Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

І. Г. Голубков, В. А. Клименко, Т. І. Жиленко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

У двох частинах

Частина 2

Суми
Сумський державний університет
2018

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

для студентів інженерно-технічних спеціальностей

У двох частинах

Частина 2

Затверджено
на засіданні кафедри
математичного аналізу та методів оптимізації
як конспект лекцій
із дисципліни «Вища математика».
Протокол № 1 від 29.08.2018.

Суми
Сумський державний університет
2018

Вища математика : конспект лекцій : у 2 ч. / укладачі : І. Г. Голубков, В. А. Клименко, Т. І. Жиленко. – Суми : Сумський державний університет, 2018. – Ч. 2. – 116 с.

Кафедра математичного аналізу і методів оптимізації

Лекція 25. Числові ряди, основні властивості, ознаки збіжності

План

25.1. Основні поняття.
25.2. Властивості збіжних рядів.
25.3. Достатні ознаки збіжності для рядів із додатними членами.
25.4. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів.
25.5. Знакочергові ряди. Ознака Лейбніца.
25.6. Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів з додатними членами.

25.1. Основні поняття

Нехай $u_1, u_2, u_3, \ldots, \quad u_n, \ldots$ — деяка нескінченна послідовність чисел. Побудований із цих чисел за допомогою знака «+» символ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

називається *нескінченним рядом* (чи просто *рядом*), а самі числа $u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$ — членами ряду; *n*-й член u_n називається *загальним членом ряду*.

Побудуємо частинні суми ряду:

$$\begin{aligned} &S_1 = u_1, \\ &S_2 = u_1 + u_2, \\ &S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ &\ldots, \\ &S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Частинні суми ряду утворюють таку числову послідовність: $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$ Надалі основним буде питання про збіжність послідовності частинних сум ряду. Таким чином, поняття ряду вводиться для побудови числових послідовностей спеціального вигляду — частинних сум ряду. Такі послідовності широко використовують у математичному аналізі, наприклад, відоме число *e* можна подати таким рядом: $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Означення. Числовий ряд називається збіжним, якщо існує границя послідовності частинних сум ряду:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S.$$

При цьому величина *S* називається сумою ряду, а число

$r_n = S - S_n = u_{n+1} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ — залишком ряду. Якщо границя S_n не існує (нескінченна), то ряд називається розбіжним.

25.2. Властивості збіжних рядів

Теорема 1. Якщо збігається ряд, то збігається його залишок, і навпаки, із збіжності залишку випливає збіжність ряду.

Наслідок 1. Із розбіжності ряду випливає розбіжність його залишку і навпаки.

Наслідок 2. Якщо відкинути скінченну кількість перших членів ряду або додати до нього кілька нових членів, то це не вплине на його збіжність.

Теорема 2. Якщо члени збіжного ряду помножити на сталий множник c, то його збіжність не порушиться, а сума елементів помножиться на це число c:

$$cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} c \cdot u_n = c \cdot S .$$

Теорема 3. Збіжні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma$ можна почленно додавати або віднімати, при цьому ряд $(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ \ldots \ + (u_n \pm v_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ також збігається, а його сума буде $S \pm \sigma$.

Теорема 4. Послідовність частинних сум збіжного ряду обмежена. Це твердження випливає зі збіжності послідовності частинних сум ряду.

Теорема 5. Якщо ряд збігається, то границя його загального члена прямує до 0, тобто $\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S\right) \Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\right)$.

Наслідок. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тобто необхідна умова збіжності ряду не виконується, то ряд розбігається.

Приклад. Перевірити виконання необхідної умови збіжності для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n+2}$.

Маємо $u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{5+\frac{2}{n}} = \frac{2}{5} \neq 0$ – ряд розбігається.

25.3. Достатні ознаки збіжності для рядів із додатними членами

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n\to\infty}^{\infty}= u_n$ з додатними членами $u_n > 0,\ u_2 > 0,\ \ldots,\ u_n > 0,\ \ldots$ Частинні суми ряду утворюють при цьому монотонно зростаючу послідовність: $S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n,\ \ldots$

Теорема 6 (основна). Для того щоб ряд із додатними членами збігся, необхідно і достатньо, щоб усі його частинні суми були обмеженими.

Наслідок. Для того щоб ряд із додатними членами розбігся, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була необмеженою.

Теорема 7 (ознака порівняння рядів). Якщо для рядів із додатними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{2}$$

виконується умова $v_n \ge u_n$, то:

а) зі збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1);

б) із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Означення. Якщо для рядів (1), (2) виконується умова $u_n \le v_n$, то ряд (2) називається *мажорантним* відносно ряду (1), а ряд (1) — *мінорантним* відносно ряду (2).

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n = \dfrac{1}{n!} > 0$. Зауважимо, що

$$\left(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \ge 1\cdot \underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{n-1} = 2^{n-1} \right) \Rightarrow \left(u_n = \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}} = v_n \right).$$

Ряд порівняння $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ збігається як ряд геометричної прогресії із $q = 0{,}5 < 1$. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ збігається.

Теорема 8 (ознака порівняння в граничній формі). Якщо для рядів із додатними членами (1), (2) існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = c \quad (0 < c < +\infty)$, то ряди (1) і (2) збігаються або розбігаються разом.

Теорема 9 (ознака Д'Аламбера). Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами $u_n > 0$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

а) при $l < 1$ ряд збігається;

б) при $l > 1$ ряд розбігається;

в) при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$.

Загальний член ряду $u_n = \frac{2^n}{n!} > 0$.

Тоді $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \; = \frac{2 \cdot 2^n}{n!(n+1)}$

Розглянемо

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$, за ознакою Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ збігається.

Теорема 10 (ознака Коші (радикальна)). Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ з додатними членами існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то:

а) при $l < 1$ ряд збігається;

б) при $l > 1$ ряд розбігається;

в) при $l = 1$ питання про збіжність ряду ознака не вирішує.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

Загальний член ряду $u_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n} > 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1$ – за ознакою Коші ряд збігається.

Теорема 11 (ознака Коші (інтегральна)). Якщо функція $f(x)$ неперервна, додатна і монотонно спадає при $x \geq 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невластивий інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються разом.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд Діріхле (узагальнений гармонічний ряд):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

Загальний член ряду $u_n = \dfrac{1}{n^p} > 0$. Побудуємо функцію $f(x)$:

$$u_n = \frac{1}{n^p} = f(n) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^p}.$$

Збіжність інтегралу Діріхле $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ встановлено в лекції 17 (п. 17. 6 «Невласні інтеграли») і тоді

$$\left(\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} - \left[\begin{array}{l} \text{збігається при } p > 1, \\ \text{розбігається при } p \le 1 \end{array} \right. \right) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \left[\begin{array}{l} \text{збігається при } p > 1, \\ \text{розбігається при } p \le 1 \end{array} \right. \right).$$

У частинному випадку при $p = 1$ маємо гармонічний ряд:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots,$ який, як установлено, буде розбіжним.

25.4. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність знакозмінних рядів

Означення. Ряд називається *знакозмінним*, якщо він містить нескінченне число як додатних, так і від'ємних членів.

Теорема 12 (Коші). Якщо збігається ряд з абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд, тобто $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| - \text{збіжний} \right) \Rightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n - \text{збіжний} \right).$

Означення. Знакозмінний ряд називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд з абсолютних величин членів знакозмінного ряду.

Означення. Знакозмінний ряд називається *умовно збіжним*, якщо цей ряд збігається, а ряд з абсолютних величин його членів розбігається.

Зауваження. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то його збіжність зумовлена достатнім спаданням за абсолютною величиною його членів. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то його збіжність зумовлена не лише спаданням за абсолютною величиною його членів, а й взаємною компенсацією додатних і від'ємних членів ряду.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$.

Загальний член ряду $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$ залежно від n може бути як додатним, так і від'ємним. Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n^2}$ — знакозмінний. Побудуємо ряд з абсолютних величин членів даного ряду: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n|}{n^2}$. Цей ряд буде знакододатним $|u_n| = \dfrac{|\sin n|}{n^2} > 0$, так що для дослідження його на збіжність можна використовувати ознаки збіжності знакододатних рядів. Скористаємось ознакою порівняння рядів: $|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} = v_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — ряд порівняння, він збігається, як і ряд Діріхле, з $p = 2 > 1$. Отже, за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ збігається, а це означає, що збігається й ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$, причому збігається абсолютно.

25.5. Знакочергові ряди. Ознака Лейбніца

Означення. Ряд, кожний член якого відрізняється знаком від попереднього, називається знакочерговим.

Цей ряд має вигляд

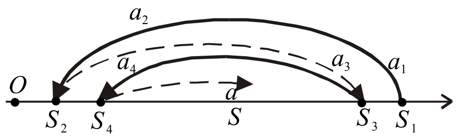
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n .$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$.

Теорема 13 (Лейбніца). Якщо члени знакочергового ряду спадають за абсолютною величиною, і границя абсолютної величини загального члена ряду дорівнює нулю, то ряд збігається:

$$\left(\begin{cases} \boldsymbol{a_n > a_{n+1} > 0} \\ \boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0} \end{cases} \right) \Rightarrow \left(\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n} \text{ — }\textbf{збіжний} \right).$$

Наслідок 1. Знак суми збіжного знакочергового ряду такий само, як і знак першого члена ряду (на ричунку $a_1 > 0, S > 0$).



Наслідок 2. Якщо знакочерговий ряд збігається, то його сума за абсолютною величиною не перевищує першого члена ряду, тобто $|S| < |a_1|$ (на рисунку $0 < S < a_1$).

Наслідок 3. Якщо при обчисленні суми збіжного знакочергового ряду обмежитися лише першими n членами, а всі інші відкинути, то похибка за абсолютною величиною не перевищить першого з відкинутих членів, тобто $|r_n| < |a_{n+1}|$.

Наслідок 4. Якщо для ряду не виконується умова теореми Лейбніца $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна умова збіжності).

Приклад. Дослідити збіжність ряду Лейбніца

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \ldots$$

Загальний член ряду $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ почергово змінює знак, отже, ряд Лейбніца — знакочерговий. Обидві умови теореми Лейбніца для цього ряду виконуються:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Таким чином, ряд Лейбніца буде збіжним, але збіжність умовна, бо ряд з абсолютних величин $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — гармонічний ряд, що розбігається.

Приклад. Скільки членів збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$ необхідно залишити, щоб обчислити його суму з точністю до 0,001?

З огляду на те, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{5^n}$ — знакочерговий і збіжний, скористаємося наслідком 3.

Почергово обчислимо за абсолютною величиною члени ряду, поки не знайдемо такий член, який буде за модулем меншим за 0,001:

$$|u_1| = \frac{1}{5}; \quad |u_2| = \frac{2}{25}; \quad |u_3| = \frac{3}{125}; \quad |u_4| = \frac{4}{625}; \quad |u_5| = \frac{1}{625} > 0{,}001; \quad |u_6| = \frac{6}{625\cdot 25} < 0{,}001.$$

Отже, достатньо залишити п’ять членів ряду.

25.6. Рекомендації щодо використання ознак збіжності рядів із додатними членами

1. Ознака Д’Аламбера зазвичай дає результати тоді, коли загальний член ряду є відношенням алгебраїчного і трансцендентного виразів або відношенням трансцендентних виразів.

Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, то ознака Д’Аламбера питання про збіжність не вирішує.

2. Радикальна ознака Коші зручна в тому разі, якщо загальний член ряду містить степенево-показниковий вираз.

3. Інтегральну ознаку Коші використовують тоді, коли функція загального члена ряду $u_n = f(n) \Rightarrow f(x)$ легко інтегрується.

4. Ознака порівняння рядів може бути використана для рядів із будь-яким загальним членом. Під час дослідження ряду за допомогою ознаки порівняння необхідно вибрати ряд порівняння, збіжність чи розбіжність якого відома. Рядами порівняння зручно вибирати ряд геометричної прогресії або ряд Діріхле.

5. Якщо загальний член ряду — алгебраїчний вираз, тоді для дослідження збіжності ряду зручно використовувати ознаку порівняння рядів у граничній формі, як це було показано на прикладі.

6. Під час дослідження збіжності рядів рекомендується така послідовність дій:
— встановити тип ряду (знакододатний чи знакозмінний);
— перевірити виконання необхідної умови збіжності;
— використати одну з достатніх ознак збіжності.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n} = \frac{1^3}{e} + \frac{2^3}{e^2} + \ldots + \frac{n^3}{e^n} + \ldots$; $u_n = \frac{n^3}{e^n} > 0 \Rightarrow$ ряд знакододатний.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{e^n} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \left|\begin{array}{l} n \sim x \\ n \to \infty \\ x \to +\infty \end{array}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^3)'''}{(e^x)'''} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cdot 2\cdot 1}{e^x} = 0 \Rightarrow$ необхідна умова збіжності виконується (ряд може бути як збіжним, так і розбіжним).
3. Використаємо достатню ознаку збіжності Д'Аламбера. Побудуємо $u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{e^{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot e^n}{e^{n+1}\cdot n^3} = \frac{1}{e} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$ за ознакою Д'Аламбера збігається.

Контрольні запитання

1. Що називається рядом ? Наведіть приклади.
2. Назвіть основні властивості збіжних рядів.
3. Сформулюйте достатні ознаки збіжності для рядів із додатними членами. Наведіть приклади.
4. Наведіть приклади знакозмінних рядів. Поясніть сутність абсолютної та умовної збіжностей знакозмінних рядів.
5. Наведіть приклади знакочергових рядів. Сформулюйте і поясніть застосування ознаки Лейбніца.

Лекція 26. Функціональні ряди

План

26.1. Поняття функціонального ряду та властивості рівномірно збіжних рядів (*).
26.2. Степеневі ряди (*).
26.3. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду (**).
26.4. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів (**).

26.1. Поняття функціонального ряду та властивості рівномірно збіжних рядів

Означення. Ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

де членами ряду $u_n(x)$ є функції від аргументу *x*, називається *функціональним рядом*.

При $x = x_0$ вищезазначений ряд перетворюється на числовий:

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$$

Якщо одержаний числовий ряд збігається (розбігається), то говорть, що при $x = x_0$ збігається (розбігається) відповідний функціональний ряд.

Означення. Всі значення аргументу *x*, за яких функціональний ряд збіжний, називаються *областю збіжності функціонального ряду*.

В області збіжності існує границя часткових сум функціонального ряду

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x), \quad S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x),$$

де функція $S(x)$ — сума ряду.

Ряд $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$ називається *залишком ряду*.

В області збіжності функціонального ряду виконується формула

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x), \text{ де } \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 .$$

Означення. Ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$, збіжний для всіх *x* з області *X*, називається *рівномірно збіжним* у цій області, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує такий незалежний від *x* номер *N*, що при $n > N$ виконується одночасно для всіх $x \in X$ така нерівність:

$$| S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

Ознака Вейєрштрасса. Якщо ряд, складений з абсолютних величин членів функціонального ряду, для всіх $x \in X$ мажорується одним і тим самим збіжним числовим рядом, то функціональний ряд буде *рівномірно збіжним* для $x \in X$.

Приклад. Дослідити характер збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}$.

Оскільки $u_n=\frac{1}{x^2+n^2}=\left|\frac{1}{x^2+n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, тобто члени даного функціонального ряду для будь-якого x мажоруються членами збіжного числового ряду Діріхле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, то за ознакою Вейєрштрасса цей ряд буде рівномірно збіжним для $x\in(-\infty;+\infty)$.

Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Сума рівномірно збіжного ряду неперервних функцій є неперервною функцією.

2. Якщо ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$ рівномірно збіжний на інтервалі (a; b) та існують границі $\lim\limits_{x\to a}u_n(x)=A_n$ $(n=1,2,\ \ldots)$, то виконується рівність:

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n\to 1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}u_n(x).$$

3. Якщо члени збіжного ряду $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$ мають неперервні похідні для $x\in(a;\ b)$, і ряд, складений із похідних членів ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n{}'(x)$, рівномірно збіжний для $x\in(a;\ b)$, то

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x),\quad x\in(a;\ b).$$

4. Якщо члени ряду $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$неперервні, а сам ряд рівномірно збіжний для $x\in(a;\ b)$, то

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

У загальному випадку під час дослідження на збіжність функціонального ряду використовують ту саму методику, що й для знакозмінного ряду.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}=\frac{\sqrt{1}}{x-2}+\frac{\sqrt{2}}{(x-2)^2}+\frac{\sqrt{3}}{(x-2)^3}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}+\ldots$$

Побудуємо ряд з абсолютних величин членів даного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{|\,x-2\,|^n}$.

Цей ряд буде знакододатний. Отже, маємо право застосовувати до нього ознаку Д'Аламбера, при цьому x вважатимемо деяким параметром:

$$|u_n(x)| = \frac{\sqrt{n}}{|x-2|^2}; \ |u_{n+1}(x)| = \frac{\sqrt{n+1}}{|x-2|^{n+1}}; \ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{|x-2|}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{|x-2|}.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд буде збігатись, якщо

$$\frac{1}{|x-2|} < 1 \Leftrightarrow |x-2| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>1 \\ x-2<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right.,$$

і розбігатись, якщо $\frac{1}{|x-2|} > 1 \Leftrightarrow |x-2| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2<1 \\ x-2>-1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Залишається дослідити ряд на збіжність у точках $x = 1$ і $x = 3$.

При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}$, а при $x = 3$ — ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}$. Ці ряди розбігаються, бо, очевидно, для них не виконується необхідна умова збіжності.

Таким чином, область збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ буде $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. У цій області ряд збігається абсолютно.

26.2. Степеневі ряди

Означення. Функціональний ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

називається *степеневим рядом*, його загальний член $u_n(x) = a_nx^n$; числа $a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_n, \ \ldots$ називаються *коефіцієнтами степеневого ряду*.

Розглядають і більш загальний вигляд степеневого ряду:

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots$$

Якщо в останньому візьмемо $x - c = y$, то одержимо ряд вищезазначеного типу.

Теорема (Абеля). Якщо степеневий ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

збігається при $x = x_0$, то він абсолютно збігається для будь-якого x, що задовольняє нерівність $|x| < |x_0|$;

розбігається при $x = x_1$, то він розбігається за всіх x, що задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$.

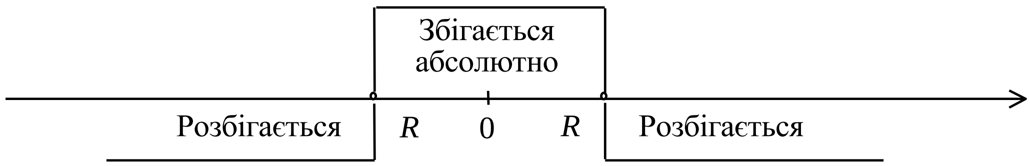
Ілюстрацію до теореми Абеля наведено на рисунку.

26.3. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду

Як наслідок із теореми Абеля для степеневого ряду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

існує інтервал збіжності з центром у точці $x = 0$.



Означення. *Інтервалом збіжності степеневого ряду* називається такий інтервал, в усіх внутрішніх точках якого ряд збігається абсолютно, а для всіх точок $|x| > R$ ряд є розбіжним; при цьому число $R > 0$ називається радіусом збіжності степеневого ряду.

Для узагальненого степеневого ряду

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots$$

інтервал збіжності $(c-R;\ \ c+R)$ має центр симетрії в точці $x = c$.

Зауваження. На кінцях інтервалу збіжності, тобто в точках $x = R$ і $x = R$ ряд може як збігатися, так і розбігатися. Це питання потребує спеціального дослідження в кожному випадку.

Виведемо формулу для знаходження радіуса збіжності ряду $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Для цього побудуємо ряд з абсолютних величин членів ряду:

$$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |a_n| \cdot |x|^n + \ldots$$

Нехай існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$. Тоді, застосовуючи ознаку Д'Аламбера до даного ряду, дістаємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|a_n|\cdot|x|^n} = |x|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|\cdot l .$$

При $|x|\cdot l < 1$ ряд

$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |a_n| \cdot |x|^n + \ldots$ збігається, а отже, ряд

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ збігається абсолютно.

При $|x|\cdot l > 1$ ряд

$|a_0| + |a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |a_n| \cdot |x|^n + \ldots$ розбігається.

Розбіжність ряду, встановлена за ознакою Д'Аламбера, означає, що для цього ряду не виконується необхідна умова збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n(x)| \neq 0$, а тому не виконується необхідна умова збіжності й для ряду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n\,=\,0}^{\infty} a_nx^n.$$

Таким чином, зазначений ряд при $|x|\cdot l > 1$ буде також розбіжним. Отже, нерівність $|x|\cdot l < 1$ визначає інтервал збіжності ряду: $|x|\cdot l < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{l} \Leftrightarrow -\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l}$.

Радіус збіжності визначається за формулою

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Аналогічно, використовуючи радикальну ознаку Коші, можна одержати формулу для радіуса збіжності, степеневого ряду у вигляді: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Зауваження. Формулами, що одержали, можна користуватися лише в тих випадках, якщо зазначені границі існують. У загальному випадку дослідження збіжності степеневого ряду виконується за такою самою методикою, що й для довільного функціонального ряду, наприклад такою, що була використана під час виведення формули радіуса збіжності.

Приклад. Знайти інтервал і радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n x^n}{3^n+7^n}$.

Знайдемо коефіцієнт степеневого ряду a_n : $u_n(x)=\dfrac{2^n x^n}{3^n+7^n}=a_n x^n \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n=\dfrac{2^n}{3^n+7^n}$.

За формулою радіуса збіжності маємо

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(3^{n+1}+7^{n+1}\right)}{2^{n+1}\left(3^n+7^n\right)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{2}.$$

Тоді інтервал збіжності буде $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{2}\right)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{x^3}{1\cdot 2}+\frac{x^6}{2\cdot 4}+\frac{x^9}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}+\ \ldots$$

Загальний член ряду можна записати так: $u_n(x)=\dfrac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$. Цей ряд містить не всі степені x, коефіцієнти a_{3n-2}, a_{3n-1} (n = 1, 2, 3, ...) дорівнюють нулю. Скористатися формулами для радіуса збіжності в даному випадку неможливо. Отже, будемо досліджувати ряд за загальною методикою дослідження функціональних рядів. Побудуємо ряд з абсолютних величин членів даного ряду $|u_n(x)|=\left|\dfrac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}\right|=\dfrac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{3n}}{n\cdot 2^n}$, до якого застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 2^n|x|^{3(n+1)}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}|x|^{3n}}=\frac{|x|^3}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|^3}{2}.$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду (на цьому інтервалі ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 2^n}$ збігатиметься абсолютно): $\frac{|x|^3}{2}<1 \Leftrightarrow |x|^3<2 \Leftrightarrow -\sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{2}$. Радіус збіжності буде $R=\sqrt[3]{2}$.

Проведемо дослідження збіжності ряду на кінцях інтервалу збіжності:

При $x=-\sqrt[3]{2}$ $u_n\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(-\sqrt[3]{2}\right)^{3n}}{n\cdot 2^n}=\frac{(-1)^n}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Одержали ряд Лейбніца, що умовно збігається.

При $x = \sqrt[3]{2}$, $u_n\left(\sqrt[3]{2}\right)=\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Маємо гармонічний ряд, який, як відомо, розбігається.

Таким чином, $x\in[-\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2})$ буде областю збіжності ряду.

26.4. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів

Степеневий ряд $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ буде рівномірно збіжним на будь-якому відрізку з його інтервалу збіжності $(-R;\ R)$, а тому на такому відрізку його можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому мають місце рівності:

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots,$$
$$\int_0^x f(x)\,dx=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+a_2\frac{x^3}{3}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

Приклад. Знайти суму ряду $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$

Позначимо суму ряду через $f(x)$ і знайдемо похідну $f'(x)$: $f'(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$. Одержали ряд геометричної прогресії зі знаменником $q = x$ і першим членом $u_1 = 1$. Цей ряд буде збіжним при $|x|<1$, а його сума має вигляд $S(x)=\frac{1}{1-x}=f'(x)$.

Розв'язуючи це диференціальне рівняння, одержуємо

$$f(x)=\int_0^x \frac{dx}{1-x}=(-\ln|1-x|)\Big|_0^x=-\ln(1-x),\ \ |x|<1.$$

Зауважимо, що формула $-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$ справджується на інтервалі збіжності $x\in(-1;\ 1)$.

Контрольні запитання

1. Що називається функціональним рядом ?
2. Назвіть основні властивості рівномірно збіжних рядів.
3. Сформулюйте достатні ознаки збіжності для рядів із додатними членами. Наведіть приклади.
4. Що називається степеневим рядом ?
5. Що таке інтервал і радіус збіжності степеневого ряду та як їх знайти ?
6. Які ряди можна диференціювати та інтегрувати ?

Лекція 27. Ряди Тейлора і Макларена. Їх застосування

План

27.1. Формули Тейлора і Маклорена (**).
27.2. Зображення функцій степеневими рядами Тейлора і Маклорена (**).
27.3. Приклади застосування рядів (**).

