Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В АРТИЛЕРІЇ

Підручник

Рекомендовано вченою радою Сумського державного університету

Суми
Сумський державний університет
2019

УДК 623.4
В43

Авторський колектив:
В. І. Макеєв, кандидат технічних наук, доцент;
Ю. І. Пушкарьов, кандидат військових наук, доцент;
М. М. Ляпа, кандидат технічних наук, доцент;
А. Ф. Раскошний, кандидат військових наук, старший науковий співробітник;
В. Є. Житник, кандидат технічних наук, науковий співробітник;
В. М. Петренко, старший викладач

Рецензенти:
В. В. Воронько – доктор технічних наук, професор, проректор Національного аерокосмічного університету ім. М. Е. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»;
М. І. Васьківський – доктор технічних наук, професор, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідного управління розвитку ОВТ СВ ЦНДІ ОВТ ЗС України (м. Київ)

Рекомендовано до видання
вченою радою Сумського державного університету
як підручник
(протокол № 7 від 3 січня 2017 року)

Використання теорії ймовірностей в артилерії : підручник /
В43 В. І. Макеєв, Ю. І. Пушкарьов, М. М. Ляпа та ін. – Суми : Сумський державний університет, 2019. – 494 с.
ISBN 978-966-657-753-8

У підручнику викладені основи положення теорії ймовірностей, використовувані в артилерії, та приділено значну увагу застосуванню теорії ймовірностей щодо вирішення практичних завдань із різних питань підвищення бойової ефективності артилерії.

Підручник призначений для підготовки і проведення занять із підготовки стрільби та управління вогнем. Він може використовуватися як викладачами кафедр військової підготовки і студентами ЗВО, які навчаються за програмою підготовки офіцерів запасу, так і викладачами і курсантами ВЗВО (воєнних академій), які здійснюють підготовку офіцерів артилерійського профілю. Матеріал може застосовуватися для розроблення та заснування нових ПС і КВ артилерії й оцінювання ефективності ураження цілей артилерії в зоні АТО за зменшення норм витрати снарядів.

УДК 623.4

ISBN 978-966-657-753-8

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

АМС	– артилерійська метеорологічна станція
Вд	– серединне відхилення снарядів за дальністю
Вб	– бокове серединне відхилення снарядів за напрямком
Вв	– серединне відхилення снарядів за висотою
ВТЗ	– високоточна зброя
ВП	– вогнева позиція
ВПК	– великі поділки кутоміра
Гц	– глибина цілі (м)
$\alpha_ц$	– дирекційний кут цілі (п. к.)
$\alpha_{\text{ОН}}$	– дирекційний кут основного напрямку (п. к.)
ДМК	– десантний метереологічний комплект
Дл	– дальність до цілі з лівого пункту спряженого спостереження (м)
Дп	– дальність до цілі з правого пункту спряженого спостереження (м)
ЗВ	– зосереджений вогонь
ЗМУ	– зброя масового ураження
H	– відхилення тиску (мм рт. ст.)
*I*в	– інтервал віяла (п. к.)
K_c	– коефіцієнт стрільби
КМК	– командирська машина керування вогнем
КПА	– «Курс підготовки артилерії»
КСП	– командно-спостережний пункт
МП	– метеорологічний пост
МПК	– малі поділки кутоміра
МС	– математичне сподівання
N	– витрата снарядів
НЗВ	– нерухомий загороджувальний вогонь
НШ *адн*	– начальник штабу артилерійського дивізіону

ОН	– основний напрямок стрільби (п. к.)
ПАБ-2А	– перископічна артилерійська бусоль
ПП	– повна підготовка
ПЗК	– прилад замірювання камори
ПЗВ	– послідовне зосередження вогню
ПКВ	– прилад контрольних вимірювань
п. к.	– поділки кутоміра
ПРК	– прилад розрахунку коректур
ПС і КВ	– правила стрільби і керування вогнем
ПТКР	– протитанкова керована ракета
ПТРК	– протитанковий ракетний комплекс
ПКВ	– прилад керування вогнем
ПКВД	– пункт керування вогнем дивізіону
Рв	– установка рівня (тис.)
РЗВ	– рухомий загороджувальний вогонь
СВЗ	– станція вітрового зондування
СЗР	– спостереження знаків розривів
СОБ	– старший офіцер батареї
СС	– спряжене спостереження
$Т_з$	– температура заряду (0 °С)
ТЗР	– технічні засоби розвідки
ТС	– таблиці стрільби
Фц	– фронт цілі (метрах, поділках кутоміра)
ЦРС	– центр розсіювання снарядів

ВСТУП

Ракетні війська та артилерія є основною вогневою силою сухопутних військ, що визначають вирішальний успіх у загальновійськовому бою. Своїм точним та потужним вогнем артилерія знищує різні цілі противника й тим самим великою мірою зумовлює успішне виконання завдань, поставлених перед механізованими й танковими частинами та підрозділами.

Артилеристів завжди відрізняла священна відданість Батьківщині, стійкість та хоробрість в бою. Вони ніколи не залишали поле бою, стійко, до останнього подиху, виконували покладені на них завдання.

Сучасна теорія стрільби наземної артилерії в своєму розвитку пройшла великий історичний шлях. Цей шлях зумовлювався бурхливим розвитком техніки та з огляду на це розвиненням методів, прийомів використання цієї техніки в бою, тактики та оперативного мистецтва.

Перші «Правила стрільби артилерії» вийшли друком у 1891 році, «Інструкція стрільби артилерії» – у 1878 році та «Правила стрільби» у 1891 році передбачали стрільбу лише прямою наводкою.

У 1896–1898 р.р. в офіцерській артилерійській школі розробляються питання, пов'язані зі стрільбою із закритих вогневих позицій, проводяться дослідні стрільби. Однак до початку XIX століття єдиним статуним видом вогню залишалася стрільба прямою наводкою. Війни показали необхідність зміни методів ведення вогню та переходу до стрільби із закритих вогневих позицій, оскільки артилерія, що вела вогонь з відкритих позицій, зазнавала великих втрат та ефективність її вогню через це була низькою.

Бойові стрільби із закритих вогневих позицій вперше в світі проведені 10–11 липня 1904 р. в бою під Дашичао батареєю підполковника Пащенко, показали високу ефективність артилерійського вогню. З того часу стрільба із закритих вогневих позицій стала основним видом вогню артилерії.

Уперше стрільба із закритих позицій застосовувалася в Кримській війні 1853–1856 рр.

У період, попередній Другій світовій війні, були розроблені методи стрільби на ураження різних цілей: придушення та знищення прихованої та відкрито розміщеної живої сили, знищення різних оборонних споруд, танків вогнем прямою наводкою та із закритих вогневих позицій, ураження неспостережних цілей, зокрема артилерійських батарей противника. Вирішення цих завдань вимагало попереднього розроблення загальних теоретичних питань та насамперед питань, пов’язаних із використанням теорії ймовірностей до дослідження ефективності стрільби і до вивчення похибок, що супроводжують різні способи підготовки та ведення вогню.

У роки Другої світової війни велика увага приділялася розробленню способів ведення зосередженого та масованого вогню артилерії. Уже на початку війни були розроблені інструкції щодо керування вогнем: інструкція з підготовки та ведення вогню дивізіоном; вказівки щодо зосередженого вогню дивізіону без топографічної основи. Положення цих інструкцій відображені у «Правилах стрільби» 1942 р. ХХ ст.

Після Другої світової війни вчені-артилеристи розгорнули широко масштабні теоретичні та експериментальні роботи в області теорії стрільби. Проводилася велика робота щодо удосконалення повної підготовки. На підставі використання досягнень в галузі електроніки створені метеорологічні та балістичні служби, здатні ефективно забезпечувати велику точність підготовки даних для стрільби в будь-яких умовах. Детально розроблені питання технічної підготовки стрільби. У результаті проведеної роботи повна підготовка стала основним способом визначення установок для стрільби.

Кількісне вираження можливості окремих наслідків і подій ґрунтується на понятті ймовірності. Припускається, що кожній події, можливій за цих обставин, може бути приписана чисельна міра її об'єктивної можливості, названа ймовірністю події. Знання правил оцінювання ймовірностей подій допоможе керівникові підвищити якість прийняття рішень.

Предметом теорії ймовірностей є стохастичні експерименти на основі дослідження їх математичних моделей. Під стохастичним експериментом розуміємо експеримент, результат якого неможливо передбачити заздалегідь (до проведення експерименту), але такий, який можна повторити у незалежний спосіб необмежену кількість разів.

Теорія ймовірностей виникла як наука на основі твердження, що в основу масових випадкових однорідних подій покладені детерміновані закономірності. У природі немає жодного явища, в якому б не був наявним елемент випадковості. Як би точно не фіксувались умови експерименту, неможливо досягти того, щоб під час повторення експерименту результати повністю і точно збігалися. Випадкові відхилення супроводжують будь-яке закономірне явище. У багатьох практичних завданнях цими випадковими елементами можна знехтувати, розглядати замість реального явища його спрощену схему або «модель». При цьому з величезної кількості факторів, що впливають на це явище, виділяють найголовніші, впливом решти другорядних факторів нехтують. Таку схему вивчення явищ постійно застосовують у фізиці, механіці, техніці тощо.

Однак для вирішення ряду завдань описана «класична схема» є незастосовною. Є багато таких завдань, у яких наслідок досліджуваного явища залежить від такої великої кількості факторів, що їх практично неможливо врахувати і зареєструвати. У цих завданнях численні другорядні випадкові фактори тісно переплітаються між собою, відіграють помітну роль, а водночас їх кількість така велика, що неможливо вилучити численні зайві фактори, і тоді застосування класичних методів дослідження себе не виправдовує.

Практика показує, що, спостерігаючи у сукупності масу однорідних випадкових явищ, ми зазвичай виявляємо в них певні закономірності або стійкості, властиві саме масовим випадковим явищам. Ці закономірності практично не залежать від індивідуальних особливостей окремих випадкових явищ, що входять до розглядуваного масиву, їх особливості взаємозгасають, нівелюються. Так, неможливо наперед передбачити результат одного пострілу з гармати по даній мішені, але за великої кількості пострілів частота влучення наближається до певного сталого числа. Середній масовий результат множини випадкових явищ виявляється вже практично не випадковим, а передбачуваним. Це і є базою практичного застосування ймовірнісних методів дослідження.

Мета ймовірнісних методів полягає у тому, щоб обійти досить складне або неможливе дослідження окремого явища і звернутися безпосередньо до законів, що управляють масами таких явищ. Вивчення цих законів дозволяє не лише прогнозувати, а й впливати на хід подій, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати вплив на практику.

Подальшого розвитку набули питання оцінювання вражаючої дії боєприпасів, дослідження похибок, що супроводжують стрільбу, керування зосередженим та масованим вогнем великих мас артилерії. Успішному вирішенню цих питань сприяло широке використання електронних обчислювальних машин у процесі проведення досліджень.

Актуальністю розроблення підручника «Використання теорії ймовірностей в артилерії» є нагальна вимога часу та видання нових «Правил стрільби та керування вогнем наземної артилерії». Надруковані раніше навчальні посібники «Балістична підготовка стрільби, методи і засоби її удосконалення», «Довідник офіцера артилерійського підрозділу», «Підготовка стрільби і управління вогнем», «Довідник командира артилерійського підрозділу» та «Вогнева підготовка», а також підручники: «Стрільба артилерії», «Підготовка стрільби і управління вогнем артилерії» пройшли випробування часом і набули досвіду його застосування як у навчальному процесі, так і командирами артилерійських підрозділів у військах. Ті рекомендації, що надійшли до авторського колективу, враховані у цьому підручнику.

Підручник розроблений відповідно до програми змістового модуля 4.1 «Стрільба та керування вогнем артилерії» для вищих військових закладів освіти та є основним керувальним документом, що регламентує підготовку і керування вогнем артилерії під час підготовки і ведення бойових дій та здійснює підготовку студентів за програмою офіцерів запасу у ЗВО і курсантів ВЗВО.

Матеріал підручника викладається з урахуванням того, що читач частково ознайомлений із вищою математикою та теорією ймовірностей і має певні знання з предметів, що забезпечують їх вивчення.

Підручник насичений рисунками, таблицями, схемами, графіками, що, безумовно, полегшує та поглиблює засвоєння навчального матеріалу.

Підручник складається із дев’яти розділів та додатків.

У **першому** розділі висвітлені поняття про предмет та завдання теорії ймовірностей, надана стисла історична довідка історії виникнення, розвитку теорії ймовірностей, названі вчені та їх послідовники, які були джерелом появи теорії ймовірностей як науки, займалися її розвитком, удосконаленням та застосуванням в артилерійській науці, наведений аналіз вивчення предмета теорії ймовірностей та його застосування в будь-якій галузі науки, а також подальшого розвитку теорії ймовірностей.

У **другому** розділі розкриті основні поняття про події та класифікацію подій, наведені частота та ймовірність виникнення подій, способи обчислення чисельних значень імовірності події, наведені основні теореми: додавання ймовірностей, множення ймовірностей, наведені формула повної ймовірності, шкала ймовірності влучення в ціль при розсіюванні снарядів, повна ймовірність події й теорема гіпотез. У розділі подані деякі варіанти застосування вищеперелічених теорем в артилерійській науці під час стрільби та ураження (знищення) об'єктів, цілей.

У **третьому** розділі розглянуті питання щодо визначення ймовірності комбінацій за незмінних імовірностей подій, порядок і можливості використання формули бінома Ньютона, визначення можливості появи події не менше за задану кількість разів, наведений графік розподілу ймовірностей та застосуванням їх в артилерійській науці.

Четвертий розділ надає поняття закону розподілу випадкової величини, поданий ряд розподілу та багатокутник розподілу; наведені формули і визначення функції розподілу та щільності розподілу безперервних випадкових величин, а також числові характеристики випадкових величин, поняття про моменти, про математичне сподівання випадкової величини, про моду та медіану, про початкові центральні моменти; наведені визначення, формули та графічне зображення дисперсії та середнього квадратичного відхилення, поняття про розсіювання й середню витрату снарядів та ураження спостережної цілі, а також використання цих даних в артилерійській науці.

П'ятий розділ підручника ознайомлює читача з основними поняттями теореми та законами теорії ймовірностей: щільністю розподілу, нормальним законом розподілу, центрованою випадковою величиною, математичним сподіванням випадкової величини, середнім квадратичним відхиленням; запропоновані характеристики нормального закону розподілу, також наведені поняття про щільність імовірності нормального закону, щільність розсіювання снарядів та серединне відхилення снарядів за дальністю і напрямком, наведені можливості ймовірності потрапляння випадкової величини, використання функції розподілу та щільності розподілу під час розрахунку влучення в ціль, а також імовірність влучення в ціль з одного пострілу.

У розділі також наведені види похибок: систематичні, грубі й випадкові та кількість джерел похибок, надані визначення, графічне зображення та математичний вираз закону рівної ймовірності, числових характеристик нормального розподілу та числових характеристик закону рівної ймовірності.

У **шостому** розділі підручника подані основні поняття про систему випадкових величин, функцію розподілу системи двох випадкових величин та її числові характеристики, щільність розподілу системи двох випадкових величин, про залежні й незалежні випадкові величини, а також про систему кількох випадкових величин.

У **сьомому** розділі розкритий закон розподілів однієї й тієї самої системи двох випадкових величин, що відображається щільністю розподілу системи двох незалежних величин, осі якої збігаються з напрямком головних осей розсіювання.

Тому весь математичний апарат теорії ймовірностей, розроблений для системи двох випадкових величин, може бути повністю застосований для ймовірнісного оцінювання випадкових похибок-векторів.

У **восьмому** розділі підручника розглянуті закони розподілу: функцій випадкових аргументів, суми двох випадкових величин, лінійної функції від нормального розподілу аргументів та композиція нормальних законів із законом рівної ймовірності й нелінійні функції та похибки функції внаслідок похибок аргументів, обчислені числові характеристики функцій випадкових аргументів, а під час вирішення практичних завдань розраховані деякі числові характеристики (математичне сподівання й дисперсія, середньоквадратичне та серединне відхилення функцій випадкових аргументів); наведені теорема додавання математичних сподівань, формули для дисперсії та серединних відхилень суми випадкових величин, що підпорядковуються нормальним законам розподілу, а також композиції нормальних розподілів на площині.

У **дев'ятому** розділі подані поняття про закон великих чисел (теореми Чебишова та Бернуллі), наведені основні завдання математичної статистики і методів їх вирішення, статистичної функції розподілу, статистичного ряду і гістограми, числових характеристик статистичного розподілу, вирівнювання статистичних рядів, критеріїв згоди, завдання оброблення дослідних даних, способи визначення відповідного значення числової характеристики, також надані оцінювання точності й надійності визначення числових характеристик за результатами досвіду, оцінювання математичного сподівання, оцінювання середнього квадратичного і серединного відхилень, наближене оцінювання числових характеристик, оцінювання числових характеристик системи двох випадкових величин, подані поняття про виключення анормальних результатів та оброблення результатів вимірювань, наведені завдання оброблення і загальні методи їх вирішення.

Також у цьому розділі наведені різні способи оброблення результатів вимірювань за різницями між результатами окремих вимірювань, проведених із різним ступенем точності.

Ці результати оброблення дозволяють використовувати теорію ймовірностей не лише в артилерійській науці, а й у будь-якій її галузі, а також більш глибоко проводити вивчення у закладах вищої освіти.

У кожному розділі підручника наведені приклади до основних понять і теорем теорії ймовірностей, до матеріалу відповідного розділу та варіанти їх розв'язання, а також надані графічні зображення основних понять та законів.

У **додатках** розміщені додаткові таблиці, що сприяють проведенню розрахунків та вирішенню різних завдань щодо визначення більш ефективного ведення вогню артилерійськими підрозділами.

Актуальністю розроблення підручника «Використання теорії ймовірностей в артилерії» є нагальна вимога часу.

Підставою для написання підручника «Використання теорії ймовірностей в артилерії» є висування підвищених вимог до точності ведення вогню артилерійськими підрозділами.

Зміст підручника відповідає навчальним програмам підготовки офіцерів РВ і А запасу із студентів закладів вищої освіти зі стрільби і керування вогнем.

Підручник «Використання теорії ймовірностей в артилерії» призначений для студентів, які проходять підготовку за програмою офіцерів запасу за спеціальністю «Бойове застосування з'єднань, військових частин і підрозділів наземної артилерії» і призначений для вивчення питань найбільшої ймовірності ураження цілей противника та ефективнішого використання артилерійських підрозділів.

Підручник може бути корисним як науково-педагогічним працівникам, слухачам і курсантам ВЗВО, так і офіцерам (прапорщикам, сержантам) у військах (командирам артилерійських підрозділів) під час підготовки і ведення вогню артилерійськими підрозділами.

Матеріал підручника побудований таким чином, щоб був однаково зрозумілим як для студентів ЗВО, курсантів

ВЗВО, так і для офіцерів (прапорщиків, сержантів) артилерійських підрозділів.

Підручник розроблений авторським колективом у такому складі: кандидата технічних наук, доцента полковника запасу Макеєва В. І., кандидата військових наук, доцента полковника запасу Пушкарьова Ю. І., кандидата технічних наук, доцента полковника Ляпи М. М., кандидата технічних наук, старшого наукового співробітника полковника запасу Раскошного А. Ф., кандидата технічних наук, старшого наукового співробітника підполковника запасу Житника В. Є., полковника запасу Петренка В. М.

Необхідно відзначити, що підручник «Використання теорії ймовірностей в артилерії» підготовлений для навчання студентів за програмою підготовки офіцерів запасу створюється вперше, тому автори сподіваються, що наданий у підручнику матеріал допоможе користувачам у навчанні та практичному застосуванні теорії ймовірностей для стрільби артилерії, що, у свою чергу, дасть можливість підвищити рівень професійної підготовки кадрових офіцерів та офіцерів запасу у ВЗВО (ЗВО).

Розділ 1

ПРЕДМЕТ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Предмет та завдання теорії ймовірностей

У практиці стрільби, а також під час теоретичних досліджень способів підготовки та ведення вогню часто виникають такі питання: чи буде за певних умов мати місце влучення в ціль; чи завжди або як часто за цих умов буде мати місце влучення в ціль; скільки потрібно за цих умов витратити снарядів, щоб мати бажану кількість влучень.

Відповісти на них за допомогою звичайних прийомів практично неможливо. Ці питання органічно пов'язані з випадковою природою явища, тому не можна просто знехтувати випадковістю. Потрібно ретельно вивчити випадкове явище (в цьому випадку випадкові похибки, що супроводжують стрільбу) з точки зору закономірностей, властивих саме йому як випадковому явищу. Потрібно досліджувати закон, за яким розподіляються випадкові величини, з'ясовувати випадкові причини, що викликають розсіювання, порівнювати їх між собою за ступенем важливості й т. п.

Що таке випадкове явище?

Випадкове явище – це таке явище, що при неодноразовому відтворенні одного й того самого досвіду проходить щоразу дещо по-іншому.

Наведемо приклади.

Приклад 1. Проводиться стрільба з гармати на незмінних установках прицільних пристроїв.

Користуючись методами зовнішньої балістики, можна визначити теоретичну (середню) траєкторію снаряда. Остання цілком визначається умовами стрільби: початковою швидкістю снаряда, кутом кидання й балістичним коефіцієнтом снаряда. Фактична траєкторія кожного окремого снаряда внаслідок впливу багатьох факторів відхиляється від середньої траєкторії. Серед факторів, що викликають розкид траєкторій, можна назвати, наприклад, такі як розходження у вазі та формі снарядів, відхилення ваги заряду від нормального, неоднорідність структури заряду, відмінність у температурах зарядів, похибки в установленні прицільних пристроїв і наводці гармати, змінність метеорологічних умов від пострілу до пострілу і т. п. Якщо зробити декілька пострілів за незмінних установлень прицільних пристосувань, ми одержимо не одну траєкторію, а цілий пучок, або «сніп», траєкторій. Розсіювання траєкторій і буде в цьому разі являти собою випадкове явище.

Приклад 2. Проводиться ряд підривів осколково-фугасного снаряда в певному положенні щодо цілі. Результати окремих підривів дещо відрізняються один від одного: змінюються загальна кількість осколків, взаємне розміщення їх траєкторій, вага, форма й швидкість кожного окремого осколка. Ці зміни випадкові й визначаються впливом таких чинників, як неоднорідність металу корпусу снаряда, вибухової речовини, мінливість швидкості детонації і т. п. Тому підриви, здійснені, здавалося б, за однакових умов, можуть призводити до різних результатів: в одних ціль буде вражена осколками, а в інших – ні. Ураження цілі осколками снаряда в цих умовах є випадковим явищем.

Ці та подібні до них приклади свідчать про необхідність враховувати і розглядати випадкові явища, а також вивчати їх закономірності. Теорія ймовірностей і вивчає ці випадкові явища. Її предметом є специфічні закономірності, що спостерігаються у випадкових явищах.

Природно виникає питання: чи існують взагалі в світі випадкові явища, а якщо існують, то чи підпорядковуються вони будь-яким закономірностям?

Із цього питання вчені, які займалися теорією ймовірностей, висловлювали кілька точок зору. Одні з них (Я. Бернуллі, П. Лаплас та ін.) додержувалися ідеалістичної точки зору, стверджуючи, що випадкових явищ у природі об'єктивно та реально не існує. Вони ототожнювали випадковість з безпричинністю і вважали, що оскільки у природі безпричинних явищ не існує, то так само не існує і випадкових явищ. Саме таких метафізиків і висміював Ф. Енгельс: «Протилежну позицію займає детермінізм, що перейшов в природознавство з французького матеріалізму і намагався покінчити з випадковістю тим, що він взагалі заперечує її. Відповідно до цього погляду в природі панує лише проста, безпосередня необхідність» [3].

Інша точка зору метафізиків – визнання лише випадковості, визнання того, що в природі та в суспільстві панує лише випадковість.

Абсолютно зрозуміло, вчені, які займалися теорією ймовірності на підставі метафізичного розуміння взаємозв'язку необхідності й випадковості, хоча й вирішили деякі окремі приклади і питання, але не змогли вирішити й у кінцевому науковому підсумку довести загальні основні питання, на яких і ґрунтується теорія ймовірностей як математична наука. Провідна роль у вирішенні основних питань теорії ймовірностей належить російським і колишнім радянським ученим.

Чи можна вести мову про закономірності випадкових явищ? Адже випадкові явища тим і відрізняються від нібито невипадкових, що в їх основі відсутня будь-яка видима закономірність. Однак таке твердження спростовують досвід і наука.

Ґрунтуючись на матеріалістичному понятті випадковості та її закономірності, теорія ймовірностей за допомогою математичних методів вивчає закономірності випадкових явищ.

Знання закону, що належить до певного кола явищ, дає можливість передбачати подію. Однак точність наукового прогнозу в різних науках і в різноманітні періоди їх розвитку неоднакова й залежить від ступеня складності цього явища й розвитку цієї науки. Чим більше причин впливає на досліджуване явище і чим складніший взаємний вплив цих причин, тим важчий прогноз і тим менше він точний.

Таким чином, випадковість є об’єктивною категорією і тією чи іншою мірою вона супроводжує події. Визнання будь-якої події випадковою не означає, що ця подія безпричинна. Кожна подія, зокрема й випадкова, цілком характеризується умовами її виникнення; вона має місце відповідно до законів природи.

Зі сказаного випливає, що теорія ймовірностей є математичною наукою, що вивчає закономірності випадкових явищ.

Але теорія ймовірностей розглядає не всякі випадкові явища, а лише ті, що виникають за наявності деяких певних умов, що можуть повторюватися необмежену кількість разів у необмеженої кількості дослідів. Ці випадкові явища повинні мати масовий характер [1].

Для одноразової події не має сенсу говорити про якийсь закон. Так, якщо б ми помітили, що за одної стрільби точки падіння снарядів розміщуються певним чином (на обмеженій площі, симетрично, нерівномірно), а під час повторення подібних стрільб картина різко змінюється, то, звісно, не можна вести мову про жодну із закономірностей. Але на практиці при проведенні стрільби з досить великою кількістю пострілів легко помітити, що точки падіння снарядів розподіляються певним чином: на обмеженій площі та симетрично середній точці, а також нерівномірно – в центрі більш скупчено, по краях більш рідко. Очевидно, якщо при повторенні стрільб можна спостерігати один і той самий характер розподілу точок падіння снарядів, то природно вважати це закономірністю. Отже, тут надається поле діяльності для науки, що повинна встановити закономірність розподілу точок падіння снарядів щодо середньої точки їх групування.

І дійсно, вивчення цього питання свідчить, що хоча при кожному падінні снаряда ми маємо випадкове відхилення, але сукупність всіх точок падіння, розподіл точок падіння снарядів щодо центру їх групування закономірні. Отже, необхідно встановити цей закон, вивчити його і використовувати на практиці для одержання найкращих результатів при стрільбі.

Прикладів, подібних до цього, можна навести багато. Тут доречно ще раз підкреслити, що закономірність можна встановити для тих випадкових явищ, що можуть повторюватися достатньо велику кількість разів. Це необхідно засвоїти чітко, оскільки до цього часу трапляються особи, які критично ставляться до правил стрільби, викладених у наших настановах та інструкціях, пропонують новий порядок стрільби, спираючись на один будь-який окремий приклад зі своєї практики, що дав хороший результат. Але цей випадковий результат не повторюється досить багато разів, тобто не має масового характеру, а отже, і не може стати основою для вироблення законів, на яких ґрунтувалися б правила стрільби. Інша справа, якщо випадкові явища повторюються багато разів.

Теорія ймовірностей розглядає випадкові явища, що мають масовий характер, тобто явища, які повторюються або можуть бути повторені велику кількість разів. Для вивчення цих явищ теорія ймовірностей застосовує математичні методи і за своїм методом є одним із розділів математики, настільки ж логічно точним і суворим, як і інші математичні науки [1].

Теорія ймовірностей – математична наука, висновками і законами якої користуються в різних сферах діяльності. У нашому курсі теорія ймовірностей розглядається в обсязі, необхідному для глибокого розуміння й засвоєння теорії бойової ефективності артилерії. Вивчення явища розсіювання вибухів і снарядів, розроблення правил стрільби артилерії для одержання найбільшої її ефективності та багато інших питань вирішуються на основі законів теорії ймовірностей.

1.2. Стисла історична довідка

Виникнення теорії ймовірностей належить до XVI–XVII ст. і пов'язане з потребами розвиненого тоді торговельного капіталу. Розвинення капіталістичних відносин, зростання міст порушили абсолютно нові питання, що вимагали свого вирішення. Наприклад: скільки існує шансів на те, що товар буде доставлений, якого розміру призначати страхові премії і не зазнати при цьому збитків?

Варто зазначити, що теорія ймовірностей була підготовлена не лише страхуванням, а й астрономічними та фізичними спостереженнями. Кеплер і Берігг користувалися різними методами оброблення результатів спостережень, які потім були розвинені в теорії ймовірностей.

На початку XVII ст. Галілей враховував ймовірні відхилення під час оброблення результатів фізичних спостережень.

Джерелами перших завдань з теорії ймовірностей, що виникли в літературі, були азартні ігри. У 1657 р. вийшла у світ праця Гюйгенса «Про розрахунки в азартних іграх», а раніше – у 1654 р., велося листування між Паскалем, Фермою і Гюйгенсом з приводу вирішення певних завдань з азартних ігор. З огляду на це в деяких працях робиться висновок, що теорія ймовірностей виникла і розвинулася з теорії азартних ігор. Це неправильно хоча б тому, що азартні ігри були відомі задовго до цього, а теорії ймовірностей не було. Чому ж азартні ігри стали джерелом праць із теорії ймовірностей? Справа в тому, що з розвитком буржуазного суспільства азартні ігри стали поширеними. Їх термінологія була досить розвиненою, поставлення завдань була зрозумілим. Тому через азартні ігри, як через зручну і зрозумілу схему, добре виражалися завдання, що виникали в інших областях, а зовсім не тому, що математика стала займатися азартними іграми.

Початок XVIII ст. в історії теорії ймовірностей відзначено появою значної праці швейцарського вченого Я. Бернуллі «Мистецтво припущення» (1713). У ньому він доводить теорему великих чисел про зв'язок між ймовірністю і частотою за великої кількості випробувань [2].

Відомий німецький вчений Гаусс обґрунтував теорему про розподіл випадкової величини, тобто про залежність між окремими значеннями випадкової величини і відповідними до них імовірностями. Зараз ця теорема сприймається як нормальний закон.

Бейєс дав визначення ймовірностей гіпотез після випробування, що є однією з основних теорем теорії ймовірностей.

Подальшим кроком у розвитку теорії ймовірностей були праці французького математика П'єра Лапласа. Він довів для окремого випадку центральну граничну теорему. За своїми філософськими поглядами Лаплас був детерміністом, і це призвело до ряду помилок в його працях.

Варто зазначити, що на цей час центральна гранична теорема має ім'я вченого О. М. Ляпунова, який першим загально довів центральну граничну теорему теорії ймовірностей [3].

До середини XIX ст. розігралася «криза» теорії ймовірностей, викликана поширенням думки, що оскільки теорія ймовірностей нібито не дає практичних результатів і застосування її призводить до похибок, то потрібно від неї відмовитися. У зв'язку з цим роботи з теорії ймовірностей майже зовсім згорнені, а викладання її у всіх університетах

Західної Європи було припинено.

У підручнику Буняковского заново було вирішено ряд найбільш трудомістких і складних питань теорії ймовірностей.

Учений П. Л. Чебишов здійснив суворе доведення закону великих чисел у загальному вигляді та вперше ввів до розгляду для характеристики розподілу випадкової величини поняття математичного сподівання величини і моментів різних ступенів (порядків). Чебишов визначив для теорії ймовірностей суворий науковий напрям, розглядаючи її як метод пізнавання навколишнього світу [7].

Багато нового внесли до теорії ймовірностей учні П. Л. Чебишова А. А. Марков і О. М. Ляпунов. Останній, крім уже згаданого загального доведення центральної граничної теореми, дав теорії ймовірностей надзвичайно плідний метод характеристичних функцій [9, 14].

Велику роботу виконав професор С. Н. Бернштейн – творець сучасної аксіоматики теорії ймовірностей. Його перу належить курс теорії ймовірностей, що користується світовою популярністю. Професор О. Я. Хінчин і академік А. М. Колмогоров розвинули теорію випадкових процесів, яка є новим етапом з теорії ймовірностей і являє у сучасній фізиці могутню зброю для її подальшого розвитку. Крім того, професор Хінчин розвинув далі вчення про закон великих чисел; академік Колмогоров керував роботами із застосування теорії ймовірностей в одному з найважливіших розділів математики – теорії множин; він же присвятив ряд своїх праць теорії випадкових функцій, а також проблемам застосування теорії ймовірностей щодо питань стрільби [8, 38].

Професор В. І. Романовський вирішив ряд питань теорії ймовірностей, наприклад, про точність результатів за малої кількості вимірювань, що має важливе значення в артилерійській практиці. Теорія ймовірностей успішно застосовується у фізиці, в теорії будови атомів, у статистиці, в страховій справі, в біології, в сільському господарстві, в метеорології, астрономії та в інших науках [8].

Останніми десятиліттями теорія ймовірностей стала успішно використовуватися у виробничих процесах, особливо в масовому поточному виробництві при вирішенні питань про допуски, точності роботи механізмів і т. п.

Теорія стрільби як наука змогла стати міцною науковою базою лише в результаті використання теорії ймовірностей та її висновків.

Вивчення питань теорії стрільби та обґрунтування правил стрільби базуються на висновках, даних теорією ймовірностей. Правила стрільби, обґрунтування різних способів ведення вогню, норм витрати снарядів і часу і т. п. – все це спирається на висновки теорії ймовірностей. Тому природно, що для обґрунтування теорії стрільби необхідно знати теорію ймовірностей в такому обсязі, що забезпечив би вирішення всіх питань стрільби [4].

В артилерійській академії курс теорії ймовірностей вперше був введений до програми зовнішньої балістики в 1858 році (у той час теорії стрільби як окремої науки не було). Цей курс викладав професор І. В. Маієвський, який тоді опублікував статтю про застосування теорії ймовірностей до стрільби. У 1870 р. Маієвський видав капітальну працю «Зовнішня балістика», що вміщувала й теорію стрільби з основами теорії ймовірностей. У цьому курсі вперше введено поняття про серединну (ймовірну) похибку як для окремих вимірювань, так і для середнього результату з ряду вимірювань [10].

Після Маієвського курс зовнішньої балістики (разом з теорією ймовірностей і теорією стрільби) викладав професор Н. А. Забудський. У 1898 р. він видав працю «Теорія ймовірностей і застосування її до стрільби і пристрілювання».

Саме застосування теорії ймовірностей до вирішення питань стрільби і керування вогнем артилерії поставило теорію бойової ефективності артилерії на міцну основу, зробило наші настанови науково обґрунтованими, а вирішення бойових (вогневих) завдань вільними від «сліпої» випадковості.

Висновки до розділу 1

Таким чином, вивчення питань теорії ймовірностей дозволяє використовувати їх не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці у визначенні точності роботи механізмів різного роду, оброблення результатів спостережень у фізиці, астрономії, зовнішній балістиці та теорії стрільби під час ураження об'єктів, цілей.

У цьому розділі проаналізовано вивчення предмета теорії ймовірностей, його завдання та застосування в будь-якій галузі науки, а також історія виникнення, розвитку, вивчення у закладах вищої освіти, названі вчені та їх послідовники, які були біля джерел виникнення теорії ймовірностей як науки, розвинули її, удосконалили та застосували в артилерійській науці.

Також у розділі наведені приклади до матеріалу розділу та варіанти їх розв'язання.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Теорія ймовірностей, випадкове явище, випадковість, теорія стрільби, розсіювання снарядів, математична наука, бойова ефективність артилерії, керування вогнем артилерії, похибки вимірювань, норма витрати снарядів, центральна гранична теорема, точності роботи механізмів, оброблення результатів спостережень, зовнішня балістика, теорія стрільби.

Питання для повторення та самоконтролю

1. Надати визначення випадковому явищу.

2. Що вивчає теорія ймовірностей?

3. Перелічити завдання теорії ймовірностей.

4. Коли вперше почали обробляти результати спостережень в галузі астрономії, економіки, фізики?

5. Коли вперше почали застосовувати теорію ймовірностей?

6. Коли і де вперше почали викладати основи теорії ймовірностей?

7. Коли вперше почали використовувати теорію ймовірностей в теорії стрільби?

8. Перелічити прізвища вчених, які вперше почали використовувати основи теорії ймовірностей.

9. Які праці були видані вищеназваними вченими і де вони використовувалися?

10. В яких галузях науки (крім стрільби артилерії) почали використовувати основи теорії ймовірностей?

11. У зв'язку з чим припинилися роботи з теорії ймовірностей та її викладання у всіх університетах Західної Європи?

Завдання для самопідготовки

1. Виявити інші галузі науки, де використовували результати теорії ймовірностей в теорії та на практиці.

2. Визначити заклади вищої освіти (крім названих), де вивчали теорію ймовірностей.

3. Користуючися методами зовнішньої балістики, обчислити теоретичну (середню) траєкторію польоту артилерійського снаряда.

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Історія виникнення теорії ймовірностей та її застосування у військових науках.

2. Теорія ймовірностей як окрема наука.

3. Теорія ймовірностей в артилерії.

4. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

5. Використання теорії ймовірностей в технічних науках.

6. Застосування теорії ймовірностей під час розроблення новітніх зразків озброєння.

7. Застосування теорії ймовірностей під час розроблення нанотехнологій.

Розділ 2

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ Й ТЕОРЕМИ

2.1. Події. Їх класифікація

Кожна наука містить ряд понять, на яких вона базується. Так, в геометрії основними поняттями є поняття точки, прямої лінії і т. п.; у механіці – сили, маси, швидкості, прискорення.

Цілком природно, що не всі основні поняття можуть бути суворо визначені, оскільки визначити ті чи інші поняття – це означає з'ясувати їх за допомогою інших, більш простих і більш відомих понять. Однак процес визначення одних понять через інші, більш простих і відомих, повинен десь закінчуватися, дійшовши до певних понять, які самі по собі настільки прості та добре відомі, що не вимагають будь-якого визначення, а можуть бути ілюстровані лише прикладами.

Одним із таких основних (початкових) понять у теорії ймовірностей є поняття події.

*Під **«подією»** в теорії ймовірностей розуміють всякий факт, що в результаті досліду може відбутися або не відбутися* [9, 10]. Наприклад, у результаті пострілу може бути влучення в ціль.

Влучення в ціль – це подія. *Промах* (*невлучення*) як можливий результат того самого досліду теж є подією. Таким чином, щодо розглянутого досліду – пострілу можна сказати, що в результаті може мати місце одна з подій: влучення або промах. Іншими прикладами подій може бути:

а) поява герба при киданні монети;

б) випадання грані з одним очком при киданні гральної кістки;

в) поява рикошету при потраплянні снаряда на перешкоду;

г) поява повітряного вибуху;

д) поява кулі того чи іншого кольору при вийманні навмання куль з ящика та ін.

У теорії ймовірностей подій подана певна класифікація. Розрізняють такі події.

А. За ступенями можливості виникнення події: ймовірні події; неможливі події; випадкові події.

Б. За можливості одночасного або послідовного виникнення подій: спільні події; несумісні події.

В. За сукупністю можливих подій у цьому досліді: єдиноможливі події; протилежні події.

Наведемо визначення переліченим подіям.

***Достовірною**, називають таку подію, що за цих умов відбудеться обов'язково*.

Приклад 1. Еліпс розсіювання снарядів не виходить за межі площі Q (рис. 2.1). Тоді потрапляння снаряда в площу Q є подією ймовірною.

