Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

І. Г. Голубков, В. А. Клименко, Т. І. Жиленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

У двох частинах

Частина 1

Суми
Сумський державний університет
2018

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

для студентів інженерно-технічних спеціальностей

У двох частинах

Частина 1

Затверджено
на засіданні кафедри
математичного аналізу та методів оптимізації
як конспект лекцій
із дисципліни «Вища математика».
Протокол № 1 від 29.08.2018.

Суми
Сумський державний університет
2018

Вища математика : конспект лекцій : у 2 ч. / укладачі : І. Г. Голубков, В. А. Клименко, Т. І. Жиленко. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – Ч. 1. – 143 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Лекція 1. Визначники, їх властивості та обчислення

План

1.1. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення.
1.2. Основні властивості визначників.
1.3. Методи обчислення визначників.

1.1. Визначник, мінор, алгебраїчне доповнення

Розглянемо систему рівнянь, яка має n-рядків і n-невідомих:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Така система має числову характеристику, що називається визначником (або детермінантом – det): $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$. Цей визначник має порядок n.

Мінором визначника Δ порядку n називається визначник $(n-1)$ порядку, який одержуємо в результаті викреслювання з визначника Δ i - того рядка і k - того стовпця. Позначають M_{ik}.

Приклад. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ik} називається величина $(-1)^{i+k} M_{ik}$: $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$.

Приклад. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Значення визначника Δ дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь стовпця (або рядка) на їх алгебраїчні доповнення:

$\Delta_n = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + ... + a_{n2} \cdot A_{n2}$ (розкладання за елементами другого стовпця).

Обчислимо визначник другого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

1.2. Основні властивості визначників

1. Значення визначника не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.
2. Якщо поміняти місцями два відповідних рядки визначника, то результат змінить знак на протилежний.
3. Визначник із двома однаковими паралельними рядками дорівнює нулю.
4. Якщо елементи деякого рядка (або стовпця) мають спільний множник, то його можна виносити за знак визначника.

5. Якщо всі елементи деякого рядка дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.
6. Визначник, в якого елементи двох паралельних рядків пропорційні, дорівнює нулю.
7. Визначник не зміниться, якщо до елементів якого-небудь стовпця (рядка) додати відповідні елементи іншого стовпця (рядка), помножені на одне й те саме число: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} + ma_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ma_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ma_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Якщо кожний елемент якого-небудь стовпця є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників, в яких стовпцями є відповідні доданки, а решта збігається із стовпцями заданого визначника:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

1.3. Методи обчислення визначників

1. **Визначники 3-го порядку обчислюються за правилом Саррюса (правило трикутників):**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}\right).$$

2. **Обчислення визначників (третього та вищих порядків) розкладанням за елементами *i*-рядка або *j*-стовпця.**

Теорема. Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення, тобто $\Delta = \sum a_{ik} A_{ik}$, або $\Delta = \sum a_{ki} A_{ki}$.

Розкладання визначника *4-го* порядку за елементами *2-го* рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} + a_{24}A_{24} = a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{23}(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24}(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + +a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

3. **Обчислення визначників методом ефективного зниження порядку**

Використовуючи основні властивості визначників, обчислення визначника $\Delta_n \neq 0$ завжди можна звести до обчислення визначника (n – 1)-го порядку, зробивши в якому-небудь рядку (стовпці) всі елементи такими, що дорівнюють нулю, крім одного.

Приклад. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$ зробимо нулі в третьому стовпці: для цього елементи першого і четвертого рядків залишаємо без зміни; елементи першого рядка множимо на 3 та додаємо до відповідних елементів другого рядка і записуємо в другому рядку; відповідні елементи першого й третього рядків додаємо і записуємо в третьому рядку =

$= \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 14 & 0 & 7 \\ 4 & 9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ зробимо нулі в третьому рядку: для цього елементи першого стовпця залишаємо без зміни; елементи першого стовпця множимо на 2 та додаємо до відповідних елементів другого стовпця і записуємо в другому стовпці; елементи першого стовпця множимо на – 3 та додаємо до відповідних елементів третього стовпця і записуємо в третьому стовпці =

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 4 & 9 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & -8 \\ 4 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -(-24 + 8) = 16 .$$

4. **Метод зведення визначника до трикутного вигляду**

Використовуючи основні властивості визначників, обчислення визначника $\Delta_n \neq 0$ зводимо до трикутного вигляду, тоді значення визначника дорівнює добутку його діагональних елементів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} .$$

Поміняємо місцями перший та другий стовпці:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} .$$

Додамо перший рядок до другого:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} .$$

Поміняємо другий і четвертий стовпчики місцями: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}$.

Поміняємо другий і третій рядки місцями: $= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 6 \end{vmatrix}$.

Домножимо другий рядок на (– 3) і додамо до третього, а потім – до четвертого рядка:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 15 \end{vmatrix}.$$

Домножимо третій рядок на (7) і додамо до четвертого рядка: $\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 64 \end{vmatrix}$.

Після зведення визначника до трикутного вигляду знаходимо його числове значення: $\Delta = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 64 = -64$.

Контрольні запитання

1. Що називається визначником, мінором визначника, алгебраїчним доповненням?
2. Назвіть основні властивості визначників.
3. Сформулюйте методи обчислення визначників і поясніть їх суть.

Лекція 2. Матриці. Дії з матрицями. Обернена матриця. Ранг матриці. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь

План

2.1. Матриці.
2.2. Дії над матрицями.
2.3. Обернена матриця.
2.4. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь.
2.5. Ранг матриці.
2.6. Однорідні системи.

2.1. Матриці

У техніці дуже часто трапляються випадки, коли необхідно розв'язати систему рівнянь, що містить 1 000 і більше невідомих. Зараз це здійснюється за допомогою комп'ютерної техніки, в основу якої покладено стандартні методи розв'язування цих систем рівнянь.

У загальному вигляді систему рівнянь записують так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

де n – невідомих; m – рівнянь; x_1, x_2, $x_{3,\ ...}$ – невідомі, a_{11}, a_{12}, a_{13}, … – коефіцієнти при невідомих; b_1, b_2, b_3, … – вільні члени.

Запишемо таблицю, складену з коефіцієнтів при невідомих

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Означення. Прямокутна таблиця, складена з елементів $a_{ij} = (i = \overline{1,\ ...,\ m};\ \mathrm{j} = \overline{1,\ ...,\ n})$ деякої множини називається матрицею.

Елементи матриці нумеруються двома індексами: перший i означає номер рядка, другий j означає номер стовпця. Матриця має розмір $m \times n$ (m – рядків; n – стовпців).

Матриця називається числовою, якщо її елементи a_{ij} – числа; функціональною, якщо її елементи a_{ij} – функції; векторною, якщо її елементи a_{ij} – вектори і т. д.

Дві матриці A і B називаються рівними, якщо $a_{ij} = b_{ij}$ (відповідні елементи рівні). Рівними можуть бути лише матриці однакової розмірності.

Матриця, в якої $n = m$ називається квадратною: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Якщо m = 1, то матриця називається матрицею-рядком: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \end{pmatrix}$.

Якщо n = 1, то матриця називається матрицею-стовпцем: $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Квадратні матриці, в яких відмінні від нуля лише елементи головної діагоналі, називаються діагональними: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

Якщо всі елементи головної діагоналі діагональної матриці рівні між собою, то така матриця називається скалярною: $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Якщо елементи діагональної матриці дорівнюють одиниці, то така матриця називається одиничною: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Матриця називається трикутною, якщо всі елементи, розміщені вище (або нижче) від головної діагоналі, дорівнюють нулю: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

2.2. Дії над матрицями

1. Додавання матриць

Означення. Сумою двох матриць *A* і *B* називається матриця *C,* елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць *A* і *B*: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сума матриць визначена лише для матриць однакової розмірності.

2. Віднімання матриць

Означення. Різницею двох матриць *A* і *B* називається матриця *C,* елементи якої дорівнюють різниці відповідних елементів матриць *A* і *B*: $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Різниця матриць визначена лише для матриць однакової розмірності.

3. **Множення матриці на число**

Означення. Добутком матриці *A* на число λ називається матриця *C,* елементи якої дорівнюють добутку відповідних елементів матриці *A* на число λ: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \ldots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \ldots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \ldots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Приклад. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix},$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}, \quad C = -2A = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}.$$

4. **Множення матриць**

Матриця А називається узгодженою з матрицею В, якщо кількість стовпців матриці А дорівнює кількості рядків матриці В.

Добутком матриць $A_{m\times n}$ і $B_{n\times k}$ називається матриця $C_{m\times k}$, в якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів *i*-того рядка матриці *A* на відповідні елементи j -того стовпця матриці *B*.

$$C = C_{m\times k} = (c_{ij}), \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1,\ 2, \ldots, m, \quad j = 1,\ 2, \ldots, k,$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mk} \end{pmatrix},$$

c_{12} означає, що елементи першого рядка матриці *A* перемножуються на відповідні елементи другого стовпця матриці *B*.

Приклад. $A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$

$$C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & -10 \end{pmatrix},$$

$c_{11} = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 2 + 0\cdot 3 = -3$,

$c_{12} = 1\cdot 0 + (-2)\cdot(-4) + 0\cdot 2 = 8$,

$c_{21} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 = 4$,

$c_{22} = 3\cdot 0 + 2\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 = -10$.

2.3. Обернена матриця

Квадратна матриця А називається невиродженою, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\Delta \neq 0 \quad (\det A \neq 0)$. Якщо $\Delta = 0 \quad (\det A = 0)$, то матриця називається виродженою.

Лише для невироджених матриць уводиться поняття оберненої матриці.

Означення. Нехай *A* – квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці *A*, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці *A*.

Приклад. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці *A*, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 28 + 0 - (18 + 0 - 14) = 21,$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 14 = -11,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 9 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -(0-14) = 14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -(-7-0) = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2-4) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 14 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 14 & -6 \\ 4 & -7 & 6 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 11+28-18 & 0+42-42 & -22+28-6 \\ -4-14+18 & 0-21-49 & 8-14+6 \\ -5+14-9 & 0+21-21 & 10+14-3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

2.4. Методи розв'язування системи лінійних рівнянь

1. **Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера**

   Система трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Уведемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і його визначають за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел Δ_x, Δ_y, Δ_z не дорівнює нулю, то система не має розв'язку. При $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Аналогічні формули Крамера справедливі для *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими.

2. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса

Метод Гауса – це метод послідовного виключення невідомих. За допомогою елементарних перетворень, систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

зводять до системи вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + ... + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + ... + c_{3n}x_n = d_3, \\ ...., \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases}$$

Таку систему рівнянь називають трикутною (східчастою, трапецієподібною).

Якщо кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь, то система має єдиний розв'язок. Якщо система має рівняння вигляду $0 = d_n$, то вона очевидно несумісна.

3. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3, \\ ...., \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Уведемо матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням із невідомою матрицею *X*: $A\cdot X=B$.

Якщо матриця *A* має обернену матрицю A^{-1}, то

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Ця формула називається матричним записом розв’язку системи (1). Отже, щоб розв’язати систему рівнянь (1), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи *A*, і помножити її на матрицю з вільних членів справа.

Приклад. Розв’язати матричним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=5, \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1, \\ 3x_1-2x_2+x_3=2. \end{cases}$$

Уводимо матриці: $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Обчислюємо визначник матриці *A*: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=56\neq 0$.

Визначаємо матрицю A^{-1}, обернену до матриці *A*: $A^{-1}=\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}$.

Знаходимо розв’язки за формулою $X=A^{-1}\cdot B$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 13 \\ 7 & 13 & -11 \\ -7 & 11 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 35-5+26 \\ 35-13-22 \\ -35-11-10 \end{pmatrix}=\frac{1}{56}\begin{pmatrix} 56 \\ 0 \\ -56 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(1;0;\ -1)$.

2.5. Ранг матриці

Нехай маємо матрицю розміром $m\times n$, елементами якої є числа. Вилучаючи з цієї матриці певну кількість рядків і стовпців, можна скласти визначники, які можуть як дорівнювати нулю, так і не дорівнювати нулю. Найбільший порядок таких визначників – це мінімальне з чисел *m* і *n*.

Означення. Рангом матриці $A(r(A),\ rang(A))$ називається найбільший порядок відмінного від нуля визначника складеним зазначеним способом із матриці *A*.

Приклад. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Із цієї матриці можна скласти три визначники другого порядку і шість визначників першого порядку:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}=0,\quad |1|=1,\ |2|=2,\ |3|=3,\ |3|=3,\ |6|=6,\ |9|=9.$$

Усі визначники другого порядку дорівнюють нулю, а жоден з визначників першого порядку не дорівнює нулю. Тому $rang(A)=1$.

Ранг матриці не зміниться, якщо:

1) переставити місцями два рядки (стовпці);
2) помножити кожний елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
3) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Одним із методів знаходження рангу матриці є метод одиниць та нулів:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3&-1\\2&-1&0&-4&-5\\-1&-1&0&-3&-2\\6&3&4&8&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3&-1\\2&-1&0&-4&-5\\-1&-1&0&-3&-2\\6&3&2&8&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&3&-1\\2&-1&0&-4&-5\\-1&-1&0&-3&-2\\4&1&0&2&-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\2&-1&0&-4&-5\\-1&-1&0&-3&-2\\4&1&0&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\6&0&0&-2&-6\\3&0&0&-1&-3\\4&1&0&2&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\6&0&0&-2&-6\\3&0&0&-1&-3\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\3&0&0&-1&-3\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\quad r(A)=3.$$

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=b_3,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

Розглянемо основну матрицю A і розширену матрицю $\overline{A}$ даної системи:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad\overline{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера – Капеллі: для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці. Якщо $r(A)=r(\overline{A})=n$, то система має єдиний розв’язок. Якщо $r(A)=r(\overline{A})<n$, то система має безліч розв’язків.

Приклад. Знайти ранг основної та розширеної матриці для системи

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3,\\2x_1+4x_2-3x_3=2,\\3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&5&-1&3\\2&4&-3&2\\3&-1&-3&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-6&-1&-4\\3&-16&0&-16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-6&-1&-4\\0&-16&0&-16\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-6&-1&-4\\0&1&0&1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-6&-1&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-6&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$r(A)=r(\overline{A})=n=3$ $\Rightarrow$ система має єдиний розв'язок.

2.6. Однорідні системи лінійних рівнянь

Системи лінійних рівнянь називаються однорідними, якщо праві частини рівнянь дорівнюють нулю.

Однорідна система m лінійних рівнянь із n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+...+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+...+a_{2n}x_n=0,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+...+a_{3n}x_n=0,\\ ....,\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+...+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок: $x_1=x_2=...=x_n=0$.

Ненульовий розв'язок цієї системи (якщо він є) можна визначитии методом Гауса.

Якщо $m=n$, і визначник Δ системи дорівнює нулю (Δ = 0), то однорідна система має безліч ненульових розв'язків.

Нехай дано систему двох однорідних лінійних рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0, \end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Розв'язок такої системи можна знайти за формулами:

$$x=t\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix},$$

$$y=-t\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix},$$

$z=t\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$, де t – довільне число.

Нехай дано систему трьох однорідних лінійних рівнянь із трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0,\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0,\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0. \end{cases}$$

Якщо $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0$, то система має безліч розв'язків. Нехай у визначнику Δ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку, наприклад $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq 0$, тоді розв'язки можна знайти за формулами $x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, $y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, де t – довільне число.

Приклад. Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ 3x - 2y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1` & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 9 - (3 - 6 - 4) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5,$$

$$x = t\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t \cdot (-3 - 1) = -4t,$$

$$y = -t\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -t \cdot (2 - 1) = -t,$$

$$z = t\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = t \cdot (2 + 3) = 5t,$$

Відповідь: $(-4t; -t; 5t)$.

Контрольні запитання

1. Що називається матрицею? Назвіть їх види.
2. Які дії можна виконувати над матрицями? Покажіть на прикладах.
3. Як знайти обернену матрицю?
4. Сформулюйте методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь? Поясніть їх суть.
5. Що називається рангом матриці? Як його знайти?
6. Яка система рівнянь називається однорідною? Як знайти її розв'язки?

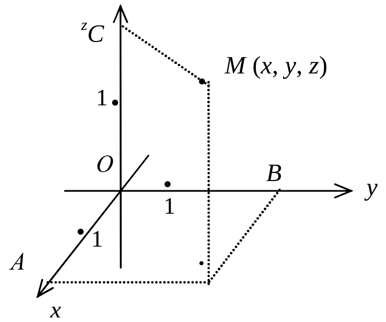
Лекція 3. Векторна алгебра

План

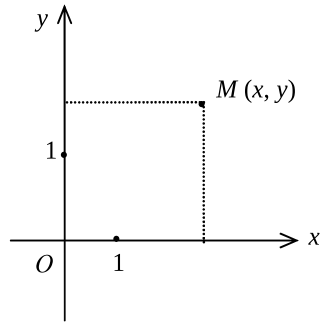
3.1. Системи координат.
3.2. Лінійні операції над векторами.
3.3. Скалярний добуток векторів.
3.4. Векторний добуток векторів.
3.5. Мішаний добуток векторів.
3.6. Базис.
3.7. Ділення відрізка у даному відношенні.

3.1. Системи координат

Три взаємно перпендикулярні осі – Ox, Oy, Oz, що мають спільний початок точку O і однакову масштабну одиницю, утворюють **прямокутну декартову систему координат у просторі.**



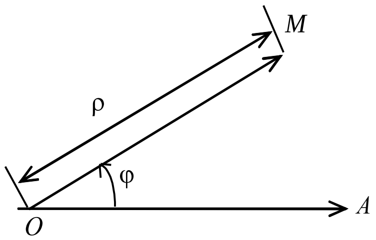
Якщо таких осей дві: Ox і Oy, то маємо систему координат на площині.



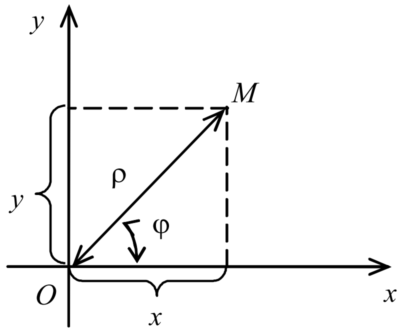
Осі Ox, Oy, Oz називаються відповідно **осями абсцис, ординат і аплікат,** точка O — **початок системи координат**. Нехай M — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими координатами x, y, z точки M називатимемо відповідно довжини OA, OB, OC напрямлених відрізків $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел (x, y, z), а на площині — впорядкована пара чисел (x, y), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел.

Полярна система координат складається з деякої точки площини O, яка називається **полюсом**, променя OA, що виходить із цієї точки і називається **полярною віссю.** Крім того, задається одиниця масштабу для вимірювання довжин відрізків.



Означення. Полярними координатами точки М називаються числа ρ — відстань від полюса O до точки M і φ — кут, на який потрібно повернути полярну вісь OA до її збігу з OM проти годинникової стрілки.



Полярний радіус ρ може змінюватись у межах $0 \le \rho < \infty$, полярний кут зазвичай змінюється в межах $0 \le \varphi < 2\pi$.

Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки встановлюють формули:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Приклад. Знайти полярні координати точки M (2, 2).

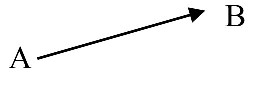
Із формули (1) маємо $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, tgφ = 1. Згідно з останньою рівністю $\varphi = \frac{\pi}{4}$ або $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, але $y = 2 > 0$ і $x = 2 > 0$, маємо $\varphi = \frac{\pi}{4}$. У полярних координатах точка $M\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

3.2. Лінійні операції над векторами

3.2.1. Основні поняття

Скалярні величини характеризуються числовим значенням: маса, час і т. д.
Векторні величини характеризуються числовим значенням і напрямом: швидкість, сила і т. д.

Вектор – це напрямлений відрізок: $\overline{AB}$, точка А – початок вектора, точка В – кінець вектора.



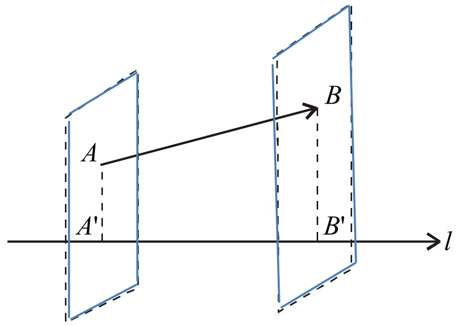
Нульовий вектор – це вектор, в якого початок і кінець збігаються: $\overline{AA} = \overline{0}$.

Довжина вектора (модуль, абсолютна величина) – це довжина відрізка, що зображає даний вектор: $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{a}\right|$.

Вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Два вектори називаються **рівними**, якщо вони колінеарні, однаково напрямлені та рівні за довжиною.

Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь l називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\overrightarrow{A'B'}$ на осі l.

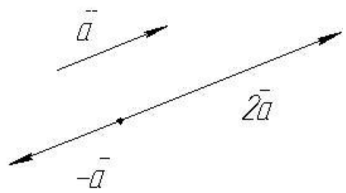


Позначається проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l — $np_l\overrightarrow{AB}$. З рисунка випливає формула знаходження проекції вектора на вісь:

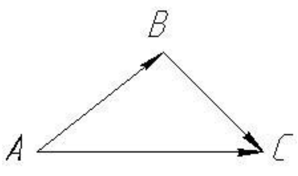
$$np_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi \text{, де } \varphi \text{ — кут між вектором і віссю.}$$

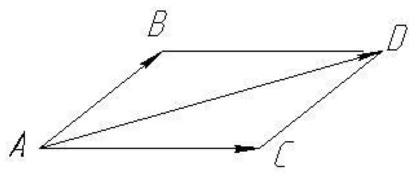
3.2.2. Дії над векторами в геометричній формі

1. Добутком вектора $\overline{a}$ на число λ називається вектор, модуль якого дорівнює $|\lambda|\cdot|\overline{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напряму $\overline{a}$, якщо $\lambda < 0$.

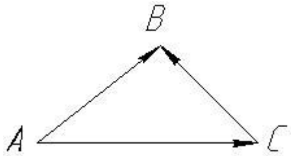


2. Додавання векторів:
   - правило трикутника: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$;
   - правило паралелограма: $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AD}$.



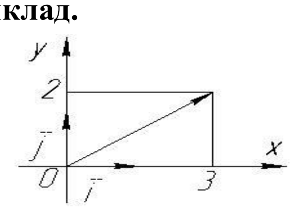


3. Віднімання векторів: $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$



Означення. Координатами вектора називаються його проекції на осі координат.

Приклад.



$\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$, де i, j – одиничні вектори, орти.

Якщо $A(x_1;\ y_1; z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координати вектора $\overline{AB}$ визначають за формулою $\overline{AB} = \overline{(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)}$ (якщо $\overline{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$, то $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$).

Рівні вектори мають рівні координати.

Довжина вектора: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, (якщо $\overline{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$, то $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$).

Якщо вектори $\overline{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\overline{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$ колінеарні, то їх координати пропорційні: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

3. Дії над векторами, заданими своїми координатами

Якщо $\overline{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\overline{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$, то:

1) $\lambda \cdot \overline{a} = \overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$ – множення вектора на число;

2) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2;\ a_3 + b_3)}$ – додавання векторів;

3) $\overline{a} - \overline{b} = \overline{(a_1 - b_1;\ a_2 - b_2;\ a_3 - b_3)}$ – віднімання векторів.

Властивості операцій із векторами:

1) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$;

2) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$;

3) $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot \lambda = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$;

4) $(\lambda + \beta) \cdot \overline{a} = \lambda\overline{a} + \beta\overline{a}$;

5) $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$;

6) $1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$;

7) $0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$.

3.3. Скалярний добуток векторів

Означення. Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними: $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.

Якщо вектори задані координатами $\overline{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\overline{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$, то скалярний добуток дорівнює сумі добутків відповідних координат: $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Кут між векторами визначають за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Геометричні властивості скалярного добутку:

1) $\overline{a} \perp \overline{b} \iff \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$ (умова перпендикулярності векторів);

2) $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2} \iff \overline{a} \cdot \overline{b} > 0$;

3) $\frac{\pi}{2} < \varphi \le \pi \iff \bar{a} \cdot \bar{b} < 0$;

4) $np_{\bar{b}} \bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;

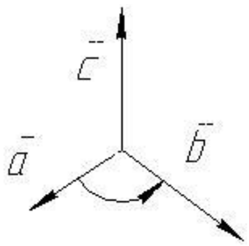
3) $(\alpha \cdot \bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$;

4) $\bar{a} \cdot \bar{a} = \overline{a^2} = |\bar{a}|^2$.

3.4. Векторний добуток векторів

Означення. Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається вектор $\bar{c}$ (позначається $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$), який задовольняє такі умови:

1) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$, де $\varphi = (\bar{a}; \bar{b})$;
2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{c} \perp \bar{a}$; $\bar{c} \perp \bar{b}$;
3) трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – права: напрям вектора $\bar{c}$ такий, що при спостереженні з його кінця найменший кут від $\bar{a}$ до $\bar{b}$ утворюється проти годинникової стрілки:



Властивості векторного добутку:

1) $\bar{a} \parallel \bar{b} \iff \bar{a} \times \bar{b} = 0$ (умова колінеарності векторів);

2) $\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$;

3) $\overline{\alpha a} \times \bar{b} = \alpha \bar{a} \times \bar{b}$;

4) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{c}$;

Якщо вектори задано їх координатами $\bar{a} = \overline{(a_1; a_2; a_3)}$ і $\bar{b} = \overline{(b_1; b_2; b_3)}$, то

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

Геометричний зміст векторного добутку векторів: модуль векторного добутку дорівнює площині паралелограма, побудованого на сторонах як на векторах.

3.5. Мішаний добуток векторів

Означення. Мішаним добутком векторів $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ упорядкованої трійки векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається число, що дорівнює векторному добутку $\bar{a}\times\bar{b}$, помноженому скалярно на вектор $\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}.$$

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ задано своїми координатами $\bar{a}=\overline{(a_1;a_2;a_3)}$, $\bar{b}=\overline{(b_1;b_2;b_3)}$, $\bar{c}=\overline{(c_1;\,c_2;\,c_3)}$, то їх мішаний добуток визначають за формулою

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Властивості мішаного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$;

2) $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{b}\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)$.

Геометричний зміст мішаного добутку векторів: модуль мішаного добутку векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

$$V_{пар}=\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|,$$

а об'єм відповідної піраміди $V_{пір}=\dfrac{1}{6}\left|\bar{a}\bar{b}\bar{c}\right|$.

3.6. Базис

Означення. Лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ з дійсними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ називається довільний вектор $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}$.

Якщо вектор поданий у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то говорять, що він розкладений за цими векторами.

Означення. Вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, що $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ і $\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_k^2=0$.

Якщо рівність $\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_k\overrightarrow{a_k}=\vec{0}$ справджується лише при $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_k=0$, то вектори $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_k}$ називаються лінійно незалежними.

Два колінеарні вектори – лінійно залежні, а два неколінеарні вектори – лінійно не залежні.

Три компланарні вектори – лінійно залежні, а три некомпланарні вектори – лінійно незалежні. Чотири вектори у тривимірному просторі завжди лінійно залежні.

Означення. Базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ векторів на площині називається впорядкована пара лінійно незалежних (неколінеарних) векторів $\overrightarrow{e_1}$ і $\overrightarrow{e_2}$.

Будь-який вектор $\vec{d}$ можна подати у вигляді суми: $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$. Числа α і β називають координатами вектора $\vec{d}$ у базисі $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ і записують $\vec{d} = (\alpha;\, \beta)$, сума $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2}$ – розкладання вектора за цим базисом.

Означення. Базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ в просторі називається впорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів.

Будь-який вектор $\vec{d}$ простору можна розкласти за базисом $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$: $\vec{d} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3}$, α, β, γ називають координатами вектора $\vec{d}$ у цьому базисі і записують $\vec{d} = (\alpha;\, \beta;\, \gamma)$.

Необхідна і достатня умова компланарності, або лінійної залежності векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$, виражається рівністю $\bar{a}\bar{b}\,\bar{c} = 0$.

Якщо $\bar{a}\bar{b}\,\bar{c} > 0$, то впорядкована трійка векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ права (рис. 1), а якщо $\bar{a}\bar{b}\,\bar{c} < 0$, то ліва (рис. 2).

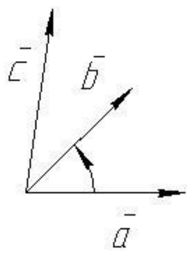


Рисунок 1

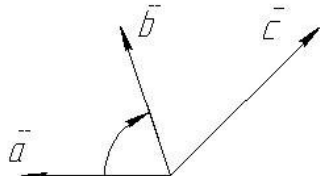


Рисунок 2

Приклад. Дано: $\bar{a} = \overline{(1;0;2)}$, $\bar{b} = \overline{(3;-1;1)}$, $\bar{c} = \overline{(2;\,1;\,0)}$. Перевірити, чи утворюють ці вектори базис. Якщо так, то знайти координати вектора $\vec{d}(2;\,1;\,3)$ в цьому базисі.

1. Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$\bar{a}\bar{b}\,\bar{c} = \left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$ отже, ці вектори некомпланарні, тобто утворюють базис.

2. Виразимо вектор $\vec{d}$ через вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$,

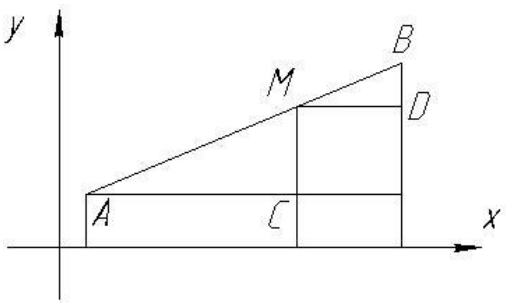
$$\overline{(2;\,1;\,3)} = \alpha\overline{(1;\,0;\,2)} + \beta\overline{(3;-1;\,1)} + \gamma\overline{(2;\,1;\,0)}.$$

Складаємо систему рівнянь $\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 2, \\ 0\alpha - \beta + \gamma = 1, \\ 2\alpha + \beta + 0\gamma = 3. \end{cases}$ $\quad \alpha = \dfrac{3}{5}, \quad \beta = -\dfrac{1}{3}, \quad \gamma = \dfrac{1}{3}.$

Отже, $\vec{d} = \dfrac{3}{5}\vec{a} - \dfrac{1}{3}\vec{b} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$, $\quad \vec{d} = \left(\dfrac{3}{5};\, -\dfrac{1}{3};\, \dfrac{1}{3}\right)$.

3.7. Поділ відрізка у даному відношенні

Задані точки $A(x_1;\, y_1)$ і $B(x_2;\, y_2)$. Знайти координати точки $M(x; y)$, що лежить на прямій АВ і ділить відрізок АВ у відношенні $\dfrac{AM}{MB} = \alpha$.



$\Delta ACM \sim \Delta MDB$: $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{MD} = \dfrac{CM}{DB} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AC}{MD} = \alpha, \\ \dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CM}{DB} = \alpha. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x - x_A}{x_B - x} = \alpha, \\ \dfrac{y - y_A}{y_B - y} = \alpha. \end{cases}$$

Із першої рівності системи маємо:

$x - x_A = \alpha\left(x_B - x\right)$,

$x - \alpha x = \alpha x_B + x_A$,

$x\left(1+\alpha\right) = x_A + \alpha\, x_B$,

$x = \dfrac{x_A + \alpha\, x_B}{1+\alpha}$.