27.1. Формули Тейлора і Маклорена

Припустимо, що функція $y = f(x)$ має всі похідні до $(n + 1)$-го порядку включно на деякому проміжку, який містить точку $x = a$. Знайдемо многочлен $P_n(x)$ степеня, не більшого за n, значення якого в точці $x = a$ дорівнює значенню функції $f(x)$ у цій точці, а значення його похідних до n-го порядку в точці $x = a$ дорівнюють значенням відповідних похідних від функції $f(x)$ у цій точці:

$$P_n(a) = f(a),\ P_n'(a) = f'(a),\ P_n''(a) = f''(a),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Шукатимемо цей многочлен у формі многочлена за степенями $(x - a)$ з невідомими коефіцієнтами:

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots + C_n(x-a)^n.$$

Продиференціювавши n разів останній вираз, дістанемо:

$$\left.\begin{array}{l} P_n'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 + \ldots + nC_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x) = 2\cdot 1C_2 + 3\cdot 2C_3(x-a) + \ldots + n(n-1)C_n(x-a)^{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}\right\}$$

Візьмемо у виразах $x = a$. Результат підставимо у початкові рівності, маємо

$$\begin{array}{l} f(a) = C_0, \\ f'(a) = C_1, \\ f''(a) = 2\cdot 1\cdot C_2, \\ f'''(a) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f^{(n)}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot C_n. \end{array}$$

Звідси:

$$\left.\begin{aligned} &C_0 = f(a),\ C_1 = f'(a),\ C_2 = \frac{1}{1\cdot 2} f''(a), \\ &C_3 = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(a), \ldots, C_n = \frac{1}{1\cdot 2 \ldots n} f^{(n)}(a). \end{aligned}\right\}$$

Підставляючи знайдені значення $C_1, C_2,\ \ldots, C_n$, одержимо шуканий многочлен у вигляді

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Позначимо через $R_n(x)$ різницю значень заданої функції $f(x)$ та побудованого многочлена $P_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Звідси

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Тоді в розгорнутому вигляді

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

Доданок $R_n(x)$ називається залишковим членом у формулі Тейлора. Для тих значень x, для яких залишковий член $R_n(x)$ малий, многочлен $P_n(x)$ дає наближене подання функції $f(x)$.

Оцінимо залишковий член $R_n(x)$ за різних значень x, для цього запишемо його у вигляді

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x),$$

де $Q(x)$ — невідома функція.

Тоді $f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x)$.

Для значень t ($a < t < x$) уведемо допоміжну функцію

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

Знайдемо похідну $F'(t)$ від функції $F(t)$:

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1!} f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!} f''(t) -$$
$$- \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) + \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!} f^{(n)}(t) -$$
$$- \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!} Q(x),$$

або після скорочення

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q(x).$$

Можна встановити $F(x) = 0, \;\; F(a) = 0.$

Таким чином, функція $F(t)$ задовольняє умови теореми Ролля між величинами *a* та *x* існує таке значення $t = \xi,$ за якого $F'(\xi) = 0.$

Тоді маємо

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n}{n!} Q(x) = 0,$$

або

$$Q(x) = f^{(n+1)}(\xi).$$

У кінцевому підсумку маємо

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Одержана рівність називається *залишковим членом у формі Лагранжа*.

Оскільки величина ξ лежить між величинами <u>*x*</u> та *a*, то її можна подати у вигляді $\xi = a + \phi(x-a),$ де $0 < \varphi < 1,$ тоді формула для залишкового члена набирає вигляду

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \phi(x-a)).$$

Вираз

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \phi(x-a)),$$

де $0<\phi<1$, називається формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.

Взявши у формулі $a = 0$, одержимо формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\phi\,x).$$

27.2. Зображення функцій степеневими рядами Тейлора і Маклорена

Якщо функція $f(x)$ має похідну всіх порядків в околі точки $x = a$, то у формулі Тейлора число n можна брати скільки можна великим. Припустимо, що для певного околу залишковий член R_n прямує до нуля при $n\to\infty$. Тоді, розглянувши границю при $n\to\infty$ виразу

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

одержимо нескінченний ряд, що називають рядом Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots$$

Якщо в ряді Тейлора $a = 0$, то одержимо окремий випадок ряду Тейлора – ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Розглянемо ряд Маклорена для деяких елементарних функцій:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\qquad(-\infty<x<\infty),$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\quad(-\infty<x<\infty),$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\quad(-1<x<1),$$

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots\quad(-1<x<1),$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \quad (-1 < x < 1),$$

27.3. Приклади застосування рядів.

Розвинення функцій у степеневі ряди використовують для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, наближеного розв'язування рівнянь і т. ін. При цьому в ряді Маклорена чи Тейлора для даної функції залишають кілька перших членів (зазвичай не більше ніж три), а решту відкидають. Похибка при наближених обчисленнях являє собою суму відкинутих членів ряду — залишок ряду. Для оцінювання похибки, якщо ряд знакосталий, залишок ряду порівнюють із рядом нескінченно спадної геометричної прогресії. Якщо ряд знакочерговий, то, за наслідком теореми Лейбніца, похибка за абсолютною величиною не перевищує першого з відкинутих членів ряду.

Приклад. Обчислити з точністю до 0,001: $\sqrt[3]{9}$.

Зробимо такі перетворення: $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{8+1} = 2\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$. Скористаємося рядом Маклорена для функції $(1+x)^m$, узявши $x = \frac{1}{8}$, $m = \frac{1}{3}$. Тоді дістанемо

$$\sqrt[3]{9} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 2(1+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{8}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\left(\frac{1}{8}\right)^3 + \ldots) = 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{3^2\cdot 64} + \frac{10}{3^4\cdot 512} - \ldots$$

За винятком першого члена, дістали знакочерговий ряд, він буде збіжним, бо $\frac{1}{8} \in (-1;\, 1)$.

Похибка r_n за абсолютною величиною буде меншою від першого з відкинутих членів. Послідовно обчислюємо: $|r_1| < \frac{1}{12}$, $|r_2| < \frac{1}{288}$, $|r_3| = \frac{2\cdot 5}{81\cdot 512} < 0{,}001$. Отже, щоб обчислити задане значення з точністю до 0,001, достатньо залишити три перші члени: $\sqrt[3]{9} \approx 2 + \frac{1}{12} - \frac{2}{9\cdot 64} = 2\frac{23}{288} \approx 2{,}0798 \approx 2{,}080$.

Приклад. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,001.

Відомо

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{при } x > 0.$$

Маємо

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{\frac{1}{4}}{2!} + \ldots + \frac{\frac{1}{2^n}}{n!} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Оцінку похибки при обчисленні $\sqrt{e}$ дістанемо узявши $x = \frac{1}{2}$:

$$r_n < \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{n + 1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n \cdot n!(2n+1)}.$$

Знайдемо таке n, щоб похибка була меншою за 0,01. Для цього послідовно виконаємо: $n = 1,\ n = 2,\ n = 3,\ \ldots,\ r_1 < \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{1}{6},\quad r_2 = \frac{1}{4 \cdot 2! \cdot 5} = \frac{1}{40},\quad r_3 < \frac{1}{2^3 \cdot 3! \cdot 7} = \frac{1}{336} < 0{,}01.$

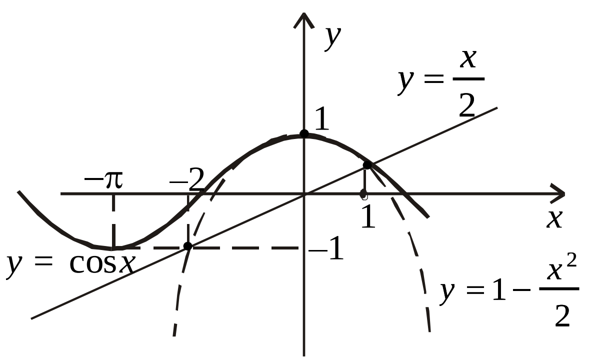
Отже, $n = 3$ і для обчислення з точністю до 0,01, тому

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{\frac{1}{4}}{2!} + \frac{\frac{1}{8}}{3!} \approx 1 + 0{,}50 + 0{,}125 + 0{,}021 \approx 1{,}65.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{x}{2}$, обмежуючись двома членами ряду Маклорена для $\cos x$.

Візьмемо $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$, тоді одержимо квадратне рівняння

$1 - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \ x^2 + x - 2 = 0$, яке має розв'язки $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.



З рисунка бачимо, що $x_2 = -2$ не буде розв'язком початкового рівняння.

Отже, рівняння має єдиний розв'язок, наближене значення якого $x = 1$.

Приклад. Обчислити $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \left|\dfrac{0}{0}\right|$.

Замінимо e^x і $\sin x$ відповідними рядами Маклорена:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2}{x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \ldots} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{x^3}{3!} + 2\cdot\dfrac{x^4}{4!} + \ldots}{\dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \ldots} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{3!} + 2\cdot\dfrac{2x}{4!} + \ldots}{\dfrac{1}{3!} - \dfrac{x^2}{5!} + \ldots} = 2.$$

Контрольні запитання

1. Запишіть розвинення у ряд Маклорена основних елементарних функцій.
2. Наведіть приклади застосування рядів Тейлора і Маклорена.

Лекція 28. Подвійні інтеграли, їх властивості та обчислення

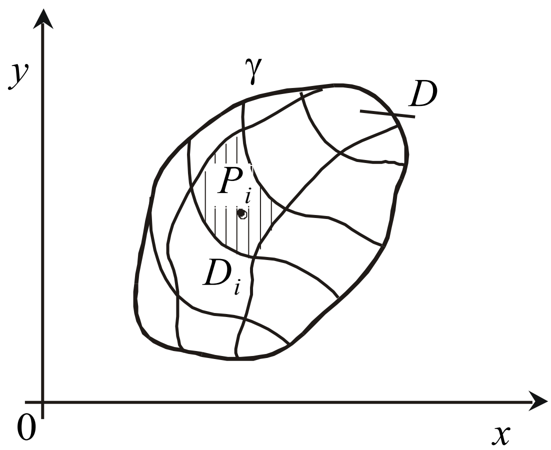
План

28.1. Задачі, що приводять до подвійного інтеграла (*).
28.2. Означення подвійного інтеграла (*).
28.3. Основні властивості подвійного інтеграла (**).
28.4. Зведення подвійного інтеграла до повторного (**).

28.1. Задачі, що приводять до подвійного інтеграла

28.1.1. Маса плоскої пластинки

Нехай D — плоска пластинка, по поверхні якої неперервно розподілена маса з густиною $\rho = \rho\ (x,\ y)$. Потрібно знайти масу пластинки.



Поділимо пластинку D за допомогою кусково-гладких дуг довільним чином на n частин D_i.

Припускаючи що густина ρ у кожній частині D_i стала і дорівнює $\rho(\xi_i;\ \eta_i)$, де $P_i(\xi_i;\ \eta_i)$ — довільна точка D_i, дістаємо наближену масу частини D_i:

$\Delta m_i \approx \rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$,

де ΔS_i — площа D_i.

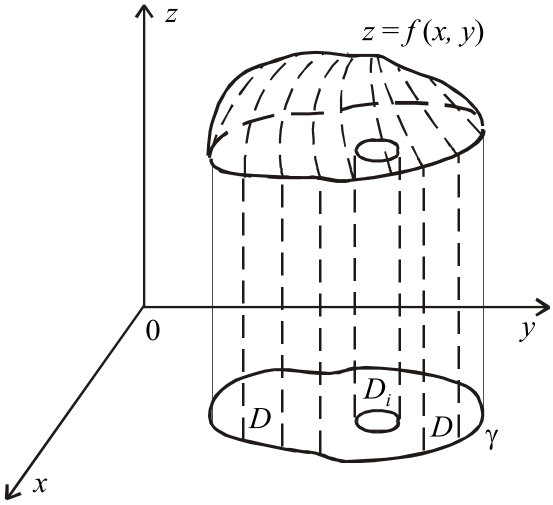
Тоді маса всієї пластинки D наближено дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$. Точна маса m усієї пластинки виражається граничним переходом при $\Delta = \max d_i \to 0$:

$$m = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i\ .$$

28.1.2. Об'єм криволінійного циліндра

Нехай $z = f(x;\ y)$ — невід'ємна, неперервна в замкненій обмеженій області D функція, тобто $f(x;\ y) \geq 0$, $\forall (x;\ y) \in D$. У тривимірному просторі рівняння $z = f(x;\ y)$ визначає деяку поверхню S, проекція якої на площину xOy збігається з областю D. Потрібно визначити об'єм V тіла T, обмеженого згори поверхнею S і знизу областю D із межею γ та циліндричною поверхнею з напрямною γ і твірними, паралельними осі z.

Таке тіло називається *криволінійним циліндром.*



Поділимо область D на n областей D_i з кусково-гладкими межами γ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Через межу Γ_i проведемо циліндричну поверхню з твірними, паралельними осі z. Ці поверхні розіб'ють тіло T на n стовпчиків T_i, об'єм кожного з яких наближено дорівнює $\Delta T_i = f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, де $(\xi_i;\ \eta_i)$ — довільна точка області D_i; ΔS_i — площа області D_i.

Об'єм усього тіла T наближено подамо сумою

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

Нехай d_i — діаметр області D_i, а $\Delta = max\ d_i$. Тоді точне значення об'єму таке:

$$V = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

28.2. Означення подвійного інтеграла

Нехай в області D з кусково-гладкою межею γ задано неперервну функцію $f(x, y)$. Поділимо область D кусково-гладкими дугами на n частинних областей D_i, площа яких ΔS_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

У кожній частинній області D_i виберемо довільну точку $(\xi_i;\ \eta_i)$ й утворимо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

яка називається *інтегральною сумою Рімана.*

Позначимо через Δ найбільший із діаметрів області D_i і назвемо його діаметром розбиття.

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i \to 1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i,$$

яка не залежить ні від способу розбиття області D на частини D_i, ні від вибору точок $(\xi_i;\ \eta_i) \in D_i$, то функція $f(x;\ y)$ називається *інтегровною за Ріманом в області D,* а сама границя називається **подвійним інтегралом від функції** $f(x;\ y)$ за областю D і позначається

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\int(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i.$$

Зауважимо, що інтеграл від функції *f* (*x; y*) за областю *D* є деяким числом. Крім того, виконується рівність

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \iint_D f(u;\ v)dudv,$$

тобто для інтеграла не має значення, якими символами позначено аргументи функції *f* (*x*).

Тоді об’єм криволінійного циліндра, обмеженого поверхнею $z = f(x;\ y) \geq 0$, $\forall(x;\ y) \in D$, областю D та циліндричною поверхнею з напрямною γ і твірними, паралельними осі z, подається так:

$$V = \iint_D f(x;\ y)dxdy.$$

Маса плоскої пластинки відповідно:

$$m = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\ \eta_i)\Delta S_i = \iint_D \rho(x;\ y)dxdy.$$

28.3. Основні властивості подвійного інтеграла

Теорема 1. Для того щоб функція *f* (*x, y*) була інтегровна в області *D*, необхідно, щоб *f* (*x, y*) була обмежена на *D*.

Теорема 2. Якщо функція *f* (*x, y*) неперервна в обмеженій області *D*, то подвійний інтеграл існує.

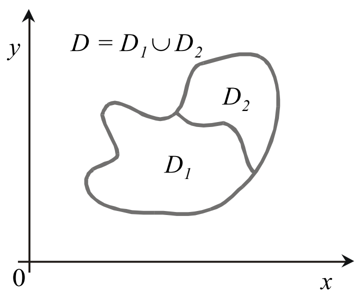
Властивості подвійного інтеграла:

1. $\iint_D 1dxdy = \iint_D dxdy = S,\quad S$ — площа області D.

2. $\iint_D (\alpha\, f(x,y) + \beta\, g(x,y))dxdy = \alpha\iint_D f(x,y)dxdy + \beta\iint_D g(x,y)dxdy$,

   де $\alpha,\ \beta$ — сталі.

3. Нехай $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.



Тоді

$$\iint_D f(x;\ y)dxdy = \iint_{D_1} f(x;\ y)dxdy + \iint_{D_2} f(x;\ y)dxdy.$$

4. Якщо $f(x,\ y) \geq 0$, $\forall (x,\ y) \in D$, то

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy \geq 0.$$

5. Якщо $f(x,\ y) \geq g(x,\ y)$, $\forall (x,\ y) \in D$, то

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy \geq \iint_D g(x,\ y)dxdy.$$

6. **Теорема (про середнє).** Нехай $f(x,\ y)$ — функція, неперервна в обмеженій замкненій зв'язній області *D*. Тоді існує точка $M_0\ (x_0;\ y_0)$ така, що

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = f(x_0,\ y_0)S_D,$$

де S_D – площа області *D*.

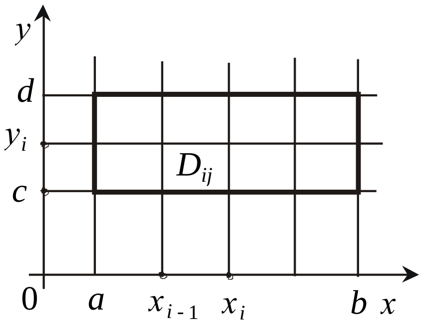
28.4. Зведення подвійного інтеграла до повторного

28.4.1. Випадок прямокутної області

Нехай областю інтегрування є прямокутник

$$D = \{(x,\ y) |\ a \leq x \leq b,\quad c \leq y \leq d\}$$

зі сторонами, паралельними координатним осям, і $f(x,\ y)$ — неперервна в цій області функція.



Якщо зафіксувати $y \in [c,\ d]$, то $f(x,\ y)$ буде неперервною функцією змінної x. Тому існує інтеграл $F(y) = \int\limits_a^b f(x,\ y)dx,$ що є неперервною функцією змінної $y \in [c,\ d]$. Таким чином, функцію $F(y)$ можна інтегрувати на відрізку $[c,\ d]$. Отже, одержимо повторний інтеграл:

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,\ y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)dx.$$

Цей процес можна здійснити в оберненому порядку: спочатку обчислити функцію від x, визначену рівністю $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,\ y)dy$, а потім функцію Φ зінтегрувати за x від a до b. У результаті одержимо повторний інтеграл:

$$\int\limits_a^b \Phi(x)dx = \int\limits_a^b (f(x,\ y)dy)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy.$$

Теорема. Нехай функція $f(x,\ y)$ неперервна в замкненому прямокутнику D. Тоді виконується рівність

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,\ y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,\ y)dx.$$

Приклад. Обчислити інтеграл :

$$\iint\limits_D \left(5x^3 y + 6xy^3\right)dxdy,$$

$$D = \{(x;\ y)|\ 1 \le x \le 2,\ 3 \le y \le 4\}.$$

Маємо

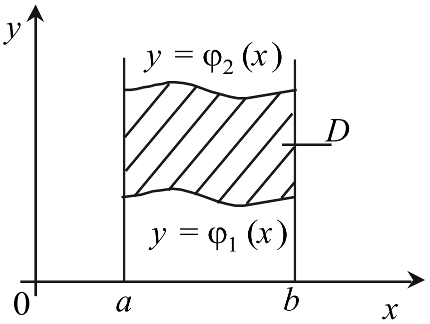
$$\iint\limits_{\substack{1\le x\le 2\\ 3\le y\le 4}}\left(5x^3y+6xy^3\right)dxdy=\int\limits_3^4\left(\int\limits_1^2\left(5x^3y+6xy^3\right)dx\right)dy=$$

= ‖ У внутрішньому інтегралі інтегрування виконуємо за змінною x, вважаючи y сталою. ‖ $=\int\limits_3^4\left(\left(\frac{5}{4}x^4y+3x^2y^3\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2}\right)dy=$

$$=\int\limits_3^4\left(\frac{5}{4}\cdot 2^4y+3\cdot 2^2y^3-\frac{5}{4}y-3y^3\right)dy=\int\limits_3^4\left(\frac{75}{4}y+9y^3\right)dy=$$

$$=\left(\frac{75}{8}y^2+\frac{9}{4}y^4\right)\Bigg|_3^4=\frac{75}{8}\cdot 16+\frac{9}{4}\cdot 256-\frac{75}{8}9-\frac{9}{4}\cdot 81=\frac{75}{8}5\cdot 7+\frac{175}{4}\cdot 9=\frac{3675}{8}$$

28.4.2. Випадок криволінійної області

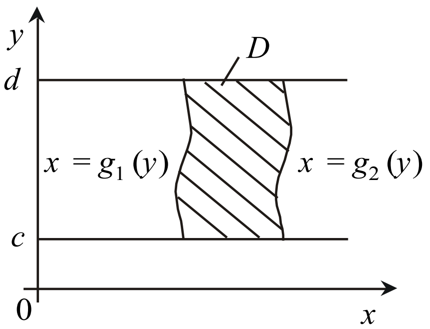


Нехай область D обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, і вертикальними відрізками $x = a$ і $x = b$.

Тоді справджується формула

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,\ y)dy.$$

У зазначеній формулі спочатку функцію f (x, y) інтегруємо за змінною y від $y=\varphi_1(x)$ ***до*** $y=\varphi_2(x)$***, вважаючи x сталою, а потім результат інтегруємо за x на відрізку [a, b].***

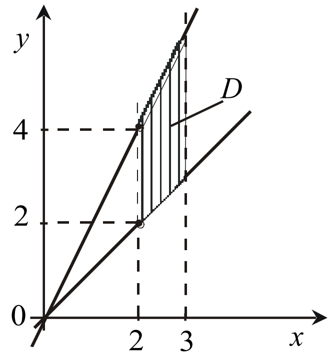


Якщо область D визначається нерівностями $c\le y\le d$, $g_1(y)\le x\le g_2(y)$, ***де*** $g_1(y)$ ***і*** $g_2(y)$ ***— неперервні на відрізку [c; d], то***

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)}f(x,\ y)dx.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D(x+2y)\,dxdy,$ якщо D обмежена прямими $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$.

За формулою маємо

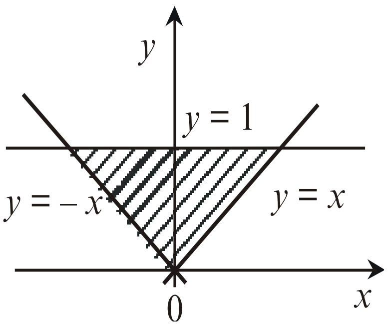


$$\iint\limits_{\substack{y=x,\ y=2x\\ x=2,\ x=3}} (x+2y)\,dxdy = \int_2^3 dx \int_x^{2x} (x+2y)\,dy = \int_2^3 dx\left(xy+y^2\right)\Big|_x^{2x} =$$

$$= \int_2^3 \left(2x^2+4x^2-x^2-x^2\right)dx = \int_2^3 \left(4x^2\right)dx = \frac{4}{3}x^3\Big|_2^3 =$$

$$\frac{4}{3}(27-8) = \frac{4\cdot 19}{3} = \frac{76}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy,$ якщо D обмежена прямими $y = 1,\ y = x,$ $y = -x.$



Одержимо

$$\iint\limits_{\substack{y=x,\ y=-x\\ y=1}} \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy = \int_0^1 dy \int_{-y}^{y} \sqrt{y^2-x^2}\,dx =$$

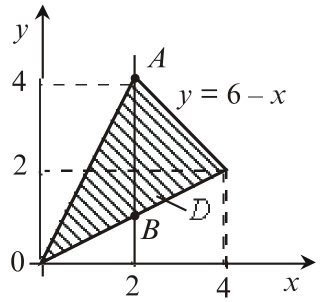
$$= \int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}x\sqrt{y^2-x^2} + \frac{1}{2}y^2 \arcsin\frac{x}{y}\right)\Bigg|_{-y}^{y} =$$

$$= \int_0^1 dy\left(\frac{1}{2}y\cdot 0 + \frac{1}{2}y^2 \arcsin\frac{y}{y} - \frac{1}{2}(-y)\cdot 0 - \frac{1}{3}y^2\cdot \arcsin\left(\frac{-y}{y}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^2\cdot\frac{\pi}{2} + y^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)dy = \frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1 y^2 dy = \frac{\pi}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

Зауваження. Довільну область із кусково-гладкою межею можна розбити на скінченну кількість областей. Тому обчислення подвійного інтеграла завжди зводиться до обчислення повторних інтегралів.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_D (1+x+y)^{-2}\,dxdy,$ якщо D — область, обмежена прямими $x = y,\ y = 2x,\ y = 6 - x$.



Відрізком AB поділимо D на два трикутники D_1 і D_2.

Тоді

$$\iint\limits_D (1+x+y)^{-2}\,dxdy = \iint\limits_{D_1} (1+x+y)^{-2}\,dxdy + \iint\limits_{D_2} (1+x+y)^{-2}\,dxdy.$$

Маємо

$$\iint\limits_{D_1}\left(1+x+y\right)^{-2}dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x/2}^{2x}\frac{dy}{\left(1+x+y\right)^2}=\int\limits_0^2\left(-\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{2x}dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(-\frac{1}{1-3x}+\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}\right)dx=-\frac{1}{3}\ln 7+\frac{2}{3}\ln 4,$$

$$\iint\limits_{D_2}(1+x+y)^{-2}dxdy=\int\limits_2^4 dx\int\limits_{x/2}^{6-x}\frac{dy}{(1+x+y)^2}=\int\limits_2^4\left(-\frac{1}{7}+\frac{1}{1+\frac{3}{2}x}\right)dx=$$

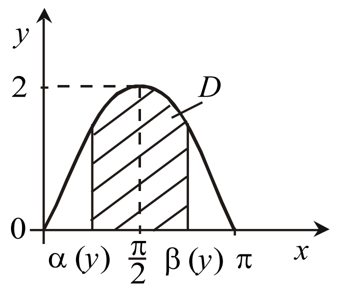
$$=-\frac{2}{7}+\frac{2}{3}(\ln 7-\ln 4).$$

Отже,

$$\iint\limits_{D}\left(1+x+y\right)^{-2}dx=\frac{1}{3}\ln 7-\frac{2}{7}.$$

Приклад 4. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int\limits_0^{\pi}dx\int\limits_0^{2\sin x}f(x,\ y)dy.$$



Область інтегрування показана на рисунку $D=\{(x,\ y)|0\le x\le\pi,\quad 0\le y\le 2\sin x\}$.

Проекцією множини D на вісь Oy є відрізок [0; 2]. Кожна пряма y = *const* з відрізка [0; π] перетинає множину D по відрізках із кінцями α *(y) і* β *(y)*, які знаходимо як розв'язок рівняння $y = 2sinx$ на відрізку [0; π]. Тоді

$$\alpha(y)=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right),\ \beta(y)=\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Таким чином, множина D задається нерівностями:

$$0\le y\le 2,\quad \arcsin\left(\frac{y}{2}\right)<x\le\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right).$$

Маємо

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{2\sin x} f(x,\ y)dy = \int_0^{2} dy \int_{\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)}^{\pi-\arcsin\left(\frac{y}{2}\right)} f(x,\ y)dx.$$

Зауваження. Зміна порядку інтегрування в повторному інтегралі іноді істотно спрощує його обчислення.

