

## Коефіцієнт прозорості та квазістаціонарні стани електрона у симетричній двобар'єрній наносистемі з просторово-залежними потенціалом і ефективною масою

Ю.О. Сеті\*, М.В. Ткач

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, 58012 Чернівці, Україна

(Одержано 22.04.2018, у відредагованій формі – 04.06.2018, опубліковано online 25.06.2018)

У моделі плавних просторово-залежних ефективної маси та потенціальної енергії електрона з їх лінійною залежністю від координати у приграничних шарах між ямами та бар'єрами відкритої симетричної двобар'єрної резонансно-тунельної наноструктури знайдені розв'язки рівняння Шредінгера. На їх основі здійснено розрахунок коефіцієнта прозорості наносистеми з  $\text{In}_{0.52}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$  ямами та  $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$  бар'єрами та резонансних енергій і резонансних ширин підбар'єрних квазістаціонарних станів електрона. Досліджено вплив розмірів приграничних шарів на спектральні параметри квазістаціонарних станів електрона та виконано порівняльний аналіз отриманих залежностей з результатами найбільш поширеної моделі неперервних сходиноподібних ефективної маси та потенціальної енергії електрона, які стрибкоподібно змінюють на межах між шарами наносистеми.

**Ключові слова:** Координато-залежна ефективна маса, Координато-залежний потенціальний профіль, Резонансно-тунельна наноструктура, Квазістаціонарний стан, Коефіцієнт прозорості.

DOI: 10.21272/jnep.10(3).03021

PACS numbers: 78.67.De, 63.20.Dj, 63.22. + m

### 1. ВСТУП

Як тільки потреби дослідження неомогенних систем взагалі, а особливо наногетеросистем зокрема, привели до введення поняття просторово-залежної ефективної маси квазічастинок, виникла теоретична проблема коректного запису оператора кінетичної енергії у гамільтоніані, оскільки ефективна маса у цьому підході не комутує з оператором імпульсу.

Через відсутність послідовної теорії просторово-залежної ефективної маси найбільш реалістична форма розташування ефективної маси у операторі кінетичної енергії обґрунтовувалася непрямими методами. Виявилось, що результати теорії гетероструктур з гамільтоніаном у формі BenDaniel-Duke  $H = -\hbar^2 \vec{\nabla} m^{-1} \vec{\nabla} / 2 + U(r)$  найкраще узгоджуються як з іншими теоретичними моделями (типу Кроніга-Пенні), так і з експериментом.

У теорії масивних і наногетеросистем з просторово-залежними потенціалами і ефективними масами квазічастинок, через виникаючі при розв'язуванні рівняння Шредінгера математичні складності, застосовувалися три різні спрощені підходи. Перший – це підхід, в якому ефективна маса і потенціальна енергія вибираються такими, що забезпечує існування точних розв'язків рівняння Шредінгера [1-4], хоча при цьому може втрачатися адекватність моделі реальній фізичній експериментальній ситуації. У двох інших підходах – це або наближене числове розв'язування рівняння Шредінгера, або його точне аналітичне розв'язування у спрощеній моделі стрибкоподібної зміни на інтерфейсах системи ефективної маси та потенціальної енергії [5-7].

З розвитком нанотехнологій та створенням унікальних наноприладів - квантових каскадних лазерів та детекторів [8-10], основними робочими елементами яких є плоскі багатошарові наноструктури,

актуальність адекватної теорії наносистем з просторово-залежними потенціальною енергією та ефективною масою значно зростає. Адже для покращення робочих параметрів цих наноприладів необхідне глибоке розуміння фізичних процесів, які відбуваються в їх базових елементах, що забезпечує теорія електронного тунелювання крізь багатошарові резонансно-тунельні структури (РТС), як каскади наноприладів. Створення такої теорії вимагає застосування моделей з достатньо реалістичними просторово-залежними як потенціальним рельєфом, так і ефективною масою. З фізичних міркувань зрозуміло, що через недосконалість гетеромеж наносистеми за рахунок неоднорідностей контактуючих середовищ та через існуючу різницю величин їх постійних ґраток, виникають приграничні нанопари, в яких і ефективна маса, і потенціальна енергія квазічастинки відрізняються від відповідних характеристик у обох середовищах і у першому наближенні є лінійними координато-залежними функціями.