Аналогічно до другого рівняння системи знаходимо $y = \dfrac{y_A + \alpha\, y_B}{1+\alpha}$.

Отже, $M\left(\dfrac{x_A + \alpha\, x_B}{1+\alpha};\ \dfrac{y_A + \alpha\, y_B}{1+\alpha}\right)$.

Якщо $\alpha = 1$, то $x = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $\quad y = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

Контрольні запитання

1. Що називається вектором?
2. Які вектори називаються колінеарними?
3. Які дії виконуються над векторами в геометричній формі? Пояснити на прикладах.
4. Які дії виконуються над векторами в координатній формі? Пояснити на прикладах.
5. Що називається скалярним добутком векторів?
6. Сформулювати властивості скалярного добутку векторів.
7. Що називається векторним добутком векторів?
8. Сформулювати властивості векторного добутку векторів.
9. Що називається мішаним добутком векторів?
10. Що називається базисом?
11. Які вектори називаються компланарними?
12. Як обчислити координати точки, яка ділить даний відрізок у заданому відношенні?

Лекція 4. Пряма на площині

План

4.1. Вступ.
4.2. Пряма на площині. Відповідні рівняння.
4.3. Взаємне розміщення прямих на площині.
4.4. Нормальне рівняння прямої.

4.1. Вступ

Поняття лінії є одним із найскладніших понять математики.

Рівнянням лінії в декартових координатах на площині називається рівняння вигляду $F(x;y)=0$, яке задовольняють координати $(x;y)$ будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати будь-якої точки, що не належить цій лінії.

4.2 Пряма на площині. Відповідні рівняння.

1. Загальне рівняння прямої

У прямокутній системі координат пряма лінія задається рівнянням першого степеня відносно x і y:

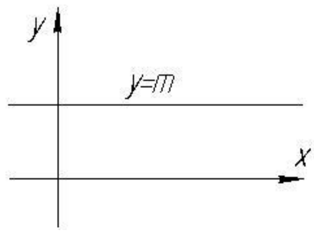
$$Ax + By + C = 0,$$

і, навпаки, рівняння при довільних A, B, C (A і B одночасно не дорівнюють нулю) визначає деяку пряму в прямокутній системі координат Oxy.

Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої лінії.**

Дослідимо його.

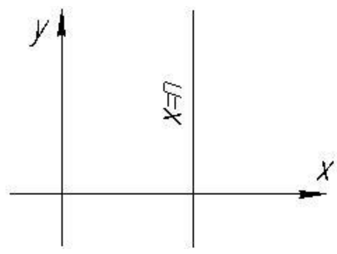
Якщо А = 0, $By + C = 0$,



$y = -\frac{C}{B} = m$ – рівняння прямої, паралельної осі Ох;

$y = 0$ – рівняння осі абсцис (Ох).

Якщо В = 0, то $Ax + C = 0$, а



$x = -\frac{C}{A} = n$ – рівняння прямої, паралельної осі Оу;

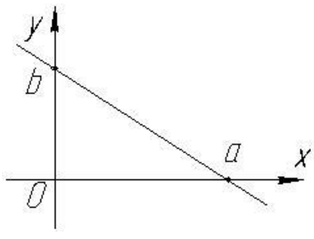
Якщо $x = 0$ – рівняння осі ординат (Оу) .

2. Рівняння прямої у відрізках на осях

$Ax + By + C = 0$,

$Ax + By = -C$,

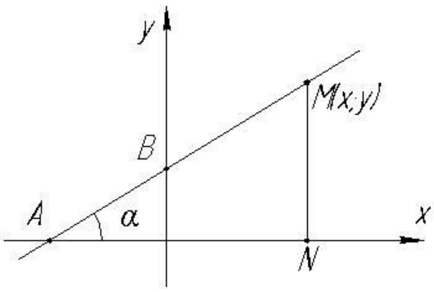
$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1$,



$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 .$$

Позначимо: $-\frac{C}{A} = a, \quad -\frac{C}{B} = b$, тоді $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

3. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом



$Ax + By + C = 0$,

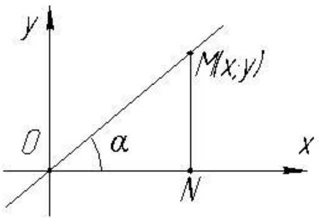
$By = -Ax - C$,

$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Позначимо: $-\frac{A}{B} = k, \quad -\frac{C}{B} = b$,

$y = kx + b$.

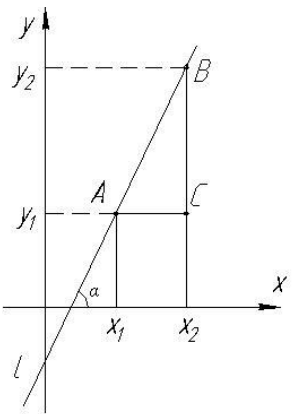
$OB = b$ – початкова координата, $\quad k = tg\alpha = \frac{MN}{AN}$ – кутовий коефіцієнт прямої.



Якщо пряма проходить через початок координат, то

$k = tg\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x}$.

4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки



Зафіксуємо на прямій дві точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ (координати відомі).

ΔABC: $\quad tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$.

Отже, $\quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (1) – кутовий коефіцієнт прямої.

Зафіксуємо тепер точку $A(x_1;\ y_1)$, а точка $B(x;\ y)$ має поточні координати.

ΔABC: $\quad tg\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = k$.

Отже, $k=\dfrac{y-y_1}{x+-x_1} \Rightarrow y-y_1=k\left(x-x_1\right)$ (2) – рівняння прямої, що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт.

У рівняння (2) підставимо значення k із рівності (1):

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right),$$

$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки.

4.3. Взаємне розміщення прямих на площині

Нехай прямі l_1 і l_2 задані відповідними рівняннями з кутовим коефіцієнтом:

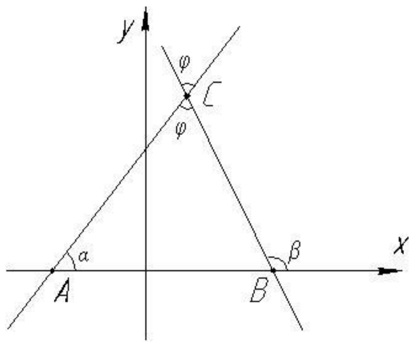
$l_1 \sim \quad y=k_1x+b_1$,

$l_2 \sim \quad y=k_2x+b_2$;

1) якщо $k_1 \neq k_2$, то прямі перетинаються в одній точці;

2) якщо $k_1=k_2$, то прямі мають однаковий кут нахилу до осі Ох, а, отже, паралельні.

Доведення: φ про – кут між прямими l_1 і l_2**,** $tg\beta=k_1$**,** $tg\alpha=k_2$**.**



ΔABC: β – зовнішній кут, тоді $\beta=\alpha+\varphi$, $\varphi=\beta-\alpha$,

$$tg\varphi=tg\left(\beta-\alpha\right)=\frac{tg\beta-tg\alpha}{1+tg\beta\cdot tg\alpha}=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}.$$

Отже, $tg\varphi=\dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$ – тангенс кута між двома прямими.

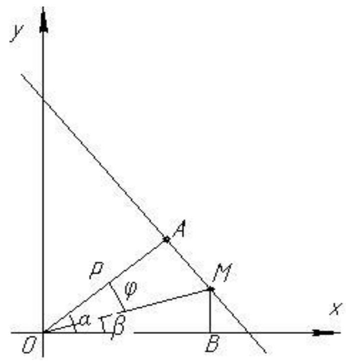
Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні**,** то $\varphi=0$**,** $tg0^\circ=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=0 \Rightarrow k_1=k_2$.

Якщо прямі l_1 і l_2 перпендикулярні**,** то $\varphi=90^\circ \Rightarrow tg\alpha$ – не існує, тоді

$ctg\varphi=\dfrac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}=0 \Rightarrow 1+k_1k_2=0 \; k_1k_2=-1 \; k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

4.4. Нормальне рівняння прямої



Нехай l – це пряма, $OA=p$ – перпендикуляр (відстань), проведений від початку координат до прямої, α – кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ох, $M\left(x;\, y\right)$ – довільна точка прямої.

Позначимо $OM=\rho$, $\angle AOB=\alpha$, $\angle MOB=\beta$, $\angle AOM=\varphi$, $\varphi=\alpha-\beta$.

З ΔAOM: $AO=OM\cdot\cos\varphi$,

$$p=\rho\cdot\cos\varphi=\rho\cdot\cos\left(\alpha-\beta\right)=\rho\cos\alpha\cos\beta+\rho\sin\alpha\sin\beta.$$

ΔBOM: $OB=OM\cos\beta$, $\qquad x=\rho\cdot\cos\beta$,

$$MB = OM\sin\beta, \qquad y = \rho\cdot\sin\beta.$$

Тоді $p = \rho\cos\alpha + \rho\sin\alpha$,

$\rho\cos\alpha + \rho\sin\alpha - p = 0$ – нормальне рівняння прямої.

Знайдемо зв'язок між загальним рівнянням прямої та нормальним рівнянням прямої:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\mu x + B\mu y + \mu C = 0, \\ x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\mu = \cos\alpha, \\ B\mu = \sin\alpha, \\ \mu C = -p. \end{cases}$$

Піднесемо до квадрата перші два рівняння і додамо почленно:

$$A^2\mu^2 = \cos^2\alpha,$$

$$B^2\mu^2 = \sin^2\alpha,$$

$$\left(A^2 + B^2\right)\mu^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha,$$

$$\left(A^2 + B^2\right)\mu^2 = 1,$$

$$\mu^2 = \frac{1}{A^2 + B^2},$$

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$ – нормуючий множник

Підставимо μ у рівність $A\mu x + B\mu y + \mu C = 0$, одержимо

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$ – нормальне рівняння прямої.

Із рівності $\mu C = -p$ можна зробити такі висновки:

1) μ і C мають різні знаки (бо $p > 0$, p – відстань);

2) у нормальному рівнянні прямої знак μ (знак перед квадратним коренем) беремо протилежний до С.

Щоб знайти відстань від точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$, необхідно:

- записати нормальне рівняння прямої;
- в це рівняння підставити координати точки, відстань від якої ми знаходимо;
- взяти одержану відповідь за модулем.

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Контрольні запитання

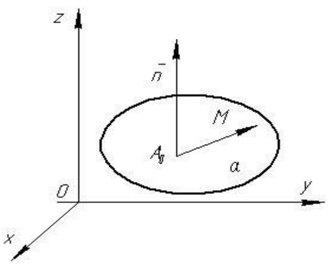
1. Виведіть відповідні рівняння прямої на площині.
2. Які умови паралельності та перпендикулярності прямих?
3. Виведіть нормальне рівняння прямої.
4. Як знайти відстань від даної точки до даної прямої?

Лекція 5. Площина і пряма в просторі

План

5.1. Рівняння площини в просторі

5.1.1. Загальне рівняння площини



Нехай задана площина α, $\vec{n}(A;B;C)$ – вектор, перпендикулярний (нормальний) до площини α, $M(x;y;z)$ – довільна точка площини, $A_0(x_0;y_0;z_0)$ – фіксована точка площини.

$\overrightarrow{A_0M} = \overrightarrow{(x-x_0;y-y_0;\ z-z_0)}$.

Оскільки $\vec{n} \perp \alpha$, то $\vec{n} \perp \overrightarrow{A_0M} \ \Rightarrow \ \vec{n} \cdot \overrightarrow{A_0M} = 0$,

$\overrightarrow{(A;B;C;)} \cdot \overrightarrow{(x-x_0;y-y_0;\ z-z_0)} = 0$

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – **рівняння площини, що має нормальний вектор.**

$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$,

$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$. Позначимо $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, тоді

$\underline{Ax + By + Cz + D = 0}$ – **рівняння площини в загальному вигляді.**

Дослідження:

1) $A=0$, $By + Cz + D = 0$ – рівняння площини, паралельної осі Ох;

2) $B=0$, $Ax + Cz + D = 0$ – рівняння площини, паралельної осі Оу;

3) $C=0$, $Ax + By + D = 0$ – рівняння площини, паралельної осі Oz;

4) $D=0$, $Ax + By + Cz = 0$ – рівняння площини, що проходить через початок системи координат;

5) $A=B=0$, $Cz + D = 0$ – рівняння площини, паралельної площині XOУ;

6) $A=C=0$, $By + D = 0$ – рівняння площини, паралельної площині XOZ;

7) $B=C=0$, $Ax + D = 0$ – рівняння площини, паралельної площині УOZ.

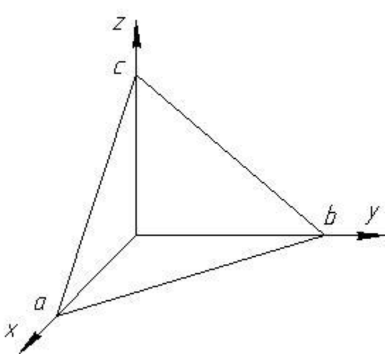
5.1.2. Рівняння площини у відрізках на осях

$Ax + By + Cz + D = 0$,

$Ax + By + Cz = -D$,

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1,$$

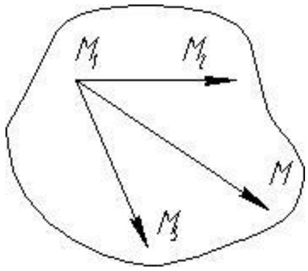
$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{c}{-\frac{D}{C}} = 1.$$



Позначимо $-\dfrac{D}{A}=a,\quad -\dfrac{D}{B}=b,\quad -\dfrac{D}{C}=c,$ тоді

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{c}{c}=1$ – **рівняння площини у відрізках на осях.**

5.1.3. Рівняння площини, що проходить через три точки



Точки $M_1(x_1;y_1;\,z_1)$, $M_2(x_2;y_2;\,z_2)$, $M_3(x_3;y_3;\,z_3)$ – фіксовані точки площини, $M(x;y;\,z)$ – довільна точка площини.

Із цих чотирьох точок утворимо три вектори:

$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{(x-x_1;\ y-y_1;\ z-z_1)}$,

$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)}$,

$\overrightarrow{M_1M_3}=\overrightarrow{(x_3-x_1;\ y_3-y_1;\ z_3-z_1)}$.

Ці вектори лежать в одній площині, якщо їх змішаний добуток дорівнює нулю.

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$ – рівняння площини, що проходить через три точки.

5.1.4. Взаємне розміщення двох площин

Нехай дві площини α_1 і α_2 задані загальними рівняннями:

$\alpha_1:\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$,

$\alpha_2:\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Дві площини паралельні, якщо $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

Дві площини перпендикулярні, якщо скалярний добуток їх нормальних векторів $\vec{n}_1(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2(A_2;B_2;C_2)$ дорівнює нулю: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Кут між двома площинами визначається як кут між нормальними векторами цих площин:

$$\cos\varphi=\frac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|n_1|\cdot|n_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz+D=0$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5.2. Рівняння прямої в просторі

5.2.1. Загальне рівняння прямої в просторі

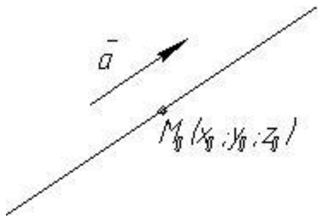
Пряму можна задати як перетин двох площин:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Напрямний вектор прямої, заданої системою (1) обчислюється за формулою

$$\vec{a} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

5.2.2. Канонічне рівняння прямої



Нехай $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - довільна точка прямої, $\vec{a}(k; l; m)$ – напрямний вектор прямої, координати якого обчислюються із системи (1) $k = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $l = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $m = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$,

$\dfrac{x - x_0}{k} = \dfrac{y - y_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{m}$ – канонічне рівняння.

5.2.3. Параметричні рівняння прямої

$$\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m} = t.$$

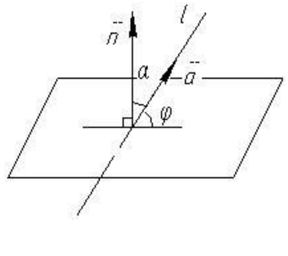
$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{k} = t, \\ \dfrac{y - y_0}{l} = t, \\ \dfrac{z - z_0}{m} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + kt, \\ y = y_0 + lt, \\ z = z_0 + mt. \end{cases}$ – параметричні рівняння, де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – задана точка, що належить прямій, $\vec{a}(k; l; m)$ – напрямний вектор прямої.

5.2.4. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Якщо пряма проходить через дві точки в просторі $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

5.3. Кут між прямою та площиною



Нехай φ – кут між прямою ℓ і площиною β, α – кут між нормальним вектором $\vec{n}(A; B; C)$ площини β і напрямним вектором $\vec{a}(k; l; m)$ прямої ℓ. Кут між прямою $\dfrac{x - x_0}{k} = \dfrac{y - y_0}{l} = \dfrac{z - z_0}{m}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходять за формулою

$$\sin\varphi = \frac{\bar{n}\cdot\bar{a}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{a}|} = \frac{Ak + Bl + Cm}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{k^2 + l^2 + m^2}} .$$

Умова паралельності прямої $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$: $Ak + Bl + Cm = 0$.

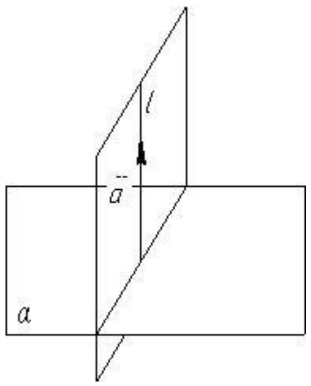
Умова перпендикулярності прямої $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\frac{A}{k} = \frac{B}{l} = \frac{C}{m} \; .$$

5.4. Окремі випадки задання площини в просторі

5.4.1. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини

Нехай пряма ℓ задана рівнянням $\frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$, а площина α задана рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, причому $\ell \perp \alpha$. Тоді рівняння має вигляд



$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ k & l & m \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \; .$$

5.4.2. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі

Дві паралельні прямі l_1 і l_2 задані відповідно рівняннями

$l_1 :\quad \frac{x - x_1}{k} = \frac{y - y_1}{l} = \frac{z - z_1}{m}, \qquad l_2 :\quad \frac{x - x_2}{k} = \frac{y - y_2}{l} = \frac{z - z_2}{m},$

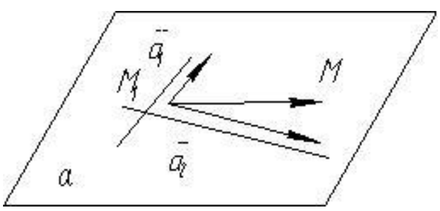
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$$ – рівняння шуканої площини.

5.4.3. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються

Дві прямі, що перетинаються l_1 і l_2, задані відповідно рівняннями:

$$l_1 :\quad \frac{x - x_1}{k_1} = \frac{y - y_1}{l_1} = \frac{z - z_1}{m_1}, \qquad l_2 :\quad \frac{x - x_2}{k_2} = \frac{y - y_2}{l_2} = \frac{z - z_2}{m_2} .$$

Тоді



$$\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \end{vmatrix} = 0$$ – рівняння шуканої площини.

5.4.4. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку

Дана пряма l задана рівнянням $l: \quad \frac{x - x_0}{k} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{m}$ і точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ($M_1 \notin l$).

Тоді

$$\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{a} = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ k & l & m \end{vmatrix} = 0$$ – рівняння шуканої площини.

Контрольні запитання

1. Запишіть загальне рівняння площини. Дослідіть його.
2. Які умови паралельності та перпендикулярності площин?
3. Запишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
4. Запишіть види рівнянь прямої в просторі.
5. Як знайти кут між прямою і площиною?
6. Запишіть рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.
7. Запишіть рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.
8. Запишіть рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.

Лекція 6. Криві другого порядку. Поверхні другого порядку

План

6.1. Вступ.
6.2. Еліпс.
6.3. Гіпербола.
6.4. Парабола.
6.5. Поверхні другого порядку.

6.1. Вступ

Кривою другого порядку називається множина М точок площини, координати яких задовольняють рівняння другого степеня:

$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$, де a_{ij} – дійсні числа.

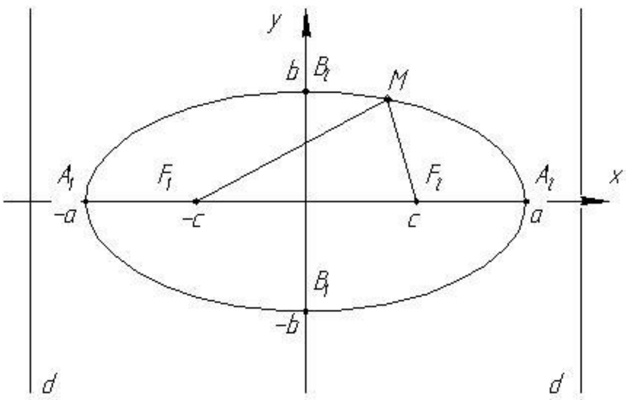
До кривих другого порядку належать: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Коло – це геометричне місце точок, кожна з яких рівновіддалена від даної точки, що називається центром кола.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, точка $O(a;\, b)$ – центр кола.

6.2. Еліпс

Еліпс – це геометричне місце точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала і дорівнює *2a.*



Точка $M(x;\, y)$ – належить еліпсу, $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ – фокуси, MF_1 і MF_2 – фокусні радіуси точки *M.*

За означенням $MF_1 + MF_2 = 2a$,

$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$,

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$,

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2xc - c^2$,

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc$,

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$,

$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$,

$a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$,

$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$,

$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2$,

$a^2x^2 + a^2y^2 - x^2c^2 = a^4 - a^2c^2$,

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Позначимо $a^2 - c^2 = b^2$, тоді $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на a^2b^2, тоді

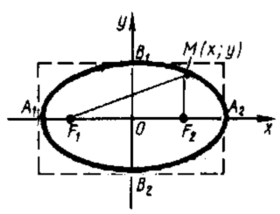
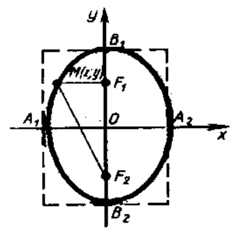
$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} + \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1$,

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – **канонічне рівняння еліпса**, *2a* – велика вісь, *2в* – мала вісь, *2c* – фокусна вісь, $A_1,\ A_2,\ B_1, B_2$ – вершини еліпса, $a^2 - b^2 = c^2$ – зв’язок між фокусною відстанню та осями еліпса ($a > b$).

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної відстані до більшої осі: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a}$. Ексцентриситет свідчить про форму еліпса.

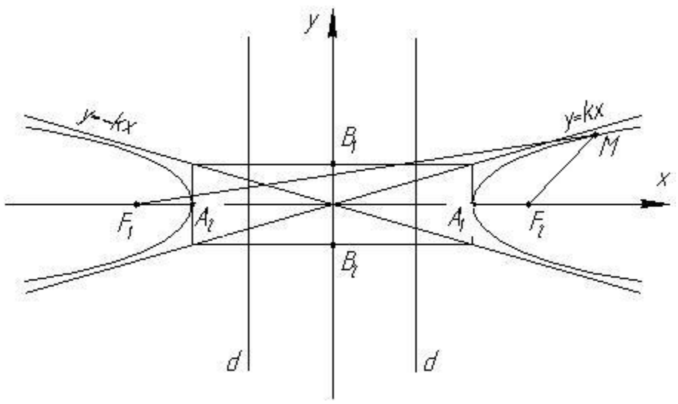
Директрисами еліпса називаються прямі, що задаються рівнянням $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon} = \pm\dfrac{a^2}{c}$.

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – рівняння еліпса із зміщеним центром, $(x_0;\ y_0)$ – центр.

		
Канонічне рівняння	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Розміщення фокусів	***F_1 ; $F_2 \in Ox$***	***F_1 ; $F_2 \in Oy$***
Координати фокусів	***$F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$***	***$F_1(0;\ c)$, $F_2(0;-c)$***
Співвідношення між a і b	***$a > b$***	***$a < b$***
Велика вісь	***$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$***	***$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$***
Мала вісь	***$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$***	***$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$***
Фокусна відстань	***$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$***	***$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$***
Ексцентриситет	***$\varepsilon = c/a$***	***$\varepsilon = c/b$***
Співвідношення між a, b, c	***$a^2 - b^2 = c^2$***	***$b^2 - a^2 = c^2$***

6.3. Гіпербола

Гіпербола – це геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина стала і дорівнює *2a.*



За означенням $\lvert MF_2 - MF_1\rvert = 2a$,

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right| = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a.$$

Піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$$(x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2$$

,

$$2xc = -2xc \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,$$

$$4xc = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 4a^2,$$

$xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2\left(x^2 - 2xc + c^2 + y^2\right)$,

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$,

$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$,

$x^2c^2 + a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$,

$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$.

Позначимо $c^2 - a^2 = b^2$, тоді $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Поділимо обидві частини цієї рівності на a^2b^2, тоді

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1,$$

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – **канонічне рівняння гіперболи**,

$2a$ – дійсна вісь; $2b$ – уявна вісь; $2c$ – фокусна вісь; A_1, A_2 – вершини гіперболи,

$a^2 + b^2 = c^2$ – зв'язок між фокусною відстанню та осями гіперболи ($a > b$).

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення відстані між фокусами до відстані між вершинами: $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a}$.

Директрисами гіперболи називаються прямі, що задаються рівнянням:

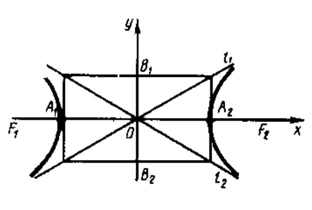
$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c}.$$

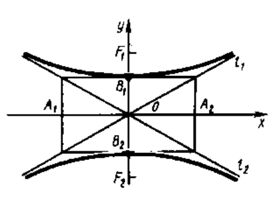
Діагоналі прямокутника є асимптотами гіперболи. Асимптоти гіперболи задаються рівняннями: $y = \pm\dfrac{b}{a}x = \pm kx$,

$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – рівняння гіперболи зі зміщеним центром, $(x_0;\ y_0)$ – центр.

Якщо $a < b$, то $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ та $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ називаються спряженими.





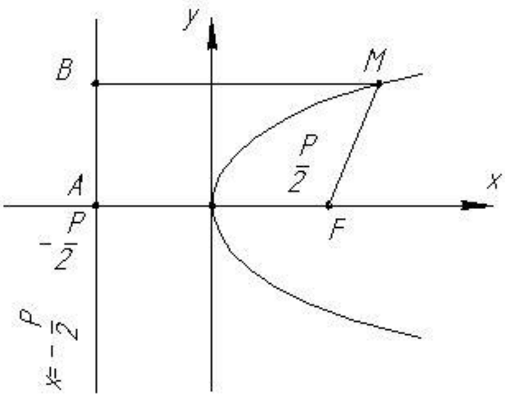
Канонічне рівняння	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$
Розміщення фокусів ***Координати фокусів*** ***Дійсна вісь*** ***Уявна вісь*** ***Фокусна відстань*** ***Ексцентриситет*** ***Співвідношення між a, b, c***	$F_1; F_2 \in Ox$ $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ $\lvert A_1A_2\rvert = 2a$ $\lvert B_1B_2\rvert = 2b$ $\lvert F_1F_2\rvert = 2c$ $\varepsilon = c/a$ $c^2 = a^2 + b^2$	$F_1; F_2 \in Oy$ $F_1(0;c), F_2(0;-c)$ $\lvert B_1B_2\rvert = 2b$ $\lvert A_1A_2\rvert = 2a$ $\lvert F_1F_2\rvert = 2c$ $\varepsilon = c/b$ $c^2 = a^2 + b^2$

6.4. Парабола

Парабола – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F, та фіксованої прямої d (d не проходить через F).

Точка F називається фокусом, пряма d називається директрисою.

Розмістимо систему координат так, щоб точка F знаходилася на осі Ох, директриса була перпендикулярною до осі Ох, а точка $O(0;0)$ ділила відстань між фокусом і директрисою пополам: $AO = OF$.



Позначимо $AF = p$, тоді $AO = OF = \frac{p}{2}$, тому $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Директриса задається рівнянням: $x = -\frac{p}{2}$.

За означенням параболи $|MB| = |MF|$,

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2},$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+0^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}.$$

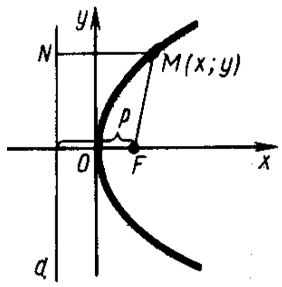
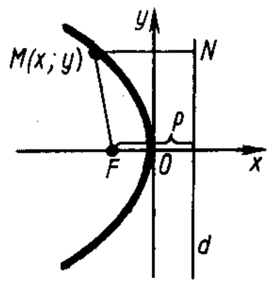
Піднесемо обидві частини рівності до квадрата:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2,$$

$$x^2+pc+\frac{p^2}{4} = x^2-pc+\frac{p^2}{4}+y^2,$$

$y^2 = 2px$ – **канонічне рівняння параболи**, симетричної відносно осі Ох,

$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ – канонічне рівняння параболи, вершина якої знаходиться в точці $M_0(x_0; y_0)$.

		
Канонічне рівняння	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$
Розміщення фокуса	***На додатній півосі Ox***	***На від'ємній півосі Ox***
Координати фокуса	$F\left(\frac{p}{2};0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
Рівняння директриси	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$

6.5. Поверхні другого порядку

Пове́рхня — геометричне поняття, при логічному уточненні якого в різних розділах геометрії йому надається різний зміст.

В елементарній геометрії це площина, багатогранник, а також деякі «криві поверхні». При цьому кожна поверхня визначається спеціальним способом, без загального означення, найчастіше як множина точок, що задовольняють певні умови. Наприклад, сфера — множина точок, розміщених на однаковій відстані від однієї точки, яку називають центром сфери.

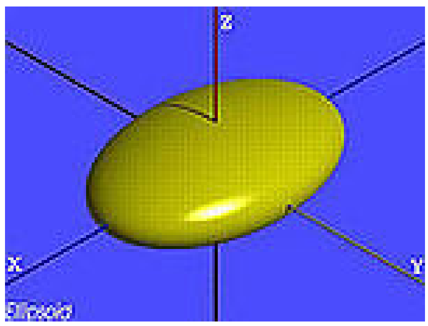
Поняття «поверхні» лише пояснюється, а не визначається. Наприклад, говорять, що поверхня є границею тіла чи слідом рухомої лінії.