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади задач, що приводять до подвійного інтеграла.
2. Дайте визначення подвійного інтеграла.
3. Які основні властивості подвійного інтеграла ?
4. Наведіть приклади обчислення подвійного інтеграла.

Лекція 29. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Застосування подвійних інтегралів

План

29.1. Заміна змінних у подвійному інтегралі (*).

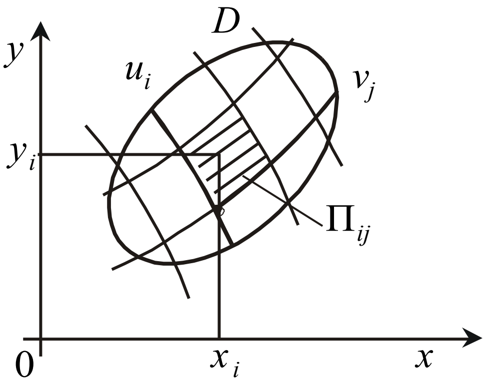
29.2. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах (**).

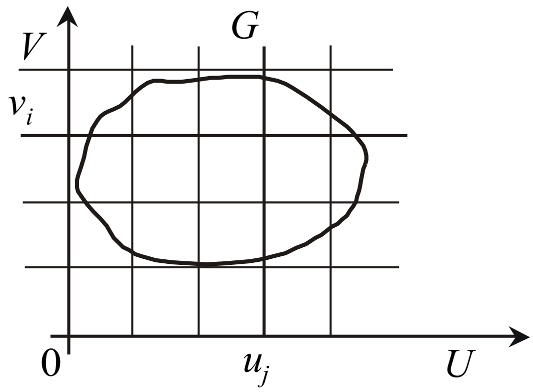
29.3. Застосування подвійних інтегралів (**).

29.4. Приклади.

29.1. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай $f(x,\ y)$ — неперервна функція, визначена в замкненій обмеженій області *D* із кусково-гладкою межею *Г*. Область *D* відображається взаємно однозначно на область *G* площини *uOv* за допомогою функцій *x = x (u,v)* і *y = y (u,v).*





Потрібно перетворити інтеграл $\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy$ на інтеграл за новими змінними $(u,\ v)\in G$. Область *G* розіб'ємо прямими *u = u*$_i$ *= const* і *v = v*$_j$ *= const* на прямокутники P_{ij}, площі яких дорівнюють $S_{P_{ij}}$.

Тоді сім'ї кривих *u (x,y) = u*$_i$ і *v (x,y) = v*$_j$ ділять область *D* на відповідні криволінійні паралелограми Π_{ij} із площами $S_{\Pi_{ij}}$.

При цьому точці $(u_i,\ v_j)\in G$ відповідає точка $\left(x_i,\ y_j\right)=\left(x\ \left(u_i,\ v_j\right),\ y\ \left(u_i,\ v_j\right)\right)\in D$. Звідси

$$\iint\limits_D f\left(x,\ y\right)dxdy=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i\ =\ 1}^{m}\sum_{j\ =\ 1}^{n} f\left(x_i,\ y_i\right)S_{\Pi_{ij}}=\lim_{\substack{\max\Delta u_i\to 0\\ \max\Delta v_j\to 0}}\sum_{i\ =\ 1}^{m}\sum_{j\ =\ 1}^{n} f\left(x\ \left(u_i,\ v_j\right),\ y\ \left(u_i,\ v_j\right)\right).$$

$$\left|\frac{D\left(x,\ y\right)}{D\left(u,\ y\right)}\right|_{\substack{u\ =\ u_i\\ v\ =\ v_j}} S_{P_{ij}}=\iint\limits_G f\left(x\left(u,\ v\right),\ u\left(u,\ v\right)\right)\left|\frac{D\left(x,\ y\right)}{D\left(u,\ v\right)}\right| dudv.$$

Таким чином, якщо функції $x=x\ \left(u,\ v\right),\ y=y\ \left(u,\ v\right)$ здійснюють взаємно однозначно відображення області *G* площини *uy* на області *D* площини *xy*, то справджується рівність

$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_G f(x(u,\ v);\ \ y(u,\ v))\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| dudv,$$

яка називається **формулою заміни змінних у подвійному інтегралі**.

29.2. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Найпоширенішим перетворенням на площині є полярні координати u, v точок області D.

Вони пов'язані з декартовими координатами x і y рівностями:

$x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, де $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (або $-\pi \leq \varphi \leq \pi$).

Беручи $u = \rho$, $v = \varphi$, одержимо

$$\left|\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді подвійний інтеграл із переходом до полярної системи координат перетворюється так:

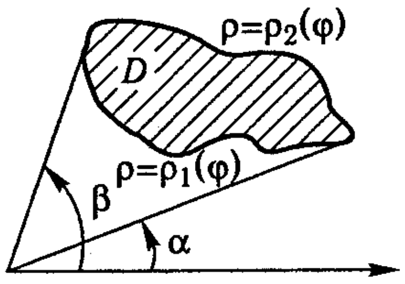
$$\iint\limits_D f(x,\ y)dxdy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi,\ \ \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi.$$

Одержимо формула виражає правило заміни змінних у подвійному інтегралі при переході до полярних координат. Для переходу від декартових координат x і y до полярних ρ і φ потрібно:

– у підінтегральному виразі декартові координати замінити полярними за формулами $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, а замість $dxdy$ підставити $\rho d\rho d\varphi$;

– рівняння ліній, що обмежують область D, також записати в полярних координатах.

Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах проводять шляхом зведення його до повторного.

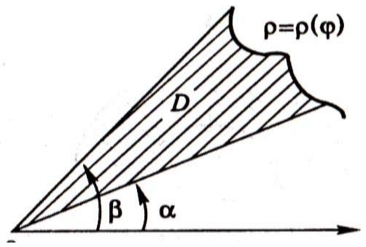


Нехай область D обмежена лініями $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (причому $\rho_1(\varphi) < \rho_2(\varphi)$, $\alpha < \beta$ і $\rho_1(\varphi)$, $\rho_2(\varphi)$ – неперервні функції на $[\alpha, \beta]$.

Тоді шуканий інтеграл запишемо у вигляді

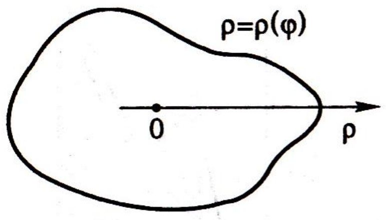
$$\iint\limits_D f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\rho\, d\rho\, d\phi = \int\limits_\alpha^\beta d\phi \int\limits_{\rho_1(\phi)}^{\rho_2(\phi)} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\,\rho\, d\rho.$$

Якщо полюс знаходиться на межі області D, то формула має вигляд



$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{0}^{\rho(\phi)} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\,\rho\,d\rho.$$

Якщо полюс знаходиться в середині області D, а область обмежена лінією $\rho = \rho(\varphi)$, то маємо формулу



$$I = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{\rho(\phi)} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\,\rho\,d\rho.$$

Якщо $\rho(\varphi) = R - const$, то область D є колом із центром у полюсі:

$$I = \int_{0}^{2\pi} d\phi \int_{0}^{R} f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi)\,\rho\,d\rho.$$

Таким чином, площа області D у полярних координатах визначається за формулою

$$S = \iint_D dxdy = \iint_D \rho d\rho d\varphi.$$

29.3. Застосування подвійних інтегралів

29.3.1. Обчислення площ плоских фігур

$$S = \iint_D dxdy.$$

29.3.2. Об'єм тіла

$$V = \iint_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

29.3.3. Площа поверхні

Нехай поверхню Ω задано рівнянням $z = f(x, y)$, а замкнена область D – проекція цієї поверхні на площину Oxy:

$$S_\Omega = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}\, dx\,dy.$$

Якщо поверхню задано рівнянням $x = \varphi(y, z)$ або $y = \phi(y, z)$ і проекції її на площину Oyz або Oxz є областю D_{yz} або D_{xz}, причому функції $\varphi(y, z)$, $\phi(y, z)$ та їх частинні похідні відповідно неперервні у відповідних областях, то матимемо такі формули для обчислення площі поверхні:

$$S_\Omega = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1 + (\phi'_y(y,z))^2 + (\phi'_z(y,z))^2}\, dy\,dz,$$

$$S_\Omega = \iint\limits_{D_{xz}} \sqrt{1 + (\varphi'_x(x,z))^2 + (\varphi'_z(x,z))^2}\, dx\,dz.$$

29.3.4. Маса пластинки

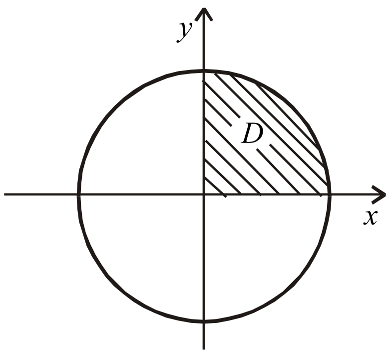
Якщо область D суцільно заповнено масою густиною $\delta = \delta(x, y)$, де $\delta = \delta(x, y)$ – неперервна функція в області D, то її масу визначають за формулою

$$m = \iint\limits_D \delta(x, y)\, dx\,dy.$$

29.4. Приклади

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл:

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy,\ D = \left\{ (x,\ y) \in R^2 \middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2} \right\}.$$



Область інтегрування D зображено на рисунку. Перейдемо в цьому інтегралі до полярних координат, тоді область D' визначатиметься такими нерівностями:

$$\begin{cases} 0 \le \rho \le 1, \\ 0 \le \phi \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

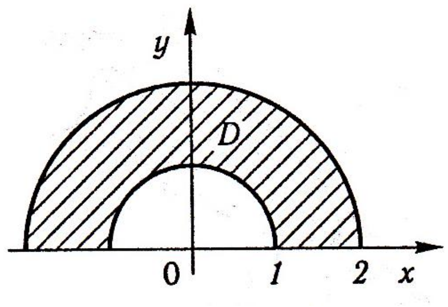
Маємо

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi}\, \rho\, d\rho\, d\varphi = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2}\, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(-\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2}\, d\left(1 - \rho^2\right) \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{2}{3} \left(1 - \rho^2\right)^{\frac{3}{2}} \right) \Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3}(0 - 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Приклад 2. Обчислити подвійний інтеграл: $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, де область обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4,\ y \ge 0.$



Зобразимо область D на рисунку. У заданому інтегралі перейдемо до полярних координат:

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = \rho^2,$$

$$e^{x^2+y^2} = e^{\rho^2}.$$

Рівняння межі області в полярних координатах запишемо так: $\rho = 1,\quad \rho = 2,\ 0 \le \varphi \le \pi$.

Тоді

$$I = \int_0^{\pi} d\phi \int_1^2 e^{\rho^2}\,\rho\,d\rho = \int_0^{\pi} d\phi \frac{1}{2} e^{\rho^2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e)\int_0^{\pi} d\phi = \frac{\pi}{2}(e^4 - e).$$

Приклад 3. Обчислити площу замкненої фігури, обмеженої кривою

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right),\ a > 0.$$

Переходячи до полярних координат, із рівняння кривої одержимо

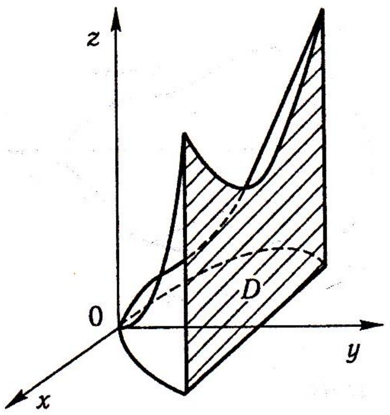
$$\rho^4 = 2a^2\rho^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \Rightarrow \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Зазначена фігура, обмежена даною кривою, буде симетричною відносно координатних осей і початку координат. Отже, достатньо обчислити площу частини фігури, розміщеної в першій координатній чверті, де $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2y}$, і результат помножити на число 4.

Одержимо

$$S = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} \rho\,d\rho = 2\int_0^{\pi/4}\left(p^2 \Big|_0^{a\sqrt{2\cos^2\varphi}} \right) d\varphi = 4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi = 2a^2.$$

Приклад 4. Знайти об'єм тіла V, обмеженого поверхнями: $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$.

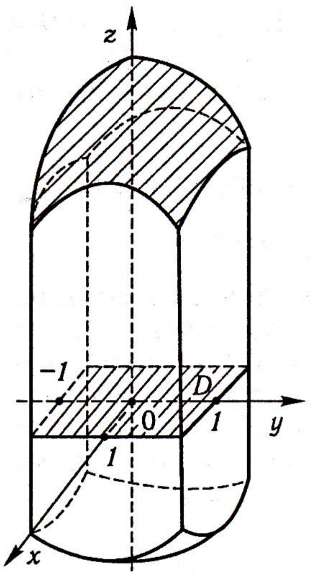


Тіло, об’єм якого потрібно знайти, зображене на рисунку. Оскільки задане тіло симетричне відносно площини *yOz* , то визначимо об’єм частини тіла в першому квадранті й результат помножимо на число 2:

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy=2\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)\,dx=2\int_0^1 dy\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Big|_0^{\sqrt{y}}=$$

$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{5}{2}}\right)dy=\frac{88}{105}(од^3).$$

Приклад 5. Знайти об’єм тіла V, обмеженого поверхнями: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $x^2+y^2=4-z$, $x^2+y^2=4(z+2)$.



Об’єм тіла V знаходимо як суму об’ємів V_1 і V_2 його частин, що знаходяться над і під площиною *xOy*. Область інтегрування – квадрат, для якого

$-1\le x\le 1$, $-1\le y\le 1$,

$$V_1=\iint_D (4-x^2-y^2)\,dx\,dy=4\int_0^1 dx\int_0^1 (4-x^2-y^2)\,dy=4\int_0^1 \left(4y-x^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx=$$

$$=4\int_0^1\left(4-x^2-\frac{1}{3}\right)dx=\frac{40}{3},$$

$$V_2=-\iint_D\left(\frac{x^2+y^2}{4}-2\right)dx\,dy=-4\int_0^1 dx\int_0^1\left(\frac{x^2+y^2}{4}-2\right)dy=-4\int_0^1\left(\frac{1}{4}\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)-2y\right)\Big|_0^1 dx=$$

$$=-4\int_0^1\left(\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)-2\right)dx=\frac{22}{3}.$$

Тоді

$$V=V_1+V_2=\frac{40}{3}+\frac{22}{3}=\frac{62}{3}\ (од.^3).$$

Зауваження: при обчисленні об'ємів тіл бажано хоча б схематично зробити рисунок. У тих випадках, коли цього зробити неможливо, потрібно в площині Оху побудувати область інтегрування.

Приклад 6. Знайти площу поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Знаходимо, що $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $f'_x=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $f'_y=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Визначимо площу поверхні, що знаходиться в першому квадранті:

$$S_0=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dy=\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dy=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\phi \\ y=\rho\sin\phi \\ 0\le\phi\le\dfrac{\pi}{2} \\ 0\le\rho\le R \end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\int_0^R\frac{R\rho\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\sqrt{R^2-\rho^2}\Big|_0^R=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi=\frac{\pi}{2}R^2.$$

Тоді шукана площа $S=8\cdot\dfrac{\pi}{2}\cdot R^2=4\pi R^2\ (од.^2)$.

Приклад 7. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $x = 1 - y^2 - z^2$, вирізану циліндром $y^2 + z^2 = 1$.

Область інтегрування – коло $y^2 + z^2 = 1$, розміщене в площині Ozy. З рівняння параболи маємо

$$x'_y=-2y,\ x'_z=-2z,\ (x'_y)^2+(x'_z)^2=4(y^2+x^2).$$

Площу поверхні визначимо за формулою

$$S_\Omega = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{1+4(y^2+z^2)}\; dy\,dz.$$

Зробимо перехід до полярних координат і одержимо:

$$S_\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\;\rho\,d\rho = \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2}{3}\frac{1}{8}(1+4\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\int_0^{2\pi} d\phi = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\pi\,(од.^2).$$

Контрольні запитання

1. Як здійснити перехід до нових змінних у подвійному інтегралі ?
2. Як обчислити подвійний інтеграл у полярних координатах. Наведіть різні випадки.
3. Наведіть приклади використання подвійних інтегралів.

Лекція 30. Потрійні інтеграли, їх властивості та обчислення

План

30.1. Задача про масу неоднорідної пластинки. Визначення потрійного інтеграла.
30.2. Обчислення потрійного інтеграла.
30.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі.
30.4. Приклади.

30.1. Задача про масу неоднорідної пластинки. Визначення потрійного інтеграла

Розглянемо тіло в просторі, суцільно заповнене речовиною, густина якої δ. Якщо тіло однорідне, тобто густина $\delta = const$, то його маса $m = \delta V$, де V – об'єм цього тіла.

Нехай густина $\delta = \delta(x, y, z)$ – неперервна функція в просторовій області V. У цьому разі масу тіла неможливо обчислити за попередньою формулою. Тому область V поділимо довільно на n частин без спільних внутрішніх точок, об'єми яких $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$. У кожній частині ΔV_k виберемо довільну точку M_k (ξ_k, η_k, ζ_k). Будемо вважати, що густина кожної частини буде сталою і дорівнює густині в точці M_k, тобто $\delta = \delta(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$. Тоді для маси m цього тіла одержимо наближений вираз:

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k, \zeta_\kappa)\Delta V_k .$$

Ця сума тим точніше виражатиме масу m, чим меншими будуть ΔV_k. Тоді за масу m природно взяти

$$m = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k .$$

Зазначимо, що до обчислення подібної границі приводять ще й інші задачі.

Тому розглянемо в загальному випадку вираз $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k$, де $f(x, y, z)$ – неперервна функція в області V.

Означення. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k$ і не залежить від способу ділення області на частини і вибору точки M_k у кожній з них, то її називають потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ за областю V і позначають

$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV$, або $\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$.

Отже,

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dV = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k .$$

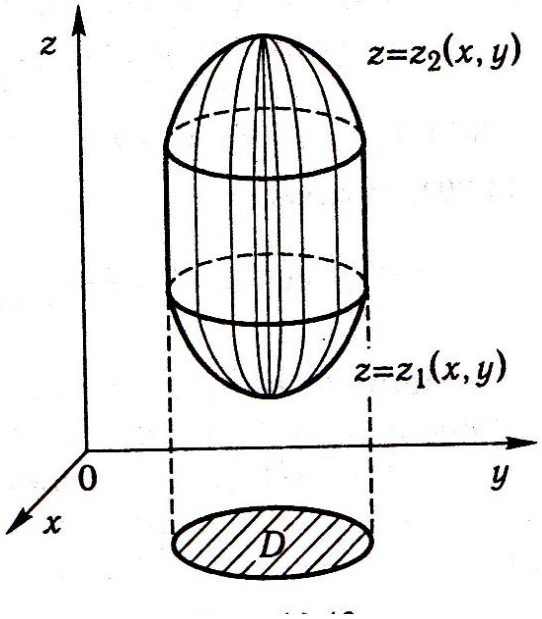
У цьому разі функцію $f(x, y, z)$ називають інтегрованою в області V, область V – областю інтегрування.

Повертаючись до задачі про масу неоднорідної пластинки, можна записати

$m = \iiint\limits_{(V)} \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$. Цю рівність розглядають як механічний зміст потрійного інтеграла, якщо $f(x, y, z) \geq 0$ для всіх (x, y, z) з області V.

Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям подвійного інтеграла, тому на них зупинятися не будемо.

30.2. Обчислення потрійного інтеграла

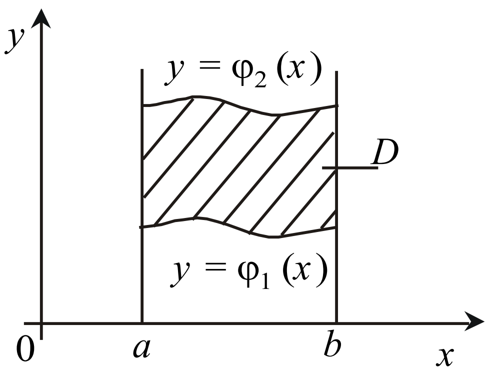


Нехай замкнена область V обмежена знизу і зверху відповідно поверхнями $z = z_1(x, y)$ і поверхнями $z = z_2(x, y)$, де $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ – неперервні в замкненій області D, яка є проекцією області V на площину Oxy, причому $z_1(x, y) < z_2(x, y)$ для всіх (x, y) з області D. Із боків область обмежена циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz.

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в області V, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{D}\left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy\,.$$

У внутрішньому інтегралі x і y вважають сталими. Після його обчислення одержимо вираз, що залежить лише від x і y.



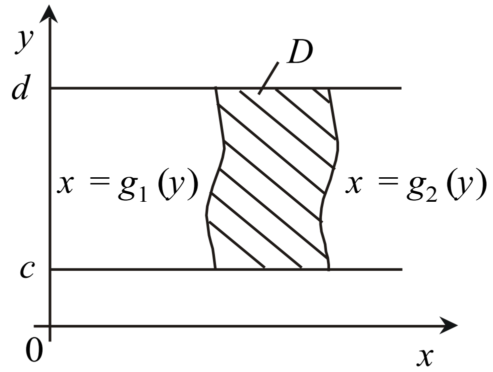
Якщо область D обмежена двома неперервними кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$, $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, і вертикальними відрізками $x = a$ і $x = b$, тоді справджується формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Порядок інтегрування може бути іншим. Розглянемо такий випадок області D.

Якщо область D визначається нерівностями $c\le y\le d$, $g_1(y)\le x\le g_2(y)$, де $g_1(y)$ і $g_2(y)$ — неперервні на відрізку $[c; d]$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

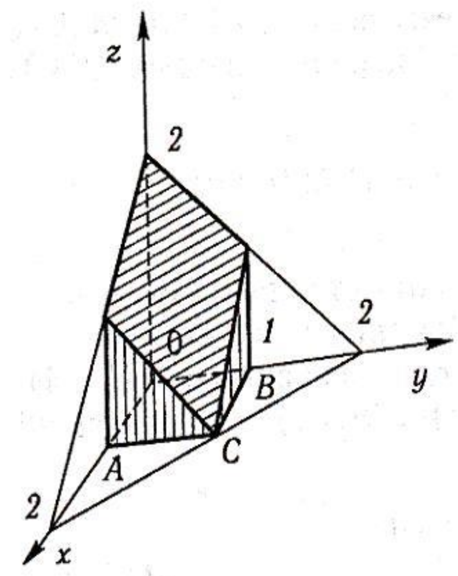


Зокрема, якщо область інтегрування – паралелепіпед: $a \le x \le b,\ c \le y \le d, k \le z \le l$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x,y,z)\,dz\,.$$

У цьому разі інтегрування виконують у будь-якому порядку.

Приклад. Обчислити масу тіла, обмеженого координатними площинами і площинами $x + y + z = 2,\ x = 1,\ y = 1$, якщо його густина $\delta(x, y, z) = x + 2z$.



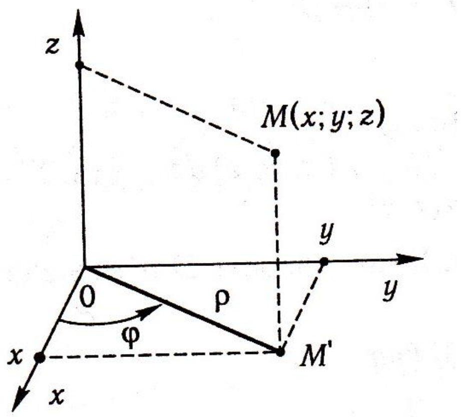
$$m = \iiint\limits_{(V)} (x+2z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{2-x-y} (x+2z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (xz+z^2)\Big|_0^{2-x-y} dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x(2-x-y)+(2-x-y)^2)\,dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (y^2+xy-4y-2x+4)\,dy = \int_0^1 (-\frac{3}{2}x+\frac{7}{3})\,dx = \frac{19}{12}.$$

30.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі

На практиці найбільше використовують циліндричні та сферичні координати.



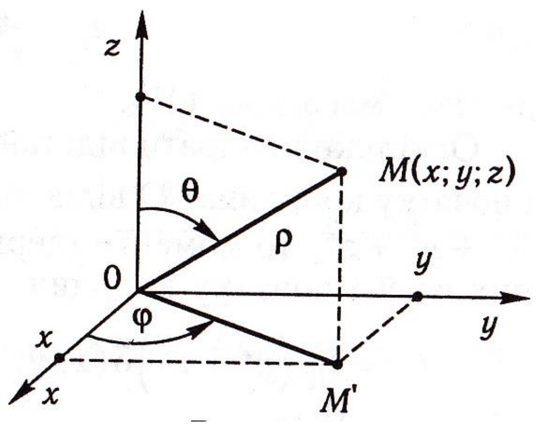
Циліндричними координатами точки *M (x, y, z)* називають числа ρ, ϕ, z , де ρ, ϕ — полярні координати точки M' – проекції точки *M* на площину *Oxy*.

Тоді

$$x=\rho\cos\phi,\ y=\rho\sin\phi,\ z=z,$$
$$0\le\phi<2\pi,\ 0\le\rho<+\infty,\ -\infty<z<+\infty.$$

Формула переходу від прямокутних координат до циліндричних має вигляд

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz\,.$$



Сферичними координатами точки *M (x, y, z)* називають числа ρ, φ, θ , де θ — кут між віссю *Oz* і радіусом-вектором *OM* точки *M*; ρ — довжина цього радіуса-вектора; φ — кут між проекцією радіуса-вектора *OM* на площину *Oxy* і віссю *Ox*.

Маємо $OM'=\rho\sin\theta$.

