=u_0 \tag{2.2}$$

и граничных условиях

$$\begin{gathered}\left(D_{0+t}^{1-\alpha}u\right)(0,t)=0,\\ u(l,t)=u_1\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь

$$\left(D_{0+t}^{\alpha}u\right)(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau$$

дробная производная Римана-Лиувилля относительно $t=0$ порядка

. Здесь мы будем полагать, что $0<\alpha<1$, то есть в данной статье рассматривается «медленная» диффузия, а λ^2 – коэффициент диффузии.

2.3 Решение задачи

К уравнению (2.1) и также к начальному (2.2) и граничным (2.3) условиям применим преобразование Лапласа относительно переменной t

$$U(x,s)=\int_0^\infty u(x,t)e^{-st}dt$$

В результате приходим к операторному уравнению

$$\frac{d^2U}{dx^2}-\frac{s^\alpha}{x^2}U=-\frac{u_0}{\lambda^2} \tag{2.4}$$

и следующим граничным условиям

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=0,\quad U\big|_{x=l}=\frac{u_1}{s}. \tag{2.5}$$

Общее решение операторного уравнения (2.4) имеет вид

$$U=\frac{u_0}{s^\alpha}+c_1\cdot sh\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)+c_2\cdot ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Произвольные постоянные c_1 и c_2 определим учитывая граничные условия (2.5). Имеем:

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0}=c_2ch\left(\frac{s^{\alpha/2}}{\lambda}\right)=0\\&U\big|_{x=l}=\frac{u_0}{s^\alpha}+c_1\cdot sh\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)+c_2\cdot ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{u_1}{s}\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Из системы (2.6) получим

$$c_1=0,\qquad c_2=\frac{\dfrac{\left(\dfrac{u_1}{s}-\dfrac{u_0}{s^\alpha}\right)}{s}}{ch\left(\dfrac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)}.$$

Таким образом, решение в изображениях имеет вид

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s^{\alpha}}-\left(\frac{u_1}{s}-\frac{u_0}{s^{\alpha}}\right)\cdot\frac{ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)}{ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)}\;. \qquad (2.7)$$

Для перехода от изображения $U(x,s)$ к оригиналу воспользуемся обобщенным правилом дробных показателей [9].

<u>Теорема.</u> Пусть $U(x,s)\to 0$ при $s\to\infty$, $\operatorname{Re}s<0$ и не имеет в конечной s-плоскости никаких особенностей, кроме начала координат $s=0$, которое является точкой разветвления конечного порядка q.

Тогда, если разложение $U(x,s)$ в обобщенный ряд имеет вид:

$$U(x,s)=s^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x)s^{\beta k},$$

где β - рационально и положительно, то оригиналом $U(x,s)$ служит (умноженный на функцию Хевисайда $\eta(t)$) ряд

$$u(x,t)=\frac{1}{t^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(x)}{\Gamma(-\alpha-k\beta)}\cdot\frac{1}{t^{k\beta}}\,,$$

в котором вычеркнуты все члены с целыми неотрицательными $\alpha+k\beta$.

Действительно, обратимся к выражению (2.7). Гиперболические функции $ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ и $ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ представим в виде обобщенных степенных рядов:

$$ch\left(\frac{x}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{x}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x)s^{\alpha k}, \tag{2.8}$$

$$ch\left(\frac{l}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{l}{\lambda}s^{\alpha/2}\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x)s^{\alpha k}, \tag{2.9}$$

где

$$b_k(x)=\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k}, \qquad a_k(x)=\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2k}.$$

Выполнив деление степенных рядов (2.8) и (2.9), получим ряд

$$\frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x)s^{\alpha k},$$

где коэффициенты $c_k(x)$ находятся последовательно из соотношений

$$a_0c_0=b$$
$$a_0c_1+a_1c_0=b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0c_n+a_1c_{n-1}+\ldots+a_nc_0=b_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Здесь аргумент x для $b_k(x)$ опущен.

Таким образом, изображение $U(x,s)$ может быть представлено в виде ряда

$$U(x,s)=\frac{u_0}{s^{\alpha}}+\frac{1}{a_0}\left(\frac{u_1}{s}-\frac{u_0}{s^{\alpha}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x)s^{\alpha k} \tag{2.10}$$

Тогда согласно сформированной ранее теоремы находим, что оригиналом для (2.10) служит выражение

$$u(x,t) = u_0 + \frac{u_1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(x)}{\Gamma(1-k\alpha)}\cdot\frac{1}{t^{k\alpha}} - \frac{u_0}{a_0 t^{\frac{\alpha}{2}+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k(x)}{\Gamma(1-k\alpha)}\cdot\frac{1}{t^{k\alpha}}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Полученное решение можно использовать для проведения численных экспериментов при моделировании процессов аномальной диффузии в системах, обладающих фрактальной структурой.

3. РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СОСТАВНОМ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ТЕЛЕ С УЧЁТОМ ОБОБЩЁННОГО ЗАКОНА ФУРЬЕ

Температурные поля в протяжённых телах, а также телах, обладающих симметрией, могут быть с большой точностью описаны одномерным уравнением теплопроводности. В данной работе полупространство со слоем моделируется одномерным составным стержнем и рассматривается задача о расчёте температурных полей в составном полубесконечном стержне, конечная и полубесконечная части которого имеют различные теплофизические параметры. В качестве математической модели принято уравнение теплопроводности с дробной производной по времени, которая учитывает нелокальность тепловых процессов по времени. Предполагается, что боковые поверхности составного стержня теплоизолированы, а на одном из концов ограниченной его части поддерживается постоянная температура. На границе ограниченной и полубесконечной части стержня предполагается идеальный тепловой контакт. Решение начально-краевой задачи основано на применении прямого и обратного преобразований Лапласа. Обращение полученного решения в изображениях в общем случае представляет значительные трудности.

В работе выполнен асимптотический анализ решения при условии, что порядки дробных производных в обеих частях стержня равны между собой, а переменная s преобразования Лапласа стремится к бесконечности. В этом случае обратное преобразование Лапласа получено с использованием так называемых функций Маинарди. На основании тауберовых теорем можно утверждать, что полученное решение является решением для малых времён и представлено в виде определённых интегралов от функций Маинарди или, вообще говоря, в виде обобщённых степенных рядов. В таком виде оно может быть достаточно просто использовано в инженерных расчётах.

3.1 Постановка задачи

Учёт фрактальности структуры или нелокальной временной зависимости между тепловым потоком и градиентом температуры приводит к дифференциальному уравнению теплопроводности с дробными производными [10].

При выводе классического уравнения теплопроводности [11]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; ρ – плотность, использовался закон Фурье, который задаётся линейной зависимостью между вектором теплового потока $\overline{q}(t)$ и градиентом температур $\overline{q}(t) = -\lambda \operatorname{grad} T(t)$.

В данной работе мы будем рассматривать дифференциальные уравнения с дробной производной по времени вида

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2},$$

которые получены благодаря обобщению закона Фурье, позволяющему учитывать нелокальность тепловых процессов

$$\overline{q}(t) = -\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\mathrm{t}} (\mathrm{t} - \tau)^{\alpha - 1} \operatorname{grad} T(t)\, d\tau,$$

$$0 < \alpha \le 1.$$

При выводе уравнения с дробной производной учтено, что

$$\frac{\partial^\alpha T}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (t-\tau)^{-\alpha} \frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} d\tau ,$$

$$0 < \alpha < 1$$

и является производной в смысле Капуто, а $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [12].

Рассмотрим систему, состоящую из ограниченного и полубесконечного стержней, имеющих различные теплофизические постоянные и предположим, что боковые поверхности стержней теплоизолированны (рис. 3.1), а на одном из концов ограниченного стержня поддерживается постоянная температура.

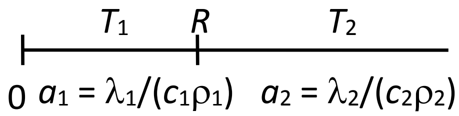


Рисунок 3.1 Составной стержень и его теплофизические постоянные

Цель работы состоит в определении температурных полей в составном стержне.