Відмітимо, що у переважній більшості теоретичних робіт [6, 11] електронне тунелювання крізь багатошарові наносистеми вивчалось на основі простої моделі стрибкоподібної зміни на гетеромежах потенціального рельєфу та ефективної маси електрона. А у тих небагатьох роботах, наприклад [12-14], де застосовувалися координато-залежні моделі, питання тунелювання крізь наноструктури не розглядалися і вивчалися точні чи наближенні розв'язки рівняння Шредінгера з заданими умовами задач залежностями потенціалів і мас від координат. Лише у роботах [15, 16] у моделі плавно-змінної ефективної маси електрона з лінійною залежністю від координати у приграничних шарах наносистеми та стрибкоподібної зміни на гетеромежах потенціального рельєфу на основі точних розв'язків рівняння Шредінгера було досліджено вплив розміру приграничного шару на

\* j.seti@chnu.edu.ua

спектральні параметри електронних станів.

Метою пропонованої роботи є побудова реалістичної теорії коефіцієнта прозорості та квазістаціонарних станів (КСС) електрона у моделі з плавнозмінними просторово-залежними ефективною масою та потенціальною енергією електрона у всіх приграничних шарах відкритої симетричної двобар'єрної РТС (ДБРТС).

**2. КОЕФІЦІЄНТ ПРОЗОРСТІ ДБРТС З ЛІНІЙНО-ЗАЛЕЖНИМИ ЕФЕКТИВНОЮ МАСОЮ ТА ПОТЕНЦІАЛЬНОЮ ЕНЕРГІЄЮ ЕЛЕКТРОНА У ПРИГРАНИЧНИХ ШАРАХ**

У декартовій системі координат розглядається відкрита плоска симетрична ДБРТС, на яку перпендикулярно до границь поділу між шарами наносистеми вздовж вісі  $z$  падає моноенергетичний потік електронів з енергією  $E$ . Властивості спектральних параметрів КСС електрона будемо вивчати у моделі I, яка враховує плавно лінійну координатну залежність у приграничних шарах між ямами та бар'єрами як ефектної маси електрона (суцільна лінія на рис. 1 а)

$$m(z) = m_w \begin{cases} 1, & \text{обл. } p = 0, 6, 12; \\ 1 + \delta m \frac{z - z_p}{2\Delta}, & \text{обл. } p = 1, 2, 7, 8; \\ \frac{m_b}{m_w} - \delta m \frac{z - z_p}{2\Delta}, & \text{обл. } p = 4, 5, 10, 11; \\ \frac{m_b}{m_w}, & \text{обл. } p = 3, 9; \end{cases} \quad (1)$$

так і потенціальної енергії (суцільна лінія на рис.1b)

$$U(z) = U \begin{cases} 0, & \text{обл. } p = 0, 6, 12; \\ \frac{z - z_p}{2\Delta}, & \text{обл. } p = 1, 2, 7, 8; \\ -\frac{z - z_p}{2\Delta}, & \text{обл. } p = 4, 5, 10, 11; \\ 1, & \text{обл. } p = 3, 9. \end{cases} \quad (2)$$

Тут  $U$  – висота потенціального бар'єра,  $a$  – ширина квантової ями,  $2\Delta$  - ширина приграничної області,  $m_w$ ,  $m_b$  - ефектні маси електрона у ямах та бар'єрах ДБРТС відповідно, та  $\delta m = (m_b - m_w) / m_w$ .

Для порівняння також будемо розглядати цю ж наносистему у найпростішій моделі II, як у найбільш поширеній у літературі [6, 7], зі сходинкоподібними залежностями від координати ефектної маси та потенціальної енергії, які стрибкоподібно змінюються на межах між ямами та бар'єрами наносистеми (штрихові лінії на рис. 1 а, b).

Розв'язки рівняння Шредінгера та властивості КСС електрона у багатощарових наносистемах у моделі II відомі [7], тому далі приведемо теорію лише для моделі I.