Тоді

$$x=\rho\sin\theta\cos\phi,\ y=\rho\sin\theta\sin\phi,\ z=\rho\cos\theta,$$
$$0\le\phi<2\pi,\ 0\le\rho<+\infty,\ 0\le\theta\le\pi.$$

Формула переходу від прямокутних координат до сферичних має вигляд

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Якщо *f (x, y, z) = 1*, то інтеграл має вигляд

$$V=\iiint\limits_{(V)} \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Ця формула дозволяє визначити об’єм тіла через сферичні координати.

30.4. Приклади

Приклад 1. Знайти масу *m* циліндра (з висотою *H* і радіусом *R*), якщо густина δ обернено пропорційна відстані точки від осі.

За умовою $\delta(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Оскільки $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$, то

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin\varphi}=\rho .$$

Тоді

$$\delta(x,y,z)=\frac{k}{\rho},$$

$$m=\iiint\limits_{(V)}\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\rho\,d\rho\int\limits_0^H\frac{k}{\rho}dz=2\pi k\int\limits_0^R d\rho\cdot z\,\Big|_0^H=2\pi RHk .$$

Приклад 2. Визначити масу півкулі $x^2+y^2+z^2\le 9,\ x\ge 0$, якщо густина в кожній точці пропорційна відстані від точки до центра кулі.

За умовою $\delta(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Тоді $m=\iiint\limits_{(V)}k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$.

Оскільки V – верхня частина півкулі, то при переході до сферичних координат маємо

$$0\le\phi<2\pi,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\rho\le 3,$$

$$m=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int\limits_0^3\rho^3\,d\rho=-2\pi\cos\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^4}{4}=\frac{2\pi\cdot 81}{4}=\frac{81\pi}{2} .$$

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади задач, що приводять до потрійного інтеграла.
2. Дайте визначення потрійного інтеграла.
3. Які основні властивості потрійного інтеграла ?
4. Наведіть приклади застосування потрійних інтегралів.

Лекція 31. Криволінійні інтеграли, їх властивості та застосування

План

31.1. Криволінійний інтеграл першого роду.
31.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду..
31.3. Криволінійний інтеграл другого роду.
31.4. Формула Гріна.

31.1. Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай на площині Oxy задано гладку криву l, у точках якої визначено неперервну функцію $f(x, y)$. Криву l довільно розіб'ємо на частини l_i завдовжки Δl_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У частині l_i виберемо довільну точку (x_i, y_i) і утворимо інтегральну суму:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

Нехай $\Delta = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$.

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i,$$

яка не залежить ні від способу поділу дуги l на частини l_i, ні від вибору точок $(x_i, y_i) \in l_i$, то ця границя називається **криволінійним інтегралом першого роду за дугою l від функції $f(x, y)$** і позначається $\int\limits_l f(x, y)dl$.

Отже, за означенням

$$\int\limits_l f(x, y)dl = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i.$$

31.2. Обчислення криволінійних інтегралів першого роду

Нехай криву l задано на площині рівнянням $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, а $f(x, y)$ — неперервна в точках цієї кривої функція.

Точки $(x, y) \in l$ мають вигляд $(x, g(x))$, $x \in [a, b]$. Тоді функція $f(x, y)$ у точках кривої l подається так: $f(x, y) = f(x, g(x))$, а довжина i-ї частини l_i наближено дорівнює $\Delta l_i = \sqrt{1 + g'^2(x_i)}\Delta x_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Отже, інтегральна сума набирає вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, g(x_i))\sqrt{1 + g'^2(x_i)}\Delta x_i.$$

Звідси границя виразу при $\Delta \to 0$ являє собою інтеграл

$$\int_l f(x,\ y)dl = \int_a^b f(x,\ \ g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}dx.$$

Якщо крива *l* задана параметрично: $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int_l f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),\ \ y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt.$$

Якщо рівняння плоскої кривої задане в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то формула має вигляд

$$\int_l f\,(x,y)\,dl = \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} f\,(\,\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\cos\varphi)\,\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\ \ d\varphi\,.$$

Якщо плоска крива задана неперервною функцією, яку можна неперервно диференціювати на *[a, b]*, вигляд якої $y = y(x)$ і *a, b* – абсциси початкової і кінцевої точок, то

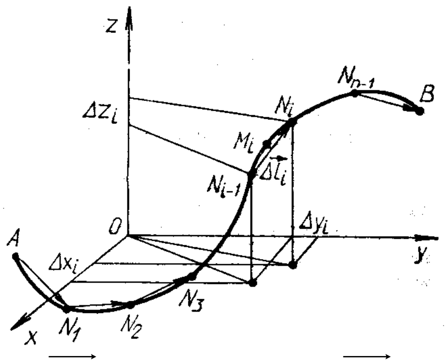
$$\int_l f\,(x,y)\,dl = \int_a^b f\,(\,x, y\,(x)\,)\,\sqrt{1+(\,y'(\,x\,))^2}\ \ dx\,.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_l x\,dl$, де *l* — дуга параболи $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}$, що сполучає точки (0, 0) і (2, $\sqrt{2}$).

Оскільки $x \in [0, 2]$ і $y' = \sqrt{2}x$, то

$$\int_l xdl = \int_0^2 x\sqrt{1+2x^2}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (1+2x^2)^{1/2} d(1+2x^2) = \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x^2)^3}\Big|_0^2 = \frac{13}{6}\,.$$

31.3. Криволінійний інтеграл другого роду



Нехай у просторі задано вектор

$$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}\ ,$$

координати якого неперервні функції в точках орієнтовної кривої l_{AB}. Криву l_{AB} поділемо на *n* елементарних дуг l_i від точки *A* до точки *B* і побудуємо вектори $\overrightarrow{\Delta l_i} = \Delta x_i\,\vec{i} + \Delta y_i\,\vec{j} + \Delta z_i\,\vec{k}$, де $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ — прекції векторів $\overrightarrow{\Delta l_i}$ на осі координат. Початок і кінець цих векторів відповідно збігаються з початками і кінцями дуг $\overrightarrow{\Delta l_i}$. На кожній дузі $\overrightarrow{\Delta l_i}$ виберемо довільну точку $M_i\ (x_i, y_i, z_i\,)$ і складемо інтегральну суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i, z_i)\Delta y_i + R(x_i, y_i, z_i)\Delta z_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i)\overrightarrow{\Delta l_i}.$$

Якщо існує границя вищезазначеної суми за умови, що $\left|\overrightarrow{\Delta l_i}\right| \to 0$, то її називають криволінійним інтегралом другого роду, або криволінійним інтегралом за координатами від вектор-функції $\vec{a}\ (x, y, z)$ по кривій l_{AB}. Позначають так:

$$\int_{l_{AB}} \vec{a}(x, y, z) \cdot dl = \int_{l_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \lim_{\overline{\Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i)\overrightarrow{\Delta l_i}.$$

Криволінійний інтеграл другого роду залежить від напряму інтегрування:

$$\int_{l_{AB}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{l_{BA}} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl}.$$

Якщо крива інтегрування l замкнена, то криволінійні інтеграли другого роду позначаються $\oint_l \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl}$. У цьому разі через криву l проводять орієнтовну поверхню і за додатний напрям обходу по l вважають такий напрям, за якого обхід контура здійснюється проти руху стрілки годинника.

У разі якщо плоску область D, обмежену кривою l, поділити на частини, які не мають спільних внутрішніх точок та обмежені замкненими кривими l_1 та l_2, то

$$\oint_l \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_{l_1} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl} + \oint_{l_2} \vec{a} \cdot \overrightarrow{dl},$$

де напрям обходу контурів l, l_1, l_2 скрізь одночасно додатний або від’ємний.

Нехай крива l задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – диференційовані функції, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ і $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ – відповідна початкова і кінцева точки цієї кривої, то

$$\int_{l_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$
$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t))dt.$$

Якщо крива l знаходиться на площині Oxy і $\vec{a} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$, то $R(x, y, z) = 0$, $z(t) = 0$, і формула набере вигляду

$$\int_{l_{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt.$$

У разі якщо крива l належить площині Oxy і задана рівнянням $y = f(x)$, похідна функції $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $\vec{a} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, то

$$\int\limits_{l_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))\, f'(x))\,dx\,.$$

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_l 2x^2dx - (y^2 - x^2)dy,$ де l — частина параболи $y = x^2$ з початковою точкою (0, 0) і кінцевою точкою (2, 4).

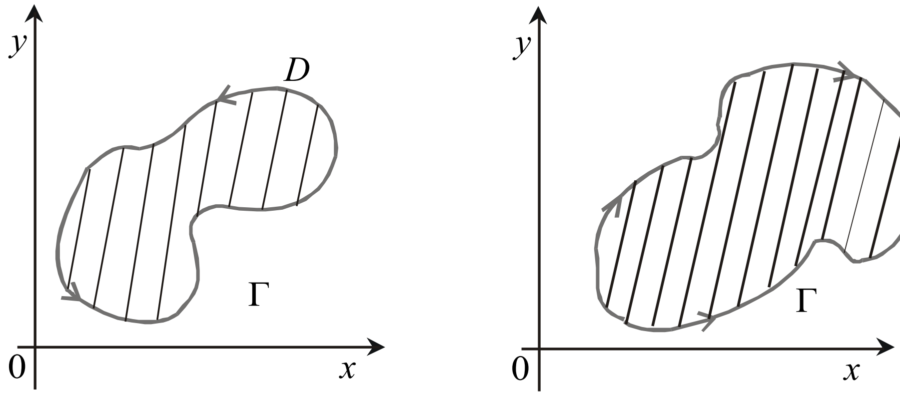
З урахуванням того, що $x \in [0, 2]$, дістаємо

$$\int\limits_l 2x^2dx - (y^2 - x^2)dy = \int\limits_0^2 (2x^2 - 2x^5 + 2x^3)dx = -8.$$

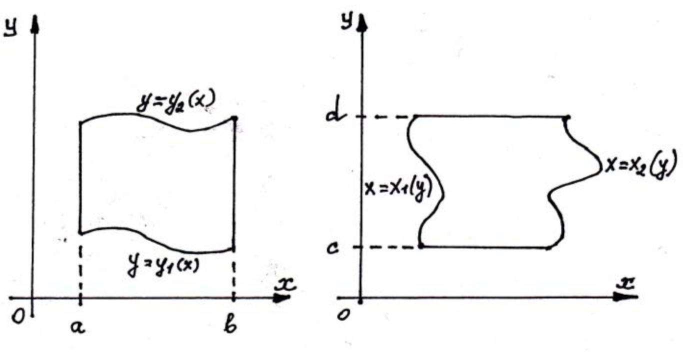
31.4. Формула Гріна

Формула Гріна пов’язує криволінійний інтеграл другого роду за замкненою кривою з подвійним інтегралом за областю, обмеженою цією кривою.

Нехай на площині xy задано замкнену область D із межею $Г$.



Означення. Межа $Г$ області D орієнтована **додатно** (**від’ємно**), якщо під час руху межею $Г$ область D бачимо розміщеною ліворуч (праворуч). Область D орієнтована додатно (від’ємно), якщо її межа орієнтована додатно (від’ємно).



Означення. Область D називається **областю 1-го типу**, якщо вона обмежена знизу кривою $y = y_1(x)$, згори — кривою $y = y_2(x)$ і, можливо, відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, причому будь-яка пряма, паралельна осі Оy, перетинає межі не більше ніж у двох точках.

Означення. Область D називається **областю 2-го типу**, якщо вона обмежена ліворуч кривою $x = x_1(y)$, праворуч — кривою $x = x_2(y)$ і, можливо, відрізками прямих $y = c$ і $y = d$, причому будь-яка пряма, паралельна осі Оx, перетинає межі не більше ніж у двох точках.

Теорема. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні та мають неперервні частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ у замкненій однозв'язній області D, обмеженій кусково-гладкою кривою l. Тоді

$$\oint_l Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

де криволінійний інтеграл обчислюється за межею області D, орієнтованою додатно.

Вищезазначений вираз називається формулою Гріна.

Приклад. Обчислити інтеграл

$$I = \oint_l -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

де l — коло $x^2 + y^2 = R^2$, яке обходимо рухаючись проти годинникової стрілки.

Маємо $P = -x^2 y$, $Q = xy^2$. Область D, обмежена колом, є кругом $x^2 + y^2 \le R^2$. Оскільки $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2$, то за формулою Гріна

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається інтегралом першого роду?
2. Як обчислити інтеграл першого роду?
3. Що називається інтегралом другого роду?
4. Запишіть і поясніть формулу Гріна.

Лекція 32. Векторна функція скалярного аргументу. Похідна за напрямом. Градієнт. Скалярні там векторні поля

План

32.1. Векторна функція скалярного аргументу.
32.2. Похідна за напрямом. Градієнт.
32.3. Скалярні та векторні поля.

32.1. Векторна функція скалярного аргументу

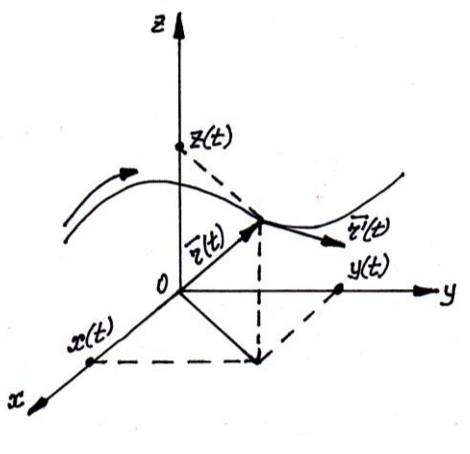
Означення. Співвідношення, при якому кожному числу $t \in T \subset R$ ставиться у співвідношення, за певним законом, один і лише один вектор $\overline{r}$, називається векторною функцією, або вектор-функцією скалярного аргументу t.

Її позначають $\overline{r} = \overline{r}(t)$. Множину T називають областю визначення функції $\overline{r}(t)$. За T беруть відрізок $[a, b]$ або (a, b) числової осі. Число t називають параметром.

Як будь-який вектор, вектор-функцію $\overline{r}(t)$ скалярного аргументу можно розкласти за базисними векторами $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ при фіксованому значенні t:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}.$$

Безумовно, що координати x, y, z вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$ є функціями від t, тобто $x(t), y(t), z(t)$, область визначення для яких збігається з T. Тому мають місце три скалярні рівності: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.



Якщо початком вектора $\overline{r}$ буде точка *O*, за різних значень $t \in T$, то кінцева точка *M (t)* у просторі опише певну лінію, яку називають годографом вектор-функції $\overline{r} = \overline{r}(t)$.

Рівність $\overline{r} = \overline{r}(t) = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$ називають векторно-параметричним рівнянням годографа, а рівності $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ — його параметричними рівняннями.

Якщо $\lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$, $\lim\limits_{t \to t_0} z(t) = z_0$, то вектор $\overline{r_0} = x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}$ називається границею вектор-функції $\overline{r}(t)$ у точці $t = t_0$. У цьому разі має місце запис $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t) = r(t_0)$.

У разі виконання умови $\lim\limits_{t \to t_0} \overline{r}(t) = r(t_0)$ говорять, що вектор-функція $\overline{r}(t)$ неперервна в точці $t = t_0$.

Якщо $\Delta t \neq 0$ — довільний приріст параметра, то $\overline{\Delta r}(t)=\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)$ називають приростом вектор-функції $\overline{r}(t)$. У разі, якщо існує границя

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{\Delta r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t},$$

то її називають похідною вектор-функції $\overline{r}(t)$ у точці t і позначають $\overline{r'}(t)$, $\frac{d\overline{r}(t)}{dt}$.

Вектор $\overline{r'}(t)$ завжди напрямлений по дотичній до годографа функції $\overline{r}(t)$ у бік зростання параметра *t*. Із фізичної точки зору $\overline{r'}(t)$ — вектор миттєвої швидкості руху матеріальної точки по траєкторії, яка є годографом функції $\overline{r}=\overline{r}(t)$, у момент часу *t* у точці *M (t)*.

Якщо існують похідні $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$, то існує похідна $\overline{r'}(t)$:

$$\overline{r'}(t)=x'(t)\,\overline{i}+y'(t)\,\overline{j}+z'(t)\,\overline{k}.$$

Оскільки вектор $\overline{r'}(t_0)$ напрямлений по дотичній до кривої $x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)$ в точці $M_0\ (t_0)$, то рівняння дотичної до кривої у точці M_0 має вигляд

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Площина, що перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику $M_0\ (t_0)$, називається нормальною площиною до кривої в зазначеній точці. Її рівняння має вигляд

$$x'(t_0)\cdot(x-x(t_0))+y'(t_0)\cdot(y-y(t_0))+z'(t_0)\cdot(z-z(t_0))=0$$

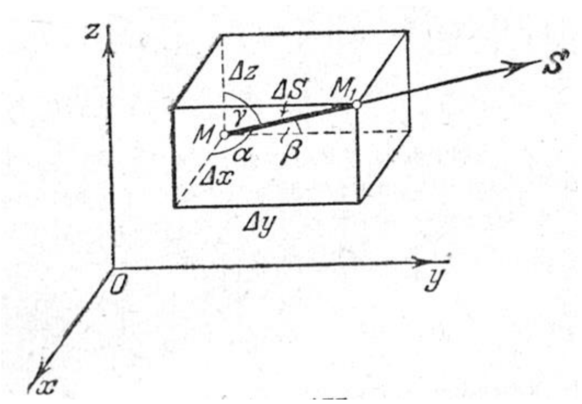
Для векторної функції скалярного аргументу мають місце такі властивості:

1) $(\overline{r_1}+\overline{r_2})'=(\overline{r_1})'+(\overline{r_2})'$;
2) $(C\cdot\overline{r})'=C\cdot(\overline{r})'$, де C – стала;
3) $(\overline{r_1}\cdot\overline{r_2})'=(\overline{r_1})'\cdot\overline{r_2}+\overline{r_1}\cdot(\overline{r_2})'$;
4) $(\overline{r_1}\ X\ \overline{r_2})'=(\overline{r_1})'\ X\ \overline{r_2}+\overline{r_1}\ X(\overline{r_2})'$.

32.2. Похідна за напрямом. Градієнт

Напрям у просторі можна задавати за допомогою одиничного вектора $\overline{s^0}$ із координатами $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, де α, β, γ — кути, утворені вектором $\overline{s^0}$ з осями координат *Ox, Oy, Oz* відповідно.

Розглянемо функцію *u = u (x, y, z)* і точку *M (x, y, z)* в певній області *D* простору.



Побудуємо з точки M вектор $\overline{s}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$. На векторі $\overline{s}$, на відстані Δs від його початку розглянемо точку $M_1\,(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$.

Таким чином,

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\ .$$

Будемо вважати, що функція $u\ (x,\ y,\ z)$ неперервна і має неперервні частинні похідні в області D.

Тоді повний приріст функції

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z,$$

де $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$ прямують до нуля за умови $\Delta s\to 0$.

Ділимо на Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}.$$

Тоді

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma.$$

Таким чином,

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot cos\,\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma+\varepsilon_1\cdot\cos\alpha+\varepsilon_2\cdot\cos\beta+\varepsilon_3\cdot\cos\gamma.$$

Границя відношення $\dfrac{\Delta u}{\Delta s}$ при $\Delta s\to 0$ називається похідною від функції $u\ (x,\ y,\ z)$ у точці $M(x,\ y,\ z)$ за напрямом вектора $\overline{s}$ і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial s}$:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial s}.$$

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot cos\,\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\cos\gamma\ .$$

У кожній точці області D, де задана функція $u = u\ (x,\ y,\ z)$, визначимо вектор, проекціями якого на осі координат є значення частинних похідних $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial z}$ цієї функції у відповідній точці:

$$\overline{grad\,u}\ =\frac{\partial u}{\partial x}\,\overline{i}\ +\ \frac{\partial u}{\partial y}\,\overline{j}\ +\ \frac{\partial u}{\partial z}\,\overline{k}\ \ .$$

Цей вектор називається градієнтом функції *u (x, y, z)*. Говорять, що в області *D* визначено *векторне поле градієнтів*.

Якщо $\overline{s^0}$ $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, то

$$\frac{\partial u(M)}{\partial s} = \overline{grad\, u} \cdot \overline{s^0} = пр_{\overline{s^0}} \cdot \overline{grad\, u}(M).$$

Із цього зв'язку між похідною за напрямом і градієнтом функції *u (x, y, z)* випливає:

— градієнт функції напрямлений у бік максимального зростання значень функції;

— якщо одиничний вектор $\overline{s^0}$ і вектор $\overline{grad\, u}$ утворюють прямий кут, то $\frac{\partial u}{\partial s} = 0$;

— вектор $\overline{grad\, u}(M)$ має напрям нормалі в точці *M* поверхні функції *u (x, y, z)*.

32.3. Скалярні та векторні поля

Якщо в кожній точці *M (x, y, z)* тримірного простору *V* визначена скалярна величина

u(x, y, z), то говорять, що в просторі задане скалярне поле *u = u(M)*, тобто будь-яка числова функція *u (M) =f (x, y, z)* в просторі *V* визначає скалярне поле.

Графічно скалярне поле можна показати за допомогою *поверхонь рівня f (x, y, z) = C* у просторі або за допомогою ліній рівня *f (x, y) = C* на площині *Oxy*.

Для будь-якої функції *u = f (x, y, z)*, яка диференційована в точці M_0 (x_0, y_0, z_0), число $\frac{\partial u(M_0)}{\partial s}$ визначає швидкість зміни скалярного поля в напрямі

$$\overline{s^0} \quad (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Якщо в кожній точці *M (x, y, z)* тривимірного простору *V* визначено вектор $\overline{a}\,(P, Q, R)$, де $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ — скалярні функції, то говорять, що в цьому просторі задане векторне поле $\overline{a} = \overline{a}\,(M)$. Якщо функції $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ неперервні, то й поле буде неперервним.

Приклади векторних полів — поле швидкостей рідини, яка тече, поле швидкостей твердого тіла, що обертається з кутовою швидкістю ω навколо даної осі тощо.

Векторна (силова) лінія векторного поля – це лінія, в кожній точці *M* якої вектор $\overline{a}\,(M)$ векторного поля $\overline{a} = \overline{a}\,(M)$ напрямлений по дотичній.

Прикладами векторних ліній можуть бути силові лінії магнітного поля, траєкторії точок, що обертаються в просторі тощо.

Область простору, що суцільно складається з векторних ліній, називається векторною трубкою. У кожній точці M поверхні векторної трубки вектор $\overline{a}$ належить до дотичної площини, проведеної в точці M до цієї трубки.

Векторне або скалярне поле, координати якого не залежать від часу, називається стаціонарним.

Контрольні запитання

1. Що називається векторною функцією скалярного аргументу? Які її властивості?
2. Що називається похідною за напрямом, градієнтом?
3. Які поля називаються скалярними і векторними? Наведіть приклади.

Лекція 33. Поверхневі інтеграли та їх обчислення

План

33.1. Поверхневий інтеграл I роду та його обчислення.
33.2. Поверхневий інтеграл II роду та його обчислення.
33.3. Потік векторного поля через поверхню. Дивергенція векторного поля.
33.4. Циркуляція векторного поля. Ротор векторного поля.

33.1. Поверхневий інтеграл I роду та його обчислення

Нехай $f(x, y, z)$ – неперервна функція в точках гладкої поверхні S тривимірного простору. Поверхня вважається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична площина і при переході від точки до точки положення цієї дотичної площини змінюється неперервно. За допомогою кусково-гладких ліній поділимо поверхню S на n елементарних площин S_i, площі яких позначимо через ΔS_i ($i = 1, \ldots, n$), а діаметри – $\varnothing S_i$. На кожній площині S_i довільно виберемо точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ і обчислимо $f(x_i, y_i, z_i)$ та складемо суму:

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i .$$

Якщо існує границя вищезазначеної суми, що не залежить від способу поділу поверхні на частини і вибору точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$, то її називають поверхневим інтегралом I роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні S. Тобто

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \text{, де } \Delta - max\,\varnothing S_i .$$

Поверхневий інтеграл I роду має такі властивості:

1. $\iint_S (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))\,dS = \alpha \iint_S f(x,y,z)\,dS + \beta \iint_S g(x,y,z)\,dS$.

2. $\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_{S_1} f(x;y,z)\,dS + \iint_{S_2} f(x;y,z)\,dS,\ \partial e\ S = S_1 \cup S_2$.

3. Інтеграл $\iint_S dS$ дорівнює площі поверхні.

Інтеграл $\iint_S \delta(x,\ y,\ z)\,dS$ – маса поверхні S за умови, що функція $\delta(x,\ y,\ z)$ – функція густини по поверхні S .

Якщо область D – проекція поверхні S на площину Oxy і поверхня задана рівнянням $z = F(x, y)$, то має місце формула

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,y,F(x,y))\sqrt{1 + (F'_x)^2 + (F'_y)^2}\,dx\,dy .$$

Приклад. Обчислити $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS$, де S – частина поверхні конуса $x^2+y^2=z^2$, що знаходиться між площинами $z = 0$ і $z= 2$.

Із рівняння поверхні випливає, що проекція поверхні на площину Oxy – коло $x^2+y^2 \le 2$. Тоді

$$F'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ F'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,$$

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\, dS = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\ \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\phi \\ y=\rho\sin\phi \end{vmatrix} =$$

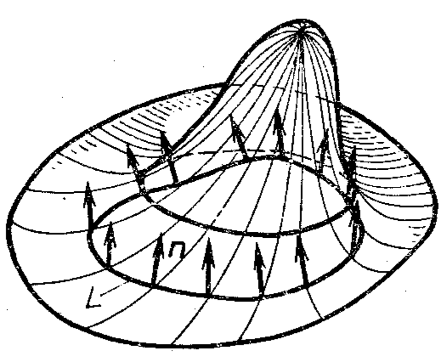
$$= \sqrt{2}\iint\limits_D \rho^2\, d\rho\, d\phi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^2 \rho^2\, d\rho = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

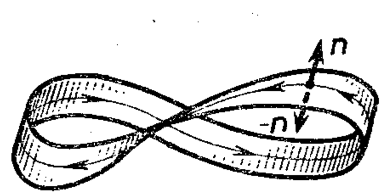
33.2. Поверхневий інтеграл II роду та його обчислення

Сторона гладкої поверхні S , із кожної точки якої проведено нормальний вектор $\overline{n}$ нормалі, вважається додатною, а друга її сторона (якщо вона існує) – від'ємною.