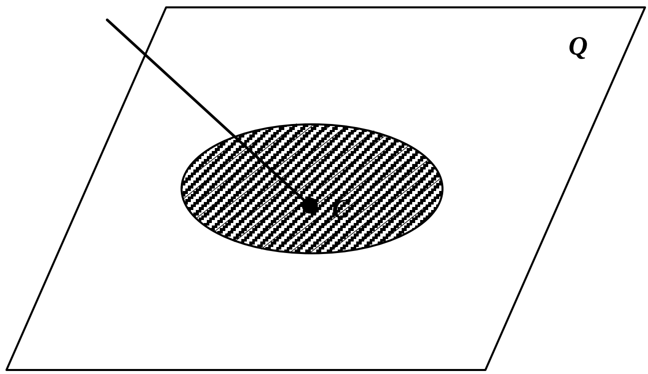

Рисунок 2.1 – Імовірна подія – потрапляння снаряда в площу Q

***Неможливою** називають таку подію, яка за певних умов обов'язково не відбудеться* [13].

Приклад 2. Якщо весь еліпс розсіювання снарядів розміщений за межами площини *P* (рис. 2.2), потрапляння в цю площину є подією неможливою.

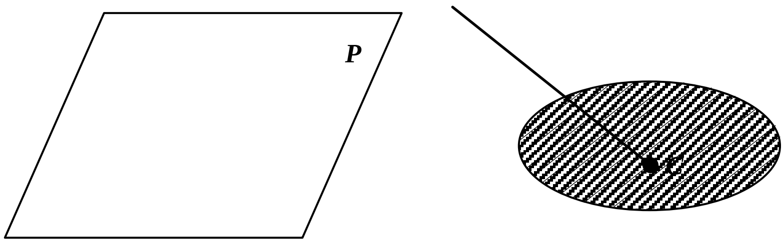

Рисунок 2.2 – Неможлива подія – еліпс розсіювання снарядів розміщений за межами площини *P*

***Випадковою** називають таку подію, що за деяких певних умов може відбутися, але може й не відбутися*.

Приклад 3. Середня траєкторія проходить через точку С, розміщену на межі площини *М* (рис. 2.3). З одного пострілу потрапляння в площу *М* може бути, але може й не бути, тому що внаслідок розсіювання снарядів точки потрапляння останніх можуть бути або далі від точки *С*, тобто в межах площини *М*, або ближче до точки *С*, тобто поза площиною *М*. Потрапляння в площу *М* є подією випадковою.

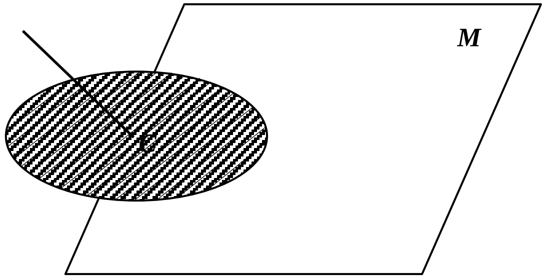

Рисунок 2.3 – Рівноможлива подія – середня траєкторія проходить через точку С, розміщену на межі площини *М*

Серед випадкових подій виділяють рівноможливі події.

Рівноможливими *називають такі події, якщо немає підстави припускати, що поява одних можлива, поява інших неможлива.*

Приклад 4. При киданні гральної кістки, якщо вона виготовлена абсолютно симетрично і з однорідного матеріалу, немає підстави припускати, що поява грані з одним очком більш можлива від появи будь-якої іншої грані. Отже, у цьому випадку випадання грані з одним, із двома, з трьома, з чотирма, з п'ятьма або з шістьма очками – події рівноможливі.

Дві або кілька подій називають ***спільними****, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи іншої (інших подій).*

Приклад 5. Дві гармати ведуть вогонь по цілі, причому при кожному пострілі з будь-якого знаряддя можлива одна з двох подій: влучення або промах. Влучення під час пострілу з першої гармати і влучення – з другої гармати – події спільні, оскільки при влученні в ціль з першої гармати не виключено влучення й з другої гармати.

Приклад 6. Одержання рикошету і знаку за дальністю.

Дві або кілька подій називають ***несумісними****, якщо поява однієї з них виключає можливість появи іншої події (інших подій).*

Приклад 7. Під час стрільби з однієї гармати можлива одна з трьох подій – влучення в ціль, переліт або недоліт. Ці події з одного пострілу несумісні, тому що за появи однієї з них виключається можливість появи інших.

Єдиноможливими *називають такі події, якщо в результаті проведеного випробування повинна виникнути хоча б одна з них.* Наприклад, за двох пострілів по цілі, показаної на рис. 2.3, можлива поява однієї з трьох подій: а) двох влучень у площу M; б) одного влучення й одного промаху; в) двох промахів. Усі ці події єдиноможливі. Вони повністю вичерпують явище. Кажуть, що кілька подій у цьому досліді утворюють повну групу подій, якщо в результаті досліду неодмінно повинна виникнути хоча б одна з них.

Протилежними *подіями називають дві єдиноможливі та несумісні події* [17].

Приклад 8. Влучення в ціль або промах при одному пострілі – події протилежні. Поява однієї з них виключає появу іншої. Ці події також єдиноможливі і несумісні.

Цілком зрозуміло, що протилежні події є окремим випадком несумісних подій.

Іноді вичерпних даних явищ подій може бути більше ніж дві. Наприклад, з одного пострілу ми можемо одержати випадкові події: переліт, недоліт, влучення в ціль, але якщо нас цікавить влучення в ціль, то всі інші, без їх розподілення ми відносимо до події, протилежної тій, що нас цікавить, – промаху.

Якщо подію, що цікавить нас, позначити через A (подія A), то протилежну їй подію прийнято в теорії ймовірностей позначати $\bar{A}$ (подія не A).

Поділ подій на протилежні значною мірою полегшує розгляд картини подій і часто її застосовують у теорії ймовірностей і, зокрема, при вирішенні питань стрільби.

2.2. Частота й імовірність появи подій

У практичній діяльності часто доводиться мати справу з випадковими подіями, що є результатом таких випробувань, які можуть повторюватися необмежену кількість разів за одних і тих самих умов. Випадкові події, що результатом таких випробувань, називають **масовими,** або **статистичними**.

Якщо подія має масовий характер, тобто вона виникає і під час повторення досліду, то цілком закономірне прагнення зафіксувати результат з кількісного боку (визначити, як часто виникала подія у цьому досліді) з тим, щоб використовувати ці дані у подальшому.

У деяких сучасних працях із теорії ймовірностей такі події називають **стохастичними**.

Припустимо, що за одних і тих самих умов вироблено n випробувань і при цьому нас цікавить подія, що відбулася m раз.

Відношення кількості m разів появи події, що цікавить нас, до кількості проведених випробувань, називають **частотою появи** цієї події, тобто.

$$r = m / n, \tag{2.1}$$

де r – частота появи події;

m – кількість разів появи події, що цікавить нас;

n – кількість усіх проведених випробувань.

Приклад 9. Під час стрільби по цілі з 10 випущених 2 снаряди влучили в ціль. Яка частота влучення за цієї стрільби?

Р о з в' я з а н н я. Загальна кількість пострілів (випробувань) n = 10, а кількість раз появи події, що цікавить нас, m = 2. Тоді частота влучення в ціль за цієї стрільби обчислиться за формулою (2.1):

$$r = m / n = 2 / 10.$$

Варто зазначити, що до результату, одержаного після підстановки чисел m і n у формулу (2.1), звичайні арифметичні дії (скорочення дробу, вираження звичайного дробу через десятковий), по суті кажучи, неприйнятні. Це необхідно відзначити тому, що нас цікавить не лише величина частоти, а й кількість випробувань у досліді, за якої одержана ця величина частоти.

Наприклад: якщо з двох пострілів спостерігалося одне влучення в ціль, то частота цієї події 1/2; якщо в іншій стрільбі з 1 000 пострілів спостерігалося 500 улучень у ціль, то частота 500/1 000 або після скорочення 1/2. Таким чином, в обох випадках ми одержали частоту 1/2, хоча з прикладу бачимо, що характер результатів різний [6].

Виходячи саме з цих міркувань, у розв'язанні прикладу 9 кінцеву відповідь записуємо у вигляді 2/10, а не 1/5.

Якщо для простоти одержаний звичайний дріб скорочується або виражається десятковим дробом, необхідно зазначати кількість проведених випробувань.

Наприклад, якщо r_n = 2/10, то r_{10} = 0,2 (або r_{10} = 1/5).

Із формули (2.1) випливає, що $0 \leq r \leq 1$, а також і те, що частота є числом абстрактним (безрозмірним).

Важливе місце в теорії і практиці займає властивість стійкості частоти.

За невеликої кількості випробувань (дослідів) частота подій значною мірою має випадковий характер і може помітно змінюватися від однієї групи дослідів до іншої. Однак за збільшення кількості дослідів частота події все більше втрачає свій випадковий характер.

Уважне вивчення статистичних подій показує, що хоча частота появи багатьох випадкових подій змінюється зі зміною кількості випробувань, проте за деяких певних умов це зміна частоти коливається в дуже вузьких межах. Про такі випадкові події кажуть, що вони мають стійку частоту.

Приклад 10. При багаторазовому киданні монети частота появи герба має стійкість, коливаючись близько числа в тих менших межах, чим більше буде проведено дослідів.

Випадкові події, що мають стійку частоту, відіграють важливу роль у пізнанні дійсного світу.

Перейдемо до розгляду поняття ймовірності події.

Розглянемо кілька подій: а) поява герба при киданні монети: б) поява промаху при пострілі; в) випадання грані з одним очком при киданні гральної кістки; г) виймання білої кулі з ящика, в якому розміщуються 1 чорна і 99 білих куль.

Неважко побачити, що поява події «г» більш можлива, ніж події «а». Поява ж події «а» понад можлива, ніж подія «в» [17].

Таким чином, кожній із подій властивий певний ступінь можливості її появи або, інакше кажучи, кожна з подій має деякий ступінь можливості її появи. Одним подіям властивий великий ступінь можливості появи, іншим – менший. Щоб порівняти події за ступенем можливості їх появи, необхідно цей ступінь виразити будь-яким числом, причому так, щоб це число було тим більше, чим більш можлива поява події. Це число називають *ймовірністю появи події*, або більш коротко – *ймовірністю події*.

Відповідно до цього ймовірність події – це чисельна міра ступеня об'єктивної можливості цієї події. Ймовірність появи деякої події *A* позначають *p (A)* або просто *p*.

На чому ж базується наша впевненість у тому, що поява події «а» більш можлива, ніж «в»? Ця впевненість ґрунтується на результатах досліду.

Більш можливими, а отже, і більш імовірними вважають такі події, що в результаті проведених випробувань виникають частіше. Таким чином, поняття ймовірності події пов'язане з частотою появи події.

Для порівняння подій за ступенем можливості їх появи варто встановити певну одиницю, за яку доцільно взяти ймовірність появи події, тобто такої, що повинна обов'язково відбутися. Як відомо, частота ймовірної події дорівнює одиниці. Оскільки поняття ймовірності події пов'язане з частотою її появи, то беруть до уваги, що чисельне значення ймовірності достовірної події дорівнює одиниці.

Імовірність появи неможливої події, тобто події, яка обов'язково не відбудеться, природно надати чисельного значення, що дорівнює нулю [18].

Оскільки поява випадкової події, тобто такої, що може відбутися, більш можлива, ніж поява неможливої події, то ймовірність її появи повинна бути більшою ніж нуль. З іншого боку, поява випадкової події, яка може не відбутися, менш можлива, ніж поява достовірної події, отже, ймовірність її появи повинна бути меншою за одиницю.

Таким чином, імовірність появи випадкової події повинна бути більшою від нуля, але й меншою за одиницю, тобто $0 \le p\ (A) \le 1.$

Отже, ймовірність випадкової події виражається будь-яким дробовим позитивним числом, меншим за одиницю.

Імовірність події, як і частота події, – число безрозмірне. На відміну від частоти події до ймовірності події застосовні скорочення дробу і вираження її десятковим дробом. Так,

$$p = 5/10 = 1/2 = 0{,}5.$$

Імовірність події проявляється в досліді через її частоту. Якщо $p\ (A) = 0{,}90$ – імовірність події A дорівнює 90 %, то це означає, що за великої кількості подібних випробувань в 90 % з усіх результатів випробувань відбудеться подія A, а в 10 % – $\bar{A}$ («не A»). Інакше, за великої кількості подібних випробувань у середньому в 90 випадках із 100 матиме місце подія A.

Користуючись введенням визначення ймовірності події, можна уточнити поняття стійкості частоти. Із прикладу 2 бачимо, що частота появи герба при киданні монети має стійкість, наближаючись до 1/2. У подальшому ми неодноразово переконаємося, що число 1/2 у цьому випадку і є ймовірністю появи герба при киданні монети. Цей приклад свідчить про те, що за збільшення кількості дослідів частота події має тенденцію наближення до її ймовірності.

Варто зазначити, що характер наближення частоти до ймовірності за збільшення кількості дослідів дещо відрізняється від «прагнення до межі» в математичному розумінні слова.

Якщо в математиці ми говоримо, що змінна x_n зі зростанням n прагне до сталої межі a, то це означає, що різниця $|x_n - a|$ стає меншою за будь-якого позитивного числа ε для всіх значень n, починаючи з деякого досить великого числа [19].

Щодо частоти події та її ймовірності такого категоричного твердження зробити не можна. Дійсно, немає нічого неможливого в тому, що за великої кількості дослідів частота події буде значно відхилятися від її ймовірності; але таке значне відхилення дуже малоймовірне, тим менш імовірне, чим більша кількість дослідів проведена. Наприклад, при киданні монети 10 разів можливо (хоча й малоймовірно), що всі 10 разів з'явиться герб, і частота появи останнього дорівнюватиме 1; при 1 000 кидань така подія все ще залишається можливою, але набуває настільки малої ймовірності, що її сміливо можна вважати практично нездійсненною. Тому частота появи герба, що дорівнює 1/2, може бути одержана з вельми великою ймовірністю.

Такий характер наближення одних величин до інших у теорії ймовірностей називають збіжністю за ймовірністю.

Кажуть, що величина X_n збігається за ймовірністю до величини a, якщо за як завгодно малої ε ймовірність нерівності $|X_n - a| < \varepsilon$ зі збільшенням n необмежено наближається до одиниці.

Застосовуючи цей термін, ми можемо сказати, що за збільшення кількості дослідів частота події не «прагне» до ймовірності події, а «збігається до неї за ймовірністю».

Ця властивість частоти та ймовірності, викладена на підставі логічних міркувань, є теоремою Бернуллі.

Крім достовірної, неможливої і випадкової подій введемо поняття практично неможливої і практично достовірної події.

Практично ***неможливою*** *називають таку подію, ймовірність якої досить близька до нуля.*

Практично ***достовірною*** *називають таку подію, ймо-*

вірність якої вельми близька до одиниці [13].

Практично неможливі та практично достовірні події відіграють велику роль в теорії ймовірностей; на них ґрунтується практичне застосування цієї науки.

У повсякденному житті несвідомо ми безперервно користуємося принципом практичної впевненості. Наприклад, вирушаючи в політ на літаку, ми нехтуємо можливістю авіаційної катастрофи, хоча деяка, досить мала, ймовірність такої події все таки є.

Принцип практичної впевненості не може бути доведений математичними способами; він підтверджується всім практичним досвідом людства. Питання про те, наскільки мала повинна бути ймовірність події, щоб її можна було вважати практично неможливою, в кожному окремому випадку вирішується з практичних міркувань відповідно до тієї важливості, яка дає для нас бажаний результат досліду.

Наприклад, якщо ймовірність відмови детонатора при пострілі дорівнює 0,01, ми можемо вважати відмову детонатора практично неможливою подією. Навпаки, якщо ймовірність відмови парашута під час стрибка також дорівнює 0,01, ми, очевидно, не можемо вважати цю відмову практично неможливою подією і повинні добиватися більшої надійності роботи парашута.

2.3. Способи безпосереднього визначення ймовірностей

Залежно від умов і наявних відомостей про обставини, за яких можлива поява тієї чи іншої події, варто розрізняти три способи обчислення чисельних значень імовірності події: *класичний*; *статистичний*; *геометричний* [21].

Класичний спосіб обчислення чисельного значення ймовірності події ґрунтується на можливості відомості досліду до «схеми випадків» [19].

Під «випадками» будемо розуміти рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу.

Наприклад: випадання грані при киданні гральної кістки. Випадки: а) випадання грані з одиницею; б) випадання грані з двійкою, ...; в) випадання грані з шісткою. Повна група: випадки випадання грані або з одиницею, або з двійкою, ... або з п'ятіркою, або з шісткою. Потрібно визначити ймовірність того, що при киданні гральної кістки випаде трійка.

Внаслідок симетрії кубика є підстави вважати, що всі шість можливих результатів однаково можливі, звідси ми можемо припускати, що за досить великої кількості кидань кісток усі шість граней будуть випадати приблизно однакову кількість разів, що дорівнює 1/6 кількості проведених випробувань.

Маючи на увазі, що ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, природно надати випаданню одній із граней ймовірності, що дорівнює 1/6. Ця величина характеризує об'єктивні властивості цього випадкового явища: наявності шести рівноможливих результатів досліду.

«Схема випадків» характерна тим, що всі випадки являють собою систему можливих і виключних один одного результатів досліду. Під час таких дослідів можливий безпосередній підрахунок імовірностей, заснований на оцінюванні частки так званих «сприятливих» випадків у загальній кількості випадків (результатів).

Випадок називають сприятливим щодо деякої події, якщо поява цього випадку спричиняє появу цієї події. Наприклад: випадання грані з непарною кількістю очок при киданні гральної кістки. Сприятливих випадків три: 1, 3, 5, а всіх можливих – шість: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то ймовірність події можна оцінити щодо відносної частки сприятливих випадків. Математично це може бути виражено так:

$$p = M / N, \tag{2.2}$$

де p – імовірність появи події, що нас цікавить;

M – кількість випадків, що сприяють появі події, що нас цікавить;

N – кількість усіх рівноможливих випадків.

Іноді формулу (2.2) вважають визначенням поняття ймовірності, що неправильно. За нею можна лише підрахувати ймовірність, якщо можна визначити кількість сприятливих і всіх рівноможливих випадків.

Приклад 11. У ящику 10 куль, із них 3 червоних і 7 чорних, однакових за розміром і вагою. Із ящика після ретельного перемішування навмання виймають 1 кулю. Яка ймовірність вийняти з цього ящика червону кулю?

Р о з в' я з а н н я. Кількість випадків, що сприяють появі червоної кулі, M = 3. Кількість усіх рівноможливих випадків N = 10. Тоді ймовірність вийняти червону кулю

$$P_{чер} = M / N = 3/10 = 0{,}3\ (30\ \%).$$

Імовірність вийняти чорну кулю

$$P_{чор} = M / N = 7/10 = 0{,}7\ (70\ \%).$$

У цьому прикладі ми легко визначимо ймовірність, але зазвичай обчислити числа M і N значно складніше.

Щоб правильно визначити ймовірність будь-якої події, необхідно висунути певні вимоги до підрахунків, що сприяють, так і всіх можливих випадків. Ці вимоги такі: а) всі випадки повинні бути рівноможливими; б) несумісними; в) взяті до уваги випадки повинні повністю вичерпувати це явище. Сенс цих вимог покажемо на прикладах [6].

Приклад 12. Монета кидається два рази. Яка ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться герб?

Р о з в' я з а н н я. 1. Можна провести підрахунок так: підрахувати всі можливі випадки, що можуть мати місце при двократному киданні, а саме: а) «герб», «герб»; б) «герб», «не герб»; в) «не герб», «не герб». Зокрема, два випадки «а» і «б» будуть сприятливими, тоді

$$p = M / N = 2/3.$$

Це розв’язання неправильне.

2. Насправді при дворазовому киданні однієї монети (рівносильне одночасному киданню двох монет) можливі випадки: а) перший раз – «герб», другий раз – «герб»; б) перший раз – «герб», другий раз – «не герб»; в) перший раз – «не герб», другий раз – «не герб»; г) перший раз – «не герб», другий раз – «герб».

Всього рівноможливих випадків $N = 4$, з них сприятливих $M = 3$, тоді

$$p = M / N = 3/4.$$

Похибка першого варіанта розв’язання полягає в тому, що ми неправильно визначили кількість сприятливих, так і всіх можливих випадків.

Приклад 13. Маємо ящик з п’ятьма кулями різного кольору, позначені номерами: № 1 – білий; № 2 – чорний; № 1 – чорний; № 2 – білий; № 3 – білий. Яка ймовірність вийняти з ящика чорну кулю або кулю з номером 1.

Р о з в’ я з а н н я. Кількість усіх випадків $N = 5$. Кількість сприятливих випадків $M = 4$ (куль з номером 1 – дві і чорних куль – дві).

Отже,

$$p = M / N = 4/5 = 0{,}8.$$

Розв’язання неправильне, оскільки під час розрахунку кількості сприятливих випадків вимога несумісності не була врахована. Випадки виходу чорної кулі та кулі номер 1 не є несумісними, тому що одна й та сама куля може бути і чорного кольору і з номером 1.

Кількість усіх сприятливих випадків буде не 4, а 3, тому шукана ймовірність

$$p = 3/5 = 0{,}6.$$

Хоча формула розрахунку ймовірності (2.2) подібна до формули чисельного визначення частоти (2.1), але ймовірність і частота – по суті, різні поняття. Частоту визначають після випробувань і залежить від кількості випробувань. Імовірність визначають до випробування, не залежить від кількості випробувань і є об'єктивною числовою характеристикою цієї події. Частота є формою прояву ймовірності. Її часто називають *статистичною ймовірністю*.

Статистичний спосіб. Як ми відзначали, формула (2.2) для розрахунку ймовірності появи події застосовна лише тоді, якщо є можливість до випробування встановити кількість випадків, що сприяють появі події, яка цікавить нас, і кількість усіх рівноможливих випадків. Проте встановити цю кількість до випробування не завжди можливо. Тому ймовірність, що нас цікавить, може бути визначена на підставі частоти появи події, одержаної в результаті випробувань, та на підставі властивості стійкості частоти за великої кількості випробувань [21].

Якщо кількість випробувань велика, то за наближене значення ймовірності може бути взята частота, одержана за результатами досліду:

$$p \approx p^* = m / n, \tag{2.3}$$

де m – кількість появи цієї події;

n – кількість проведених випробувань.

Наближена рівність $p \approx p^*$ буде тим точніша, чим більша кількість випробувань n.

Геометричний спосіб. У деяких випадках практичної діяльності під час визначення ймовірності появи події, що нас цікавить, доводиться мати справу з геометричними поняттями (точка, лінія, площина й об'єм). Наприклад, нас може цікавити, якою буде ймовірність, якщо точка M, кинута навздогад на площину Q, потрапить в площину q, складову частину площі Q (рис. 2.4). Якщо дослід буде організований так, що падіння точки M у будь-яку з точок площі Q буде рівноможливим, то можна вважати, що кількість усіх рівноможливих випадків буде пропорційна розміру площі Q, а кількість сприятливих випадків – пропорційна розміру площі q. Отже, згідно з формулою (2.2) ймовірність потрапляння точки M на площину q

$$p = q / Q , \tag{2.4}$$

тобто буде дорівнювати відношенню площ [21].

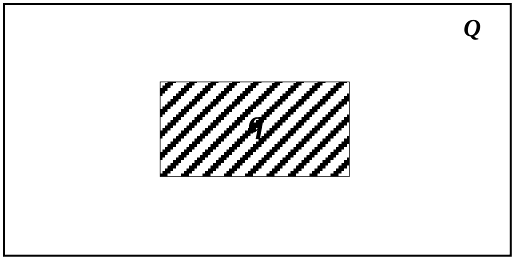

Рисунок 2.4 – Ймовірність, що точка M, кинута навздогад на площину Q, потрапить в площину q, складову частину площі Q

Приклад 14. Стрільба по цілі площею $S_{ц}$ (рис. 2.5) проводиться так, що при кожному пострілі середня траєкторія проходить через центр цілі (цю умову можна вважати виконаною, наприклад, під час стрільби, в процесі якої коректури вводяться після кожної серії вогню і для кожної гармати самостійно).

Визначити ймовірність влучення в ціль з одного пострілу, якщо $S_{ц} = 2\ Вд \cdot 2\ Вб$.

Р о з в' я з а н н я. Із елементарного курсу теорії стрільби відомо, що снаряди розподіляються на площі $8Вд \cdot 8Вб$. Із визначеним допущенням можна припустити, що в межах прямокутника $2Вд \cdot 2Вб$ снаряди розподіляються рівномірно. Ймовірність потрапляння в цей прямокутник $p_{пр} = 1/4$.

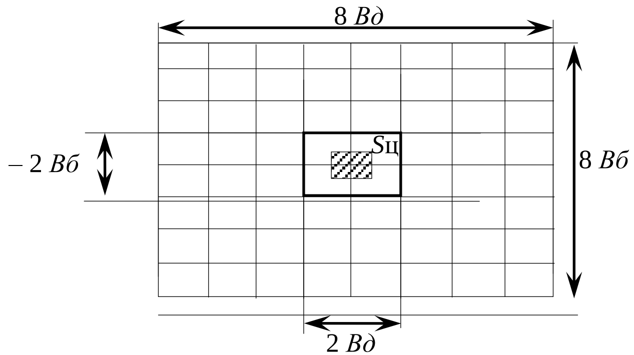

Рисунок 2.5 – Стрільба по цілі $S_{ц}$

Тоді ймовірність, що нас цікавить, обчислиться зі співвідношення

$$p_{ц} / S_{ц} = p_{пр} / S_{пр}, \qquad (2.5)$$

звідси

$$p_{ц} = (S_{ц} \cdot 1/4) / 2\,Вд \cdot 2\,Вб = S_{ц} / 16\,Вд\ 16\,Вб. \qquad (2.6)$$

Цей вираз використовується для розрахунку потрібної витрати снарядів при стрільбі на руйнування: $N = 1 / p_{ц} = 16\,Вд \cdot Вб / S_{ц}$. Таким чином, можна обчислити числове значення ймовірності події як відношення заходів.

Варто зазначити, що геометричний спосіб визначення ймовірності події, як і класичний, вимагає точного знання умов і обстановки, в якій будуть проходити випробування.

Ми розглянули способи безпосереднього визначення ймовірності подій: класичний, статистичний і геометричний. Однак вони застосовні лише в найпростіших випадках, якщо дається можливість детально проаналізувати умови, в яких відбуватимуться випробування, або провести останні. Найчастіше ні того, ні іншого зробити не можна. Тому для визначення ймовірності появи тієї чи іншої події застосовують такі способи, що дозволяють за відомими ймовірностями простих подій визначити ймовірність, що нас цікавить, більш складної події. При застосуванні цих способів користуються двома основними теоремами: теоремою додавання ймовірностей і теоремою множення ймовірностей.

Ці теореми можуть бути теоретично доведені лише для подій, ймовірність появи яких може бути визначена класичним способом. Для інших подій ці теореми беруться як аксіоми.

2.4. Теорема додавання ймовірностей

Перед тим як сформулювати і довести теорему, введемо допоміжне поняття «**сума подій**».

Сумою двох подій *A* і *B* називають подію *C*, що виходить у виконанні події *A* або події *B*, або обох разом.

Поняття суми подій геометрично можна проілюструвати таким чином. Якщо подія *A* є влученням точки в область *A*, відповідно подія *B* – влучення в область *B*, то подія *A* + *B* є влученням в область, заштриховану на рис. 2.6. При цьому в області, заштрихованій подвійними лініями, можлива поява подій *A* й *B* разом. Якщо подія *A* – влучення в ціль з першого пострілу, подія *B* – улучення в ціль з другого пострілу, то подія *C* = *A* + *B* є влучення в ціль взагалі, все рівно з якого пострілу – з першого, другого або з обох разом [7, 18].

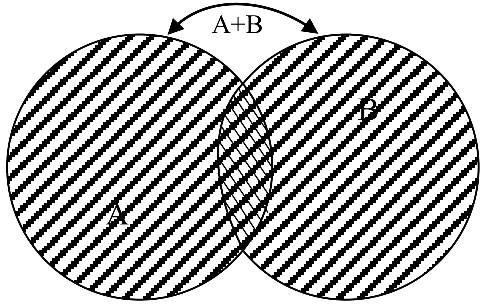

Рисунок 2.6 – Сума двох подій (заштрихована область подвійними лініями)

Якщо події A та B несумісні, то природно, що поява обох цих подій разом відпадає, і сума подій A й B зводиться до появи або події A, або події B (рис. 2.7).

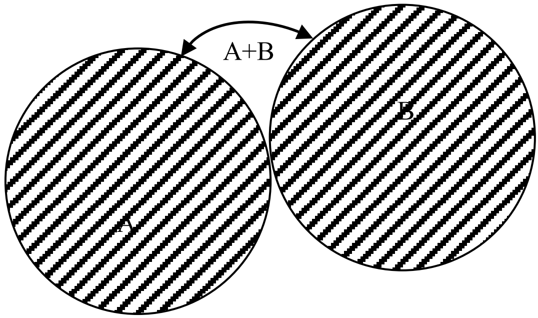

Рисунок 2.7 – Сума подій A і B
(поява хоча б одної із події A_i)

Отже, сумою двох подій A і B називають подію C, що виходить із появи хоча б однієї з подій A і B.

Безпосередньо з визначення суми подій випливає, що

$$A + A = A.$$

Якщо подія B є окремим випадком події A, то

$$A + B = A.$$

Сумою подій $\Sigma_{(i)} \cdot A_i$, називають подію C, що виходить із появи хоча б однієї з події A_i.

Запис суми подій $\Sigma_{(i)}^{2} \cdot A_i = A_1 + A_2$ читається так: подія A_1 або A_2. Запис імовірності $p\ (A_1 + A_2)$ читається так: імовірність появи події A_1 або A_2.

Припустимо, що в результаті випробування може виникнути одна з двох (A_1 або A_2) несумісних подій. При цьому кількість усіх рівноможливих випадків появи події дорівнює N. Кількість випадків, що сприяють появі події A_1, один M_1, а кількість випадків, що сприяють появі події A_2, так само M_2. Тоді згідно з формулою (2.2)

$$p\ (A_1) = M_1 / N \ \text{ і } \ p\ (A_2) = M_2 / N. \qquad (2.7)$$

Оскільки за умовою події A_1 та A_2 несумісні, то появі події $A_1 + A_2$ сприяє $M_1 + M_2$ випадків. Отже,

$$p\ (A_1 + A_2) = (M_1 + M_2) / N = M_1 / N + M_2 / N =$$
$$= p\ (A_1) + p\ (A_2). \quad (2.8)$$

Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей подій. Іншими словами, за формулою (2.8) ми визначаємо ймовірність появи події все рівно якої саме.

Поширимо доведену теорему на суму декількох несумісних подій. Припустимо, що в результаті випробування може виникнути одне з трьох несумісних подій (або A_1, або A_2, або A_3. Імовірність цих подій відома й дорівнює $p\ (A_1)$; $p\ (A_2)$, і $p\ (A_3)$. Позначимо суму двох подій $A_1 + A_2$ через C.

Тоді згідно з формулою (2.8)

$$p\ (C) = p\ (A_1 + A_2) = p\ (A_1) + p\ (A_2).$$

Отже,

$$p\ (A_1 + A_2 + A_3) = p\ (C + A_3) = p\ (C) + p\ (A_3),$$

а оскільки

$$p\ (C) = p\ (A_1) + p\ (A_2),$$

то

$$p\ (A_1 + A_2 + A_3) = p\ (A_1) + p\ (A_2) + p\ (A_3),$$

Поширюючи цю теорему на суму більшої кількості несумісних подій, можна написати

$$p\ (A_1 + A_2 + A_3... + A_n) = p\ (A_1) + p\ (A_2) + p\ (A_3)... + p\ (A_n)$$

або

$$p\ (\Sigma_{i = 1}{}^{n} A_i) = \Sigma_{i = 1}{}^{n} p\ (A_i). \quad (2.9)$$

Таким чином, формулювання теореми додавання ймовірностей у загальному вигляді буде таким.

Якщо є декілька несумісних подій, то ймовірність появи однієї з них без зазначення, якої саме, дорівнює сумі ймовірностей тих подій [18].

Приклад 15. У ящику 10 білих куль – $A_1 \rightarrow Б$; 6 червоних – $A_2 \rightarrow Ч$; 4 зелених – $A_3 \rightarrow З$. Яка ймовірність вийняти кольорову кулю (червону або зелену)?

Р о з в' я з а н н я. В умовах прикладу події, що нас цікавлять, позначені так: *ч* – поява червоної кулі, *з* – поява зеленої кулі. Відповідно до формули (2.9) шукана ймовірність

$$p\ (ч + з) = p\ (ч) + p\ (з).$$

але

$$p\ (ч) = M_ч / N = 6 / 20,\ \text{а}\ p\ (з) = M_З / N = 4 / 20,$$

тоді ймовірність вийняти кольорову кульку буде

$$p\ (ч + з) = p\ (ч) + p\ (з) = 6 / 20 + 4 / 20 = 10 / 20 = 0{,}5.$$

Приклад 16. Середня траєкторія проходить так, що ймовірність одержання перельоту $p_{(+)} = p\ (A_1) = 0{,}5$, імовірність одержання недольоту $p_{(–)} = p\ (A_2) = 0{,}3$, імовірність одержання влучення $p_{(в)} = p\ (A_3) = 0{,}2$. Яка ймовірність, що в результаті пострілу буде промах?

Р о з в’ я з а н н я. Промах буде в разі перельоту або недольоту. Отже, нас цікавить імовірність суми двох несумісних подій. Відповідно до формули (2.9)

$$p\ (A_1 + A_2) = p_{(+)} + p_{(–)} = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8.$$

Відзначимо наслідки, що випливають з теореми додавання.

Наслідок 1. Сума ймовірностей єдиноможливих і несумісних дорівнює одиниці.

Припустимо, що $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ – єдиноможливі і несумісні події. Оскільки вони несумісні, то згідно з формулою (2.9)

$$p\ (A_1 + A_2 + A_3 ... + A_n) = p\ (A_1) + p\ (A_2) + p\ (A_3) ... + \\ + p\ (A_n).$$

У той самий час ці події єдиноможливі. Отже, поява хоча б однієї з них подія достовірна,

$$p\ (A_1 + A_2 + A_3 ... + A_n) = 1.$$

Таким чином,

$$p\ (A_1) + p\ (A_2) + p\ (A_3)... + p\ (A_n) = 1. \qquad (2.10)$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці. Згідно наслідку 1

$$p\ (A) + p\ (\bar{A}) = 1. \qquad (2.11)$$

Цей наслідок має велике практичне застосування в теорії ймовірностей, тому що в ряді випадків легше обчислити не ймовірність появи події A, що нас цікавить, а ймовірність протилежної події $\bar{A}$.

Відповідно до формули (2.11) ймовірність події A, що нас цікавить, буде

$$p\ (A) = 1 - p\ (\bar{A}). \qquad (2.12)$$

Приклад 17. По цілі проводиться шість пострілів. Середня траєкторія віддалена від цілі так, що:

а) ймовірність одного влучення із шести пострілів

$$p\ (A_1) = 0{,}016;$$

б) імовірність двох влучень із шести пострілів

$$p\ (A_2) =0{,}094;$$

в) імовірність трьох влучень із шести пострілів

$$p\ (A_3) = 0{,}23;$$

г) імовірність чотирьох влучень із шести пострілів

$$p\ (A_4) = 0{,}312;$$

д) імовірність п’яти влучень із шести пострілів

$$p\ (A_5) = 0{,}234;$$

е) імовірність шести влучень із шести пострілів

$$p\ (A_6) = 0{,}094;$$

є) імовірність одержання всіх промахів

$$p\ (A_0) = 0{,}016.$$

Визначити ймовірність хоча б одного влучення.

Р о з в’ я з а н н я. 1. За формулою (2.9)

$p_1 = p[\Sigma_{i\ =\ 1}{}^6] = 0{,}016 + 0{,}094 + 0{,}23 + 0{,}312 + 0{,}234 + + 0{,}094 + 0{,}016 = 0{,}984.$

2. За формулою (2.12)

$$p_1 = 1 - p\ (A_0) = 1 - 0{,}016 = 0{,}984.$$

Якщо при цьому врахувати, що ймовірності кожної події $p\ (A_i)$ необхідно попередньо підрахувати, то вигода розрахунку за формулою (2.12) стає ще більш очевидною.

Як зазначалося, теорема додавання ймовірностей – формула (2.13) – справедлива лише для несумісних подій.

Якщо події A і B спільні, ймовірність відображається за формулою

$$p\ (A + B) = p\ (A) + p\ (B) - p\ (AB). \qquad (2.13)$$

Імовірність суми двох спільних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без імовірності їх спільної появи.

У справедливості формули (2.13) можна переконатися, розглянувши рис. 2.8, на якому через AB позначено подія, що складається із спільної появи подій A і B.

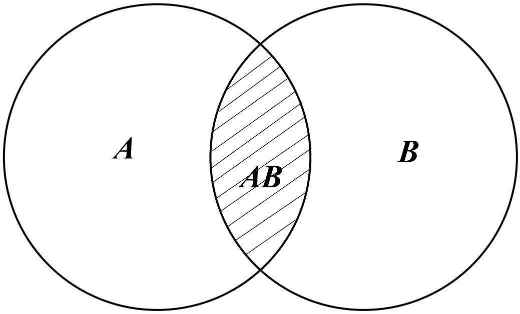

Рисунок 2.8 – Імовірність суми двох спільних подій

2.5. Теорема множення ймовірностей

Перш ніж розпочати доведення теореми множення ймовірностей, розглянемо деякі поняття.

Добутком двох подій A і B називають подію C, що складається із спільної появи подій A і B (одночасно або послідовно) і позначається $C = AB$.

Запис добутку подій AB читається так: подія, що складається із появи як події A, так і події B (рис. 2.8). Запис імовірності $p\ (AB)$ читається так: імовірність появи подій A і B [7].

Приклад 18. A – влучення з першого пострілу; B – влучення з другого пострілу; $C = AB$ – влучення з обох пострілів [6].

Добуток декількох подій називають подією, що складається із спільної появи всіх цих подій.

Поняття добутку подій геометрично можна проілюструвати так. Якщо подія *A* є потраплянням точки в область *A* (рис. 2.9), відповідно події *B* до *C*, тобто потрапляння точки та області *B* і *C*, то подія *ABC* є потраплянням в область, заштриховану на рис. 2.9.

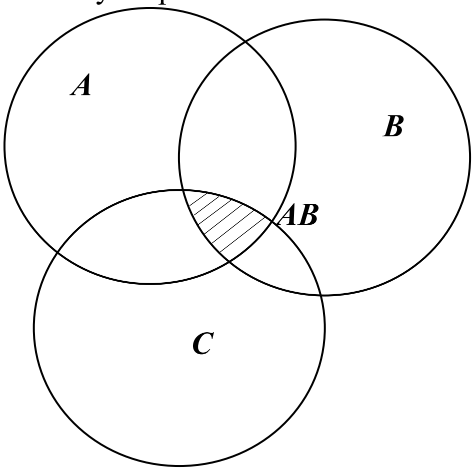

Рисунок 2.9 – Добуток появи трьох подій – потрапляння в область *ABC*

Введемо поняття про залежні і незалежні події.

Подію *B* називають незалежною від події *A*, якщо ймовірність події *B* не залежить від того, відбулася подія *A* або ні.