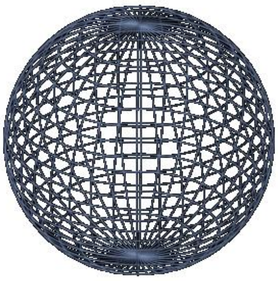
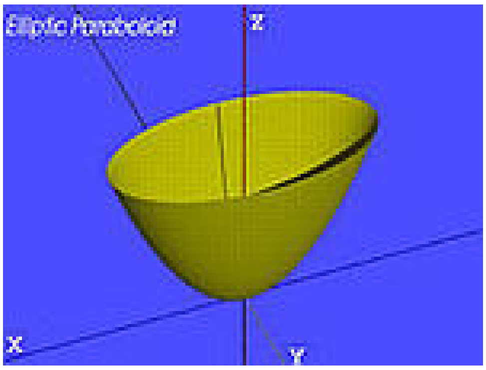
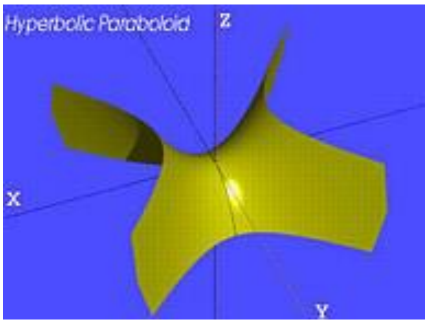
У сучасній геометрії поверхнею називають двовимірну множину, двовимірну підмножину, але інколи навіть так означають довільну множину точок.

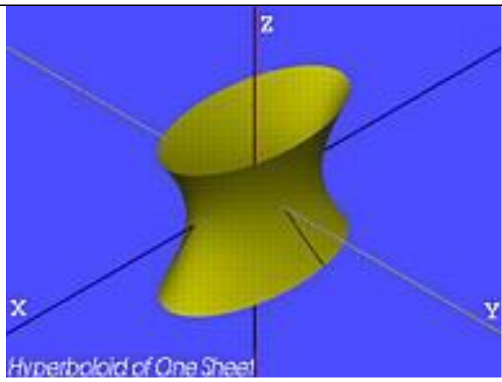
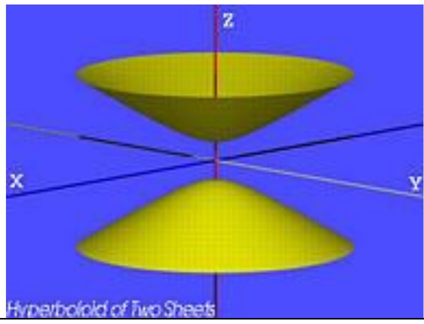
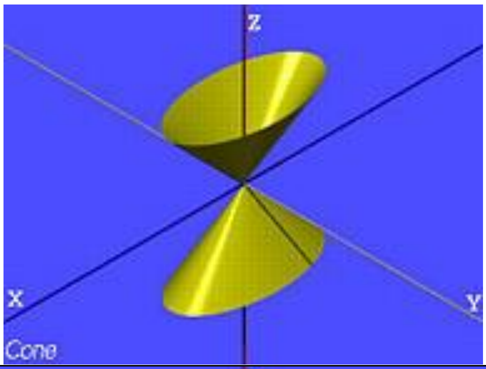
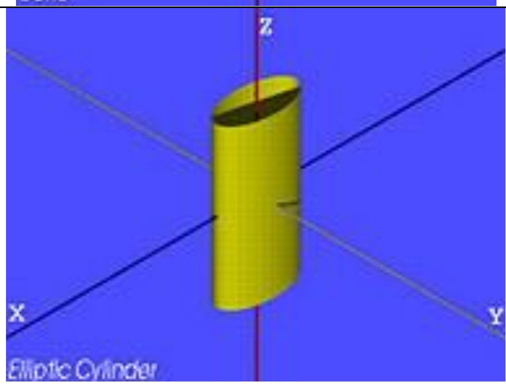
Означення. Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння вигляду

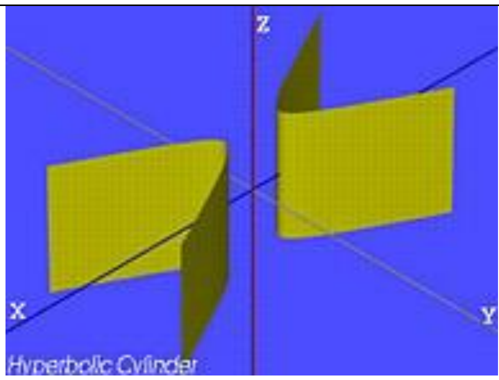
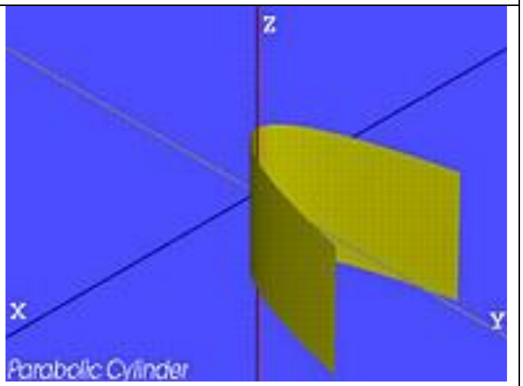
$$\mathbf{ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + 1 = 0,}$$

де принаймні один із коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. Це рівняння називається загальним рівнянням поверхні другого порядку.

Еліпсоїд – замкнена центральна поверхня другого порядку. Еліпсоїд має центр симетрії й три осі, що називаються осями еліпсоїда. Точки перетину координатних осей з еліпсоїдом називаються його вершинами. Перерізи еліпсоїда площинами є еліпсами (зокрема, завжди можна зазначити перерізи	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	

ко колу еліпсоїда)		
Сфе́ра – замкнена поверхня, геометричне місце точок рівновіддалених від даної точки, що є центром сфери	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$	
Еліптичний параболоїд має вигляд овальної чаши і може мати точку максимуму або мінімуму	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$, де *a*, *b*, *c* – дійсні півосі	
Гіперболічний параболоїд (не плутати з гіперболоїдом) — це двічі лінійчаста поверхня, що має вигляд сідла	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$	

Гіперболоїд однопорожнинний	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ ,$$ де a і b – дійсні півосі, а c – уявна піввісь	
Гіпеболоїд двопорожнинний	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\ ,$$ де a і b – уявні півосі, а c – дійсна піввісь	
Конус	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$	
Еліптичний циліндр	$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$	

Гіперболічний циліндр	$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$	
Параболічний циліндр	$$x^2 + 2ay = 0$$	

Контрольні запитання

1. Що називається лінією другого порядку?
2. Що називається колом? Запишіть його рівняння.
3. Що називається еліпсом? Виведіть його рівняння.
4. Що називається ексцентриситетом, директрисами еліпса?
5. Що називається гіперболою? Виведіть її рівняння.
6. Що називається ексцентриситетом, директрисами, асимптотами гіперболи?
7. Що називається параболою? Виведіть її рівняння.
8. Яке рівняння параболи, симетричної відносно осей Ох, Оу?
9. Які поверхні другого порядку можете назвати? Їх рівняння.

Лекція 7. Числові функції та числові послідовності, їх властивості. Границя функції в точці

План

7.1. Поняття числової послідовності та її границі. Число *е*.
7.2. Функція. Границя функції в точці. Правила обчислення границь.
7.3. Приклади обчислення границь.

7.1. Поняття числової послідовності та її границі. Число *е*

Означення. Числова функція $y = f(n)$, область визначення якої є множиною натурального ряду чисел, називається ***числовою послідовністю***, або просто послідовністю, і позначається $y = x_n$, далі позначатимемо $x_n = f(n),\ n \in N$.

Значення $x_1 = f(1),\ x_2 = f(2),\ \ldots,\ x_n = f(n),\ \ldots$ називаються *членами послідовності*. Послідовність вважається заданою, якщо задано *n*-й член послідовності.

Приклад. Записати три перші члени послідовності $x_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$. Маємо $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_2 = \dfrac{3}{2^2},\ \ x_3 = \dfrac{5}{2^3}$.

Приклад. За заданими трьома першими членами послідовності $x_1 = 1,\ \ x_2 = -\dfrac{3}{5\sqrt{2}},\ \ x_3 = \dfrac{5}{5^2\sqrt{3}}$ визначити формулу *n*-го члена.

Задача розв’язується методом добору з такою перевіркою $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{5^{n-1}\sqrt{n}}$.

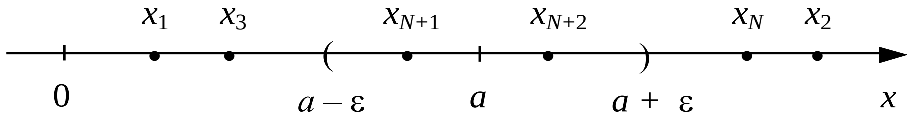
Означення. Число a називається ***границею послідовності*** x_n, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, яке б мале воно не було, існує номер N такий, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

Позначення $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Для стислого запису означення границі використаємо квантори:
$\forall$ — для будь-якого, будь-який;
$\exists$ — існує, знайдеться;
: = дорівнює за означенням, означає.
Тоді означення границі послідовності за допомогою цих символів записуємо так:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) := \big((\forall\varepsilon > 0,\ \ \exists N,\ \ n > N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon)\big).$$

Розглянемо геометричну інтерпретацію границі послідовності. На числовій осі побудуємо ε-окіл числа a, тобто інтервал (a – ε; a + ε), і покажемо, як розміщуватимуться точки, що відповідають членам послідовності $x_n \to a$, при $n \to \infty$.



Таким чином**,** число a називається границею послідовності $\boldsymbol{x_n}$, якщо для будь-якого ε-околу точки a існує номер N такий, що, починаючи з номерів $n > N$, усі члени послідовності перебувають в ε-околі точки a.

Означення. Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має границю (скінченну). Послідовність, яка не має границі, називається *розбіжною*.

Збіжні послідовності мають властивості:

Теорема 1. (Єдиність границі послідовності). Якщо послідовність має границю, то вона єдина.

Теорема 2. (Необхідна умова збіжності послідовності). Якщо послідовність збіжна, то вона обмежена.

Розглянемо послідовність $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Можна довести, що ця послідовність монотонно зростає та обмежена $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Існує границя цієї послідовності, яку позначають так: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Зазначимо, що число e = 2,7183... є основою натуральних логарифмів $\ln a = \log_e a.$ Взагалі число e, як і число π = 3,14 ..., широко використовують під час розв'язування задач із різних галузей знань.

7.2. Функція. Границя функції в точці. Правила обчислення границь

Означення. Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E, за якої кожному значенню змінної x відповідає одне й лише одне значення змінної y.

При цьому вважають, що:

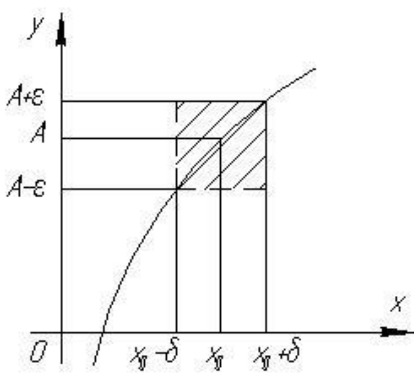
x — незалежна змінна, або аргумент;
y — залежна змінна, або функція;
f — символ закону відповідності;
E — область визначення функції;
D — множина значень функції.

Розрізняють три способи задання функції: аналітичний, графічний і табличний.

Означення. Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається *складною* (*складеною*) *функцією*, або *суперпозицією* функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = x_0$ за винятком самої точки $x = x_0$.

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність: $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Записують так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

На рисунку показано:
$(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ – δ-окіл точки x_0;
$(A - \varepsilon;\ A + \varepsilon)$ – ε-окіл точки A.
Тоді геометрично це означає: що будь-якій точці з δ-околу відповідає деяка точка з ε-околу.

Функція *f(x)* не може мати двох різних границь в одній точці.

Розглянемо основні властивості границь за умови, що кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} c = c; \quad c = const$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{c \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}; \quad \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Наслідки:

1. Постійний множник можна виносити за знак границі $\lim\limits_{x \to x_0} (C \cdot f(x)) = C \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ для будь-якого постійного числа *C*.
2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ існує, то для довільного натурального *m* має місце формула

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \right)^m = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right)^m .$$

7.3. Приклади обчислення границь

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 7x + 4)$.

Розв’язання

Функція $f(x) = x^2 - 7x + 4$ – ціла раціональна. Замінимо в аналітичному виразі функцію x його граничним значення та одержимо

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 7x + 4) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 4 = -8 .$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8}$.

Розв’язання

Будемо шукати границю дробово-раціональної функції. Перш ніж підставляти граничне значення *x*, перевіримо, чи не перетворюється на нуль знаменник дробу при *x* = 3.

Перевіряємо: $3^2 + 2 \cdot 3 + 8 = 23 \neq 0$.

Тоді $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + 2x + 8} = \dfrac{3^2 + 3 + 2}{3^2 + 2 \cdot 3 + 8} = \dfrac{14}{23}$.

Приклад 3. Якщо чисельник функції – стала величина, а границя знаменника дорівнює нулю, то границя такої функції є нескінченністю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{6}{4x-8}=\infty .$$

Приклад 4. Якщо функція дробово-раціональна, то для знаходження границі чисельник і знаменник розкладають на множники, які потім скорочують, причому скоротитися повинен той множник, який перетворюється на нуль

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{3x\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9} .$$

Приклад 5. Якщо функція містить знаки радикалів, то чисельник і знаменник множать на вираз, спряжений до чисельника (знаменника), а потім застосовують формулу різниці квадратів.

Вирази $\sqrt{a}-b$ *і* $\sqrt{a}+b$ та $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ *і* $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ називаються спряженими.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{\sqrt{5x+1}-4}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\cdot\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)(\sqrt{5x+1}+4)}{\left(\sqrt{5x+1}\right)^2-4^2}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)\cdot(x-3)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{5\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+5)(\sqrt{5x+1}+4)}{5}=\frac{(3+5)(\sqrt{5\cdot 3+1}+4)}{5}=\frac{8\cdot 8}{5}=\frac{64}{5} .$$

Приклад 6. Якщо функція містить корінь третього степеня, то чисельник і знаменник множать на неповний квадрат суми або різниці, а потім застосовують формулу суми або різниці кубів:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3-1^3}{x\cdot\left(3\sqrt{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається послідовністю?
2. Що називається границею числової послідовності?
3. Що називається границею функції?
4. Сформулюйте властивості границь.
5. Сформулюйте та покажіть на прикладах правила обчислення границь.

Лекція 8. Нескінченно малі та нескінченно великі функції. Важливі границі

План

8.1. Важливі границі.
8.2. Приклади обчислення границь.

8.1. Важливі границі

Під час обчислення границь часто використовують такі границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ – **перша важлива границя.**

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k,\quad k\neq 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}=k,\quad k\neq 0$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1$;

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$ – **друга важлива границя.**

Наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}$.

8.2. Приклади обчислення границь

Приклади. Обчислити границі.

1. Границя функції, що являє собою многочлен, при $x\to\infty$ є нескінченністю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^2+4x-2\right)=\infty.$$

2. Границя на нескінченності дробово-раціональної функції, в якої степені чисельника і знаменника однакові, дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших членах:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{4}.$$

3. Границя на нескінченності дробово-раціональної функції, в якої степінь чисельника менший за степінь знаменника, дорівнює нулю:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+2}{2x^3+x-6}=0.$$

4. Границя на нескінченності дробово-раціональної функції, в якої степінь чисельника більший за степінь знаменника, дорівнює нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4-4x+2}{x^3+8x-6}=\infty.$$

5. $\lim\limits_{x\to0}(\sin 2x\cdot ctg\,3x)=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1}{\frac{tg\,3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot1\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}\cdot1=\frac{2}{3}.$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\left[\begin{array}{c}y=x-\frac{\pi}{3}\\ x\to\frac{\pi}{3},\ \text{то}\ y\to0\end{array}\right]=\lim\limits_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1\cdot$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{-1}{x}\right)^{2x-3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{-3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{2x}=$$ 7.

$$=1^{-3}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{x}\right)^{x}\right)^{2}=1\cdot e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+3}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{2x^2+3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{2\left(x^2-1\right)+5}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)^{\left(x^2-1\right)}\right)^{2}\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-1}\right)\right)^{5}=$$

$$=\left(e^3\right)^2\cdot1^5=e^6.$$

Лекція 9. Неперервність функції

План

9.1. Односторонні границі функції.
9.2. Неперервність функції.
9.3. Властивості неперервних функцій
9.4. Класифікація точок розриву.
9.5. Асимптоти функції.
9.6. Приклади розв'язування вправ.

9.1. Односторонні границі функції

Якщо шукають границю функції *f(x)* за умови, що *x*, прямуючи до x_0, може набувати лише значень, менших за x_0, то цю границю, якщо вона існує, називають *границею функції f(x) зліва у точці* x_0 і позначають $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Якщо шукають границю функції *f(x)* за умови, що *x*, прямуючи до x_0, може набувати лише значення більших за x_0, то цю границю, якщо вона існує, називають *границею функції f(x) справа у точці* x_0 і позначають $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

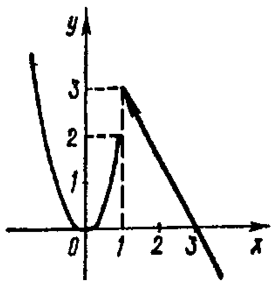
Границя функції *f(x)* при $x \to x_0$ існує тоді й лише тоді, коли існують і рівні між собою границі зліва і справа від цієї функції, тобто

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Приклад. Знайти односторонні границі функції $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0;\\ \dfrac{-3x+9}{2}, x>1\end{cases}$ в точці $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} 2x^2 = 2\cdot 1 = 2,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{-3x+9}{2} = \frac{-3\cdot 1+9}{2} = 3.$$



Односторонні границі функції в точці $x_0=1$ існують, але оскільки вони не рівні між собою, то границя функції f(x) в точці $x_0=1$ не існує.

9.2. Неперервність функції

Означення. Якщо границя функції *f(x)* при $x \to x_0$ існує і дорівнює значенню функції в точці $x = x_0$, то функція *f(x)* називається *неперервною у точці* x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Таким чином, функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;
2) існують односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;
3) односторонні границі рівні між собою і дорівнюють значенню функції в

точці x_0 :

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

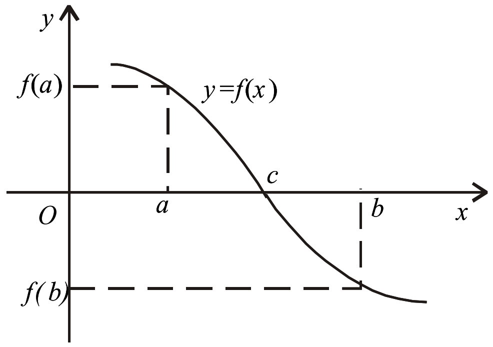
Якщо хоча б одна з умов не виконується, то точку x_0 називають точкою розриву функції.

9.3. Властивості неперервних функцій

Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $x = x_0$, то в цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, в останньому випадку за умови, що $g(x_0) \neq 0$.

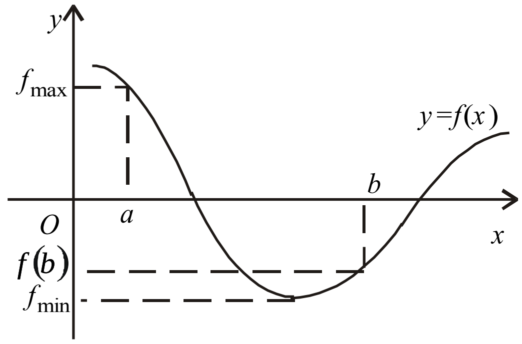
Теорема 2. Якщо функція $y = F(u)$ — неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ — неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U$, то складна функція $y = F(\varphi(x))$ — неперервна для $x \in X$.

Теорема 3 (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ та на його кінцях набуває значення різних знаків (наприклад, $f(a) > 0$, $f(b) < 0$), тоді на проміжку $(a;\ b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$.



Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, то $y = f(x)$ на $[a;b]$ набуває всіх проміжних значень між числами A і B.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших і найменших значень.

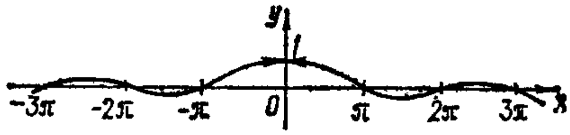


9.4. Класифікація точок розриву

Точки розриву I роду

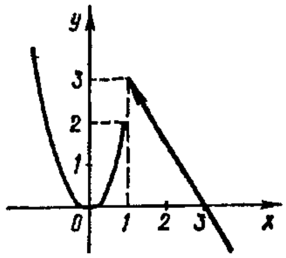
1. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має скінченні границі зліва і справа і вони дорівнюють одна одній, але не дорівнюють значенню функції $f(x)$ у точці x_0 або значення $f(x_0)$ не існує, то точку x_0 називають точкою усувного розриву функції.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ є точкою усувного розриву, оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$, але значення функції в точці $x=0$ не існує.



2. Якщо в точці x_0 функція *f(x)* має границі зліва і справа, причому $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точку x_0 називають точкою розриву функції зі скінченним стрибком. Величину $\delta=\left|\lim\limits_{x\to a-0} f(x)-\lim\limits_{x\to a+0} f(x)\right|$ називають стрибком функції *f(x)* у точці x_0.

Наприклад, для функції
$$f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0;\\ \frac{-3x+9}{2}, x>1\end{cases}$$
точка $x_0=1$ є точкою розриву, стрибок функції в цій точці дорівнює $\delta=|2-3|=1$.



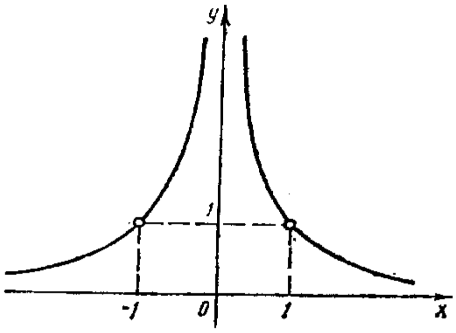
Точки розриву II роду

Кожна точка розриву II роду характеризується тим, що в ній функція не має хоча б однієї з односторонніх границь.

Наприклад, для функції $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ і $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{x^2}=+\infty$,

тобто односторонні границі в точці $x_0=0$ не існують. Тому $x_0=0$ – точка розриву функції II роду.



Контрольні запитання

1. Запишіть першу та другу важливі границі.
2. Як ви розумієте односторонні границі функції?
3. Яка функція називається неперервною в точці?
4. Які виконуються умови, якщо функція неперервна в точці?
5. Сформулюйте властивості неперервних функцій.
6. Яка існує класифікація точок розриву, покажіть на прикладах.

Лекція 10. Похідна функції. Правила диференціювання

План

10.1. Означення похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу приросту Δx. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо границя відношення існує і скінченна, вона називається **похідною** функції $y = f(x)$ за змінною x і позначається

$$y', \quad y'_x, \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається **диференціюванням** цієї функції.

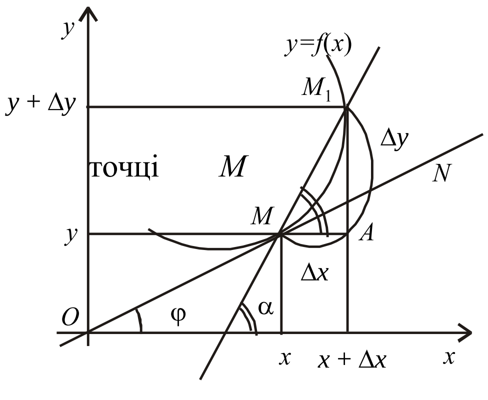
Означення. Функція $y = f(x)$ називається диференційовною на інтервалі (a; b), якщо вона диференційовна в кожній точці даного інтервалу.

10.2. Механічний зміст похідної

Якщо закон прямолінійного руху точки заданий рівнянням $s = s(t)$, де s – шлях; t – час, то миттєва швидкість руху на момент часу t визначається рівністю

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = s',$$

тобто швидкість точки під час прямолінійного руху на момент часу t є похідною від шляху s.



10.3. Геометричний зміст похідної

Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці M (x, y). Позначимо кутовий коефіцієнт дотичної MN через $k = \mathrm{tg}\varphi$. Нехай в точці x функція має приріст Δx, тоді ордината y набуде приросту Δy.

Із ΔMAM_1 випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}\alpha$.

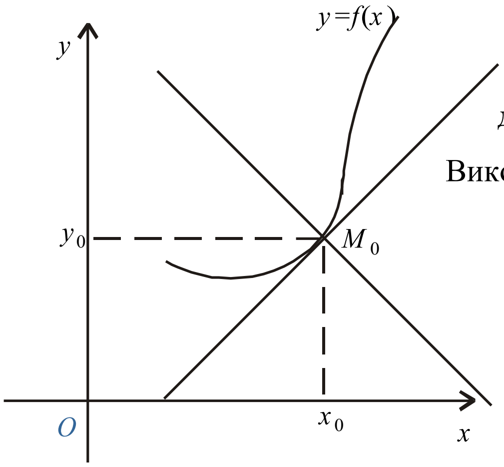
Якщо $\Delta x \to 0$, то $M_1 \to M$, $\alpha \to \varphi$, і січна прямує до положення дотичної MN.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\varphi=k$.

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$, то $f'(x)=k,$ тобто похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції в точці з абсцисою *x*. У цьому полягає геометричний зміст похідної функції в певній точці.

10.4. Рівняння дотичної та нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(t)$ означена і неперервна на деякому проміжку $[a;\ b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0\in[a;b]$. Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0;\ y_0)$ у даному напрямку



$$y-y_0=k(x-x_0),$$

де *k* кутовий коефіцієнт дотичної.

Використовуючи геометричний зміст похідної,

маємо $k=f'(x_0)$.

Оскільки $y_0=f(x_0)$, то дістанемо **рівняння дотичної** у вигляді

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Нормаль до графіка функції в точці M_0 – це перпендикуляр, проведений до дотичної в цій точці.

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, визначимо кутовий коефіцієнт нормалі $k=-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і запишемо її рівняння у вигляді

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -3$.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x)=2x$, звідси $f'(-3)=-6;\ f(-3)=(-3)^2=9$.

Рівняння дотичної та нормалі запишемо так: $y-9=-6(x+3)$, $y-9=\frac{1}{6}(x+3)$ або у загальному вигляді $6x+y+9=0$, $x-6y+57=0$.

10.5. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції

Функція $y=f(x)$ є неперервною в точці x, якщо в цій точці $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Теорема. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то в цій точці функція неперервна. Обернене твердження неправильне: для неперервної функції може не існувати похідної.
Справді, нехай функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x. Запишемо тотожність $\Delta y=\frac{\Delta y\cdot\Delta x}{\Delta x}\ (\Delta x\neq 0)$, звідси $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\cdot 0=0.$

Таким чином, функція $y=f(x)$ неперервна в точці x.

Наслідок. Якщо функція розривна в деякій точці, то вона не має похідної в цій точці.

10.6. Основні правила диференціювання

Теорема 1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y=c$, де $c=\text{const}$, то $y^1=0$.

Теорема 2. Похідна алгебраїчної суми скінченної кількості диференційовних функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій:

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x).$$

Теорема 3. Похідна добутку двох диференційовних функцій дорівнює добутку першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак похідної:

$$(cu)'=cu',\ \text{де}\ c=\text{const}.$$

Теорема 4. Якщо чисельник і знаменник дробу – диференційовні функції (знаменник не перетворюється на нуль), то похідна дробу дорівнює

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Нехай $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, тобто $y=f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ — внутрішньою, або проміжним аргументом.

Теорема 5. Якщо $y=f(u)$ та $u=\varphi(x)$ — диференційовні функції від своїх аргументів, то похідна складної функції існує і дорівнює $y'_x=f'_u\cdot u'_x$.

Похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною.

10.7. Похідні від основних елементарних функцій

	Елементарні функції:	**Складені функції:**
1.	$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$.	$\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.
2.	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.
3.	$\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$.	$\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$.
	$\left(e^x\right)' = e^x$.	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$.
4.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.
5.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$.
6.	$(\sin x)' = \cos x$.	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
7.	$(\cos x)' = -\sin x$.	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
8.	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$.
9.	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.	$(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$.
10.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
11.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$.
12.	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.	$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.
13.	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.	$(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$.

10.8. Логарифмічне диференціювання

Якщо потрібно продиференціювати добуток декількох функцій або дріб, чисельник і знаменник якого містять добутки, часто зручно обидві частини даного виразу спочатку прологарифмувати за основою *e*, а потім уже диференціювати. Цей метод називається логарифмічним диференціюванням. Похідна від логарифма функції називається логарифмічною похідною.

Цей метод зручно застосовувати і при диференціюванні виразів, що містять корені з дробів. Його застосовують завжди, коли потрібно продиференціювати функцію вигляду

$$y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)},$$

тобто коли і основа степеня, і показник степеня є функціями змінної *x*.

Приклад. $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}$. Знайти y'.

Спочатку прологарифмуємо за основою *e* обидві частини рівності, а потім продиференціюємо:

$$\ln y = 2\ln(x+5) + 3\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - 2\ln(x+4).$$

Вважаючи $\ln y$ складеною функцією змінної *x*, продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{1}{y}y' = 2\cdot\frac{1}{x+5} + 3\cdot\frac{1}{x-4} - 5\cdot\frac{1}{x+2} - 2\cdot\frac{1}{x+4},$$

$$y' = \frac{(x+5)^2(x-4)^3}{(x+2)^5(x+4)^2}\cdot\left(\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} - \frac{5}{x+2} - \frac{2}{x+4}\right).$$

Приклад. $y = (\sin x)^{\cos x}$. Знайти y'.

Прологарифмувавши обидві частини рівності, одержимо:

$$\ln y = \cos x \cdot \ln\sin x, \qquad \frac{1}{y}y' = -\sin x \cdot \ln\sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x,$$

$$y' = (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \cdot \ln\cos x\right).$$

10.9. Диференціювання функцій заданих неявно

Якщо незалежна змінна *x* і функція y пов'язані рівнянням вигляду $f(x,y)=0$, нерозв'язним щодо *y*, то y називається неявною функцією змінної *x*.

Диференціювання неявної функції полягає в тому, що обидві частини рівняння $f(x,y)=0$ диференціюються за *x* з урахуванням, що *y* є функцією *x*, з одержаного рівняння визначається y'.

Приклад. Знайти похідну y' неявної функції $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Диференціюємо обидві частини цього рівняння:

$$3x^2+3y^2y'-3a(y+xy')=0\,,\ y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\,.$$

10.10. Диференціювання функцій заданих параметрично

Похідна функції

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\phi(t) \end{cases},$$

заданої параметрично, обчислюється за формулою

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}\,.$$

Приклад. Знайти похідну від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t \\ y=2\sin t-\sin 2t \end{cases}$$

$$x'_t=-2\sin t+2\sin 2t=4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},\quad y'_t=2\cos t-2\cos 2t=4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2},$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{4\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{4\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}=tg\,\frac{3t}{2}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається похідною?
2. У чому полягає механічний і геометричний зміст похідної ?
3. Запишіть рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в певній точці.
4. Сформулюйте основні правила диференціювання функцій.
5. Запишіть таблицю похідних елементарних функцій.

Лекція 11. Диференціал функції та його застосування

План

11.1. Означення диференціала функції.
11.2. Правила визначення диференціала.
11.3. Застосування диференціала.

11.1. Означення диференціала функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку, тобто для будь-якої точки x із цього проміжку границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ існує і дорівнює скінченному числу.

Враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можна записати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x .$$

Із виразу випливає, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — так звана **головна частина приросту**, лінійна відносно Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно малою величиною першого порядку відносно Δx). Другий доданок — добуток $\alpha \Delta x$ – завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

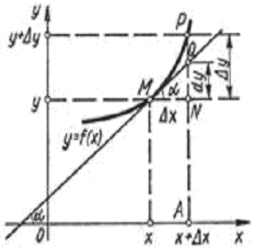
Означення. Добуток $f'(x)\Delta x$ називається диференціалом функції $y = f(x)$, його позначають символом dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x .$$

З'ясуємо механічний зміст диференціала. Нехай матеріальна точка рухається за відомим законом $S = f(t)$, де $f(t)$ — диференційовна на деякому проміжку функція.

Тоді диференціал цієї функції $dS = f'(t)\Delta t$ при фіксованих значеннях t і Δt — це той шлях, який пройшла б матеріальна точка за час Δt, якщо б вона рухалася прямолінійно та рівномірно зі сталою швидкістю $\vartheta = f'(t)$. Зрозуміло, що фактичний шлях ΔS у разі нерівномірного руху на відміну від диференціала dS не є лінійною функцією часу Δt і тому відрізняється від шляху dS. Проте якщо час Δt достатньо малий, то швидкість руху не встигає істотно змінитись, і тому рух точки на проміжку часу від t до $t + \Delta t$ є майже рівномірним.

Геометричний зміст диференціала зрозумілий із рисунка.



Маємо

$$PN = \Delta y,\ QN = MN tg\,\alpha = \Delta x\, f'(x) = f'(x)dx = dy.$$

Отже, диференціал функції $f(x)$ за заданих значень x і Δx дорівнює приросту ординати, дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x. Приріст функції y при цьому дорівнює приросту ординати кривої. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає заміну ординати AP кривої на ординату дотичної AQ. Зрозуміло, що така заміна доцільна лише для достатньо малих значень x.

11.2. Правила знаходження диференціала

1. $y = c$, $dy = 0$.

2. $y = uv,\ dy = udv + vdu$.

3. $y = u + v,\ \ dy = du + dv$;

4. $y = \dfrac{u}{v},\ dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Особливо важливий висновок випливає з правила диференціювання складеної функції. Нехай $y = f(x) = f(\varphi(t))$ — складена функція з проміжним аргументом $x = \varphi(t)$ і кінцевим аргументом t, причому функції $f(x)$, $\varphi(t)$ диференційовні в точках x і t.

Тоді існують похідна $y'_t = y'_x x'_t$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_t\, dt = y'_x\, x'_t\, dt = y'_x\, dx.$$

Таким чином, перший диференціал функції $y = f(x)$ визначається за однією й тією самою формулою незалежно від того, чи змінна x є незалежною змінною, чи вона є функцією іншої змінної.

Цю властивість диференціала називають інваріантністю (незмінністю) форми диференціала.

Теорема. Форма диференціала не залежить від того, чи є аргумент незалежною змінною, чи є функцією.

11.3. Застосування диференціала

Відомо

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x .$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha\Delta x$ є малою вищого порядку порівняно з dy.

При малих Δx доданком $\alpha\Delta x$ у виразі нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідси

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x .$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$$27 = 25 + 2 = 25\left(1 + \frac{2}{25}\right), \text{ звідси } \sqrt{27} = \sqrt{25\left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 5\sqrt{1 + \frac{2}{25}} .$$

При обчисленні $\sqrt{1 + \frac{2}{25}}$ уведемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$, тоді $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Отже, $\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, де $x = 1, \Delta x = \frac{2}{25}$.

Інакше $\sqrt{1 + \frac{2}{25}} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04$.

Дістанемо $\sqrt{27} \approx 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}2$.

Приклад. Знайти наближене значення функції $f(x) = x^3 + 2$ при $x = 2{,}01$.

Подамоо x у вигляді суми (2 + 0,01), де 0,01 будемо розглядати як приріст аргументу.

Оскільки $\Delta y \approx dy$, то $f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$,

$$dy = \left(x^3 + 2\right)' dx = 3x^2 dx = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12;$$
$$f(2{,}01) \approx 10 + 0{,}12 = 10{,}12.$$

Контрольні запитання

1. Що таке диференціал функції?
2. Для чого застосовують диференціал функції?
3. Наведіть приклади застосування диференціала.

Лекція 12. Правило Лопиталя

План

12.1. Правило Лопиталя.

12.2. Перетворення невизначеностей різних видів. Приклади.

12.1. Правило Лопиталя

При обчисленні границі відношення $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ може виявитися, що при $x \to x_0$ чисельник і знаменник одночасно прямують до нуля або до нескінченності, тобто є одночасно нескінченно малими або нескінченно великими величинами. Говорять, що в таких випадках мають місце «невизначеності» вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Обчислення границі в цьому разі називається «розкриттям невизначеності» і здійснюється за правилом Лопиталя.

Теорема (правило Лопиталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\quad .$$

Сутність цього правила полягає в тому, що у разі «невизначеностей» вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ обчислення границі відношення функцій під час виконання зазначених вимог замінюється обчисленням границі відношення їх похідних, що у здебільшого виявляється простішим.

У разі, якщо і відношення похідних приводить до одного з цих видів «невизначеностей» $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, можна вже до цього відношення застосовувати правило Лопиталя і тим самим досліджувати відношення похідних другого порядку. Може виявитися, що й відношення похідних другого порядку дає знову яку-небудь із цих «невизначеностей». Тоді потрібно перейти до відношення похідних третього порядку і т. д. Зауважимо, що якщо знадобиться використовувати відношення похідних другого, третього і т. д. порядків, то перш ніж це робити, потрібно виконати всі можливі спрощення у виразі, одержаному на попередньому етапі.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Маємо $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, застосовуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+3x+1)'}{(2x^3+7x+5)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосуємо правило Лопиталя повторно):

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)'}{(6x^2+7)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{12x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{6}\cdot 0=0.$$

12.2. Перетворення невизначеностей різних видів

12.2.1. Невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$.

Потрібно визначити

$$\lim_{x\to x_0}(u(x)\cdot v\cdot(x)).$$

Це невизначеність типу $[0\cdot\infty]$.

Вираз запишемо у вигляді $\lim\limits_{x\to x_0}(u\cdot v)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{u}{\frac{1}{v}}$ або $\lim\limits_{x\to x_0}(u\cdot v)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{v}{\frac{1}{u}}$

і при $x\to x_0$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(x^3\ln x)$.

Маємо невизначеність вигляду $[0\cdot\infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, одержавши невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(x^3\ln x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-3})'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

12.2.2. Невизначеність вигляду $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$

Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$. При $x\to x_0$ (x_0 — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність вигляду $[0^0]$;

б) $u \to \infty,\ v \to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^{0}\right]$;

в) $u \to 1,\ v \to \infty$ маємо невизначеність вигляду $\left[1^{\infty}\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $[0\cdot\infty]$. Справді, позначимо цю функцію через y, тобто візьмемо $y = u^{v}$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо

$$\ln y = v \ln u (u > 0).$$

Легко перевірити, що при $x \to x_0$ добуток $v \ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 12.2.1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто визначимо границю $\lim\limits_{x \to x_0} \ln y = k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x \to x_0} y = \lim\limits_{x \to x_0} u^{v} = e^{k}$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{x}$.

Маємо невизначеність вигляду $\left[0^{0}\right]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y = (\sin x)^{x}$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма цієї функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x \left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x \to 0} \frac{x^{2} \cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{x} = e^{0} = 1$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x \to 1$ маємо невизначеність $\left[1^{\infty}\right]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}}, \quad \ln y = \frac{\ln x}{x-1}; \quad \lim_{x \to 1} \ln y = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x \to 1} y = \lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^{1} = e$.

12.2.3. Невизначеність $[\infty - \infty]$

Якщо функції $u(x)\to\infty,\ \ v(x)\to\infty$ при $x\to x_0$ (x_0 — скінченне або нескінченне), то різниця $u-v$ при $x\to x_0$ дає невизначеність $[\infty-\infty]$. Остання за допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність вигляду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням зведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

При $x\to 1$ функції $\frac{1}{\ln x}$ та $\frac{1}{x-1}$ - нескінченно великі величини одного й того самого знака, тому ми маємо «невизначеність» вигляду $\infty-\infty$. Різниця $\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$, таким чином, маємо «невизначеність» вигляду $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\frac{1}{x}+1}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}.$$

Контрольні запитання

1. Які типи невизначеностей та способи їх перетворень можете назвати?
2. Сформулюйте правило Лопиталя.
3. Покажіть на прикладах застосування правила Лопиталя для перетворення невизначеностей.

Лекція 13. Застосування похідної для дослідження властивостей функцій

План

13.1. Вступ

Похідна функції широко використовується під час розв'язування різних задач з математики, фізики, техніки та економіки. Так, наприклад, за допомогою похідної можна обчислити границю функції, знайти екстремум функції, інтервали монотонності, точки перегину функції та інше.

13.2. Основні теореми диференціального числення

Теорема 1 (Теорема Ферма). Якщо диференційовна на проміжку (*a; b*) функція $y = f(x)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці ξ цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(\xi) = 0$.

Доведення

Припустимо, для визначеності, що $f(x)$ набуває в точці ξ найбільшого значення, тобто для всіх *x* з інтервалу (*a; b*) виконується умова $f(x) \le f(\xi)$.

За означенням похідної

$$f'(\xi) = \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi},$$

причому ця границя не залежить від того, як наближається *x* до ξ — справа чи зліва.

Розглянемо відношення $\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$. Для всіх *x*, достатньо близьких до точки $\xi (x \ne \xi)$, маємо

$$\begin{cases} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0 \text{ при } x > \xi, \\ \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0 \text{ при } x < \xi. \end{cases}$$

Перейдемо в останніх нерівностях до границі при $x \to \xi$. Дістанемо

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \xi + 0} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \le 0 \\ \lim\limits_{x \to \xi - 0} \dfrac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0.$$

Аналогічно розглядається випадок, коли функція $f(x)$ набуває в точці $x = \xi$ найменшого значення.

Геометричний зміст теореми Ферма: геометричний зміст похідної $y' = f'(x)$ являє собою кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $y = f(x)$, звідси рівність нулю похідної $f'(\xi)$ геометрично означає, що у відповідній точці цієї кривої дотична паралельна осі *Ox*.

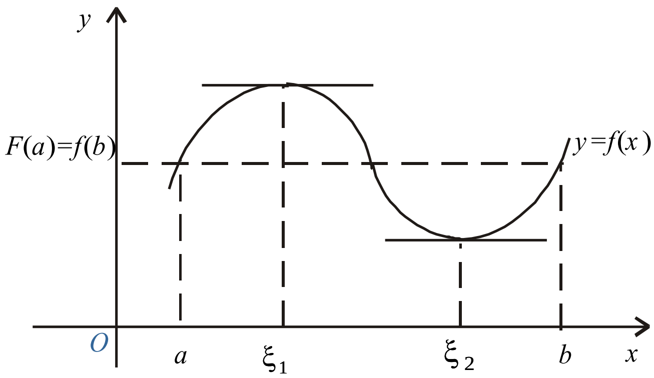
Теорема 2 (Теорема Ролля). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$;

2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$;

3) на кінцях сегмента набуває рівних між собою значень, тобто $f(a) = f(b)$,

то на інтервалі $(a; b)$ існує хоча б одна точка $x = \xi(a < \xi < b)$, для якої $f'(\xi) = 0$.



Геометричний зміст теореми Ролля: якщо крайні ординати неперервної кривої $y = f(x)$, яка має в кожній точці дотичну, рівні, то на цій кривій знайдеться принаймні одна точка з абсцисою $\xi(a < \xi < b)$, в якій дотична паралельна осі Ox.

Теорема 3 (Теорема Лагранжа). Якщо функція $f(x)$:

1) неперервна на відрізку $[a; b]$;

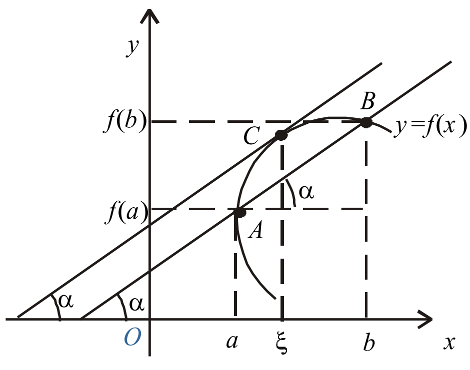
2) диференційовна на інтервалі $(a; b)$,

то на інтервалі знайдеться хоча б одна точка $x = \xi(a < \xi < b)$, така що:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(\xi).$$

Геометричний зміст теореми Лагранжа: запишемо формулу в іншому вигляді:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$



Із рисунка бачимо, що величина $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ є тангенсом кута α нахилу хорди, що проходить через точки A і B графіка функції $y = f(x)$ з абсцисами a і b.

Водночас $f'(\xi)$ — тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці C з абсцисою ξ. Таким чином, якщо для всіх точок кривої $y = f(x)$ існує дотична, то на цій кривій знайдеться точка з абсцисою ξ, в якій дотична паралельна хорді AB, що сполучає точки A і B.

Теорема 3 (Теорема Коші). Якщо дві функції $f(x)$ і $\varphi(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a; b]$;

2) диференційовні на інтервалі (a; b);

3) $\varphi'(x) \neq 0$ для $\boldsymbol{x \in (a;b)}$,

то на інтервалі (a; b) знайдеться хоча б одна точка $\boldsymbol{x = \xi(a < \xi < b)}$, така що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

13.3. Зростання та спадання функцій

Нагадаємо, що функція f (x) називається зростаючою на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Також функція спадна на проміжку, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

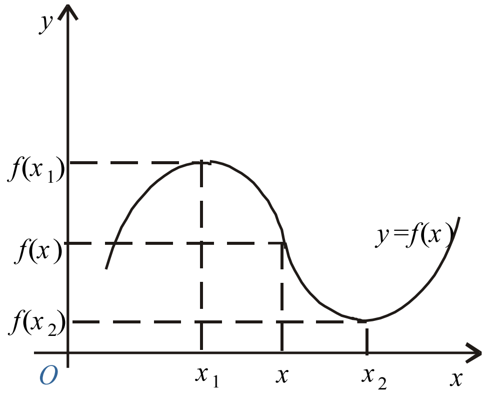
Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції). Якщо диференційовна функція зростає (спадає) на деякому проміжку, то похідна цієї функції невід’ємна (недодатна) на цьому проміжку.

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції). Якщо похідна диференційовної функції додатна (від’ємна) всередині деякого проміжку, то функція зростає (спадає) на цьому проміжку.

13.4. Екстремуми функцій

Означення. При значенні x_1 аргументу x функція $f(x)$ має максимум $f(x_1)$, якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)(x \neq x_1)$.

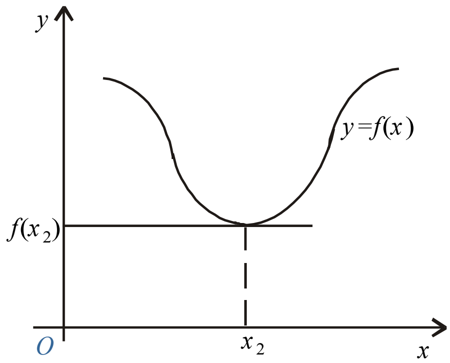
Аналогічно: при значенні x_2 аргументу x функція $f(x)$ має мінімум $f(x_2)$, якщо в деякому околі точки x_2 виконується нерівність $f(x_2) < f(x)(x \neq x_2)$.



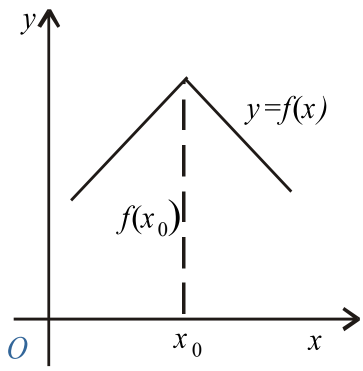
Максимум або мінімум функції називається екстремумом функції, а ті значення аргументу, за яких досягаються екстремуми функції, називаються точками екстремуму функції (відповідно точками максимуму або мінімуму функції). Екстремум функції у загальному випадку має локальний характер — це найбільше або найменше значення функції порівняно з ближніми її значеннями.

Теорема (необхідна умова екстремуму функції). У точці екстремуму диференційовної функції похідна її дорівнює нулю: $f'(x) = 0$.

Геометрична умова означає, що в точці екстремуму диференційовної функції $y = f(x)$ дотична до її графіка паралельна осі Ox:



Наслідок. Неперервна функція може мати екстремум лише в тих точках, де похідна функції дорівнює нулю або не існує.



Справді, якщо в точці x_0 екстремуму функції $f(x)$ існує похідна $f'(x_0)$, то, згідно з даною теоремою, ця похідна дорівнює нулю. Те, що в точці екстремуму неперервної функції похідна може не існувати, показує приклад функції, графік якої має форму «ламаної».

Ті значення аргументу x, які для заданої функції перетворюють на нуль її похідну $f'(x)$ або для якої похідна $f'(x)$ не існує (наприклад, перетворюється на нескінченність), називаються критичними значеннями аргументу (критичними точками).

Із того, що $f'(x_0)=0$, не випливає, що функція $f(x)$ має екстремум при $x=x_0$. Наприклад, нехай $f(x)=x^3$. Тоді $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом цієї функції.

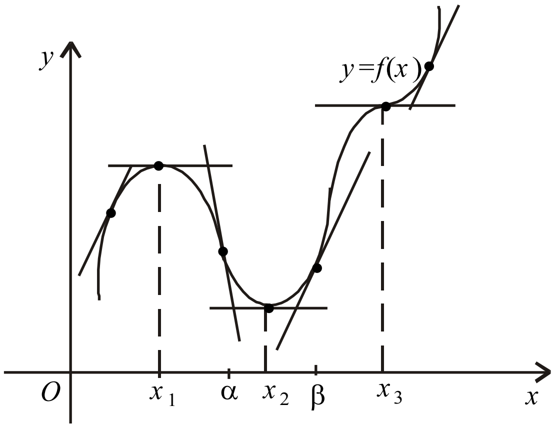
Отже, не для будь-якого критичного значення аргументу функції $f(x)$ має місце екстремум цієї функції. Через це поряд із необхідною умовою існують достатні умови існування екстремуму функції.

Теорема 1 (достатня умова екстремуму функції). Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то функція має у цій точці максимум;
2) змінює знак «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;
3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Геометричну ілюстрацію теореми розглянемо на рисунку. Нехай у точці $x = x_1$ маємо $f'(x_1)=0$ і для всіх x, достатньо близьких до точки x_1, виконуються нерівності

$$\begin{cases} f'(x)>0 \text{ при } x<x_1; \\ f'(x)<0 \text{ при } x>x_1. \end{cases}$$



Тоді при $x < x_1$ дотична до кривої утворює з віссю Ох гострий кут — функція зростає, а при $x > x_1$ дотична утворює з віссю Ох тупий кут — функція спадає; при $x = x_1$ функція переходить від зростання до спадання, тобто має максимум.

Якщо в точці x_2 маємо $f'(x_2) = 0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до точки x_2, виконуються нерівності:

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & x > x_2, \\ f'(x) < 0, & x < x_2, \end{cases}$$

то при $x < x_2$ дотична до кривої утворює з віссю Ох тупий кут — функція спадає, а при $x > x_2$ дотична до кривої утворює гострий кут — функція зростає. При $x = x_2$ функція переходить від спадання до зростання, тобто має мінімум.

Якщо при $x = x_3$ маємо $f'(x_3) = 0$ і для всіх значень x, достатньо близьких до x_3, виконуються нерівності $f'(x) > 0$ при $x < x_3$, $f'(x) > 0$ при $x > x_3$, то функція зростає як при $x < x_3$, так і при $x > x_3$. Звідси при $x = x_3$ функція не має екстремуму.

Зауваження. На основі цієї теореми можна сформулювати таке правило для дослідження неперервної функції $y = f(x)$ на максимум і мінімум.

1. Знаходимо першу похідну функції.
2. Обчислюємо критичні значення аргументу х (критичні точки), для цього:
   - прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені здобутого рівняння $f'(x) = 0$;
   - знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ має розрив.
3. Досліджуємо знак похідної ліворуч і праворуч від кожної критичної точки.
4. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній критичній точці.

Теорема 2 (достатня умова екстремуму функції). Якщо для диференційовної функції $\boldsymbol{f(x)}$ у деякій точці x_0 її перша похідна $\boldsymbol{f'(x)}$ дорівнює нулю, а друга похідна $\boldsymbol{f''(x)}$ існує й відмінна від нуля, тобто $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$, $\boldsymbol{f''(x_0) \neq 0}$, то:

1) якщо друга похідна $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$, то в точці x_0 функція $\boldsymbol{f(x)}$ має мінімум;

2) якщо $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$ — максимум;

3) якщо $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$ — питання залишається відкритим, і для його розв’язання необхідно застосувати перше правило.

Зауваження. Для критичних точок, в яких похідна функції не існує або дорівнює нескінченності, друге правило не застосовують.

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$.

1. Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2. Знаходимо дійсні корені рівняння $x^2-4x+3=0$ ($f'(x)=0$). Звідси $x_1=1,\ x_2=3$.

3. Досліджуємо критичні значення. Для цього область визначення функції $(-\infty,+\infty)$ одержаними критичними точками розбиваємо на три інтервали $(-\infty,1)$, (1, 3), $(3,+\infty)$. Виберемо в кожному інтервалі по одній точці та обчислимо значення похідної в цих точках:

$$x=0\in(-\infty,1),\ y'(0)=3>0;$$

$$x=2\in(1,3),\ y'(2)=2^2-4\cdot2+3=-1<0;$$

$$x=4\in(3,+\infty),\ y'(4)=4^2-4\cdot4+3=11>0.$$

Знак похідної на кожному з трьох інтервалів збігається зі знаком похідної в обраній точці відповідного інтервалу.

x	$(-\infty, 1)$	1	(1, 3)	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	$y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$	↘	$y_{\min}(3)=1$	↗

Із таблиці бачимо, що при переході (зліва направо) через значення $x = 1$ похідна змінює знак з «+» на «–». Звідси при $x = 1$ функція має максимум

$$y_{\max}(1)=\frac{1^3}{3}-2\cdot1^2+3\cdot1+1=\frac{7}{3}.$$

При переході через значення $x = 3$ похідна змінює знак з «–» на «+». Звідси при $x = 3$ функція має мінімум

$$Y_{\min}(3)=\frac{3^3}{3}-2\cdot3^2+3\cdot3+1=1.$$

На інтервалі $(-\infty,1)$ функція зростає; (1, 3) — спадає; 3) $(3,+\infty)$ — зростає.

Другий спосіб. За допомогою другої похідної зробимо дослідження функції $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1$ на екстремум.

Перша похідна цієї функції $y'=x^2-4x+3$ перетворюється на нуль у точках $x = 1$ і $x = 3$ (див. попередній приклад).

Друга похідна $y''=2x-4$:

а) при $x = 1$ $y''(1)=2\cdot1-4=-2<0$, звідси в точці $x = 1$ функція має максимум $y_{\max}(1)=\frac{7}{3}$;

б) при $x = 3$ $y''(3)=2\cdot3-4=2>0$, тобто в точці $x = 3$ функція має мінімум $Y_{\min}(3)=1$.

13.5. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку найбільшого й найменшого значень.

Найбільше значення функції на проміжку $[a;\ b]$ називається абсолютним максимумом, а найменше — абсолютним мінімумом.

Припустимо, що на цьому проміжку функція $f(x)$ має скінченне число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається в середині проміжку $[a;\ b]$, то очевидно, що це значення буде одним із максимумів функції (якщо існує кілька максимумів), точніше — найбільшим максимумом. Однак можливо, що найбільше значення досягатиметься на одному з кінців проміжку.

Таким чином, **функція на відрізку [*a, b*] досягає свого найбільшого значення на одному з кінців цього проміжку або в такій його точці, яка є точкою максимуму**.

Аналогічне твердження можна сформулювати й про найменше значення функції: **воно досягається на одному з кінців даного проміжку або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму**.

Правило. Якщо потрібно знайти найбільше значення неперервної функції на проміжку [*a*, *b*], то необхідно:

1) знайти всі максимуми функції на проміжку;
2) визначити значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;
3) з усіх одержаних значень функції вибрати найбільше: воно й буде найбільшим значенням функції на проміжку.

Аналогічно необхідно діяти і при визначенні найменшого значення функції на проміжку.

Приклад. Визначити на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ найбільше й найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 3$.

1. Знаходимо максимуми й мінімуми функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$:

$y' = 3x^2 - 3, 3x^2 - 3 = 0,\ \ x_1 = 1,\ \ x_2 = -1;$

$y'' = 6x,\ y''(1) = 6 > 0$.

Таким чином, у точці $x = 1$ маємо мінімум $y_{\min}(1) = 1$.

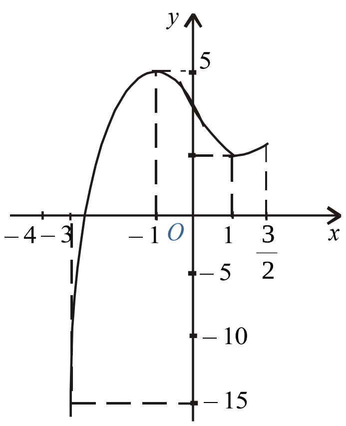
Далі, $y''(-1) = -6 < 0$, тобто в точці $x = -1$ маємо максимум: $y_{\max}(-1) = 5$.

2. Визначаємо значення функції на кінцях проміжку:

$$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{8},\quad y(-3) = -15.$$

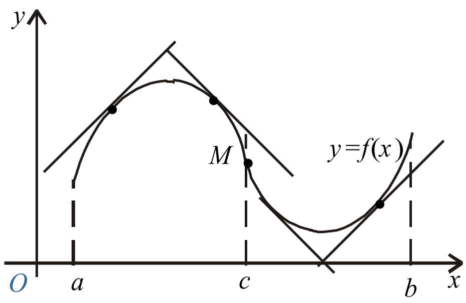
3. Таким чином, найбільшим значенням заданої функції на проміжку $\left[-3,\ \frac{3}{2}\right]$ є $y_{\text{найб}} = y_{\max}(-1) = 5$, а найменшим — $y_{\text{найм}} = y(-3) = -15$.

Графік функції зображено на рисунку:



13.6. Опуклість і вгнутість кривої. Точка перегину

Означення. Крива на проміжку називається опуклою (вгнутою), якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) від будь-якої її дотичної на цьому проміжку.



Із графіка функції $y = f(x)$, який показано на рисунку, бачимо: крива $y = f(x)$ є опуклою на проміжку (a, c) і вгнутою – на проміжку (c, b).

Означення. Точка, що відокремлює опуклу частину кривої від угнутої, називається точкою перегину.

На рисунку графіка функції, наведеної вище, точка M — точка перегину.

Розглянемо дві теореми.

Теорема 1. 1. Якщо в усіх точках проміжку (c, b) для функції $y = f(x)$ друга її похідна додатна $(f''(x) > 0)$, то графік функції вгнутий.

2. Якщо в усіх точках проміжку (a, c) друга похідна від'ємна $(f''(x) < 0)$, то графік функції випуклий.

Теорема 2. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна її $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує й при переході через цю точку змінює свій знак на обернений, то точка $M(x_0, f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Зауваження. Якщо в точці x_0 друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, але при переході через цю точку $f''(x)$ не змінює свого знака, то точка $M(x_0, f(x_0))$ не є точкою перегину.

Приклад. Знайти інтервали опуклості та вгнутості графіка функції $y = e^{-x^2}$.

Маємо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = 4\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)e^{-x^2}$.

Друга похідна y'' перетворюється на нуль, якщо

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0 \text{, звідси } x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

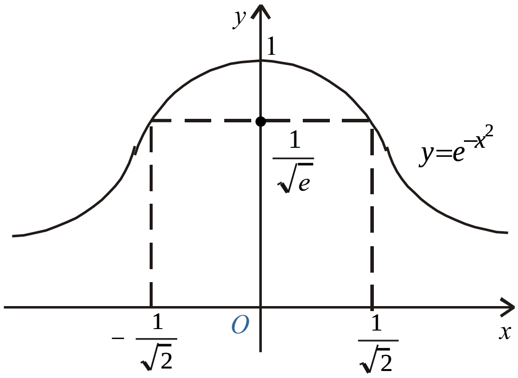
При переході через точки x_1 і x_2 друга похідна змінює знак.

Таким чином, точки $M_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ і $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Результати дослідження заносимо до таблиці.

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	Перегин	$\cap$	Перегин	$\cup$

Із таблиці бачимо, що графік функції на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ вгнутий, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — опуклий.



13.7. Алгоритм дослідження функції та побудови графіка

Під час дослідження функцій необхідно:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Знайти точки розриву функції та їх характер.
4. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції в цих точках.
6. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
7. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
8. Знайти асимптоти.
9. Знайти граничні значення функції, якщо x прямує до граничних точок області визначення.

Графік функції будують за характерними точками й лініями, одержаними в результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу.

Приклад. Дослідити функцію $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x, за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x\to 1\pm 0} y = \lim_{x\to 1\pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1\pm 0}(x-1)^2} = +\infty .$$

Як ліворуч, так і праворуч від точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

3. Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат:

- з віссю Ox: $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0$, $2x-1=0$, $x=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$;
- з віссю Oy: $x = 0$, $y=\frac{-1}{1}=-1$, $(0;\ -1)$.

5. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо до таблиці:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3};\ y' = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ —}$$

критична точка.

При $x=1$ y' не існує, але в цій точці сама функція теж не існує.

Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

при $x=-1$ $y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-)$;

при $x=\frac{1}{2}$ $y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+)$.

x	$(-\infty, 0)$	0	(0, 1)	1	$(1, +\infty)$
y'	–	0	+	Не існує	–
y	↘	$y_{\min}$ (–1)	↗	Не існує	↘

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак із «–» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

6. Точки перегину та інтервали опуклості й угнутості графіка функції визначаємо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4};\ y'' = 0 \Rightarrow 2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує й сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x=-1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$;

при $x=0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=-\frac{8}{9}\approx-0{,}9\;.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2};-\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1<x<+\infty$ $y''>0$, отже, графік функції вгнутий.

Результати дослідження заносимо до таблиці:

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	+	Не існує	+
y	$\cap$	Перегин (– 8/9)	$\cup$	Не існує	$\cup$

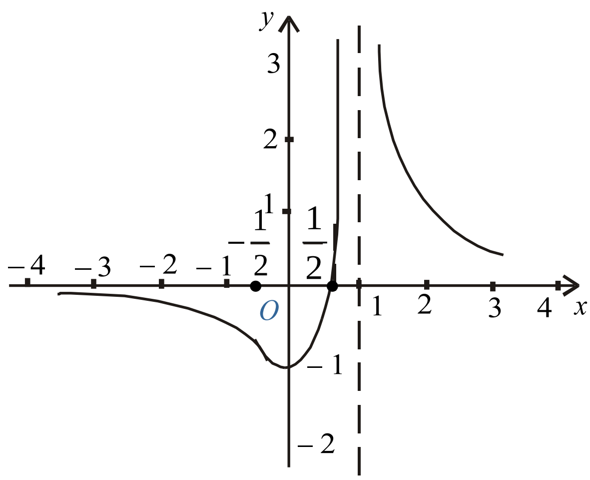
7. Рівняння похилої асимптоти визначаємо у вигляді $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{x(x-1)^2}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-1}{(x-1)^2}=0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На основі результатів дослідження будуємо графік функції.