Якщо, в окремому випадку, поверхня S замкнена та обмежує певну область V простору, то додатною, або зовнішньою, стороною поверхні називається та її сторона, нормальні вектори якої напрямлені від області V , а від'ємною, або внутрішньою, – сторона, нормальні вектори якої напрямлені в область V.

Поверхня, в якої існують додатна (зовнішня) і від'ємна (внутрішня) сторони, називається двосторонньою. Двосторонні поверхні мають таку властивість: якщо основа вектора нормалі $\overline{n}$ неперервно рухається по довільному замкненому контуру l , що знаходиться на поверхні, і повертається в точку, з якої починався рух, то напрям вектора $\overline{n}$ збігається з початковим.





Приклади двосторонніх поверхонь – площини, всі поверхні другого порядку, тор тощо.

Для односторонніх поверхонь вищезазначений рух нормалі $\overline{n}$ приводить до «антинормалі», тобто до вектора $\overline{n}$. Класичний приклад такої поверхні – стрічка (лист) Мебіуса.

Поверхня *S* із вибраною стороною називається *орієнтованою*.

Якщо поверхня *S* задана рівнянням $z = f(x, y)$, то нормальний вектор $\overline{n}$, який утворює з віссю *Oz* гострий кут γ, можна задати таким чином: $\overline{n}\,(-f'_x, -f'_y, 1)$, а координати одиничного напрямленого вектора нормалі $\overline{n^0}$ дорівнюють напрямленим косинусам: $\overline{n^0}\,\left(-\frac{f'_x}{|\overline{n}|}, -\frac{f'_y}{|\overline{n}|}, \frac{1}{|\overline{n}|}\right)$ або $\overline{n^0}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, де $|\overline{n}| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}$.

У разі, якщо поверхня *S* задана рівнянням $F(x, y, z)=0$, то $\overline{n^0} = \pm\frac{\overline{grad\,F}}{|\overline{grad\,F}|}$, знак «+» беруть у випадку, якщо кут γ є гострим і «–», – якщо кут γ є тупим.

Нехай в області *V* тривимірного простору визначена векторна функція $\vec{a} = P(x, y, z)\,\overline{i} + Q(x, y, z)\,\overline{j} + R(x, y, z)\,\overline{k}$, неперервна в заданій області *V*. Нехай *S* – гладка поверхня, що знаходиться в даній області *V*, із вибраною додатною стороною , тобто з вибраним напрямом вектора $\overline{n^0}$. Поділимо поверхню *S* кусково-гладкими лініями на елементарні площини S_i, площі яких позначимо через $\Delta S_i (i = 1, \ldots, n)$. На кожній площині S_i довільно виберемо точку $M_i\,(x_i, y_i, z_i)$.

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overline{a}\,(x_i, y_i, z_i)\cdot\overline{n}\,(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta S_i,$$ де $\Delta - max\,Ø\,S_i$, то вона

називається поверхневим інтегралом ІІ роду від функції $\overline{a}$ по поверхні *S*.

Таким чином,

$$\iint_S \overline{a}\cdot\overline{n^0}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\,.$$

При зміні сторони поверхні знак інтеграла змінюється на протилежний.

Оскільки $\cos\alpha\,dS = dy\,dz, \cos\beta\,dS = dz\,dx, \cos\gamma\,dS = dx\,dy$, то вищезазначений інтеграл можна записати у вигляді

$$\iint_S \overline{a}\cdot\overline{n^0}\,dS = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy\,.$$

Якщо S – замкнена гладка поверхня в просторі V і $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції та їх частинні похідні першого порядку в області V, то має місце формула Остроградського – Гауса:

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

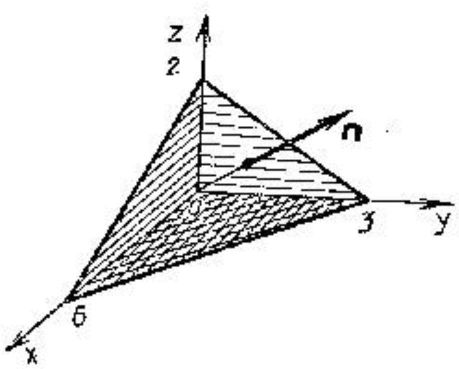
або

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ – напрямлені косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S.

Формула Остроградського – Гауса дозволяє спростити обчислення багатьох поверхневих інтегралів.

Приклад. Обчислити $I = \iint_S (x+y)\,dy\,dz + (y+z)\,dx\,dz + (z+x)\,dx\,dy$, де S – зовнішня сторона поверхні тіла, обмеженого площинами *x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + 3z=6* .



Маємо

$I = \iiint_V (1+1+1)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_V dx\,dy\,dz = 18$, оскільки потрійний інтеграл дорівнює об'єму тетраедра.

33.3. Потік векторного поля через поверхню. Дивергенція векторного поля

Потоком векторного поля $\overline{a}(M), M(x, y, z) \in S$, через поверхню S за напрямом одиничного вектора нормалі $\overline{n^0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ поверхні S називається поверхневий інтеграл II роду:

$$\iint_S \overline{a} \cdot \overline{n^0}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

Якщо вектор $\overline{a}\,(P,Q,R)$ визначає векторне поле швидкостей текучої нестисливої рідини, то вищезазначений інтеграл дорівнює об'єму *П* рідини, що проходить через поверхню *S* в напрямі нормалі $\overline{n^0}$ за одиницю часу (в цьому полягає фізичний зміст поверхневого інтеграла II роду):

$$П=\iint\limits_S \overline{a}\,(M)\cdot\overline{n^0}\;dS\,.$$

Із формули випливає, що *П* – скаляр. У разі якщо кут між вектором $\overline{a}$ і $\overline{n^0}$ гострий, то $П > 0$, а якщо – тупий, то $П < 0$.

Теорему Остроградського – Гауса застосовують у разі, якщо поверхня *S* є замкненою:

$$П=\iint\limits_S \overline{a}\,(M)\cdot\overline{n^0}\;dS \;=\; \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,.$$

Нехай $\overline{a}\,(M)$ – поле швидкостей нестисливої рідини. Якщо $П > 0$, то з формули випливає, що з області *V* витікає більше рідини ніж втікає. Це означає, що в області *V* існують джерела – точки, з яких рідина витікає. Якщо $П < 0$, то з області *V* витікає менше рідини, ніж втікає, в області *V* існують стоки – точки , через які рідина витікає.

У разі якщо в області *V* задано функцію $\vec{a}=P\,(x,y,z)\,\overline{i}+Q\,(x,y,z)\,\overline{j}+R\,(x,y,z)\,\overline{k}$, де функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ мають частинні похідні в точці *M (x, y, z)* за *x, y, z* відповідно, то ***дивергенцією***, або ***розбіжністю***, векторного поля $\overline{a}\,(M)$ в точці *M (x, y, z)* називається величина, що дорівнює сумі вищезазначених частинних похідних, обчислених у точці *M*:

$$div\,\overline{a}\,(M)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\Bigg|_M .$$

Із фізичної точки зору $div\,\overline{a}\,(M)$ характеризує густину джерел або стоків поля $\overline{a}\,(M)$ у точці *M*. Якщо $div\,\overline{a}\,(M) > 0$, то точка *M* – джерело, якщо $div\,\overline{a}\,(M) < 0$, то точка *M* – стік. У разі $div\,\overline{a}\,(M) = 0$ зрозуміло, що в точці *M* відсутні джерела і стоки.

Із наведених формул випливає

$$П=\iint\limits_S \overline{a}\,(M)\cdot\overline{n^0}\;dS\;=\iiint\limits_V div\,\overline{a}\,(M)\,dx\,dy\,dz\,,$$

тобто потік *П* векторного поля $\overline{a}\,(M)$ через замкнену поверхню *S* через зовнішню поверхню дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції цього поля по області *V* , обмеженій поверхнею *S*.

Приклад. Обчислити потік векторного поля $\overline{a} = x\,\overline{i} - 2y\,\overline{j} + z\,\overline{k}$ через верхню частину площини $x+2y+3z=6$, що знаходиться в першому октанті.

Із рівняння площини визначимо $z=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+2$. Нормальний вектор цієї площини $\overline{n}\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$, що утворює з віссю *Oz* гострий кут.

$$\Pi=\iint_S \overline{a}\cdot\overline{n^0}\,dS=\iint_D \overline{a}\cdot\overline{n}\,dx\,dy=\iint_D \frac{1}{3}\left(x-4y+3z\right)dx\,dy=\frac{1}{3}\iint_D\left(6-6y\right)dx\,dy=$$

$$=2\int_0^3 dy\int_0^{6-2y}\left(1-y\right)dx=2\int_0^3\left(1-y\right)\left(6-2y\right)dy=2\int_0^3\left(-2y^2-8y+6\right)dy=36.$$

Приклад. Обчислити дивергенцію векторного поля

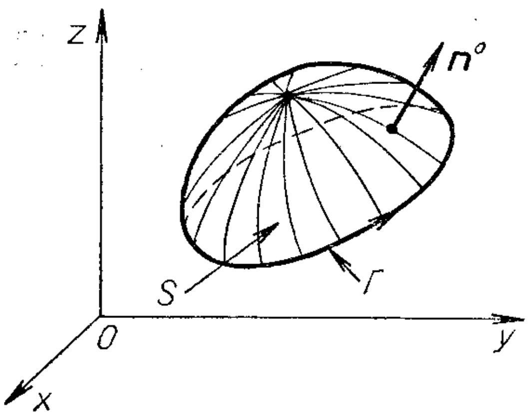
$\overline{a}\,(M)=(x^2+y)\,\overline{i}+(y^2+z)\,\overline{j}+(z^2+x)\,\overline{k}$ в точці $M_0(1,-2,3)$.

Маємо $\overline{div\,a}\,(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z$.

Для точки M_0 одержимо $\overline{div\,a}\,(M_0)=2-4+6=4>0$, тобто точка M_0 є джерелом поля.

33.4. Циркуляція векторного поля. Ротор векторного поля

Нехай *Г* – замкнена кусково-гладка крива у тривимірному просторі і *S* – гладка поверхня, границею якої є крива *Г* . За додатний напрям обходу кривої *Г* беруть такий напрям, при якому область, обмежена кривою *Г* , буде розміщена зліва на додатній поверхні *S* , тобто на стороні, з точок якої проведено одиничний вектор нормалі $\overline{n^0}\,(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$ поверхні *S*.



Нехай в околі поверхні *S* задано вектор $\overline{a}\,(P,Q,R)$, координати якого P,Q,R є неперервними функціями від *x, y, z* відповідно разом зі своїми частинними похідними.

У цьому разі має місце формула Стокса, що пов’язує криволінійний і поверхневий інтеграли:

$$\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)dS.$$

Отже, напрям обходу по замкненій кривій *Г* вибирається додатним. Формула Стокса має місце для будь-якої поверхні *S* , якщо її можна поділити на частини, рівняння яких *z = f (x, y)*.

Формула Гріна є окремим випадком формули Стокса у разі, якщо крива *Г* і поверхня *S* знаходяться в площині *Oxy*.

Якщо задані векторне поле $\overline{a}\,(P,Q,R)$ у кожній точці *M* тривимірного простору і кусково-гладка крива *Г* у цьому просторі, то криволінійний інтеграл

$$C=\oint_{\Gamma}\overline{a}\cdot\overline{\tau^{0}}\,dl=\oint_{\Gamma}P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

називається ***циркуляцією*** векторного поля $\overline{a}\,(M)$ по контуру *Г*. У цій формулі $\overline{\tau^{0}}$ – орт, напрямлений по дотичній кривої *Г* і показує напрям обходу контура.

Якщо вектор $\overline{a}$ – вектор сили, то циркуляція дорівнює роботі силі по замкненому контуру *Г*.

Ротором, або ***вихором***, векторного поля $\overline{a}\,(P,\ Q,\ R)$ у точці *M* простору називається вектор:

$$\overline{rot\,a}\,(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k}\,.$$

Використовуючи поняття ротора і циркуляції, формулу Стокса можна записати у векторній формі таким чином:

$$C=\oint_{\Gamma}\overline{a}\cdot\overline{\tau^{0}}\,dl=\iint_{S}\overline{rot\,a}\cdot\overline{n^{0}}\,dS\ ,$$

тобто циркуляція векторного поля $\overline{a}\,(M)$ по замкненому контуру *Г* дорівнює потоку ротора цього поля через будь-яку гладку поверхню *S* , границею якої є крива *Г* . Напрям обходу по *Г* і сторона поверхні *S* водночас або додатні або від'ємні.

Число $C=np_{\overline{n^{0}}}\,\overline{rot\,a}\,(M)$ називається густиною циркуляції векторного поля $\overline{a}$ в точці *M* у напрямі вектора $\overline{n^{0}}$. Густина набуває максимального значення в напрямі $\overline{rot\,a}\,(M)$ і дорівнює максимуму $\left|\overline{rot\,a}\,(M)\right|$.

Якщо $\overline{rot\,a}=0$, то $\overline{a}$ – сталий вектор. У разі $\overline{rot\,a}\neq 0$ можна стверджувати, що векторне поле обертається.

Контрольні запитання

1. Що називається поверхневим інтегралом I роду, як його обчислити?
2. Що називається поверхневим інтегралом II роду, як він обчислюється?
3. Як Ви розумієте потік векторного поля через поверхню? Який його фізичний зміст?
4. Що називається дивергенцією векторного поля?
5. Що називається циркуляцією та ротором векторного поля? Який їх фізичний зміст?

Лекція 34. Випадкові події та їх класифікація. Класичне означення ймовірності

План

34.1. Класифікація подій.
34.2. Прості та складені випадкові події. Простір елементарних подій.
34.3. Дії над подіями.
34.4. Класичне означення ймовірності.

34.1. Класифікація подій

Розглянемо поняття «випадкова подія», виходячи з його інтуїтивного, наочного розуміння. Проведемо певний дослід, результат якого передбачити неможливо.

Означення. Подія називається *випадковою*, якщо в результаті експерименту вона може настати або не настати залежно від дії численних дрібних факторів, урахувати які дослідник не в змозі.

Випадкові події зазвичай позначають літерами латинської абетки: $A, B, C, \dots$ або $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$; $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Випадкові події поділяють на *ймовірні*, *неможливі* та *випадкові*.

Означення. Якщо в результаті експерименту, певна подія обов'язково настає, то вона називається *вірогідною*. Вірогідна подія позначається символом Ω («омега»).

Наведемо приклади вірогідних подій: у земних умовах вода, нагріта до температури 100 °C, набуває стану кипіння; якщо в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то кулька, навмання взята з цієї урни, має номер, що міститься в межах від 1 до 10.

Означення. Подія називається *неможливою*, якщо в результаті експерименту, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\varnothing$ (порожня множина).

Розглянемо приклади:

— в урні міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10; навмання береться одна кулька; поява кульки з номером 12 буде подією неможливою;

— якщо на дослідній ділянці посіяти 100 зернин ячменю, то подія, яка полягає в тому, що на момент збирання врожаю на цій ділянці з'явиться колосок пшениці, є неможливою.

Таким чином, усі події, пов'язані з певним дослідом, які не відносять до вірогідних і неможливих, будуть випадковими. Розглянемо приклади випадкових подій:

— монету підкидають один раз і поява герба (цифри) — подія випадкова;

— якщо на дослідній ділянці в лабораторних умовах посіяно 100 зернин ячменю, то не можна передбачити наперед, скільки зернин проросте і подія, яка полягає в тому, що проросте від 1 до 100 зернин, є випадковою.

34.2. Прості та складені випадкові події. Простір елементарних подій

Теорія ймовірностей як один із розділів математики досліджує певний вид математичних моделей — моделі випадкових подій, а не самі такі події.

Математичні моделі, як відомо, відбивають найістотніші властивості досліджуваних об'єктів, абстрагуючись від неістотних.

Для математичного опису випадкових подій — наслідків експерименту — застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події*, *простір елементарних подій*.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї й лише однієї спроби (експерименту), називається *простою (елементарною) випадковою подією*.

Елементарні події позначаються ω_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) і в теорії ймовірностей, так само як, скажімо, точка в геометрії не поділяється на простіші складові.

Приклад 1. Монету підкидають один раз. Визначити елементарні події цього експерименту.

Можливі такі елементарні випадкові події:
ω_1 = г (монета випаде гербом);
ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

Приклад 2. Монету підкидають тричі. Визначити елементарні події цього експерименту.

Триразове підкидання монети — це одна спроба. Елементарними випадковими подіями будуть:

ω_1 = ггг (тричі випаде герб);
ω_2 = ццц (тричі випаде цифра);

$$\left.\begin{aligned}\omega_3 &= \text{ггц}\\ \omega_4 &= \text{гцг}\\ \omega_5 &= \text{цгг}\end{aligned}\right\}\ \text{(герб випаде двічі);}$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_6 &= \text{гцц}\\ \omega_7 &= \text{цгц}\\ \omega_8 &= \text{ццг}\end{aligned}\right\}\ \text{(герб випаде один раз).}$$

Отже, цьому експерименту відповідають вісім елементарних подій.

Приклад 3. Задано дві множини цілих чисел $\Omega_1 = \{1, 2, 3\}$, $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4\}$. Із кожної множини навмання беруть по одному числу. Визначити елементарні події цього експерименту — появу пари чисел.

ω_1 = 1; 1;	ω_5 = 2; 1;	ω_9 = 3; 1;
ω_2 = 1; 2;	ω_6 = 2; 2;	ω_{10} = 3; 2;
ω_3 = 1; 3;	ω_7 = 2; 3;	ω_{11} = 3; 3;
ω_4 = 1; 4;	ω_8 = 2; 4;	ω_{12} = 3; 4.

Означення. Випадкова подія називається *складеною*, якщо її можна розкласти на прості (елементарні) події. Складені випадкові події позначаються латинськими великими літерами: A, B, C, D, …

Приклад 4. Задано множину чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання з цієї множини беруть одне число. Побудувати такі випадкові події: 1) з'явиться число, кратне 2; 2) число кратне 3; 3) число, кратне 5. Ці випадкові події будуть складеними. Позначимо їх відповідно A, B, C. Тоді

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; $B = \{3, 6, 9, 12\}$; $C = \{5, 10\}$.

Елементарні випадкові події $\omega_i \in A$, $\omega_j \in B$, $\omega_k \in C$, які належать відповідно складеним випадковим подіям A, B, C, тобто є елементами цих множин, називають *елементарними подіями, які сприяють появі* кожної із зазначених подій унаслідок проведення експерименту (ω_i сприяють появі події A, ω_j — події B, ω_k — події C).

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може відбутися (настати) внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$. Множину називають *простором елементарних подій*.

Приклад 5. Гральний кубик, кожна грань якого позначена певною цифрою від 1 до 6, підкидають один раз. При цьому на грані випадає одна із зазначених цифр. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту (множину Ω) і такі випадкові події: випаде число: 1) A — кратне 2; 2) B — кратне 3.

Оскільки кубик має шість граней, то в результаті експерименту може випасти одна з цифр від 1 до 6.

Отже, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; 1) $A = \{2, 4, 6\}$; 2) $B = \{3, 6\}$.

Приклад 6. Монету підкидають чотири рази. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту і такі випадкові події:

1) A — герб випаде двічі; 2) B — герб випаде не менше ніж тричі.

Шуканий простір елементарних подій:

Ω = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг, ггцц, гццг, гцгц, цгцг, ццгг, цггц, гццц, цгцц, ццгц, цццг, цццц};

1) A = {ггцц, ццгг, гцгц, цгцг, гццг, цггц};
2) B = {гггг, гггц, ггцг, гцгг, цггг).

Простір елементарних подій може бути як дискретним, так і неперервним. Якщо множина є зчисленною (зліченною), тобто всі її елементи можна перелічити або принаймні пронумерувати (кожній елементарній події поставити у відповідність один і лише один елемент нескінченної послідовності натуральних чисел $1, 2, 3, \ldots$), то простір елементарних подій називають *дискретним*. Він може бути обмеженим і необмеженим.

Інакше, тобто, коли кожній елементарній події не можна поставити у взаємно однозначну відповідність певне натуральне число, простір елементарних подій називають *неперервним*.

У розглянутих раніше прикладах простори елементарних подій були дискретними.

Приклади неперервних (недискретних) просторів елементарних подій одержимо розглянувши:

1) розміри однотипних деталей (діаметр, довжина), що їх виготовляє робітник або верстат-автомат;

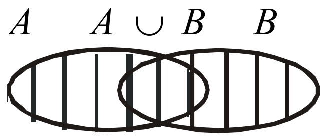
2) покази приладів, що вимірюють масу, силу струму, напругу, опір тощо.

Отже, поняття елементарної події, простору елементарних подій є основними в теорії ймовірностей, як точка і пряма в аксіоматично побудованій евклідовій геометрії. Сама природа елементарних подій у теорії ймовірностей при цьому неістотна.

Простір елементарних подій є математичною моделлю певного ідеалізованого експерименту в тому розумінні, що будь-який можливий його наслідок описується однією й лише однією елементарною подією — наслідком експерименту.

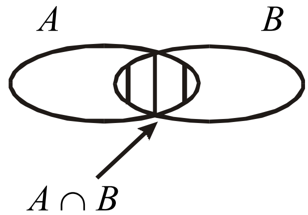
Мовою теорії множин випадкова подія А означується як довільна непорожня підмножина множини Ω ($A \subset \Omega$).

34.3. Дії над подіями



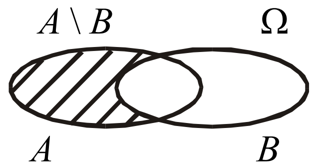
Означення. *Сумою двох подій А* і *В* називається така подія $C = A \bigcup B$ (C = A + B), яка внаслідок експерименту настає з настанням принаймні однієї з подій A або B. Подію $A \bigcup B$ схематично зображено на рисунку заштрихованою областю.

Операція $A \bigcup B$ називається *об'єднанням* цих подій.



Означення. *Добутком двох подій А* і *В* називається така подія $C = A \bigcap B$ ($C = AB$), яка внаслідок експерименту настає з одночасним настанням подій A і B.

Операція $A \bigcap B$ називається *перерізом* цих подій.



Означення. *Різницею двох подій А* і *В* називається така подія $C = A \setminus B$ ($C = A - B$), яка внаслідок експерименту настає з настанням події А і одночасним ненастанням події В.

Приклад. Задано множину цілих чисел Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}. Навмання з неї беруть одне число.

Побудувати випадкові події: 1) A — узяте число кратне 2; 2) B — кратне 3.

Визначити $A \bigcup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$.

Таким чином: 1) $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; 2) $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

Звідси дістаємо:

$A \bigcup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cup \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$;

$A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \cap \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{6, 12\}$;

$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\} \setminus \{3, 6, 9, 12, 15\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$.

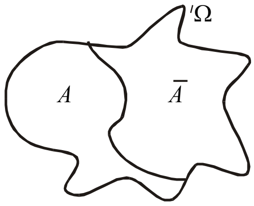
Означення. Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то випадкові події A і B називають *сумісними*.

Означення. Якщо $A \cap B = \varnothing$, то такі випадкові події A і B називають *несумісними*.

Якщо $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup \ldots \bigcup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, то такі випадкові події утворюють *повну групу*, а саме: внаслідок експерименту якась із подій A_i обов'язково настане.

При одноразовому підкиданні грального кубика обов'язково з'явиться одна з цифр, що є на його гранях, а саме: $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 4$, $A_5 = 5$, $A_6 = 6$. Отже, випадкові події A_i ($i = \overline{1,6}$) утворюють повну групу: $\bigcup\limits_{i=1}^{6} A_i = \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Означення. *Дві несумісні випадкові події*, що утворюють повну групу, називають *протилежними*.



Подія, яка протилежна A, позначається $\overline{A}$. Протилежні події в просторі елементарних подій ілюструє рисунок. Він унаочнює також співвідношення $A \cup \overline{A} = \Omega$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Випадкові події A, B, C ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. $A \cup B = B \cup A$. Комутативний закон для операцій додавання
3. $A \cap B = B \cap A$. та множення.
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Асоціативний закон для операцій додавання та
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. множення.
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Перший дистрибутивний закон.
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Другий дистрибутивний закон.
8. $A \cup \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}$.
9. $A \cap \boldsymbol{\Omega} = A$.
10. $A \cup \varnothing = A$.
11. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
12. $\overline{A} = \boldsymbol{\Omega} \setminus A$.
13. $\overline{\Omega} = \varnothing$.
14. $\overline{\varnothing} = \boldsymbol{\Omega}$.
15. $A \cup (A \cap \overline{B}) = A$; $B = B \cup (B \cap \overline{A})$.
16. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
17. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: всі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так:
1) $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; 2) $\bigcup_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій та їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої самої природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

34.4. Класичне означення ймовірності

Означення. *Імовірністю випадкової події A* називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \le m \le \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P(\varnothing) = 0$ ($m = 0$); для вірогідної події $P(\Omega) = 1$ ($m = n$).

Отже, для довільної випадкової події

$$0 < P(A) < 1 .$$

Приклад 1. У ящику міститься 15 однотипних деталей, з яких 6 бракованих, а решта — стандартні. Навмання з ящика беруть одну деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Число всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту:
$n = 15$.

Нехай A — подія, що полягає в появі стандартної деталі. Число елементарних подій, що сприяють появі випадкової події A, дорівнює дев'яти ($m = 9$). Згідно з (1) маємо

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} .$$

Приклад 2. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність того, що на грані кубика з'явиться число, кратне 3?

