АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ДНИЩА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ

Каринцев И.Б., профессор

По заданию предприятия ООО "Фавор" анализировалось напряженно-деформированное состояние днища цилиндрической емкости, заполненной краской. Связано это с тем, что у некоторых емкостей при транспортировке в днищах возникали трещины, приводившие к порче продукции и загрязнению транспортных средств из-за трудно смываемой краски. Поэтому в качестве расчетной схемы рассматривалась тонкая круглая пластинка, жестко защемленная по контуру и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой.

Как известно, тонкие пластинки, у которых отношение наименьшего габаритного размера к толщине больше 5, делятся на жесткие, гибкие и абсолютно гибкие (мембраны). Жесткими называют пластинки, у которых отношение прогиба f к толщине h составляет $\frac{f}{h} < 0{,}25$, а срединная поверхность не испытывает деформации растяжения или сжатия, т.е. учитывается только изгибные напряжения. В гибких пластинках, когда

$0{,}25 < \frac{f}{h} < 5$, изгиб сопровождается деформированием срединной поверхности, т.е. в этом случае необходимо дополнительно учитывать растягивающие напряжения срединной поверхности, равномерно распределенной по толщине пластинки, называемыми мимбранными напряжениями. В абсолютно гибких пластинках, когда $\frac{f}{h} > 5$, учитываются только мембранные напряжения, а изгибными напряжениями пренебрегают.

В общем случае дифференциальные уравнения изогнутой упругой поверхности тонких пластинок сводится к двум нелинейным уравнениям Кармана

$$\nabla^2\ \nabla^2 F = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right],$$

$$D\ \nabla^2\ \nabla^2 w = q + h\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right),$$

где $w(x,y)$ - прогиб пластинки, E - модуль упругости, D - цилиндрическая жесткость, q - интенсивность нагрузки, F(x,y) - функция напряжений, ∇^2 - оператор Лапласа.

Построить общее решение уравнение Кармана из-за их сложности не представляется возможным. Здесь каждое нелинейное уравнение решается индивидуально при конкретных граничных условиях для F(x,y) и $w(x,y)$. Только для жестких пластинок, когда $\frac{f}{h} < 0{,}25$, задача существенно упрощается, т.к. в этом случае необходимо принять $F \equiv 0$. То-есть в этом случае уравнения сводятся к одному линейному уравнению, известному как уравнение Софи Жермен

$$D\,\nabla^2\,\nabla^2\,w = q.$$

При расчете мембран необходимо пренебречь только изгибной жесткостью, т.е. положить $D = 0$.

В нашем случае, когда толщина пластинки и нагрузка составляют

$h = 0{,}2$ мм, $q = 0{,}035$ кГс/см^2, пластинку следует считать гибкой. Поэтому необходимо пользоваться системой двух нелинейных уравнений, которые могут быть решены только численными методами, например методом конечных элементов.

Однако можно воспользоваться другим средством получения приближенного решения, основанного на энергетическом методе. Как известно энергетический метод основан на так называемом принципе возможных перемещений, который заключается в следующем: для того, чтобы система находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении, равнялась нулю. Другими словами, сумма работ всех внешних сил (поверхностных и объемных) при всяком возможном отклонении тела от положения равновесия равна приращению потенциальной энергии деформации

$$\delta A = \delta \Pi \quad \text{или} \quad \delta(A - \Pi) = 0,$$

где δ - вариация, A - работа всех внешних сил, Π - потенциальная энергия деформации.

Определяя потенциальную энергию деформации изгиба с учетом деформации срединной поверхности и используя принцип возможных перемещений, можно получить решение в общем виде, если представить форму изогнутой поверхности тем же уравнением, что и в случае малых прогибов

$$w = w_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2.$$

В этом случае прийдем к кубическому уравнению относительно прогиба (когда $\mu = 0{,}25$)

$$\frac{f}{h} + 0{,}488\left(\frac{f}{h}\right)^3 = 0{,}176\,\frac{p}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^4.$$

После определения стрелы прогиба нормальные напряжения изгиба σ_r, σ_t и напряжения в срединной поверхности σ_r^0, σ_t^0 находятся по формулам:

$$\sigma_r = \alpha E \frac{hf}{a^2}; \qquad \sigma_t = \beta E \frac{hf}{a^2};$$

$$\sigma_r^0 = \gamma E \left(\frac{f}{a}\right)^2, \qquad \sigma_t^0 = \delta E \left(\frac{f}{a}\right)^2.$$

Полные напряжения равны

$$(\sigma_r)_n = \sigma_r + \sigma_r^0, \qquad (\sigma_t)_n = \sigma_t + \sigma_t^0.$$

Численный расчет показал, что полученные напряжения не превышают допускаемых.

Однако, если в днище выдавить гофр в виде окружности, то напряженно-деформированное состояние круглой пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки изменится. Это связано с тем, что жесткость в направлении гофра увеличится и произойдет перераспределение радиальных и тангенциальных напряжений, т.к. гофр начнет воспринимать на себя большую нагрузку. Таким образом, увеличение жесткости в окружном направлении приводит к повышению тангенциальных напряжений.

Кроме того, наличие гофра, вызванного предварительной вытяжкой в холодном состоянии за пределы текучести, приводит к изменению упругих свойств материала, так как вытяжка связана с переходом материала в пластическое состояние. Поэтому в диаграмме растяжения происходит отсечение части диаграммы. Это приводит к тому, что остаточное удлинение после разрыва будем меньше, чем в материале, не подвергавшемся предварительной пластической деформации, т.е. материал становится более хрупким.

Поэтому следует ожидать, что при динамическом нагружении в гофре возможно возникновения трещины в радиальном направлении из-за тангенциальных напряжений. Именно в этих местах и было обнаружено появление трещины при транспортировке.

Таким образом, проведенный анализ показал, что наличие гофр, вызванных вытяжкой с пластической деформацией, вызывают с одной стороны увеличение жесткости днища и уменьшение прогибов, а с другой стороны - уменьшение упругих свойств материала и увеличение хрупкости. В конечном счете это может приводить к разрушению днища при транспортировке.