Будем считать, что температурное поле описывается уравнениями с дробными по времени производными

$$\frac{\partial^\alpha T_1(x,t)}{\partial t^\alpha} = a_1^2 \frac{\partial^2 T_1(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

$$0 < x < R, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\frac{\partial^{\beta} T_2(x,t)}{\partial t^{\beta}} = a_2^2 \frac{\partial^2 T_2(x,t)}{\partial x^2}, \tag{3. 2}$$

$$R < x < \infty, \quad 0 < \beta < 1$$

с начальными условиями

$$T_1(x,0) = 0, \quad T_2(x,0) = 0\ , \tag{3. 3}$$

граничными условиями

$$T_1(0,\tau) = T_0 = \text{const}, \quad \lim_{x\to\infty} T_2(x,\tau) = 0\,, \tag{3.4}$$

а также условиями идеального теплового контакта при $x = R$

$$T_1(R,\tau) = T_2(R,\tau), \tag{3.5}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=R} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=R}. \tag{3. 6}$$

3.2 Решение задачи

Для решения задачи воспользуемся операционным методом и перейдём к изображениям Лапласа. Уравнения (3.1), (3.2) с учётом начальных условий приобретают вид

$$\frac{\partial^2 T_1^*(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^{\alpha}}{a_1^2} T_1^*(x,s) = 0, \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 T_2^*(x,s)}{\partial x^2} - \frac{s^{\beta}}{a_2^2} T_2^*(x,s) = 0\,. \tag{3.8}$$

Здесь также учтено, что

$$L\left\{\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}\right\} = s^{\alpha} U^{*}(x,s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{\alpha-i-1} u^{(i)}(x,0),$$

$$n-1 < \alpha \le n.$$

Здесь символом «*» отмечено изображение Лапласа функции $u(x,t)$. Уравнения (3.7), (3.8) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями относительно изображений $T^{*}(x,s)$ и их решения имеют вид:

$$T_1^{*}(x,s) = C_1 \exp\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1} x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1} x\right),$$

$$T_2^{*}(x,s) = D_1 \exp\left(\frac{s^{\beta/2}}{a_2} x\right) + D_2 \exp\left(-\frac{s^{\beta/2}}{a_2} x\right),$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 – произвольные постоянные.

Учитывая граничное условие $T_1(0,\tau) = T_0$ и условие на бесконечности, получим

$$C_2 = \frac{T_0}{s} - C_1, \quad D_1 = 0.$$

Далее, удовлетворяя условием идеального теплового контакта (3.5), (3.6) приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных пока C_1 и D_2

$$\begin{cases} 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1} R\right) C_1 - \exp\left(-\dfrac{s^{\beta/2}}{a_2} R\right) D_2 = -\dfrac{T_0}{s} \exp\left(-\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1} R\right), \\[2ex] \dfrac{2\lambda_1 s^{\alpha/2}}{a_1} \operatorname{ch}\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1} R\right) C_1 + \dfrac{\lambda_2 s^{\beta/2}}{a_2} \exp\left(-\dfrac{s^{\beta/2}}{a_2} R\right) D_2 = -\dfrac{s^{\alpha/2} T_0 \lambda_1}{s a_1} \exp\left(-\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1} R\right). \end{cases}$$

Решение системы получим с помощью формул Крамера

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad D_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) & -\exp\left(-\dfrac{s^{\beta/2}}{a_2}R\right) \\ 2a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\operatorname{ch}\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) & a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\exp\left(-\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_2}R\right) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -\dfrac{T_0}{s}\exp\left(-\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) & \exp\left(-\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_2}R\right) \\ \dfrac{-s^{\alpha/2}T_0\lambda_1 a_2}{s}\exp\left(\dfrac{-s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) & a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\left(\dfrac{-s^{\alpha/2}}{a_2}R\right) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2\operatorname{sh}\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) & -\dfrac{T_0}{s}\exp\left(-\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) \\ 2a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\operatorname{ch}\left(\dfrac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) & \dfrac{-s^{\alpha/2}T_0\lambda_1 a_2}{s}\exp\left(\dfrac{-s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) \end{vmatrix}.$$

Решая систему, получим

$$C_2=\frac{T_0}{s}\left[\lambda_1\left(a_2 s^{\alpha/2}-a_1 s^{\beta/2}\right)\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]\left[a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\operatorname{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)+a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\operatorname{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]^{-1},$$

,

$$D_2=\frac{T_0}{s}\left[s^{\alpha/2}\lambda_1\left(a_1\operatorname{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)+a_2\operatorname{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right)\right]\left[a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\operatorname{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)+a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\operatorname{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]^{-1}.$$

.