Приклад 19. Роблять два постріли по цілі на одних і тих самих установках. Подія *A* – влучення в ціль з першого пострілу, *B* – влучення в ціль з другого пострілу.

Ймовірність появи події *B* не залежить від того, чи відбулася подія *A* (чи мало місце потрапляння з першого пострілу).

Тут доречно відзначити деяку умовність щодо події до розряду незалежних. Як відомо, в природі все взаємозумовлене, всі події пов’язані одна з одною більш-менш складним ланцюгом причин і, отже, не існує абсолютно незалежних подій. Але в окремих випадках цей зв’язок настільки слабкий, що практично можна й доцільно не брати її до уваги і вважати події незалежними. В стрільбі прикладом незалежних подій може бути одержання недольоту і перельоту з двох пострілів із гармати на одних і тих самих установках.

Подію B називають залежною від події A, якщо ймовірність події B залежить від того, відбулася подія A або ні.

Приклад 20. Із ящика, що містить N куль, з яких білих m і $n = N - m$ червоних, не дивлячись, виймають одну кулю і, не повернувши її назад, виймають іншу. Яка ймовірність того, що з другого виймання буде біла куля?

Р о з в' я з а н н я. Оскільки в ящику всього N куль, то кількість усіх рівноможливих випадків з першого випробування буде N. Оскільки вийнята куля назад не повертається, то перед другим випробуванням в ящику буде $N - 1$ куль, тоді кількість усіх рівноможливих випадків буде $N - 1$.

Визначаємо кількість випадків, що сприяють появі білої кулі під час другого випробування.

Якщо з першого випробування з'явилася біла куля, то білих куль в ящику залишилося $m - 1$, тобто випадків, що сприяють появі білої кулі, буде $m - 1$.

Таким чином, в цьому випадку ймовірність появи білої кулі з другого випробування буде

$$p'_{б_2} = m - 1 / N - 1. \tag{2.14}$$

Якщо під час першого випробування з'явилася червона куля, то білих куль в ящику залишилося m, тобто випадків, що сприяють появі білої кулі, буде m. Таким чином, імовірність появи білої кулі з другого випробування буде

$$p'_{б_2} = m / N - 1. \tag{2.15}$$

Порівнюючи $(m - 1) / (N - 1)$ та $m / (N - 1)$ легко переконатися, що ймовірність появи білої кулі з другого випробування залежить від того, яка подія мала місце під час першого випробування (поява білої або червоної кулі).

Залежність подій визначають не лише характером самих подій, а й умовами випробування. Так, в умовах розглянутого прикладу, якщо після першого ж випробування вийнята куля повертається в ящик, то як загальна кількість, так і кількість білих куль в ящику буде незмінною. У цих умовах імовірність появи білої кулі $p_б = m / N$ не залежить від того, якого кольору куля з'явилася під час першого випробування.

Для залежних подій введемо поняття умовної ймовірності.

Маємо дві залежних події *A* і *B*. Під умовною ймовірністю події *A* розуміють імовірність цієї події, обчислену за умови, що мала місце подія *B*. Ця умовна ймовірність позначається $p(A / B)$.

У задачі, яку ми розглядаємо, позначимо появу білої кулі подією *Б*, а червоної – *Ч*. Тоді ймовірність появи білої кулі при другому випробуванні буде дорівнювати:

а) за умови, що під час першого випробування з'явиться червона куля,

$$p\,(Б / Ч) = m / N - 1;$$

б) за умови, що з першого випробування з'явиться біла куля,

$$p\,(Б / Б) = m - 1 / N - 1.$$

Відповідно до розглянутих умов незалежності події *A* від події *B* можемо записати так:

$$p\,(A / B) = p\,(A),$$

а умова залежності

$$p\,(A / B) \neq p\,(A).$$

Перейдемо до розгляду теореми множення ймовірностей, сформульованої таким чином.

Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перше мало місце:

$$p\,(AB) = p\,(A) \cdot p\,(B / A). \qquad (2.16)$$

Доведення теореми наведемо для схеми випадків. Можливі результати досліду покажемо у вигляді точок (рис. 2.10):

N – кількість всіх можливих випадків; m – кількість випадків, що сприяють появі події A; n – кількість випадків, що сприяють появі події B [22].

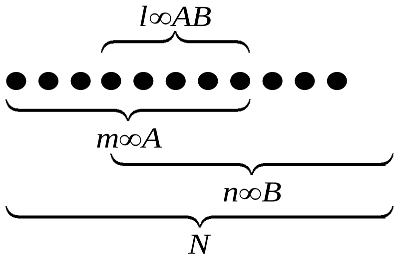

Рисунок 2.10 – Події, що можуть виникнути спільно

Оскільки події A і B можуть виникати спільно, то є випадки, сприятливі події A і події B одночасно; l – кількість таких випадків.

Тоді

$$p\ (AB) = l\ /\ N, \text{ а } p\ (A) = m\ /\ N.$$

Обчислимо $p(B\ /\ A)$. Оскільки нас цікавить поява події B після появи події A, то кількість можливих результатів для наступних подій буде m. Зокрема, l випадків сприяють події B.

Тоді

$$p\ (B\ /\ A) = l\ /\ m$$

та

$$p\ (A) \cdot p\ (B\ /\ A) = (m\ /\ N) \times (l\ /\ m) = l\ /\ N = p\ (AB).$$

Оскільки при доведенні теореми ми не висували вимог про послідовність появи подій, то теорему множення можна записати і так:

$$p\ (AB) = p\ (B) \cdot p\ (A\ /\ B).$$

Наслідок 1. Якщо подія A не залежить від події B, то і подія B не залежить від події A.

Умови цього завдання (наслідки): дано $p\ (A\ /\ B) = p\ (A)$, потрібно довести, що $p(B / A) = p(B)$.

Д о в е д е н н я. За теоремою множення ймовірностей маємо

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B / A)$$

або

$$p(AB) = p(B) \cdot p(A / B).$$

Прирівнюючи праві частини, маємо

$$p(A) \cdot p(B / A) = p(B) \cdot p(A / B),$$

але за умовою $p(A) = p(A / B)$, тоді для збереження рівності повинне бути, що і

$$p(B / A) = p(B) \tag{2.17}$$

Наслідок 2. Імовірність добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірності цих подій.

Дано: A і B – незалежні події. Потрібно довести, що

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B),$$

маємо

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B / A),$$

але

$$p(B / A) = p(B),$$

тоді

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \tag{2.18}$$

Теорема множення ймовірностей може бути поширена на випадок довільної кількості подій.

Для залежних подій

$$p(A_1, A_2, ..., A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2 / A_1) \cdot p(A_3 / A_1A_2) \cdot, ..., \times$$
$$\times\, p(A_n / A_1, A_2, ..., A_{n-1}). \tag{2.19}$$

Імовірність добутку кількох подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, при цьому ймовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні мали місце. [1]

Для незалежних подій

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} p(A_i). \tag{2.20}$$

Імовірність добутку незалежних подій дорівнює добу-

тку ймовірностей цих подій.

Якщо

$$p\ (A_1) = p\ (A_2) = ... = p\ (A_n) = p,$$

то

$$p\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = p^n. \qquad (2.21)$$

Приклад 21. У ящику є 10 куль, зокрема, три білих і сім чорних. Які ймовірності появи різних комбінацій куль, якщо з ящика два рази поспіль виймають по одній кулі. Кулі назад у ящик не вкладаються.

Р о з в' я з а н н я. 1. Імовірність вийняти дві білих кулі поспіль:

$$p\ (ББ) = p\ (Б) \cdot p\ (Б\ /\ Б).$$

Імовірність вийняти перший раз білу кулю

$$p\ (Б) = 3\ /\ 10.$$

Імовірність вийняти вдруге білу кулю

$$p\ (Б\ /\ Б) = 2/9,$$

$$p\ (ББ) = p\ (Б) \cdot p\ (Б\ /\ Б) = 3\ /\ 10 \cdot 2\ /\ 9 = 6\ /\ 90.$$

2. Імовірність вийняти білу і чорну кулю

$$p\ (БЧ) = p\ (Б) \cdot p\ (Ч\ /\ Б).$$

Імовірність вийняти перший раз білу кулю

$$p\ (Б) = 3/10.$$

Імовірність вийняти вдруге чорну кулю

$$p\ (Ч\ /\ Б) = 7/9,$$

$$p\ (БЧ) = p\ (Б) \cdot p\ (Ч\ /\ Б) = 3/10 \cdot 7/9 = 21/90.$$

3. Імовірність вийняти чорну і білу кулю

$$p\ (ЧБ) = p\ (Ч) \cdot p\ (Б\ /\ Ч).$$

Імовірність вийняти перший раз чорну кулю

$$p\ (Ч) = 7/10.$$

Імовірність вийняти вдруге білу кулю

$$p\ (Б\ /\ Ч) = 3/9,$$

$$p\ (ЧБ) = 7\ /\ 10 \cdot 3\ /\ 19 = 21\ /\ 90.$$

4. Імовірність вийняти дві чорних кулі поспіль буде дорівнювати

$$p\ (ЧЧ) = p\ (Ч) \cdot p\ (Ч\ /\ Ч).$$

Перший раз

$$p\ (Ч) = 7\ /\ 10,$$

другий раз

$$p\ (Ч\ /\ Ч) = 6\ /\ 9,$$

$$p\ (ЧЧ) = 7\ /\ 10 \cdot 6\ /\ 9 = 42\ /\ 90.$$

Для перевірки скористаємося тим, що ймовірність повної групи подій повинна дорівнювати одиниці:

$$p = p\ (ББ) + p\ (БЧ) + p\ (ЧБ) + p\ (Ч\ /\ Ч) = 6\ /\ 90 + 21\ /\ 90 + $$
$$+ 21\ /\ 90 + 42\ /\ 90 = 1.$$

Приклад 22. Проводиться стрільба прямою наводкою з гармати по танку, що наближається. Першою робить постріл гармата з імовірністю ураження танка 0,4. Якщо гармата не знищує танк, то останній відповідає вогнем з імовірністю ураження гармати 0,5. Якщо гармата не знищена, то вона робить другий постріл по танку, що наближається, з імовірністю ураження його 0,8. Якщо танк другим пострілом гармати не знищений, то він своїм другим пострілом знищує гармату (ймовірність знищення гармати дорівнює 1).

Знайти ймовірність знищення в цьому бою: а) танка; б) гармати.

Р о з в' я з а н н я. 1. Введемо позначення подій: A_1 – знищення танка першим пострілом з гармати; A_2 – знищення танка другим пострілом з гармати.

Тоді подія знищення танка A буде сумою подій $A = A_1 + A_2$.

Аналогічно до знищення гармати (подія B) $B = B_1 + B_2$, де B_1 – знищення гармати першим пострілом з танка; B_2 – знищення гармати другим пострілом з танка.

Р о з в' я з а н н я. 2. Визначимо ймовірність знищення танка:

$$p\ (A) = p\ (A_1) + p\ (A_2),$$

$p\ (A_1) = 0{,}4$ (за умовою прикладу).

Подія A_2 є добутком подій $A_2 = A_1''B_1''A_2'$, де A_1'' – не знищення танка першим пострілом гармати; B_1'' – не знищення гармати першим пострілом танка;

A_2' – знищення танка другим пострілом гармати. Тоді

$$p\ (A_2) = p\ (A_1'') \cdot p\ (B_1'') \cdot p\ (A_2'),$$

але

$$p\ (A_1'') = 1 - p\ (A_1') = 1 - 0{,}4 = 0{,}6,$$
$$p\ (B_1'') = 1 - p\ (B_1') = 1 - 0{,}5 = 0{,}5;$$

$p\ (A_2') = 0{,}8$ (за умовою прикладу), отже,

$$p\ (A_2') = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}24,$$

а ймовірність знищення танка

$$p\ (A) = 0{,}4 + 0{,}24 = 0{,}64.$$

Р о з в' я з а н н я. 3. Визначимо ймовірність знищення гармати вогнем танка:

$$p\ (B) = p\ (B_1) + p\ (B_2),$$
$$p\ (B_1) = p\ (A_1'') \cdot p\ (B_1'') = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3,$$
$$p\ (B_2) = p\ (A_1'') \cdot p\ (B_1'') \cdot p\ (A_2'') \cdot p\ (B_2'') = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = \\ = 0{,}06,$$
$$p\ (B) = 0{,}3 + 0{,}06 = 0{,}36.$$

Висновок. Під час багаторазового повторення бою гармати з танком в умовах розглянутого прикладу в середньому в 64 випадках (боїв) із 100 буде знищений танк, а в 36 – гармата.*

2.6. Формула повної ймовірності

Приклад 23. Як відомо, визначення установок для стрільби супроводжується випадковими помилками, в результаті дії яких центр розсіювання снарядів (ЦРС) буде

*Примітка. В умовах нашого прикладу події знищення танка й знищення гармати – протилежні події (вони єдиноможливі й одна з них обов'язково відбудеться, оскільки за умовами прикладу другим пострілом танк знищує гармату з імовірністю, що дорівнює одиниці). Тому ймовірність знищення гармати може бути обчислена за формулою (2.12), тобто

$$p\ (B) = 1 - p\ (A) = 1 - 0{,}64 = 0{,}36.$$

віддалений від цілі на випадкову величину. Ми не знаємо, де розміщений центр розсіювання снарядів. Однак нам відомі ймовірності обчислення центру розсіювання снарядів на інтервалах, виражених в серединних похибках визначення установок для стрільби E_x (рис. 2.11). Не складно підрахувати ймовірність влучення в ціль при обчисленні ЦРС у межах смуги, шириною $1E_x$ (точніше, середні ймовірності влучення в ціль для смуги $1E_x$). Такі дані для умов рис. 2.11 наведені в табл. 2.1.

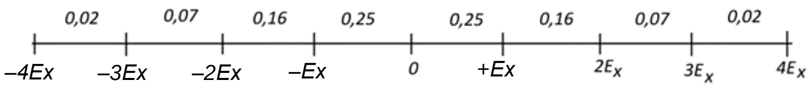

Рисунок 2.11 – Шкала ймовірності влучення в ціль за розсіювання снарядів

Таблиця 2.1 – Середні ймовірності влучення в ціль

Найменування	Смуга			
	від $-1E_x$ до $+1E_x$	від $-2\ E_x$ до $-1E_x$ та від $+1E_x$ до $+2\ E_x$	від $-3E_x$ до $-2E_x$ та від $+2E_x$ до $+3\ E_x$	від $-4\ E_x$ до $-3E_x$ та від $+3E_x$ до $+4\ E_x$
1	**2**	**3**	**4**	**5**
Розміщення ЦРС в i-й смузі (подія A) ...	A_1	A_2	A_3	A_4
Імовірність розміщення ЦРС в i-й смузі $p\ (A)$ ...	0,50	0,32	0,14	0,04
Влучення в ціль при розміщенні ЦРС в i-й смузі (подія B) ...	B	B	B	B
Умовна ймовірність влучення в ціль при розміщенні ЦРС в i-й смузі $p\ (B/A_i)$ ...	0,20	0,15	0,08	0,02

Знайти ймовірність влучення з першого пострілу.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Влучення в ціль може відбутися за умови, що ЦРС розміщений у першій смузі – подія A_1B. Імовірність цієї події обчислемо за теоремою множення ймовірностей:

$$p\,(A_1B) = p\,(A_1) \cdot p\,(B\,/\,A_1) = 0{,}50 \cdot 0{,}20 = 0{,}10.$$

2. Аналогічно до інших смуг:

$$p\,(A_2B) = p\,(A_2) \cdot p\,(B\,/\,A_2) = 0{,}32 \cdot 0{,}15 = 0{,}048 \approx 0{,}05;$$
$$p\,(A_3B) = p\,(A_3) \cdot p\,(B\,/\,A_3) = 0{,}14 \cdot 0{,}08 = 0{,}0112 \approx 0{,}01;$$
$$p\,(A_4B) = p\,(A_4) \cdot p\,(B\,/\,A_4) = 0{,}04 \cdot 0{,}02 = 0{,}0008 \approx 0.$$

3. Розглянуті події A_iB є несумісними і якщо будь-яке з них відбудеться, то буде мати місце влучення в ціль. В принципі все рівно, за якого положення ЦРС ми одержимо влучення в ціль, тому що нас цікавить імовірність влучення в ціль з першого пострілу. Шукану ймовірність обчислимо за теоремою додавання ймовірностей:

$$p\,(B) = \Sigma_{i=1}^{4} p\,(A_i) \cdot p\,(B\,/\,A_i) = 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}01 + 0 =$$
$$= 0{,}16.$$

Отже, ймовірність влучення в ціль із першого пострілу 0,16.

Як у розглянутому, так і в ряді других прикладів, нас може цікавити ймовірність появи події B за умови, що мала місце одна з декількох несумісних подій – гіпотез: або A_1, або A_2, або A_3, або ...., або A_n.

Якщо мала місце подія A_1, то ймовірність появи події, що складається з появи подій A і B, буде

$$p\,(A_1B) = p\,(A_1) \cdot p\,(B\,/\,A_1).$$

аналогічно до цього

$$p\,(A_2B) = p\,(A_2) \cdot p\,(B\,/\,A_2);$$
$$p\,(A_3B) = p\,(A_3) \cdot p\,(B\,/\,A_3);$$
$$p\,(A_4B) = p\,(A_4) \cdot p\,(B\,/\,A_4).$$

Кожен із цих виразів визначає ймовірність появи події B у певних умовах. Нас цікавить імовірність появи події B незалежно від умови, в яких воно відбувається, тобто незалежно від того, чи мала місце подія A_1 або A_2, або A_3, або

..., або A_4.

Оскільки гіпотези A_1 або A_2, або A_3, або ..., або A_n утворюють повну групу, то подія B може виникнути лише в комбінації з будь-якою із цих гіпотез:

$$B = A_1B + A_2B + ... + A_n B.$$

Оскільки гіпотези A несумісні, то і комбінації A_1B, A_2B, ..., A_nB також несумісні. Застосовуючи до подій (A_iB) теорему додавання, одержимо

$$p(B) = p(A_1B) + p(A_1B) + ...p(A_nB) = \sum_{i=1}^{n} p(A_iB).$$

Застосовуючи до подій $A_i B$ теорему множення, маємо

$$p\ (B) = \Sigma_{i=1}{}^{n} p\ (A_i) \cdot p\ (B\ /\ A_i),$$

де $p\ (A_i)$ – ймовірності можливих умов появи події;

$p\ (B\ /\ A_i)$ – умовні ймовірності події, що відповідають цим умовам.

Цей вираз і називають формулою повної ймовірності: ***повна ймовірність*** *події дорівнює сумі добутків імовірностей гіпотез на умовні ймовірності подій, що відповідають цим гіпотезам.* При цьому повинні бути враховані всі умови (гіпотези), які можуть мати місце, тобто повинна бути виконана рівність [18]:

$$\Sigma_{i=1}{}^{n} p\ (A_i) = 1.$$

Поняття й формула розрахунку повної ймовірності стали, зокрема, поширеними взагалі і в питаннях теорії стрільби.

Розв'язуючи приклад 1 на початку цього розділу за визначенням імовірності влучення в ціль, ми фактично застосували формулу повної ймовірності. Розв'яжемо ще два приклади з артилерійської практики.

Приклад 24. По танку роблять три одиночні постріли. Ймовірність влучення з першого пострілу 0,5, з другого – 0,6, з третього – 0,8. Для знищення танка свідомо достатньо трьох улучень; з одного влучення танк уражається з імовірністю 0,3, з двох – з імовірністю 0,8. Знайти ймовірність того, що в результаті трьох пострілів танк буде знищений.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Розглянемо чотири гіпотези:

A_0 – у танк не потрапило жодного снаряда;

A_1 – у танк потрапив один снаряд;

A_2 – у танк потрапили два снаряди;

A_3 – у танк потрапили три снаряди.

2. Користуючись теоремами додавання й множення ймовірностей, обчислимо ймовірності цих гіпотез:

$$p\ (A_0) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}04,$$
$$p\ (A_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}26,$$
$$p\ (A_2) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}46,$$
$$p\ (A_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}24.$$

3. Перевіряємо, чи всі гіпотези враховані та чи правильно розраховані їх імовірності:

$$\Sigma_{i=0}^{3} p\ (A_i) = 0{,}04 + 0{,}26 + 0{,}46 + 0{,}24 = 1{,}0.$$

4. Умовні ймовірності події B (знищення танка) за цих гіпотез дорівнюють:

$$p\ (B / A_0) = 0, \qquad p\ (B / A_1) = 0{,}3,$$
$$p\ (B / A_2) = 0{,}8, \qquad p\ (B / A_3) = 1{,}0.$$

5. Застосовуючи формулу повної ймовірності, одержимо

$$p\ (B) = p\ (A_0) \cdot p\ (B / A_0) + p\ (A_1) \cdot p\ (B / A_1) + p\ (A_2) \cdot$$
$$\cdot\ p\ (B / A_2) + p\ (A_3) \cdot p\ (B / A_3) = 0{,}04 \cdot 0 + 0{,}26 \cdot 0{,}3 + 0{,}46 \cdot 0{,}8 +$$
$$+\ 0{,}24 \cdot 1 = 0{,}078 + 0{,}368 + 0{,}240 = 0{,}686.$$

Відзначимо, що першу гіпотезу A_0 можна було б не брати до розгляду, оскільки відповідний член у формулі повної ймовірності стає нулем. Так зазвичай і роблять при застосуванні формули повної ймовірності, розглядаючи не повну групу несумісних гіпотез, а лише ту з них, за якої ця подія можлива.

Приклад 25. Відомі ймовірності $p_{m,n}$ того, що n пострілів буде дорівнювати m влучень в ціль та ймовірності $p\ (m)$ ураження цілі за m влученнях в неї (m = 0,1, ..., n). Визначити ймовірність ураження цілі за n пострілів. Обчислити цю ймовірність у разі, якщо

$$p_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ а } \quad p(m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m,$$

де p – імовірність влучення в ціль з одного пострілу $q = 1 - p$; ω – середня кількість влучень, необхідна для знищення цілі.

Р о з в' я з а н н я. 1. Нехай гіпотеза A_m означає, що з n пострілів буде влучень в ціль (m = 0,1, ..., n). Подія B – ураження цілі n під час пострілів. При цьому

$$\sum_{m=0}^{n} p(A_m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1,$$

як сума всіх членів розкладання бінома Ньютона $(p + q)^n$.

2. Умовні ймовірності події B (ураження цілі) за цих гіпотез рівні. Вони дорівнюють

$p\,(B\,/\,A_m)\cdot p\,(m) = 1 - (1 - 1/\omega)^m$, при цьому m = 0,1, ..., n.

3. Застосовуючи формулу повної ймовірності, обчислюємо

$$p(B) = \sum_{m=0}^{n} p(A_m)\cdot p(B/A_m) = \sum_{m=0}^{n} p_{m,n}\, p(m).$$

Підставляючи вирази в основну формулу, одержимо

$$p(B) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} C_n^m \left[p(1 - \frac{1}{\omega})\right]^m q^{n-m} = (p+q)^n - \left[p(1 - \frac{1}{\omega}) + q\right]^n.$$

Враховуючи, що $p + q = 1$, $q = 1 - p$, у кінцевому підсумку

$$p\,(B) = 1 - (1 - p/\omega)^n. \tag{2.22}$$

Цю формулу широко застосовують у теорії стрільби артилерії.

2.7. Теорема гіпотез

Раніше були розглянуті способи обчислення чисельного значення ймовірності появи події, що нас цікавить, якщо відомі умови, в яких відбувається випробування, шляхом попереднього визначення кількості всіх рівноможливих випадків і кількості випадків, що сприяють появі цієї події. Для більш складних подій, якщо детально і всебічно проаналізувати обставини неможливо, ймовірність складної події ми визначали через імовірності простих подій, що повинні бути відомими. Якщо ж ми можемо провести досить велику кількість випробувань, то ймовірність появи події можна визначити статистичним способом. Якщо ж кількість випробувань буде невеликою і обставини, в яких вони проводяться досить точно не відомі, то щодо цих обставин та умов, в яких може виникнути та чи інша подія, можна робити різні припущення, які називають **гіпотезами** [1].

Припустимо, що в ящику розміщено 5 куль, причому вони можуть бути червоного і білого кольорів. Імовірність появи як червоної, так і білої кулі може бути визначена лише в тому випадку, якщо буде відомою кількість червоних і білих куль. Оскільки вони нам не відомі, то про склад куль можна робити різні припущення – гіпотези. У цьому разі таких гіпотез 6:

1) в ящику 5 червоних і 0 білих куль;
2) в ящику 4 червоних і 1 біла куля;
3) в ящику 3 червоних і 2 білих кулі;
4) в ящику 2 червоних і 3 білих кулі;
5) в ящику 1 червона і 4 білих кулі;
6) в ящику 0 червоних і 5 білих куль.

Ці гіпотези єдиноможливі (буде обов'язково мати місце одна з них) і несумісні (наявність однієї з них виключає можливість наявності будь-якої іншої).

Якщо ніяких інших даних про склад куль в ящику немає, то можна вважати, що всі ці гіпотези рівноможливі. Оскільки сума ймовірностей єдиноможливих і несумісних подій дорівнює одиниці, то ймовірність кожної гіпотези дорівнює 1/6.

Тут гіпотези різноймовірні. У ряді випадків імовірності гіпотез будуть різними. Так, гіпотези за можливих віддалень центра розсіювання снарядів від цілі в прикладі 24 (розділ 2.6) мають різні ймовірності: $p\ (A_1) = 0{,}50$; $p\ (A_2) = 0{,}32$; $p\ (A_3) = 0{,}14$; $p\ (A_4) = 0{,}04$.

Чи зміняться ймовірності гіпотез, якщо проведено випробування? Так, зміняться. Наприклад, проведений дослід, у результаті якого була вийнята біла куля. Це показує, що наша перша гіпотеза неправильна (ймовірність її стала дорівнювати нулю). Її варто відкинути. Оскільки сума ймовірностей всіх гіпотез повинна дорівнювати одиниці, то природно зміняться і ймовірності інших гіпотез.

Поставимо завдання визначити ймовірність гіпотез після випробування.

Є повна група несумісних гіпотез A_1, A_2, A_3, ... A_n, імовірності цих гіпотез до досліду відомі та рівні $p\ (A_1)$, $p\ (A_2)$, $p\ (A_3)$, ..., $p\ (A_n)$ [24].

Проведений дослід, у результаті якого мала місце подія B. Потрібно визначити ймовірності гіпотез A_i після випробування (позначимо ці ймовірності через Q_i).

За поставленим завданням нам потрібно визначити ймовірність гіпотези A після того, як мала місце подія B.

Отже,

$$Q_i = p\ (A_i \,/\, B).$$

Із теореми множення маємо

$$p\ (A_iB) = p\ (A_i) \cdot p\ (B \,/\, A_i) = p\ (B) \cdot p\ (A_i \,/\, B),$$

звідси

$$p\ (A_i \,/\, B) = p\ (A_i) \cdot p\ (B \,/\, A_i) \,/\, p\ (B).$$

За формулою повної ймовірності

$$p(B)=\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\cdot p\ (B\ /\ A_i),$$

тоді ймовірність гіпотези після випробування буде

$$Q_i=\frac{p(A_i)\,p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\,p(B/A_i).} \qquad (2.23)$$

Тобто *ймовірність гіпотези після випробування дорівнює добутку ймовірності гіпотези до випробування на умовну ймовірність події за цією гіпотезою, поділеною на повну ймовірність події, що мала місце під час випробування.*

Формула теореми гіпотез дає стільки ж відповідей, скільки зроблено гіпотез. В результаті цієї теореми можна стверджувати, що такі-то гіпотези мають місце, а такі-то – ні. За теоремою гіпотез можна знайти ймовірності гіпотез після випробування й за ними робити висновки про те, яка гіпотеза в результаті випробування більш імовірна.

Приклад 26. Для стрільби з гвинтівок є набої трьох партій (табл. 2.2).

Набій із узятої навздогад пачки дав при стрільбі осічку. З якої партії, найімовірніше, узятий набій?

Таблиця 2.2 – Кількість пачок набоїв та ймовірність осічки

Номер партії	Кількість пачок у партії	Імовірність осічки
1	20	0,3 %
2	25	0,2 %
3	5	0,5 %

Р о з в’ я з а н н я. Для розв’язання задач із визначення ймовірностей гіпотез, зроблених після випробування, що дав певний результат (подія), користуються таблицею такої форми (табл. 2.3).

Приклад 27. Після визначення установок для стрільби центр розсіювання снарядів (середня траєкторія) може розміщуватися на відстані від цілі в межах ± чотирьох серединних помилок підготовки установок. Імовірності, розміщення ЦРС на різних ділянках A_i – подані в табл. 2.4. У цій таблиці наведені значення ймовірності одержання перельоту (подія B) при розміщенні ЦРС на різних ділянках.

Таблиця 2.3 – Імовірність здійснення гіпотези

№ п/п	Найменування гіпотези A_i	Імовірність гіпотези до випробування $p\ (A_i)$	Імовірність здійснення події i-ї гіпотези $p\ (B\ /\ A_i)$	Імовірність здійснення гіпотези і появи за нею події $p\ (A_i) \cdot p\ (B/A_i)$	Імовірність гіпотез після випробування Q_i
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.	Узятий набій із першої партії...	20/50	3/1 000	60/50·1 000	60/135 = = 0,4444
2.	Узятий набій із другої партії...	25/50	2/1 000	50/50·1 000	50/135 = = 0,3704
3.	Узятий набій із третьої партії...	5/50	5/1 000	25/50·1 000	25/135 = = 0,1852
			$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1$*	$\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B/A_i)$ = 135/50·1 000	$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 1$**

* Сума ймовірностей усіх гіпотез до випробування повинна дорівнювати одиниці, тобто.

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = 1 \cdot$$

** Оскільки гіпотези єдиноможливі й несумісні, то сума ймовірностей усіх гіпотез повинна дорівнювати одиниці, тобто.

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 1 \cdot$$

Таблиця 2.4 – Імовірності, розміщення ЦРС на різних ділянках

Ділянка (гіпотеза) положень ЦРС – A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Імовірність гіпотез – p (A_i) – імовірність того, що ЦРС розміщений на – A_i ділянці	0,02	0,07	0,16	0,25	0,25	0,16	0,07	0,02
Умовні ймовірності подій за гіпотезами – p (B/A_i) імовірності одержання перельоту за умов, що ЦРС розміщений на A_i ділянці	0	0	0,02	0,25	0,75	0,98	1	1

Визначити ймовірності розміщення центра розсіювання снарядів на тих самих ділянках A_i, якщо після першого пострілу буде одержаний «переліт».

Р о з в’ я з а н н я. Шукані ймовірності визначаються за теоремою гіпотез

$$Q_i = p\left(\frac{A_i}{B}\right) = \frac{p(A_i)\,p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\,p(B/A_i)}.$$

Порядок розв’язання наведений у табл. 2.5.

Таблиця 2.5 – Результати визначення ймовірності розміщення центра розсіювання снарядів

Найменування гіпотези A_i	Імовірність гіпотези до випробування p (A_i)	Імовірність появи події (перельоту) за i-ю гіпотезою p (B/A_i)	Імовірність здійснення гіпотези A_i та появи за нею події p (A_i), p (B/A_i)	Імовірність гіпотез після випробування ймовірності розміщення ЦРС на й-й ділянці після одержання перельоту $Q_i = p$ (A_i/B)
1	**2**	**3**	**4**	**5**
A_1 – ЦРС розміщений на ділянці від –4E до –3E	0,02	0	0	0
A_2 – ЦРС розміщений на ділянці від –3E до –2E	0,07	0	0	0
A_3 – ЦРС розміщений на ділянці від –2E до –1E	0,16	0,02	$0{,}16 \cdot 0{,}02 = 32 \cdot 10^{-4}$	32 : 5 000 = 0,006

Продовження табл. 2.5

1	2	3	4	5
A_4 – ЦРС розміщений на ділянці від –1*E* до 0	0,25	0,25	$0{,}25 \cdot 0{,}25 = 625 \cdot 10^{-4}$	625 : 5 000 = 0,125
A_5 – ЦРС розміщений на ділянці від 0 до +1*E*	0,25	0,75	$0{,}25 \cdot 0{,}75 = \cdot 1\,875 \cdot 10^{-4}$	1875 : 5 000 = 0,375
A_6 – ЦРС розміщений на ділянці від +1*E* до +2*E*	0,16	0,18	$0{,}16 \cdot 0{,}18 = 1\,568 \cdot 10^{-4}$	1568 : 5 000 = 0,314
A_7 – ЦРС розміщений на ділянці від +2*E* до +3*E*	0,07	1,00	$0{,}07 \cdot 1{,}00 = 700 \cdot 10^{-4}$	700 : 5 000 = 0,140
A_8 – ЦРС розміщений на ділянці від +3*E* до +4*E*	0,02	1,00	$0{,}02 \cdot 1{,}00 = 200 \cdot 10^{-4}$	200 : 5 000 = 0,040
	$\sum_{i=1}^{8} p(A_i) = 1{,}0$		$\sum_{i=1}^{8} p(A_i) p(B/A_i) = 5\,000 \cdot 10^{-4}$	$\sum_{i=1}^{8} Q_i = 1{,}00$

Розглянемо окремий випадок, якщо гіпотези до випробування різноймовірні, тобто

$$p\,(A_1) = p\,(A_2) = \ldots\, p\,(A_n) = p\,(A),$$

формула ймовірності гіпотези після випробування набере вигляду

$$Q_i = p\,(A_i) \cdot p\,(B/A_i) / \Sigma_{i=1}^{n} p\,(A_i) \cdot p\,(B/A_i) = \\ = p\,(B/A_i) / \Sigma_{i=1}^{n} p\,(B/A_i). \qquad (2.24)$$

Якщо гіпотези до випробування ***рівноймовірні****, то ймовірність гіпотези після випробування дорівнює відношенню ймовірності події за цією гіпотезою до суми ймовірностей цієї події за усіма гіпотезами* [25].

Висновки до розділу 2

Таким чином, вивчення питань теорії ймовірностей, її основних теорем та положень дозволяє використовувати їх не лише в теоретичних аспектах при проведенні розрахунків, а й на практиці у визначенні точності влучення у ціль, імовірності розміщення центра розсіювання снарядів від цілі, оброблення результатів спостережень і засікання цілей для їх ураження.

У цьому розділі наведені основні поняття про події та класифікація подій (достовірні, неможливі, рівноможливі, протилежні, спільні й несумісні), частота та ймовірність появи подій, способи обчислення чисельних значень імовірності події (класичний, статистичний, геометричний), основні теореми: теорема додавання ймовірностей, теорема множення ймовірностей, формула повної ймовірності; шкала ймовірності влучення в ціль під час розсіювання снарядів, повна ймовірність події й теорема гіпотез. У розділі розглянуті деякі варіанти застосування вищепереліченних теорем в артилерійській науці під час стрільби та ураження (знищення) об'єктів, цілей.

Також у розділі подані приклади основних понять і теорем теорії ймовірностей та варіанти їх розв'язання.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Події, їх класифікація, частота та ймовірність появи подій, ймовірність випадкової події, способи безпосереднього визначення ймовірності, класичний, статистичний та геометричний способи, теорема додавання ймовірностей, теорема множення ймовірностей, спільні події, теорема повної ймовірності, шкала ймовірності влучення в ціль, повна ймовірність події, формула повної ймовірності, ймовірність здійснення гіпотези, ймовірність влучення, розміщення ЦРС, теорема гіпотез, випадкове явище.

Питання для повторення та самоконтролю

1. Надати визначення події.

2. Подати класифікацію подій.

3. Надати пояснення частоті та ймовірності появи подій.

4. У чому полягає класичний спосіб обчислення чисельного значення ймовірності події?

5. У чому полягає статистичний спосіб обчислення чисельних значень імовірності події?

6. У чому полягає геометричний спосіб обчислення чисельних значень імовірності події?

7. Надати визначення та пояснити суть теореми додавання ймовірностей.

8. Надати визначення та пояснити суть теореми множення ймовірностей.

9. Що таке спільні події?

10. Надати визначення та пояснити суть теореми повної ймовірності.

11. Надати цифрове позначення розподілу ймовірності за шкалою ймовірності влучення в ціль.

12. Надати визначення повної ймовірності події.

13. Надати пояснення ймовірності здійснення гіпотези.

14. Графічно показати розміщення ЦРС на шкалі розсіювання.

15. Надати визначення та пояснити суть теореми гіпотез.

16. Що таке випадкове явище?

Завдання для самопідготовки

1. Розрахувати ймовірність влучення в ціль з одного пострілу, з двох або трьох.

2. Розрахувати ймовірність знищення танка, якщо ймовірність потрапляння у танк з одного пострілу дорівнює 0,3. Для знищення танка необхідно три потрапляння.

3. Виготовити з паперу шкалу розсіювання снарядів із ЦРС у центрі цілі.

4. Розрахувати ймовірність появи «герба», якщо монету підкидають три рази.

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Використання основних теорем теорії ймовірностей в артилерії.

2. Теорія ймовірностей як наука в артилерії.

3. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

4. Застосування теорії ймовірностей при ураженні цілей (об'єктів) під час стрільби артилерією.

Розділ 3

ІМОВІРНОСТІ КОМБІНАЦІЙ ПРИ ПОВТОРЕННІ ДОСЛІДІВ

3.1. Визначення ймовірності комбінацій за незмінних імовірностей подій. Використання формули бінома Ньютона

Комбінацією називаємо можливий кінцевий результат кількох випробувань або дослідів, що містить певну кількість разів появи події, що нас цікавить. Наприклад, при захопленні цілі у вузьку вилку під час пристрілювання її однією гарматою ми призначаємо два снаряди і можемо очікувати такі комбінації з перельотів і недольотів (випадок влучення в ціль не розглядаємо):

а) два перельоти;

б) один переліт і один недоліт;

в) два недольоти.

Друга комбінація може бути в двох варіантах: переліт-недоліт і недоліт-переліт, але це одна комбінація.

Або інший **приклад**. На незмінних установках роблять три постріли по цілі. При цьому можливі такі комбінації з влучень в ціль і промахів: а) три влучення; б) два влучення й один промах; в) одне влучення й два промахи; г) три промахи.

Друга комбінація може бути в трьох варіантах: влучення – влучення – промах; влучення – промах – влучення; промах – влучення – влучення, але це одна комбінація.

Третя комбінація може бути також у трьох варіантах: влучення – промах – промах; промах – влучення – промах; промах – промах – влучення, але це теж одна комбінація.

Знання порядку визначення можливих комбінацій при повторенні випробувань, кількості їх варіантів і розрахунку ймовірностей комбінацій необхідно під час вивчення теорії стрільби, наприклад, для вироблення правил стрільби зі спостереження знаків розривів, якщо положення середньої траєкторії щодо цілі визначається групою пострілів і можливі різні комбінації з перельотів і недольотів.

Відзначимо, що правила визначення ймовірностей комбінацій для розглянутих прикладів будуть різними. Дійсно, у першому прикладі за умови, що наводки гармат і стрільба ведуться однаковими боєприпасами, ймовірність одержання кожного з простих подій (перельоту або недольоту) від пострілу до пострілу не змінюється. Це випадок, якщо ймовірності подій від випробування до випробування не змінюються. У другому ж прикладі ймовірність влучення на першій установці прицілу буде іншою, ніж на другій або на третій установках. Це випадок, якщо ймовірності подій від випробування до випробування змінюються [27].

Таким чином, під час вивчення правил визначення ймовірностей комбінації при повторенні випробувань варто розглянути два випадки: якщо ймовірності подій від випробування до випробування не змінюються; якщо ймовірності подій при повторенні випробувань змінюються.

