ЦІЛА ТА ДРОБОВА ЧАСТИНА В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИКИ

Михайленко І.Є, студент СДПУ ім. А.С.Макаренка;
Мартиненко О.В., доцент.

Зазвичай рівняння з цілою та дробовою частинами часто зустрічаються серед завдань математичних олімпіад. Для виконання таких робіт не потрібні додаткові теоретичні знання, крім означення цілої та дробової частини числа. Проте їх успішне виконання вимагає певних навичок, знання деяких прийомів, уміння застосовувати вивчене.

Зазначимо, що *цілою частиною числа x* називають найбільше ціле число, що не перевищує дане число x і позначають через $[x]$. Різницю між числом x та його цілою частиною називають *дробовою частиною числа* $\boldsymbol{x}$ і позначають через $\{x\}$. Тобто за означенням, $\{x\} = x - [x]$ і, очевидно, що $0 \le \{x\} < 1$.

Серед рівнянь зі змінною під знаком цілої частини часто на олімпіадних змаганнях пропонується рівняння виду $f(x) = [g(x)]$, де $f(x)$ і $g(x)$ – відомі функції.

Залежно від складності функцій $f(x)$ і $g(x)$ можна застосовувати наступні методи розв'язання рівнянь: зведення до мішаної системи з цілим параметром, метод локалізації і перебору, метод переходу, функціонально-графічний метод.

Зупинимося більш детально на методі зведення рівняння до мішаної системи з цілим параметром. Складаємо систему з цілим параметром k.

$$\begin{cases} [g(x)] = k, \\ k \le g(x) < k+1, \\ f(x) = k. \end{cases}$$

Розв'язавши її знаходимо розв'язки рівняння $f(x) = [g(x)]$. [2, 92]

Проілюструємо запропонований метод на наступному прикладі.

Розв'язати рівняння $\left[\sqrt{x+20}\right] = x + \dfrac{1}{5}$.

Розв'язання. Використовуючи означення цілої частини, складаємо систему:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{x+20}\right] = k, \quad k \in Z \\ k \le \sqrt{x+20} < k+1 \\ k = x + \dfrac{1}{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = k - \dfrac{1}{5} \\ k \le \sqrt{k + \dfrac{99}{5}} < k + N_0 \end{cases}$$

де N_0 – множина цілих невід'ємних чисел.

Піднесемо до квадрата всі частини подвійної нерівності останньої системи, дістанемо систему двох квадратних нерівностей:

$$\begin{cases} 5k^2 - 5k - 99 \le 0 \\ 5k^2 + 5k - 94 > 0 \end{cases}$$

Звідси маємо, що $k \in \left(\frac{\sqrt{1905}-5}{10}; \frac{\sqrt{2005}+5}{10} \right]$.

Єдиним цілим числом, яке міститься в цілому проміжку є $k = 4$, отже $x = 3\frac{4}{5}$.

Розглянемо рівняння $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$. Оскільки це узагальнена задача, то спосіб її розв'язання є важливим підґрунтям для розв'язування багатьох вправ.

Розв'язати рівняння $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$, де $\{n, m\} \subset \mathrm{N}$ і $m > n$.

Розв'язання. Позначимо $\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{m}\right] = k$, $k \in Z$ і $m > n$. Тоді:

$$\begin{cases} k \le \dfrac{x}{m} < k+1 \\ k \le \dfrac{x}{n} < k+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} mk \le x < mk+m \\ nk \le x < nk+n \end{cases}$$

1) Нехай $k < 0$, тоді $mk < nk$. Розв'язком буде $x \in [nk; mk+m)$ за умови, що $nk < mk + m$, тобто якщо $-\frac{m}{m-n} < k < 0, \quad k \in Z$.

2) Нехай $k \ge 0$. Розв'язком буде $x \in [mk; nk+n)$ за умови, що $mk < nk + n$, тобто якщо $0 \le k < \frac{n}{m-n}, \quad k \in Z$.

Відповідь: $x \in [nk; mk+m),\ \text{де}\ k \in \left(-\frac{m}{m-n}; 0\right) \cap Z$

$x \in [\text{ь}k; mk+m),\ \text{де}\ k \in \left(0; \frac{m}{m-n}\right) \cap Z$. [1, 33]

Але під час розв'язування математичних задач з цілою і дробовою частинами числа не завжди доцільно слідувати загальним алгоритмам, відхилення він них інколи приводять до більш раціонального розв'язку.

Література

1. Апостолова Г., Панкратова І., Фінкельштейн Л. Ціла та дробова частина числа. К.: Факт, 1996. – 97 с.
2. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. Х.: Вид. група «Основа», 2008. –255 с.