Отсюда

$$C_2 = \frac{T_0}{s} - \frac{T_0}{s}\left[\lambda_1\left(a_2 s^{\alpha/2} - a_1 s^{\beta/2}\right)\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]\left[a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\mathrm{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) + a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\mathrm{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]^{-1}.$$

Таким образом, решение в изображениях имеет вид

$$T_1^* = \frac{2\lambda_1 T_0}{s}\left(a_2 s^{\alpha/2} - a_1 s^{\beta/2}\right)\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\mathrm{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_2}x\right)\left[a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\mathrm{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) + a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\mathrm{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]^{-1} +$$

$$+\frac{T_0}{s}\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}x\right).$$

$$T_2^* = \left(s^{\alpha/2}\lambda_1\left[a_1\mathrm{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) + a_2\mathrm{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]\exp\left(-\frac{s^{\beta/2}}{a_2}x\right)\right)\left[a_1\lambda_2 s^{\beta/2}\mathrm{sh}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right) + a_2\lambda_1 s^{\alpha/2}\mathrm{ch}\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\right]^{-1}\frac{T_0}{s}.$$

Обращение полученных выражений представляет значительные трудности и требует привлечения численных методов.

В этой связи рассмотрим асимптотическое поведение решений при $t \to 0$. Далее воспользуемся тем фактом, что поведение изображения $U^*(x,s)$ на бесконечности ($s \to \infty$) определяет асимптотическое поведение решения $u(x,t)$ вблизи нуля. Любое подобное соотношение между $U^*(x,s)$ и $u(x,t)$ называется тауберовой теоремой. Учитывая сказанное, имеем

$$\mathrm{sh}\left(\frac{R}{a_1}s^{\alpha/2}\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{R}{a_1}s^{\alpha/2}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{2R}{a_1}s^{\alpha/2}\right)\right)$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sh}\left(\frac{R}{a_1}s^{\alpha/2}\right)\approx\frac{1}{2}\exp\left(\frac{R}{a_1}s^{\alpha/2}\right)$$

при $s\to\infty$.

Аналогичное соотношение справедливо и для гиперболического косинуса.

Таким образом, для больших значений переменной преобразования s имеем приближенные выражения для T_1^* и T_2^*:

$$T_1^*=\frac{T_0}{s}2\lambda_1\left(a_2s^{\alpha/2}-a_1s^{\beta/2}\right)\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}R\right)\exp\left(\frac{s^{\alpha/2}}{a_2}x\right)\left[a_1\lambda_2s^{\beta/2}+a_2\lambda_1s^{\alpha/2}\right]^{-1}+ \tag{3.9}$$
$$+\frac{T_0}{s}\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}x\right),$$

$$0<x<R.$$

$$T_2^*=\frac{T_0}{s}\lambda_1\left(a_1+a_2\right)s^{\alpha/2}\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_2}x\right)\left[a_1\lambda_2s^{\beta/2}+a_2\lambda_1s^{\alpha/2}\right]^{-1}, \tag{3.10}$$

$$R<x<\infty.$$

И, наконец, в частном случае, когда α = β выражения (3.9) и (3.10) приобретают вид

$$T_1^*\left(x,s\right)=\frac{T_0}{s}\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_1}x\right)+\frac{2T_0\lambda_1\left(a_2-a_1\right)}{s\left(a_1\lambda_2+a_2\lambda_1\right)}\exp\left(-\frac{\left(2R-x\right)s^{\alpha/2}}{a_1}\right), \tag{3.11}$$

$$0<x<R,$$

$$T_2^*\left(x,s\right)=\frac{T_0}{s}\frac{\lambda_2\left(a_1+a_2\right)}{a_1\lambda_2+a_2\lambda_1}\exp\left(-\frac{s^{\alpha/2}}{a_2}x\right), \tag{3.12}$$

$$R<x<\infty.$$

Чтобы в выражениях (3.11), (3.12) перейти к оригиналам, заметим, что

$$L^{-1}\left\{\exp\left(-as^{\gamma}\right)\right\}=\frac{a\gamma}{t^{\gamma+1}}M\left(\gamma;at^{\gamma}\right),$$

где

$$M\left(\gamma;z\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}z^{k}}{k!\Gamma\left(-\gamma k+1-\gamma\right)},$$

и, кроме того,

$$L^{-1}\left\{\frac{F\left(s\right)}{s}\right\}=\int_{0}^{t}f\left(t\right)dt.$$