Ми розглянемо лише перший випадок, якщо ймовірності подій від випробування до випробування не змінюються.

Припустимо, що в результаті випробувань відбудеться одна з двох протилежних подій A чи $\bar{A}$. При цьому ймовірність появи події A нам відома й дорівнює $p\ (A)$. Тоді ймовірність події $\bar{A}$ буде $p\ (\bar{A}) = 1 - p\ (A)$. Для стислості позначимо написання $p\ (A)$ через p, а $p\ (\bar{A}) = 1 - p\ (A)$ через q.

Нехай випробування проводиться S разів. У результаті всіх S випробувань кількість разів появи події A може набути одного з чисельних значень ряду

$$S, S - 1, S - 2, ..., m, ..., 2, 1, 0.$$

Відповідно до цього кількість разів появи події $\bar{A}$ може набути одного з чисельних значень ряду

$$0,\ 1,\ 2,\ ...,\ S-m,\ ...,\ S-2,\ S-1,\ S.$$

Таким чином, в результаті S випробувань буде мати місце складна подія – комбінація, складена з m разів появи події A й $n = S - m$ раз появи події A. Ймовірність появи одного з варіантів цієї комбінації, наприклад, m разів поспіль поява події A, а потім S разів – поява події A, можна визначити але за теоремою множення ймовірностей як добуток

$$\underbrace{ppp...ppp}_{m\ разів}\ \underbrace{qqq...qqq}_{n\ разів} = p^m q^n .$$

Очевидно, що саме добуток визначає ймовірність будь-якого з варіантів цієї комбінації, оскільки від перестановки співмножників добуток не змінюється, а ймовірність комбінації за теоремою додавання ймовірностей визначиться як сума ймовірностей всіх її варіантів, тобто

$$p_{m,n} = \underbrace{p^m q^n + p^m q^n + ...p^m q^n}_{Всього\ M\ разів} = Mp^m q^n ,$$

де $p_{m,n}$ – імовірність комбінації з m разів появи події A й n разів появи події $\bar{A}$ при $S = m + n$ випробуваннях.

Визначимо вираз, за яким може бути обчислена кількість варіантів комбінації M. Комбінація складається з S подій, із яких m подій A *й* $n = S - m$ подій A:

$$\underbrace{\underbrace{AAA...A}_{m}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\bar{A}...\bar{A}}_{n}}_{S} .$$

Варіанти комбінації утворюються зміною послідовності протилежних подій. Кількість всіх перестановок на S елементах дорівнює S! Але до цієї кількості належать і ті перестановки, що утворюються через переміщення усередині подій A (їх кількість дорівнює m!) і всередині подій A (їх кількість дорівнює n!). Ці переміщення не змінюють фізичної сутності результату досліду, отже, не приводять до утворення варіантів комбінації. Через переміщення усередині подій A й $\bar{A}$ кількість перестановок збільшується в

$m!n!$ разів. Отже, кількість варіантів може бути визначене за висловом

$$M = S!\ /\ m!n!.$$

Оскільки вона за своїм виглядом відповідає формулі, за якою розраховується кількість сполучень з S елементів по m – C_S^m (або, що те саме, із S елементів по n – C_S^n), то часто говорять, що кількість варіантів комбінації визначається кількістю сполучень

$$M = C_S^m = S!\ /\ m!n!.$$

Таким чином,

$$p_{m,n} = C_S^m p^m q^n = \frac{S!}{m!n!} p^m q^n. \qquad (3.1)$$

Ця формула дозволяє розраховувати ймовірність комбінації з m разів появи події A і $n = S - m$ разів появи події $\bar{A}$ за S незалежних випробувань за умови, що p і $q = 1 - p$ однакові для всіх випробувань імовірності появи відповідно до протилежних подій A й $\bar{A}$.

Формула (3.2) є загальним виразом будь-якого члена бінома Ньютона вигляду [27]

$$(a+b)^S = a^S + Sa^{S-1}b + ... + \frac{S!}{m!(S-m)!} a^m b^{S-m} + ... + Sab^{S-1} + b^S. \qquad (3.2)$$

Дійсно, використавши у формулі (3.2) $a = p$ і $b = q$ з виразу (3.1) одержимо:

– ймовірність комбінації S раз появи події A й нуля разів появи події $\bar{A}$, тобто при $m = S$, а $n = 0$,

$$p_{S,0} = (S!\ /\ S!0!) \cdot p^S q^0 = p^S;$$

– ймовірність комбінації з $S - 1$ разів появи події A й одного разу появи події $\bar{A}$, тобто при $m = S - 1$, а $n = 1$,

$$p_{S-1,1} = \frac{S!}{S-1!1!} p^{S-1} q = Sp^{S-1} q.$$

Аналогічно цьому можуть бути одержані й інші члени бінома Ньютона (3.2).

Таким чином, формула бінома Ньютона дає відповідь про ймовірності комбінацій при повторенні незалежних випробувань. Подамо її у вигляді

$$(p+q)^S = p_{S,0} + p_{S-1,1} + \ldots + p_{m,n} + \ldots + p_{1,S-1} + p_{0,S}, \qquad (3.3)$$

де $p_{m,n}$ визначається за формулою (3.1).

Розподілом імовірностей комбінацій назвемо сукупність всіх чисельних значень імовірностей комбінацій.

Очевидно, вираз (3.3) являє собою розподіл імовірностей комбінацій за незалежних випробувань.

Оскільки ймовірності – додавання формули (3.3) – формули членів розкладання бінома, розподілу ймовірностей вигляду (3.3) називають **біноміальним розподілом** [33].

Наведемо приклади використання формул (3.1) – (3.3) для вирішення практичних завдань.

Приклад 1. Імовірність влучення з одного пострілі *p* (*П*) = 0,4, а ймовірність промаху *p* (*Пр*) = 0,6. Розрахувати ймовірність появи трьох влучень і одного промаху з чотирьох пострілів, якщо стрільба проводиться за одних і тих самих умов, тобто відомі нам імовірності влучення й промаху залишаються без змін.

Р о з в’ я з а н н я. Позначимо кількість всіх пострілів через *S*, кількість влучень через *m* і кількість промахів через *n*. За формулою (3.1) обчислимо

$$p_{3,1} = 4!\ /\ 3!1! \cdot p^3(П) \cdot p\ (Пр) = (1\cdot2\cdot3\cdot4\ /\ 1\cdot2\cdot3\cdot1)\cdot(0{,}4)^3\cdot0{,}6 =$$
$$= 4\cdot0{,}064\cdot0{,}6 = 0{,}1536.$$

Крім розрахунку ймовірностей окремих комбінацій за допомогою виразу (3.3), можна підрахувати ймовірності появи подій, що нас цікавлять, в кількох комбінаціях.

Приклад 2. Імовірність влучення з одного пострілу *p* (*П*) = 0,4, а ймовірність промаху *p* (*Пр*) = 0,6. Розрахувати ймовірність появи двох або трьох улучень з чотирьох пострілів, якщо стрільба проводиться за однакових умов.

Р о з в’ я з а н н я. Позначимо кількість всіх пострілів через *S*, кількість влучень через *m*, а кількість промахів через *n*. Визначимо ймовірності кожної з двох, що нас цікавлять комбінацій:

$$p_{2,2} = (4!\ /\ 2!2!)\cdot(0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}3456,$$
$$p_{3,1} = (4!\ /\ 3!1!)\cdot(0{,}4)^3 \cdot 0{,}6 = 0{,}1536.$$

Згідно з теоремою додавання ймовірностей ймовірність одержання двох або трьох влучень обчислиться як сума ймовірностей цих подій, тобто

$$p_{2,2\ \text{або}\ 3,1} = p_{2,2} + p_{3,1} = 0{,}3456 + 0{,}1536 = 0{,}4992.$$

Біноміальний розподіл можна зобразити графічно.

Приклад 3. Зобразити графічно біноміальний розподіл імовірностей комбінацій із перельотів і недольотів з чотирьох пострілів, якщо ймовірність одержання перельоту з одного пострілу (p = 1/3), недольоту q = 2/3.

Р о з в' я з а н н я. Згідно з виразами (3.1.1) і (3.1.2) одержимо

$$(1/3+2/3)^4 = (1/3)^4 + 4(1/3)^3\cdot 2/3 + 6\,(1/3)^2\cdot(2/3)^2 + 4(1/3)\cdot(2/3)^3 + (2/3)^4 = 1/81+8/81+24/81+32/81+16/81 = 1.$$

Членами біноміального розподілу є правильні дроби зі спільним знаменником. Кожну з них можна подати у вигляді добутку чисельника на один і той самий дріб, у якому чисельник одиниця, а знаменник дорівнює спільному знаменнику всіх членів розподілу.

Запишемо у загальному вигляді одержаний розподіл імовірностей:

$$(1/3+1/2)^4 = p_{4,0} + p_{3,1} + p_{2,2} + p_{1,3} + p_{0,4},$$
$$p_{4,0} = 1\cdot 1/81,\quad p_{3,1} = 8\cdot 1/81,\quad p_{2,2} = 24\cdot 1/81,$$
$$p_{1,3} = 32\cdot 1/81,\quad p_{0,4} = 16\cdot 1/81.$$

Кожну з цих імовірностей подамо у вигляді прямокутника з однаковою основою і висотою, що відповідає величині першого співмножника.

Візьмемо прямокутну систему координат (рис. 3.1). По горизонтальній осі (вісь абсцис) через рівні інтервали відкладемо точки 0, 1, 2, 3, 4, що відповідають номерам членів розкладання бінома.

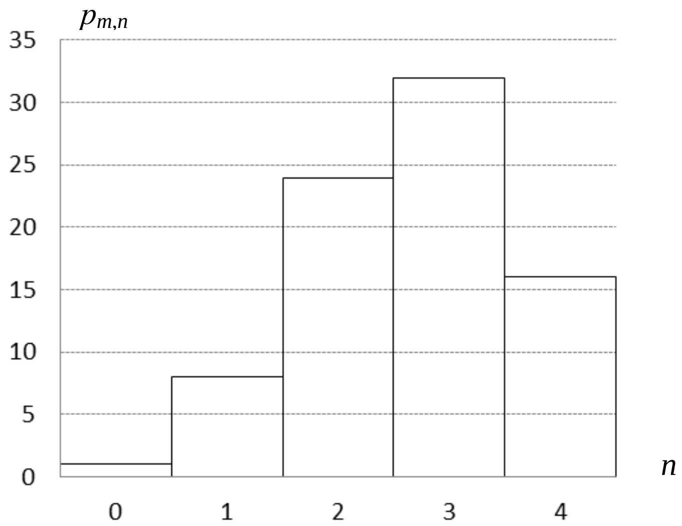

Рисунок 3.1 – Прямокутна система координат

Зауважимо, що цих членів завжди $S + 1$, і будемо їх нумерувати: $p_{S,0}$ – нульовий член; $p_{S,1}$ – перший і т. д. Цифри 0, 1, 2, 3, 4 показують, скільки разів із кількості S випробувань у цій комбінації з'явиться подія, ймовірність якої q.

По вертикальній осі (вісь ординат) у масштабі відкладемо величини першого співмножників членів (3.1). Ці множники відповідають імовірностям, оскільки показують, якій кількості 1/81 частини одиниці дорівнює ймовірність тієї чи іншої комбінації. Вісь ординат відповідно до цього позначимо $p_{m,n}$.

Побудуємо прямокутники з висотами 1, 8, 24, 32, 16 і основами, рівними інтервалами по осі так, щоб центри основ збігалися з точками 0, 1, 2, 3, 4 цієї осі. Рисунок 3.1 являє собою графік розподілу ймовірності комбінацій, що нас цікавлять [34].

Приклад 4. Розрахувати і побудувати графік розподілу ймовірностей вигляду $(0,5 + 0,5)^S$ за $S = 4$ (рис. 3.2):

$$(0,5 + 0,5)^S = 0,0625 + 0,250 + 0,3750 + 0,250 + 0,0625.$$

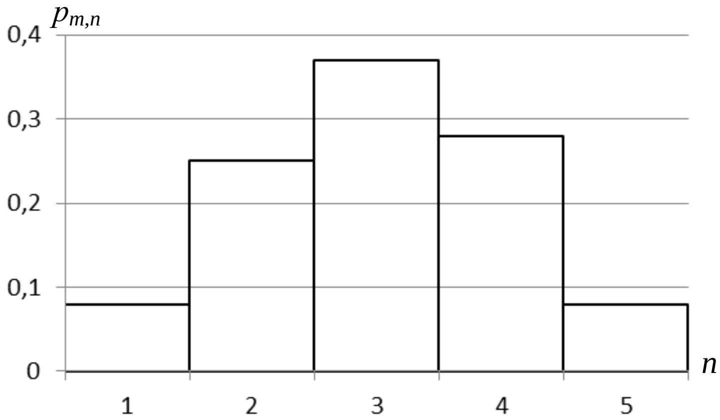

Рисунок 3.2 – Графік розподілу ймовірності комбінацій

Р о з в' я з а н н я. Покладемо $S = 10$,

$$(0,5 + 0,5)^{10} = 0,001 + 0,010 + 0,044 + 0,117 + 0,205 + \\ + 0,248 + 0,205 + 0,117 + 0,044 + 0,010 + 0,001.$$

(Розрахунки виконані з точністю до 0,001.)

Побудуємо графік цього розподілу ймовірностей (рис. 3.3), маючи між серединами основ крайніх прямокутників таку саму відстань, що і на рис. 3.2, тобто відрізок 0–10 на рис. 3.3 візьмемо таким, що дорівнює відрізку 0–4 на рис. 3.2. Іншими словами, візьмемо відрізок 0–4 на рис. 3.2 за одиницю. У цьому масштабі основа прямокутників за будь-яких S визначають як $1/S$.

За безмежного збільшення відрізок S має межею точку, і замість прямокутників ми одержимо ряд ординат, верхні кінці яких опишуть плавну криву (рис. 3.4) [35].

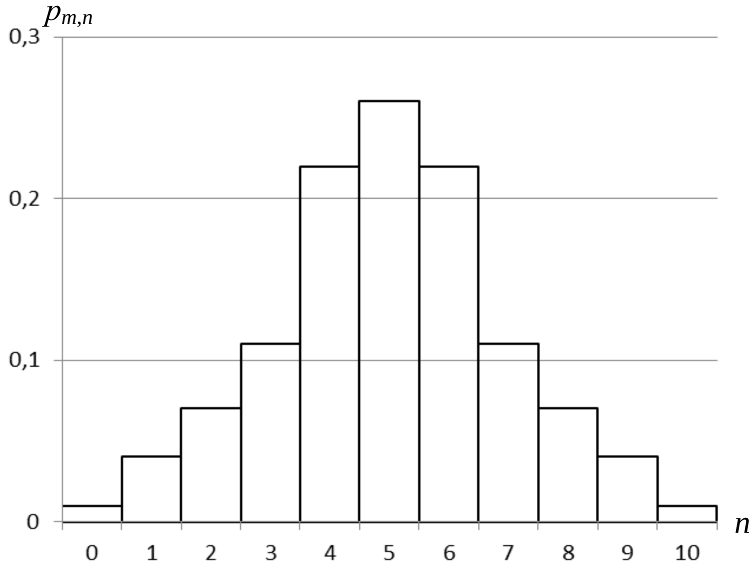

Рисунок 3.3 – Графік розподілу ймовірностей

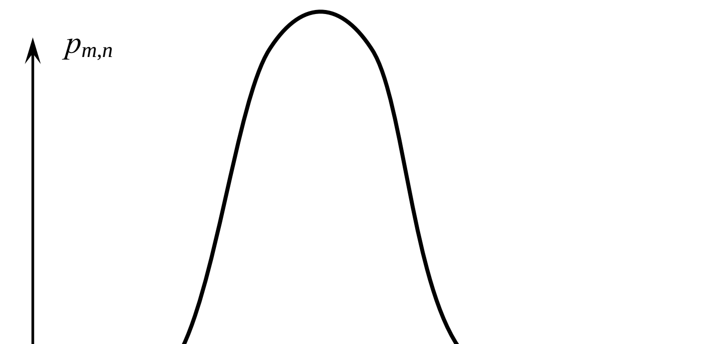

Рисунок. 3.4 – Графік розподілу ймовірностей (за безмежного збільшення відрізка S)

3.2. Визначення можливості появи події, не меншої за задану кількість разів

Під час вирішення багатьох питань артилерійської стрільби доводиться стикатися з визначенням імовірності появи події, не меншої за задану кількість разів або, як ще кажуть, з визначенням імовірності появи події хоча б m разів (m = 1, 2, …, S). Це завдання також вирішують за допомогою виразу (3.3).

Вираз «хоча б m разів» означає, що нас влаштовують такі можливі результати випробувань, комбінації, в яких нас цікавить подія A, що з'явиться не менше за m разів (m разів і більше).

Позначимо ймовірність появи події хоча б m разів через $P_{\geq m}$ ($P_{\geq 1}$ – імовірність появи події хоча б один раз; $P_{\geq 2}$ – те само, хоча б два рази і т. д.).

Згідно з виразом (3.3) імовірність появи події хоча б раз може бути визначена як сума ймовірностей комбінацій, в яких подія A з'явиться S разів, S – 1 раз, S – 2 рази, ..., m + + 1 раз і m разів, тобто

$$P_{\geq m} = p_{S,0} + p_{S-1,1} + \ldots + p_{m+1,n-1} + p_{m,n}. \quad (3.4)$$

За значних S і невеликих m кількість доданків у виразі (3.4) велика. Розрахунки $P_{\geq m}$ при цьому можна спростити, використовуючи таку особливість бінома (3.3).

Оскільки p і q – імовірності протилежних подій, тобто $p + q = 1$, то і сума членів бінома (3.3) дорівнює $(p + q)^S = 1^S = 1$.

Отже, вираз (3.4) чисельно дорівнює виразу

$$P_{\geq m} = 1 - (p_{m-1,n+1} + p_{m-2,n+2} + \ldots + p_{1,S-1} + p_{0,S}), \quad (3.5)$$

в якому вираз у дужках є сумою ймовірностей комбінацій – членів бінома (3.3), що складаються з m – 1 разів і менші від появи події A, що нас цікавить.

Приклад 5. Імовірність влучення з одного пострілу p ($П$) = 0,4, а ймовірність промаху p ($Пр$) = 0,6. Зроблені чотири постріли за однакових умов. Визначити: 1) імовірність хоча б трьох улучень; 2) імовірність хоча б одного улучення.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Імовірність хоча б трьох улучень $P_{\geq 3}$ для нашого випадку згідно з формулою (3.4)

$P_{\geq 3} = p_{4,0} + p_{3,1} = (0,4)^4 + 4! / 3!1! \cdot (0,4)^3 \cdot 0,6 = 0,1792.$

Якщо ж цей приклад розв’язувати за допомогою виразу (3.5), то розрахунки ускладнюються,

$$P_{\geq 3} = 1 - (p_{2,2} + p_{1,3} + p_{0,4}) =$$

$$1 - \left[\frac{4!}{2!2!}(0,4)^2 \cdot (0,6)^2 + \frac{4!}{1!3!} 0,4 \cdot (0,6)^3 \cdot (0,6)^4 \right] = 0,1792.$$

Р о з в’ я з а н н я. 2. Імовірність хоча б одного влучення $P_{\geq 1}$ для нашого випадку відповідно до виразу (3.5)

$$P_{\geq 1} = 1 - p_{0,4} = 1 - (0,6)^4 = 0,8704.$$

Якщо ж цей приклад розв’язувати за виразом (3.4), то розрахунки ускладняються,

$$P_{\geq 1} = p_{0,4} + p_{3,1} + p_{2,2} + p_{1,3} =$$

$$= (0,4)^4 + \frac{4!}{3!1!} - (0,4)^3 \cdot 0,6 + \frac{4!}{2!2!}(0,4)^2 \cdot (0,6)^2 + \frac{4!}{1!3!} 0,4 \cdot (0,6)^3 =$$

$$= 0,8704.$$

В артилерійській практиці дуже часто виникає необхідність визначати ймовірність появи події хоча б один раз. Зокрема, з визначенням такої ймовірності ми стикнулися під час розв’язання прикладу 5.

Як бачимо з розв’язання прикладу 5, а також із формули (3.5), ймовірність появи події хоча б один раз у загальному вигляді може бути одержана з виразу

$$P_{\geq 1} = 1 - p_{0,S}$$

або

$$P_{\geq 1} = 1 - q^{S} = 1 - (1 - p)^{S}, \qquad (3.6)$$

де p – імовірність появи події, що нас цікавить, за одного випробування.

Із виразу (3.6) можна одержати дуже важливу для теорії стрільби артилерії формулу, що дозволяє обчислити витрату снарядів для одержання хоча б одного влучення із заданою ймовірністю $P_{\geq 1}$ за відомої величини ймовірності влучення з одного пострілу. Дійсно, формулу (3.6) можна подати у вигляді

$$1 - P_{\geq 1} = (1 - p)^S.$$

Прологарифмуємо цю рівність:

$$\lg (1 - P_{\geq 1}) = S \cdot \lg (1 - p),$$

звідси

$$S = \lg (1 - P_{\geq 1}) \,/\, S \cdot \lg (1 - p). \tag{3.7}$$

Приклад 6. Визначити необхідну кількість пострілів для того, щоб імовірність ураження цілі була б 90 %, якщо для ураження цілі достатньо одного потрапляння, а ймовірність потрапляння з одного пострілу дорівнює 0,3.

Р о з в’ я з а н н я. У цьому випадку $P_{\geq 1} = 0{,}9$ і $p = 0{,}3$.

2. Відповідно до формули (3.7) маємо

$$S = \frac{\lg(1 - P_{\geq 1})}{\lg(1 - p)} = \frac{\lg(1 - 0{,}9)}{\lg(1 - 0{,}3)} = \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}7} = \frac{1{,}0000}{1{,}8451} = \frac{-1{,}0000}{-0{,}1549} = 7 \text{ снарядів.}$$

Фізичний зміст одержаного результату такий: під час стрільби за цих умов (умови відображені ймовірністю влучення з одного пострілу $p = 0{,}3$) із витратою семи снарядів на стрільбу в середньому в 90 стрільбах із 100 ціль буде уражена (буде хоча б одне влучення).

У теорії стрільби формула (3.2.4) зазвичай записується у вигляді

$$N = \lg(1 - P_{\geq 1}) \,/\, \lg(1 - p). \tag{3.8}$$

Ця формула широко використовується в теорії стрільби.

Висновки до розділу 3

Таким чином, вивчення правил визначення ймовірностей комбінації при повторенні випробувань, використання формули бінома Ньютона дозволяє застосовувати їх не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці при вирішенні багатьох питань артилерійської стрільби, під час якої доводиться стикатися з визначенням імовірності появи події не менше від заданої кількості разів, біноміальним розподілом імовірностей комбінацій із перельотів і недольотів, розв'язання яких дозволяє артилерії завдавати надійного ураження (знищення) об'єктам (об'єктів) і цілям противника.

У цьому розділі розглянуті питання щодо визначення ймовірності комбінацій за незмінних ймовірностей подій, порядок і можливості використання формули бінома Ньютона, визначення можливості появи події не менше від заданої кількості разів, наведений графік розподілу ймовірностей та застосування їх в артилерійській науці.

Також у розділі наведені приклади та варіанти їх розв'язування.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Правила визначення ймовірностей комбінації, формула бінома Ньютона, ймовірність появи події не менше від заданої кількості разів, біноміальний розподіл імовірностей комбінацій, незмінні ймовірності події, графік розподілу ймовірностей, теорія ймовірностей, випадковість, теорія артилерійської стрільби, розсіювання снарядів, випадкове явище, фізичний зміст одержаного результату, ураження цілі, графік розподілу ймовірностей, прямокутна система координат, перельоти й недольоти.

Питання для повторення та самоконтролю

1. У чому полягає сутність правила визначення ймовірностей комбінації при повторенні випробувань?

2. Для чого в артилерії та теорії ймовірностей взагалі використовують біном Ньютона ?

3. Що називають розподілом імовірностей комбіна-

цій?

4. Із якою метою в артилерії використовують графік розподілу ймовірностей?

5. У яких аспектах теорії стрільби артилерії використовують біноміальний розподіл імовірностей комбінацій?

6. Із якою метою в артилерії використовують імовірність комбінацій з перельотів і недольотів?

Завдання для самопідготовки

1. Графічно зобразити біноміальний розподіл імовірностей комбінацій з перельотів і недольотів із чотирьох пострілів.

2. Розрахувати ймовірність появи двох улучень і одного промаху з трьох пострілів, якщо стрільба проводиться в одних і тих самих умовах.

3. Використовуючи результати розрахунків другого питання, пояснити фізичний зміст одержаного результату.

4. Розрахувати витрату снарядів для одержання хоча б одного влучення із заданою ймовірністю $P_{\geq 1}$ *за відомої величини ймовірності влучення з одного пострілу.*

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Застосування бінома Ньютона в артилерії.

2. Теорія ймовірностей на службі в артилерії.

3. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

4. Застосування теорії ймовірностей як науки в артилерії.

5. Використання теорії ймовірностей під час підготовки вогневого ураження противника артилерією.

Розділ 4

РОЗПОДІЛ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

4.1. Поняття закону розподілу їх величин

До цього часу ми розглядали випадкові явища, результати яких після проведення досліду подавалися у вигляді випадкових подій. Наприклад, розглядаючи стрільбу з гармати, ми зводили результат пострілу до таких подій, як влучення в ціль, переліт, недоліт або просто промах. Цим самим ми характеризували як би якісний результат досліду (пострілу). У ряді ж випадків, особливо під час оцінювання ефективності стрільби на ураження, цього надто мало, оскільки розглядається явище і при цьому вивчається недостатньо повно, а результати і висновки з цього дослідження не завжди є правильними. Дійсно, ураження цілі може бути досягнуте не лише при прямому влученні в ціль, а й одержанні промаху (перельоту або недольоту) за умови, що відхилення розриву від цілі не перевищує певної величини.

Щоб правильно оцінити ефективність стрільби в таких умовах, потрібно знати, на якій саме відстані розриваються снаряди, тобто величину відхилення (перельоту або недольоту) точки падіння снаряда від цілі. Варто розглянути випадкове явище з цих позицій, тобто з позицій визначення кількісної величини відхилення точки падіння снаряда від цілі, що викликало необхідність розглядати випадкові величини.

Випадковою називають таку змінну величину, за якої при випробуванні може взяти те чи інше числове значення, причому заздалегідь не відоме, яке саме.

Прикладами випадкових величин можуть бути такі:

1) відхилення точки падіння снаряда від цілі (у метрах, сантиметрах, *Вд* і т. п.);

2) кількість влучень в ціль з декількох пострілів (в одиницях кількості влучень);

3) дальність до цілі, виміряна далекоміром (у метрах, сантиметрах і т. п.);

4) кількість уражених осіб противника під час обстрілювання взводного опорного пункту (в одиницях);

5) похибка на дальність на балістичний вітер (у метрах, сантиметрах, *Вд* і т. п.).

Випадкові величини позначають великими літерами X, Y, Z і т. д., а можливі окремі значення, яких може набувати випадкова величина, – відповідно малими літерами x_1, x_2, ..., x_i, y_1, y_2, ..., y_i, z_1, z_2, ..., z_i і т. д.

Якщо проаналізувати наведені приклади випадкових величин, то побачимо, що одні, зокрема, можуть набувати значення лише в ізольованих точках числової осі (приклади в п. 3.1), а інші – будь-яке значення в певному інтервалі числової осі. Можливі значення таких випадкових величин безперервно заповнюють цей інтервал числової осі (приклади в п. 3.1). У зв'язку з цим розрізняють два типи випадкових величин: дискретні (перервні) та безперервні.

Дискретні (перервні) випадкові величини – це такі величини, що в результаті випробувань можуть набувати лише окремих, ізольованих значень.

Безперервні випадкові величини – це такі величини, що в результаті випробувань можуть набувати будь-яких з незлічених значень певного проміжку [7, 16].

Аналіз прикладів також свідчить, що випадкові величини можуть бути дуже різноманітними, але всі вони мають одну спільну характерну особливість. Вона полягає в тому, що всі випадкові величини є такими змінними величинами, які, залежно від випадкового результату досліду можуть набувати того чи іншого (не лише одного) можливого значення, при цьому до досліду не можна зазначити, якого саме.

Можливі значення дискретних (перервних) величин можуть бути перелічені заздалегідь.

Можливі значення безперервних випадкових величин не можуть бути перелічені заздалегідь; вони безперервно заповнюють деякий проміжок, їх безліч.

Введення поняття випадкової величини значно розширило можливості теорії ймовірностей при дослідженні випадкових явищ. Заслуга широкого впровадження в теорію ймовірностей поняття випадкової величини належить видатному ученому П. Л. Чебишову.

Розглянемо способи, за допомогою яких можуть бути описані й охарактеризовані випадкові величини.

4.2. Поняття закону розподілу випадкової величини

Ми встановили, що в результаті досліду випадкова величина може набувати того чи іншого чисельного значення. При цьому для перервних випадкових величин ми маємо можливість встановити ряд цих значень, а для безперервних – проміжки цих значень. Однак цих відомостей недостатньо для всебічного оцінювання випадкової величини. Необхідно не лише знати ті значення, яких може набувати випадкова величина в результаті досліду, а й встановити, як часто випадкова величина може набувати того чи іншого значення.

Величина відхилення снаряда від цілі може набувати різних випадкових значень. Щоб ґрунтовно вибрати спосіб обстрілювання цілі й правильно розрахувати витрати снарядів, необхідно не лише знати межі можливих відхилень снарядів, а й встановити, яка можливість появи різних відхилень снарядів від точки прицілювання, наскільки частими будуть ті чи інші відхилення. Розгядаючи розподіл точок падіння снарядів, ми можемо зазначити, що за досить великої кількості випущених снарядів відстань розривів від середньої точки, що не перевищує 1 *Вд*, відповідає

50 % усіх розривів, від 1 до 2 *Вд* – 32 %, від 2 до 3 *Вд* – 14 %, понад 3 *Вд* – 4 %. Така характеристика вже дає нам більш повне уявлення про випадкову величину – величину відхилення снарядів від цілі – дозволяє врахувати цей розподіл при вирішенні практичних завдань.

Подібно до випадкової події можливість набуття випадковою величиною тих чи інших значень є відображенням об'єктивної закономірності, властивої випадковому явищу, з яким пов'язана випадкова величина. Кожному значенню випадкової величини об'єктивно відповідає певне значення ймовірності. Випадкова величина буде повністю описана з ймовірнісної точки зору, якщо буде зазначено у яку ймовірність має те чи інше її значення. Зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними до них імовірностями виражає так званий закон розподілу випадкових величин.

Таким чином, **законом розподілу випадкової величини** називають відношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними до них імовірностями [7, 16].

Далі ми розглянемо деякі види законів розподілу випадкових величин.

4.2.1. Ряд розподілу. Багатокутник розподілу

Ряд розподілу та його графічне зображення – багатокутник розподілу – найпростіша форма закону розподілу перервної випадкової величини.

Розглянемо перервну випадкову величину X з можливими значеннями $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, кожне з яких можливе, і величина X може набувати кожного з них з деякою ймовірністю

$$p\,(X = x_1) = p_1, \quad p\,(X = x_2) = p_2, \quad p\,(X = x_n) = p.$$

Усі можливі значення випадкової величини $X = x_i$, за $[i = 1, 2, ..., n]$ складають повну групу. Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \cdot$$

Такий розподіл може бути заданим у вигляді таблиці, в якій перелічені можливі значення випадкової величини і відповідні до них імовірності (табл. 4.1).

Таблиця 4.1 – Ряд розподілу випадкової величини X (значення випадкової величини і відповідні до них імовірності)

Значення випадкової величини x_i	x_1	x_2	...	x_n
Імовірність цих значень випадкової величини p_i	p_1	p_2	...	p_n

Щоб надати ряду розподілу великої наочності, вдаються до його графічного зображення. Для цього (рис. 4.1) по осі абсцис відкладають можливі значення випадкової величини, а по осі ординат – імовірність цих значень. Одержані точки з'єднують відрізками прямих. Таку фігуру називають багатокутником розподілу. Як і ряд розподілу, багатокутник розподілу (повністю характеризує безперервну випадкову величину, будучи формою закону розподілу. Розглянемо приклади перервних випадкових величин та порядок складання ряду і багатокутника розподілу.

Приклад 1. Проводиться стрільба по цілі, розміри якої Фр = 8 м, Гл = 20 м. Середня траєкторія проходить через центр цілі *Вд* = 20 м, *Вб* = 2 м (рис. 4.3). Скласти ряд розподілу і побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X – кількості влучень з одного пострілу.

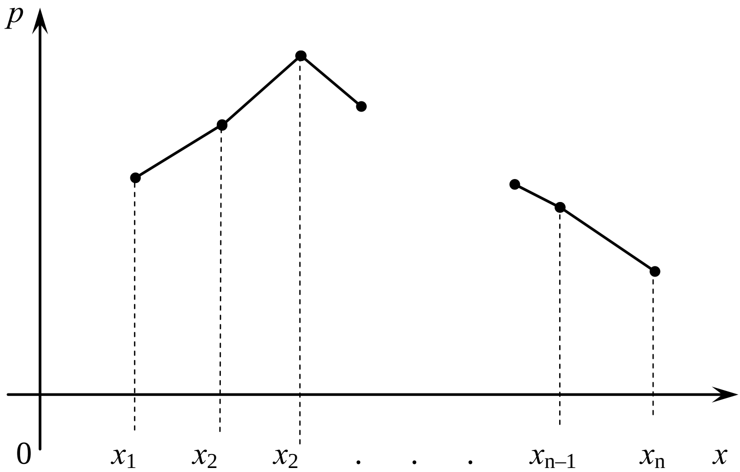

Рисунок 4.1 – Графічне зображення ряду розподілу

Р о з в’ я з а н н я. Випадкова величина може набувати двох значень – $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Імовірність того, що випадкова величина набуде значення $x_2 = 1$, дорівнює – p_2 імовірності влучення в ціль,

$$p_2 = p_д p_н = 0{,}26 \cdot 0{,}82 \approx 0{,}21,$$

$$p_1 = 1 - p_2 = 0{,}79.$$

Багатокутник розподілу показаний на рис. 4.2.

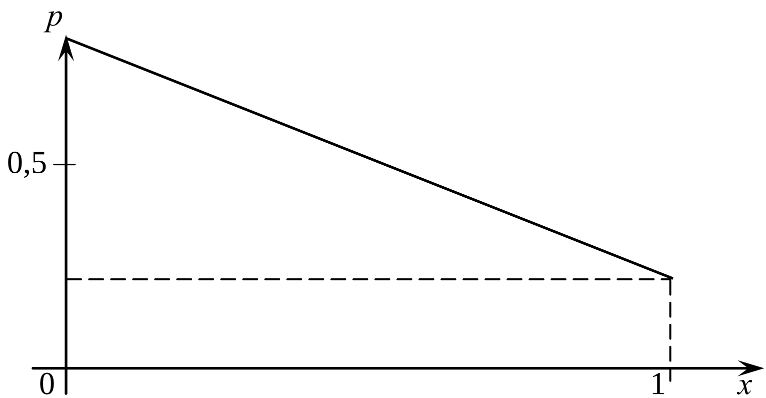

Рисунок 4.2 – Зображення багатокутника розподілу

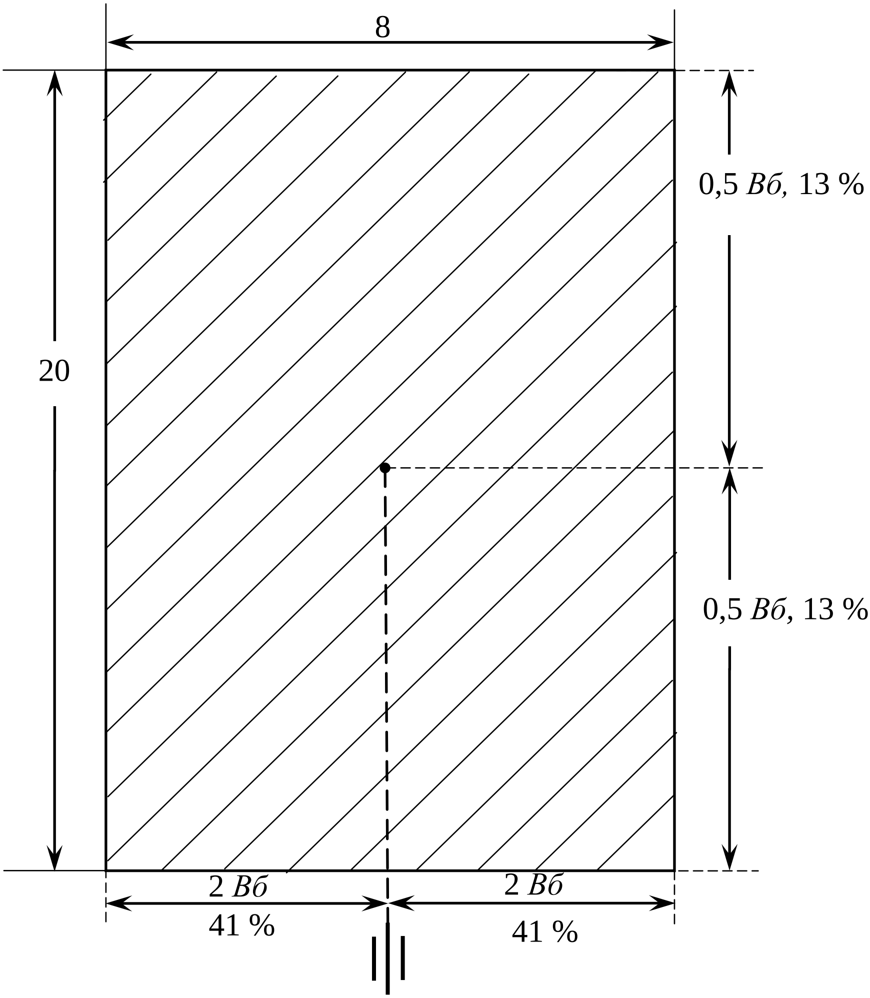

Рисунок 4.3 – Проходження середньої траєкторії через центр цілі

Ряд розподілу має вигляд

x_i	0	1	
p_i	0,79	0,21	$\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$

Приклад 2. Імовірність влучення в ціль з одного пострілу p = 0,4. Скласти ряд і багатокутник розподілу випадкової величини X – кількості влучень з чотирьох пострілів.