Контрольні запитання

1. Сформулюйте теореми Ферма, Ролля і Лагранжа. Який геометричний зміст вони мають?
2. Сформулюйте необхідну і достатню умови монотонності функції на інтервалі. Поясніть на прикладах.
3. Що називається екстремумом функції? Сформулюйте необхідну і достатню умови існування екстремуму функції в певній точці.
4. Яка функція на проміжку називається опуклою та вгнутою?
5. При виконанні яких вимог функція буде мати точку перегину на певному інтервалі?

Лекція 14. Невизначений інтеграл та його властивості

План

14.1. Первісна функції та невизначений інтеграл.
14.2. Основні властивості невизначеного інтеграла.
14.3. Таблиця невизначених інтегралів.
14.4. Методи знаходження невизначених інтегралів.

14.1. Первісна функції та невизначений інтеграл

Означення. Функція *F(x)* називається первісною для функції *f(x)* на проміжку *(a;b)*, якщо на цьому проміжку $F'(x)=f(x)$ або $dF(x)=f(x)dx$.

З означення випливає, що первісна $F(x)$ — диференційовна, а отже, неперервна функція на проміжку *(a;b)*, і її вигляд істотно залежить від проміжку, на якому вона розглядається.

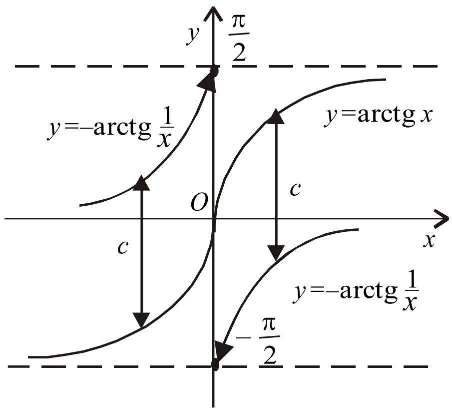
Приклад. Первісні для функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ мають вигляд:

$F_1(x)=\operatorname{arctg}x$, тому що $F_1'(x)=(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad \forall x\in R$;

$F_2(x)=\operatorname{arctg}x+C,$ тому що $F_2'(x)=(\operatorname{arctg}x+C)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\quad \forall x\in R$;

$F_3(x)=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, тому що $F_3'(x)=\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$,

причому $F_1(x)$, $F_2(x)$ — неперервні $\forall x\in R$, а $F_3(x)$ у точці $x=0$ має розрив .



У цьому прикладі первісні $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$ визначені методом добору з подальшою перевіркою з використанням таблиці похідних функцій.

Теорема . Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку *(a; b)*, то:

- $F(x)+C$ також первісна для $f(x)$ на проміжку *(a; b)*;
- будь-яка первісна $\Phi(x)$ для $f(x)$ може бути подана у вигляді $\Phi(x)=F(x)+C$ на проміжку *(a; b)*. (Тут $C = const$ називається довільною сталою.)

Наслідок. Дві будь-які первісні для однієї й тієї самої функції на проміжку *(a; b)* відрізняються між собою на сталу величину.

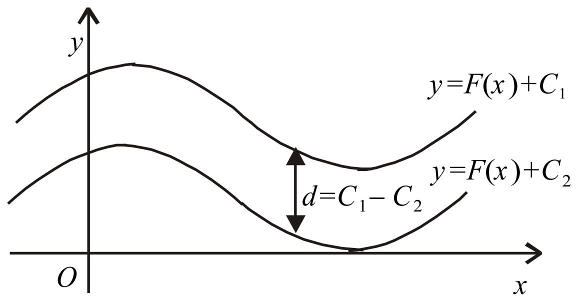
Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається **інтегруванням** функції $f(x)$. Задача інтегрування функції на проміжку полягає в тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку або довести, що функція не має первісних на цьому проміжку. Для розв'язування задачі інтегрування функції достатньо знайти одну будь-яку первісну на розглядуваному проміжку, наприклад $F(x)$, тоді (за теоремою про множину первісних) $F(x) + C$ — загальний вигляд усієї множини первісних на цьому проміжку.

Означення. Функція $F(x) + C$, що являє собою загальний вигляд усієї множини первісних для функції $f(x)$ на проміжку *(a; b)*, називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на проміжку *(a; b)* і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \ (F'(x) = f(x)),$$

де $\int$ — знак невизначеного інтеграла;
$f(x)$ — підінтегральна функція;
$f(x)dx$ — підінтегральний вираз;
dx — диференціал змінної інтегрування.

Геометричний зміст невизначеного інтеграла полягає в тому, що функція $y = F(x) + C$ є рівнянням сім'ї кривих, які утворюються одна з одної паралельним перенесенням уздовж осі ординат.



Теорема (теорема Коші**)**. Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

Зауваження. Отже, є такі невизначені інтеграли від елементарних функцій, які через елементарні функції не виражаються, наприклад,

$$\int e^{-x^2}dx, \ \int \frac{\sin x}{x}, \ \int \frac{dx}{\ln x}, \ \int \cos x^2 dx$$

існують у кожному з проміжків області визначення, але записати їх через основні елементарні функції не можна; в такому розумінні ці інтеграли називають «неінтегровними».

14.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d\int f(x)dx = f(x)\,.$$

3. Сталий множник, що не дорівнює нулю, можна виносити з-під знака інтеграла, тобто:

$$\int k\cdot f(x)dx = k\cdot\int f(x)dx,\;\; k\neq 0\,.$$

4. Невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій, якщо вони існують, тобто

$$\int (f_1(x)+f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

14.3. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0\cdot dx = C$. 2. $\int dx = x + C$. 3. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$.

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. 5. $\int e^{x}dx = e^{x}+C$. 6. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}+C, a\neq 1$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$. 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$. 11. $\int \mathrm{ctg}\, x dx = \ln|\sin x| + C$; 12. $\int \mathrm{tg}\, x dx = -\ln|\cos x| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. 14. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.

17. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C = -\mathrm{arcctg}\, x + C$.

18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C$.

19. $\int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+a\right| + C$.

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, a\neq 0$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$.

14.4. Методи знаходження невизначених інтегралів

14.4.1. Метод безпосереднього інтегрування

При безпосередньому інтегруванні використовують таблицю невизначених інтегралів $\int f(u)du = F(u) + C$; $\varphi(x) = ax + b$, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{2}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$.

Приклад:

$$\int \frac{1\cdot dx}{x^2(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1} = = -\frac{1}{x} - \mathrm{arctg}x + C.$$

14.4.2. Інтегрування розкладанням

Мета методу — розкласти підінтегральну функцію на такі доданки, інтеграли від яких відомі або їх простіше інтегрувати, ніж початкову підінтегральну функцію.

Приклад:

$$\int \frac{1\cdot dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int\frac{dx}{\cos^2 x} = -\mathrm{ctg}x + \mathrm{tg}x + C.$$

14.4.3. Метод підстановки (заміна змінної інтегрування)

Мета методу підстановки — перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема. Якщо $f(x)$ — неперервна функція, а функція $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left|\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt; \\ t = \varphi^{-1}(x)\end{array}\right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Наслідок. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x)=t| = \int f(t)dt.$

Зауваження. Специфіка інтегрування невизначеного інтеграла не залежить від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи сама є функцією (на підставі інваріантності форми запису першого диференціала), тому, наПриклад.

$$\left(\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right) \Rightarrow \left(\int (u(x))^\alpha du(x) = \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\int(\mathrm{tg}x)^\alpha d(\mathrm{tg}x) = \frac{(\mathrm{tg}x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

У такому розумінні необхідно розглядати і всю таблицю інтегралів.

Приклад:

$$\int \sin^5 x\cos x dx = \left|\begin{array}{l}\sin x = t \\ \cos x dx = dt\end{array}\right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

$$\int \sin^5 x\cos x dx = \left|\begin{array}{l}\sin x = t \\ \cos x dx = dt\end{array}\right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6}+C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C\ .$$

Для деяких класів підінтегральних функцій розроблено стандартні заміни, а вибір зручної підстановки визначається знанням стандартних підстановок та досвідом.

14.4.4. Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції *u* (*x*) та *v* (*x*) мають неперервні похідні, то

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

На практиці функції *u* (*x*) та *v* (*x*) рекомендується вибирати за таким **правилом**: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$; при цьому функція *u* (*x*) вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за *dv* беруть залишок підінтегрального виразу, який містить *dx*, інтеграл від якого відомий або може бути просто знайдений.

Приклад:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Інколи доводиться інтегрування частинами застосовувати кілька разів, що ілюструє такий Приклад.

$$\int x^2 e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, du = 2xdx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\int xe^{3x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx; \\ dv = e^{3x}dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right) =$$

$$= e^{3x}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}\right) + C.$$

Далі наведено деякі типи інтегралів, при інтегруванні яких застосовують метод інтегрування частинами, та показано вибір функцій *u* (*x*) та *v* (*x*): $\int \underset{u}{P(x)} \cdot \underset{dv}{\sin(ax)dx}$, $\int \underset{u}{P(x)} \cdot \underset{dv}{\cos(ax)dx}$, $\int \underset{u}{P(x)} \cdot \underset{dv}{e^{ax}dx}$, $\int \underset{u}{\ln(ax)} \cdot \underset{dv}{Q(x)dx}$, $\int \underset{u}{\mathrm{arctg}x} \cdot \underset{dv}{Q(x)dx}$, $\int \underset{u}{\arcsin(ax)} \cdot \underset{dv}{Q(x)dx}$,

де $P(x)$ — многочлен; $Q(x)$ — алгебраїчна функція, $a \in R$.

Звичайно, не потрібно думати, що метод інтегрування частинами обмежується застосуванням лише до інтегралів зазначеного типу. У деяких випадках після інтегрування частинами інтеграла одержують рівняння, з якого визначають шуканий інтеграл.

Приклад.

$$G = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = u,\ du = -\sin x dx; \\ e^x dx = dv \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= e^{x}\cos x - \int -\sin x \cdot e^{x}dx = \begin{vmatrix} \sin x = u, \ du = \cos x dx; \\ e^{x}dx = dv \Rightarrow v = e^{x} \end{vmatrix} =$$
$$= e^{x}\cos x + e^{x}\sin x - \int e^{x}\cos x dx = e^{x}(\cos x + \sin x) - G.$$

Отже, одержуємо рівняння $G = e^{x}(\cos x + \sin x) - G$, з якого визначаємо $G = \int e^{x}\cos x dx = \frac{e^{x}}{2}(\sin x + \cos x) + C$.

Контрольні запитання

1. Що називають первісною функції та невизначеним інтегралом?
2. Які властивості невизначеного інтеграла відомі ?
3. Запишіть первісні основних елементарних функцій.
4. Які методи знаходження невизначених інтегралів існують? Поясніть їх застосування на прикладах.

Лекція 15. Інтегрування різних функцій

План

15.1. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен.

15.2. Інтегрування раціональних функцій.

15.1. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

1. Розглянемо інтегрування інтеграла вигляду $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

Цей інтеграл шляхом виділення повного квадрата у знаменнику можна звести до знаходження інтегралів більш простого вигляду:

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})}$$

Позначимо $k^2 = \left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|$ і $t = x+\frac{b}{2a}$.

Тоді інтеграл набирає вигляду

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm k^2} = \begin{cases} \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right| + C = \frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-k}{x+\frac{b}{2a}+k}\right| + C, D>0; \\ \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} + C = \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{b}{2a}}{k} + C, D<0; \\ -\frac{1}{at} + C = -\frac{1}{a(x+\frac{b}{2a})} + C, D=0. \end{cases}$$

Приклад:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \int \frac{dx}{x^2-4x+4+4} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \int \frac{dx}{2^2+(x-2)^2} = \frac{1}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C.$$

2. Розглянемо інтегрування інтеграла:

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{Ax+B}{a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \pm k^2\right)}dx = \left|k^2 = \left|\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right|, x+\frac{b}{2a} = t\right| =$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{A\left(t-\frac{b}{2a}\right)+B}{t^2\pm k^2}dt=\frac{A}{2a}\int\frac{2tdt}{t^2\pm k^2}+\frac{2aB-A\cdot b}{2a^2}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}=$$
$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(t^2\pm k^2\right)}{t^2\pm k^2}+\frac{2aB-Ab}{2a^2}\cdot I=\frac{A}{2a}\ln\left|x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right|+\frac{2aB-A\cdot b}{2a^2}\cdot I\ .$$

Інтеграл I залежно від знака дискримінанта $D=b^2-4ac$ буде таким:

$$I=\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}=\begin{cases}\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{t-k}{t+k}\right|+C=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-k}{x+\frac{b}{2a}+k}\right|+C, D>0;\\ \frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{t}{k}+C=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{b}{2a}}{k}+C, D<0;\\ -\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}+C, D=0.\end{cases}$$

Приклад:

$$\int\frac{3x-1}{4x^2-4x+17}dx=\int\frac{3x-1}{4\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{(3x-1)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4}=\left|\begin{array}{l}x-\frac{1}{2}=t; dx=dt\\ x=t+\frac{1}{2};\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{3t+\frac{3}{2}-1}{t^2+4}dt=\frac{3}{4}\int\frac{tdt}{t^2+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t^2+4}=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(t^2+4\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{2}+C=$$

$$=\frac{3}{8}\ln\left(\frac{4x^2-4x+17}{4}\right)+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{4}+C.$$

3. Інтеграли вигляду $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можна за допомогою підстановки $t=x+\frac{b}{2a}$ звести до інтеграла вигляду $\int\frac{dt}{\sqrt{a(t^2\pm k^2)}}$.

При цьому для $a > 0$ маємо:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a(t^2 \pm k^2)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left| t + \sqrt{(t^2 \pm k^2)} + C \right| .$$

Якщо $a < 0$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{|a|(k^2 - t^2)}} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \arcsin \frac{t}{k} + C .$$

Приклад.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 3x + 8}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-0.3)^2 + 1.51}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left| (x-0.3) + \sqrt{(x-0.3)^2 + 1.51} \right| + C .$$

4. Розглянемо $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Аналогічно попередньому можна показати:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx = \frac{A}{a} \sqrt{ax^2+bx+c} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

Приклад.

$$\int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{-(x^2-2x+1-6)}} = \int \frac{(8x-11)dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{(8t-3)}{\sqrt{6-t^2}} dt = 4\int \frac{2tdt}{\sqrt{6-t^2}} - 3\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 - t^2}} =$$

$$= -4\int \frac{d\left(6-t^2\right)}{\sqrt{6-t^2}} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C = -8\sqrt{6-t^2} - 3\arcsin\frac{t}{\sqrt{6}} + C =$$

$$= -8\sqrt{5+2x-x^2} - 3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}} + C.$$

5. Розглянемо $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. За допомогою підстановки

$t = \frac{1}{mx+n}$ та $mx+n = \frac{1}{t}$ можна одержати: $x = \frac{1-nt}{mt}$, $mdx = -\frac{1}{t^2}dt$, $dx = -\frac{1}{mt^2}dt$, що дасть можливість звести інтеграл до раніше розглянутих.

6. Розглянемо $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$,

$$\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx = \frac{A}{2a(n-1)} (ax^2+bx+c)^{1-n} + \left(B - \frac{Ab}{2a} \right) \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} .$$

15.2. Інтегрування раціональних функцій

Означення. Відношення двох многочленів $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається раціональним дробом.

Означення. Раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \geq m$, то дріб називається неправильним.

Теорема. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Означення. За домовленістю найпростішими раціональними дробами називаються такі дроби чотирьох типів:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$; III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, де $k \geq 2, k \in N, D = p^2 - 4q < 0$.

Інтеграли від зазначених дробів мають вигляд:

I. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

II. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$.

III. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ — розглянуто в попередньому пункті.

IV. $\displaystyle\int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ — інтегрується за допомогою рекурентних формул.

Теорема. Будь-який правильний раціональний нескоротний дріб $\boldsymbol{\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}}$ $\boldsymbol{(n < m)}$ можна подати у вигляді скінченної кількості найпростіших дробів, використовуючи такі правила:

1. Якщо $\boldsymbol{Q_m(x) = (x-a)^k \cdot g_{m-k}(x)}$, то

$$\frac{P_n(x)}{(x-a)^k g_{m-k}(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-k}(x)}.$$

2. Якщо $\boldsymbol{Q_m(x) = \left(x^2+px+q\right)^k \cdot g_{m-2k}(x),}$ то

$$\frac{P_n(x)}{\left(x^2+px+q\right)^k \cdot g_{m-k}(x)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} + \frac{A_2x+B_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+px+q\right)^k} + \frac{r(x)}{g_{m-2k}(x)},$$

де A_i, B_i, $i = \left(\overline{1, k}\right)$ — деякі коефіцієнти; $\dfrac{r(x)}{g_{m-k}(x)}$ та $\dfrac{r(x)}{g_{m-2k}(x)}$ — правильні раціональні дроби.

Методика інтегрування раціональних функцій:

- якщо підінтегральна функція — неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу;
- знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів;
- інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

Приклад. Знайти $\int \frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2}dx$.

Степінь чисельника менший, ніж степінь знаменника, тому підінтегральна функція є правильним раціональним дробом.

Тоді

$$\frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2}=\frac{x^3+2x^2+8}{x^2(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}.$$

Зводимо до спільного знаменника праву частину і знаменники не розглядаємо:

$$x^3+2x^2+8=A(x-2)(x+2)+Bx(x-2))(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-2).$$

У правій частині розкриємо дужки та згрупуємо за степенями *x:*

$$x^3+2x^2+8=Ax^2-4A+Bx^3-4Bx+Cx^3+2Cx^2+Dx^3-2Dx^2=$$
$$=(B+C+D)x^3+(A+2C-2D)x^2-4Bx-4A.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему:

$$\begin{cases} B+C+D=1; \\ A+2C-2D=2; \\ -4B=0; \\ -4A=8; \end{cases} \quad A=-2;\ B=0;\ \begin{cases} C+D=1; \\ 2C-2D=4; \end{cases} \quad C=\frac{3}{2};\ D=-\frac{1}{2}.$$

Отже, $\frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2}=-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$.

Тоді

$$\int \frac{x^3+2x^2+8}{x^4-4x^2}dx=\int(-\frac{2}{x^2})dx+\int\frac{3dx}{2(x-2)}-\int\frac{dx}{2(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{x^4+2x}{x^3+8}dx$.

Степінь чисельника більший, ніж степінь знаменника, тому підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом.

Тоді поділимо чисельник на знаменник:

$$\frac{x^4+2x}{x^3+8}=x-\frac{6x}{x^3+8}.$$

Далі,

$$\frac{6x}{x^3+8}=\frac{6x}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=$$

$$=\frac{A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)}{x^3+8}\Rightarrow 6x=A\left(x^2-2x+4\right)+(Bx+C)(x+2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x=x^2\left(A+B\right)+x\left(-2A+2B+C\right)+4A+2C\ ;$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A+2B+C=6\ . \\ 4A+2C=0 \end{cases} \quad \text{Звідси: } A=-1,\ B=1,\ C=2.$$

Тоді

$$\int\frac{x^4+2x}{x^3+8}dx=\int(x+\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{x^2-2x+4})dx=\int xdx+\int\frac{dx}{x+2}-\int\frac{x+2}{x^2-2x+4}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{(x+2)dx}{(x-1)^2+3}=\begin{vmatrix} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{t+3}{t^2+3}dt=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\int\frac{tdt}{t^2+3}-3\int\frac{dt}{t^2+3}=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+3\right)-$$

$$-\frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+C=\frac{x^2}{2}+\ln|x+2|-\ln\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

Контрольні запитання

1. Які випадки інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен, можна назвати? Наведіть приклади визначення інтегралів.
2. Які раціональні дроби відносяться до правильних і неправильних? Наведіть приклади.
3. У чому полягає суть методу невизначених коефіцієнтів? Наведіть приклади.

Лекція 16. Інтегрування різних функцій

План

16.1. Інтегрування тригонометричних функцій.
16.2. Інтегрування ірраціональних функцій.

16.1. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція відносно sin x, cos x, тобто над sin x, cos x виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня, наПриклад.

$$R(\sin x, \cos x)=\frac{2\sin^2 x+\cos^3 x}{3\sin^4 x-4\sin x\cos^2 x}.$$

Існують такі підстановки, що з їх допомогою інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t)dt$, інтегрування якої розроблене.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\left|\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2};\\ \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R^*(t)dt.$$

Приклад:

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t, x=2\operatorname{arctg}t,\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}; \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{(1+t^2)2dt}{2t(1+t^2)}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin x, cos x входять $R(\sin x,\cos x)$ у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)$ — непарна відносно sin x, тоді роблять підстановку cos x = t.

Приклад:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C \, .$$

III. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — непарна відносно $\cos x$, раціоналізується за допомогою підстановки $\sin x = t$.

Приклад:

$$\int \cos^3 x \sin^2 x dx =$$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right)t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C \, .$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ — парна відносно *sin x* і *cos x* разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

У цьому разі використовують підстановку $\mathrm{tg} x = t$ або $\mathrm{ctg} x = t$.

Приклад: $$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg} x = t, \quad x = \mathrm{arctg} t, \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2}; \\ \sin^2 x = \dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+t^2\right)^2\left(1+t^2\right)dt}{t^4\left(1+t^2\right)} = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C = \mathrm{tg} x - \frac{1}{3\mathrm{tg}^3 x} - 2\mathrm{ctg} x + C \, .$$

V. Підінтегральна функція $R(\mathrm{tg} x)$ раціоналізується підстановкою $\mathrm{tg} x = t$.

Приклад: $$\int \mathrm{tg}^3 x dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg} x = t \\ x = \mathrm{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^3 dt}{t^2+1} = \left| \begin{array}{l|l} t^3 & t^2+1 \\ \cline{2-2} - & t \\ \underline{t^3+t} & \\ -t & \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + C = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x - \ln\sqrt{\mathrm{tg}^2 x + 1} + C \, .$$

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатися формулами зниження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C.$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу: $\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$, $a \neq b$, потрібно скористатися такими формулами:

$$\sin(ax)\cdot\cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x),$$

$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x).$$

Приклад:

$$\int \cos 2x \cdot \sin 5x \cdot dx = \frac{1}{2}\int(\sin 7x + \sin 3x)dx = -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.$$

16.2. Інтегрування ірраціональних функцій

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ $R\,(x;\ y)$ означає раціональну залежність від змінних x та y.

$$\text{I. } \int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx = \left| \begin{array}{c} ax+b = t^n \\ x = \frac{1}{a}\left(t^n - b\right) \\ dx = \frac{n}{a}t^{n-1}dt \end{array} \right| = \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a} = \int R^*(t)dt.$$

Приклад:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \left| \begin{array}{l} x+1 = t^3 \\ x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^3-1\right)3t^2 dt}{t^2} = 3\int\left(t^3-1\right)dt = \frac{3}{4}t^4 - 3t + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4} - 3\sqrt[3]{x+1} + C.$$

$$\text{II. } \int R\left(x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx = \left|\frac{ax+b}{cx+d} = t^n\right| = \int R^*(t)dt.$$

Приклад:

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1} = t^2,\ x+1 = t^2(x-1), \\ x = \dfrac{t^2+1}{t^2-1};\ dx = \dfrac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2-1\right)^2 t(-4t)dt}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2} =$$

$$= 2\int \frac{t\cdot(-2t)dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} u = t, du = dt; \\ \dfrac{-2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} = dv \Rightarrow v = \dfrac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{2t}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x+1}{x-1}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C\ .$$

III.

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^s,\ s = HCK(n_1, n_2 \ldots, n_k) \right| = \int R^*(t)dt\ .$$

Приклад:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, 12 = HCK(2,3,4) \\ dx = 12t^{11}dt; t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6 \cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int \frac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1} = 12\int\left(t^4\left(t^5+1\right) + \frac{t^4}{t^5-1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right| + C\ .$$

Підінтегральна функція $R_1(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ після виділення повного квадрата і заміни $x + \frac{b}{2a} = t$ раціоналізується тригонометричними підстановками; при цьому залежно від знака дискримінанта квадратного тричлена та знака коефіцієнта a можливі такі випадки:

IV.

$$\int R\left(t, \sqrt{k^2-t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z \\ \text{або} \\ t = k\cos z \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} t = k\sin z, z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), z = \arcsin\dfrac{t}{k}, \\ dt = k\cos z dz; \sqrt{k^2-t^2} = \sqrt{k^2 - k^2\sin^2 z} = \\ \quad = k\sqrt{\cos^2 z} = k|\cos z| = k\cos z \end{array} \right| =$$

$$= \int R(k\sin z, k\cos z)k\cos z dz = \int R^*(\sin z, \cos z)dz .$$

V. $\int R\left(t, \sqrt{t^2 - k^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{k}{\sin z} \\ \text{або} \\ t = \dfrac{k}{\cos z} \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)\,dz$.

VI. $\int R\left(t, \sqrt{k^2 + t^2}\right)dt = \left| \begin{array}{l} t = k\,\mathrm{tg}z \\ \text{або} \\ t = k\,\mathrm{ctg}z \end{array} \right| = \int R^*(\sin z,\ \cos z)\,dz$.

Приклад:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+25}} = \left| \begin{array}{l} x = 5\mathrm{tg}z, \quad z \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right), \quad z \neq 0, \\ dx = \dfrac{5dz}{\cos^2 z}; \quad z = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{5}; \\ \sqrt{x^2+25} = 5\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 z} = \dfrac{5}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{\cos z \cdot 5dz}{5 \cdot 25\mathrm{tg}^2 z \cdot \cos^2 z} =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{\cos z dz}{\sin^2 z} = -\frac{1}{25\sin z} + C = -\frac{1}{25\sin \mathrm{arctg}\dfrac{x}{5}} + C = \frac{\sqrt{x^2+25}}{25x} + C.$$

Зауваження. Інтеграли типу $\int R_1\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можуть бути проінтегровані за допомогою підстановок Ейлера:

VII. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, при $a > 0$;

VIII. $\sqrt{ax^2+bc+c} = tx \pm \sqrt{c}$, при $c > 0$;

IX. $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, при $b^2 - 4ac > 0$,

де x_1, x_2 — корені тричлена ax^2+bx+c .

Приклад:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t-x,\ a=1>0; \\ x+x+1 = t^2-2tx+x^2, \\ x = \dfrac{t^2-1}{2t+1},\ dx = \dfrac{2\left(t^2+t+1\right)dt}{(2t+1)^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{\left(t^2+t+1\right)dt}{(x+t-x)(2t+1)^2} =$$

$$= \left| \frac{t^2+t-1}{t(2t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t+1} + \frac{C}{(2t+1)^2} \Rightarrow t^2+t+1 = A(2t+1)^2 + Bt(2t+1) + C\cdot t \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=1 \\ C=-\dfrac{3}{2} \\ B=-\dfrac{3}{2} \end{array} \right| = 2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|2t+1|^3} + \frac{3}{2(2t+1)} + C,$$

де $t = x+\sqrt{x^2+x+1}$.

Контрольні запитання

1. Які випадки інтегрування тригонометричних функцій можна назвати? Наведіть приклади визначення інтегралів.
2. Які випадки інтегрування ірраціональних функцій можна назвати? Наведіть приклади визначення інтегралів.

Лекція 17. Визначений інтеграл та його властивості

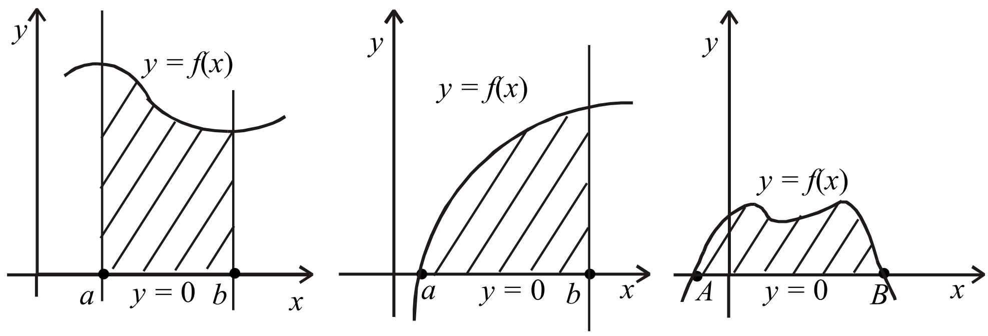
План

17.1. Задачі, які приводять до визначеного інтеграла.
17.2. Поняття визначеного інтеграла.
17.3. Властивості визначеного інтеграла.
17.4. Формула Ньютона – Лейбніца.
17.5. Способи обчислення визначених інтегралів.
17.6. Невласні інтеграли.

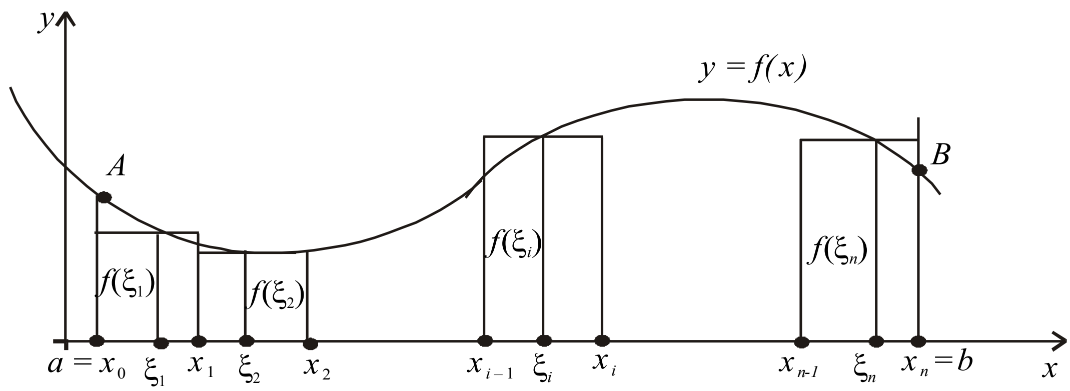
17.1. Задачі, які приводять до визначеного інтеграла

Означення. Криволінійною трапецією називається плоска фігура, обмежена лініями: $y = f(x) \geq 0,\;\; y = 0,\;\; x = a,\;\; x = b.$

На рисунку зображені: класична криволінійна трапеція та її окремі випадки.



Задача. Обчислити площу криволінійної трапеції *aABв*.

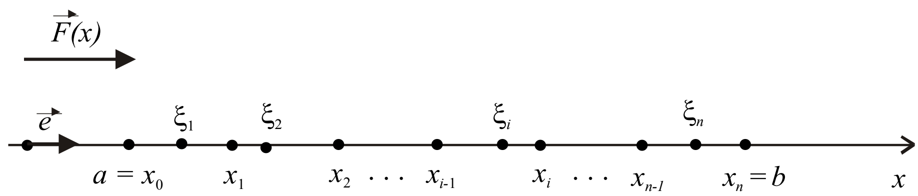


Розіб'ємо проміжок [*a; b*] на *n* частин точками x_i, $i = \left(\overline{0,\, n}\right)$ так, що $a = x_0,\; b = x_n$. Виберемо точки $\xi_i:\; x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Побудуємо прямокутники з основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і висотою $f\left(\xi_i\right)$.