Тогда

$$T_1\left(x,t\right)=T_0\int_0^t\frac{\alpha x}{2a_1t^{\alpha/2+1}}M\left(\frac{\alpha}{2};\frac{t^{\alpha/2}}{a_1}x\right)dt+\frac{2T_0\lambda_1\left(a_2-a_1\right)}{a_1\lambda_2+a_2\lambda_1}\int_0^t\frac{\alpha}{2a_1}\frac{2R-x}{t^{\alpha/2+1}}M\left(\frac{\alpha}{2};\frac{t^{\alpha/2}}{a_1}\left(2R-x\right)\right)dt,$$

$$T_2\left(x,t\right)=\frac{T_0\lambda_2\left(a_1+a_2\right)}{a_1\lambda_2+a_2\lambda_1}\int_0^t\frac{\alpha x}{2a_2t^{\alpha/2+1}}M\left(\frac{\alpha}{2};\frac{t^{\alpha/2}}{a_2}x\right)dt.$$

3.3 Выводы

С помощью методов операционного исчисления получено в замкнутом виде решение задачи аномальной теплопроводности, то есть получена возможность вычисления температур как в конечной, так и бесконечной части стержня. Численные результаты могут быть получены без применения сложных вычислительных алгоритмов, что представляется полезным в инженерных расчётах и могут быть применены при исследовании так называемых переходных процессов.

В работе получено решение задачи аномальной теплопроводности в системе ограниченного и полуограниченного тел. В общем случае решение получено в изображениях Лапласа, обращение которого требует привлечения численных методов. Однако, в частном случае $\alpha = \beta$ решение для малых величин времени получено в аналитическом виде и представлено в виде степенных рядов или функций Маинарди.

4ЗАДАЧА СТЕФАНА В СЛУЧАЕ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

В предыдущих параграфах нами получены точные решения дробных дифференциальных уравнений теплопроводности для двух случаев: для полубесконечного стержня и для полубесконечного составного стержня. В данном параграфе рассмотрим решения прямой задачи Стефана, которая, как известно [ ], заключается в определении закона движения границы раздела фаз, а также определения температуры каждой фазы.

Итак, пусть двухфазная среда описывается системой уравнений с дробными производными

$$\frac{\partial^\alpha u_1(x,t)}{\partial t^\alpha} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \xi(t) \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial^\alpha u_2(x,t)}{\partial t^\alpha} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2}, \qquad \xi(t) < x < \infty \qquad (4.2)$$

$0< \quad \alpha\leq$

Здесь и по определению

$$\frac{\partial^\alpha u_1(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\qquad} \int_0^t \frac{u'_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\, d\tau$$

$$\Gamma(1-\alpha)$$

производная Капуто, учитывающая в данном случае, эффекты памяти изучаемой среды.

Зададимся начальными и граничными условиями, которые в нашем случае имеют вид

$$u_1(x,\tau)\big|_{x=0} = \overline{u_0}, \qquad (4.3)$$

$$u_2(x,t)\big|_{t=0} = \overline{u_1}, \qquad (4.4)$$

а также условиями сопряжения на границе раздела фаз

$$u_1(x,t) = u_2(x,t) = \overline{u_2}, \qquad \text{при } x = \xi(t) \qquad (4.5)$$

и

$$a_1 \frac{\partial^\alpha u_1(x,t)}{\partial t^\alpha} - a_2 \frac{\partial^\alpha u_2(x,t)}{\partial t^\alpha} = \lambda p \frac{d\xi}{dt}, \text{при } x = \xi(t) \qquad (4.6)$$

Рассмотрим задачу Стефана в следующей постановке:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \xi(t) \qquad (4.7)$$

$$u = u_0 = const \quad \text{при } x = 0 \qquad (4.8)$$

$$u = u_t = const \quad \text{при } x = \xi(t) \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial^\alpha \xi(t)}{\partial t} = q \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi(t)} \qquad (4.10)$$

$$\xi(0) = 0 \qquad (4.11)$$

Для перехода к однородным граничным условиям введем новую функцию

$$\overline{u} = u - u_0$$

после чего получим

$$\frac{\partial^\alpha \overline{u}}{\partial t^\alpha} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \xi(t) \qquad (4.12)$$

$$\overline{u} = 0 \qquad \text{при } x = 0, \qquad (4.13)$$

$$u = u_1 - u_0 \quad \text{при } x = \xi(t), \qquad (4.14)$$

$$\frac{\partial^\alpha \xi(t)}{\partial t^\alpha} = q \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi(t)}, \qquad (4.15)$$

$$\xi(0) = 0. \qquad (4.16)$$

Для решения задачи (4.12) – (4.16) воспользуемся решением начально-краевой задачи, полученным в работах Маинард.