Р о з в' я з а н н я. Можливі значення випадкової величини:

$$x_1 = 0;\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 2,\quad x_4 = 3,\quad x_5 = 4,$$

$$p_i = p_{m,n} = S! \,/\, m!n!{\cdot}p^m q^n,$$

при $\qquad m = 0, 1, 2, 3, 4;\quad n = S - m,$

$$p_1 = (1 - p)^4 = 0{,}6^4 = 0{,}1296 \approx 0{,}13,$$

$$p_2 = 4 - p\; q^4 = 4{\cdot}0{,}4{\cdot}0{,}6^3 = 0{,}3456 \approx 0{,}35,$$

$$p_3 = 6{\cdot}p^2{\cdot}q^2 = 6{\cdot}0{,}4^2{\cdot}0{,}6^2 = 0{,}3456 \approx 0{,}35,$$

$$p_4 = 4{\cdot}p^3{\cdot}q = 4{\cdot}0{,}4^3{\cdot}0{,}6 = 0{,}1536 \approx 0{,}15,$$

$$p_5 = p^4 = 0{,}4^4 = 0{,}0256 \approx 0{,}02,$$

при цьому

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 1{,}00\,.$$

Ряд розподілу

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,13	0,35	0,35	0,15	0,02

Багатокутник розподілу зображений на рис. 4.4

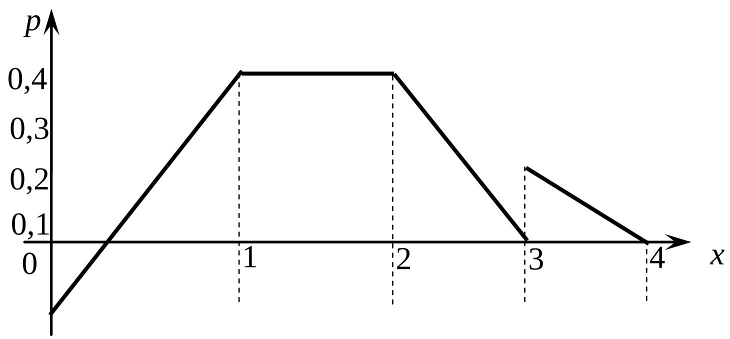

Рисунок 4.4 – Багатокутник розподілу

Приклад 3. В умовах прикладу 2 скласти ряд і багатокутник розподілу випадкової величини Y – витрати снарядів для ураження цілі, якщо для цього достатньо лише одного влучення (стрільбу закінчувати при одержанні влучення).

Р о з в' я з а н н я. Складемо ряд розподілу:

y_i	p_i
1	$p_1 = p = 0{,}400$
2	$p_2 = qp = 0{,}240$
3	$p_3 = q^2p = 0{,}144$
4	$p_4 = q^3p = 0{,}086$
...	...
I	$p_i = q^{i-1}p$
...	...
10	$p_{10} = q^9p = 0{,}0098$
...	...

Багатокутник розподілу показаний на рис. 4.5.

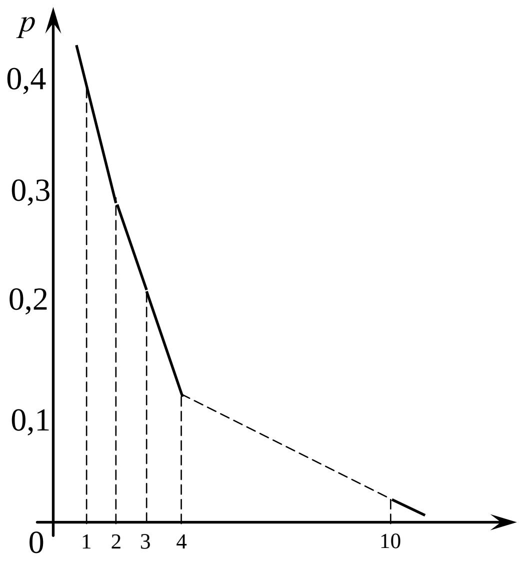

Рисунок 4.5 – Зображення багатокутника розподілу

4.2.2. Функція розподілу

Випадкова величина безперервного типу, як ми відзначали, може набувати незлічених можливих значень та безперервно заповнювати певний проміжок. Зрозуміло, що для такої випадкової величини неможливо скласти таблицю розподілу. Отже, для безперервної випадкової величини не існує ряду розподілу в тому сенсі, в якому він існує для перервної величини.

Однак і безперервна випадкова величина має розподіл імовірностей. Установимо аналітичний вираз закону розподілу, що дозволив би визначити ймовірність одержання випадкової величини та її чисельні значення, що нас цікавлять. Для кількісної характеристики розподілу ймовірностей зручно користуватися ймовірністю події, яка полягає в тому, що випадкова величина може набувати чисельних значень, менших від деякого скінченного числа, тобто, іншими словами, для характеристики випадкових величин використаємо суму ймовірностей усіх можливих значень випадкової величини X, менших за x. Імовірність цієї події, очевидно, залежить від x і буде деякою функцією від x.

Величину $p\ (X < x)$ називають **функцією розподілу випадкової величини** X і позначають $F\ (x)$:

$$F\ (x) = p\ (X < x). \tag{4.1}$$

Оскільки функція розподілу $F\ (x)$ становить суму ймовірностей значень випадкової величини, то цю функцію іноді називають інтегральною функцією розподілу, або інтегральним законом розподілу.

Функція розподілу $F\ (x)$ – сама універсальна характеристика випадкової величини. Вона існує як для перервних, так і для безперервних випадкових величин. Функція розподілу повністю характеризує випадкову величину з імовірнісної точки зору, тобто є однією з форм закону розподілу [18].

Відзначимо загальні властивості функції розподілу.

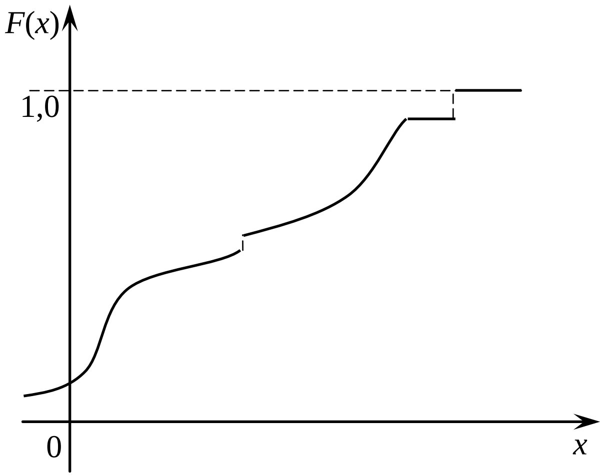

Рисунок 4.6 – Графік низхідної функції розподілу

1. *За мінус нескінченності функція розподілу дорівнює нулю,* тобто

$$F\ (-\infty) = 0.$$

Ця рівність очевидна, оскільки випадкова величина не може набути в результаті випробування значення, меншого від $-\infty$, тобто подія $x < -\infty$ неможлива.

2. *За плюс нескінченності функція розподілу дорівнює одиниці,* тобто

$$F\ (+\infty) = 1.$$

Умова $p\ (X < +\infty) = F\ (\infty) = 1$, відповідає ймовірності повної групи подій. Отже,

$$p\ (X < +\infty) = F\ (\infty) = 1.$$

3. *Функція розподілу $F\ (x)$ є низхідною функцією свого аргументу*, тобто якщо $x_2 > x_1$, то $F\ (x_2) \geq F\ (x_1)$, що очевидно з самого фізичного змісту функції розподілу.

Таким чином, у загальному випадку графік функції розподілу $F\ (x)$ являє собою графік низхідної функції (рис. 4.6), значення якої починаються від нуля й доходять до одиниці, в окремих точках функція може мати розриви (стрибки). Знаючи, наприклад, ряд розподілу перервної випадкової величини, можна побудувати графік функції розподілу цієї величини, користуючись співвідношенням

$$F(x) = p(X < x) = \sum_{x_i \le x} p(X = x_i).$$

Приклад 4. Імовірність влучення з одного пострілу дорівнює 0,4. Побудувати графік функції розподілу кількості влучень з п’яти пострілів.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Розрахуємо ймовірності $p(X = x_i)= = p$ (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5) і складемо ряд розподілу.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,078	0,260	0,346	0,230	0,076	0,010

2. Розрахуємо значення функції розподілу

$$F(x) = \Sigma_{xi \le x}\, p(X = x_i):$$

– за $x = 0$

$$F(x = 0) = p(X < 0) = 0;$$

– за $x = 1$

$$F(x = 1) = p(X < 1) = p(X = 0) = 0{,}078;$$

– за $x = 2$

$$F(x = 2) = p(X < 2) = p(X = 0) + p(X = 1) = 0{,}078 + \\ + 0{,}260 = 0{,}338;$$

– за $x = 3$

$$F(x = 3) = p(X < 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = \\ = 0{,}338 + 0{,}346 = 0{,}684;$$

– за $x = 4$

$$F(x = 4) = p(X < 4) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + \\ + p(X = 3) = 0{,}684 + 0{,}230 = 0{,}914;$$

– за $x = 5$

$$F(x = 5) = p(X < 5) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + \\ + p(X = 3) + p(X = 4) = 0{,}914 + 0{,}076 = 0990;$$

– за $x = 6$

$$F(x = 6) = 1.$$

3. Побудуємо графік. По осі абсцис відкладемо можли-

ві значення випадкової величини, а по осі ординат – відповідні до них значення функції розподілу.

Одержимо ряд точок (рис. 4.7), але таке зображення функції розподілу не наочне. Тому графічно функцію розподілу зображують у вигляді східчастої лінії. Для цього від одержаних точок проводять паралельні осі найближчого меншого значення випадкової величини (рис. 4.8). Зліва кінці цих ліній з'єднують з розміщеною нижче точкою вертикальною пунктирною прямою. Ці пунктирні лінії формально показують, що тут функція розподілу зазнає розриву (робить стрибок).

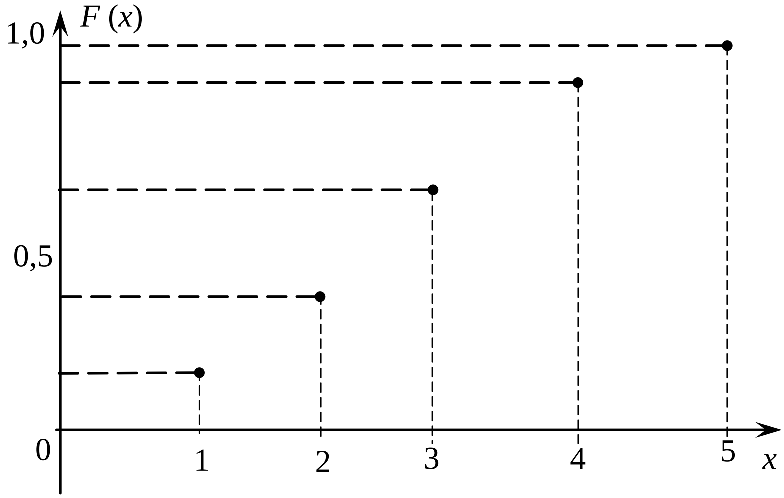

Рисунок 4.7 – Графічне зображення функції розподілу точками

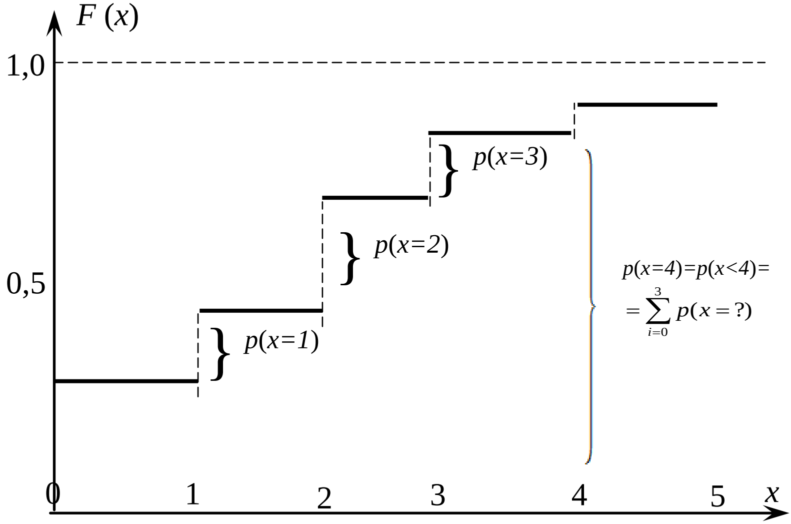

Рисунок 4.8 – Графічне зображення функції розподілу (розривною східчастою лінією)

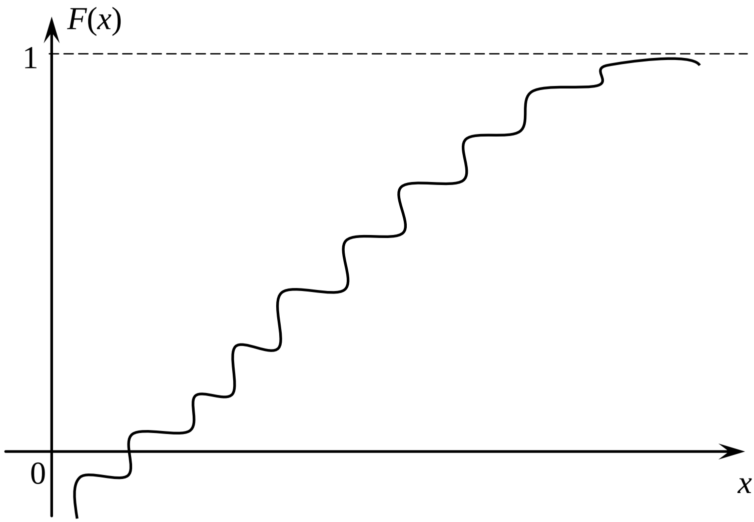

Рисунок 4.9 – Графічне зображення функції розподілу (хвилястою лінією)

Величина стрибка над значеннями x_i чисельно дорівнює ймовірностям цих значень p_i. Для повноти зображення над точкою $X = 5$ проводять вправо лінію для $F(x) = 1$. Таке графічне зображення відображає властивості функції розподілу, дозволяє одержати з графіка ймовірності, що нас цікавлять, і не порушувати математичної точності.

Таким чином, графічно функція розподілу будь-якої перервної випадкової величини зображується розривною східчастою лінією, стрибки якої відбуваються в точках, що відповідають можливим значенням випадкової величини, і дорівнюють ймовірностям цих значень p_i. Сума всіх стрибків функції $F(x)$ дорівнює одиниці $\sum p_i = 1$. Цілком очевидно, що в міру збільшення кількості можливих значень випадкової величини та зменшення інтервалів між ними кількість стрибків стає більшою, а самі стрибки – меншими. Східчаста крива (рис. 4.9) стає більш плавною.

Випадкова величина поступово наближається до безперервної величини, а її функція розподілу – до безперервної функції (рис. 4.10).

4.2.3. Розрахунок імовірності потрапляння випадкової величини на задану ділянку (в заданий інтервал)

Під час вирішення різних завдань часто необхідно визначати ймовірність того, що випадкова величина набуде певного чисельного значення деякої ділянки, наприклад від... до... . Прийнято для визначеності в межі ділянки вносити його лівий кінець. Тоді набуття випадковою величиною будь-якого значення ділянки (x_1, x_2) рівносильне виконанню нерівності

$$x_1 \le X < x_2.$$

Згідно з третьою властивістю функції розподілу

$$p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2),$$

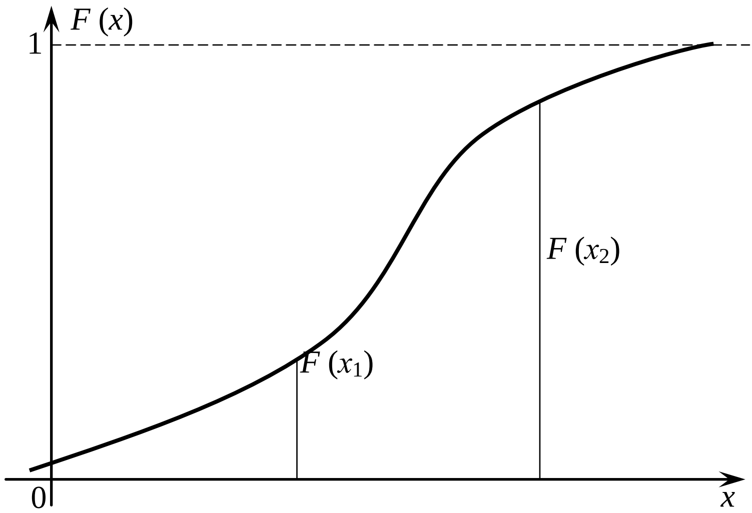

Рисунок 4.10 – Графічне зображення функції розподілу (яка прагне до безперервної функції)

звідси

$$p\ (x_1 \le X < x_2) = p\ (X < x_2) - p\ (X < x_1)$$

або

$$p\ (x_1 \le X < x_2) = F\ (x_1) - F\ (x_2), \qquad (4.2)$$

тобто ймовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку дорівнює приросту функції розподілу на цій ділянці (рис. 4.11).

Функцію розподілу широко використовують під час розрахунку ймовірності випадкових величин.

Скористаємося цією функцією для визначення ймовірності окремого значення випадкової величини. Напишемо ймовірність того, що випадкова величина набуде одного із значень інтервалу (x_n, x_m):

$$p\ (x_n \le X < x_m) = F\ (x_m) - F\ (x_n).$$

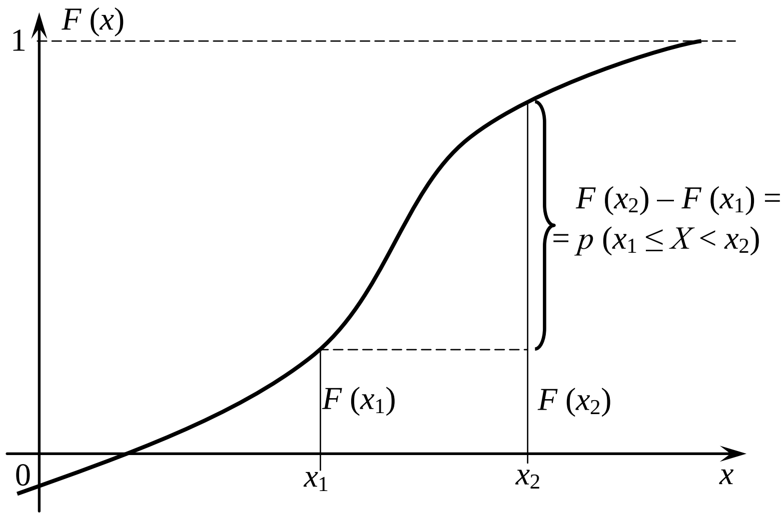

Рисунок 4.11 – Імовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку

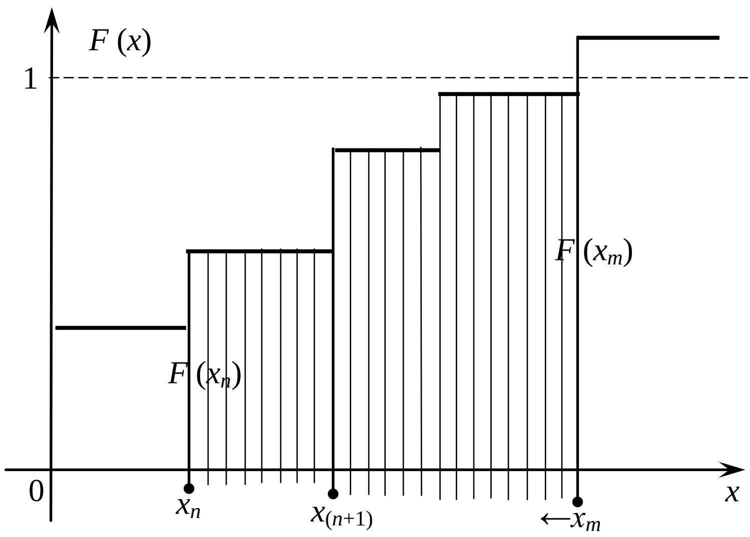

Рисунок. 4.12 – Графічне зображення функції розподілу для перервної випадкової величини

Будемо необмежено зменшувати ділянку (x_n, x_m), вважаючи, що x_m прагне до x_n. На межі замість імовірності потрапляння в інтервал одержимо ймовірність того, що випадкова величина набуде окремо взятого значення x_n [19]:

$$p\,(X = x_n) = \lim_{x_m \to x_n} \left[F(x_m) - F(x_n) \right].$$

Розглянемо, чому буде дорівнювати ця межа для перервних і безперервних випадкових величин.

Для перервної випадкової величини (рис. 4.12) у точці x_n функція розподілу зазнає розриву і, отже, різниця значень інтегральної функції на межі буде дорівнювати значенню стрибка функції $F\,(x)$ у точці x_n.

Якщо ж функція $F\,(x)$ безперервна (рис. 4.13), то розглянута межа дорівнює нулю, і, отже, ймовірність будь-якого окремого значення безперервної випадкової

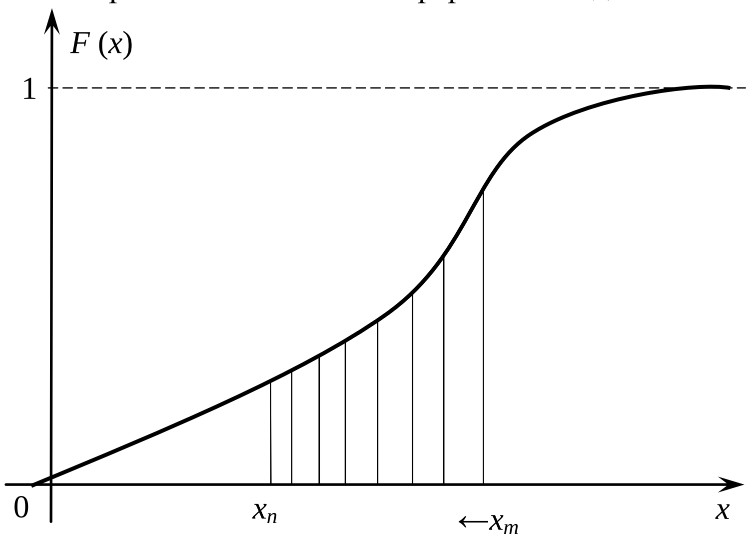

Рисунок 4.13 – Графічне зображення функції $F\,(x)$ як безперервної величини

величини дорівнює нулю. Фізична сутність цього визначення полягає в тому, що за необмеженого повторення досліду ця подія ($X = x_n$) буде виявлятися дуже не часто (практично неможлива подія).

Це положення дозволяє для безперервних випадкових величин у вираженні заданого інтервалу ($x_1 \leq X < x_2$) зняти знак рівності, що втрачає сенс, і заданий інтервал позначати лише знаками «більше» і «менше»:

$$x_1 \leq X < x_2.$$

4.2.4. Щільність розподілу безперервних випадкових величин

Розглянута одна з форм (математичних виразів) закону розподілу випадкової величини, функція розподілу повністю характеризує випадкову величину. За її допомогою можна вирішити всі завдання, що нас цікавлять: визначити ймовірність потрапляння випадкової величини у заданий інтервал [формула (4.2)], визначити практичні межі можливих значень випадкової величини, обчислити найбільш можливі значення випадкової величини та ін.

Однак розв'язання ряду цих задач для безперервних випадкових величин за допомогою функції розподілу вимагає громіздких розрахунків. Крім того, графік функції розподілу недостатньо наочно відображає деякі сторони (властивості) розподілу, такі, наприклад, як симетричність і асиметричність розподілу, щільність розподілу, що показує, як порівняно часто випадкова величина буде набувати значення в різних інтервалах і ряду інших властивостей її розподілу.

На рисунках 4.14 і 4.15 показані графіки законів розподілу однієї й тієї самої випадкової величини.

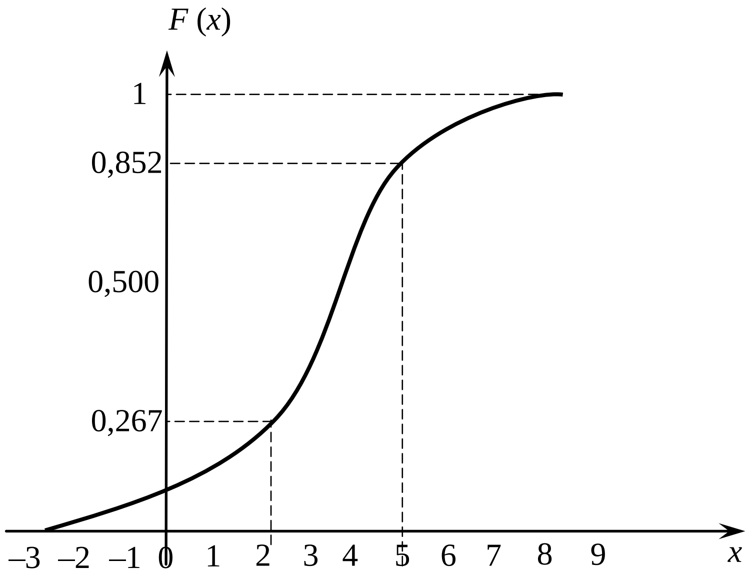

Рисунок 4.14 – Графік закону розподілу випадкової величини

За даними рисунка 4.14, на якому зображено графік функції розподілу, можна визначити практичні межі можливих значень випадкової величини $X(–3; 9)$, а також зняти значення функції розподілу (наприклад, $F(5) = 0{,}852$, $F(2) = 0{,}267$ і т. д.), що нас цікавлять.

Використовуючи ці дані, можна розрахувати ймовірність того, що випадкова величина набуде одного із значень в інтервалі (2, 5)

$$p(2 < X < 5) = F(5) – F(2) = 0{,}852 – 0{,}267 = 0585.$$

Решту ж властивостей розподілу (симетричність, вид закону розподілу та ін.) можна встановити лише приблизно або після додаткових розрахунків.

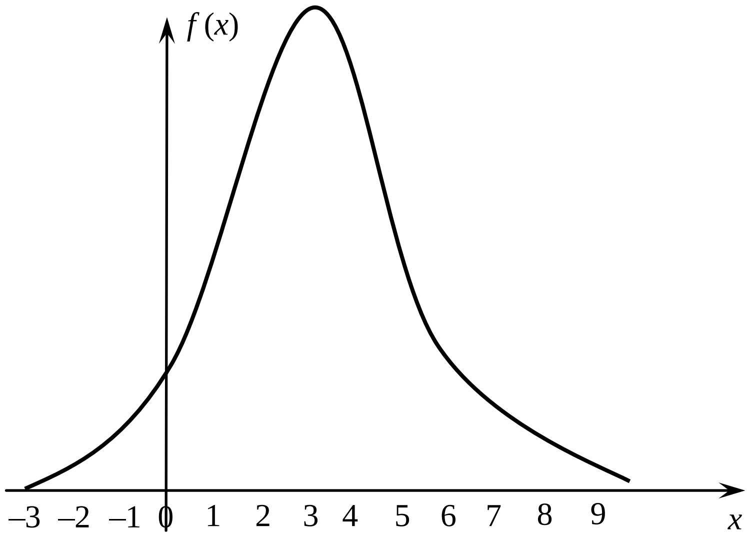

Рисунок 4.15 – Нормальний закон розподілу випадкової величини

На рисунку 4.15 бачимо, що найбільш можливі значення випадкової величини розміщені в інтервалі (2, 4), а сама крива симетрична цьому інтервалу. За виглядом кривої часто можна визначити і вид закону. Так, про закон розподілу випадкової величини (рис. 4.15) можна сказати, що він нормальний або близький до нього [21].

Таким чином, крива доповнює функцію розподілу в характеристиці випадкової величини. Таку форму закону розподілу випадкової величини називають **щільністю розподілу** (за аналогією з поняттям щільності маси та ін.).

Завдання полягає у визначенні аналітичного виразу щільності розподілу та її зв’язків із функцією розподілу.

Припустимо, що перед нами поставлене завдання визначення щільності розподілу точок падіння снарядів за дальністю. Щоб вирішити його, проведемо такий дослід.

На одних і тих самих установках зробимо досить велику кількість пострілів і підрахуємо частоти потрапляння снарядів на ділянки Δx_i. Відношення частоти r_i до величини ділянки Δx і дадуть нам щільність розподілу розривів за дальністю:

$$f_i^*(x) = r_i / \Delta x.$$

Частота в досліді є проявом імовірності. Тому до досліду завдання щодо визначення щільності розподілу випадкової величини може бути вирішеним, якщо замість частоти взяти ймовірність потрапляння випадкової величини в нескінченно малий інтервал (рис. 4.16).

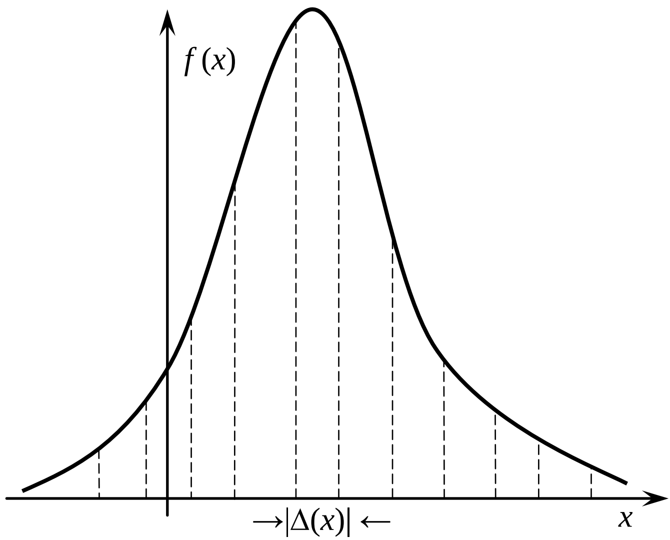

Рисунок 4.16 – Графічне зображення ймовірності потрапляння випадкової величини в нескінченно малий інтервал

Розглянемо безперервну випадкову величину X з функцією розподілу $F\ (x)$ і обчислимо ймовірність того, що випадкова величина набуде одного із значень проміжку $(x, x + \Delta x)$.

Імовірність цієї події може бути визначена як

$$p\,(x < X < x + \Delta\, x) = F\,(x + \Delta\, x) - F\,(x).$$

Розглянемо відношення цієї ймовірності до довжини проміжку (це відношення є не що інше, як середня ймовірність, що припадає на одиницю довжини проміжку $\Delta\, x$ і будемо безмежно зменшувати $\Delta\, x$ (рис. 4.17). Тоді на межі одержуємо похідну від функції розподілу (4.3) [19]

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)\,. \qquad (4.3)$$

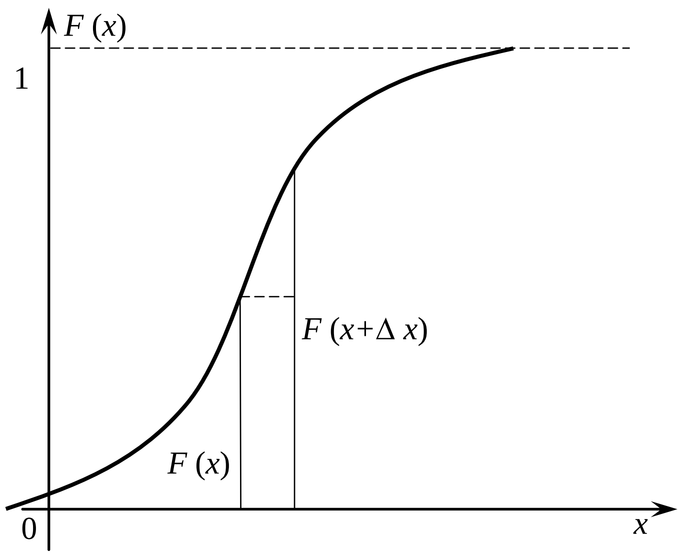

Рисунок 4.17 – Середня ймовірність, що припадає на одиницю довжини проміжку $\Delta\, x$

Функція $f\,(x)$ являє собою похідну функції розподілу, її називають щільністю розподілу (або «диференціальним законом розподілу»). Розмірність щільності розподілу обернена розмірності випадкової величини так, якщо випадкова величина X має розмір «метр» (наприклад, X являє собою відстань), то щільність розподілу матиме розмір $1/м$.

Крива $y = f(x)$ має назву кривої розподілу. Аналітичний вираз щільності розподілу $f(x)$ та її графік залежать від характеру розподілу випадкової величини.

На рисунках 4.18–4.20 показані аналітичні вирази і графіки щільності розподілу різних випадкових величин. Так, на рис. 4.18 зображена щільність розподілу похибок підготовки даних для стрільби. Її називають **нормальним законом**.

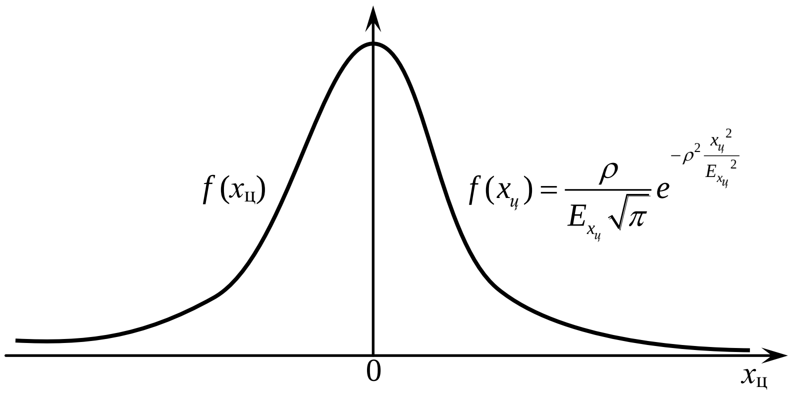

Рисунок 4.18 – Графік щільності розподілу похибок підготовки даних для стрільби (щільність розподілу різних випадкових величин – нормальний закон)

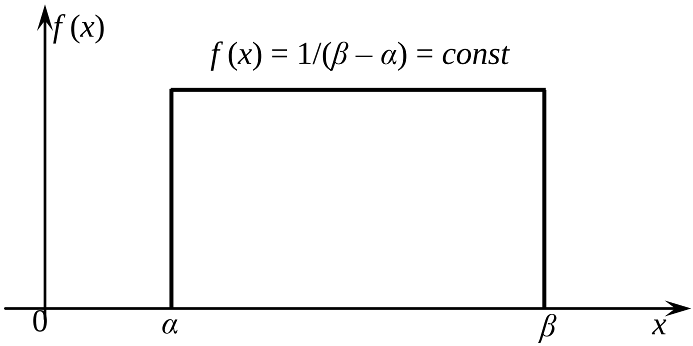

Рисунок 4.19 – Графік щільності розподілу похибок зчитування відліку з приладу – закон рівної ймовірності

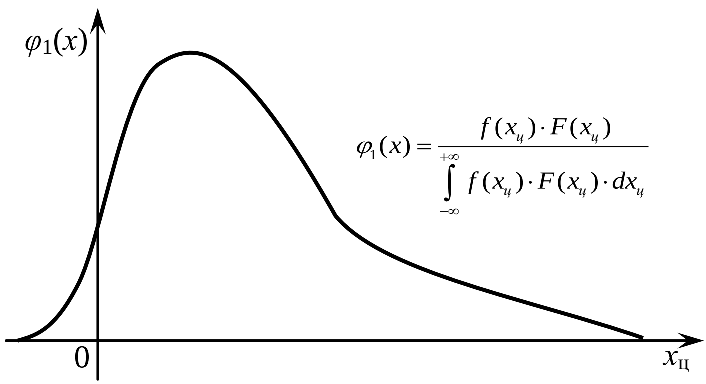

Рисунок 4.20 – Розподіл улучень центру розсіювання снарядів

Рисунок 4.19 ілюструє щільність розподілу похибок зчитування відліку з приладу. Її називають законом **рівної щільності** (рівної ймовірності).

Показані на рис. 4.18 і 4.19 щільності розподілу є симетричними. На практиці доводиться мати справу і з несиметричними щільностями розподілу. Наприклад, розподіл улучень центра розсіювання снарядів після одержання першого спостереження локальності «перельоту» (рис. 4.20) є несиметричним.

Щільність розподілу – одна з форм закону розподілу. На відміну від функції розподілу вона не універсальна й існує лише для безперервних випадкових величин [17].

Відзначимо основні характерні властивості щільності розподілу.

1. Оскільки $F(x)$ – функція неспадна, то $F'(x) \geq 0$ або

$$f(x) \geq 0, \tag{4.4}$$

тобто щільність розподілу є не від'ємною функцією. Із геометричної точки зору це означає, що крива розподілу розміщена вище від осі абсцис.

Інтервал в нескінченних межах від щільності розподілу дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{4.5}$$

Дійсно, ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянку dx (із точністю до нескінченно малих величин вищого порядку)

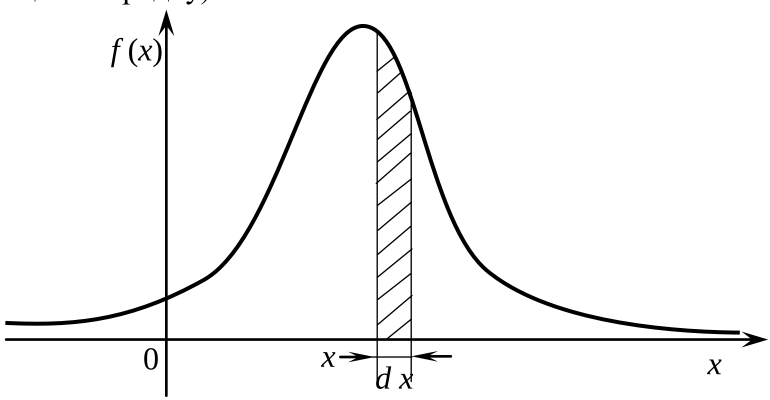

Рисунок 4.21 – Імовірність потрапляння випадкової величини на ділянку dx

дорівнює $f(x)\,dx$ (рис. 4.21). Величину $f(x)\,dx$ називають елементом імовірності, тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = p(-\infty < X < \infty) = F(\infty) - F(-\infty) = 1.$$

4.2.5. Розрахунок імовірностей за допомогою щільності розподілу

Щільність розподілу може бути використана для розрахунку ймовірностей події, що полягає в тому, що випадкова величина набуде одного зі значень певного проміжку. Ця ймовірність дорівнює сумі елементів імовірності на всій ділянці, тобто

$$p\,(x_n < X < x_m) = \int_{x_n}^{x_m} f(x)dx. \tag{4.6}$$

геометрично дорівнює площі *АБВГ* (рис. 4.22), тобто площі, обмеженій кривою розподілу, віссю абсцис і ординат кривої в точках x_n і x_m [18].

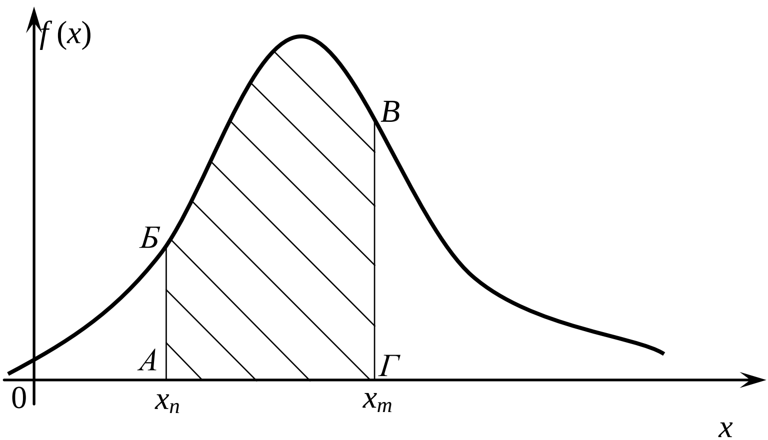

Рисунок 4.22 – Щільність розподілу випадкової величина у певному проміжку *АБВГ*

Встановивши поняття щільності розподілу, ми можемо аналітично подати функцію розподілу для безперервної випадкової величини у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \tag{4.7}$$

а для перервної випадкової величини аналогічна й може бути записана так:

$$F(x) = \Sigma_{xi < x} \cdot p(X = x_i). \tag{4.8}$$

Аналітичні вирази інтегрального і диференціального законів взаємозв’язані один із одним. Дійсно,

$$p(x_n < X < x_m) = \int_{x_n}^{x_m} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_m} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_n} f(x)dx = F(x_m) - F(x_n).$$

Значення $F(x_m)$ $F(x_n)$ і показані на рис. 4.23.