Число всіх елементарних подій для цього експерименту $n = 6$. Нехай B — поява на грані числа, кратного 3. Число елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює двом ($m = 2$).

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} .$$

Приклад 3. Два гральні кубики підкидають по одному разу. Побудувати простір елементарних подій — множину Ω і такі випадкові події:

A — сума цифр виявиться кратною 4;

B — сума цифр виявиться кратною 3.

Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Простір елементарних подій — множину Ω запишемо у вигляді таблиці:

Кубик 2-й	**Кубик 1-й**					
	1	2	3	4	5	6
1	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**
2	**2,1**	**2,2**	**2,3**	**2,4**	**2,5**	**2,6**
3	**3,1**	**3,2**	**3,3**	**3,4**	**3,5**	**3,6**
4	**4,1**	**4,2**	**4,3**	**4,4**	**4,5**	**4,6**
5	**5,1**	**5,2**	**5,3**	**5,4**	**5,5**	**5,6**
6	**6,1**	**6,2**	**6,3**	**6,4**	**6,5**	**6,6**

Отже, простір елементарних подій Ω містить $n = 36$ пар чисел. Події A і B визначимо за допомогою побудованої таблиці так: елементарні події, які сприяють появі A (сума цифр кратна 4), заштриховані вертикальними лініями, а для B (сума кратна 3) — горизонтальними лініями. Звідси маємо: число елементарних подій, що сприяють появі A, дорівнює дев'яти ($m_1 = 9$), а число елементарних подій, що сприяють появі B, — дванадцяти ($m_2 = 12$), число елементарних подій, що сприяють появі події $A \cap B$, дорівнює одиниці ($m_3 = 1$) (темні клітинки таблиці).

Остаточно одержимо

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},\ P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},\ P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{1}{36} .$$

Приклад 4. У кожній із трьох урн містяться червоні та сині кульки. З кожної урни навмання беруть по одній кульці. Побудувати простір елементарних подій для цього експерименту — множину Ω і такі випадкові події:

A — серед трьох навмання взятих кульок дві виявляються червоного кольору;

B — серед трьох кульок дві виявляються синього кольору. Обчислити $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

Позначимо появу кульки червоного кольору як Ч, а синього кольору — як С. Тоді простір елементарних подій буде такий: = {ЧЧЧ, ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ, ЧСС, СЧС, ССЧ, ССС}, $n = 8$.

Події: A = {ЧЧС, ЧСЧ, СЧЧ}, $m_1 = 3$;

B = {ССЧ, СЧС, ЧСС}, $m_2 = 3$.

Події A і B є несумісними ($A \cap B = \varnothing$).

Обчислюємо: $P(A) = \dfrac{m_1}{n} = \dfrac{3}{8}$, $P(B) = \dfrac{m_2}{n} = \dfrac{3}{8}$, $P(A \cap B) = 0$.

34.5. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей

Під час розв’язування задач із теорії ймовірностей побудувати простір елементарних подій (множину Ω) можна не завжди.

Для більшості прикладних задач така побудова пов’язана з виконанням великого обсягу робіт, а нерідко й взагалі неможлива. Щоб обчислити ймовірність тієї чи іншої випадкової події для певного класу задач із дискретним та обмеженим простором елементарних подій, необхідно вміти обчислити кількість n усіх елементарних подій (елементів множини Ω) і число m елементарних подій, що сприяють появі випадкової події.

Існує клас задач, в яких для обчислення n і m використовують елементи комбінаторики: переставлення, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів.

Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані.

Множину називають *упорядкованою*, якщо під час її побудови істотним є порядок розміщення елементів.

У протилежному разі множину називають *невпорядкованою*.

Переставлення. Переставленням із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$\mathrm{P_n} = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\, n,$$

де n набуває лише цілих невід’ємних значень.

Приклад 1. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер Я, І, Р, Е, О, Т. Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово

Т	Е	О	Р	І	Я

?

Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω)

$$n = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, $m = 1$. Позначивши розглядувану подію через B, дістанемо

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Приклад 2. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Її елементи навмання розставляють у рядок. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

A — розставлені в ряд числа утворюють зростаючу послідовність;

B — спадну послідовність;

C — цифра 1 стоятиме на першому місці, а 5 — на останньому;

D — цифри утворять парне п'ятицифрове число.

Простір елементарних подій для цього експерименту міститиме $n = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ несумісних, рівноймовірних елементарних подій.
Кількість елементарних подій, що сприяють появі A, дорівнює одиниці ($m_1 = 1$).
Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, дорівнює одиниці ($m_2 = 1$).
Для випадкової події C $m_3 = 3!$
Для випадкової події D $m_4 = 4!\ 2 = 48$.

Обчислюємо: $P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{120}$, $P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{1}{120}$,

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{3!}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}, \quad P(D) = \frac{m_4}{n} = \frac{4!\,2}{120} = \frac{48}{120} = \frac{2}{15}.$$

Розміщення. Розміщенням із n елементів за m ($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна з яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розміщення цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-m+1).$$

Наприклад, $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Приклад 1. Маємо дев'ять однакових за розміром карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що при цьому дістанемо

1	9	7	3

?

Кількість елементарних подій множини Ω буде $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1, 9, 7, 3, дорівнює одиниці ($m = 1$). Позначимо цю випадкову подію через B.

Тоді $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}$.

Приклад 2. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студентів не мають спільного дня народження?

Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів — 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо $n = 365^{10}$ елементарних подій множини Ω. Позначимо через B випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не збігаються. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, $m = A_{365}^{10}$.

Остаточно маємо $P(B)=\frac{m}{n}=\frac{A_{365}^{10}}{(365)^{10}}$.

Комбінації. Комбінаціями з n елементів за $m(0 \le m \le n)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.

Кількість таких множин

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{P_m}=\frac{n!}{m!(n-m)}.$$

Приклад 1. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в роботоздатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Оскільки кожний верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах — роботоздатному або неработоздатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію — з ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m=C_{10}^3=\frac{10!}{3!\,7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!}=120.$$

Отже,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^3}{2^{10}}=\frac{120}{2^{10}}.$$

Приклад 2. У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 з яких є стандартними, а решта — бракованими. Навмання з шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A — усі чотири деталі виявляються стандартними;
B — усі чотири деталі виявляються бракованими;
D — із чотирьох деталей виявляються дві стандартними і дві бракованими.

Кількість усіх елементарних подій множини Ω:

$$n=C_{10}^4=\frac{10!}{4!\,6!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 3\cdot 6}=210;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A:

$$m_1=C_6^4=\frac{6!}{2!\,4!}=15;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі B:

$$m_2=C_4^4=\frac{4!}{4!\,0!}=1;$$

кількість елементарних подій, що сприяють появі D:

$$m_3=C_6^2\,C_4^2=15\cdot 6=90.$$

Обчислимо ймовірності цих подій:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{m_1}{n}=\frac{C_6^4}{C_{10}^4}=\frac{15}{630}=\frac{3}{112}=\frac{15}{210}=\frac{1}{14},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{m_2}{n} = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210},$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{D}) = \frac{m_3}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}.$$

Контрольні запитання

1. Що називається вірогідною; неможливою подією? Навести приклади.
2. Яка подія називається випадковою? Навести приклади.
3. Яка подія називається елементарною, складеною випадковою подією? Навести приклади.
4. Що називається простором елементарних подій? Навести приклади.
5. Сумою двох випадкових подій A і B називається...
6. Добутком двох випадкових подій A і B називається...
7. Різницею двох випадкових подій A і B називається ...
8. Дати класичне означення ймовірності випадкової події.
9. Переставленням із n елементів називається...
10. Розміщенням із n елементів за m називається ...
11. Комбінацією з n елементів за m називається ...

Лекція 35. Основні теореми теорії ймовірностей

План

35.1. Теореми додавання ймовірностей несумісних і сумісних подій.
35.2. Залежні та незалежні випадкові події.
35.3. Умовна ймовірність та її властивості.
35.4. Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних подій.
35.5. Формула повної ймовірності.
35.6. Формула Байєса.

35.1. Теореми додавання ймовірностей несумісних і сумісних подій

Теорема. Якщо події A і B несумісні ($A \bigcap B = \varnothing$), причому відомі їх ймовірності P (A) і P (B), то ймовірність суми цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B).$$

Дійсно, нехай n – число всіх елементарних подій у деякому досліді; m_1 – число елементарних подій, сприятливих події A; m_2 – число елементарних подій, сприятливих події B. Тоді появі події $A \bigcup B$ сприяють $m_1 + m_2$ елементарних подій. Отже, за класичним означенням ймовірності

$$P\,(A \bigcup B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P\,(A) + P\,(B).$$

Наслідок 1. Ймовірність протилежної події обчислюється за формулою

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Дійсно, оскільки $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, то $P(A \bigcup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$. З іншого боку, $P(A \bigcup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Отже, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, звідси $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Наслідок 2

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

де A_i $(i = 1, \ldots, n)$ – попарно несумісні події.

Наслідок 3. Якщо події A_i $(i = 1, \ldots, n)$ утворюють повну групу попарно несумісних подій, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Дійсно, за означенням повної групи попарно несумісних подій маємо $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, але $P\,(\Omega) = 1$. Отже, за наслідком 2 маємо формулу $\sum\limits_{i=1}^{n} P\,(A_i) = 1$.

Приклад 1. У партії з 20 деталей є 16 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих трьох деталей виявиться принаймні одна стандартна.

Нехай подія A_1 виявиться одна стандартна; подія A_2 – виявиться дві стандартні; подія A_3 виявиться три стандартні деталі. Ці події попарно несумісні.

Нехай подія A: серед навмання взятих трьох деталей виявиться принаймні одна стандартна. Отже, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ і маємо

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

Обчислимо ймовірності подій A_1, A_2, A_3:

$$P(A_1) = \frac{C_{16}^1 \cdot C_4^2}{C_{20}^3} = \frac{8}{95}, \quad P(A_2) = \frac{C_{16}^2 \cdot C_4^1}{C_{20}^3} = \frac{40}{95}, \quad P(A_3) = \frac{C_{16}^3}{C_{20}^3} = \frac{28}{57}.$$

Отже, $P(A) = \frac{8}{95} + \frac{40}{95} + \frac{28}{57} = \frac{284}{285}$.

Інший спосіб. Під час розв'язування задач часто буває зручно переходити до протилежної події. Так, якщо подія A_0 – не виявиться жодної стандартної деталі, то A_0 є протилежною до події A, і події A_0, A_1, A_2, A_3 утворюють повну групу попарно несумісних подій. Отже,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(A_0).$$

Обчисливши ймовірність $P(A_0) = \frac{C_4^3}{C_{20}^3} = \frac{1}{285}$, одержимо $P(A) = 1 - \frac{1}{285} = \frac{284}{285}$.

Нехай дві події A і B сумісні, причому відомі ймовірності цих подій $P(A)$, $P(B)$ та ймовірність їх сумісної появи $P(A \cap B)$.

Теорема. Ймовірність появи принаймні однієї з двох сумісних подій A і B дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх спільної появи:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

35.2. Залежні та незалежні випадкові події

Випадкові події A і B називають *залежними*, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

У протилежному разі випадкові події A і B називаються *незалежними*.

Приклад 1. В урні міститься 10 однакових кульок, з яких 6 чорних і 4 білих. З урни навмання беруть дві кульки по одній без повернення. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша кулька виявиться чорною і друга також.

Позначимо через A появу чорної кульки при першому вийманні, а через B — при другому. Випадкові події A і B будуть залежними, оскільки поява чорної кульки при першому її вийманні з урни (випадкова подія A) впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (випадкова подія B) при другому вийманні.

Приклад 2. З урни, де шість білих і чотири чорні кульки, вийняли дві кульки по одній, при цьому перша кулька в урну повертається. З'ясувати, чи будуть залежними такі події: перша виявиться чорною, друга – також.

Нехай A — поява чорної кульки при першому вийманні, а B — при другому. Поява чорної кульки при першому вийманні (здійснилася подія A) не впливатиме на ймовірність появи чорної кульки (подія B) при другому вийманні, оскільки співвідношення між чорними та білими кульками в цьому разі не змінюється.

35.3. Умовна ймовірність та її властивості

Якщо ймовірність випадкової події А обчислюється за умови, що подія В відбулася, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою

$$P\left(A\ /\ B\right)=\frac{P\left(A\bigcap B\right)}{P\left(B\right)},\quad P\left(B\right)\neq 0\,.$$

Аналогічно

$$P\left(B\ /\ A\right)=\frac{P\left(A\bigcap B\right)}{P\left(A\right)},\quad P\left(A\right)\neq 0\,.$$

1. $P\ (A\ /\ B) = 0$, якщо $A\cap B = \varnothing$.

2. $P\ (A\ /\ B) = 1$, якщо $A\cap B = B$.

3. У решті випадків $0 < P(A\ /\ B) < 1$.

Приклад 1. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарним?

Нехай подія A — поява числа кратного 3, B — кратного 2.

Тоді $A = (3, 6, 9, 12)$, $m_1 = 4$;

$B = (2, 4, 6, 8, 10, 12)$, $m_2 = 6$;

$A\cap B = (6, 12)$, $m_3 = 2$,

$$P(A)=\frac{m_1}{n}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2},\ P(A\cap B)=\frac{m_3}{n}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P(A/B)=\ P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $P(A)\neq P(A/B)$, то події A і B є залежними.

35.4. Теореми множення ймовірностей для залежних і незалежних подій

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчисленої за умови, що перша відбулася:

$$P(A\cap B)=P(B)\,P(A/B)=P(A)\,P(B/A).$$

Формула множення для n залежних випадкових подій $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_4$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2)\ \ldots\ P(A_n/A_1A_2\ \ldots\ A_{n-1}).$$

Приклад 1. Із множини чисел $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ навмання беруть одне число, а далі з решти — інше. Яка ймовірність того, що взяте двоцифрове число буде парним?

Позначимо через A_1 появу непарної цифри при першому вийманні, через B_1 — появу парної цифри при першому, а через B_2 — появу парної цифри при другому вийманні.

Нехай C — випадкова подія: поява парного двоцифрового числа.

Тоді $C=(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)$.

Оскільки випадкові події A_1, B_1, B_2 є залежними, то

$$P(C)=P(A_1\cap B_2)\cup(B_1\cap B_2)=P(A_1\cap B_2)+P(B_1\cap B_2)=$$

$$=P(A_1)\,P(B_2/A_1)+P(B_1)\,P(B_2/B_1)=\frac{5}{9}\,\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\,\frac{3}{8}=\frac{32}{72}=\frac{4}{9}.$$

Якщо випадкові події A і B є незалежними, то $P(A/B)=P(A)$, $P(B/A)=P(B)$.

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B).$$

Відповідно для n незалежних у сукупності подій A_i ($i=1, \ldots, n$) теорема множення ймовірностей записується так:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot$$

Приклад 2. Гральний кубик і монету підкидають по одному разу. Яка ймовірність того, що при цьому на грані кубика випаде число, кратне 3, а на монеті – герб?

Нехай поява числа, кратного трьом, — подія *A*, а поява герба — подія *B*. Випадкові події *A* і *B* є між собою незалежними. Отже,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \qquad P(B) = \frac{1}{2}, \qquad P(A \cap B) = P(A)\ P(B) = \frac{1}{3}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Нехай проводиться *n* незалежних спроб, у кожній з яких може відбутися подія A_i (i = 1, 2, 3, ..., n) з імовірністю $P(A_i) = p_i$.

Тоді нехай *C* — поява події A_i хоча б один раз при *n* незалежних спробах, тобто ця подія може з’явитися або один раз, або двічі, тричі і так далі, включаючи всі *n* раз.

Отже,

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^{n} q_i \ .$$

Якщо $P(A_i) = p_i = p = \text{const}$, то $q_i = q = \text{const}$.

Тоді $P(C) = 1 - q^n$.

Приклад 3. Гральний кубик підкидається чотири рази. Чому дорівнює ймовірність того, що цифра 3 з’явиться при цьому хоча б один раз?

Імовірність того, що при одному підкиданні з’явиться цифра 3, дорівнює $\frac{1}{6}$.

Тоді $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Дістанемо

$$P(C) = 1 - q^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}.$$

35.5. Формула повної ймовірності

У разі, якщо випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісними $\left(B_i \bigcap B_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \ i, j = 1, ...,\ n, \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \right)$, ймовірність події A обчислюється за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A / B_i),$$

яка називається *формулою повної ймовірності*.

Випадкові події B_1, B_2, ..., B_n називають *гіпотезами*.

Приклад 1. До складального цеху надходять деталі від трьох інших цехів. Від першого надходить 45 % усіх деталей, від другого — 35 % і від третього — 20 %. Перший цех допускає в середньому 6 % браку, другий — 2 % і третій — 8 %.

Яка ймовірність того, що до складального цеху надійде стандартна деталь?

Позначимо через A появу стандартної деталі; B_1 — деталь надійде від першого цеху; B_2 — від другого; B_3 — від третього. За умовою задачі:

$$P(B_1) = 0{,}45, \quad P(A / B_1) = 0{,}94;$$

$$P(B_2) = 0{,}35, \quad P(A / B_2) = 0{,}98;$$

$$P(B_3) = 0{,}2, \quad P(A / B_3) = 0{,}92.$$

Маємо

$$P(A) = P(B_1)\, P(A / B_1) + P(B_2)\, P(A / B_2) + P(B_3)\, P(A / B_3) =$$
$$= 0{,}45 \cdot 0{,}94 + 0{,}35 \cdot 0{,}98 + 0{,}2 \cdot 0{,}92 = 0{,}423 + 0{,}343 + 0{,}184 = 0{,}95.$$

35.6. Формула Байєса

Застосувавши формулу множення ймовірностей для залежних випадкових подій A, B_i ($i = 1, ..., n$), одержимо

$$P(A)\, P(B_i / A) = P(B_i)\, P(A / B_i) \to P(B_i / A) = \frac{P(B_i)\, P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i)\ P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)\ P(A/B_i)}.$$

Одержана формула називається *формулою Байєса*. Її використовують для переоцінювання ймовірностей гіпотез B_i за умови, що випадкова подія A здійсниться.

Після переоцінювання всіх гіпотез B_i маємо

$$\sum_{i=1}^{n} P(B_i / A) = \sum_{i=1}^{m} \frac{P(B_i) P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A / B_i)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 .$$

Згідно з формулою Байєса можна прийняти рішення, провівши експеримент. Але для цього необхідно, щоб вибір тієї чи іншої гіпотези мав ґрунтовні підстави, тобто щоб унаслідок проведення експерименту ймовірність $P(B_i /A)$ була близькою до одиниці.

Приклад 1. Маємо три групи ящиків. До першої групи належить 5 ящиків, у кожному з яких 7 стандартних і 3 браковані однотипні вироби, до другої групи — 9 ящиків, у кожному з яких 5 стандартних і 5 бракованих виробів, а до третьої — 3 ящики, в кожному з яких 3 стандартні й 7 бракованих виробів. Із довільно вибраного ящика три навмання взяті вироби виявилися стандартними.

Яка ймовірність того, що вони були взяті з ящика, який належить третій групі?

Позначимо через B_1, B_2, B_3 гіпотези про те, що навмання вибраний ящик належить відповідно першій, другій або третій групам. Обчислимо ймовірності цих гіпотез. Оскільки всього за умовою задачі 17 ящиків, то

$$P(B_1) = \frac{5}{17},\; P(B_2) = \frac{9}{17},\; P(B_3) = P(B_3) = \frac{3}{17}.$$

Позначимо через A появу трьох стандартних виробів.

Тоді відповідні умовні ймовірності:

$$P(A / B_1) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120},$$

$$P(A / B_2) = \frac{C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{10}{120},$$

$$P(A / B_3) = \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}.$$

За умовою задачі необхідно переоцінити ймовірність гіпотези B_3. Використовуючи формулу Байєса, маємо

$$P(B_3 / A) = \frac{P(B_3)\; P(A / B_3)}{P(B_1)\; P(A / B_1) + P(B_2)\; P(A / B_2) + P(B_3)\; P(A / B_3)} =$$

$$= \frac{\frac{3}{17}\;\frac{1}{120}}{\frac{5}{17}\;\frac{21}{120} + \frac{9}{17}\;\frac{10}{120} + \frac{3}{17}\;\frac{1}{120}} = \frac{3}{105 + 90 + 3} = \frac{3}{198} = \frac{1}{66}.$$

Контрольні запитання

1. Випадкові події A і B називають залежними ...
2. Визначення умовної ймовірності.
3. В якому разі $P(A/B) = 0$?
4. В якому разі $P(A/B) = 1$?
5. Формула множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій A і B має вигляд ...
6. Чому дорівнює $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A_i є залежними?
7. Чому дорівнює $P(A \cap B)$, якщо A і B є незалежними?
8. В якому разі $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$?
9. Чому дорівнює $\mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$, якщо випадкові події A і B є незалежними?
10. Формула для обчислення появи випадкової події хоча б один раз при n незалежних експериментах має вигляд ...
11. Гіпотези у формулі повної ймовірності та їх властивості.
12. Формула повної ймовірності випадкової події A за наявності n гіпотез B_i має вигляд ...
13. В якому разі використовують формулу Байєса?
14. Для переоцінювання ймовірності B_i гіпотези формула Байєса має вигляд ...
15. В якому разі обирається гіпотеза B_i для прийняття рішення під час проведення експерименту?
16. Чому дорівнює $\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$, де B_i є гіпотези у формулі повної ймовірності?

Лекція 36. Повторювані незалежні експерименти за схемою Бернуллі

План

36.1. Вступ.
36.2. Формула Бернуллі.
36.3. Найімовірніше число появи випадкової події (мода)(**).
36.4. Локальна теорема Муавра – Лапласа.
36.5. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа.
36.6. Використання інтегральної теореми Муавра – Лапласа.
36.7. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

36.1. Вступ

Якщо кожний експеримент має лише два несумісні наслідки (події) зі сталими ймовірностями p і q, то їх називають експериментами за схемою Бернуллі. У кожному експерименті випадкова подія з імовірністю p відбувається, а з імовірністю q — не відбувається, тобто $p + q = 1$.

Простір елементарних подій для одного експерименту містить дві елементарні події, а для n експериментів за схемою Бернуллі — 2^n елементарних подій.

36.2. Формула Бернуллі

Нехай проводиться скінченне число n спроб, у результаті яких може з′явитися подія A з певною ймовірністю p, причому ймовірність $P(A) = p$ не залежить від наслідків інших спроб. Такі спроби назвемо *незалежними щодо події A*.

Обчислимо ймовірність того, що в результаті проведення n незалежних спроб подія A настане рівно m разів, якщо в кожній із спроб вона настає зі сталою ймовірністю $P(A) = p$ або не настає з ймовірністю $P(\overline{A}) = q \quad (p + q = 1)$. Позначимо шукану ймовірність $P_n(m)$, це означає, що в n спробах подія A з′явиться m разів. Зауважимо, що тут не вимагається, щоб подія A повторилася m разів у певній послідовності. Для розв′язання задачі при великих значеннях n і m безпосереднє застосування теорем додавання і множення ймовірностей приводить до громіздких розрахунків, тому зручніше користуватися формулою Бернуллі, виведення якої ми розпочинаємо.

Ймовірність того, що подія A в n спробах з′явиться рівно m разів, а в решті n-m спроб з′явиться протилежна подія $\overline{A}$, за теоремою множення ймовірностей незалежних подій дорівнює $p^m \cdot q^{n-m}$. При цьому подія A в n спробах може з′явитися рівно m разів у різних комбінаціях, число яких C_n^m. Оскільки всі комбінації подій є подіями несумісними і нам байдуже, в якій послідовності з′явиться подія A або подія $\overline{A}$, то, застосовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій, одержуємо *формулу Бернуллі*:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

Ймовірності $P_n(m)$ називаються *біномними* , оскільки вони мають відношення до формули бінома Ньютона:

$(q+p)^n = q^n + C_n^1 \cdot p^1 \cdot q^{n-1} + C_n^2\ p^2 \cdot q^{n-2} + \ldots + C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} + \ldots + C_n^{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q^1 + p^n$, або

$(q+p)^n = P_n\ (0) + P_n\ (1) + P_n\ (2) + \ldots + P_n\ (m) + \ldots + P_n\ (n-1) + P_n\ (n) = 1.$

Приклад 1. Гральний кубик підкидають тричі. Яка ймовірність того, що при цьому двічі випаде 6 очок?

Нехай подія A: при одному кидку випаде 6 очок. Ймовірність $P\,(A) = p = \dfrac{1}{6}$, відповідно $q = \dfrac{5}{6}$. Тут $n = 3, \quad m = 2.$ Отже, за формулою (1):

$$P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 3 \cdot \frac{5}{6^3} = \frac{5}{72}.$$

Цей результат потрібно трактувати так: якщо такий дослід проводити багато разів, то в середньому в 5 випадках із 72 грань із 6 очками випаде двічі.

Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від m_i до m_j раз, обчислюється так:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Оскільки

$$P_n(0 \le m \le n) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1,$$

одержимо

$$P(0 \le m \le m_i) = 1 - \sum_{m=m_i+1}^{n} C_n^m p^m q^{n-m},$$

$$P(m_i \le m \le n) = 1 - \sum_{m=0}^{m_i-1} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Приклад 2. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Імовірність того, що впродовж 1 години верстат-автомат потребує уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за 1 годину уваги робітника потребують:

1) три верстати;

2) від двох до п'яти верстатів;

3) принаймні один.

За умовою задачі маємо: p = 0,6; q = 0,4; n = 6; m = 3; $2 \le m \le 5$; $1 \le m \le 6$.