У моделі I для електрона справедливе одномірне рівняння Шредінгера у формі BenDaniel-Duke

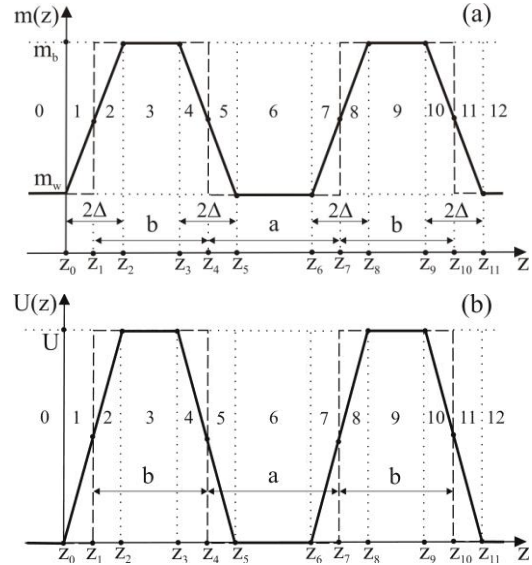


Рис. 1 – Залежності ефектної маси (а) та потенціальної енергії (b) електрона у симетричній ДБРТС від координати  $z$  у моделях I (суцільні лінії) та II (штрихові лінії)

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{m(z)} \frac{d}{dz} \right) + U(z) \right] \Psi(z) = E \Psi(z), \quad (3)$$

яке доцільно розв'язувати, перейшовши до безрозмірної змінної  $\eta = z/a_0$  ( $a_0$  - постійна ґратки середовища-ями). Увівши безрозмірні величини:  $\eta_p = z_p/a_0$  ( $p=0-11$ ),  $d = \Delta/a_0$ ,  $\varepsilon = E/Ry$ ,  $V = U/Ry$  (де  $Ry$  – постійна Рідберга), та знерозмірену функцію

$$\Psi(z) = C \Psi(\eta) = C \sum_{p=0}^{12} \Psi_p(\eta_{p-1} \leq \eta \leq \eta_p) \quad (4)$$

з (3) отримується рівняння

$$\left[ \frac{1}{m(\eta)} \frac{d^2}{d\eta^2} - \frac{1}{m(\eta)^2} \frac{dm(\eta)}{d\eta} \frac{d}{d\eta} - \frac{2\alpha_0^2 m_w Ry}{\hbar^2} (U(\eta) - \varepsilon) \right] \Psi(\eta) = 0. \quad (5)$$

Розв'язки цього рівняння шукаються з урахуванням умов неперервності хвильової функції та потоку її густини ймовірності на всіх межах ( $\eta_p$ ,  $p = 0-11$ ) наносистеми

$$\begin{cases} \Psi_p(\eta_p) = \Psi_{p+1}(\eta_p), & (p = 0-11) \\ \left. \frac{d\Psi_p(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_p} = \left. \frac{d\Psi_{p+1}(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_p} \end{cases} \quad (6)$$

У областях 0, 3, 6, 9, 12 (рис. 1), де ефектна маса та потенціальна енергія електрона постійні, точні розв'язки рівнянь (5) відомі [6, 7]

$$\Psi_p(\eta) = A_p e^{iK_p \eta} + B_p e^{-iK_p \eta}, \quad (p = 0, 3, 6, 9, 12). \quad (7)$$

де

$$K_p = \sqrt{(-1)^p} \begin{cases} k = \frac{a_0}{\hbar} \sqrt{2m_w R y \varepsilon}, & p = 0, 6, 12 \\ \chi = \frac{a_0}{\hbar} \sqrt{2m_b R y (V - \varepsilon)}, & p = 3, 9. \end{cases} \quad (8)$$

У тих областях наносистеми, де ефективна маса та потенціальна енергія є лінійними функціями координати, рівняння (5) не має точного розв'язку. Тому для його розв'язання неперервна координато-залежна функція  $U(\eta)$  задається у вигляді суми  $N$  кусково-неперервних функцій

$$U(\eta_j \leq \eta \leq \eta_{j+2}) = \quad (9)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^N U(\tilde{\eta}_{j,s} - \frac{d}{N}) [\theta(\eta - \tilde{\eta}_{j,s}) - \theta(\eta - \tilde{\eta}_{j,s-1})], \quad (j = 0, 4, 6, 10)$$

де  $\tilde{\eta}_{j,s} = \eta_p + s \frac{2d}{N}$ ,  $\tilde{\eta}_{j,0} = \eta_j$ ,  $\tilde{\eta}_{j,N} = \eta_{j+2}$ .