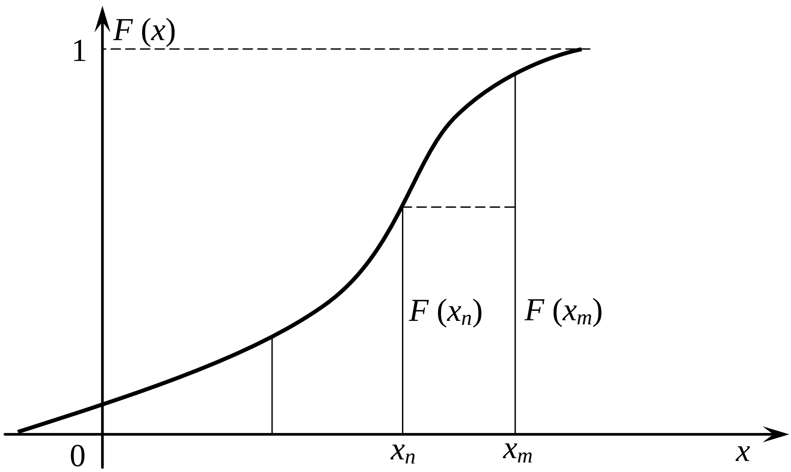

Рисунок 4.23 – Графічне зображення значень $F(x_m)$ та $F(x_n)$

Таким чином, ми бачимо, що ці дві форми закону розподілу взаємно доповнюють одна одну для більш повної характеристики випадкової величини.

4.3. Числові характеристики випадкових величин

У попередніх розділах ми розглянули різні форми розподілу випадкових величин.

Кожен закон розподілу повністю описує випадкову величину з імовірнісної точки зору, але закон розподілу не завжди може бути одержаний, а в окремих випадках і немає необхідності одержувати повну характеристику випадкової величини; достатньо мати її деякі числові характеристики.

Під час вирішення багатьох завдань досить буває зазначити деякі числові параметри, щоб охарактеризувати істотні межі (параметри) розподілу випадкової величини. Так, при вирішенні багатьох практичних завдань використовують характеристики розсіювання снарядів (характеристики розподілу випадкових величин віддалення розривів від центра розсіювання) *Вд, Вб, Врб, Врб* та ін.

У теорії ймовірностей і в теорії стрільби числові характеристики відіграють важливу роль. Найбільш часто при вирішенні різних завдань застосовують такі числові характеристики: математичне сподівання випадкової величини, моду й медіану; дисперсію, середнє квадратичне відхилення й серединне відхилення.

Перші дві групи параметрів характеризують центр групування випадкової величини і є як би характеристиками «становища».

Третя група характеризує різні особливості розподілу випадкових величин.

4.3.1. Математичне сподівання випадкової величини. Мода й медіана

Математичне сподівання випадкової величини – основна характеристика, що визначає центр розсіювання (середнє значення) випадкової величини, біля якого відбувається розкид спостережних значень випадкової величини при повторенні випробувань. Поняття «середнє значення» широко застосовують на практиці, зокрема, на практиці стрільби ми часто користуємося такими величинами, як середня витрата снарядів, середня точка падіння снарядів, середні збитки, що завдаються цілі за цих умов, та інші середні характеристики.

Фізичний зміст математичного сподівання можна показати на прикладі обчислення середньої з досліду або середнього арифметичного з одержаних із досліду значень випадкової величини [22].

Припустимо, що ми здійснюємо n пострілів на одних і тих самих установках. У результаті вимірювання відхилень точок падіння снарядів за дальністю одержали такі результати: m_1 раз – відхилення снарядів дорівнювало x_1, m_2 дорівнює x_2, m_3 дорівнює x_3 і т. д. Якщо нас цікавить відхилення середньої точки падіння снарядів за дальністю, то необхідно обчислити середнє арифметичне з одержаних значень x_i :

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_n \frac{m_n}{n};$$

$m_i / n = r_i$ – частота події $X = x_i$.

Таким чином,

$$\bar{x} = \Sigma_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i / n = \Sigma_{i=1}^{n} x_i r_i, \qquad (4.9)$$

тобто *середнє арифметичне випадкової величини дорівнює сумі добутків, одержаних у результаті досліду окремих значень випадкової величини, на відповідні до них частоти*.

Якщо ми повторимо дослід із n пострілів, то одержимо іншу величину середнього арифметичного, оскільки значення x_i та їх частота r_i є випадковими.

Подібно до того, як частота збігає до ймовірності, так і середнє арифметичне $\bar{x}$ за необмеженого збільшення кількості дослідів n все більш стійкіше буде коливатися біля сталого числа, що визначається виразом

$$\Sigma_{(i)} x_i \cdot p\ (X = x_i).$$

Це число і називають **математичним сподіванням** випадкової величини X і позначають $M[X]$ або m_x [1].

Отже, математичне сподівання випадкової величини є стале число, навколо якого розсіюються (групуються) можливі значення цієї випадкової величини. У розглянутому прикладі математичним сподіванням відхилення розривів за дальністю є видалення центра розсіювання снарядів від початку відліку (вимірювань).

Таким чином, *математичне сподівання дискретної випадкової величини дорівнює сумі добутків всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень:*

$$M[X] = m_x = \sum_{(i)} x_i p_i. \tag{4.10}$$

Для безперервної випадкової величини Y із щільністю розподілу $f(y)$ математичне сподівання визначиться інтегралом:

$$M[Y] = m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y f(y)\, dy. \tag{4.11}$$

Імовірність в досліді виявляється через частоту. Ґрунтуючись на співвідношеннях (4.9) і (4.10), можна сказати, що в досліді математичне сподівання виявляється через середній результат. Таким чином, математичне сподівання випадкової величини є об’єктивною характеристикою розподілу цієї випадкової величини і відображає середнє значення випадкової величини, що припадає на один дослід при повторенні дослідів необмежену кількість разів за однакових умов.

Так, якщо для стрільби за певних умов математичне сподівання збитку (математичне сподівання відсотка уражених елементарних цілей) означає, що якщо в цих умовах буде проводитися безліч подібних стрільб, то середні збитки, що припадають на одну стрільбу, становлять 60 % (у кожній окремі стрільбі величина збитку є випадковою і може становити будь-які значення в деякому інтервалі, наприклад 79, 42, 63, 46, 69, 64, 59 % і т. д.).

За формулою (4.10) легко встановити, що математичне сподівання – число іменоване і має розмірність випадкової величини (кількість влучень, кількість снарядів, кількість виведених з ладу цілей, метри, кілограми, градуси, метри в секунду і т. д.). Математичне сподівання випадкової величини може бути числом цілим або дробовим, позитивним або негативним. В окремому випадку, якщо розподіл випадкової величини симетричний початку відліку, математичне сподівання такої випадкової величини дорівнює нулю.

Приклад 5. Імовірність влучення з одного пострілу $p = 0{,}25$ і від пострілу до пострілу не змінюється. Визначимо математичне сподівання кількості влучень з двох пострілів.

Р о з в' я з а н н я. 1. Складемо ряд розподілу випадкової величини X – кількості влучень з двох пострілів:

а) можливі значення випадкової величини X:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2;$$

б) імовірності можливих значень кількості влучень обчислимо за біноміальним розподілом:

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2,$$
$$p_1 = p\,[X = x_1 = 0] = q^2 = 9/16,$$
$$p_2 = p\,[X = x_2 = 1] = 2pq = 6/16,$$
$$p_3 = p\,[X = x_3 = 0] = p^2 = 1/16.$$

Р о з в' я з а н н я. 2. Математичне сподівання кількості влучень обчислюємо за формулою (4.10):

$M\,[X] = \Sigma^3_{i\,=\,1}\, x_i\, p_i = 0 \cdot 9/16 + 1 \cdot 6/16 + 2 \cdot 1/16 = 8/16 =$ $= 1/2$ влучень.

Ця відповідь показує, що при проведенні стрільб за цих умов у середньому на два снаряди припадає 0,5 влучення. Якщо ми хочемо в середньому мати одне влучення, то повинні збільшити витрати в два рази, тобто в кожній стрільбі випускати чотири снаряди. Підтвердимо це прикладом 6.

Приклад 6. В умовах попереднього прикладу 5 визначимо математичне сподівання кількості влучень з чотирьох пострілів.

Р о з в' я з а н н я. 1. Ряд розподілу випадкової величини X – кількість влучень з чотирьох пострілів – становить: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, а ймовірності цих значень обчислимо за формулою ймовірності комбінації:

$$\Sigma_{(i)} x_i \cdot p\ (X = x_i),$$

$$p_{m,n} = (S!\ /\ m!n!) \cdot p^m q^n,$$

$p_1 = p_{0,4} = (3/4)^4 = 81/256 = 0{,}3164,$

$p_2 = p_{1,3} = 4\cdot 1/4\cdot(3/4)^3 = 108/256 = 0{,}4219,$

$p_3 = p_{2,2} = 6\cdot(1/4)^2\cdot(3/4)^2 = 54/256 = 0{,}2109,$

$p_4 = p_{3,1} = 4\cdot(1/4)^3\cdot(3/4) = 12/256 = 0{,}0469,$

$p_5 = p_{4,0} = (1/4)^4 = 1/256 = 0{,}0039,$

2. Математичне сподівання кількості влучень буде

$$M\,[X] = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 1/256\cdot(0\cdot 81 + 1\cdot 108 + 2\cdot 54 + 3\cdot 12 + 4\cdot 1) =$$

$$= 1/256 \cdot 256 = 1 \text{ влучення.}$$

Із практичної точки зору цікаве розв'язання задачі при математичному сподіванні появи події за одного випробування.

Припустимо, що в результаті випробування може виникнути одна з двох протилежних подій: подія A (наприклад, потрапляння) і подія $\bar{A}$ (наприклад, промах).*

Введемо позначення: X – випадкова величина кількості влучень; вона може набувати двох значень: $x_1 = 1$, (відображає подію A – влучення) і $x_2 = 0$ (відображає подію $\bar{A}$ – промах):

$$p\ (A) = p\ (x_1) = p, \quad p\ (A) = p\ (x_2) = 1 - p.$$

Тоді згідно з визначенням математичне сподівання випадкової величини (кількості влучень) буде

$$M\,[X] = x_1 p + x_2\,(1 - p) = 1\cdot p + 0\,(1 - p) = p.$$

* Випадкову величину, що відображає протилежні події і може набувати лише двох значень (1 і 0), називають характеристичною випадковою величиною.

Таким чином, математичне сподівання появи події за одного досліду чисельно дорівнює одній ймовірності події.

Цю властивість математичного сподівання широко застосовують в теорії стрільби. Воно показує, що з одного пострілу математичне сподівання кількості влучень чисельно дорівнює одній ймовірності влучень.

Підкреслимо, що це лише чисельна рівність, оскільки математичне сподівання – величина іменована, а ймовірність – величина безрозмірна.

Крім математичного сподівання, на практиці застосовують й інші характеристики положення, зокрема, моду й медіану випадкової величини.

Модою *випадкової величини Мо називають її найімовірніше значення.* Для безперервної випадкової величини моду визначають абсцисою найвищої точки багатокутника розподілу (рис. 4.24) [16, 18, 21].

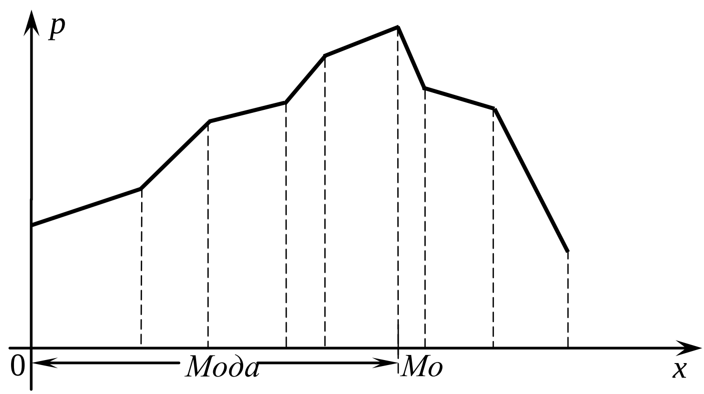

Рисунок. 4.24 – Мода випадкової величини

Для безперервної випадкової величини із щільністю розподілу $f(x)$ модою називають випадкове значення величини, щільність імовірності для якої має найбільше значення, тобто максимум кривої розподілу (рис. 4.25).

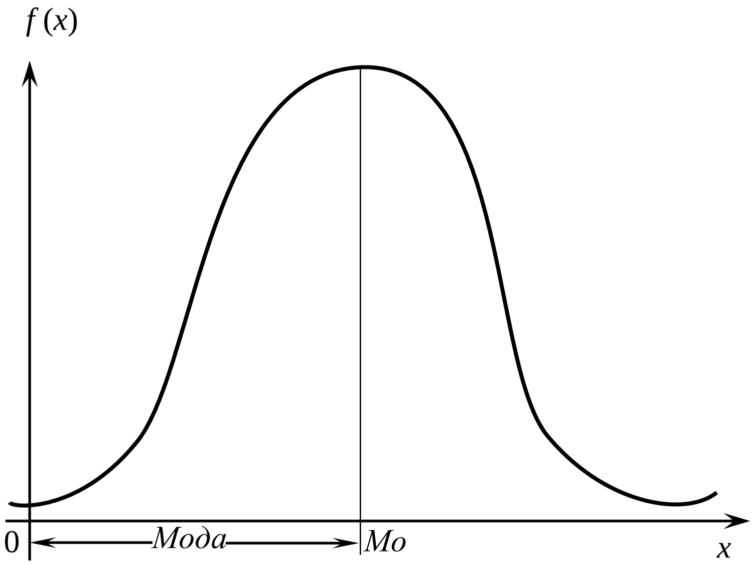

Рисунок 4.25 – Мода для безперервної випадкової величини – максимум кривої розподілу

Якщо багатокутник або крива розподілу (рис. 4.26) має більше від одного максимуму, розподіл називають **полімодальним**. Крім того, трапляється розподіл, що не має максимуму і, таким чином, не має моди (рис. 4.27), то такий розподіл називають **антимодальним** [24].

Недолік моди як характеристики положення випадкової величини полягає в тому, що нею можна характеризувати центр групування не всякої випадкової величини.

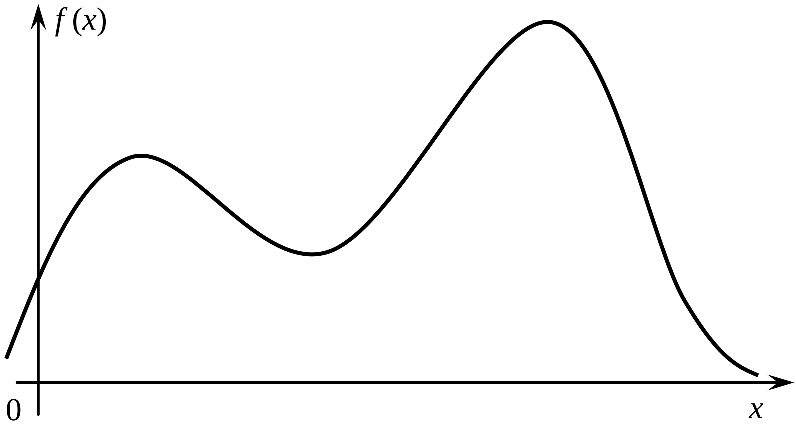

Рисунок 4.26 – Полімодальний розподіл

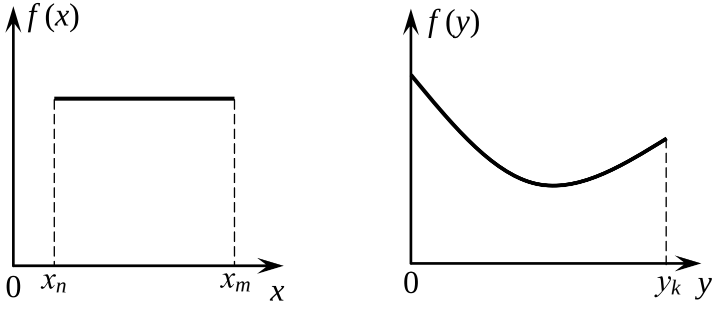

Рисунок 4.27 – Антимодальний розподіл (розподіл випадкової величини, що не має максимуму і не має моди)

Медіаною *випадкової величини називають таке її значення Me, для якого справедлива рівність* [24]

$$p\,(X < Me) = p\,(X > Me).$$

Геометрична медіана являє собою абсцису точки, ділить площу, обмежену кривою розподілу, навпіл (рис. 4.28). Зауважимо, що за симетричного модального розподілу математичне сподівання, мода й медіана збігаються (рис. 4.29).

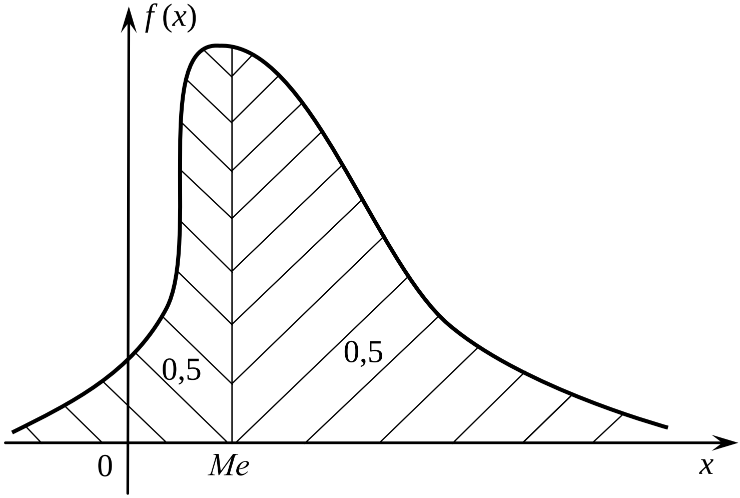

Рисунок 4.28 – Геометрична медіана випадкової величини

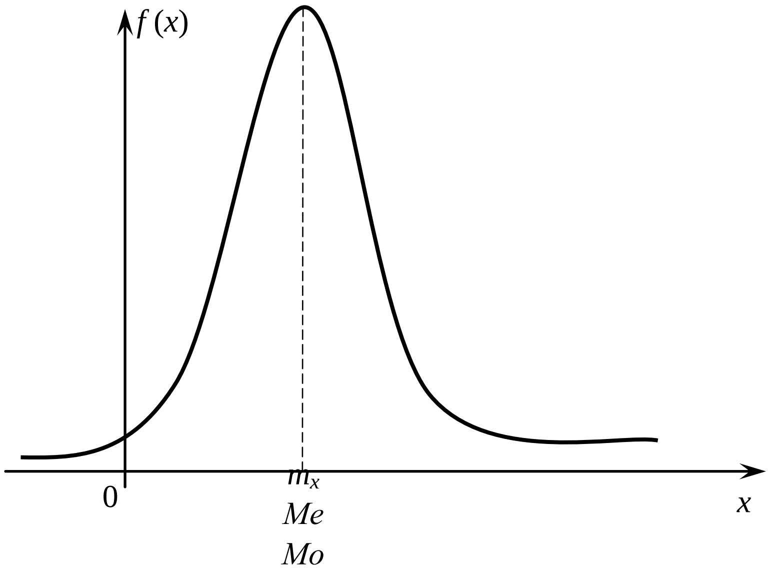

Рисунок 4.29 – Геометрична медіана (симетричний модальний розподіл математичного сподівання)

4.3.2. Поняття про моменти

Математичне сподівання відображає середнє значення випадкової величини і не відображає інших сторін розподілу. У ряді завдань зовсім недостатньо знати лише положення центра розподілу випадкової величини. Наприклад, якщо під час стрільби з двох гармат різних зразків будуть одержані однакові дальності до центрів розривів, то ще не можна сказати, який зі зразків знарядь має кращі балістичні якості. Необхідно за місцем розміщення точок падіння снарядів визначити характер розкиду розривів щодо центра. І той зразок гармати, в якого розсіювання точок падіння відбувається в менших межах, має кращі балістичні якості, оскільки можливі значення випадкової величини (похибки розсіювання) групуються у більш купчастому вигляді біля центра розсіювання снарядів.

Характеристикою розсіювання снарядів, наприклад, за дальністю є серединне відхилення *Вд*. Далі ми покажемо, що цю характеристику розподілу випадкової величини відхилення розриву від центра розсіювання за дальністю знаходять через другий центральний момент.

Таким чином, моменти є характеристиками, що відображають ту чи іншу властивість розподілу випадкових величин. Метод моментів увів у теорію ймовірностей великий російський математик П. Л. Чебишев (1821–1894).

Моменти поділяють на початкові, центральні та абсолютні. З них найбільш часто застосовують перші два види моментів [33].

4.3.3. Початкові моменти

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го ступеня цієї величини, тобто

$$a_k = M(X^k). \tag{4.12}$$

Для перервних випадкових величин

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i . \tag{4.13}$$

Для безперервних випадкових величин

$$a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx . \tag{4.14}$$

Початковий момент першого порядку

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = M(X),$$

тобто початковий момент першого порядку являє собою математичне сподівання випадкової величини [34].

Початковий момент другого порядку

$$a_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx ,$$

і т. д.

Початкові моменти другого порядку і вище, будучи математичним сподіванням вищих ступенів X, посилюють у цій характеристиці роль малоймовірних значень випадкової величини X порівняно з математичним сподіванням.

4.3.4. Центральні моменти

Для зручності введемо позначення математичного сподівання випадкової величини X через m_x. Тоді вираз $X - m_x$ є відхиленням випадкової величини від її математичного сподівання. Ця різниця є величиною випадковою; її називають **центрованою випадковою величиною** і позначають через $\dot{X}$. Уведення поняття центрованої випадкової величини рівносильне перенесенню початку відліку в точку математичного сподівання (рис. 4.30). Таким чином, закон розподілу центрованої випадкової величини встановлює розподіл випадкової величини відносно свого математичного сподівання [16, 18].

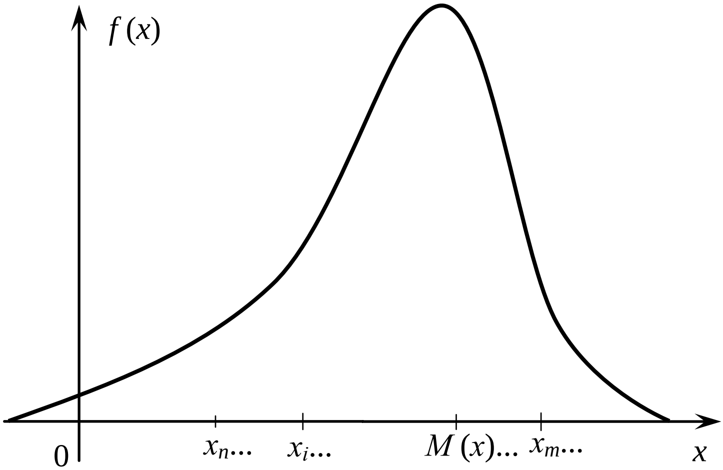

Рисунок 4.30 – Графічне зображення центрованої випадкової величини

Для безперервних випадкових величин

$$\mu_k(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^k \, f(y) dy. \qquad (4.15)$$

Центральні моменти – характеристики закону розподілу центрованої випадкової величини. З різних боків вони характеризують «розкид» (відхилення) випадкової величини навколо математичного сподівання. Центральні моменти є моментами центрованої випадкової величини [1].

Таким чином, центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання k-го ступеня відповідної центрованої випадкової величини; іншими словами, це є не що інше, як математичне сподівання k-го ступеня відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$\mu_k = M(\dot{X}^k) = M[(X - m_x)^k]. \qquad (4.16)$$

Для перервних випадкових величин

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i \,. \qquad (4.17)$$

Використовуючи наведені формули, можна скласти вирази, що дозволяють розрахувати центральні моменти різного порядку.

Центральний момент нульового порядку

$$\mu_0(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Перший центральний момент для будь-якої випадкової величини як математичне сподівання центрованої випадкової величини дорівнює нулю.

Нульовий та перший центральні моменти для всіх розподілів дорівнюють відповідно 1 і 0, і тому не можуть бути характеристиками розподілу. Для характеристик розподілу використовують центральні моменти 2; 3 і 4-го порядків.

Другий центральний момент

$$\mu_2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx$$

називають **дисперсією*** випадкової величини. Центральний момент другого порядку, як і початковий момент першого порядку (математичне сподівання), – дуже важлива й найбільш часто застосовувана характеристика випадкової величини, зважаючи на важливість якої далі розглянемо її окремо [16].

Третій центральний момент

$$\mu_3(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^3 - 3x^2 m_x + 3x m_x^2 - m_x^3) f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx - 3m_x \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx + 3m_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx - m_x^3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$= M(X^3) - 3m_x M(X^3) + 3m_x^3 - m_x^3 = M(X^3) - 3m_x M(X^3) + 2m_x^3.$$

Аналогічно можуть бути одержані вирази і для моментів вищих порядків.

Третій центральний момент використовують для характеристики асиметрії, «скошеності» розподілу. Якщо розподіл симетричний щодо математичного сподівання, то всі моди непарного порядку дорівнюють нулю [18]

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k f(x)dx.$$

Інтеграл дорівнює нулю за непарного як інтеграл у симетричних межах від непарної функції:

$$S_k = \mu_3/\sigma_3, \tag{4.18}$$

де σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини*.

Сума $\mu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^k p_i$ за непарного k також дорівнює нулю, оскільки за симетричного розподілу кожному позитивному доданку відповідає рівний за абсолютною величиною негативний доданок.

Таким чином, якщо центральні моменти непарного порядку відмінні від нуля, то це свідчить про те, що розподіл асиметричний. Найпростіший із центральних моментів непарного порядку – центральний момент третього порядку; він застосовується для характеристики асиметрії.

Як характеристику використовують «коефіцієнт асиметрії».

За $S_k > 0$ розподіл має «позитивну асиметрію» (рис. 4.31).

---

*Слово «дисперсія» в перекладі означає «розсіювання».

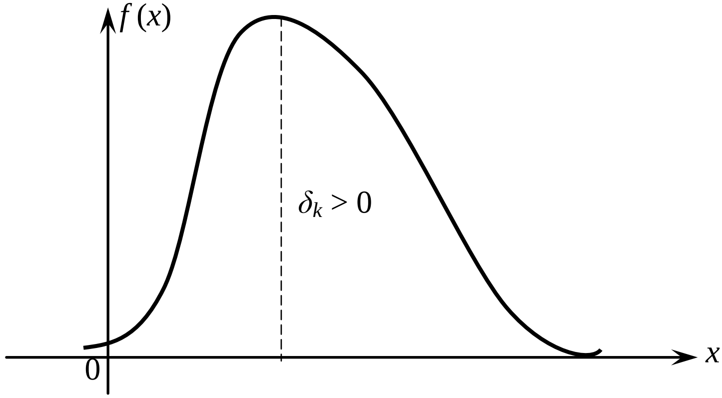

Рисунок 4.31 – Центральний момент третього порядку за $\delta_k > 0$

За $S_k < 0$ розподіл має «негативну асиметрію» (рис. 4.32). Центральний момент четвертого порядку $\mu_4(X)$ використовують для характеристики крутості розподілу. Коефіцієнт, що характеризує крутість розподілу, називають «ексцесом» і визначають за такою формулою [35]:

$$E_x = \mu_4/\sigma_4 - 3. \tag{4.19}$$

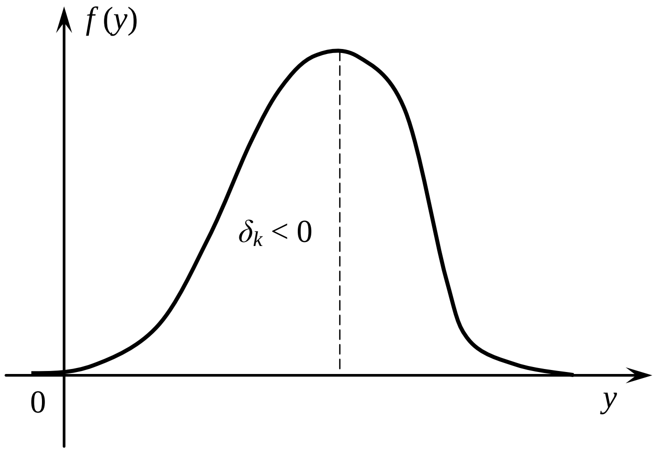

Рисунок 4.32 – Центральний момент четвертого порядку за $\delta_k < 0$

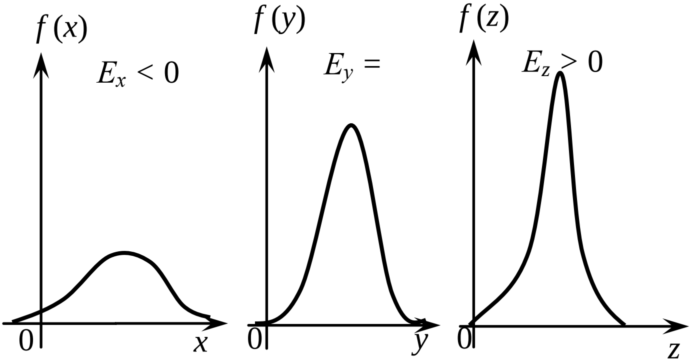

Рисунок 4.33 – Функція розподілу за $E_x < 0$, $E_y = 0$, $E_z > 0$

Для так званого «нормального» розподілу $\mu_4/\sigma_4 = 3$, отже, $E_x = 0$.

Більш гостровершинні, ніж нормальна, криві мають додатний ексцес; більш плосковершинний – від’ємний ексцес (рис. 4.33).

4.3.5. Дисперсія. Середнє квадратичне відхилення

Як зазначалося, дисперсією називають **другий центральний момент**. Дисперсія випадкової величини X позначають $D\,(X)$, або D_x [18].

Згідно з визначенням

$$D\,(X) = M\,[(X - m_x)^2]. \tag{4.20}$$

На практиці для розрахунку дисперсії часто застосовують дещо іншу формулу через початкові моменти. Вона є перетворенням виразу (4.20):

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2m_x x + m_x^2) f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2m_x \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + m_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= M(X^2) - 2m_x m_x + m_x^2 = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$D_x = M[X^2] - [M(X)]^2 = M_2 - M_1^2. \qquad (4.21)$$

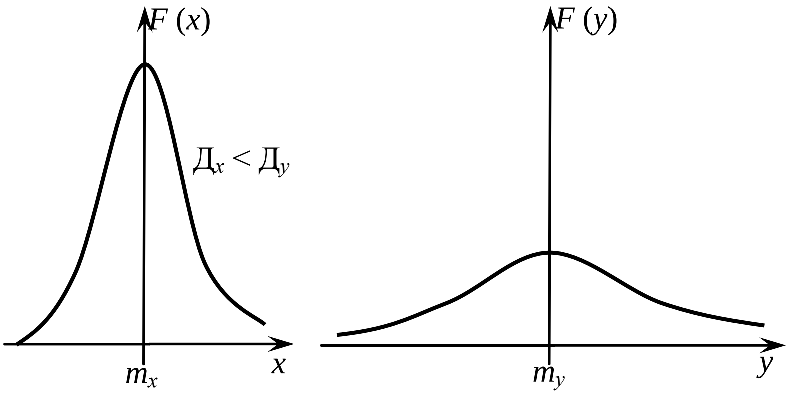

Рисунок 4.34 – Дисперсія випадкової величини

Дисперсія випадкової величини є характеристикою розсіювання значень випадкової величини, близької до її математичного сподівання (рис. 4.34) [33].

Як бачимо з формули (4.20), дисперсія – величина позитивна й має розмірність квадрата розмірності випадкової величини. Для більшої наочності доцільно, щоб характеристика розсіювання мала таку саму розмірність, що й випадкова величина. Для цього розсіювання випадкової величини стосовно свого математичного сподівання характеризують середнім квадратичним відхиленням (або «стандартом»), величина якого дорівнює кореню квадратному з дисперсії:

$$\sigma(x) = \sigma_x = \sqrt{D_x}\ . \qquad (4.22)$$

Числові характеристики «дисперсія» і «середнє квадратичне відхилення» широко застосовують у теорії ймовірностей як характеристики розподілу випадкових величин [34].

Середнє квадратичне відхилення має одну властивість, яка увійшла в теорію ймовірностей назвою «правило трьох сигм». Це правило свідчить про те, що з імовірністю, близькою до одиниці, для будь-якого розподілу максимальне видалення випадкової величини від свого математичного сподівання не перевищує 3σ.

4.3.6. Завдання з визначення середньої витрати снарядів під час ураження спостережної цілі

Припустимо, що ведеться стрільба по цілі, що спостерігається до першого влучення. Умови стрільби такі, що ймовірність влучення в ціль за одного пострілу дорівнює p і від пострілу до пострілу не змінюється.

Поставимо завдання – знайти математичне сподівання й дисперсію витрати снарядів.

Математичне сподівання витрати снарядів знайдемо за формулою (4.10), яка в цьому разі набере вигляду

$$m_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Складаємо ряд розподілу випадкової величини витрати снарядів X, яка може набути таких значень: 1, 2, 3, …, i, …

x_i	1	2	3	...	i	...
$p_i = p\,(X{=}x_i)$	p	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2 p$	...	$(1-p)^{i-1} p$	...

Розраховуємо математичне сподівання витрати снарядів:

$$m_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1\cdot p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2 p + \ldots + i(1-p)^{i-1} p + \ldots =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots + iq^{i-1} \ldots).$$

Розглянемо суму геометричної прогресії

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^i + ... = 1/1 – q.$$

Диференціюючи ліву і праву частини цієї рівності по q, одержимо

$$1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + ... = 1/(1 – q)^2. \qquad (4.23)$$

Таким чином, величина математичного сподівання витрати снарядів до першого влучення

$$m_x = p\cdot[1/(1 – \mathrm{q})^2] = p\cdot 1/p^2 = 1/p. \qquad (4.24)$$

Для знаходження дисперсії витрати снарядів скористаємося формулою (4.21):

$$D_x = M\,[X^2] – M^2(X).$$

Знайдемо другий початковий момент:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i = 1^2 p + 2^2 pq + 3^2 pq^2 + ... + i^2 pq^{i-1} + ... =$$

$$= p\ (1 + 2^2q + 3^2q^2 + ...\ i^2q^{\mathrm{i}-1} + ...). \qquad (4.25)$$

Для обчислення ряду, що стоїть у дужках, обидві частини рівності (4.23) помножимо на q:

$$q + 2q^2 + 3q^3 + 4q^4 + ... = q/(1 – q)^2,$$

і продиференціюємо за q:

$$1 + 2^2 q + 3^2 q^2 + 4^2 q^3 + ... = \frac{d}{dq}\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right] = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Підставляючи одержане значення у формулу (4.25), отримаємо

$$M(X^2) = p\cdot(1+q)/(1–q)^3 = (1–q)\cdot(1+q)/(1–q)^3 = (1+q)/$$
$$/(1–q)^2 = (1+p)/p^2.$$

Тоді дисперсія витрати снарядів дорівнюватиме

$$D_x = (1+q)/p^2 – 1/p^2 = q/p^2 = (1–p)/p^2. \qquad (4.26)$$

Приклад 7. Імовірність влучення в бліндаж за одного пострілу p = 0,05. Стрільбу ведуть до одержання влучення.

Визначити середню витрату снарядів на одну стрільбу, а також максимально можливу витрату снарядів.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Середня витрата снарядів згідно з формулою

$N = 1/p = 1/0{,}05 = 20$ снарядів.

2. Для визначення максимально можливої витрати снарядів скористаємося правилом «трьох сигм». При цьому середнє квадратичне відхилення витрати снарядів згідно з формулою (4.26):

$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{q}$ / p = 1 – 0,05 / 0,05 = 19 ≈ 20 снарядів.

Отже, $3\sigma = 60$ снарядів.

Таким чином, реальна витрата снарядів в окремих стрільбах не перевищить 20 + 60 = 80 снарядів.

Висновки до розділу 4

Таким чином, під час розгляду випадкового явища з позицій визначення кількісної величини відхилення точки падіння снаряда від цілі, виникає необхідність розглядати випадкові величини, а вони можуть бути дискретні та безперервні, а також необхідність введення поняття закону розподілу випадкової величини. Цей закон дозволяє використовувати випадкові величини не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці у визначенні точності попадання артилерійським снарядом у будь-яку ціль під час вогневого ураження противника.

У цьому розділі введене поняття закону розподілу випадкової величини, поданий ряд розподілу та багатокутник розподілу; наведені формули і визначення функції розподілу та щільності розподілу безперервних випадкових величин, числові характеристики випадкових величин, поняття про моменти, про математичне сподівання випадкової величини, про моду та медіану, про початкові центральні моменти; описані дисперсія та середнє квадратичне відхилення; наведені визначення, формули та графічне зображення дисперсії та середнього квадратичного відхилення, поняття про розсіювання й середню витрату снарядів та ураження спостережної цілі, а також використання цих даних в артилерійській науці.

Також у розділі наведені приклади до матеріалу розділу та варіанти їх розв’язання, надані графічні зображення основних понять.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Випадкова величина, закон розподілу випадкової величини, ряд розподілу, багатокутник розподілу, функція розподілу, щільність розподілу, ряд розподілу, багатокутник розподілу безперервних і перервних випадкових величин, числові характеристики випадкових величин, поняття про моменти, математичне сподівання випадкової величини, мода й медіана, початкові моменти, центральні моменти, випадковість, частота влучення, заданий інтервал, межі можливих значень випадкової величини, теорія стрільби, характеристика розсіювання снарядів, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, середня витрата снарядів, ураження спостережної цілі.

Питання для повторення та самоконтролю

1. Надати визначення випадкової величини.

2. У чому полягає закон розподілу випадкової величини?

3. Що таке ряд розподілу випадкової величини?

4. Що таке багатокутник розподілу випадкової величини?

5. Надати визначення та навести формулу функції розподілу випадкової величини.

6. Надати визначення та навести формулу щільності розподілу безперервних випадкових величин.

7. Що включають числові характеристики випадкових величин (перелічити, навести формули)?

8. Які бувають моменти? Надати їх визначення.

9. У чому полягає розсіювання снарядів?

10. Надати визначення, графічне зображення та навести формулу дисперсії.

11. Надати визначення, графічне зображення та навести формулу середнього квадратичного відхилення.

Завдання для самопідготовки

1. Графічно зобразити та скласти ряд розподілу і побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X – кількість влучень за одного пострілу, якщо за двох пострілів спостерігається два влучення.

2. Визначити математичне сподівання кількості влучень за трьох пострілів, якщо ймовірність влучення за одного пострілу p = 0,25 і від пострілу до пострілу не змінюється.

3. Знайти (вивести формулу математичного сподівання й дисперсії витрати снарядів за таких умов стрільби, що ймовірність влучення у ціль за одного пострілу дорівнює p і від пострілу до пострілу не змінюється.

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Історія виникнення теорії ймовірностей та її застосування в сучасних умовах.

2. Застосування дисперсії і середнього квадратичного відхилення в артилерії.

3. Вплив числових характеристик розподілу випадкової величини на точність ураження артилерією об’єктів, цілей противника.

4. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

Розділ 5

НОРМАЛЬНИЙ ЗАКОН РОЗПОДІЛУ

5.1. Щільність розподілу. Числові характеристики нормального розподілу

Нормальний закон розподілу випадкових величин, який іноді називають законом Гауса, трапляється найчастіше. Серед інших видів він займає особливе положення, оскільки є граничним законом, до якого за дуже частих на практиці умов наближаються інші закони розподілу.