Из указанных работ известно, что решение для бесконечной среды может быть представлено в виде

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi,t) \cdot f(\xi)\, d\xi \qquad (4.17)$$

где

$$G(x,t)=\frac{1}{2a}\,t^{-\frac{\alpha}{2}}\,M\left(\frac{|\alpha|}{t^{\frac{\alpha}{2}}},\frac{\alpha}{2}\right), \qquad (4.18)$$

а $M(z,\alpha)$ – функция Маинарди.

Для полубесконечной среды, используя свойства функции (4.18), мы получим

$$\overline{u}=A\left[1-M\left(-\frac{|\alpha|}{at^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

где A – постоянная, подлежащая определению.

Учитывая, что $\overline{u}=u-u_0$ получим

$$u_1-u_0=\overline{u}\big(t,\xi(t)\big)=A\left[1-M\left(-\frac{|\alpha|}{at^{\frac{\alpha}{2}}},-\frac{\alpha}{2}\right)\right], \qquad (4.19)$$

откуда следует, что $\xi(t)$ пропорционально $t^{\frac{\alpha}{2}}$, а значит

$$\xi(t)=Cat^{\frac{\alpha}{2}},$$

где C – постоянная, пока неизвестная, и которую можно определить исходя из условия (4.15) .

Действительно

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}=A\,\frac{1}{at^{\frac{\alpha}{2}}}\,M\left(-p,-\frac{\alpha}{2}\right)$$

и тогда

$$\frac{a^2}{q}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{}\cdot C=AM\left(-p,-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Для определения параметра C получим трансцендентное уравнение

$$p \cdot \frac{1 - M\left(-p, -\frac{\alpha}{2}\right)}{M\left(-p, -\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{} \cdot \frac{q(u_1 - u_0)}{a^2}$$

$$\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

и при этом постоянная A имеет вид

$$A = \frac{u_1 - u_0}{1 - M\left(-p, -\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Окончательно

$$u(x,t) = u_0 + (u_1 - u_0) \cdot \frac{1 - M\left(-\frac{x}{a t^{\frac{\alpha}{2}}}, -\frac{\alpha}{2}\right)}{1 - M\left(-p, -\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

ПЕРЕЧЕНЬ ССЫЛОК

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. – 736 с.
2. Мейланов Р.П. К теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой // Письма ИСТФ – 1996. – Т.22. - №23. – с.40-43.
3. Нахушев А.М. Элементы двойного исчисления и их применение. Нальчик.: Изд-во КБНЦ РАН, 2000- - 299с.
4. Головизнин В.М., Короткий И.А. Методы численного решения некоторых одномерных уравнений с дробными производными и дифференциальные уравнения, 2001. – т.42, №7. – с.407-413
5. Бейбалаев В.Д. Численный метод решения математической модели теплопереноса в средах с фрактальной структурой // Фундаментальные иследования. – 2007. -12. –с.249-251.
6. Корчагина А.Н. Численное моделирование диффузионных поцессов в фрактальных средах // Ученые записки ЗГУ. Серия: Физика, математика, техника, технология. – 2013. - №3 (50). – с.53-59.
7. Lin Junyi, Xu Mingyu. Some exat solutions to Stefan problemswith fractionel and Applications // Journal of Mathematical Analisys and Aplications. 2009. V351 – p.536-542.
8. Kulish V.V. Lage Fractional-Diffusion Solutions for Transient Local Temperatare and Heat Flux // I.Heat Transfer. 2000, v. 122, inssue 2. – p.372-377.
9. Лаврентьев М.А., шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. – 716 с.
10. Самко, С. Г., А. А. Килбас, О. И. Маричев Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения // Наука и техника. – Минск, 1987. – С. 688.

11. Лыков, А. В. Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. – М. : Высшая школа, 1967.
12. Mainardi, F. The fundamental solutions for the fractional diffusion wave equation // Appl. Math. Lett. – 1996. – № 9. – P. 23–28.
13. Николенко В. В., Ячменёв В.А. Решение начально-краевой задачи для уравнения аномальной диффузии // Вісник Харківського національного університету. Серія: Математическое моделирование, информационные технологии, автоматизированные системы управления, № 27, – Харьків – 2015.
14. Николенко В. В., Ячменёв В.А. Расчёт температурных полей в составном полубесконечном теле с учетом обобщенного закона Фурье // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Харків: НТУ «ХПІ», 2016.