Очевидно, що при великих значеннях  $N \gg 1$  неперервну функцію  $U(\eta)$  з потрібною точністю завжди можна замінити на кусково-неперервну функцію (9). Тоді при умові виконання рівнянь неперервності типу (6) рівняння (5) уже розв'язується. Його розв'язки мають вигляд [15, 16]

$$\Psi_p(\xi_p) = A_p \text{Ai}'(\xi_p) + B_p \text{Bi}'(\xi_p), \quad (10)$$

де

$$\xi_p(\eta) = 2m(\eta) \left( \frac{m_w a_0^2 d^2 R y (U - (p) - \varepsilon)}{\delta m^2 \hbar^2} \right)^{1/3}. \quad (11)$$

Тепер урахувавши, що потік електронів падає на наносистему зліва з відомою амплітудою  $B_0 = 1$ , а справа від неї відбитий потік відсутній  $B_{12} = 0$ , з системи граничних умов (6) знаходяться всі інші коефіцієнти  $A_p$  та  $B_p$ , а отже вже відома  $\Psi(z)$ .

Розрахувавши відношення густин електронних потоків на виході та вході у ДБРТС отримується коефіцієнт прозорості наносистеми, який дозволяє визначити резонансні енергії (РЕ)  $E_n$  та резонансні ширини (РШ)  $\Gamma_n$  КСС електрона.

### 3. АНАЛІЗ ОТРИМАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Розрахунок спектральні параметри  $(E_n, \Gamma_n)$  КСС електрона у моделях I та II здійснювався на прикладі відкритої симетричної ДБРТС з  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$  ямами та  $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$  бар'єрами з відомими фізичними параметрами:  $m_w = 0.047m_e$ ,  $m_b = 0.089m_e$ ,  $U = 516 \text{ meV}$ , де  $m_e$  – маса вільного електрона. Вибір такої наносистеми зумовлений тим, що вона є основним робочим елементом активних зон, інжекторів та екстракторів сучасних квантових каскадних лазерів і детекторів [9, 10]. Тому геометричні параметри шарів ДБРТС вибиралися типовими складових елементів каскадів наноприладів  $a=7 \text{ nm}$ ,  $b=2 \text{ nm}$ . Ширини приграничних областей не перевищували величину двох постійних ґраток.

Спектральні параметри електронних КСС у обох моделях визначалися з залежностей коефіцієнта прозорості  $D$  від енергії  $E$ , де положення максимумів лоренцеподібних піків функції  $D(E)$  відповідають РЕ  $(E_n)$ , а ширини цих піків на половинах їх висот - РШ  $(\Gamma_n)$ .

Перш ніж вивчати вплив приграничних шарів на спектральні параметри  $(E_n, \Gamma_n)$  КСС електрона була досліджена еволюція  $E_n$  та  $\Gamma_n$  у залежності від числа розбиттів  $N$  приграничних шарів ДБРТС та встановлене таке оптимальне  $N$ , при якому апроксимована потенціальна енергія забезпечує достатню точність розрахунків спектральних параметрів.

На рис. 2 приведено еволюції РЕ  $(E_1)$  та РШ  $(\Gamma_1)$  найнижчого  $(n = 1)$  КСС електрона від числа  $N$  при двох розмірах  $\Delta = 0.3 \text{ nm}$  та  $\Delta = 0.6 \text{ nm}$  приграничних шарів симетричної ДБРТС.

З рис. 2 видно, що і РЕ  $(E_1)$ , і РШ  $(\Gamma_1)$  при фіксованих розмірах приграничних шарів  $\Delta$  зі збільшенням  $N$  швидко виходять на насичення, збільшення розмірів приграничних шарів при фіксованому  $N$  зменшує точність визначення РЕ та РШ. Розрахунки показують, що при розмірах приграничних шарів порядку однієї постійної ґратки ( $\Delta = 0.6 \text{ nm}$ ) при  $N = 10$  РЕ та РШ усіх підбар'єрних КСС електрона визначаються з точністю до 0.1%.

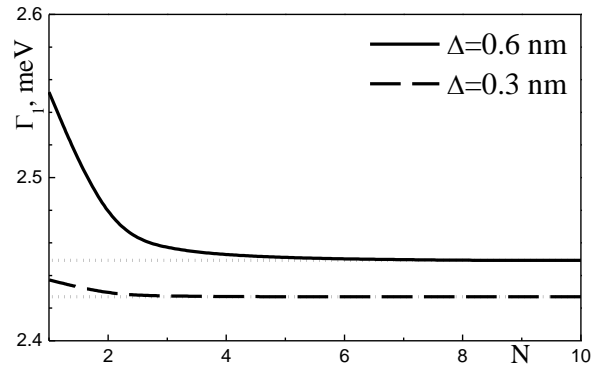
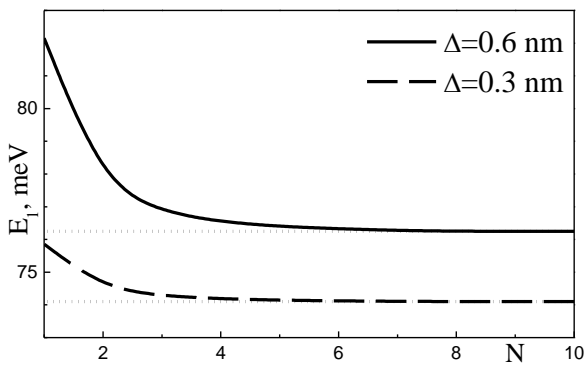