У 1900 р. математик А. М. Ляпунов довів центральну граничну теорему теорії ймовірностей, за якою визначаються умови необмеженого наближення розподілу випадкової величини до нормального закону. Сенс цієї теореми зводиться до такого. Якщо на формування приватних значень випадкової величини впливає дуже велика кількість незалежних джерел, дія кожного з яких мала порівняно з сумарною дією, то закон розподілу випадкової величини близький до нормального. Іншими словами, сума досить великої кількості незалежних (або слабозалежних) випадкових величин, підпорядкованих яким завгодно законам розподілу, наближено підпорядковується нормальному закону. Наближення тим точніше, чим більша кількість випадкових величин підсумовується [23].

У практиці стрільби більшість випадкових величин підпорядковується нормальному закону. Так, відхилення точки падіння снаряда від деякого середнього положення центра розсіювання – випадкова величина, що змінюється від пострілу до пострілу й залежить від багатьох причин, що діють незалежно один від одного, зокрема:

– від різноманітності у вазі снарядів;

– від різноманітності у вазі зарядів;

– від різноманітності форми снарядів;

– від випадкових коливань довжини зарядної камори;

– від випадкових помилок наведення;

– від випадкових змін атмосферних умов і т. д.

Усі ці джерела впливають на величину відхилення снаряда таким чином, що кожне джерело викликає невелике, елементарне відхилення снаряда. Сумарне випадкове відхилення снаряда складається з великої кількості цих незалежних елементарних відхилень. Ґрунтуючись на цьому, можна зробити висновок, що розсіювання снарядів підпорядковується нормальному закону.

Іншим прикладом можуть бути похибки підготовки вихідних даних. Ці похибки є результатом суми дуже великої кількості порівняно малих доданків, кожне з яких пов'язане з дією окремої незначної причини, що не залежить від інших [37].

Нормальним законом розподілу називають розподіл, щільність імовірності якого має вигляд

$$f(x) = 1/\sigma_x\sqrt{2\pi}\cdot e^{(x-m_x)^2/2\sigma_x^2}, \tag{5.1}$$

де m_x – математичне сподівання випадкової величини;

σ_x – середнє відхилення випадкової величини.

Крива розподілу нормального закону має симетричний хвилястий вигляд (рис. 5.1).

Фізичний зміст числових параметрів m_x і σ_x, що вхо дять до виразу щільності нормального закону, можна усвідомити обчисливши $M\,[X]$ і D_x.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx.$$

Замінимо змінні:

$$x - m_x/\sigma_x\sqrt{2} = t; \quad dx = \sigma_x\sqrt{2}\,dt,$$

тоді

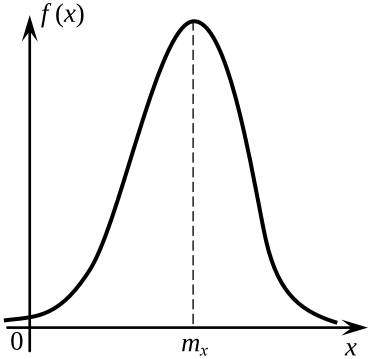

Рисунок 5.1 – Крива розподілу нормального закону

$$MX = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_x \sqrt{2}t + m_x) e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\sigma_x \sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m_x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{m_x}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = m_x.$$

Отже, параметр m_x є не що інше, як математичне сподівання випадкової величини.

Обчислимо дисперсію величини X:

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 e^{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Замінимо змінну

$$x - m_x/\sigma_x \sqrt{2} = t, \quad dx = \sigma_x \sqrt{2}\, dt,$$

тоді

$$D_x = \frac{2\sigma_x^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Проінтегруємо за частинами:

$$D_x = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t 2t e^{-t^2} dt,$$

$$u = t \mid du = dt,$$
$$dv = 2te^{-t2} dt \mid v = -e^{-t2},$$

$$D_x = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left| -te^{-t^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right\} = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\pi} = \sigma_x^2 .$$

Отже, параметр σ_x є середнім квадратичним відхиленням величини X.

Якщо перенести початок відліку в точку математичного сподівання, то вираз щільності ймовірності нормального закону буде мати вигляд

$$f(\overset{\circ}{x}) = 1/\sigma_x\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(\overset{\circ}{x}{}^2/2\sigma_x^2)}, \qquad (5.2)$$

де $\overset{\circ}{x}$ – центрована випадкова величина, значення якої можуть бути як позитивними, так і негативними.

Зазвичай у виразі щільності пишуть без кружечка. Сам вигляд щільності

$$f(x) = 1/\sigma_x\sqrt{2\pi} \cdot e^{-(x^2/2\sigma_x^2)}$$

свідчить про те, що в цьому разі ми маємо справу з центрованою випадковою величиною.

Відзначимо основні властивості нормального закону розподілу випадкової величини.

1. Найбільше значення щільності ймовірності відповідає значенню випадкової величини, що дорівнює математичному сподіванню. При $x = m_x$ ($x = 0$)

$$f(x) = f_{\max}(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}.$$

2. Щільності ймовірностей, які відповідають відхиленню випадкової величини від математичного сподівання, що дорівнює за величиною, але протилежне за знаком, однакові між собою.

Це відображає властивість симетричності нормального закону щодо точки – математичного сподівання випадкової величини. Практично це означає, що за досить великої кількості випробувань (вимірювань, пострілів і т. п.) відхилення випадкової величини, однакові за величиною, але протилежні за знаком, щодо свого математичного сподівання будуть траплятися однаково часто.

3. Чим менше відхилення значення випадкової величини від математичного сподівання, тим більше відповідне значення щільності ймовірності.

Це означає, що малі за абсолютною величиною відхилення трапляються частіше, ніж великі.

4. У міру віддалення від m_x (рис. 5.1) щільність розподілу спадає і за $x \to \pm\infty$ крива асимптотично наближається до осі абсцис.

Ґрунтуючись на другій властивості, можна зробити висновок, що нормальний розподіл симетричний щодо свого математичного сподівання. Якщо змінювати лише математичне сподівання (m_1, m_2, m_3, ...; $\sigma_x = const$), крива розподілу буде зміщуватися вздовж осі абсцис (рис. 5.2). Математичне сподівання як центр розсіювання можливих значень випадкової величини характеризує стан розподілу на осі абсцис. Розмірність математичного сподівання така сама, що й розмірність випадкової величини.

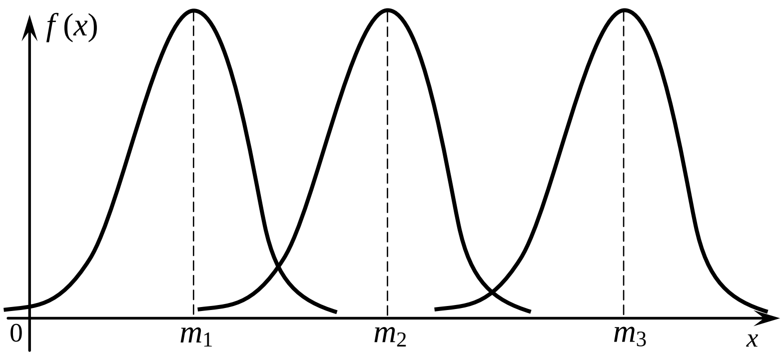

Рисунок 5.2 – Нормальний розподіл симетричний щодо свого математичного сподівання

Із симетричності розподілу випливає, що в нормальному законі математичне сподівання, мода й медіана збігаються:

$$M[X] = Mo = Me.$$

Середнє квадратичне відхилення відображає характер розсіювання значень випадкової величини навколо математичного сподівання й характеризує форму кривої розподілу. Найбільша ордината кривої розподілу обернено пропорційна $\sigma_x[f_{\max}(x) = 1/\sigma_x \cdot \sqrt{2\pi}\,]$; при збільшенні σ_x максимальна ордината зменшується (рис. 5.3), на якому $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Оскільки площа, обмежена кривою розподілу, завжди залишається дорівнює одиниці, то зі збільшенням σ_x крива розподілу стає більш плоскою, розтягуючись уздовж осі абсцис. Розмірність середнього квадратичного відхилення збігається з розмірністю випадкової величини [33].

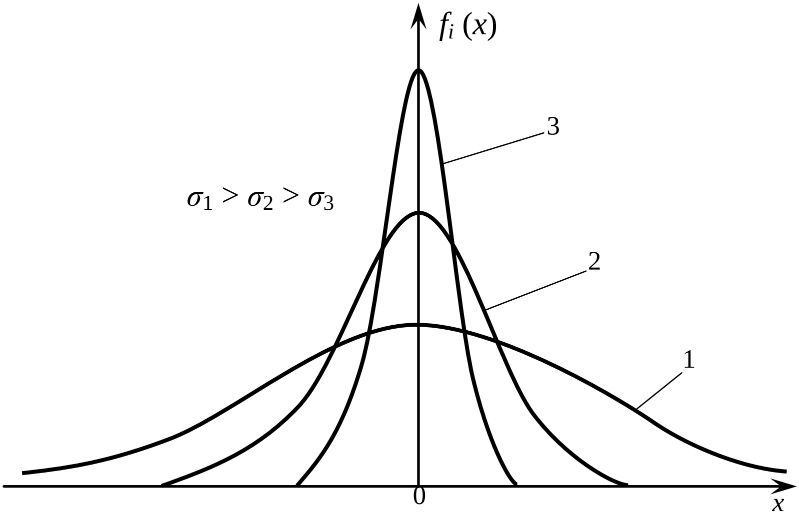

Рисунок 5.3 – Середнє квадратичне відхилення за $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Як характеристику нормального розподілу, крім середнього квадратичного відхилення, використовують ще й серединне відхилення.

Розглянемо графічне зображення нормального розподілу. Вся площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці. Внаслідок симетричності розподілу ордината, що відповідає $x = m_x$, ділить всю площу навпіл. Виберемо таку величину по осі абсцис, щоб ординати, що відповідають цим значенням, ділили кожну половинку площі навпіл. Одержимо чотири інтервали, ймовірності появи значень випадкової величини, в яких будуть однакові й дорівнюватимуть 0,25 (рис. 5.4).

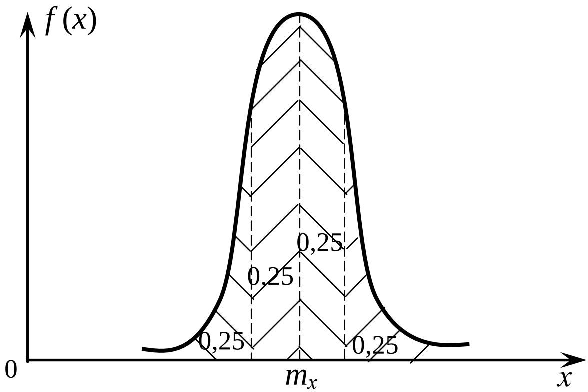

Рисунок 5.4 – Графічне зображення нормального розподілу

Відзначимо характерну особливість обраної по осі абсцис величини E_x (рис. 5.5): ймовірності одержання відхилень випадкової величини від математичного сподівання за абсолютною величиною більших або менших E_x однакові між собою і дорівнюють 0,5, тобто обрана величина займає ніби середнє значення. Тому її й називають **серединним відхиленням** [34].

Таким чином, серединним відхиленням називають половину довжини ділянки, симетричної відносно центра розсіювання, ймовірність потрапляння випадкової величини в якій дорівнює половині, тобто

$$p\ (|X - m_x| > E_x) = p\ (|X - m_x| < E_x) = 0{,}5.$$

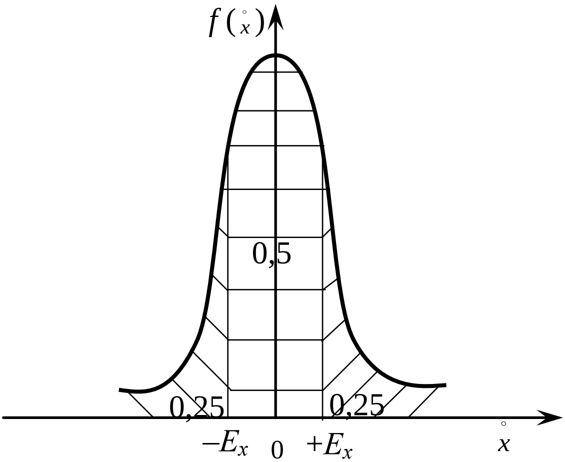

Рисунок 5.5 – Половина довжини ділянки, симетричного відносно центра розсіювання

Щільність імовірності нормального закону, виражена через серединне відхилення, має такий вигляд [36]:

$$f(x) = \rho / E_x \sqrt{\pi} \cdot e^{-\rho^2 (x-m_x)^2 / E_x^2}, \qquad (5.3)$$

де $\rho = 0{,}47694$.

Так, щільність розсіювання снарядів за дальністю щодо центра розсіювання ($m_x = 0$)

$$f(x_p) = \rho / B\partial \sqrt{\pi} \cdot e^{-\rho^2 x_p^2 / B\partial^2}, \qquad (5.4)$$

де $B\partial$ – серединне відхилення снарядів за дальністю.

Порівнюючи вирази щільності ймовірності для нормального розподілу через середнє квадратичне відхилення [формула (5.1)] і серединне відхилення [формула (5.3)], можна встановити співвідношення між σ_x і E_x :

$$1/\sigma_x \sqrt{2} = \rho / E_x,$$

або

$$E_x = \rho \sqrt{2}\, \sigma_x \approx 0{,}674 \sigma_x. \qquad (5.5)$$

У справедливості встановленого співвідношення можна переконатися, розрахувавши ймовірність улучення випадкової величини в інтервал $m_x - E_x$; $(m_x + E_x)$:

$$p(m_x - E_x < X < m_x + E_x) = p\left(\left|\overset{\circ}{X}\right| < E_x\right) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-E_x}^{E_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}dx =$$

$$= \frac{2}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_0^{E_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}dx = \frac{2}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_0^{0,674\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}dx.$$

Значення цієї ймовірності може бути визначене за допомогою табличної функції $\Phi(B)$ (табл. А.1). З таблиці знаходимо, що $\Phi(B = 0,674) = 0,5$. Це і підтверджує правильність співвідношення (5.5).

5.2. Визначення ймовірності потрапляння випадкової величини на задану ділянку

Ймовірність улучення випадкової величини на задану ділянку може бути визначена з використанням функції розподілу і щільності розподілу.

5.2.1. Використання функції розподілу

Ми встановили, що ймовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку для будь-якого розподілу дорівнює приросту функції розподілу на цій ділянці. Так, якщо розподіл випадкової величини X підпорядковується нормальному закону зі щільністю ймовірності

$$f(x) = \rho / E_x\sqrt{\pi}\cdot e^{-\rho^2((x-m_x)/E_x)^2},$$

то ймовірність влучення випадкової величини на ділянку (x_n, x_m) знайдемо так:

$$p(x_n < X < x_m) = \int_{x_n}^{x_m} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_m} f(x)dx - \int_{-\infty}^{x_n} f(x)dx =$$

$$= F(x_m) - F(x_n). \tag{5.6}$$

Графік цього виразу показаний на рис. 5.6.

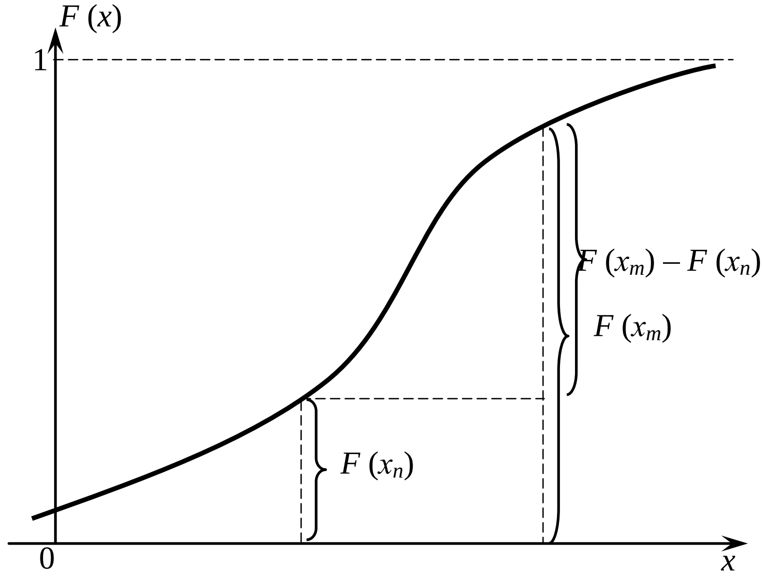

Рисунок 5.6 – Імовірність влучення випадкової величини на ділянку (x_n, x_m)

При визначенні значень функції розподілу використовують табличну функцію

$$F(x)=\frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-p^2t^2}dt.$$

За допомогою таблиць функції $F(x)$ (табл. А.2) ймовірність випадкової величини, що потрапляє на ділянку (x_n, x_m) може бути розрахована за формулою

$$p\,(x_n < X < x_m) = F\,(x_2) - F\,(x_1), \qquad (5.7)$$

де $F(x_2)$ і $F(x_1)$ – табличні функції;

$x_2 = (x_m - m_x)/E_x$ і $x_1 = (x_n - m_x)/E_x$) ($x_m > x_n$) – центровані значення меж ділянки, які виражені в серединних відхиленнях.

Формулу (5.7) можна одержати з формули (5.6) уведенням нової змінної $t = (x - m_x)/E_x$. Дійсно, в цьому випадку формула (5.6) набере вигляду

$$p(x_n < X < x_m) = F(x_m) - F(x_n) =$$

$$= \frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_m} e^{-\rho^2\left(\frac{x-m_x}{E_x}\right)^2} dx - \frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\rho^2\left(\frac{x-m_x}{E_x}\right)^2} dx =$$

$$= \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_m-m_x}{E_x}} e^{-\rho^2 t^2} dt - \frac{\rho}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_n-m_x}{E_x}} e^{-\rho^2 t^2} dt =$$

$$= F\left(\frac{x_m - m_x}{E_x}\right) - F\left(\frac{x_n - m_x}{E_x}\right).$$

Позначивши $(x_m – m_x)/E_x = x_2$ і $(x_n – m_x)/E_x = x_1$, одержимо формулу (5.7) [33].

Приклад 1. Випадкова величина підпорядковується нормальному закону з математичним сподіванням m_x = = 10 м й із серединним відхиленням E_x = 5 м. Визначити ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянку (+13, +21 м).

Р о з в’ я з а н н я. 1. Шукану ймовірність знайдемо за формулою (5.7):

$$p\ (13 < X < 21) = F(x_2) - F(x_1),$$

де

$$x_2 = (21 - 10)/5 = 2{,}2, \quad x_1 = (13 - 10)/5 = 0{,}6.$$

2. За таблицею А.1 визначимо:

$$F\ (x_2 = 2{,}2) = 0{,}93108, \quad F\ (x_1 = 0{,}6) = 0{,}65715.$$

3. Розраховуємо шукану ймовірність:

$$p\ (13 < X < 21) = F\ (2{,}2) - F\ (0{,}6) =$$
$$= 0{,}93108 - 0{,}65715 = 0{,}27393.$$

Таким чином,

$$p\ (13 < X < 21) \approx 27{,}4\ \%.$$

Як бачимо з виразу табличної функції $F\ (x)$, значення функції подані відповідно до відхилень випадкової величини від математичного сподівання виразом у серединних відхиленнях. При цьому відхилення може бути як позитивним, так і негативним. Із визначення функції і графіка функції розподілу бачимо, що $F(x) \neq F(-x)$. Тому при використанні табличної функції $F(x)$ необхідно враховувати знак відхилення випадкової величини від математичного сподівання.

Якщо щільність імовірності задана у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-m_x}{2\sigma_x^2}\right)^2},$$

то

$$p(x_n < X < x_m) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{x_n}^{x_m} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_m} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx - \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_n} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx.$$

Ввівши нову змінну $t = x - m_x/\sigma_x$, одержимо

$$p(x_n < X < x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_m - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_n - m_x}{\sigma_x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для обчислення одержаного виразу використовують табличну функцію

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

за допомогою якої ймовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку знайдемо так:

$$p\,(x_n < X < x_m) = F\,(y_2) - F\,(y_1), \qquad (5.8)$$

де $F(y_2)$, $F(y_1)$ – табличні функції;

$y_2 = (x_m - m_x)/\sigma_x$ і $y_1 = (x_n - m_x)/\sigma_x$ – центровані значення меж ділянки, виражені в середніх квадратичних відхиленнях [38].

Приклад 2. Випадкова величина відхилення початкової швидкості снаряда підпорядковується нормальному закону з математичним сподіванням $M\,[\Delta v_0] = -2\ \%\ v_0$, і середнім квадратичним відхиленням $\sigma\,[\Delta v_0] = 1{,}5\ \%\ v_0$. Визначити ймовірність того, що величина відхилення початкової швидкості буде в межах від 0 до –4 % v_0.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Шукану ймовірність знайдемо за формулою (5.8):

$$p\ (-4 < \Delta v_0 < 0) = F\ (y_2) - F\ (y_1),$$

де

$$y_2 = 0 - (-2)/1{,}5 = 1{,}33 \quad \text{і} \quad y_1 = -4 - (-2)/1{,}5 = -1{,}33.$$

2. За таблицею А.2 визначаємо:

$$F\ (y_2 = 1{,}33) = 0{,}90824 \text{ і } F\ (y_1 = -\ 1{,}33) = 0{,}09176.$$

3. Розраховуємо шукану ймовірність:

$$p\ (-4 < \Delta v_0 < 0) = F\ (y_2 = 1{,}33) - F\ (y_1 - 1{,}33) = 0{,}90824 - 0{,}09176 = 0{,}81648 \text{ або } 81{,}6\ \%.$$

5.2.2. Використання щільності розподілу

Якщо необхідно розрахувати ймовірність попадання випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону, на ділянку, симетричну щодо її математичного сподівання, то зручніше користуватися не функцією F (x), а функцією Φ (x)*:

$$\Phi(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-p^2 t^2} dt.$$

У цьому разі шукана ймовірність

$$p\ (|X| < l) = \Phi\ (x), \tag{5.9}$$

де $x = l/E_x$, а $2l$ – глибина ділянки [27].

Приклад 3. Ціль – смуга нескінченної довжини, розміщена перпендикулярно до напрямку стрільби. Ширина смуги $2l$ = 20 м.

Визначити ймовірність влучення в ціль за одного пострілу, якщо центр розсіювання снарядів суміщений із центром смуги, а серединне відхилення за дальністю $B\partial$ = 25 м.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Шукану ймовірність знайдемо за формулою (5.9):

$$p\ (|X_p| < l) = \Phi\ (x),$$

де $x = l/B\partial = 10/25 = 0{,}4$.

2. За таблицею А. 1 визначимо:

Ф (x = 0,40) = 0,21268*.

Таким чином, імовірність влучення в ціль за одного пострілу буде 21,3 %.

Графік цього рішення зображений на рис. 5.7, на якому шукана ймовірність показана заштрихованою площею.

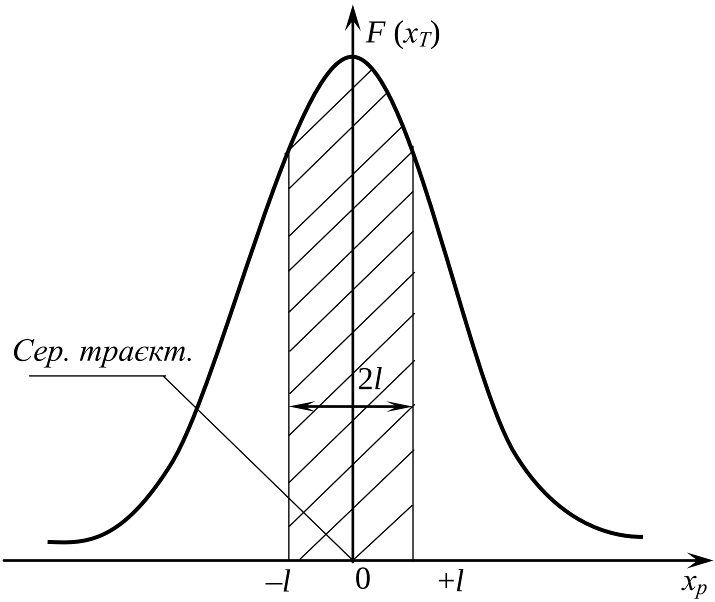

Рисунок 5.7 – Імовірність влучення в ціль за одного пострілу у смугу нескінченної довжини, розміщеної перпендикулярно до напрямку стрільби

Необхідно мати на увазі, що функція Ф (x) є непарною і Ф (–x) = Ф (x).

Формулу (5.9) можна одержати з урахуванням:

---

* Функцію Ф (x) називають **наведеною функцією Лапласа**.

$$p(x_n < X < x_m) = \frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}\int_{x_n}^{x_m} e^{-\rho^2\left(\frac{x-m_x}{E_x}\right)^2} dx.$$

Зробимо заміну змінної: $(x - m_x)/E_x = t$; $dx = E_x \cdot dt$.

Тоді

$$p(x_n < X < x_m) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_n - m_x}{E_x}}^{\frac{x_m - m_x}{E_x}} e^{-\rho^2 t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x_n - m_x}{E_x}} e^{-\rho^2 t^2} dt\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(x_2) - \Phi(x_1)\right].$$

Таким чином,

$$p\ (x_n < X < x_m) = 1/2 \cdot [F\ (x_2) - F\ (x_1)], \qquad (5.10)$$

де $\Phi\ (x_1)$ і $\Phi\ (x_2)$ – табличні функції;

$x_2 = (x_m - m_x)/E_x$ і $x_1 = (x_n - m_x)/E_x$.

Формула (5.10), як і формула (5.7), дає можливість визначити ймовірність попадання випадкової величини на довільну ділянку (x_n, x_m), що займає будь-яке положення щодо математичного сподівання. Практично формули рівноцінні. Однак при користуванні формулою (5.7) проводиться дещо менше арифметичних обчислень. У цьому й полягає деяка (не дуже істотна) її перевага перед формулою (5.9) [24].

Приклад 4. Випадкова величина підпорядковується нормальному закону з математичним сподіванням 100 і серединним відхиленням 10 м. Визначити ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянку (125 м, 135 м).

Р о з в’ я з а н н я. 1. Шукану ймовірність можна знайти за формулою (5.10):

$$p\ (120 < X < 135) = 1/2 \cdot [F\ (x_2) - F\ (x_1)],$$

де $x_2 = (135 - 100)/10 = 3{,}5$, $x_1 = (120 - 100)/10 = 2$.

2. За таблицею А. 1 визначимо:

$$\Phi\ (x_2 = 3{,}5) = 0{,}98176, \quad \Phi\ (x_1 = 2) = 0{,}82266.$$

3. Шукана ймовірність

$$p\,(120 < X < 135) = 1/2\cdot[\Phi(3{,}5) - \Phi(2)] = 1/2\cdot[0{,}98176 - {}$$
$$- 0{,}82266] = 1/2\cdot 0{,}15910 = 0{,}07955,$$
$$p\,(120 < X < 135) \approx 8\ \%.$$

Якщо розглянута ділянка симетрична відносно математичного сподівання випадкової величини, то це означає, що $m_x = 0$, а ділянка (x_n, x_m) може розглядатися як ділянка, в якій $x_n = -l$, а $x_m = l$ (рис. 5.7). Тоді величини x_2 і x_1, що входять до формули (5.10) будуть

$$x_2 = l/E_x \quad \text{і} \quad x_1 = -l/E_x,$$

а сама формула (5.10) набере вигляду

$$p\,(x_n < X < x_m) = 1/2[\Phi\,(l/E_x) - \Phi\,(-l/E_x)] = \Phi\,(l/E_x).$$

А це є не що інше, як формула (5.9). Таким чином, формула (5.9) – окремий випадок формули (5.10).

Коли ділянка симетрична щодо математичного сподівання, переваги формули (5.9) порівняно з формулою (5.8) цілком очевидні, тому що розрахунки за формулою (5.9) істотно спрощуються.

Якщо щільність розподілу задана у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

то, провівши аналогічні міркування, можна одержати

$$p\,(x_n < X < x_m) = 1/2\cdot[\Phi\,(y_2) - \Phi\,(y_1)], \qquad (5.11)$$

де $\Phi\,(y_2)$ і $\Phi\,(y_1)$ – табличні функції виду

$$\Phi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_2^y e^{-\frac{t^2}{2}}dt,$$

$$y_2 = (x_m - m_x)/\sigma_x, \quad y_1 = (x_n - m_x)/\sigma_x, \quad (x_m > x_n).$$

Приклад 5. Випадкова величина підпорядковується нормальному закону з математичним сподіванням 50 м і середнім квадратичним відхиленням 8 м. Визначити ймовірність попадання випадкової величини на ділянку (65 м, 80 м).

Р о з в’ я з а н н я. 1. Шукану ймовірність можна знайти за формулою (5.11):

$$p\ (65 < X < 80) = 1/2 \cdot [\Phi\ (y_2) - \Phi\ (y_1)],$$

де

$y_2 = (80 - 50)/8 = 3{,}75, \quad y_1 = (65 - 50)/8 = 1{,}875 \approx 1{,}88.$

2. За таблицею А. 1 визначимо:

$\Phi\ (y_2 = 3{,}75) = 0{,}99982, \quad \Phi\ (y_1 = 1{,}88) = 0{,}93989.$

3. Шукана ймовірність

$$p\ (65 < X < 80) = 1/2 \cdot [\Phi(3{,}75) - \Phi(1{,}88)] = 1/2 \cdot [0{,}99982 - 0{,}93989] = 1/2 \cdot 0{,}05993 = 0{,}029965,$$

$$p\ (65 < X < 80) = 2{,}9965 \approx 3\ \%.$$

Якщо розглянута ділянка симетрична щодо математичного сподівання випадкової величини, то формула (5.11) спрощується й набирає вигляду

$$p\ (|X| < l) = \Phi\ (y), \tag{5.12}$$

де $y = l/\sigma_x$.

Для практичних розрахунків можуть використовуватися всі формули від (5.7) до (5.12). Однак для зручності запам’ятовування віддаємо перевагу формулам (5.7) і (5.9).

5.3. Похибки вимірювання як окремий випадок випадкових величин, що підпорядковуються нормальному закону розподілу

У повсякденній практиці, зокрема в артилерійській, ми нерідко маємо справу з різними вимірами. Наприклад, під час підготовлення вихідних даних ми визначаємо топографічні дальність і напрямок (доворот від основного напрямку, кутомір та інші) і використовуємо результати вимірювання елементів: метеорологічних і балістичних умов стрільби. Будь-які вимірювання супроводжуються помилками. Незалежно від ретельності вимірювань і точності застосованих при цьому приладів результат вимірювань дає не істинне значення вимірюваної величини, а наближене. Про це свідчать незбіжні результати повторних вимірів [37].

На результат вимірювання X діє велика кількість випадкових чинників, обумовлюючи випадковий характер результату вимірювання. За кожного вимірювання, з якою б ретельністю ми не старалися відтворити досвід, одержимо різні результати. Так, під час перевіряння орієнтування за допомогою ПАБ ми вимірюємо магнітний азимут на панораму гармати 3–4 рази, кожен раз ретельно орієнтуючи бусоль і відзначаючись по панорамі. Незважаючи на всю акуратність у роботі, ми зазвичай одержимо 3–4 різних відліків і змушені брати середній. Це пояснюється тим, що внаслідок похибок суміщення магнітної стрілки з індексом, похибок відзначення, зняття відліку та інших, величини яких за кожного вимірювання різні, ми одержимо не істинне, а наближене значення азимута.

Ураховуючи це, результат вимірювання можна подати як алгебраїчну суму істинного значення вимірюваної величини і похибки, яка має місце при цьому вимірюванні, тобто

$$x = a + \delta, \tag{5.13}$$

де a – істинне значення вимірюваної величини;

δ – випадкова похибка під час вимірювання.

Зі співвідношення (5.13) одержимо

$$\delta = x - a,$$

тобто похибка вимірювання являє собою різницю між результатом вимірювання та істинним значенням вимірюваної величини.

Таким чином, будь-які похибки вимірювання за своєю природою є випадковими величинами, оскільки їх величина визначається дією дуже великої кількості джерел похибок, результат накладення яких не може бути заздалегідь передбачений. Однак, як свідчить практика вимірювань, різні джерела похибок по-різному проявляються в процесі вимірювань, що проходить з часом. Відповідно до цього розрізняють три види похибок: ***систематичні, грубі, випадкові***.

Систематичними називають такі похибки, які в процесі вимірювань залишаються постійними або змінюються за певним законом, який може бути встановлений завчасно. Вони спричиняються в основному конструктивними особливостями приладів (інструментальні похибки), похибками методу вимірювання, а також постійним або змінним у часі зовнішнім впливом. Так, вимірювання дальності невивіреним далекоміром супроводжуються систематичною похибкою, що залишається постійною до зміни зовнішніх метеорологічних умов [16].

Під час перевіряння відповідності кутів підвищення за шкалою тисячних механізму кутів прицілювання до кута піднесення за квадрантом ми виявляємо систематичну похибку кутів підвищення, надавати знаряддю за допомогою прицілу, складаємо таблиці значень цих похибок і враховуємо їх під час стрільби. Можна навести й інші приклади. Усі вони свідчать, що здебільшого випадків систематична похибка може бути визначена, й тим самим буде усунуто її вплив на результат вимірювання. Той факт, що під час вимірювань у незмінних умовах систематична похибка може бути визначеною й усуненою, дозволяє виключити її з розгляду.

Під час практичних вимірювань доводиться звертати увагу на можливість ***грубих*** прорахунків, не властивих цьому методу вимірювання. Грубі похибки зазвичай є наслідком недостатньої уважності спостерігача або результатом короткочасної дії випадкового стороннього джерела похибок, зазвичай не властивого цим вимірюванням (помилковий відлік, неправильний запис показів приладу, випадкове струшування приладу, короткочасне порушення регулювання). Такі явно неправильні, анормальні результати вимірювань прийнято відкидати. Щоб виключити такі грубі похибки, необхідно дуже уважно проводити всі спостереження, ретельно здійснювати відлік і записувати показання приладів, безперервно контролювати регулювання приладів та одержувані результати. Оскільки грубі похибки – це поодинокі випадкові явища, теорія похибок їх не вивчає. У подальшому ми розглянемо прийоми і методи, що дозволяють виявити анормальні результати вимірювання [18].

Предметом вивчення теорії помилок є ***випадкові*** похибки вимірювання. Випадковими похибками називаються такі, які за певних (постійних) умов вимірювання не залишаються незмінними, а можуть набувати різних значень. Випадкові похибки – це, по суті, випадкові величини, тому до них застосовні усі закони, теореми та положення, що застосовні для випадкових величин. На підставі формули (5.13) це можна сказати і про результати вимірювань.

Спільна дія великої кількості джерел похибок призводить до того, що похибка вимірювання може набувати безлічі значень на деякому інтервалі. Отже, похибки і результати вимірювань – випадкові величини безперервного типу.

На формування абсолютної більшості похибок вимірювання діє велика кількість випадкових джерел. Отже, величина випадкової помилки може бути подана як сума елементарних похибок, джерелами утворених окремими джерелами:

$$\delta = \Sigma_{i=1}^{n} \cdot \delta_i. \tag{5.14}$$

Із теорії закону розподілу випадкових величин нам відомо, що законом розподілу суми досить великої кількості доданків є нормальний закон незалежно від видів законів розподілу випадкових величин, що становлять суму. Отже, похибки вимірювання підпорядковані нормальному закону похибок. Складові похибок вимірювання можуть мати випадкові різні значення не лише за величиною, а й за знаком.

Велика кількість джерел похибок і рівноймовірна можливість одержання як позитивних, так і негативних значень складових приводять до того, що математичне сподівання похибки дорівнює нулю:

$$M(\delta) = 0, \tag{5.15}$$

а сама похибка може мати як позитивні, так і негативні значення.

Таким чином, щільність розподілу нормального закону похибок вимірювань має вигляд (рис. 5.8) [1]:

$$f(\delta) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{\delta^2}{E^2}}. \tag{5.16}$$

Величина серединного відхилення E залежить від способу вимірювання. Чим точніший спосіб вимірювання (визначення величини), тим менша величина серединного відхилення.

Нормальному закону розподілу підлягає більшість похибок. Однак на практиці вимірювань мають місце розподіли похибок вимірювання за законом рівної ймовірності.

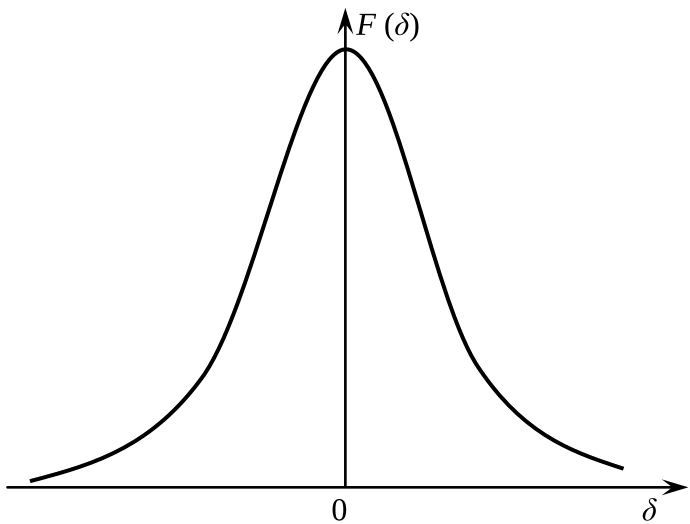

Рисунок 5.8 – Графічне зображення щільності розподілу нормального закону похибок вимірювань

Прикладом можуть бути похибки, одержані при знятті відліків зі стереотруби, похибки при округленні зціленої дальності до цілих поділок прицілу (рівня) і т. ін. Щільність розподілення похибок вимірювання, що підпорядковуються закону, рівної ймовірності має вигляд

$$f(\delta) = 1 / 2l \tag{5.17}$$

за $-l \leq \delta \leq l$.

Такі закони розподілу помилок найбільш часто трапляються під час вимірювання випадкових величин.

З'ясуємо, яким законам буде підпорядковуватися випадкова величина результатів вимірювань. Зі співвідношення (5.13) можна зробити висновок, що випадкова величина результату вимірювання X підлягає нормальному закону з математичним сподіванням

$$M(X) = M(a + \delta) = a + m_\delta = a,$$

$$M(X) = a, \tag{5.18}$$

і серединним відхиленням

$$E_x = E_\delta = E. \tag{5.19}$$

Отже, щільність розподілу результату вимірювань X

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{(x-a)^2}{E^2}}. \tag{5.20}$$

Порівнюючи щільності розподілу похибок вимірювання та результатів вимірювання, бачимо, що закон похибок вимірювання є щось інше, ніж закон розподілу центрованої випадкової величини результату вимірювання, дійсно,

$$\delta = X - a = X - m_x = \overset{\circ}{X}. \tag{5.21}$$

Істинне значення вимірюваної (обумовленої) величини не відоме. Завдання зводиться до оцінювання відхилення результату вимірювання від істинного значення вимірюваної величини або на основі співвідношення (5.21) – до визначення ймовірності того, що випадкова величина похибки вимірювання δ набуде значення в межах визначеної ділянки (δ_n, δ_m) [24].

Приклад 6. Під час стрільби гарматою обчислену дальність розраховують на основі повної підготовки. Серединна похибка, що характеризує точність визначення обчисленої дальності, $E = 1\,\%\,Д_т^ц$. Визначити ймовірність того, що розрахована дальність відрізнятиметься від справжньої не більше ніж на 100 м, якщо топографічна дальність до цілі 5 000 м.

Ця задача може бути сформульована так: визначити ймовірність того, що похибка щодо визначення обчисленої дальності за абсолютним значенням не перевищить 100 м.