Одержимо:

1) $P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \dfrac{6!}{3!\ 3!}(0{,}6)^3(0{,}4)^3 = 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 = 0{,}27648$;

2) $P_6(2 \le m \le 5) = \sum\limits_{m=2}^{5} C_6^m p^m q^{6-m} = C_6^2 p^2 q^4 + C_6^3 p^3 q^3 + C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q =$

$=15\ (0{,}6)^2\ (0{,}4)^4 + 20\ (0{,}6)^3\ (0{,}4)^3 + 15\ (0{,}6)^4\ (0{,}4)^2 + 6\ (0{,}6)^5\ 0{,}4 =$

$= 15 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}0256 + 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 + 15 \cdot 0{,}1296 \cdot 0{,}16 + 6 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}4 =$

$= 0{,}13824 + 0{,}27648 + 0{,}31104 + 0{,}186624 = 0{,}902384$;

3) $P_6(1 \le m \le 6) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 p^0 q^6 = 1 - q_6 = 1 - (0{,}4)^6 =$

$= 1 - 0{,}04096 = 0{,}995904$.

36.3. Найімовірніше число появи випадкової події (мода)

Найімовірнішим числом появи випадкової події A в результаті n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ перевищує або в усякому разі є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів.

Приклад. Імовірність появи випадкової події A в кожному з n = 8 незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p = 0,5 (q = 1 – p = 0,5). Обчислити ймовірності подій для m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Значення обчислених імовірностей наведено в таблиці:

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_8(m) = \frac{C_8^m}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

Із таблиці бачимо, що при m = 4 ймовірність набуває найбільшого значення, а саме $P_8(4) = \dfrac{70}{256}$. Отже, найімовірніше число появи події m_0 = 4.

Зауважимо, що для визначення найімовірнішого числа появи події немає потреби обчислювати ймовірності для різних можливих значень $m\ (0 \le m \le n)$.

Справді, запишемо формули для обчислення ймовірностей при значеннях $m = m_0$; $m = m_0 - 1$; $m = m_0 + 1$ і розглянемо їх відношення:

$$\frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0-1)} \ge 1 \to \frac{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}}{C_n^{m_0-1} p^{m_0-1} q^{n-m_0+1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0}\ q^{nmo}}{\frac{n!}{(m_0-1)!(n-m_0+1)!} P^{m_0-1}\ q^{n-m_0+1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\frac{p}{m_0}}{\frac{q}{n-m_0+1}} \ge 1 \to m_0 \le n\ p + p\,,$$

$$\frac{P_n(m_0)}{P_n(m_0+1)} \ge 1 \to \frac{C_n^{m_0} p^{m_0} q^{n-m_0}}{C_n^{m_0+1}\ p^{m_0+1}\ q^{n-m_0-1}} \ge 1 \to$$

$$\to \frac{\frac{q}{n-m_0}}{\frac{p}{m_0+1}} \ge 1 \to m_0 \ge n\ p - q\,.$$

Об’єднавши нерівності $n\ p - q \le m_0 \le n\ p + p$.

Число m_0 називають також *модою*.

Приклад 1. У разі додержання певної технології 90 % усієї продукції, виготовленої заводом, є найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

За умовою задачі: $n = 200$, $p = 0{,}9$, $q = 1 - p = 0{,}1$.

Використовуючи одержану нерівність, дістаємо

$$n\ p - q \le m_0 \le n\ p + p \to 200 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 200 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \to 179{,}9 \le m_0 \le 180{,}9\,.$$

Отже, найімовірніше число виробів першого сорту з 200 дорівнює 180.

Зауваження. Обчислення ймовірностей за формулою Бернуллі за великих значень n і m пов’язане з певними труднощами. Щоб уникнути їх, застосовують асимптотичні формули, що випливають із локальної та інтегральної теорем Муавра – Лапласа.

36.4. Локальна теорема Муавра – Лапласа

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\ (0 < p < 1)$, то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A настане m раз, подається такою асимптотичною формулою:

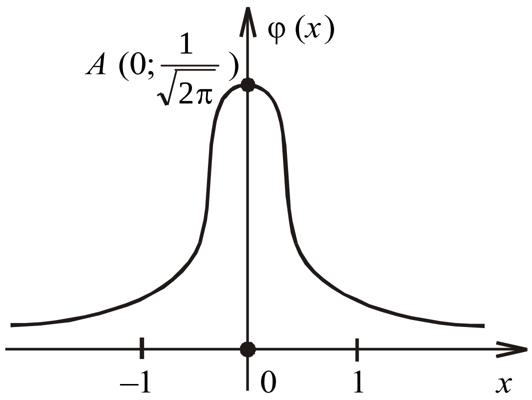
$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається *функцією Гауса*.

Функція Гауса протабульована, і її значення наведене у відповідних додатках, де

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Тут x є рівномірно обмеженою величиною щодо n і m.



Властивості функції Гауса:

1) $\varphi(x)$ визначена на всій осі абсцис; $\varphi(x) > 0$;

2) $\varphi(x)$ є функцією парною: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \phi(x) = 0$;

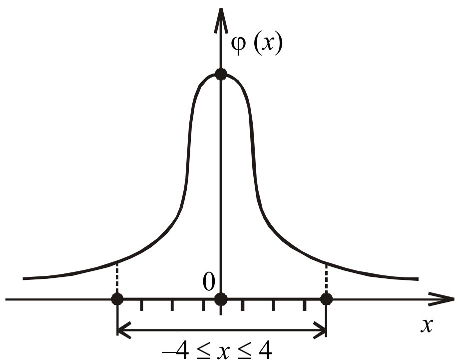
4) $\varphi'(x) = -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\varphi'(0) = 0$;

$\phi'(x)\big|_{x<0} > 0$; $\phi'(x)\big|_{x>0} < 0$; отже, $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ — максимум функції Гауса;

5) $\varphi''(x) = (x^2 - 1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\phi''(x)\big|_{x=\pm 1} = 0$.

Таким чином, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ будуть точками перегину.

При цьому $\phi''(x)\big|_{x<-1} > 0$; $\phi''(x)\big|_{-1<x<1} < 0$; $\phi''(x)\big|_{x>1} > 0$.



Зауважимо, що, розв'язуючи задачі, додержуються такого правила:

$$\phi(x)\big|_{x \ge 4} \approx 0;\ \phi(x)\big|_{x \le -4} \approx 0.$$

Отже, практично використовують значення функції Гауса для $x \in [-4;\ 4]$, що показано на такому графіку функції Гауса:

Приклад 1. Імовірність того, що посіяне зерно ячменю проросте в лабораторних умовах, у середньому дорівнює 0,9. Було посіяно 700 зернин ячменю в лабораторних умовах. Визначити найімовірніше число зернин, що проростуть із цієї кількості, та обчислити ймовірність цього числа.

За умовою задачі:

$$n = 700\ ,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1;$$
$$np - q \le m_0 \le np + p \to 700 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le m_0 \le 700 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \to$$
$$\to 729{,}9 \le m_0 \le 630{,}9 \to m_0 = 630.$$

Отже, шукане число m_0 = 630.

Відповідна ймовірність буде такою:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{700 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1} = \sqrt{63} \approx 7{,}94\ ,$$

$$np = 700 \cdot 0{,}9 = 630\ ,$$

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{630 - 630}{7{,}94} = 0\ ,$$

$$P_{700}(630) \approx \frac{\varphi(0)}{7{,}94} = \frac{0{,}3989}{7{,}94} \approx 0{,}05\ .$$

36.5. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює $p\ (0 < p < 1)$, то для великих значень n імовірність появи випадкової події від m_i до m_j раз обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m_i \le m \le m_j) \approx \Phi(x_j) - \Phi(x_i)\ ,$$

де $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}},\quad x_i = \dfrac{m_i - mp}{\sqrt{npq}}$,

а $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$ є функцією Лапласа, значення якої наведене у відповідних додатках.

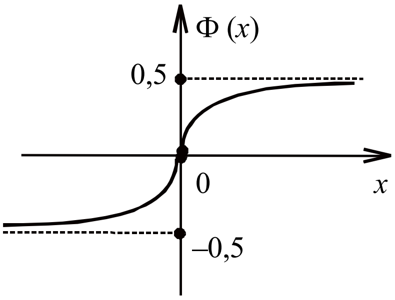
Властивості функції Лапласа

1. Φ (x) визначена на всій осі абсцис.

2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отже, $\Phi(x)$ є непарною функцією.

3. $\Phi(0) = 0$.

4. $\Phi(\infty) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,5$, оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$ є інтегралом Пуассона.

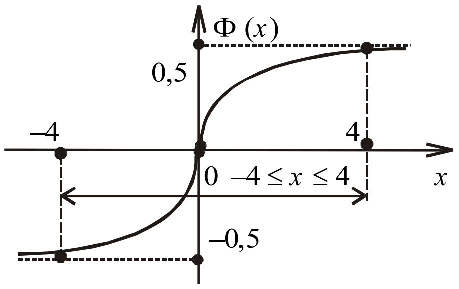


5. $\Phi(-\infty) = -0,5$, як непарна функція.

6. $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, отже, $\Phi(x)$ є функцією неспадною.

7. $\Phi''(0) = 0$; $\Phi''(x)\big|_{x<0} > 0$; $\Phi''(x)\big|_{x<0} < 0$.

Таким чином, $x = 0$ є точкою перегину.



Розв'язуючи задачі, додержуються такого правила:

$\Phi(x)\big|_{x \geq 4} \approx 0,5$, $\quad \Phi(x)\big|_{x \leq -4} \approx 0,5$.

Отже, практично функцію Лапласа застосовують для значень $x \in [-4;\ 4]$, що ілюструє рисунок.

Приклад 1. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Ймовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є величиною сталою і дорівнює 0,95. За зміну верстат виготовив 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде: 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 740 до 790 шт.?

За умовою задачі:

$n = 800$, $p = 0,95$, $q = 0,05$, $720 \leq m \leq 780$, $740 \leq m \leq 780$;

$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0,95 \cdot 0,05} = \sqrt{38} \approx 6,2, \quad np = 800 \cdot 0,95 = 760$.

1) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{780 - 760}{6,2} = \dfrac{20}{6,2} \approx 3,23$,

$x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{720 - 760}{6,2} = -\dfrac{40}{6,2} \approx -6,5$,

$$P_{800}(720 \leq m \leq 780) \approx \Phi(3,23) - \Phi(-6,5) = \Phi(3,23) + \Phi(6,5) =$$
$$= 0,49931 + 0,5 = 0,99931;$$

2) $x_j = \dfrac{m_j - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{790 - 760}{6,2} \approx 4,84$,

$x_i = \dfrac{m_i - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{740 - 760}{6,2} = -\dfrac{20}{6,2} \approx -3,23$,

$$P_{800} = (740 \le m \le 790) \approx \Phi(4{,}84) - \Phi(-3{,}23) = \Phi(4{,}84) + \Phi(3{,}23) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}499 \cdot 31 = 0{,}99931.$$

36.6. Використання інтегральної теореми Муавра – Лапласа

За допомогою інтегральної теореми можна оцінити близькість відносної частоти $\omega(A)$ до ймовірності p випадкової події A. Нехай p — імовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі й $\omega(A)$ — відносна частота появи цієї події при n експериментах.

Необхідно оцінити ймовірність події $|\,\omega(A) - p\,| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ і є малою величиною). Якщо n набуває великих значень, то можна одержати:

$$P\,(\,|\,\omega(A) - p\,| < \varepsilon\,) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад 1. Імовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту, який має на меті виявити надійність виробу в роботі, дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Чому дорівнює ймовірність такої події: абсолютна величина відхилення відносної частоти виходу з ладу виробів від імовірності $p = 0{,}2$ становить $\varepsilon = 0{,}01$?

За умовою задачі: $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}01$. Підставивши ці значення в одержану формулу, дістанемо

$$P(|\,\omega(A) - 0{,}2\,| < 0{,}01) \approx 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{400}{0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2 \cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

36.7. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність асимптотичних формул для великих значень n — числа повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі — знижується з наближенням p до нуля. Тому при $n \to \infty$, $p \to 0$ за умови $np = a = \text{const}$ імовірність появи випадкової події m раз $(0 \le m \le n)$ обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!}\,\mathrm{e}^{-a},$$

що називається *формулою Пуассона*.

Із формули випливає

$$P_n(m_i \le m \le m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} P_n(m) = \sum_{m=m_s}^{m_j} \frac{a^m}{m!} e^{-a},$$

$$P_n(0 \le m \le n) = \sum_{m=0}^{n} P_n(m) = \sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} = e^{-a}\, e^{a} = 1.$$

І справді, це підтверджується ще й тим, що події $0 \le m \le n$ утворюють повну групу.

Функція $P_n(m)$ визначається за таблицею, наведеною в додатку А, за заданим m та обчисленим значенням $a = np$.

Приклад 1. Радіоприлад містить 1 000 мікроелементів, що працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти з ладу під час роботи приладу з імовірністю p = 0,002. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи;

2) від 3 до 6.

За умовою задачі маємо n = 1 000, p = 0,002, m = 3; $3 \le m \le 6$. Оскільки n велике, а p мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо одержані формули. Для цього обчислимо значення параметра $a = np$ = 1000 · 0,002 = 2.

1) $P_{1000}(3) \approx 0{,}18044$;

2) $P_{1000}(3 \le m \le 6) = P_{1000}(3) + P_{1000}(4) + P_{1000}(5) + P_{1000}(6) =$

$= 0{,}180447 + 0{,}168031 + 0{,}100819 + 0{,}050409 + 0{,}021604 = 0{,}52131.$

Контрольні запитання

1. Які експерименти називають експериментами за схемою Бернуллі?
2. За якої умови формулу Бернуллі застосовують для обчислення ймовірностей?
3. Що називають найімовірнішим числом (модою)?
4. Чому дорівнює $\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$?
5. Сформулювати локальну теорему Муавра – Лапласа.
6. Сформулювати інтегральну теорему Муавра – Лапласа.
7. Чому дорівнює $P(|\omega(A) - p| < \varepsilon)$?
8. Функція Гауса та її властивості.
9. Функція Лапласа та її властивості.
10. За якої умови використовують формулу Пуассона?
11. Чому дорівнює $\sum_{m=0}^{n} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$?
12. Записати формулу Пуассона для малоймовірних випадкових подій.

Лекція 37. Випадкові величини

План

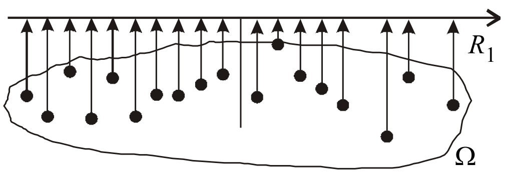
37.1. Вступ.
37.2. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу їх імовірностей.
37.3. Функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) та її властивості.
37.4. Щільність імовірностей (диференціальна функція) та її властивості.
37.5. Приклади основних законів розподілу.

37.1. Вступ

Поняття події в теорії ймовірностей являє собою абстрактну модель певної якісної ознаки, що відбиває лише два альтернативні судження: є подія (відбулася) або немає (не відбулася). Подальший розвиток теорії ймовірностей потребував уведення такого нового поняття, як випадкова величина — абстрактна модель кількісної ознаки.

37.2. Дискретні та неперервні випадкові величини. Закони розподілу їх імовірностей

Розглянемо такий простір елементарних подій, в якому кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ відповідає одне й лише одне число *x* або набір чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, тобто на множині Ω визначена певна функція $\alpha(\omega_i)$, яка кожній елементарній події ω_i ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору R_1 або *n*-вимірного простору R_n.



Цю функцію називають *випадковою величиною*. У разі, якщо $\alpha(\omega_i)$ відображає множину Ω на одновимірний простір R_1, випадкову величину називають *одновимірною*. Якщо відображення здійснюється на R_n, то випадкову величину називають *n*-вимірною (системою *n* випадкових величин або *n*-вимірним випадковим вектором). Схематично одновимірну випадкову величину унаочнює наведений рисунок.

Отже, величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зліченною (зчисленною), то таку величину називають *дискретною*. У протилежному разі її називають *неперервною*.

Приклад 1. Задано множину цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Навмання беруть одне число. Елементарними подіями будуть такі: поява одного з чисел $\alpha(\omega_i) = 1, 2, 3, \ldots, 10$ з певною ймовірністю. Множина можливих значень $\alpha(\omega_i)$ є дискретною, а тому й випадкова величина — поява одного з чисел множини Ω — буде дискретною.

Приклад 2. Вимірюється сила струму за допомогою амперметра. Результати вимірювання зазвичай округлюють до найближчої поділки на шкалі для вимірювання сили струму. Похибка вимірювання, що виникає внаслідок округлення, являє собою неперервну випадкову величину.

Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту *X, Y, Z*, ... , а їх можливі значення — малими *x, y, z*, ...

Для опису випадкової величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й зазначити, з якими ймовірностями ця величина набуває того чи іншого можливого значення.

Із цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Співвідношення, що встановляє зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають *законом розподілу випадкової величини*.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі або за допомогою ймовірнісного многокутника.

У разі табличної форми запису закону подається послідовність можливих значень випадкової величини X, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм імовірностей:

$X = x_i$	x_1	x_2	x_3	…	x_k
$P(X = x_i) = p_i$	p_1	p_2	p_3	…	p_k

Оскільки випадкові події $(X = x_j)$ і $(X = x_m)$ є між собою несумісними ($(X = x_i) \cap (X = x_m) = \varnothing,\ i \neq m;\ i,\ m = 1, 2, \ldots, k$) і утворюють повну групу $\left(\bigcup_{j=1}^{k}(X = x_j) = \Omega\right)$, то необхідною є така умова:

$$\sum_{j=1}^{k} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{k} p_i = 1.$$

Ця рівність називають *умовою нормування* для дискретної випадкової величини X. Наведену таблицю називають *рядом розподілу*.

Приклад 3. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = x_i$	–4	1	2	5	9
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,1	0,5	p_4	0,2

Знайти ймовірність можливого значення випадкової величини $X = x_4 = 5$.

Згідно з умовою нормування маємо

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \to 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}5 + p_4 + 0{,}2 = 1 \to p_4 = 0{,}1.$$

Приклад 4. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею

$X = x_i$	2,5	3	4,5	5	5,5	6
$P(X = x_i) = p_i$	a	$2a$	a	$3a$	a	$2a$

Знайти ймовірності можливих значень випадкової величини X: $x_1 = 2{,}5$; $x_3 = 4{,}5$; $x_4 = 5$; $x_5 = 5{,}5$; $x_6 = 6$. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) $X < 3$; 2) $X \le 3$; 3) $X < 5$; 4) $X \le 5$; 5) $2{,}5 \le X < 5{,}5$; 6) $X \ge 5{,}5$.

За умовою нормування одержимо

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = a + 2a + a + 3a + a + 2a = 1 \to$$

$$10a = 1 \to a = 0{,}1.$$

Отже, закон розподілу дискретної випадкової набирає такого вигляду:

$X = x_i$	2,5	3	4,5	5	5,5	6
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Обчислимо ймовірності подій:

$$1)\ P\,(X < 3) = P\,(X = 2{,}5) = 0{,}1;$$

$$2)\ P\,(X \le 3) = P\,(X = 2{,}5) + P\,(X = 3) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$$

$$3)\ P\,(X < 5) = P\,(X = 2{,}5) + P\,(X = 3) + P\,(X = 4{,}5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}4;$$

$$4)\ P\,(X \le 5) = P\,(X = 2{,}5) + P\,(X = 3) + P\,(X = 5) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7;$$

$$5)\ P\,(2{,}5 \le X \le 5{,}5) = P\,(X = 2{,}5) + P\,(X = 4{,}5) + P\,(X = 5) + P\,(X = 5{,}5) =$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8;$$

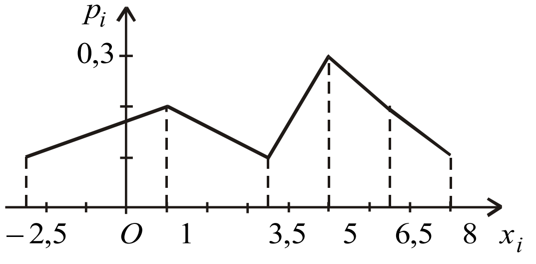
$$6)\ P\,(X \ge 5{,}5) = P\,(X = 5{,}5) + P\,(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3.$$

Закон розподілу ймовірностей можна унаочнити графічно. Для цього візьмемо систему координат $p_i\,O\,x_i$, відклавши на осі абсцис можливі значення випадкової величини x_i, а на осі ординат — імовірності p_i цих можливих значень. Точки з координатами (x_i; p_i) послідовно сполучимо відрізками прямої. Утворену при цьому фігуру називають імовірнісним многокутником.

Приклад 5. За заданим у табличній формі законом розподілу дискретної випадкової величини X:

$X = x_i$	–2,5	1	3,5	5	6,5	8
$P\,(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1

Побудувати ймовірнісний многокутник.



Імовірнісний многокутник зображено на рисунку. Сума ординат імовірнісного многокутника завжди дорівнює одиниці.

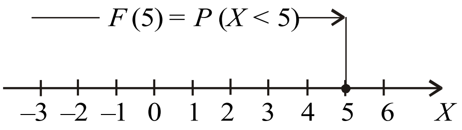
37.3. Функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) та її властивості

Закон розподілу ймовірностей можна подати ще в одній формі, придатній і для дискретних, і для неперервних випадкових величин, а саме як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F\,(x)$, так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за x.



Наприклад, $F(5) = P(X < 5)$ означає, що в результаті експерименту випадкова величина X (дискретна чи неперервна) може набути значення, яке міститься ліворуч від $x = 5$, що ілюструє рисунок.

Розглянемо властивості $F(x)$:

I. $0 \le F(x) \le 1.$

II. $F(x)$ є неспадною функцією, а саме $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Із властивостей $F(x)$ випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

Отже, для неперервної випадкової величини X справджуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X \le \beta) = P(\alpha \le X \le \beta).$$

3. Якщо $X \in (-\infty; \infty)$, виконуються два подані далі співвідношення.

3.1 $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0.$

Оскільки подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від $-\infty$, то така подія є неможливою ($\varnothing$).

3.2 $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} P(X < x) \to F(\infty) = P(X < \infty) = 1.$

Подія $X < \infty$ полягає в тому, що випадкова величина X набуває числового значення, яке міститься ліворуч від $+\infty$. Ця подія є вірогідною (Ω), оскільки будь-яке число $X = x < \infty$.

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку *[a; b]*, то

$$F(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \le a;$$
$$F(x) = 1 \quad \text{для} \quad x > b.$$

Приклад 6. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	– 4	– 1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Згідно з властивостями $F(x)$ одержимо наведені далі співвідношення:

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0;$

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0{,}1;$

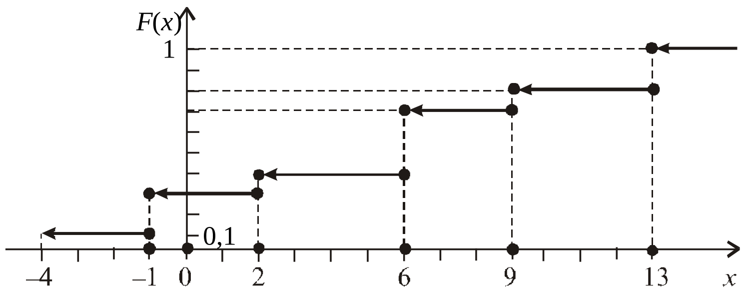
3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0{,}1 + 0{,}2 +$
$+ 0{,}1 = 0{,}4$;

5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}7$;

6) $F(13) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X > 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 9) + P(X = 13) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 +$
$+ 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1$.



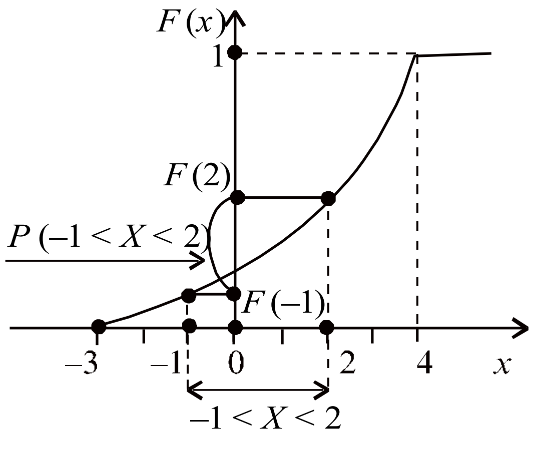
Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \le -1; \\ 0{,}3, & -1 < x \le 2; \\ 0{,}4, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}7, & 6 < x \le 9; \\ 0{,}8, & 9 < x \le 13; \\ 1, & x > 13. \end{cases}$$

Приклад 7. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією розподілу ймовірностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -3; \\ \dfrac{(x+3)^2}{49}, & -3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Побудувати графік функції $F(x)$ та обчислити $P(-1 < X < 2)$.



Обчислимо

$$P(-1 < X < 2) = F(2) - F(-1) = \left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=2} - \left.\frac{(x+3)^2}{49}\right|_{x=-1} =$$

$$= \frac{25}{49} - \frac{4}{49} = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

37.4. Щільність імовірностей (диференціальна функція) та її властивості

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати за допомогою щільності ймовірностей, яку позначають $f(x)$.

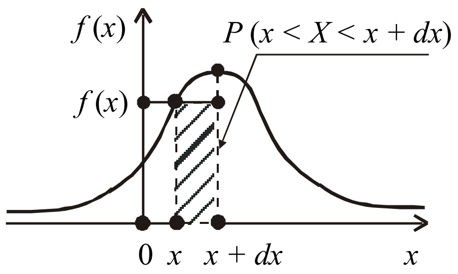
Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називають першу похідну від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{ звідки } dF(x) = f(x)dx.$$

Оскільки

$$P(x < X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x) \approx dF(x) = f(x)dx,$$

то добуток $f(x)dx$ — ймовірність того, що випадкова величина X міститиметься у проміжку $[x, x + dx]$, де $dx = \Delta x$.



Геометрично на графіку щільності ймовірності $f(x)dx$ відповідає площа прямокутника з основою dx і висотою $f(x)$.