Рис. 2 – Залежності резонансних енергій  $(E_1)$  та резонансних ширин  $(\Gamma_1)$  найнижчого КСС електрона у симетричній ДБРТС від числа розбиттів  $(N)$  приграничних шарів з лінійно-залежними ефективною масою та потенціальною енергією

На рис. 3 наведено розраховані залежності функції  $D(E)$  в околах РЕ ( $E_1, E_2$ ) двох найнижчих КСС електрона у симетричній ДБРТС у моделі I при двох значеннях приграничного шару  $\Delta = 0.3 \text{ nm}$ ,  $0.6 \text{ nm}$  та у спрощеній моделі II ( $\Delta = 0$ ).

З рис. 3 видно, що при фіксованому розмірі приграничного шару  $\Delta$  прозорість симетричної ДБРТС при резонансних енергіях  $E_n$  ( $n = 1, 2$ ) максимальна:

$D(E_n) = 1$ . Збільшення розмірів приграничних шарів ( $\Delta$ ) зміщує у високоенергетичну область та слабо деформує обидва лоренцеподібні піки і не впливає на величини їх максимумів.

Для виявлення впливу розмірів приграничних шарів на спектральні параметри електронних КСС у моделі I виконувалися розрахунки залежностей РЕ та РШ двох найнижчих електронних КСС у залежності від товщин ( $\Delta$ ) приграничних шарів симетричної ДБРТС. Для порівняння також розраховувалися спектральні параметри у моделі II.

Відмітимо, що залежності РЕ та РШ довільного підбар'єрного КСС від  $\Delta$  якісно подібні, тому на

рис. 4, для прикладу, вони наведені лише для РЕ та РШ найнижчого ( $n = 1$ ) КСС електрона.

З рис.4 видно, що, у відповідності з фізичними міркуваннями, при  $\Delta = 0$  РЕ ( $E_n^I$ ) та РШ ( $\Gamma_n^I$ ) у моделі I з плавно-залежними ефективною масою та потенціальною енергією збігаються з відповідними значеннями РЕ ( $E_n^I$ ) та РШ ( $\Gamma_n^I$ ) у спрощеній сходинкоподібній моделі II. Збільшення розмірів приграничних шарів ( $\Delta$ ) при фіксованій ширині ями  $a=7\text{nm}$  приводить лише до зростання величин як РЕ ( $E_n^I$ ), так і РШ ( $\Gamma_n^I$ ) довільного підбар'єрного стану, збільшуючи їх різниці з відповідними величинами РЕ ( $E_n^{II}$ ) та РШ ( $\Gamma_n^{II}$ ) у моделі II. Встановлено, що при розмірах приграничного шару порядку однієї постійної ґратки ( $\Delta = 0.6 \text{ nm}$ ) відносні різниці між РЕ ( $E_n^I - E_n^{II})/E_n^I$  та РШ ( $\Gamma_n^I - \Gamma_n^{II})/\Gamma_n^I$  довільного  $n$ -го КСС у обох моделях не перевищують 5 % та 15 % відповідно.