Площа елементарного прямокутника $\Delta S_i = f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i$. Площа ступінчастої фігури $\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right) \cdot \Delta x_i = S_n$ буде тим менше відрізнятися від площі криволінійної трапеції S_{aABb}, чим менша довжина $\max \Delta x_i$, а в граничному випадку ці площі будуть збігатися, тобто $S_{aBAb} = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f \xi_i \cdot \Delta x_i.$

Задача. Обчислити роботу змінної сили $\vec{F} = \vec{e} \cdot f(x),\; |\vec{e}| = 1,$ що виконується при переміщенні матеріальної точки на проміжку $x \in [a;\; b]$.

Розіб'ємо проміжок [*a; b*] на *n* частин точками x_i, $i = \left(\overline{0, n}\right)$. На кожному з відрізків $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ вважатимемо, що сила стала і дорівнює $f(\xi_i),\; x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.



Елементарна робота сили на відрізку Δx_i буде $\Delta A_i = f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$. Робота A сили $\vec{F}$ на відрізку $[a; b]$ визначаємо так: $A = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$.

Означення. Сума вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$ називається інтегральною сумою.

Оперувати поняттям інтегральної суми доводиться в процесі розв'язування різних задач. Взагалі інтегральна сума може залежати від способу розбиття проміжка $[a; b]$ на частини Δx_i, а також від вибору на них точок ξ_i.

17.2. Поняття визначеного інтеграла

Нехай $y = f(x)$ — деяка функція, задана на проміжку $[a; b]$. Розіб'ємо $[a; b]$ на n частин точками x_i так, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Обчислимо $f(\xi_i)$, де $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$, $i = \left(\overline{1, n}\right)$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Складемо інтегральну суму: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Позначимо $\lambda = \max\Delta x_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум S_n при $\lambda \to 0$ і вона не залежить від способу розбиття $[a; b]$ на частини Δx_i і від вибору точок ξ_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx,$$

де $\int\limits_a^b$ — знак визначеного інтеграла;

a, b — нижня та верхня межі інтегрування;
$f(x)$ — підінтегральна функція;
$f(x)\,dx$ — підінтегральний вираз;
dx — диференціал змінної інтегрування.

За означенням, визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ — число, що залежить від типу функції $f(x)$ та проміжку [a; b]; він не залежить від того, якою буквою позначена змінна інтегрування: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$

Означення. Функція, для якої на [a; b] існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, називається інтегровною на цьому проміжку.

Геометричний зміст визначеного інтеграла: *якщо* $f(x) \geq 0,\ x \in [a;\ b]$, *то* $\int_a^b f(x)dx$ *дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.*

17.3. Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x) = c = \text{const}$, то $\int_a^b cdx = c \cdot (b-a).$

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на [a; b], то

$$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому з проміжків: [a; b], [a; c], [c; b], то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

VII. Якщо $f(x) \geq 0$ і інтегровна для $x \in [a,\ b],\ b > a,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ — інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a,\ b],\ b > a,$ то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

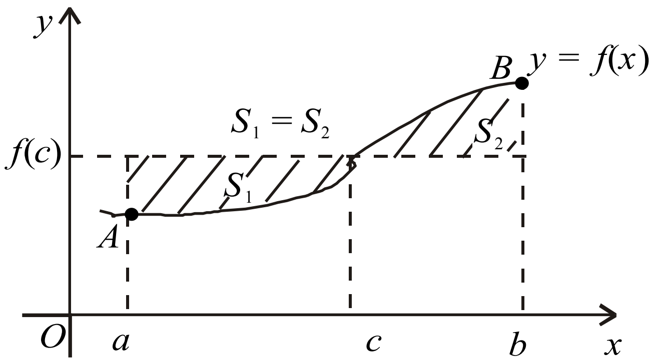
IX. Якщо $f(x)$ — інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,\ b],\ b > a,$ то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

X. **Теорема.** Якщо функція $f(x)$ неперервна для $x \in [a,\ b],\ \ b > a,$ то знайдеться така точка $x = c \in [a,\ b],$ що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)\ .$$

Геометричний зміст теореми про середнє полягає в тому, що існує прямокутник зі сторонами $f(c), c \in [a,\ b]$ та *b* – *a*, який рівновеликий криволінійній трапеції *aABв* за умови, що функція $f(x) \ge 0$ та неперервна на проміжку [*a*; *b*] .



17.4. Формула Ньютона — Лейбніца

Теорема (Ньютона — Лейбніца). Якщо функція *f(x)* — неперервна для $x \in [a;\ b],$ то визначений інтеграл від функції *f(x)* на проміжку $[a;\ b]$ дорівнює приросту первісної функції *f(x)* на цьому проміжку, тобто

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Позначимо дію подвійної підстановки так: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, тоді зв’язок між визначеним та невизначеним інтегралами можна подати такою рівністю:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = (F(x)+C)\Big|_a^b = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b .$$

Наслідок. Для обчислення визначеного інтеграла достатньо знайти одну з первісних підінтегральних функцій і виконати над нею подвійну підстановку.

Приклад. $\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 e^x dx=\int_0^{\ln 2}\left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right)=\frac{1}{5}\left(e^x-1\right)^5\Big|_0^{\ln 2}=$

$$=\frac{1}{5}\left(\left(e^{\ln 2}-1\right)^5-\left(e^0-1\right)^5\right)=\frac{1}{5}\left((2-1)^5-(1-1)^5\right)=\frac{1}{5}.$$

17.5. Способи обчислення визначених інтегралів

Теорема (метод підстановки). Якщо:

1) $f(x)$ — неперервна для $x\in[a;\ b]$;

2) $\varphi(\alpha)=a,\quad \varphi(\beta)=b;$

3) $x=\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ — неперервні для $t\in[\alpha;\ \beta];$

4) при $t\in[\alpha;\ \beta]\Rightarrow x\in[a;\ b],$ то

$$\int_a^b f(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array}\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому немає потреби повертатися до початкової змінної.

Приклад. $\int_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{array}{c} x=t^2,\ \ dx=2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}\end{array}\right|=\int_2^3\frac{2tdt}{t+1}=2\int_2^3\frac{t+1-1}{t+1}dt=$

$$=2\int_2^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\ln|t+1|)\Big|_2^3=2(3-\ln 4-(2-\ln 3))=2\left(1+\ln\frac{3}{4}\right).$$

Теорема (інтегрування частинами). Якщо функції *u (x)* та *v (x)* мають неперервні похідні для $x\in[a;\ b]$, то

$$\int_a^b udv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Приклад.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos 2xdx=\left|\begin{array}{l} u=x,\quad du=dx; \\ \cos 2xdx=dv, \\ v=\frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|=\left(\frac{x}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\sin\pi+\frac{1}{2}\cos\pi\right)-\left(0\cdot\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}.$$

17.6. Невласні інтеграли

Нехай $f(x)$ інтегровна для будь-якого скінченного $b \in [a;+\infty)$ так, що $\int\limits_a^b f(x)dx$ існує.

Означення. Границя $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ називається невласним інтегралом від функції $f(x)$ на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ і позначається так: $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Якщо ця границя існує та скінченна, то невласний інтеграл називається ***збіжним,*** а якщо не існує (зокрема, нескінченна), то – ***розбіжним.***

Якщо $f(x)$ — інтегровна для скінченних a та b, тобто $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, формули для обчислення невласних інтегралів на нескінченному проміжку мають вигляд:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b) - F(a)),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}(F(b) - F(a)),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

де $c = \text{const}$.

Приклад. Дослідити на збіжність інтеграл Діріхле $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$.

Для розв’язування задачі розглянемо такі три випадки:

I. $p = 1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln|x|)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty,$ то інтеграл розбіжний.

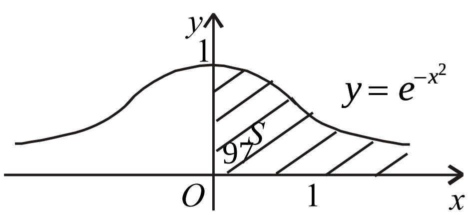
II. $p < 1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_1^b = \frac{1}{1-p}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(b^{1-p} - 1\right) = +\infty$, то інтеграл розбіжний.

III. $p > 1$. $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{\frac{1}{p-1}} - 1\right) =$

$= \frac{1}{1-p}(0 - 1) = \frac{1}{p-1}$, то інтеграл збіжний.

Отже, інтеграл Діріхле збіжний при $p > 1$ та розбіжний при $p \le 1$.

Крім безпосереднього обчислення невласних інтегралів під час дослідження їх на збіжність, існують й інші методи. Одним із таких методів можна встановити збіжність інтеграла Пуассона.



Особливість інтеграла Пуассона $S=\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ полягає в тому, що первісна для підінтегральної функції $f(x)=e^{-x^2}$ не виражається через елементарні функції.

У деяких випадках достатньо встановити лише збіжність чи розбіжність розглядуваного інтеграла, при цьому можна скористатися методом порівняння, що базується на такій теоремі.

Теорема. Якщо при $x\geq a$ виконується нерівність $0\leq f(x)\leq g(x)$, то зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ або з розбіжності $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Зазвичай для порівняння вибирається інтеграл, збіжність якого відома, наприклад інтеграл Діріхле.

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Тоді $0\leq f(x)=\frac{\sin^2 x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}=g(x),\ \ x\in[1;\ +\infty)$.

$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ — збіжний, як інтеграл Діріхле із p = 2 > 1, тому буде збіжним і $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

Розглянемо обчислення невласних інтегралів від розривних (необмежених) функцій. Нехай *f (x)* неперервна на проміжку $(a;\ b]$ та при $x = a$ має розрив 2-го роду.

Означення. $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=\int\limits_a^b f(x)dx$ називається невласним інтегралом від розривної (необмеженої) функції $f(x)$.

Якщо ця границя існує, то інтеграл називається ***збіжним,*** а якщо не існує, то – ***розбіжним.***

Для обчислення невласних інтегралів використовують такі формули:

$x=a$ — точка розриву *f (x),*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(F(b)-F(a+\varepsilon)\right);$$

$x=b$ — точка розриву *f (x),*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}(F(b-\varepsilon)-F(a)).$$

III. $x=c\in(a;\ b)$ — точка розриву *f (x),*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Зауваження. До невласних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для $[a;\ b]$, не можна застосовувати формулу Ньютона — Лейбніца.

Приклад. Обчислити $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$.

Маємо: $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow x=0\in[-1;\ 1]$ – точка розриву 2-го роду функції $f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ — невласний.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty\Rightarrow$$ інтеграл розбіжний.

Контрольні запитання

1. Що називається криволінійною трапецією?
2. Що називається визначеним інтегралом? У чому полягає його геометричний зміст?
3. Які властивості визначеного інтеграла відомі ?
4. Запишіть формулу Ньютона – Лейбніца, поясніть її складові.
5. Що називається невласним інтегралом? Поясніть методи їх обчислення. Наведіть приклади.

Лекція 18. Застосування визначеного інтеграла

План

18.1. Обчислення площ плоских фігур.
18.2. Обчислення об'ємів геометричних тіл.
18.3. Довжина дуги кривої.
18.4. Площа поверхні тіла обертання.

18.1. Обчислення площ плоских фігур

Якою б не була криволінійна фігура, обчислення площі фігури можна звести до обчислення площ розглянутих нижче фігур.

I. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 1). Функція $f(x)$ – неперервна та $f(x) \ge 0.$ Площа S такої криволінійної трапеції за геометричним змістом визначеного інтеграла така:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо при виконанні всіх інших умов $f(x) \le 0$ (рис. 2), то $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$

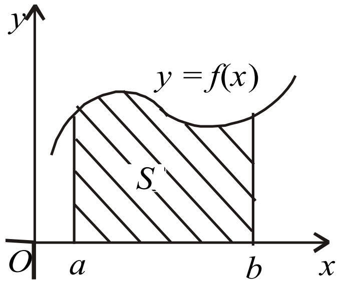


Рисунок 1

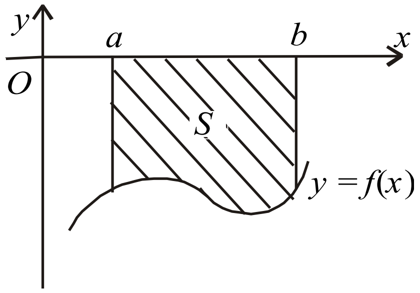


Рисунок 2

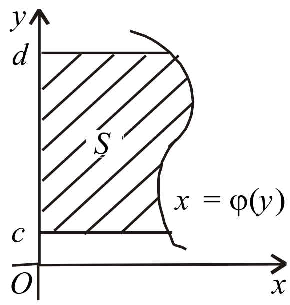


Рисунок 3

II. Фігура обмежена лініями $x = \varphi(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ (рис. 3). Функція $x = \varphi(y)$ — неперервна та $\varphi(y) \ge 0.$ Площа S такої фігури буде

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy,$$

а якщо $\varphi(y) \le 0$ (рис. 4), то:

$$S = \left| \int_c^d \varphi(y)\, dy \right|.$$

III. Фігура обмежена лініями $y = f(x)$, $y = g(x), x = a, x = b.$ Функції $f(x)$ та $g(x)$ — неперервні та $f(x) \ge g(x)$ для $x \in [a;\, b]$ (рис. 5). Площа S такої фігури визначається як різниця площ фігур aA_2B_1b та aA_2B_1b:

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$$

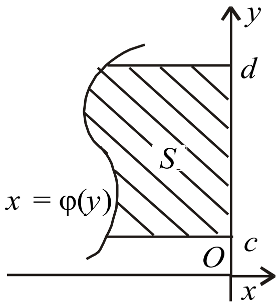


Рисунок 4

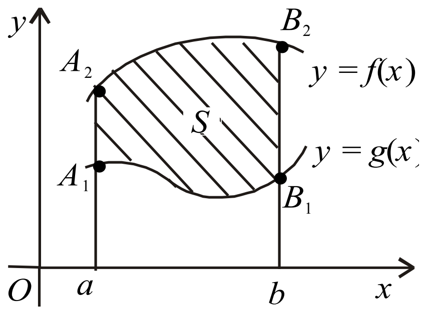
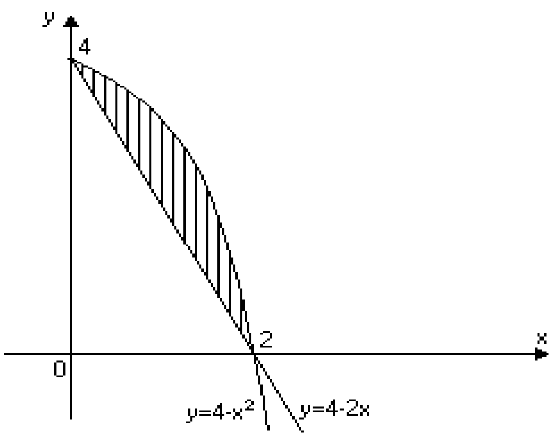


Рисунок 5

Приклад. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 4 - 2x$.

Побудуємо фігуру, як показано на рисунку. Для цього знайдемо точки перетину ліній. Розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 - 2x, \end{cases} \Rightarrow 4 - x^2 = 4 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0, \; x_1 = 0, x_2 = 2 \cdot$$



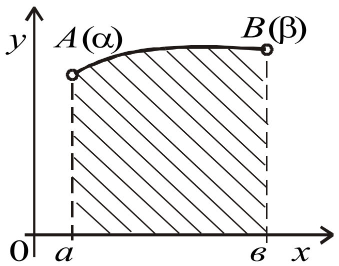
Площа фігури дорівнює різниці площ двох криволінійних трапецій, площі яких можна обчислити. Одержимо

$$S = S_2 - S_1 = \int_0^2 \left(4 - x^2\right) dx - \int_0^2 \left(4 - 2x\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(4 - x^2 - 4 + 2x\right) dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{4}{3}\left(\text{кв.од.}\right)$$

Якщо крива задана рівняннями в **параметричній** формі:



$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta \qquad \begin{matrix} \varphi(\alpha) = a, \\ \varphi(\beta) = b, \end{matrix}$$

то площа криволінійної фігури обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt\,.$$

Дійсно, нехай рівняння визначають деяку $y = f\ (x)$ на відрізку $[a;\ b]$ і отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx,$$

або

$$\int_a^b y(x)dx=\left|\begin{array}{c} x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b\\ \hline t & \alpha & \beta\end{array}\\ y(x)=y(\varphi(t))=\\ =f(\varphi(t))=\\ =\psi(t)\end{array}\right|=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Приклад. Обчислити площу фігури, що обмежена віссю *OX* і однієї аркою циклоїди $x = 5(t - sint), y = 5(1 - cost)$.

Проводимо обчислення за відповідною формулою:

$$S=\int_0^{2\pi} 5(1-\cos t)5(1-\cos t)dt=25\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=$$

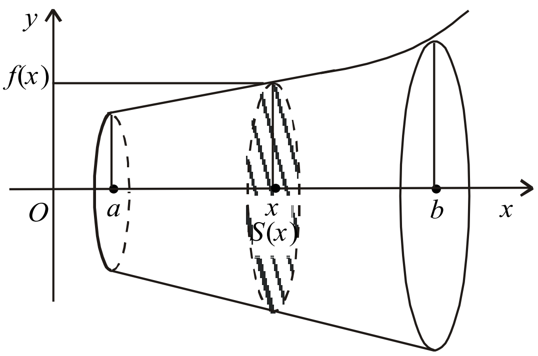
$$=25\left(\int_0^{2\pi} dt-2\int_0^{2\pi}\cos tdt+\int_0^{2\pi}\cos^2 tdt\right)=25(2\pi-0+\pi)=25\cdot 3\pi=75\pi\,(кв.од.).$$

Якщо фігура обмежена лінією в **полярних** координатах $\rho=\rho(\varphi),\ \alpha\le\varphi\le\beta$, де $\rho(\varphi)$ – неперервна і невід'ємна функція на $[a,b]$ ($0\le\alpha\le\beta\le 2\pi$). Тоді площу фігури можна обчислити за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

18.2. Обчислення об'ємів геометричних тіл

Визначимо об'єм тіла *V*, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y=f(x)\ge 0, y=0, x=a, x=b$.



Установлюємо, що площа поперечного перерізу *S (x)* в даному разі є площа кола радіусом $y=f(x)$, тобто $S(x)=\pi\cdot(f(x))^2$, а об'єм тіла обертання за формулою буде таким:

$$V = \int_a^b S(x)dx = \pi \int_a^b \left(f(x) \right)^2 dx .$$

Аналогічно, об’єм тіла *V*, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = \varphi(y) \geq 0$, $y = c, y = d$ матиме вигляд

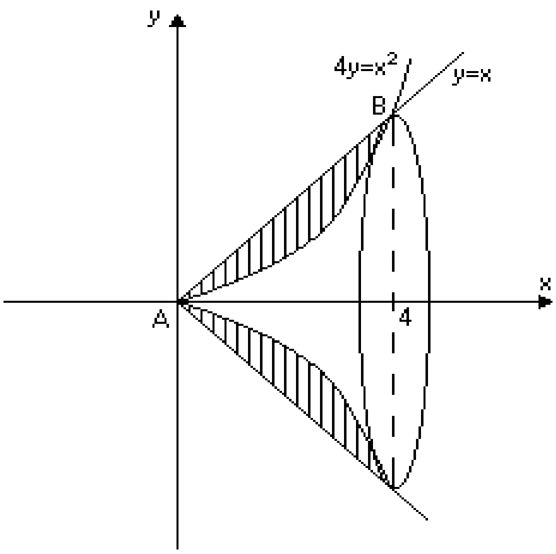
$$V = \pi \int_c^d (\varphi(y))^2 dy$$

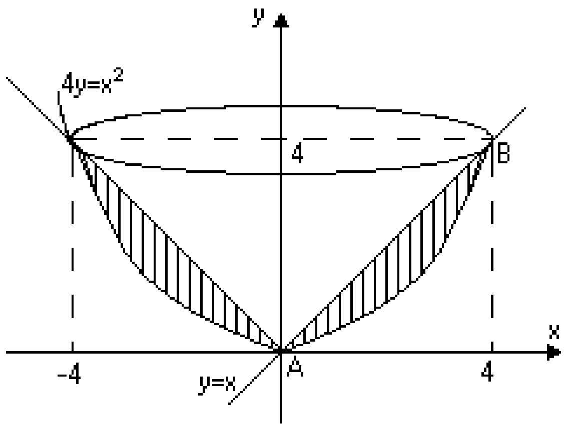
Приклад. Обчислити об’єми тіл обертання навколо осей Ox та Oy фігури, обмеженої лініями $4y = x^2$ та $y = x$.

Обчислимо об’єми тіл, утворюваних під час обертання фігури навколо осей. Знайдемо точки перетину ліній:

$$\begin{cases} 4y = x^2, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0,\ x(x-4) = 0, \begin{matrix} x_1 = 0, & x_2 = 4 \\ y_1 = 0, & y_2 = 4. \end{matrix}$$

Одержали дві точки з координатами $A(0;0)$ та $B(4;4)$. Зобразимо ці тіла схематично, як показано на рисунках:





1. Об’єм тіла обертання навколо осі Ox дорівнює різниці двох об’ємів тіл:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 x^2 dx - \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 dx = \pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^4 - \frac{\pi}{16} \int_0^4 x^4 dx =$$

$$= \frac{\pi}{3} x^3 \Big|_0^4 - \frac{\pi}{16} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^4 = \frac{\pi}{3} \cdot 64 - \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4^5}{5} = \frac{64\pi}{3} - \frac{64\pi}{5} =$$

$$= \frac{64\pi(5-3)}{15} = \frac{128}{15}\pi \text{ (куб.од.)}$$

2. Аналогічно обчислюємо об’єм тіла обертання навколо осі Oy:

$$V = V_1 - V_2 = -\pi\int_0^4 y^2 dy + \pi\int_0^4 4y\,dy = -\pi\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^4 + 4\pi\cdot\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 =$$

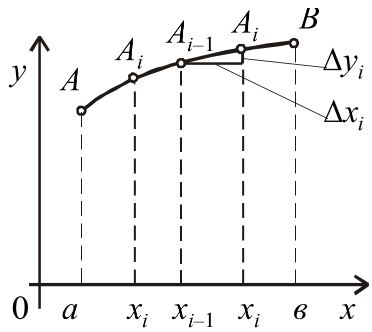
$$= 2\pi y^2\Big|_0^4 - \frac{\pi}{3}y^3\Big|_0^4 = 2\pi\cdot 16 - \frac{\pi}{3}\cdot 16 = \frac{6\pi\cdot 16 - 16\pi}{3} =$$

$$= \frac{16\pi(6-1)}{3} = \frac{80}{3}\pi\left(\text{куб.од.}\right)$$

18.3. Довжина дуги кривої

Нехай у прямокутних координатах на площині задана крива рівнянням $y = f(x)$, де $f(x)$, і $f'(x)$ — неперервні на відрізку $[a; b]$ функції.

Знайдемо довжину дуги AB цієї кривої, замкненої між вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$.



Уведемо позначення $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$. Тоді

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\,\Delta x_i\,.$$

Далі за теоремою Лагранжа визначаємо

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)\,, \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i\,.$$

Отже,

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i\,.$$

Таким чином, довжина вписаної ламаної дорівнює

$$l_n = \sum_{i-1}^{n}\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i\,.$$

За умовою, $f'(x)$ — неперервна, тому функція $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ теж неперервна. Отже, існує границя написаної інтегральної суми, що дорівнює визначеному інтегралу:

$$l = \lim_{\max\Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,dx\,.$$

Якщо крива задана рівняннями в **параметричній** формі:

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, $\begin{matrix} \varphi(\alpha) = a, \\ \varphi(\beta) = b, \end{matrix}$ де φ *(t),* ψ *(t)* — неперервні функції з неперервними похідними, причому φ *(t)* $\neq 0$, $t \in [\alpha; \beta]$. У цьому разі визначають деяку функцію $y = f$ (t) — неперервну і мають неперервну похідну

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Нехай $a = \varphi$ (α), $b = \varphi$ (β). Тоді зробивши в інтегралі підстановку $x = \varphi$ *(t),* $dx = \varphi'$ *(t)dx*, одержимо

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \cdot \varphi'(t)dt,$$

або $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\psi'(t)]^2 + [\varphi'(t)]^2}\, dt$.

Приклад. Обчислити довжину дуги астроїди

$$x = 5\cos^3 t, \quad y = 5\sin^3 t.$$

Крива симетрична відносно обох координатних осей, тому обчислюємо спочатку довжину її четвертої частини, розміщеної в першій чверті. Знаходимо

$$x'_t = -15\cos^2 t \sin t, \qquad y'_t = 15\sin^2 t \cos t.$$

Параметр t буде змінюватися від 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Отже, $\dfrac{1}{4}l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{225\cos^4 t \sin^2 t + 225\sin^4 + \cos^2 t}\, dt = 15\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t}\, dt =$

$$= 15\int_0^{\pi/2} \sin t \cos dt = 15\int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = 15\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{15}{2} \text{ (од.)},$$

$l = 30$ (од.).

Зауваження. Якщо задана крива параметричними рівняннями в просторі:

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ то довжина дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt.$$

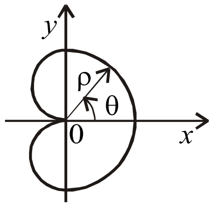
Якщо фігура обмежена лінією у **полярних** координатах $\rho = \rho(\varphi)$, де ρ – полярний радіус, φ – полярний кут, то довжина дуги дорівнює

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi .$$

Приклад. Знайти довжину кардіоди $\rho = a(1 + \cos\Theta)$.

Змінюючи полярний кут θ від 0 до π, одержимо половину шуканої довжини:

$$\rho' = -a\sin\theta .$$

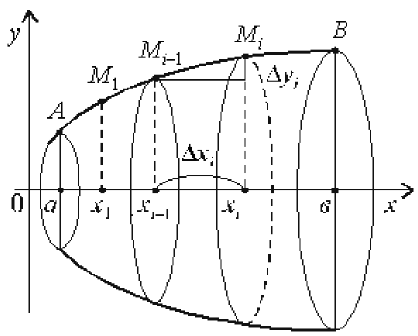


$$l = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\, d\theta =$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\bigg|_0^{\pi} = 8a .$$

18.4. Площа поверхні тіла обертання

Нехай задана поверхня, утворена обертанням кривої $y = f(x)$ навколо осі OX. Визначимо площу цієї поверхні на проміжку $a \le x \le b$.



Проведемо хорди AM_1, M_1M_2, …, $M_{n\text{-}1}B$, довжини яких позначимо Δl_1, l_2, …, Δl_n.

Кожна хорда довжини $\Delta l_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ під час обертання описує зрізаний конус, площа поверхні якого ΔS_i дорівнює

$$\Delta S_i = 2\pi\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\Delta S_i ,$$

але $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)}\Delta x_i$.

Застосувавши теорему Лагранжа, одержимо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i) , \quad x_{i-1} < \xi_i < x_i .$$

Отже, $\Delta l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$, $\Delta S_i = 2\pi\dfrac{y_{i-1} + y_i}{2}\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$.

Площа поверхні, описана ламаною, буде дорівнювати

$$S_n = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \,,$$

або $S_n = \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \,.$

Тоді $S_{\text{поверхні}} = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2 f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)} \Delta x_i \,,$

або $S_{\text{поверхні}} = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \,.$

Приклад. Визначити площу поверхні параболоїда, утвореного обертанням навколо осі *Ox* дуги параболи $y^2 = 2px,\ 0 \le x \le a.$

Маємо $$f(x) = \sqrt{2px}, \quad f'(x) = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}\,.$$

Тоді

$$P = 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x + p}{2x}} dx = 2\pi\sqrt{p} \int\limits_0^a \sqrt{2x + p}\, dx = 2\pi\sqrt{p} \cdot \frac{2}{3}(2x + p)^{3/2} \cdot \frac{1}{2}\Bigg|_0^a = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left[(2a + p)^{3/2} - p^{3/2}\right].$$

Контрольні запитання

1. Які стандартні випадки обчислення площ плоских фігур у декартових координатах можна навести?
2. Як обчислити площу плоскої фігури в полярних координатах і, якщо фігура обмежена лінією, заданою параметрично?
3. Запишіть формулу для обчислення об'єму тіла обертання. Поясніть її складові.
4. Запишіть формули обчислення довжини дуги кривої для різних способів задання лінії. Наведіть приклади.
5. Які визначити площу поверхні тіла обертання?

Лекція 19. Функція багатьох змінних

План

19.1. Множина точок на площині та в n-вимірному просторі.
19.2. Означення функції багатьох змінних та способи її задання.
19.3. Границя функції двох змінних.
19.4. Неперервність функції двох змінних.

19.1 Множина точок на площині та в n-вимірному просторі

Упорядкованій парі чисел $(x_0; y_0)$ на координатній площині відповідає одна точка $P_0(x_0; y_0)$. Аналогічно, в n-вимірному просторі n упорядкованим дійсним числам відповідає одна точка $P_0(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_n^0)$, де числа $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$ будуть координатами цієї точки.

Для скорочення запису далі розглядатимемо множини точок на площині, але подані далі означення можна вважати правильними і в разі n-вимірного простору.

Означення. Множина точок називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити ламаною лінією так, щоб усі точки лінії належали цій множині.

На рисунку 1 *а*) множина буде зв'язною, а на рисунку 1 *б*) — незв'язною.

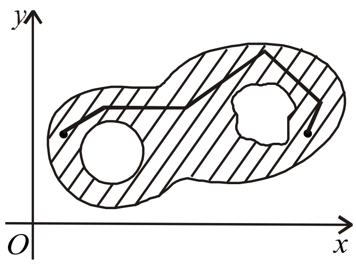


Рисунок 1 *а*)

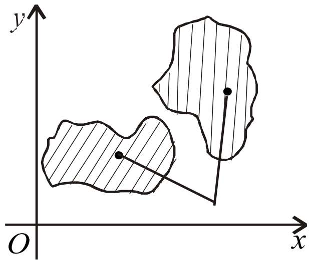
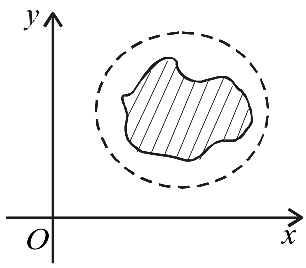


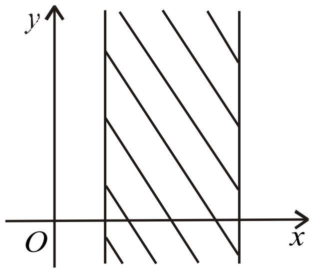
Рисунок 1 *б*)

Означення. Множина точок називається *обмеженою*, якщо всі її точки належать множині точок кола скінченного радіуса.

На рисунку 1 *а*) маємо обмежену множину, а на рисунку 1 *б*) — необмежену.



а)



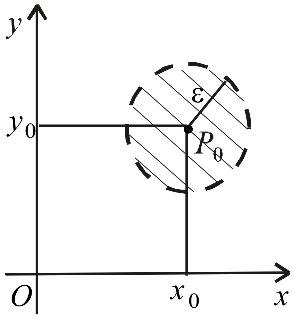
б)

Означення. Множина точок, координати яких задовольняють нерівність

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 < \delta^2,$$

називається δ-*околом точки* $P_0(x_1^0;\ x_2^0; \ldots; x_n^0)$.