Властивості $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$.
2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\alpha x = 1.$$

3. Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Приклад 8. Закон неперервної випадкової величини X задано у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & 0 < x \leq \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

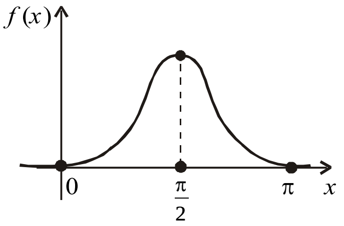
За властивістю 4 маємо

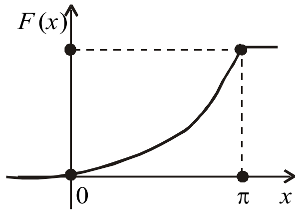
$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{1}{2} \sin dx = \frac{1}{2}\int_0^x \sin dx = \frac{1}{2}(-\cos x |_0^x) = \frac{1}{2}(-\cos x + 1) = = \frac{1 - \cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде такою:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рисунках.





Імовірність події $\dfrac{\pi}{6}<X<\dfrac{\pi}{2}$ можна обчислити таким чином:

$$P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{\pi}{4}\right)=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=-\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

37.5. Приклади основних законів розподілу

Розглянемо приклади основних законів розподілу:

а) ***дискретних випадкових величин*:**

1) ***біномний розподіл*:** випадкова величина X називається розподіленою за біномним законом, якщо вона набуває значення $x=0,1,2,\ldots,n$ із ймовірностями

$$P_n(x)=C_n^x\,p^x\,q^{n-x}.$$

Функція розподілу $F(x)=\sum\limits_{x=0}^{n-1}C_n^x\,p^x\,q^{n-x}$. Очевидно, що $F(x)=0$ при $x\le 0$ і $F(x)=1$ при $x>n$;

2**)** ***розподіл Пуассона*:** випадкова величина X називається розподіленою за законом Пуассона з параметром $\lambda>0$ ($\lambda=np$), якщо вона набуває значень $x=0,1,2,\ldots,n$ із ймовірностями $P_n(x)=\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$, причому p дуже мале, а n дуже велике число.

Функція розподілу $F(x)=\sum\limits_{x=0}^{n-1}\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$;

3) ***геометричний розподіл*:** нехай проводиться серія незалежних дослідів, в кожному з яких подія A може з’явитися з деякою ймовірністю p. Досліди продовжуються до першої появи події A, після цього дослід припиняється.

Нехай випадкова величина X – кількість проведених дослідів до першої появи події A.

Можливі значення величини X: $x=1,2,3,\ldots$ Подія $X=n\,(n\in/N)$ означає, що в перших $n-1$ дослідах подія A не настала, а в n-му досліді – настала. Ймовірність $P(X=n)$ дорівнює

$$P(X=n)=\underbrace{(1-p)(1-p)\ldots(1-p)}_{n-1\text{ разів}}\cdot p=q^{n-1}\cdot p \qquad (p+q=1).$$

Отже закон розподілу величини X є таким:

X	1	2	3	...	n	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{n-1}p$	...

Цей розподіл називається *геометричним* .

Очевидно, що $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = p + qp + q^2 p + ... + q^{n-1} p + ... = \dfrac{p}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1$, як сума нескінченно спадної геометричної прогресії.

Функція розподілу $F(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} p$. $F(x) = 0$ при $x < 1$;

б) *неперервних випадкових величин:*

4) ***рівномірний розподіл*:** випадкова величина X називається розподіленою рівномірно на інтервалі $[a,b]$, якщо її щільність розподілу на цьому інтервалі

$$f(x) = \begin{cases} C, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Використовуючи властивість щільності розподілу, визначимо C:

$$\int_a^b C dx = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, $F(x) = \int_a^x \dfrac{1}{b-a} dx = \dfrac{x-a}{b-a}$ для $x \in [a,b]$,

$F(x) = 0$ для $x < a$, $F(x) = 1$ для $x > b$;

5) ***показниковий розподіл*:** випадкова величина X називається розподіленою за показниковим (експоненціальним) законом з параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad \lambda > 0 \ -\mathrm{const},$$

Використовуючи формулу (6) $F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx$, одержуємо вираз для функції розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

6) *нормальний розподіл*: випадкова величина X називається розподіленою за нормальним законом з параметрами a і σ, якщо її щільність розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Функція розподілу має вигляд $F(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Якщо зробити заміну $\dfrac{x-a}{\sigma} = t, \quad dx = \sigma\, dt,$

то $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0{,}5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ – функція Лапласа.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}\ \Rightarrow\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-t^2/2}dt=\frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^R d\rho\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}\cdot\rho=-2\pi\cdot e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Bigg|_0^R=2\pi\left(1-e^{-R/2}\right),$$

якщо $R\to\infty$, то $\iint\to 2\pi$,

але

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\cdot e^{-y^2/2}\ dx\ dy=2\pi\ \Rightarrow\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{2\pi}\,.$$

Ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення з інтервалу $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, обчислюється за формулою

$$P(\alpha\le x<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Контрольні запитання

1. Означення випадкової величини.
2. Означення дискретної та неперервної випадкових величин.
3. Умова нормування для дискретної випадкової величини.
4. Закон розподілу випадкової величини.
5. Що називається функцією розподілу випадкової величини?
6. Чому дорівнюють $F(-\infty),\ F(\infty)$?
7. Чому дорівнює $P(\alpha<X<\beta)$?
8. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини *X*.
9. Чому дорівнює $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$?
10. Чому дорівнює $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$?
11. Чому дорівнює $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$?
12. Якщо $X\in[a;\,b]$, то чому дорівнює $\int\limits_a^b f(x)dx$?
13. Якщо $X\in[a;\,b]$, то чому дорівнює $\int\limits_a^x f(x)dx$?
14. Властивості $F(x)$.
15. Властивості $f(x)$.

Лекція 38. Числові характеристики випадкових величин

План

38.1. Вступ.
38.2. Математичне сподівання та його властивості.
38.3. Мода та медіана випадкової величини.
38.4. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення, властивості дисперсії.
38.5. Початкові та центральні моменти.
38.6. Асиметрія та ексцес.

38.1. Вступ

Закон розподілу ймовірностей як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин дає повну інформацію про них. Проте на практиці немає потреби так докладно описувати ці величини, а достатньо знати лише певні параметри, що характеризують їх істотні ознаки. Ці параметри і називають *числовими характеристиками випадкових величин*.

38.2. Математичне сподівання та його властивості

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є *математичне сподівання*.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Означення. Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеної на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Якщо Ω — обмежена множина, то

$$M(X) = \sum_{s=1}^{n} x_i p_i .$$

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X) = \int_{\Omega} x\, f(x)dx .$$

Якщо $\Omega = (-\infty; \infty)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx .$$

Якщо $\Omega = [a; b]$, то

$$M(X) = \int_{a}^{в} x\, f(x)dx.$$

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C.$$

2. $M(CX) = CM(X)$.

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(AX+B)=AM(X)+B.$$

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблицею:

x_i	– 6	– 4	2	4	6	8
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2

Обчислити $M(X)$.

Одержимо

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=$$
$$=-6\cdot 0{,}1-4\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}3+6\cdot 0{,}1+8\cdot 0{,}2=$$
$$=-0{,}6-0{,}4+0{,}4+1{,}2+0{,}6+1{,}6=2{,}8.$$

Приклад 2. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \dfrac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}, & -1<x\le 7;\\ 0, & x>7\end{cases}$$

обчислити $M(X)$.

Маємо

$$M(X)=\int_{-1}^{7}x\,f(x)dx=\int_{-1}^{7}x\frac{1}{12}\sqrt[3]{x+1}\;dx=\frac{1}{12}\int_{-1}^{7}x\,\sqrt[3]{x+1}\;dx=$$
$$=\left|\begin{matrix}x+1=z^3 & \\ x=z^3-1 & \to\;\; -1\le x\le 7\\ dx=3z^2dz & \;\;\;\; 0\le z\le 2\end{matrix}\right|=\frac{1}{12}\int_{0}^{2}(z^3-1)\;z\;3z^2dz=$$
$$=\frac{1}{4}\int_{0}^{2}(z^6-z^3)dz=\frac{1}{4}\left(\int_{0}^{2}z^6dz-\int_{0}^{2}z^3dz\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{z^7}{7}\Big|_0^2-\frac{z^4}{4}\Big|_0^2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{128}{7}-4\right)=\frac{1}{4}\;\frac{128-28}{7}=\frac{100}{28}=\frac{25}{7},$$

$$M(X)=\frac{25}{7}.$$

38.3. Мода та медіана випадкової величини

Модою (Mo) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$$f\,(Mo) = max.$$

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:

$$P(-\infty < X < \mathrm{Me}) = P(\mathrm{Me} < X < \infty) \to F(\mathrm{Me}) - F(-\infty) = F(\infty) - F(\mathrm{Me}) \to$$
$$\to F(\mathrm{Me}) = 1 - F(\mathrm{Me}) \to 2F(\mathrm{Me}) = 1 \to F(\mathrm{Me}) = 0{,}5.$$

Отже, медіану визначають з останнього рівняння.

Приклад 3. Робітник під час роботи обслуговує три верстати-автомати. Ймовірність того, що верстат-автомат потребує уваги робітника за певний проміжок часу, — величина стала і дорівнює 0,8.

Побудувати закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X — числа верстатів, які потребують уваги робітника за певний проміжок часу. Знайти Mo.

Можливі значення випадкової величини: $X = 0, 1, 2, 3$.

Імовірності цих можливих значень такі:

$p_1 = (0{,}2)^3 = 0{,}008$;

$p_2 = 3p\,q^2 = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}04 = 0{,}096$;

$p_3 = 3p^2q = 3 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$;

$p_4 = p^3 = (0{,}8)^3 = 0{,}512$.

Запишемо закон таблицею:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,008	0,096	0,384	0,512

Із таблиці визначаємо Mo = 3.

38.4. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення, властивості дисперсії

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, що будуть відрізнятися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Приклад 4. Закони розподілу випадкових величин X і Y задані таблицями:

x_i	– 0,5	– 0,1	0,1	0,5
p_i	0,4	0,1	0,1	0,4

y_j	– 100	– 80	– 10	10	80	100
p_j	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1

Обчислити $M(X)$ і $M(Y)$.

$$M(X)=\sum_{s=1}^{4}x_i p_i=-0{,}5\cdot 0{,}4-0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}1+0{,}5\cdot 0{,}4=$$
$$=-0{,}2-0{,}01+0{,}01+0{,}2=0;$$
$$M(Y)=\sum_{j=1}^{6}y_j p_j=-100\cdot 0{,}1-80\cdot 0{,}2-10\cdot 0{,}2+10\cdot 0{,}2+80\cdot 0{,}2+100\cdot 0{,}1=$$
$$=-10-16-2+2+16+10=0.$$

Отже, два закони розподілу мають однакові математичні сподівання, хоча можливі значення для випадкових величин X і Y істотно різні. З наведеного прикладу бачимо, що в разі рівності математичних сподівань ($M(X) = M(Y) = 0$) випадкові величини X і Y мають тенденцію до коливань відносно $M(X)$ та $M(Y)$, причому Y має більший розмах розсіювання відносно $M(Y)$, ніж випадкова величина X відносно $M(X)$. Тому математичне сподівання називають *центром розсіювання*.

Для вимірювання розсіювання вводять числову характеристику, яку називають *дисперсією*.

Для визначення дисперсії розглядається відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання $(X - M(X))$

Математичне сподівання такого відхилення випадкової величини X завжди дорівнює нулю. Справді,

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

Отже, відхилення не може бути мірою розсіювання випадкової величини.

Означення. *Дисперсією* випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Для дискретної випадкової величини X дисперсія

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_i,$$

а для неперервної

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$D(X)=\int_{a}^{ъ}(x-M(X))^2 f(x)dx.$$

Властивості дисперсії:

1. Якщо C — стала величина, то

$$D(C)=0.$$

2. $D(CX)=C^2 D(X)$.

3. Якщо A і B — сталі величини, то

$$D(AX+B)=A^2D(X).$$

Можна показати, що дисперсію можна обчислити й за такою формулою:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Для дискретної випадкової величини X

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-M^2(X);$$

для неперервної

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-M^2(X).$$

Якщо $X\in[a;\,b]$, то

$$D(X)=\int_{a}^{b}x^2f(x)dx-M^2(X).$$

Необхідно пам'ятати, що дисперсія не може бути від'ємною величиною $(D(X\ge 0))$. Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини стосовно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті. Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

Означення. *Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Приклад 5. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

x_i	– 4	– 2	1	2	4	6
p_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D(X)$, $\sigma(X)$.

Маємо:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{6}x_ip_i\right)^2,$$

$$M(X)=\sum_{i=1}^{6}x_ip_i=-4\cdot 0,1-2\cdot 0,2+1\cdot 0,3+2\cdot 0,2+4\cdot 0,1+6\cdot 0,1=$$
$$=-0,4-0,4+0,3+0,4+0,4+0,6=0,9,$$

$$M(X^2)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2p_i=16\cdot 0,1+4\cdot 0,2+1\cdot 0,3+4\cdot 0,2+16\cdot 0,1+36\cdot 0,1=$$
$$=1,6+0,8+0,3+0,8+1,6+3,6=8,7,$$

$$D(X)=8,7-(0,9)^2=8,7-0,81=7,89,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7,89}\approx 2,8.$$

38.5. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом *k*-го порядку випадкової величини *X* називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k) \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ ...).$$

Якщо $k = 1$, $\nu_1 = M(X)$; якщо $k = 2$, $\nu_2 = M(X^2)$ тощо.

Для дискретної випадкової величини *X*

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,;$$

для неперервної

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \,.$$

Якщо $X \in [a;\ b]$, то

$$\nu_k = \int_{0}^{d} x^k f(x)dx \,.$$

Центральним моментом *k*-го порядку називається математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ ...).$$

Якщо $k = 1$, $\mu_1 = M(X - M(X)) = 0;$

якщо $k = 2$, $\mu_2 = M(X - M(X)^2 = D(X)\,;$

якщо $k = 3$, $\mu_3 = M(X - M(X))^3;$

якщо $k = 4$, $\mu_4 = M(X - M(X))^4\,.$

Для дискретної випадкової величини

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i;$$

для неперервної

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx.$$

Якщо $X \in [a;\ b]$, то

$$\mu_k = \int_{a}^{b} (x - M(X))^k f(x)dx \,.$$

38.6. Асиметрія та ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини.

Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина *X* симетрично розподілена відносно *M* (*X*). Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину — коефіцієнт асиметрії:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}\,.$$

Центральний момент четвертого порядку використовують для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність або гостровершинність щільності ймовірності $f\ (x)$. Ексцес обчислюється за формулою

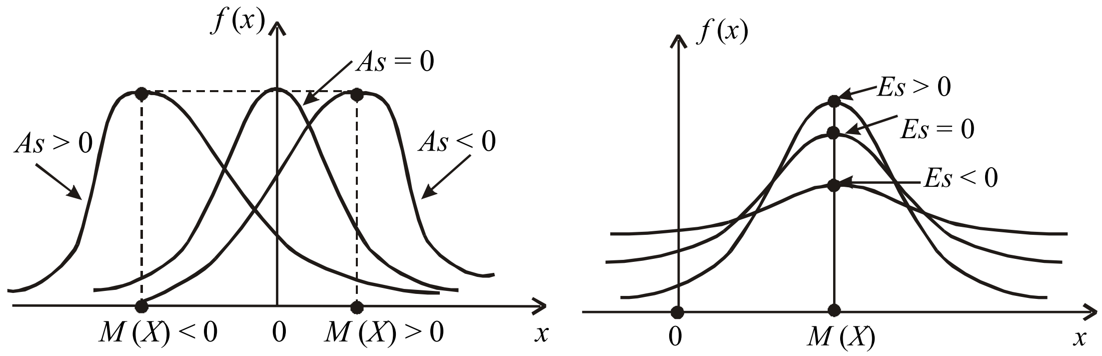
$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Зауважимо, що число 3 віднімається ось чому. Для центрального закону розподілу, так званого нормального закону, виконується рівність

$$\frac{\mu_4}{\sigma_4} = 3.$$

Отже, $Es = 0$.

Для наочності за різних значень As, Es графіки $f\ (x)$ зображені на рисунках.



Контрольні запитання

1. Що називається математичним сподіванням випадкової величини?
2. Чому дорівнює $M\ (C)$, де C — стала величина?
3. Якщо A і B — сталі величини, то чому дорівнює $M\ (AX + B)$?
4. Що характеризує математичне сподівання випадкової величини?
5. Що називають відхиленням випадкової величини?
6. Чому дорівнює $M\ (X - M\ (X))$?
7. Що називають дисперсією випадкової величини?
8. Що характеризує дисперсія випадкової величини?
9. Чому дорівнює $D\ (C)$, де C — стала величина?
10. Чому дорівнює $D\ (CX)$, де C — стала величина?
11. Якщо A і B — сталі, то чому дорівнює $D\ (AX + B)$?
12. Що називають середнім квадратичним відхиленям випадкової величини?
13. Що характеризує ексцес?
14. Що характеризує асиметрія?

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Атанасян Л. С. Геометрия : учебное пособие / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – Москва : Просвещение, 1986. – 336 с.
2. Базылев В. Т. Геометрия / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев. – Москва : Просвещение, 1975. – 367 с.
3. Аналитическая геометрия : учебное пособие / С. В. Бахвалов и др. – Москва : Просвещение, 1970. – 376 с.
4. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – 4-е изд., перераб. – Москва : Наука, 1980. – 336 с.
5. Аналитическая геометрия : учебное пособие / В. П. Белоусова и др. – Москва : Высшая школа, 1973. – 328 с.
6. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 1969. – 440 с.
7. Математический анализ в вопросах и примерах. Функции нескольких переменных : учебное пособие / В. Ф. Бутузов и др. – Москва : Высшая школа, 1988. – 288 с.
8. Давыдов Н. А. Курс математического анализа : учебное пособие / Н. А. Давыдов. – Москва : Просвещение, 1973. – 351 с.
9. Давыдов Н. А. Сборник задач по математическому анализу / Н. А. Давыдов. – Москва : Просвещение, 1973. – 256 с.
10. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1977. – 528 с.
11. Математичний аналіз у прикладах : навчальний посібник / Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін. – Київ : Вища шк., 2003. – Т. 2. – 470 с.
12. Ефимов К. Г. Краткий курс аналитической геометрии: научное пособие / К. Г. Ефимов. – Москва : Наука, 1979. – 373 с.
13. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики : посібник для вчителів / М. І. Жалдак. – Київ : РННЦ «Дініт», 2003. – 324 с.
14. Вилейтнер Г. И. История математики от Декарта до середины XIX столетия : учебник / Г. И. Вилейтнер ; под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1960. – 468 с.
15. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия : учебник / Г. И. Вилейтнер ; под ред. А. П. Юшкевича. – Москва : Наука, 1972. – 495 с.
16. Киселев А. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. И. Киселев, М. Л. Краснов, Г. И. Макаренко. – Москва : Высш. шк., 1965.
17. Коровкин П. П. Математический анализ : научное пособие / П. П. Коровкин. – Москва : Просвещение, 1974. – Ч. 2. – 464 с.

18. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа : научное пособие : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. – Москва : Просвещение, 1988. – Т. 2. – 208 с.
19. Бохан К. А. Курс математического анализа : учебник : в 2 т. / К. А. Бохан, И. А. Егорова ; под ред. Б. З. Вулиха. – Москва : Просвещение, 1972 . – Т. 2. – 439 с.
20. Математический анализ. Кратные и криволинейные интегралы : научное пособие / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. – Москва : Просвещение, 1994. – 439 с.
21. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. М. Матвеев. – Москва : Высш. шк., 1967.
22. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. – Москва : Высш. шк., 1987.
23. Никольский О. А. Курс математического анализа : научное пособие / О. А. Никольский. – Москва : Просвещение, 1986. – 432 с.
24. Уваренков М. М. Курс математического анализа : в 2 т. / М. М. Уваренков, М. З. Маллер. – Москва : Просвещение, 1976. – Т. 2. – 479 с.
25. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Москва : Наука, 1985.
26. Фихтенгольц Г. М. Курс математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Просвещение, 1968. – Т. 2. – 464 с.
27. Шамоня В. Г. Практикум з курсу «Методи обчислень» : навчальний посібник / В. Г. Шамоня, О. В. Семеніхіна. – Суми : СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2008. – 68 с.
28. Шкіль М. І. Математичний аналіз : підруч. : у 2 ч. / М. І. Шкіль. – Київ : Вища школа, 1995. – Ч. 2. – 510 с.

ДОДАТОК А

(обов'язковий)

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУСА $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3478	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2813	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2293	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1646	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1107
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0978	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0525	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0279	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0164	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0118	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0014	0014	0013	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	000

ДОДАТОК Б

(обов’язковий)

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

X	Ф (*x*)	X	Ф (*x*)	X	Ф (*x*)	X	Ф (*x*)	X	Ф (*x*)
00	0.0000	0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.02	0.4783
01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3448	1.51	0.4345	2.04	0.4793
02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.06	0.4803
03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.08	0.4812
04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.10	0.4821
05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	L55	0.4394	2.12	0.4830
06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.14	0.4838
07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.16	0.4846
08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.18	0.4854
09	00359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.20	0.4861
10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.22	0.4868
11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.24	0.4875
12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.26	0.4881
13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	03708	1.63	0.4484	2.28	0.4887
14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.30	0.4893
15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.32	0.4898
16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.34	0.4904
17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.36	0.4909
18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.38	0.4913
19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.40	0.4918
20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.42	0.4922
21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.44	0.4927
22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3883	1.72	0.4573	2.46	0.4931
23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3807	1.73	0.4582	2.48	0.4934
24	0.0948	0.74	0.2703	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.50	0.4938
25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.52	0.4941
26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.54	0.4945

Продовження додатка Б

X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)
27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.56	0.4948
28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.58	0.4951
29	0(1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.60	0.4953
30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2-62	0.4956
31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.64	0.4959
32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.66	0.4961
33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.68	0.4963
34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.70	0.4965
35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.72	0.4967
36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.74	0.4969
37	0.1443	0.87	0.3076	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.76	0.4971
38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.78	0.4973
39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.80	0.4974
40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.82	0.4976
41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.84	0.4977
42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.86	0.4979
43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.88	0.4980
44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.90	0.4981
45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.92	0.4982
46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.94	0,4985
47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.96	0.4985
0.48	0.1884	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.98	0.4986
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	3.00	0.49865
								3.20	0.49931
								3.40	0.49966
								3.60	0.499841
								3.62	0.499928
								4.00	0.499468
								4.50	0.499997
								5.00	0.499997

ДОДАТОК В

(обов'язковий)

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $P(k,\ a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

	a								
K	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.065310	0.548812	0.496585	0.449329	0.406570
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287	347610	359463	365913
2	004524	016375	033337	353626	065816	098786	121663	143785	164661
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757	028388	038343	049398
4	000004	000055	000250	000715	001580	002764	004968	007669	011115
5		000002	000015	000057	000158	000356	000696	001227	002001
6			000001	000004	000013	000036	000081	000164	000300
7					000001	000003	000008	000019	000039
8							000001	000002	000004

Продовження додатка В

	a								
K	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.367879	0.135335	0.49787	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	367879	270671	149361	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	183940	270671	224042	146525	084224	044618	022341	010735	004998
3	061313	180447	224042	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	015328	090224	168031	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	003066	036089	100819	156293	175467	160623	127717	091604	060727
6	000511	012030	050409	104196	146223	160623	149003	122138	091090
7	000073	003437	021604	059540	104445	137677	149003	139587	117126
8	000009	000859	008102	029770	065278	103258	130377	138587	131756
9	000001	000191	002701	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10		000038	000810	005292	018138	041303	070983	099262	118580
11		000007	000221	001295	008242	022529	045171	072190	097020
12		000001	000055	000642	003434	011264	026350	048127	072765
13			000013	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14			000003	000056	000472	002228	007094	016924	Q32384
15			000001	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16				000004	000049	000334	001448	004513	010930
17				000001	000014	000118	000596	002124	005786
18					000004	000039	000232	000944	002893
19					000001	000012	000085	000397	001370
20						000004	000030	000159	000617
21						000001	000010	000061	000264
22							000003	000022	000108
23							000001	000008	000042
24								000003	000016
25								000001	000006
26									000002
27									000001

Зміст

С.
Лекція 25. Числові ряди, основні властивості, ознаки збіжності 3
Лекція 26. Функціональні ряди 11
Лекція 27. Ряди Тейлора і Макларена. Їх застосування 19
Лекція 28. Подвійні інтеграли, їх властивості та обчислення 26
Лекція 29. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Застосування подвійних інтегралів 35
Лекція 30. Потрійні інтеграли, їх властивості та обчислення 43
Лекція 31. Криволінійні інтеграли, їх властивості та застосування 48
Лекція 32. Векторна функція скалярного аргументу. Похідна за напрямом. Градієнт. Скалярні там векторні поля 53
Лекція 33. Поверхневі інтеграли та їх обчислення 58
Лекція 34. Випадкові події та їх класифікація. Класичне означення ймовірності 65
Лекція 35. Основні теореми теорії ймовірностей 75
Лекція 36. Повторювані незалежні експерименти за схемою Бернуллі 83
Лекція 37. Випадкові величини 92
Лекція 38. Числові характеристики випадкових величин 101
Список використаної літератури 108
Додатки 110

Навчальне видання

Голубков Ігор Григорович,
Клименко Володимир Андрійович,
Жиленко Тетяна Іванівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Конспект лекцій

для студентів інженерно-технічних спеціальностей

У двох частинах

Частина 2

Відповідальний за випуск І. О. Шуда
Редактор С. М. Симоненко
Комп'ютерне верстання Т. І. Жиленко

Підписано до друку 27.11.2018, поз.
Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 6,75. Обл.-вид. арк. 8,71. Тираж 30 пр. Зам. №
Собівартість видання грн к.

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.