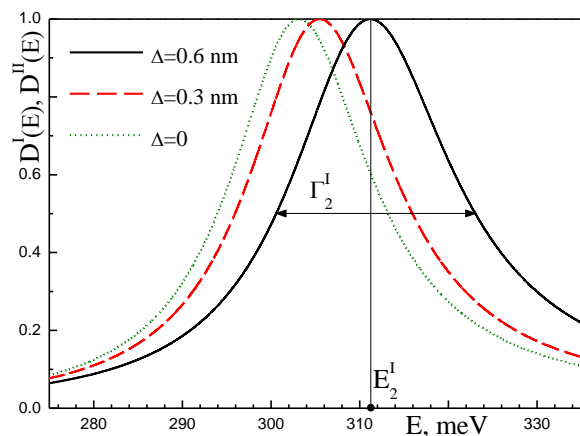
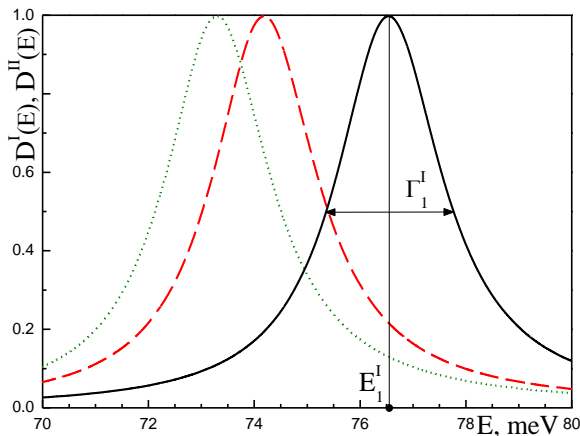


Рис. 3 – Залежності коефіцієнта прозорості  $D$  від енергії  $E$  в околах РЕ ( $E_1, E_2$ ) перших двох КСС електрона у симетричній ДБРТС у моделях I ( $\Delta = 0.3 \text{ nm}$ ,  $\Delta = 0.6 \text{ nm}$ ) та II ( $\Delta = 0$ )

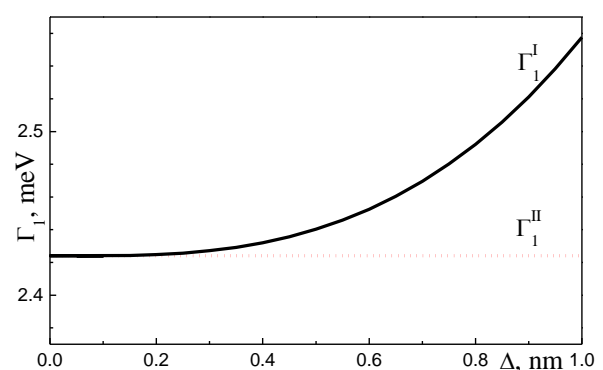
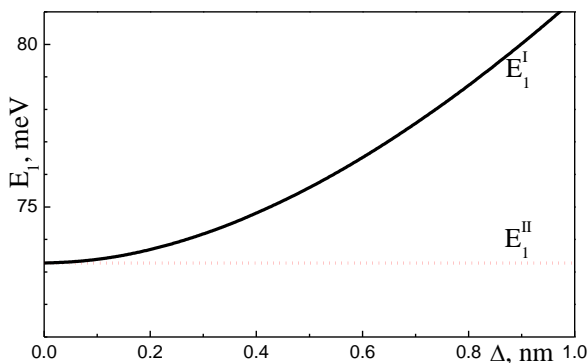


Рис. 4 – Залежності РЕ ( $E_1^I, E_1^{II}$ ) та РШ ( $\Gamma_1^I, \Gamma_1^{II}$ ) найнижчого КСС електрона від розміру ( $\Delta$ ) приграничного шару симетричної ДБРТС у моделях I та II відповідно

#### 4. ВИСНОВКИ

Розвинена квантово-механічна теорія електронного тунелювання крізь відкриту симетричну

ДБРТС у моделі плавних просторово-залежних ефективною маси та потенціальною енергії електрона з їх лінійною залежністю від координати у приграничних шарах між ямами та бар'єрами наноструктури.

На прикладі симетричної ДБРТС ( $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$  /  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$  /  $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$ ) показано, що збільшення розмірів приграничних шарів змінює величини резонансних енергій та ширин квазістаціонарних станів електрона і не впливає на величину прозорості наносистеми відносно електронного потоку.

Встановлено, що у межах фізично коректних роз-

мірів приграничних шарів відносні різниці резонансних енергій та резонансних ширин електронних квазістаціонарних станів у моделі просторово-залежних ефективної маси і потенціальної енергії з їх лінійною залежністю від координати у приграничних шарах та спрощеної сходиноподібної моделі не перевищують 5% та 15% відповідно.