У разі двовимірного простору записану нерівність можна подати у вигляді



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2.$$

Вона визначає внутрішність кола з радіусом $R = \varepsilon$ та центром у точці $P_0(x_0; y_0)$.

Якщо із δ-околу точки P_0 вилучимо саму точку P_0, одержимо *виколотий δ-окіл* точки P_0.

Означення. Точка називається *внутрішньою* для множини точок, якщо вона належить цій множині разом із деяким своїм δ-околом, і *зовнішньою*, якщо існує її окіл із точок, жодна з яких не належить цій множині.

Означення. Зв'язна множина, що складається лише з внутрішніх точок, називається *відкритою областю* (або просто *областю*).

Область позначатимемо:

$$D=\{(x;\ y)\in R^2 \mid \quad \varphi(x;\ y)\le \text{const}\}.$$

(Читаємо: область D є множина точок площини з координатами (x; y), таких що $\varphi(x;\ y)\le \text{const}.$).

Означення. Точка називається *межовою* для області, якщо в будь-якому її δ-околі існують точки, що не належать області і належать їй.

Означення. Множина межових точок називається *межею області*.

Означення. Область, об'єднана зі своєю межею, називається *замкненою областю*.

Означення. Множина називається *опуклою*, якщо будь-які точки множини можна з'єднати відрізком, що буде належати цій множині.

19.2. Означення функції багатьох змінних та способи її задання

Означення. Якщо кожній точці $P(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ множини D n-вимірного простору поставлено у відповідність за деяким законом одне й лише одне дійсне число $z \in E \subset R$, то говорять, що в області $D \subset R^n$ задано функцію n незалежних змінних $z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$. При цьому D називають *областю визначення функції*; E — *областю значень функції*.

Згідно з означенням функцію $z = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z = f(P)$.

Зокрема, при n = 2 говорять, що задана функція двох змінних $z = f(x; y)$, якщо кожній парі $(x; y) \in D$ на площині поставлено у відповідність лише одне число z.

Способи задання функції:

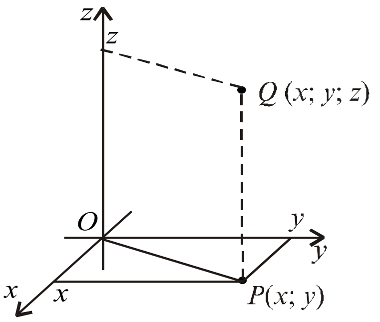
– аналітично – у вигляді формули, наприклад: $z = x(y^2 + 2x)$;

– таблично – у вигляді таблиці, наприклад:

x \ y	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

таблицею задана функція $z = xy$;

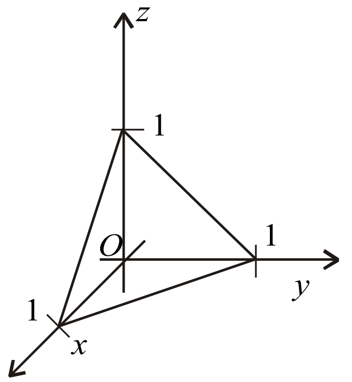
– графічно – для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат *Oxyz* у тривимірному просторі.

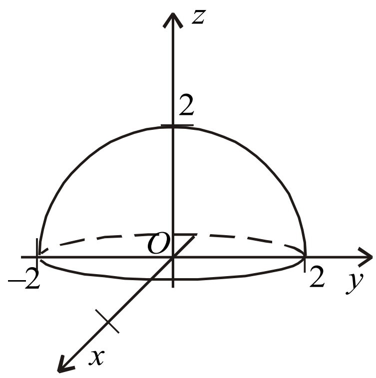


Кожній парі чисел x та y відповідає точка *P(x;y)* площини *Oxy*. У точці $P(x;y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини *Oxy*, та позначаємо на ній відповідне значення функції z; одержуємо в просторі точку Q з координатами $(x;y;z)$, що позначається символом $Q(x;y;z)$. Точки Q, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню в просторі. Така поверхня є *графічним зображенням функції* $z = f(x;y)$.

Зауваження. На практиці побудувати графік функції важко, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Приклад. Графічним зображенням функції $z = 1 - x - y$ є площина, що проходить через точки (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0). Графічним зображенням функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ є півкуля.





Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних — зображення за допомогою *ліній рівня*.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x;y)$ набуває однакових значень.

Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x;y) = C$. Накресливши кілька ліній рівня та зазначивши, яких значень набуває на них функція, дістанемо наближене уявлення про зміну функції. Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф даної місцевості.

19.3. Границя функції двох змінних

Означення. Число B називається *границею функції* $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$ таке, що при виконанні нерівності $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ виконується нерівність $\left|f(x;y) - B\right| < \varepsilon$ і позначається $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y) = B$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y) = B$.

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Наведемо формулювання відповідних теорем.

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x;\ y)$ має границю при $(x;\ y) \to (x_0;\ y_0)$, то вона єдина.

Теорема 2. Якщо функція $z = f(x;\ y)$ має границю при $(x;\ y) \to (x_0;\ y_0)$, то вона обмежена в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$.

Теорема 3. Якщо $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) = b$, $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y) = c$,
і в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$ виконується нерівність $f(x;\ y) \le g(x;\ y)$, то $b \le c$.

Теорема 4. Нехай $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) = b$, $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} g(x;\ y) = c$.

Тоді:

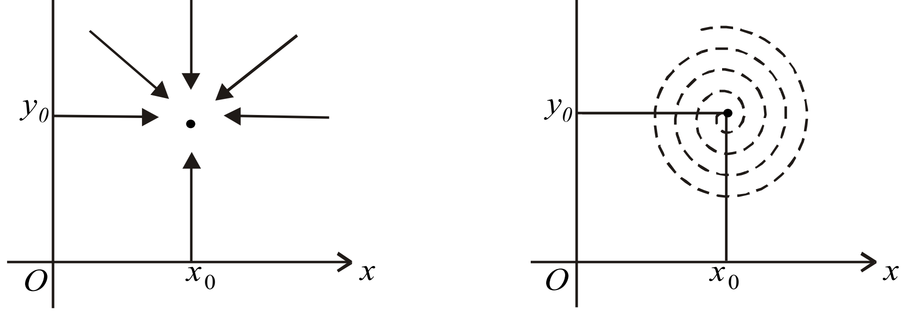
1) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} (f(x;\ y) + g(x;\ y)) = b + c$; 2) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} f(x;\ y) \cdot g(x;\ y) = b \cdot c$;

3) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \dfrac{f(x;\ y)}{g(x;\ y)} = \dfrac{b}{c} \quad (c \ne 0)$.

Зауваження. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але є й принципова відмінність, яка робить поняття границі функції кількох змінних істотно більш обмеженим, ніж поняття границі функції однієї змінної.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ($f(x)$ — функція однієї змінної), то це означає, що і лівостороння, і правостороння границі дорівнюють b. Правильним є й зворотне: з існування та збігу двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x;y)$ наближатися до точки $(x_0;\ y_0)$ можна нескінченною множиною способів: і справа, і зліва, і зверху, і знизу, і під кутом 30° до осі Ox тощо.



Більше того, до точки можна наближатися не лише по прямій, а й по більш складних траєкторіях. Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x;\,y)\to(x_0;\,y_0)} f(x;y)=b$ правильна тоді й лише тоді, якщо границя дорівнює *b* при наближенні до точки $(x_0;y_0)$ по будь-якій траєкторії. Це істотно більш обмежене, ніж збіг двох односторонніх границь у разі функції однієї змінної.

19.4. Неперервність функції двох змінних

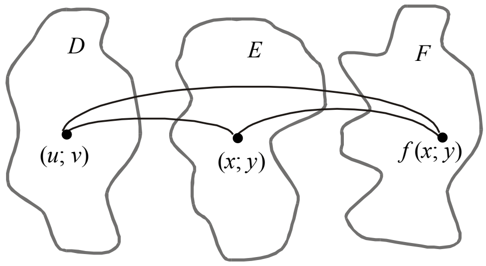
Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *неперервною* в точці $P_0(x_0;y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x;y)=f(x_0;y_0)$.

Означення. Функція $z=f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Таким чином, функція неперервна в точці $P_0(x_0;y_0)$, якщо виконуються водночас три умови:

- функція визначена в цій точці та її певному околі;
- існує границя функції в цій точці $P_0(x_0;y_0)$;
- границя функції і відповідне значення функції в зазначеній точці рівні.

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена на множині *E*, а змінні *x* і *y*, у свою чергу, залежать від змінних *u* та *v* і $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, де обидві функції $x(u;v)$ та $y(u;v)$ визначені на множині *D*. Якщо для будь-якого $(u;v)\in D$ значення $x(u;v)$, $y(u;v)$ такі, що $(x;y)\in E$, то говорять що на множині *D визначена складна функція* $z=f(x;y)$, де $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$; *x*, *y* — проміжні змінні; *u*, *v* — незалежні змінні.



Теорема. Нехай на множині *D* визначено складну функцію $z=f(x;y)$, де $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, і нехай функції $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$ неперервні в точці $(u_0;v_0)$, а функція $f(x;y)$ неперервна в точці $(x_0;y_0)$, де $x_0=x(u_0;v_0)$, $y_0=y(u_0;v_0)$. Тоді складна функція $z=f(x(u;v);y(u;v))$ неперервна в точці $(u_0;v_0)$.

Властивості неперервної функції двох змінних:

- Якщо функція неперервна в точці, то вона обмежена деяким околом цієї точки.
- Якщо функції $f(x;y)$ та $g(x;y)$ неперервні в точці $(x_0;y_0)$, то в цій точці будуть неперервними $f(x;y)\pm g(x;y)$, $f(x;y)\cdot g(x;y)$, $f(x;y)/g(x;y)$ при $g(x_0;y_0)\neq 0$.
- Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то вона обмежена на цій множині.

- Якщо функція $f(x;y)$ неперервна на замкненій обмеженій множині, то серед її значень на цій множині є як найменші, так і найбільші.
- Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на зв'язній множині *D* і набуває у двох точках *A* і *B* цієї множини значень різних знаків. Тоді в множині *D* знайдеться така точка, що в ній функція перетвориться на нуль.
- Нехай функція $f(x;y)$ неперервна на зв'язаній множині *D* й у двох будь-яких точках *A* та *B* цієї множини набуває нерівних значень $f(A)$ та $f(B)$. Тоді на цій множині вона набуває будь-яких значень μ, яке лежить між $f(A)$ і $f(B)$, тобто існує така точка $c \in D$, що $f(c) = \mu$.

Контрольні запитання

1. Дайте означення функції багатьох змінних. Якими способами її можна задати. Наведіть приклади.
2. Що називається границею функції двох змінних? У якому випадку функція двох змінних буде неперервною?

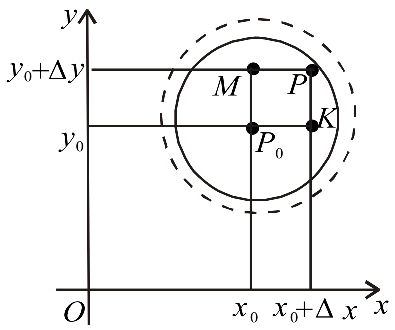
Лекція 20. Диференційованість функції двох змінних

План

20.1. Частинні та повний прирости функції двох змінних.
20.2. Диференційовність функції двох змінних.
20.3. Геометричний зміст частинних похідних.
20.4. Достатня умова диференційовності функції двох змінних у точці.
20.5. Диференціювання функцій.
20.6. Дотична площина та нормаль.
20.7. Частинні похідні та повні диференціали вищих порядків.

20.1. Частинні та повний прирости функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі зазначеного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x; y_0)$, $M(x_0; y_0 + \Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу.



Різницю $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ називають повним приростом функції $z = f(x; y)$ при переході від точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ називають частинним приростом за x, а різницю $f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ — частинним приростом за y функції $z = f(x; y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$.

Таким чином, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$,

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0),\ \Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Аналогічно визначаються прирости функції більше ніж двох змінних.

20.2. Диференційовність функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається диференційовною в точці $(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$,

де A, B — числа; α, β — нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається повним диференціалом функції (точніше, першим диференціалом) двох змінних $f(x;\ y)$ у точці $(x_0,\ y_0)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y\ .$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, тоді існують границі $\underset{\Delta x \to 0}{lim}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ та $\underset{\Delta y \to 0}{lim}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ і вони дорівнюють відповідно *A* і *B*.

Означення. Нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в точці $(x_0;\ y_0)$ і в деякому її околі. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}\left(\lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta x}\right)$, то вона називається *частинною похідною за x* (*за y*) функції $z = f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\frac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f'_x(x_0; y_0)$.

Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = Z'_x$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = Z'_y$.

З означення частинних похідних матимемо, що вони шукаються за тими правилами, що й похідні функції однієї змінної. Необхідно пам’ятати, що при знаходженні z'_x змінна *y* вважається сталою, а при знаходженні z'_y змінна *x* вважається сталою.

Тепер можна теорему можна сформулювати таким чином:

Теорема. (**необхідна умова диференційовності функції**). Якщо функція $z = f(x;\ y)$ диференційовна в точці $(x_0;\ y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні z'_x і z'_y.

Диференціали незалежних змінних збігаються з приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як випливає з означення повного диференціала і розглянутої теореми, повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .$$

Аналогічно повний диференціал функції трьох аргументів $u = f(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\ .$$

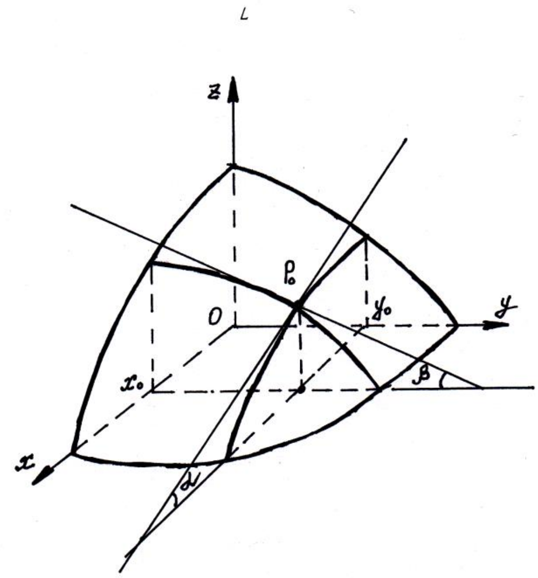
Приклад. Знайти dz, якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \text{ де } z'_x = \frac{1}{x + \ln y};\; z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = \frac{1}{x + \ln y}\left(dx + \frac{1}{y}dy\right)$.

20.3. Геометричний зміст частинних похідних

Якщо функцію $z = f(x; y)$, що має частинні похідні в точці $(x_0;\, y_0)$, розглядати за умови $y = y_0$, то геометрично це означає, що поверхня $z = f(x; y)$ перетинається площиною $y = y_0$ паралельно координатній площині Oxz; у перерізі одержуємо лінію. Тоді $f'_x(x_0; y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до зазначеного перерізу в точці $(x_0;\, y_0)$, тобто тангенсом кута нахилу цієї дотичної до додатного напряму осі Ox. Аналогічно, $f'_y(x_0;\, y_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної, що проходить через точку $(x_0;\, y_0)$, до кривої, утвореної в результаті перетину поверхні $z = f(x;\, y)$ з площиною $x = x_0$.



20.4. Достатня умова диференційовності функції двох змінних у точці

Для функції однієї змінної твердження щодо її диференційовності та існування похідної є рівносильними. У разі функції двох змінних ми маємо інше: існування частинних похідних — необхідна умова диференційовності функції в точці, але не є достатньою умовою диференційовності.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ у деякому околі точки $(x_0;\, y_0)$ має неперервні частинні похідні, то вона диференційовна в точці $(x_0;\, y_0)$.

Можна навести твердження про зв’язок між поняттями неперервності і диференційовності функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

Теорема. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0;\, y_0)$, то вона неперервна в цій точці.

Обернене твердження неправильне.

20.5. Диференціювання функцій

20.5.1. Похідна неявної функції

Якщо існує неперервна функція однієї змінної $y = f(x)$, така що відповідні пари $(x;\ y)$ задовольняють умову $F(x;\ y) = 0$, то ця умова називається *неявною формою функції* $f(x)$, а сама функція $f(x)$ називається *неявною функцією*, яка задовольняє умову $F(x; y) = 0$.

Припустимо, що неперервна функція $y = f(x)$ задана в неявній формі $F(x, y) = 0$ і що $F'_y(x, y) \neq 0$. Похідну $\frac{dy}{dx}$ обчислюємо за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},\ F'_y(x, y) \neq 0 .$$

Приклад. Знайти похідну від неявної функції $y^5 + 2x^2y^2 + xy - 42 = 0$ в точці $x = 1$, $y = 2$.

Маємо $F'_x = 4xy^2 + y$, $F'_y = 5y^4 + 4x^2y + x$, звідси $\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2y + x}$.

Для $x = 1$, $y = 2$ маємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{18}{89}$.

Аналогічно частинні похідні функції двох незалежних змінних $z = f(x;\ y)$, яку задано за допомогою рівняння $F(x;\ y;\ z) = 0$, де $F(x;\ y;\ z)$ — диференційовна функція змінних *x, y, z*, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \text{ за умови, що } \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 .$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3 - 3xyz = 5$.

У цьому разі $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 5$. Визначимо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -3yz ,\quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3xz ,\quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy .$$

Тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-3xz}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}$.

20.5.2. Похідна складної функції

Теорема. Нехай на множині *D* визначена складна функція $z = f(u; v)$, де $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$, і нехай функції $u(x; y)$, $v(x; y)$ мають у деякому околі точки $(x_0; y_0) \in D$ неперервні частинні похідні, а функція $z = f(u; v)$ — неперервні частинні похідні в деякому околі точки

$(u_0;v_0)$, де $u_0=u(x_0;y_0)$, $v_0=v(x_0;y_0)$. Тоді складна функція $z=f\big(u(x,y);\,v(x,y)\big)$ диференційовна в точці $(x_0;\,y_0)$, причому

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z=\left(\sqrt[3]{xy}\right)^2+\left(\sqrt[5]{\frac{x}{y}}\right)^3$.

Маємо $z=u^2+v^3$, де $u=\sqrt[3]{xy}$, $v=\sqrt[5]{\frac{x}{y}}$.

Тоді $\frac{\partial z}{\partial u}=2u$, $\frac{\partial z}{\partial v}=3v^2$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt[3]{y}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt[3]{x}\,\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$,

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt[5]{y}}\cdot\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$, $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{5}\sqrt[5]{x}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{y^6}}$.

Після підставлення виразів u і v одержимо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}+\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{1}{x^2y^3}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}-\frac{3}{5}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^8}}$.

20.6. Дотична площина та нормаль

Якщо функція $z=f(x;\,y)$ диференційовна в точці $(x_0;\,y_0)$, то виконується рівність

$$\Delta z\approx A\Delta x+B\Delta y,$$

або $f(x_0+\Delta x;\;y_0+\Delta y)-f(x_0;\,y_0)\approx f'_x(x_0;\,y_0)\Delta x+f'_y(x_0;\,y_0)\Delta y.$

Узявши в цій наближеній рівності $a=x_0+\Delta x$, $b=y_0+\Delta y$, одержимо:

$$f(a;\,b)\approx f(x_0;\,y_0)+f'_x(x_0;\,y_0)(a-x_0)+f'_y(x_0;\,y_0)(b-y_0).$$

На одержаній формулі ґрунтується алгоритм використання диференціала для наближених обчислень.

Крім того, якщо взяти $a=x$, $b=y$, одержимо:

$$z=f(x;\,y)\approx f(x_0;\,y_0)+f'_y(x_0;\,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;\,y_0)(y-y_0).$$

Це рівняння **дотичної площини**, що проходить через точку $(x_0;\,y_0;\,z_0)$.

Якщо поверхню задано в просторі рівнянням $F(x;\,y;\,z)=0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x;\,y;\,z)=0$ в точці $(x_0;\,y_0;\,z_0)$ має вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

де $A=F'_x(x_0;\,y_0;\,z_0)$, $B=F'_y(x_0;\,y_0;\,z_0)$, $C=F'_z(x_0;\,y_0;\,z_0)$.

Нормаль до поверхні в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — це пряма, що проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини.

Отже, її рівняння $\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}$.

20.7. Частинні похідні та повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z=f(x;y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Візьмемо будь-яку точку $(x;y)\in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, що залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їх частинних похідних. Якщо вони існують, то називаються *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yx},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xy}.$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього і вищих порядків, наПриклад.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\equiv\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\equiv\frac{\partial^3 z}{\partial y\,\partial x^2}.$$

Означення. *Диференціалом другого порядку* від функції $z=f(x;y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2z=d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків :

$$d^3z=d\left(d^2z\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$d^nz=d\left(d^{n-1}z\right).$$

Приклад. Знайти d^2z , якщо $z=\sin x\cdot\sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\sin y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\sin x\cos y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin x\sin y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\sin x\sin y,$$

$$d^2z=-\sin x\sin y dx^2+2\cos x\cos y\,dxdy-\sin x\sin y dy^2.$$

Приклад. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

У попередньому прикладі ми одержали, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Виявляється, що ця рівність виконується в багатьох випадках, що випливає з такої теореми.

Теорема. Якщо функція $z = f(x;\ y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається частинними похідними та повним приростом функції двох змінних ?
2. Сформулювати необхідну і достатню умови диференційовності функції двох змінних.
3. Пояснити геометричний зміст частинних похідних.
4. Записати рівняння дотичної площини та нормалі до певної поверхні в певній точці.

Лекція 21. Екстремум функції двох змінних. Найменше і найбільше значення функції двох змінних

План

21.1. Екстремум функції двох змінних.

21.2. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції на замкненій обмеженій множині..

21.3. Умовний екстремум для функції двох змінних..

21.1. Екстремум функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;\, y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;\, y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;\, y) \le f(x_0;\, y_0)$ $[f(x;\, y) \ge f(x_0;\, y_0)]$, тоді ця точка $(x_0,\, y_0)$ називається точкою максимуму (мінімуму) функції $z = f(x;\, y)$.

Точки максимуму й мінімуму називаються точками екстремуму.

Теорема *(необхідна умова екстремуму).* Якщо функція $z = f(x; y)$ має екстремум у точці *(x₀; y₀)*, то в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ або дорівнюють нулю, або хоча б одна з них не існує.

Теорема *(достатня умова екстремуму).* Нехай функція $z = f(x; y)$ має в точці $(x_0;\, y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядків, причому $f'_x(x_0; y_0) = 0$ та $f'_y(x_0; y_0) = 0$, а також $f''_{x^2}(x_0; y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0; y_0) = B$, $f''_{y^2}(x_0; y_0) = C$. Якщо:

1) $\boldsymbol{AC - B^2 > 0}$ і $\boldsymbol{A < 0}$, то $(x_0;\, y_0)$ точка максимуму функції $z = f(x; y)$;

2) $\boldsymbol{AC - B^2 > 0}$ і $\boldsymbol{A > 0}$, то $(x_0;\, y_0)$ точка мінімуму функції $z = f(x; y)$;

3) $\boldsymbol{AC - B^2 < 0}$, то в точці $(x_0;\, y_0)$ немає екстремуму.

4) $\boldsymbol{AC - B^2 = 0}$, то потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z = f(x; y)$ на екстремум:

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Визначити стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.
5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки.

Приклад. Розглянемо функцію $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

1. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 8 - 4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що

$$\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 8 - 4y = 0 \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x = 1$, $y = 2$.

Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, звідси одержимо, що $\Delta = 8$

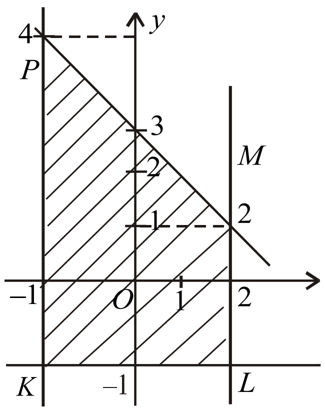
.

4. Екстремум у точці (1; 2) існує, це максимум, тому що $A < 0$.

21.2. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції на замкненій обмеженій множині

Функція, що неперервна на замкненій обмеженій множині *D*, досягає на ній найбільшого та найменшого значень. Цих значень вона може набувати як у внутрішніх точках множини *D* (кожна така точка є точкою екстремуму функції, в цій точці перші частинні похідні дорівнюють нулю або не існують), так і на її межі, тобто необхідне спеціальне дослідження межових точок множини *D*.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$.



1. Дослідимо поводження функції всередині області *KLMP*. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Прирівнявши їх до нуля, одержимо стаціонарні точки $O(0;\ 0)$ та $E(1;\ 1)$.

2. Дослідимо поводження функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y = -1$, $-1 \le x \le 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, одержимо $z = x^3 - 1 + 3x$. Необхідно знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1;\ 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$ і L (2; – 1).

Відрізок LM має рівняння $x=2$, $-1\le y\le 1$. Підставивши $x=2$ у задану функцію, одержимо функцію *z* як функцію від змінної *y*: $z=8+y^3-6y$. Маємо $z'=3y^2-6<0$ на відрізку $[-1;\,1]$.

Отже, функція $z=8+y^3-6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках *L* (2; – 1) і *M* (2; 1).

Відрізок PM має рівняння $y=3-x$, $-1\le x\le 2$. Підставивши $y=3-x$ у задану функцію, одержимо функцію *z* як функцію від змінної *x*: $z=x^3+(3-x)^3-3x(x-3)$, тобто $z=27-36x+12x^2$. Маємо $z'=24x-36$, звідси $z'=0$ при $x=\dfrac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках *M* (2; 1), $P(-1;\ 4)$ та $T\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x=-1$, $-1\le y\le 4$. Підставивши $x=-1$ у задану функцію, одержимо $z=-1+y^3+3y$. Маємо $z'=3y^2+3>0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1;\ -1)$, $P(-1;\ 4)$.

Таким чином, функція $z=x^3+y^2-3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень лише в таких точках: $O(0;0)$, $E(1;\ 1)$, $K(-1;-1)$, $L(2;-1)$, $M(2;1)$, $P(-1;4)$, $T\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.

Визначаємо $f(0;0)=0$, $f(1;1)=-1$, $f(-1;-1)=-5$, $f(2;-1)=13$, $f(2;1)=3$, $f(-1;4)=75$, $f\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)=0$.

Отже, $z_{\min}=-5$, і це значення досягається в точці (– 1; – 1), $z_{\max}=75$, і це значення досягається в точці (– 1; 4).

21.3. Умовний екстремум для функції двох змінних

Нехай на відкритій множині $D\subset R^2$ задано функцію $z=f(x;y)$, змінні якої задовольняють рівняння $\varphi(x;\ y)=0$.

Рівняння $\varphi(x;\ y)=0$ називають *рівнянням зв'язку*.

Точку $(x_0;y_0)$ називають *точкою умовного строгого максимуму* функції $z=f(x;y)$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x;\ y)=0$, якщо існує такий окіл точки $(x_0;\ y_0)$, для всіх точок якого $(x;y)\ne(x_0;y_0)$, що задовольняють рівняння зв'язку, справджується нерівність $f(x;\ y)<f(x_0;\ y_0)$.

Якщо за таких умов виконується $f(x;\ y)>f(x_0;\ y_0)$, тоді точку $(x_0;\ y_0)$ називають *точкою умовного строгого мінімуму* функції $z=f(x;y)$ при обмеженнях $\varphi(x;\ y)=0$.

Аналогічно вводяться поняття нестрогого умовного екстремуму.

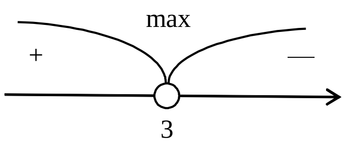
Точки умовного максимуму та мінімуму називають точками *умовного екстремуму*. Умовний екстремум інколи називають *відносним екстремумом*.

Якщо рівняння зв'язку $\varphi(x;\ y) = 0$ можна розв'язати відносно змінної *y*, наприклад, $y = \varphi_1(x)$, то дослідження функції $z = f(x; y)$ на умовний екстремум при обмеженні $\varphi(x;\ y) = 0$ зводиться до дослідження на звичайний екстремум функції однієї змінної *x*:

$$z = f(x; \varphi_1(x)).$$

Приклад. Знайти умовний екстремум функції $z = xy$ відносно рівняння зв'язку $x + y = 6$.
Розв'яжемо рівняння зв'язку відносно змінної *y*:

$y = 6 - x$.



Підставимо знайдене значення *y* у вираз для *z* та зведемо задачу до дослідження на безумовний екстремум функції $z = x\,(6 - x)$,

$$z' = 6 - 2x \Rightarrow z' = 0 \Rightarrow 6 - 2x = 0 \Rightarrow x = 3.$$

Таким чином, задана функція має умовний екстремум у точці (3; 3).

Контрольні запитання

1. Які повинні виконуватися умови, щоб функція двох змінних мала екстремум у певній точці?
2. На прикладі поясніть застосування алгоритму знаходження екстремуму функції двох змінних.
3. Що називають умовним екстремумом для функції двох змінних?

Лекція 22. Комплексні числа

План

22.1. Означення комплексного числа та уявної одиниці.
22.2. Дії над комплексними числами.
22.3. Тригонометрична форма комплексного числа.
22.4. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра.
22.5. Корінь *n*-го степеня з комплексного числа.
22.6. Формула Ейлера.

22.1. Означення комплексного числа та уявної одиниці

Число $a + bi$, де a, b – будь-які дійсні числа; i – уявна одиниця, називається комплексним числом (a – дійсна частина; b – уявна частина комплексного числа; а i – коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює – 1, позначають літерою i та називають уявною одиницею (i – перша буква латинського слова imaginarius – уявний).

Тобто для символу виконується рівність

$$i^2 = -1.$$

Означення: запис $a + bi$ називають *алгебраїчною формою* комплексного числа.

Часто комплексне число позначають літерою Z і записують $Z = a + bi$.

Комплексні числа – це розширення числової системи дійсних чисел. Позначаються вони літерою **C**. Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел.

Означення: числа $a + bi$ і $a - bi$, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявих частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають спряженими. Можна сказати простіше: числа $a + bi$ і $a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називають **спряженими**.

Означення: два числа $a + bi$ та $-a - bi$, сума яких дорівнює 0, називають протилежними.

У множині дійсних чисел справедлива рівність $a + 0 = a$. У множині комплексних чисел нулем є число $0 + 0i$. Справді, яке б не було число , справедлива рівність

$$(a + bi) + (0+0i) = (a +0) + (b +0)i = a + bi.$$

22.2. Дії над комплексними числами

Означення: сумою двох комплексних чисел $a + bi$ і $c + di$ називається комплексне число $(a + c) + (b + d)i$.

Приклади. Виконати додавання комплексних чисел:

1) $(3 + 2i) + (-1 - 5i) = (3 - 1) + (2 - 5)i = 2 - 3i$;

2) $(4 - 5i) + (2 - i) = (4+2) + (-5 - 1)i = 6 - 6i$;

3) $(2+3i) + (6 - 3i) = (2+6) + (3 - 3)i = 8$;

4) $(10 - 3i) + (-10+3i) = (10 - 10) + (-3+3)i = 0$.

Означення. Різницею двох комплексних чисел $Z_1 = a + bi$ і $Z_2 = c + di$ називається таке комплексне число $Z = (a - c) + (b - d)i$.

Приклади: Виконати віднімання комплексних чисел:

1) $(3+4i) - (1+2i) = (3 - 1) + (4 - 2)i = 2 + 2i$;

2) $(-5+2i) - (2+i) = (-5 - 2) + (2 - 1)i = -7 + i$;

3) $(6+7i) - (6 - 5i) = (6 - 6) + (7 + 5)i = 12i$.

Означення. Добутком двох комплексних чисел $Z_1 = a + bi$ і $Z_2 = c + di$ називається комплексне число $z = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Приклади: Виконати множення комплексних чисел:

1) $(4 - 5i)(3+2i) = 12+8i - 15i - 10i^2 = 12+10-7i = 22-7i$;

2) $(2 - i)(-5) = -10+5i$;

3) $(-4 - 3i)(-6i) = -18+24i$.

Означення. Часткою комплексних чисел $Z_1 = a + bi$ і $Z_2 = c + di$ називається таке комплексне число:

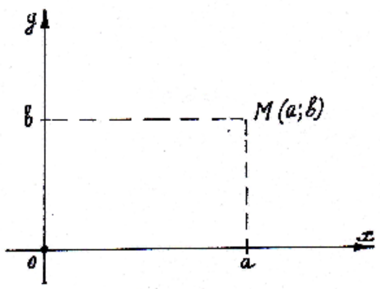
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Приклади. Знайти частку комплексних чисел:

1) $(2 + 5i)/(3 - 2i) = (2 + 5i)(3 + 2i)/(3 - 2i)(3 + 2i) = (-4+ 19i)/13 = -4/13 + 19i/13$;

2) $(3 + i) / i = (3 + i)(-i) / i = 1 - 3i$.

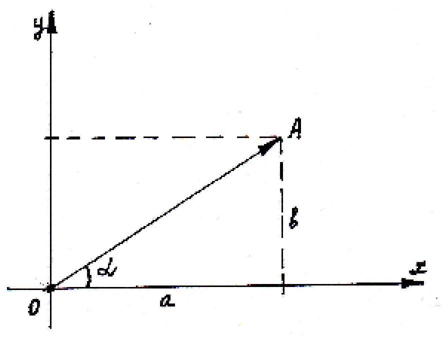
22.3. Тригонометрична форма запису комплексних чисел



Кожному комплексному числу $a + bi$ поставимо у відповідність точку M $(a;\ b)$ координатної площини, тобто точку, абсциса якої дорівнює дійсній частині комплексного числа, а ордината – коефіцієнту уявної частини. Кожній точці M $(a;\ b)$ координатної площини поставимо у відповідність комплексне число.

Очевидно, що така відповідність є взаємно однозначною. Вона дає можливість інтерпретувати комплексні числа як точки деякої площини, на якій вибрано систему координат. Координатну площину називають при цьому комплексною, вісь абсцис – дійсною віссю, тому що на ній розміщені точки, які відповідають комплексним числам $a + 0i$, тобто відповідають дійсним числам. Вісь ординат називають уявною віссю – на ній лежать точки, які відповідають уявним комплексним числам $0 + bi$.

Модулем комплексного числа $Z = a + bi$ називається число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Позначимо α кут, що утворює вектор $\overrightarrow{OA}$ з додатним напрямом осі Ox. Числове значення кута α, виміряного в радіанах, називається **аргументом комплексного числа $a + bi$**. Значення аргументу, взяте в межах першого кола, тобто від 0 до 2π, називається **головним**. Головне значення аргументу комплексного числа можна визначити з рівності $tg\,\alpha = b/a$. Справді, за знаками a і b можна встановити, в якій чверті міститься кут α, і за величиною $tg\,\alpha$, використовуючи таблиці, знайти величину кута α.



Вираз $Z = r\cos\alpha + i\,r\sin\alpha = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

Приклад. Подати в тригонометричній формі число $-3 + 2i$.

Маємо $r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2}{-3} \approx -0{,}6666...$

Тангенс від'ємний, отже, кут α необхідно шукати в II або IV чверті.

Далі, $a = -3$ і $b = 2$ – синус буде додатний, а косинус — від'ємний, тобто α буде кутом II чверті. За таблицями визначаємо $\alpha = 146°\ 18'$, а тому

$$-3+2i = \sqrt{13}\left(\cos 146^\circ 18' + i\sin 146^\circ 18'\right).$$

22.4. Дії з комплексними числами в тригонометричній формі. Формула Муавра

Якщо задані два числа:

$Z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + + i\sin\alpha_1)$ і $Z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + + i\sin\alpha_2)$.

Тоді $$Z_1 Z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)),$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)).$$

При будь-якому натуральному n

$$Z^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Приклад:

$$a = 3\left(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ\right) \text{ і } b = 2\left(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ\right).$$

Тоді $$ab = 3\cdot 2\left[\cos\left(20^\circ + 35^\circ\right) + i\sin\left(20^\circ + 35^\circ\right)\right] = 6\left(\cos 55^\circ + i\sin 55^\circ\right),$$

a = 12(cos55°+i sin55°) і b = 3(cos35° +i sin 35°).

Отже, $\frac{a}{b}=\frac{12}{3}\left(\cos\left(55^\circ-35^\circ\right)+i\sin\left(55^\circ-35^\circ\right)\right)=4\left(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ\right)$.

Знайдемо куб число a = 2 (cos 20° + i sin 20°).

Маємо $a^3=8(\cos 3\cdot 20+i\sin 3\cdot 20)=8(\cos 60+\sin 60)=8\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4+4\sqrt{3}i$.

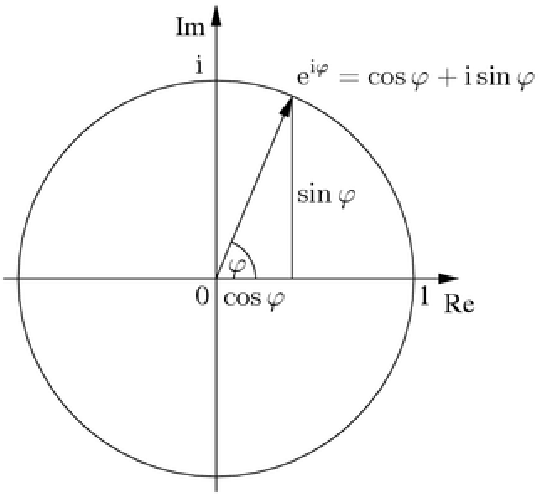
22.5. Корінь *n*-го ступеня з комплексного числа

Корінь n-го ступеня з числа $\boldsymbol{Z}$ = r (cos α + $\boldsymbol{i}$ sin α) обчислюють за формулою

ω_k = $\sqrt[n]{r}$ *(cos* $\frac{\alpha+2\pi k}{n}$ + $\boldsymbol{i}$ *sin* $\frac{\alpha+2\pi k}{n}$ *)*, де k – ціле число.

Підставляючи замість k значення 0, 1, 2, …, n – 1, одержимо n різних значень кореня.

22.6. Формула Ейлера



Формула Ейлера

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi$,

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \ \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}.$$

У загальному випадку

$$e^{a+bi}=e^{a}\,(\cos b+i\sin b)\,.$$

За допомогою формули Ейлера можна одержати *показникову форму* комплексного числа: $Z=r\,e^{i\varphi}$.

Контрольні запитання

1. Які числові множини можна назвати?
2. Які існують форми запису комплексних чисел ? Наведіть приклади.
3. Які дії над комплексними числами можна виконувати ? Наведіть приклади.
4. Як здійснити перехід від алгебраїчної до тригонометричної форми комплексного числа? Наведіть приклади.
5. Як виконати дії над комплексними числами в тригонометричній формі ? Наведіть приклади.
6. Запишіть формулу Ейлера для комплексного числа. Поясніть її елементи.

Лекція 23. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь
Диференціальні рівняння першого порядку

План

23.1. Основні поняття.

23.2. Диференціальне рівняння першого порядку.

23.3. Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

23.4. Диференціальні рівняння в повних диференціалах .

23.5. Однорідне диференціальне рівняння.

23.6. Лінійні диференціальні рівняння.

23.7. Рівняння Бернуллі.

23.1. Основні поняття

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням називається рівняння, що зв'язує незалежну змінну, функцію та її похідні.

Порядок диференціального рівняння визначає найвища похідна, яка входить до рівняння.

У загальному разі диференціальне рівняння *n*-го порядку має вигляд:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Далі замість слів «диференціальні рівняння» будемо використовувати скорочення ДР.

При вивченні ДР будемо розглядати лише диференціальні рівняння, в яких шукана функція залежить лише від одного аргументу. Такі рівняння називаються звичайними.

Загальним розв'язком диференціального рівняння є всяка функція, яка при підставленні її в рівняння перетворює його на тотожність. Якщо сталі, що входять до загального розв'язку, можна знайти виходячи з певних початкових умов, то буде визначено частинний розв'язок ДР.

23.2.Диференціальне рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F\left(x, y, y'\right) = 0$ або $y' = f\left(x, y\right)\cdot$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція вигляду $y = f(x,C)$, яка за довільних значень сталої величини C є розв'язком цього рівняння. Для знаходження частинного (єдиного) розв'язку необхідно знати початкові умови, які для рівняння першого порядку записують у вигляді $y\left(x_0\right) = y_0$ або $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Тоді задача пошуку розв'язку $y = f(x, C)$, що задовольняє умову $y = y_0$ при $x = x_0$, називається *задачею Коші*. Геометрично функція $y = f(x, C)$ описує множину інтегральних кривих на числовій площині.

Означення. Множина кривих, що залежать від параметра, називається сім'єю кривих.

Таким чином, задачу інтегрування ДР першого порядку можна розглядати як задачу пошуку рівняння сім’ї кривих $y = f(x, C)$ за ДР, яке описує цю сім’ю.

Для наближеного знаходження сім’ї інтегральних кривих використовують графічний метод. ДР першого порядку задає кутовий коефіцієнт дотичної до інтегральної кривої у кожній точці (x, y).

Якщо в кожній точці (x, y) визначений напрям деякого вектора, то говорять, що задане *поле напрямів*. ДР задає поле напрямів дотичних. Ці лінії, на яких дотичні мають однаковий нахил, називаються *ізоклінами*. Рівняння ізоклін $f(x, y) = k = \text{const}$ Побудувавши графіки ізоклін, можна наближено провести інтегральні криві.

Не існує єдиного універсального методу, за допомогою якого можна розв’язати диференціальні рівняння першого порядку. Існує певний клас рівнянь, які можна розв’язати (проінтегрувати). Розглянемо такі рівняння.

23.3. Диференціальне рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними

Означення. ДР вигляду $M(x)dx + N(y)dy = 0$ називається ДР із *відокремленими змінними*.

Загальний розв’язок ДР подається так:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C,$$

а розв’язок задачі Коші з початковими умовами $x = x_0$, $y = y_0$ має вигляд

$$\int_{x_0}^{x} M(x)dx + \int_{y_0}^{y} N(y)dy = 0.$$

ДР з відокремленими змінними зводиться до знаходження інтегралів.

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $2xdx + 2ydy = 0.$

Інтегруючи, одержимо інтеграл ДР $x^2 + y^2 = C.$

Інтегральними кривими є концентричні кола з центром на початку координат.

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$N_1(y)M_1(x)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

називається ДР із *відокремлюваними змінними*, тобто рівнянням, що зводиться до ДР з відокремленими змінними.

Поділивши це рівняння на $N_1(y)\,M_2(x),$ одержимо ДР з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Рівняння має розв’язок $y = y_k$, $x = x_j$, де $y = y_k$, $x = x_j$ є розв’язками рівнянь $N_1(y) = 0,\ M_2(x) = 0.$

Аналогічно ДР вигляду $y' = f_1(x) f_2(y)$ є ДР з відокремлюваними змінними. Його можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y),\ \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Рівняння має розв’язок вигляду $y = y_k$, де $f_2(y_k) = 0.$

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $y' = 2xy^2$.

Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2,\quad \frac{dy}{y^2} = 2xdx,\quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx$$

або $-\frac{1}{y} = x^2 + C,\quad y = -\frac{1}{x^2 + C}.$

23.4. Однорідне диференціальне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді $y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$

Воно за допомогою заміни змінної $\frac{y}{x} = u,\ y = ux$ зводиться до ДР з відокремлюваними змінними $u'x + u = f(u),\ x\frac{du}{dx} = f(u) - u$, а знаходження розв’язку зводиться до інтегрування: $\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}.$

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $y' = \frac{y}{x}$.

Взявши $y = ux$, одержимо ДР і його загальний розв’язок:

$$u'x + u = u,\ u'x = 0,\ u = C,\ y = Cx.$$

Приклад. Знайдемо загальний розв’язок ДР $y' = \frac{y^2}{x^2}$.

Візьмемо $y = ux$ та одержимо ДР для змінної:

$$u'x + u = u^2,\ x\frac{du}{dx} = u^2 - u,\ \frac{du}{u^2 - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи ДР з відокремленими змінними, визначаємо загальний розв’язок:

$$\int \frac{du}{u^2-u} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln x + \ln C, \quad \frac{u-1}{u} = Cx, \quad u = \frac{1}{1-Cx}, \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{1-Cx}, \quad y = \frac{x}{1-Cx}.$$

23.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Означення. Диференціальне рівняння $du = 0$ або $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0, u = u(x, y)$ називається диференціальним рівнянням *у повних диференціалах*.

Це ДР має інтеграл $u(x, y) = C = \mathbf{const}$.

ДР вигляду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ є ДР у повних диференціалах, якщо виконується тотожність:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

При цьому визначаємо функцію $u(x, y)$ із рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,\ y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x,\ y).$$

В окремому разі можна скористатися формулою

$$u(x,\ y) = \int_{x_0}^{x} M(x,\ y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\ y)dy.$$

Значення x_0, y_0 можуть бути довільними числами.

Приклад. Розв’язати рівняння $(2x + 2y)dx + (2x - 2y)dy = 0$.

Перевіримо спочатку виконання умови

$$M(x, y) = 2x + 2y, \ N(x, y) = 2x - 2y, \ \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2, \ \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2.$$

При $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$ маємо $u(x,\ y) = \int_0^x 2xdx + \int_0^y (2x - 2y) = x^2 + 2xy - y^2.$

Отже, ДР має загальний розв’язок $x^2 + 2xy - y^2 = C.$

23.6. Лінійні диференціальні рівняння

Означення. Диференціальні рівняння вигляду $y' + P(x)y = Q(x)$ називають лінійними ДР.

Якщо $Q(x) = 0$, то ДР є однорідним. Якщо $Q(x) \neq 0$, то ДР називається неоднорідним.

Лагранж запропонував загальний метод розв’язування неоднорідних лінійних ДР. Спочатку розв’язується однорідне ДР. До загального розв’язку входять довільні сталі. Потім визначається загальний розв’язок неоднорідного ДР, і при цьому довільні сталі стають новими шуканими функціями. Знаходитимемо розв’язок неоднорідного ДР двома етапами. Спочатку розв’яжемо однорідне ДР $y' + P(x)y = 0$:

$$y' + P(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -P(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C,$$

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Таким чином, загальний розв’язок має вигляд $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

Далі шукаємо розв’язок неоднорідного ДР у вигляді $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, вважаючи C функцією від x. Підставляючи в початкове ДР, одержимо рівняння:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Приходимо до простого ДР:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \qquad C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1.$$

Загальний розв’язок неоднорідного ДР запишемо у вигляді:

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right)e^{-\int P(x)dx}.$$

Метод Лагранжа часто називають ***методом варіації довільної сталої***.

23.7. Рівняння Бернуллі

Означення. Рівняння вигляду

$$y' + yP(x) = Q(x)y^{\alpha} \ (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1),$$

де α – довільне число, називають **рівнянням Бернуллі.**

Рівняння такого типу також можна розв’язати ***методом варіації довільної сталої***.

Контрольні запитання

1. Що називається диференціальним рівнянням?
2. Що називається розв’язком диференціального рівняння ?
3. Що називається порядком диференціального рівняння?
4. Які типи диференціальних рівнянь I порядку можете назвати ? Покажіть на прикладах.
5. Поясніть методи розв’язування різних типів диференціальних рівнянь I порядку.

Лекція 24. Диференціальні рівняння другого порядку

План

24.1. Основні поняття.
24.2. Зниження порядку деяких диференціальних рівнянь другого порядку.
24.3. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку.
24.4. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку.

24.1. Основні поняття

Диференціальне рівняння другого порядку має вигляд $F\left(x, y, y', y''\right)=0$ або $y''=f\left(x, y, y'\right)$, а початкові умови записують у вигляді $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y_0'$.
Загальний розв'язок рівняння містить дві довільні сталі:

$$y = f(x, C_1, C_2),$$

і за рахунок вибору довільних сталих C_1, C_2 можна розв'язати задачу Коші, яка полягає в пошуку частинного розв'язку $y=y(x)$, що задовольняє початкові умови $y\left(x_0\right)=y_0$, $y'\left(x_0\right)=y_0'$.

24.2. Зниження порядку деяких диференціальних рівнянь другого порядку

У деяких випадках можна знизити порядок ДР другого порядку і звести до ДР першого порядку.

I. У диференціальному рівнянні відсутня шукана функція

ДР вигляду $F\left(x, y', y''\right)=0$ зводяться до ДР першого порядку, якщо візьмемо $y'=z$, $y''=z'$.
Одержимо ДР першого порядку:

$$F(x,\ z,\ z')=0.$$

Якщо буде знайдено загальний розв'язок цього рівняння $z=z(x,\ C_1)$, то одержимо $y=\int\ z\left(x,\ C_1\right)dx+C_2$.

Якщо ДР другого порядку має вигляд $y''=p\ (x)q\left(y'\right)$, то беремо $y'=z,\ y''=z'$ і дістаємо ДР першого порядку $z'=p\ (x)q\ (z)$ з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dz}{dx}=p\ (x)q\ (z),\ \ \frac{dz}{q\ (z)}=p\ (x)dx,\ \ \int\frac{dz}{q(z)}=\int p\ (x)dx.$$

Приклад. Розв'язати $y''=\dfrac{y'}{1+x}$.

При $z = y',\ z' = y''$ одержимо ДР першого порядку:

$$z' = \frac{z}{1+x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{1+x} \quad \ln|z| = \ln|1+x| + \ln C_1,$$

$$z = C_1(1+x), \quad y' = C_1(1+x), \quad y = \int C_1(1+x)dx.$$

Загальний розв'язок ДР другого порядку:

$$y = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$

Приклад. Розв'язати $y'' + y' = 0.$

Вважаючи, що $y' = z, y'' = z',$ знижуємо порядок і приходимо до ДР першого порядку:

$$z' + z = 0, \ \frac{dz}{dx} = -z, \ \frac{dz}{z} = -dx,$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int dx, \quad \ln z = -x + \ln C_1, \quad z = C_1 e^{-x}.$$

Інтегруючи z дістаємо загальний розв'язок ДР другого порядку:

$$y' = C_1 e^{-x}, \ y = \int C_1 e^{-x} dx + C_2, \ y = -C_1 e^{-x} + C_2.$$

II. Диференціальне рівняння не містить явно аргументу

Порядок ДР $F(y, y', y'') = 0$ можна знизити, якщо за нову незалежну змінну візьмемо *y*, а за нову залежну змінну — $z = y'.$

Одержуємо рівність $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$

Остаточно приходимо до ДР першого порядку $F\left(y, z, z\frac{dz}{dy}\right) = 0.$

Якщо знайдемо загальний розв'язок цього рівняння, то для пошуку загального розв'язку ДР одержимо рівняння:

$$y' = z\ (y, C_1), \quad \frac{dy}{dx} = z\ (y, C_1), \quad \int \frac{dy}{z\ (y, C_1)} = x + C_2.$$

Якщо ДР другого порядку має вигляд $y'' = p\ (y) q\ (y'),$ то приходимо до ДР першого порядку $Z\frac{dz}{dy} = p\ (y)\ q\ (z)$ з відокремлюваними змінними:

$$\frac{zdz}{q(z)} = p(y)dy, \ \int \frac{zdz}{q(z)} = \int p(y)dy.$$

Визначивши $z = z(y, C_1)$, визначаємо y з ДР першого порядку $\dfrac{dy}{dx} = z(y, C_1)$:

$$\int \frac{dy}{z(y, C_1)} = x + C_2.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок ДР другого порядку $y'' + y = 0.$

Узявши $y' = z,$ одержимо $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$ і прийдемо до ДР першого порядку:

$$z\frac{dz}{dy} + y = 0, \ \ zdz + ydy = 0, \ \ z^2 + y^2 = C_1^2.$$

Визначаємо змінну $z = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$ і приходимо до ДР першого порядку $y' = \pm\sqrt{C_1^2 - y^2}$, розв'язуючи яке, дістаємо:

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm dx, \ \ \arcsin\frac{y}{C_1} = \pm x + C_2, \ \ \ y = C_1\sin(\pm x + C_2).$$

III. ДР є однорідним відносно шуканої функції та її похідних

Для рівняння цього вигляду виконується умова

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y'').$$

В однорідному рівнянні другого порядку $F(x, y, y', y'') = 0,$ узявши

$$y' = yz, \quad y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z'),$$

прийдемо до ДР першого порядку вигляду $F(x, 1, z, z^2 + z') = 0.$

Якщо знайдено загальний розв'язок цього ДР $z = z(x, C_1),$ то далі маємо:

$$\frac{y'}{y} = z(x, C_1), \ \ \int \frac{y'}{y}dx = \int z(x, C_1)dx, \ \ \ln|y| = \int z(x, C_1)dx + \ln C_2, \ \ \ y = C_2 e^{\int z(x, C_1)dx}.$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок $y''y + (y')^2 = 0.$

Використовуючи заміну, приходимо до ДР першого порядку:

$$z' = -2z^2,$$

звідси $z = \dfrac{1}{2x + C_1}\cdot$ Із ДР $y' = y\dfrac{1}{2x + C_1}$ визначаємо загальний розв'язок:

$$y = C_2\sqrt{|2x + C_1|}.$$

24.3. Лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку

Лінійне рівняння другого порядку має вигляд

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x),$$

де $a_0(x),\ a_1(x),\ a_2(x),\ b(x)$ – деякі неперервні функції, а $a_0(x) \neq 0$. Якщо $b(x) = 0$, то лінійне рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

називають **лінійним однорідним**.

Структура загального розв'язку для лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де C_1, C_2 – сталі величини, а $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ – функції, які складають фундаментальну систему розв'язків для цього рівняння.

Лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y'' + py' + qy = 0,$$

де p, q – сталі величини.

Для його розв'язку складаємо характеристичне рівняння вигляду

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Якщо корені характеристичного рівняння:

1) дійсні різні $k_1 \neq k_2$, то загальний розв'язок однорідного рівняння записують у вигляді

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$

2) дійсні рівні $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв'язок однорідного рівняння записують у вигляді

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x);$$

3) комплексно спряжені $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (i – уявна одиниця), то загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + y' - 2y = 0$, який задовольняє умови $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

Складемо характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння за формулою. Одержуємо:

$$k^2 + k - 2 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -2.$$

Корені дійсні різні. Потім за формулою запишемо загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Для знаходження констант C_1 та C_2 підставимо початкові умови в загальний розв'язок і його похідну y': $y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}$. Одержимо

$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \quad 3 = C_1 e^0 - 2C_2 e^0,$$

або таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 2C_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3C_2 = -2,\ C_2 = -\frac{2}{3},\ C_1 = 1 - C_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Частинний розв'язок рівняння має вигляд $y = -\frac{2}{3}e^x + \frac{5}{3}e^{-2x}$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння
$$y''+2y'+10y=0.$$
Характеристичне рівняння для даного рівняння має вигляд
$$k^2+2k+10=0.$$
Корені цього квадратного рівняння будуть уявними (комплексно спряженими):
$$k_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-10}=-1\pm\sqrt{-9}=-1\pm\sqrt{9\cdot(-1)}=-1\pm3i,\ k_{1,2}=-1\pm3i,$$
де $\sqrt{-1}=i$. Згідно з формулою загальний розв'язок рівняння, враховуючи, що $\alpha=-1,\ \beta=3$, має вигляд
$$y=e^{-x}\left(C_1\cos3x+C_2\sin3x\right).$$
Приклад. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-6y'+9y=0$, що задовольняє умови $y(0)=-2,\ y'(0)=1$.

Запишемо характеристичне рівняння для даного диференціального рівняння і визначимо його корені:
$$k^2-6k+9=0,\ (k-3)^2=0,\ k_{1,2}=3.$$
Корені дійсні рівні $k_1=k_2=3$. Тому згідно з формулою загальний розв'язок рівняння має вигляд
$$y=e^{3x}\left(C_1+C_2x\right).$$
Ураховуючи початкові умови, обчислимо сталі величини C_1 та C_2. Так,
$$y'=3e^{3x}\left(C_1+C_2x\right)+e^{3x}\cdot C_2.$$
Тоді
$$\begin{cases}-2=e^0\left(C_1+0\right),\\1=3e^0\left(C_1+0\right)+C_2e^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-2, & C_2=7,\\3C_1+C_2=1, & C_1=-2.\end{cases}$$
Частинний розв'язок рівняння має вигляд $y=e^{3x}(7x-2)$.

24.4. Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

Неоднорідне рівняння завжди може бути розв'язане, якщо знайдено загальний розв'язок однорідного рівняння. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду
$$y''+py'+qy=f(x),$$
де $f(x)$ – неперервна функція, можна знайти методом варіації сталої або іншими частинними методами.

Структура загального розв'язання лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та частинного розв'язку $\tilde{y}(x)$ неоднорідного рівняння і записується у вигляді
$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\tilde{y}(x).$$
Дуже часто під час розв'язування певних інженерних задач права частина ДР може мати такий вигляд:
$$f(x)=e^{ax}\left(P_r(x)\cos bx+Q_s(x)\sin bx\right),\text{ де}$$

- $P_r(x),\ Q_s(x)$ – многочлени ступенів r і s відповідно;

- a і b – дійсні числа.

Доведено, що в цьому разі і взагалі частинний розв'язок $\widetilde{y}\,(x)$ має структуру

$$\widetilde{y}\,(x)=x^k\,e^{ax}\,(\widetilde{P}_m(x)\cos bx+\widetilde{Q}_m(x)\sin bx),$$ де

- $\widetilde{P}_m(x),\,\widetilde{Q}_m(x)$ – многочлени, ступінь яких не перевищує r і s відповідно;
- k – число, яке показує, скільки разів корені відповідного характеристичного рівняння збіглися з числом $z = a + bi$.

Таким чином, можна знайти структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, в якій невідомі лише коефіцієнти в многочленах $\widetilde{P}_m(x),\,\widetilde{Q}_m(x)$. Якщо підставити цей розв'язок та його похідні в початкове рівняння, скласти і розв'язати відповідну систему, то можна знайти ці коефіцієнти і відповідний загальний розв'язок початкового рівняння. Цей спосіб одержав назву ***методу невизначених коефіцієнтів***.

Контрольні запитання

1. Що називається диференціальним рівнянням другого порядку?
2. Що називається розв'язком диференціального рівняння другого порядку?
3. Запишіть вигляд диференціальних рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку. Поясніть на прикладах.
4. Які рівняння називаються лінійними однорідними диференціальними рівняннями другого порядку. Поясніть метод їх розв'язування і наведіть приклади.
5. Поясніть розв'язування лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку. Наведіть приклади.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Атанасян Л. С. Геометрия : учебное пособие / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – Москва : Просвещение, 1986. – 336 с.
2. Базылев В. Т. Геометрия / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – Москва : Просвещение, 1975. – 367 с.
3. Аналитическая геометрия : учебное пособие / С. В. Бахвалов и др. – Москва : Просвещение, 1970. – 376 с.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1980. – 336 с.
5. Аналитическая геометрия : учебное пособие / В. П. Белоусова и др. – Москва : Высшая школа, 1973. – 328 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1969. – 440 с.
7. Математический анализ в вопросах и примерах. Функции нескольких переменных : учебное пособие / В. Ф. Бутузов и др. – Москва : Высшая школа, 1988. – 288 с.
8. Давыдов Н. А. Курс математического анализа : учебное пособие / Н. А. Давыдов. – Москва : Просвещение, 1973. – 351 с.
9. Давыдов Н. А. Сборник задач по математическому анализу / Н. А. Давыдов. – Москва : Просвещение, 1973. – 256 с.
10. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1977. – 528 с.
11. Математичний аналіз у прикладах : навчальний посібник / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ : Вища шк., 2003. – Т. 1. – 470 с.
12. Ефимов К. Г. Краткий курс аналитической геометрии: научное пособие / К. Г. Ефимов. – Москва : Наука, 1979. – 373 с.
13. Жалдак М. І. Комп’ютер на уроках математики : посібник для вчителів / М. І. Жалдак. – Київ : РННЦ «Дініт», 2003. – 324 с.
14. Вилейтнер Г. И. История математики от Декарта до середины XIX столетия : учебник / Г. И. Вилейтнер ; под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1960. – 468 с.
15. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : учебник / Г. И. Вилейтнер ; под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1972. – 495 с.
16. Киселев А. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. И. Киселев, М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко. – Москва : Высш. шк., 1965.
17. Коровкин П. П. Математический анализ : научное пособие / П. П. Коровкин. – Москва : Просвещение, 1974. – Ч. 2. – 464 с.

18. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : научное пособие : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Просвещение, 1988. – Т. 1. – 208 с.
19. Бохан К. А. Курс математического анализа : учебник : в 2 т. / К. А. Бохан, И. А. Егорова ; под ред. Б. З. Вулиха. – Москва : Просвещение, 1972 . – Т. 1. – 439 с.
20. Математический анализ. Кратные и криволинейные интегралы : научное пособие / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – Москва : Просвещение, 1994. – 439 с.
21. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Москва : Высш. шк., 1967.
22. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – Москва : Высш. шк., 1987.
23. Никольский О. А. Курс математического анализа : научное пособие / О. А. Никольский. – Москва : Просвещение, 1986. – 432 с.
24. Уваренков М. М. Курс математического анализа : в 2 т. / М. М. Уваренков, М. З. Маллер. – Москва : Просвещение, 1976. – Т. 1. – 479 с.
25. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1985.
26. Фихтенгольц Г. М. Курс математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Просвещение, 1968. – Т. 1. – 464 с.
27. Шамоня В. Г. Практикум з курсу «Методи обчислень» : навчальний посібник / В. Г. Шамоня, О. В. Семеніхіна. – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2008. – 68 с.
28. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підруч. : у 2 ч. / М. І. Шкіль. – Київ : Вища школа, 1995. – Ч. 1. – 510 с.

Зміст

Навчальне видання

Голубков Ігор Григорович,
Клименко Володимир Андрійович,
Жиленко Тетяна Іванівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

для студентів інженерно-технічних спеціальностей

У двох частинах

Частина 1

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор С. М. Симоненко
Комп'ютерне верстання Т. І. Жиленко

Підписано до друку 27.11.2018, поз.
Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 8,37. Обл.-вид. арк. 10,26. Тираж 30 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.