### Коэффициент прозрачности и квазистационарные состояния электрона в симметричной двухбарьерной наносистеме с пространственно-зависимыми потенциалом и эффективной массой

Ю.А. Сети, Н.В. Ткач

Черновицкий национальный университет им. Ю.Федьковича, ул. Коцюбинского, 2, 58012 Черновцы, Украина

В модели плавных пространственно-зависимых эффективной массы и потенциальной энергии электрона с их линейной зависимостью от координаты в приграничных областях между ямами и барьерами открытой симметричной двухбарьерной резонансно-туннельной наноструктуры найдены решения уравнения Шредингера. На их основе осуществлен расчет коэффициента прозрачности наносистемы с  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$  ямами и  $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$  барьерами, а также резонансных энергий и резонансных ширин подбарьерных квазистационарных состояний электрона. Исследовано влияние размеров приграничных областей на спектральные параметры квазистационарных состояний электрона и выполнен сравнительный анализ полученных зависимостей с результатами наиболее распространенной модели непрерывных ступенчатых функций эффективной массы и потенциальной энергии электрона.

**Ключевые слова:** Координато-зависимая эффективная масса, Координато-зависимый потенциальный профиль, Резонансно-туннельная наноструктура, Квазистационарное состояние, Коэффициент прозрачности.

### Transmitting Coefficient and Quasi-Stationary States of Electron in Symmetric Double-Barrier Nanostructure with Position-Dependent Potential and Effective Mass

Ju.O. Seti, M.V. Tkach

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, 2, Kotsyubinsky Str., 58012 Chernivtsi, Ukraine

The exact solutions of Schrodinger equation are obtained within the model of position-dependent electron effective mass and potential energy, which linearly depends on coordinate in near-interface region between the wells and barriers of open symmetrical double-barrier resonant tunneling structure. The transmitting coefficient of nanostructure with  $\text{In}_{0.53}\text{Ga}_{0.47}\text{As}$  wells and  $\text{In}_{0.52}\text{Al}_{0.48}\text{As}$  barriers, the resonance energies and resonance widths of electron quasi-stationary states are calculated using these solutions. The influence of the sizes of near-interface regions on the spectral parameters of electron quasi-stationary states is studied. The obtained dependences are compared with the results of the most spread model of electron effective mass and potential, which are the step-like functions of coordinate being abrupt at the interfaces of nanostructure.

**Keywords:** Position-dependent effective mass, Position-dependent potential energy, Resonant tunneling nanostructure, Quasi-stationary state, Transmitting coefficient.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. B. Roy, P. Roy, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 3961 (2002).
2. A Ganguly, M V Ioffe, L M Nieto, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 14659 (2006).
3. M. Vubangsi, M. Tchoffo, L.C. Fai, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 17 (2016).
4. H. Hassanabadi, W.S. Chung, S. Zare, M. Alimohammadi, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 135 (2017).
5. F.M.S. Lima, B.G. Enders, A.L.A. Fonseca, O.A.C. Nunes, V.N. Freire, J.A.K. Freire, G.A. Farias, E.F. da Silva Jr., *phys. status solidi c* **1**, No S2, S215 (2004).
6. P. Harrison, A. Valavanis, *Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures*, 4th ed. (Wiley: 2016).
7. M.V. Tkach, Ju.O. Seti, Y.B. Grynyshyn, O.M. Voitsekhivska, *Acta Phys. Pol. A* **128**, 343 (2015).
8. L. Gendron, M. Carras, A. Huynh, V. Ortiz, C. Koeniguer, V. Berger, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 2824 (2004).
9. B. Schwarz, P. Reininger, H. Detz, T. Zederbauer, A.M. Andrews, S. Kalchmair, W. Schrenk, O. Baumgartner, H. Kosina, G. Strasser, *Appl. Phys. Lett.* **107**, 071104 (2015).
10. M.A. Belkin, F. Capasso, *Phys. Scr.* **90**, 118002 (2015).
11. C. Jirauschek, T. Kubis, *Appl. Phys. Rev.* **1**, 011307 (2014).
12. A. Sinha, *Eur. Phys. Lett.* **96**, 20008 (2011).
13. M. Chabab, A. El Batoul, M. Oulne, *J. Math. Phys.* **56**, 062111 (2015).
14. V.M. Tkachuk, O. Voznyak, *Eur. Phys. J. Plus* **130**, 161 (2015).
15. M. Tkach, J. Seti, O. Voitsekhivska, *Superlattice. Microst.* **109**, 905 (2017).
16. J. Seti, M. Tkach, O. Voitsekhivska, *Eur. Phys. J. Plus.* **133**, 90 (2018).