Р о з в' я з а н н я. Шукану ймовірність можна визначити за формулою (5.9) з використанням табличної функції Ф (x) (додаток А, табл. 1):

$$E = 1\,\%\,Д_т^ц = 50 \text{ м};$$

$$P\,(|X - \mathrm{a}| < 100) = P\,(|X| < 100) = P\,(|\delta\,| < 100) =$$
$$= Ф\,(100/50) = Ф\,(2) = 0{,}82266.$$

Одержаний результат означає, що при розрахунку обчисленої дальності в умовах розглянутого прикладу в середньому на 100 стрільб середня траєкторія буде віддалена від цілі не більше ніж на 100 м.

Із визначення похибки вимірювань і розв'язання прикладу бачимо, що питання, пов'язані з випадковими помилками, розглядаються за допомогою прийомів та методів, зроблених для розподілу зосереджених випадкових величин.

5.4. Закон рівної ймовірності

На практиці трапляються безперервні випадкові величини, про які заздалегідь відомо, що їх можливі значення знаходяться в межах деякого певного інтервалу, і що в межах цього інтервалу всі значення випадкової величини однаково можливі [13].

Маємо, наприклад, шкалу далекоміра, з якої знімаються дальності з округленням до цілих (оцифрованих) поділок шкали (рис. 5.9). Якщо покажчик зупиниться в положенні *А*, то далекомірник доповість дальність 2 640 м, а насправді дальність дорівнює 2 645 м.

Таким чином, буде допущена похибка – 5 м. Якщо покажчик зупиниться в положенні *Б*, то далекомір доповість дальність 2 680 м, а насправді дальність дорівнює 2 672 м. Отже, буде допущена похибка +8 м. Найбільше значення похибки, мабуть, буде одержане, якщо покажчик зупиниться посередині між ризиками. У цьому разі похибка буде дорівнювати +10 м, якщо округлення буде зроблене в більший бік, і –10 м, якщо – в менший бік.

Ми бачимо, що інтервал можливих значень похибок (рис. 5.10) дорівнює ціні позначених поділок шкали далекоміра. Найменше ж значення похибки, очевидно, дорівнює нулю і відповідає зупиненню покажчика проти оцифрованого штриха.

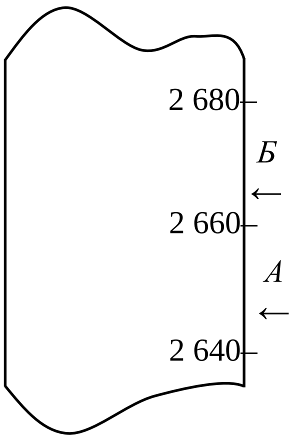

Рисунок 5.9 – Шкала далекоміра

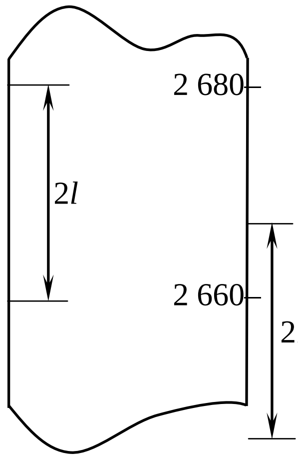

Рисунок 5.10 – Інтервал можливих значень похибок

Отже, при визначенні дальності випадкова величина похибки може набути одне зі значень у межах від 0 до $\pm l$, де l – половина найменшої поділки шкали. Оскільки в процесі вимірювання дальностей покажчик на приладі з рівною можливістю може зупинитися в будь-якій точці проміжку $2l$, то всі похибки округлення в межах проміжку $2l$ різноймовірні.

Таким чином, закон рівної ймовірності розуміють як рівномірний розподіл випадкової величини в межах певного проміжку.

Розглянемо випадкову величину X, що підлягає закону рівної ймовірності на ділянці від α до β (рис. 5.11). Згідно з визначенням при $\alpha < x < \beta$ щільність імовірності має деяке значення $f(x)$, при $x < \alpha$ або $x > \beta$ щільність імовірності дорівнює нулю.

Аналітичний вираз щільності ймовірності може бути одержаний із таких міркувань.

Площа, обмежена кривою розподілу, дорівнює одиниці:

$$(\beta - \alpha) \cdot f(x) = 1,$$

звідси

$$f(x) = 1 / (\beta - \alpha).$$

Таким чином, вираз щільності рівномірного розподілу матиме вигляд [33]

$$f(x) = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{1}{\beta - \alpha} \text{ при } \alpha < x < \beta, \\ 0 \text{ при } x < \alpha \text{ або } x > \beta. \end{matrix} \right\} \tag{5.22}$$

Значення функції розподілу $F(x) = P(X < x)$ визначається площею, обмеженою кривою розподілу, що лежить лівіше від точки x (рис. 5.11), звідси

$$F(x) \left\{ \begin{matrix} 0 \text{ при } x < \alpha, \\ \dfrac{x - \alpha}{\beta - \alpha} \text{ при } \alpha < X < \beta, \\ 1 \text{ для } x > \beta. \end{matrix} \right\} \tag{5.23}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ зображено на рис. 5.12.

Якщо рівномірний розподіл симетричний щодо початку відліку (математичне сподівання збігається з початком відліку), то дуже часто ділянку можливих значень випадкової величини позначають як $2l$ (рис. 5.13). У цьому разі $\alpha = -l$ і $\beta = l$ і, отже, $\beta - \alpha = l - (-l) = 2l$. Тоді вираз щільності розподілу матиме вигляд

$$f(x) = 1/2l, \tag{5.24}$$

а функції розподілу

$$F(x) = (x + l)/2l, \tag{5.25}$$

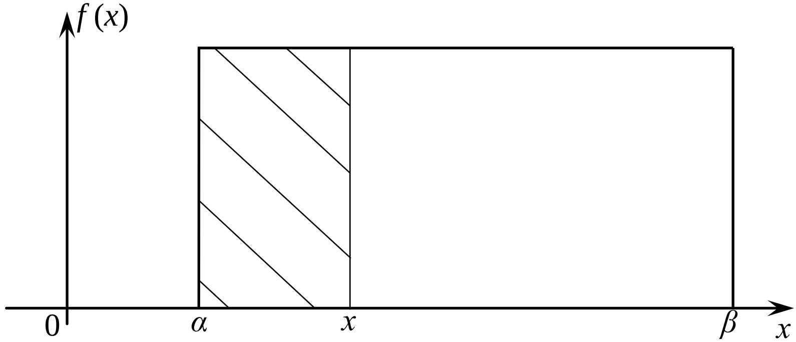

Рисунок 5.11 – Випадкова величина X, що підлягає законові рівної ймовірності на ділянці від α до β

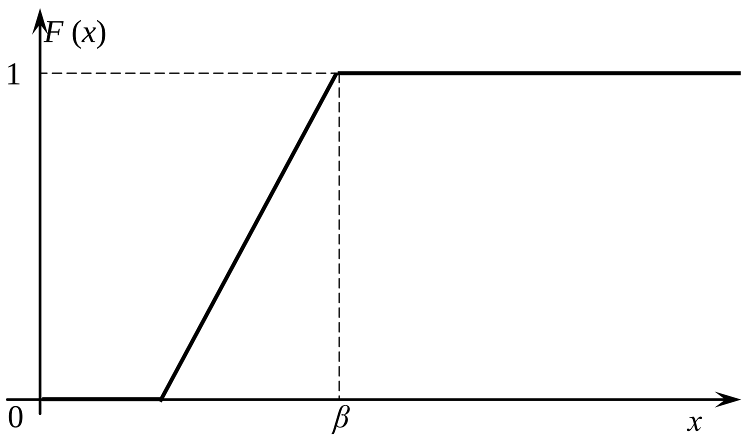

Рисунок 5.12 – Графік функції розподілу $F(x)$

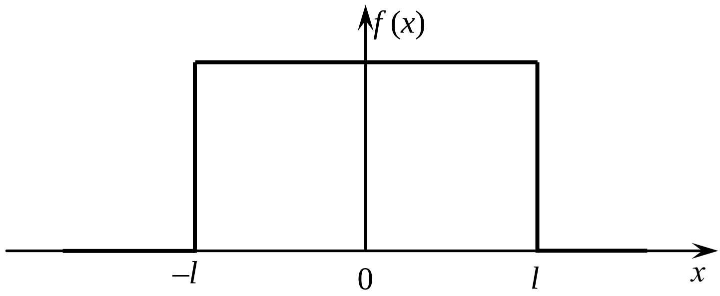

Рисунок 5.13 – Зображення рівномірного симетричного розподілу щодо початку відліку

5.4.1. Числові характеристики закону рівної ймовірності

Як до виразу щільності ймовірності, так і до функції розподілу входить величина проміжку $2l = \beta - \alpha$.

Якщо розподіл симетричний початку відліку, то l буде достатнім параметром, який відрізняє цей закон від усіх інших законів цієї сім’ї ($m_x = 0$) [31].

У загальному випадку закон рівної ймовірності має числові характеристики, що мають місце для будь-якого закону розподілу випадкових величин. Розглянемо їх значення.

Математичне сподівання

$$m_x = \int_{\alpha}^{\beta} x \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{\alpha + \beta}{2}. \qquad (5.26)$$

Для симетричного розподілу щодо початку відліку

$$m_x = (\alpha + \beta)/2 = (-l + l)/2 = 0.$$

Дисперсія

$$D(x)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m_x)^2 f(x)dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(x-m_x)^2=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\left|\frac{x^3}{3}\right|_{\alpha}^{\beta}-2m_x\left|\frac{x^2}{2}\right|_{\alpha}^{\beta}-m_x^2\left|x\right|_{\alpha}^{\beta}\right]=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-2m_x\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}+m_x^2(\beta-\alpha)\right]=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-2-\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(\beta+\alpha)^2}{4}(\beta-\alpha)\right]=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}-\frac{(\alpha+\beta)^2(\beta-\alpha)}{4}\right]=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta-\alpha}{12}(\beta^2+2\alpha\beta+\alpha^2)=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^2.$$

Таким чином,

$$D_x=(\beta-\alpha)^2/12, \qquad (5.27)$$

звідси

$$\sigma_x=(\beta-\alpha)/2\sqrt{3}\,. \qquad (5.28)$$

Якщо $\beta-\alpha=2l$, то

$$D_x=l^2/3, \qquad (5.29)$$

а середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_x=l/\sqrt{3}\,. \qquad (5.30)$$

Середнє відхилення визначимо з умови

$$\int_{m-E}^{m+E} f(x)dx=\frac{1}{2}.$$

Тоді

$$\frac{1}{2l}\,|\,x\,|_{m-E}^{m+E}=\frac{1}{2};\qquad \frac{m+E-m+E}{2l}=\frac{1}{2},$$

звідси

$$\mathrm{E}=l/2. \qquad (5.31)$$

5.4.2. Розрахунок імовірності потрапляння випадкової величини у задану ділянку

Ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянку (x_n, x_m) геометрично являє собою площу, обмежену кривою розподілу, віссю абсцис та ординат точок x_n і x_m. Як бачимо з рис. 5.14, ця площа [37]

$$P(x_n < X < x_m) = (x_m - x_n)/(\beta - \alpha) = (x_m - x_n)/2l. \quad (5.32)$$

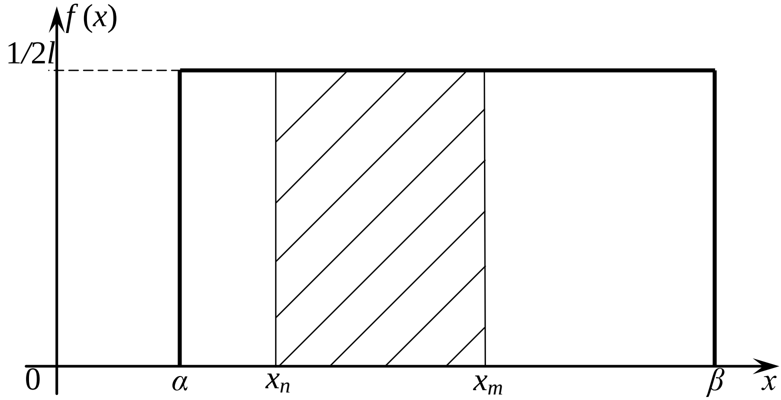

Рисунок 5.14 – Імовірність улучення випадкової величини на ділянку (x_n, x_m)

Таким чином, імовірність потрапляння випадкової величини на задану ділянку дорівнює відношенню довжини ділянки до всього проміжку, на якому має місце рівномірний розподіл.

Приклад 7. Ціна поділки далекомірної шкали дорівнює 10 м. При вимірюванні дальності відлік виробляється до цілого ділення шкали. Визначити середнє квадратичне відхилення випадкової величини – похибки округлення – при знятті відліку та ймовірність того, що похибка за абсолютним значенням не перевищить 2 м.

Р о з в' я з а н н я. Похибки округлення мають рівномірний і симетричний розподіл на інтервалі |–5 м, +5 м| (рис. 5.15):

$f(x) = 1/2l$, $2l = 10$ м, m_x,$= (\alpha + \beta)/2 = (-5 + 5)/2 = 0$.

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою (5.30):

$$\sigma_{\text{ок}} = l/\sqrt{3} = 5/\sqrt{3} = 2{,}89 \text{ м},$$

а ймовірність того, що помилка за абсолютним значенням не перевищить 2 м, – за формулою (5.32)

$$p(|\delta_{\text{ок}}| < 2) = (x_m - x_n)/2l = [2 - (-2)]/2 \cdot 5 = 2/5 = 0{,}40.$$

Шукана ймовірність на рис. 5.15 зображена заштрихованою площею.

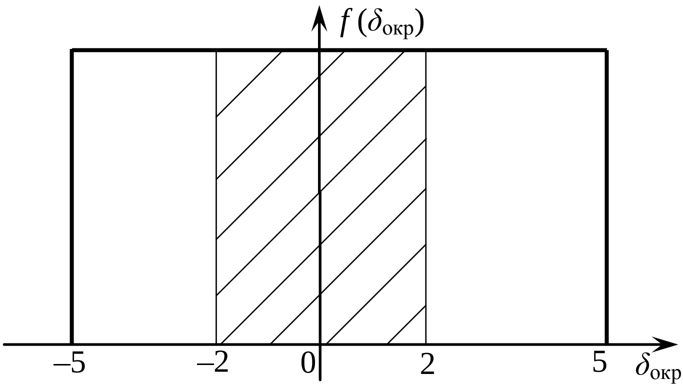

Рисунок 5.15 – Імовірність улучення випадкової величини на задану ділянку

Висновки до розділу 5

Точність стрільби артилерії завжди залежала від точності розрахунків і підпорядковувалася законам теорії ймовірностей. Це дозволяє проводити розрахунки з урахуванням основних положень, законів, теорем розподілу випадкових величин під час стрільби та влучення в різні форми об’єктів, цілей.

Закони, теореми та основні положення теорії ймовірностей завжди використовували не лише в теоретичних аспектах теорії стрільби, а й на практиці при визначенні точності підготовки даних для стрільби, точності проведення вимірів, оброблення результатів спостережень під час засічки цілей, що сприяє захопленню вогневої переваги над противником під час ураження його об'єктів, цілей та одержання перемоги в цілому.

У цьому розділі наведено основні поняття, теореми та закони теорії ймовірностей: щільність розподілу, нормальний закон розподілу, центровану випадкову величину, математичне сподівання випадкової величини, середнє квадратичне відхилення; запропоновано характеристики нормального закону розподілу, а також наведено поняття про щільність імовірності нормального закону, щільність розсіювання снарядів та серединне відхилення снарядів за дальністю і напрямком, можливості ймовірності потрапляння випадкової величини, використання функції розподілу та щільності розподілу під час розрахунку влучення в ціль та ймовірність улучення в ціль з одного пострілу.

У розділі наведено види помилок: систематичні, грубі й випадкові та кількість джерел помилок, подано визначення, графічне зображення та математичний вираз закону рівної ймовірності, числових характеристик нормального розподілу та числових характеристик закону рівної ймовірності.

Також у розділі наведені приклади до матеріалу розділу та варіанти їх розв'язання.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Щільність розподілу, елементарне відхилення снаряда, нормальний закон розподілу, центрована випадкова величина, математичне сподівання випадкової величини, властивість симетричності нормального закону, середнє ква-

дратичне відхилення, характеристики нормального закону розподілу, щільність імовірності нормального закону, щільність розсіювання снарядів, серединне відхилення снарядів за дальністю і напрямком, ймовірність потрапляння випадкової величини, використання функції розподілу, випадкова величина, таблична функція, використання щільності розподілу, ймовірність улучення в ціль з одного пострілу, похибки вимірювань, види похибок (систематичні, грубі й випадкові), кількість джерел похибок, закон рівної ймовірності, числові характеристики нормального розподілу, числові характеристики закону рівної ймовірності, випадкове явище, випадковість, розсіювання снарядів, норма витрати снарядів, закон рівної ймовірності, інтервал можливих значень похибок, шукана ймовірність, математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

Питання для повторення та самоконтролю

1. Дати визначення щільності розподілу.

2. Пояснити нормальний закон розподілу.

3. Що можливо розрахувати за допомогою функції розподілу?

4. З якою метою використовують щільність розподілу?

5. Перелічити основні властивості нормального закону розподілу випадкової величини.

6. З якою метою використовують функцію розподілу снарядів за дальністю?

7. Дати визначення серединного квадратичного відхилення?

8. Перелічити числові характеристики нормального розподілу та навести їх математичний вираз.

9. Яка розмірність числових характеристик: математичного сподівання, випадкової величини та середнього *квадратичного відхилення?*

10. Що таке математичне сподівання випадкової величини, дати визначення та навести формулу?

11. Що таке дисперсія? Дати визначення та навести формулу математичної залежності.

12. Що таке середнє квадратичне відхилення? Дати визначення та навести формулу математичної залежності.

13. Навести формулу ймовірності влучення в ціль з одного пострілу.

14. Чим викликана поява похибок вимірювань?

15. Які існують види помилок?

16. Навести систематичні, грубі й випадкові похибки та періодичність їх виникнення.

17. Перелічити числові характеристики закону рівної ймовірності.

18. Дати визначення та пояснення випадкового явища (навести приклади).

19. Що таке випадковість?

20. Пояснити, за рахунок чого здійснюється розсіювання снарядів.

21. Дати пояснення положенню про норму витрати снарядів.

22. Від яких причин залежить відхилення точки падіння снаряда від середнього положення центра розсіювання?

Завдання для самопідготовки

1. На аркуші паперу показати графічне зображення нормального закону розподілу випадкової величини.

2. Графічно зобразити на аркуші паперу вигляд щільності розподілу нормального закону похибок вимірів.

3. Визначити ймовірність потрапляння випадкової величини на ділянки (55, 30 м).

4. Навести приклади з артилерії, де трапляються *систематичні, грубі та випадкові похибки.*

5. Графічно зобразити на аркуші паперу щільність розподілу нормального закону похибок вимірювань.

6. Визначити середнє квадратичне відхилення випадкової величини – похибки округлення при знятті відліку та ймовірність того, що похибка за абсолютним значенням не перевищить 1,5 м.

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Застосування нормального розподілу та його числових характеристик в артилерії.

2. Закон розсіювання снарядів та його вплив на ефективність ураження об'єктів (цілей).

3. Теорія ймовірностей в артилерії.

4. Норма витрати боєприпасів – основний показник ураження цілей (об'єктів).

5. Використання основних положень і законів теорії ймовірностей під час вогневого ураження противника.

6. Вплив ймовірності влучення в ціль на швидкість її ураження та витрату боєприпасів.

7. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

Розділ 6

СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

6.1. Поняття про систему випадкових величин

Розглянемо явище розсіювання снарядів. Ми вже відзначали, що в результаті різноманітності значень різних факторів, що діють на політ снаряда, має місце розсіювання снарядів.

Положення точки падіння снаряда може бути визначене координатами x_p і z_p у деякій системі координат $X0Z$ або вектором Δp, початок якого знаходиться в центрі розсіювання снарядів (точка 0), а кінець збігається з точкою падіння снарядів (рис. 6.1).

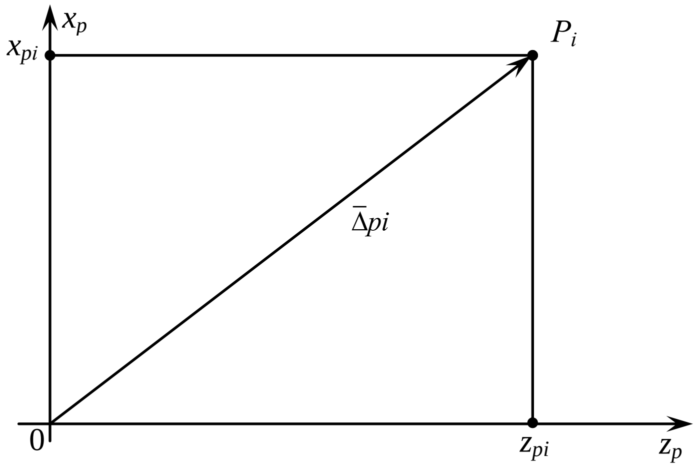

Рисунок 6.1 – Положення точки падіння снаряда

Цілком очевидно, що як координати x_p і z_p, так і вектор Δp у даній системі координат однозначно визначає положення розриву. Але ми знаємо, що положення розриву випадкове, а видалення його від центра розсіювання снарядів за дальністю й напрямком величини також випадкові.

Таким чином, розсіювання снарядів як випадкове явище може бути відображене своєрідною системою випадкових величин координат x_p і z_p чи системою випадкових векторів Δp. Причому ця система, тобто, можливі поєднання випадкових значень x_p і z_p, належать певній об'єктивній закономірності, властивій випадковому явищу – розсіюванню снарядів.

Приклад показує необхідність вивчення сукупності в даному випадку двох незалежних і випадкових величин системи (X_p, Z_p,), що визначає випадкове положення точки розриву. Але є ще й ряд прикладів, що свідчать про необхідність вивчення системи випадкових величин.

Балістичне відхилення температури повітря розраховується за формулою

$$\Delta T = k_1^{\tau}\cdot\Delta\tau_1 + k_2^{\tau}\cdot\Delta\tau_2, \tag{6.1}$$

де $\Delta\tau_1$ і $\Delta\tau_2$ – випадкові значення середнього відхилення температури повітря в першому і в другому шарах атмосфери. При вирішенні питання про можливі значення поправки дальності на температуру повітря ($\Delta Д_{\text{Т}} = 0{,}1\Delta X_T \Delta T$) необхідно знати закон розподілу випадкової величини (випадкових значень) балістичного відхилення температури повітря ΔT, який, у свою чергу, визначається законом розподілу системи двох залежних випадкових величин ($\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$)[1)]. Графічно розподіл сукупності випадкових значень середніх відхилень, температури повітря також може бути відображено розподіленням випадкової точки ($\Delta\tau^i{}_1$, $\Delta\tau^i{}_2$) на площині $\Delta\tau_1 O \Delta\tau_2$ на і-й момент часу (рис. 6.2).

Таким чином, ми стикаємося з необхідністю розглядати як єдине ціле кілька випадкових величин.

[1)] Залежність випадкових величин $\Delta\tau_1$ і $\Delta\tau_2$ обумовлена фізичними процесами вертикального теплообміну в атмосфері та фізичним змістом середніх відхилень температури повітря.

Як було відзначено, при вдалій стрільбі виникає система двох випадкових величин. Аналогічно точка розриву дистанційного снаряда визначається системою трьох випадкових величин або випадковим вектором у тривимірному просторі.

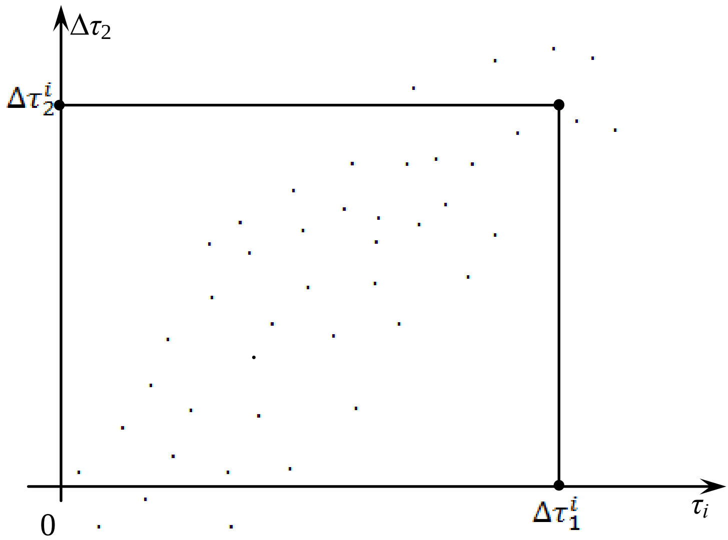

Рисунок 6.2 – Розподіл сукупності випадкових значень середніх відхилень, температури повітря

Таким чином, *системою випадкових величин* X, Y, ..., W називається сукупність цих величин, що розглядаються як єдине ціле [16].

Систему випадкових величин прийнято позначати так: $(X, Y, ..., W)$.

Раніше були розглянуті властивості окремих випадкових величин, що підпорядковуються різним законам, і числові характеристики цих законів. Під час вивчення системи випадкових величин нас також будуть цікавити закони розподілу. (Числові характеристики знаків розподілу) випадкових величин, що входять до системи. Однак властивості системи кількох випадкових величин не вичерпуються властивостями окремих величин, її складових.

Крім того, властивості системи включають також взаємозалежні зв'язки (залежності) між окремими випадковими величинами.

Таким чином, при вивченні системи випадкових величин ми розглянемо як закони розподілу системи, що є її повними, вичерпними ймовірнісними характеристиками, так і числові характеристики, що відображають закономірності розподілу системи. Спочатку ми розглянемо найбільш простий випадок – систему двох випадкових величин, а потім дамо характеристику системи довільного числа випадкових величин. Оскільки розподіл системи двох випадкових величин графічно відображається розподілом випадкової точки на площині, розподіл системи двох випадкових величин часто називають розподілом на площині.

6.2. Функція розподілу системи двох випадкових величин

Функція розподілу однієї випадкової величини визначає ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого x, за

$$F(x) = p(X < x).$$

За аналогією з функцією розподілу однієї випадкової величини можна дати таке визначення функції розподілу системи двох випадкових величин: функцією розподілу системи двох випадкових величин (X, Y) називається ймовірність добутку подій, тобто ймовірність спільного виконання цих двох нерівностей:

$$F(x, y) = p[(X < x)\cdot(Y < y)]. \qquad (6.2)$$

Якщо використовувати геометричне пояснення системи випадковою точкою, то функція розподілу системи $F(x, y)$ є не що інше, як імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в нескінченний квадрант (рис. 6.3), що лежить лівіше і нижче від точки (x, y). Це твердження не вимагає додаткових доказів, оскільки з рисунка 6.3 бачимо, що для всіх точок заштрихованої області і лише для точок цієї області виконуються нерівності $X < x$ і $Y < y$. Для всіх інших точок ці нерівності або не виконуються цілком або виконується лише одна з них [31].

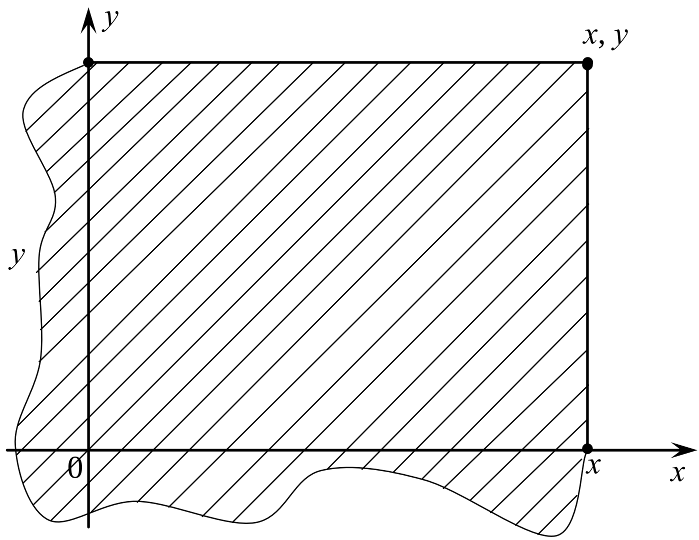

Рисунок 6.3 – Ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в нескінченний квадрант

У системі двох випадкових величин (X, Y) розглянемо розподіл лише однієї випадкової величини. Функція розподілу однієї випадкової величини X (позначимо її $F_1(x)$) являє собою ймовірність потрапляння випадкової точки в півплощину, обмежену праворуч абсцисою x (рис. 6.4). Функція розподілу випадкової величини Y, позначена через F_2 (y), являє собою ймовірність потрапляння випадкової точки в півплощину, обмежену зверху ординатою y (рис. 6.5).

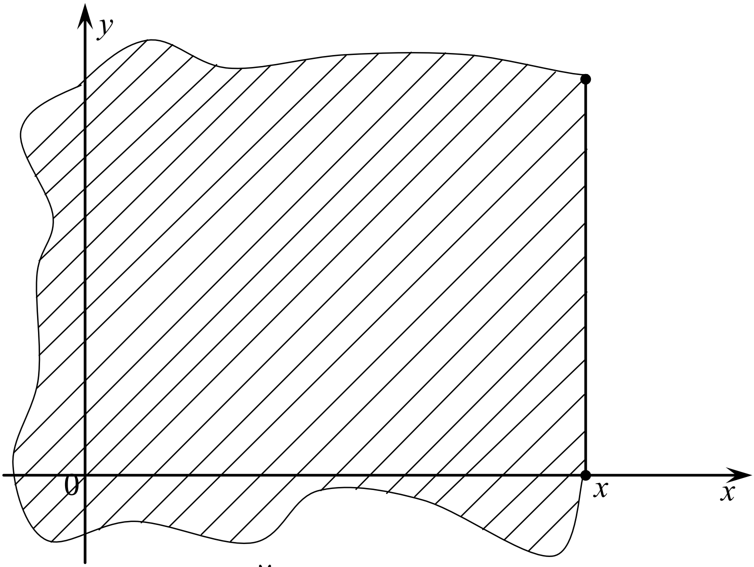

Рисунок 6.4 – Ймовірність потрапляння випадкової точки в півплощину, обмежену праворуч абсцисою x

Функція розподілу системи двох випадкових величин має такі властивості.

1. Функція розподілу $F(x, y)$ є неспадною функцією обох аргументів, тобто

при $x_2 > x_1 \to F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$;

при $y_2 > y_1 \to F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

У цій властивості функції розподілу легко переконатися, якщо зміщувати межу в бік збільшення x або y. При цьому ймовірність потрапляння в квадрант із вершиною (x, y) може лише збільшуватися [31].

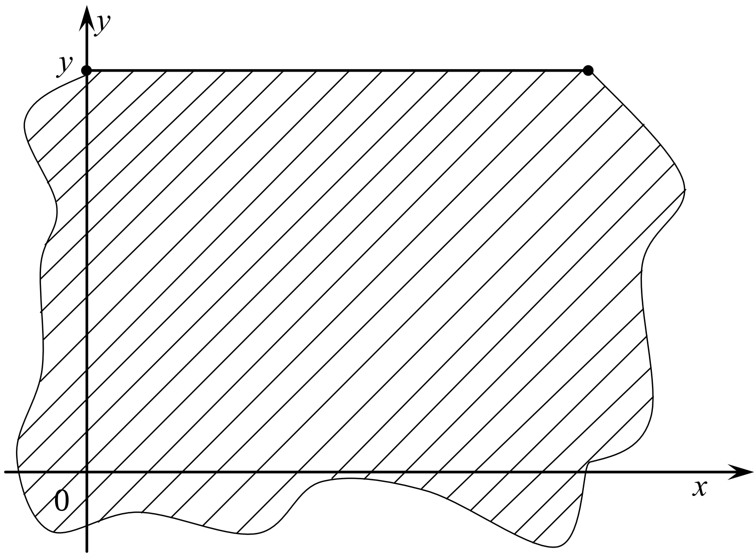

Рисунок 6.5 – Ймовірність потрапляння випадкової точки в півплощину, обмежену зверху ординатою y

Цілком природно, що якщо $x_2 > x_1$ і $y_2 > y_1$ (рис. 6.6), то $F(x_2, y_2) > F(x_1, y_1)$.

2. На $-\infty$ функція розподілу системи дорівнює нулю:

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

У цій властивості функції розподілу легко переконатися, необмежено відсуваючи вліво праву ($x \to -\infty$) або вниз верхню межу квадранта ($y \to -\infty$) або роблячи це одночасно ($x \to -\infty$, $y \to -\infty$).

Легко побачити, що при цьому ймовірність потрапляння в квадрант прямує до нуля.

3. При одному аргументі, що дорівнює $+\infty$, функція розподілу системи $F(x, y)$ перетворюється на функцію розподілу випадкової величини, що відповідає іншому аргументу:

$$\left.\begin{array}{l} F(x, +\infty) = F_1(x), \\ F(+\infty, y) = F_2(y) \end{array}\right\}, \tag{6.3}$$

де, як ми вже зазначили, $F_1(x)$ – функція розподілу випадкової величини X, а $F_2(y)$ – функція розподілу випадкової величини Y.

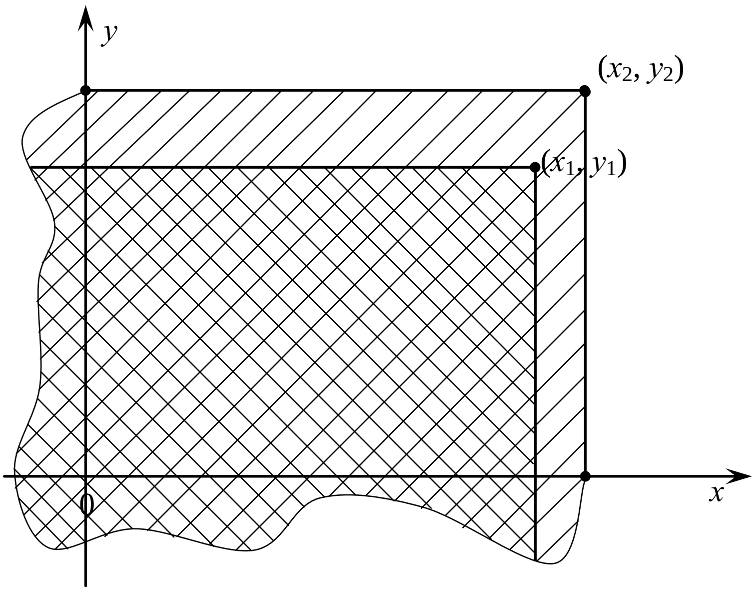

Рисунок 6.6 – Ймовірність потрапляння в квадрант із вершиною (x, y)

У цій властивості функції розподілу можна також легко переконатися зміщуючи ту чи іншу межу квадранта на $+\infty$, при цьому в межі квадрант перетворюється на півплощину, ймовірність потрапляння в яку є функцією розподілу однієї з величин, що входять до системи [34].

4. Якщо обидва аргументи дорівнюють $+\infty$, то значення функції розподілу дорівнює одиниці:

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Дійсно, при $x \to +\infty$ і $y \to +\infty$ функція розподілу системи $F(x, y)$ являє собою ймовірність потрапляння точки в усю область $X0Y$. Цілком природно, що ймовірність цієї події як достовірної дорівнює одиниці.

5. Можливі значення інтегральної функції розподілу системи лежать в інтервалі від 0 до 1, тобто

$$0 \le F(x, y) \le 1.$$

Доводити цю властивість не потрібно, тому що вона випливає з розглянутих властивостей функції розподілу, які відображають основні риси інтегральної функції системи як сукупності двох випадкових величин, що розглядається як єдине ціле.

Властивість 3 використовують часто, оскільки вона дозволяє за відомою функцією розподілу системи знайти функцію розподілу випадкових величин, що входять до системи.

Приклад 1. Дана функція розподілу системи двох випадкових величин

$$F(x, y) = \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{y}{5}}\right)$$

за зміни X та Y від 0 до ∞. Знайти функції розподілу випадкових величин X та Y.

Р о з в' я з а н н я. $F_1(x) = F(x, y = \infty)$. Підставивши в аналітичний вираз функції розподілу системи випадкових величин ∞ замість y, одержимо

$$F_1(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(1 - e^{-\infty}\right) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}.$$

Аналогічно

$$F(y) = 1 - e^{-\frac{y}{5}}.$$

Вивчаючи питання, пов'язані з розподілом окремих випадкових величин, ми вивели формули, що дозволяють розрахувати ймовірності потрапляння випадкової величини в межі заданої ділянки.

Аналогічним питанням для системи двох випадкових величин є питання про ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в межі заданої області D (рис. 6.7) на площині. Подія, що полягає в потраплянні випадкової точки (X, Y) в область D, позначену символом $(X, Y), \in D$.

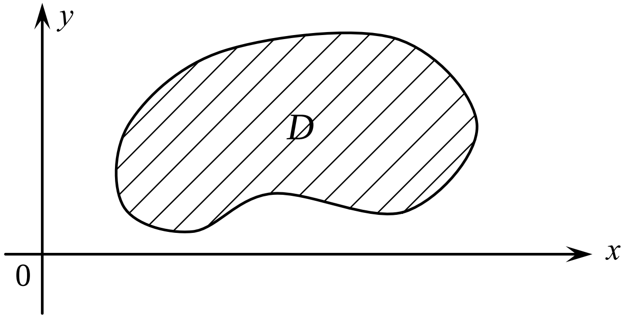

Рисунок 6.7 – Імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в межі заданої області D на площині

Умови завдання й відповідний символ означають, що ми розглядаємо подію, яка полягає в тому, що випадкові величини X і Y, які утворюють систему, набувають значень, що визначають положення точок, які потрапляють в область D, або, іншими словами, утворюють сукупність точок, що охоплюються областю D.

Нас цікавить імовірність потрапляння випадкової точки в задану область. У цьому розділі розглянемо найбільш простий випадок, коли область являє собою прямокутник зі сторонами, паралельними координатним осям.

Таким чином, ми ставимо завдання за допомогою функції розподілу системи визначити ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в прямокутник D (рис. 6.8), сторони якого паралельні осям координат. При цьому обумовимо, куди будемо рухатися відносно межі прямокутника.

Подібно до того, як ми визначали ймовірність потрапляння окремої випадкової величини на ділянку, включимо в прямокутник R його нижню і ліву межі (рис. 6.8), вони теж входять у прямокутник та позначені жирними лініями; як і для окремої випадкової величини, питання про включення граничних значень відіграє істотну роль лише для перервних випадкових величин.

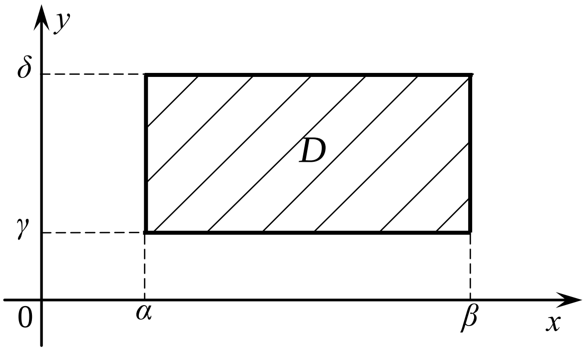

Рисунок 6.8 – Імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в прямокутник D

Подія (X, Y), яку ми аналізували, є D, вона може бути подана утворенням подій:

$$\alpha \le x \le \beta \text{ і } \gamma \le y \le \delta,$$

$$(x, y) \in D = [(\alpha \le x \le \beta)(\gamma \le y \le \delta)].$$

Щоб виразити ймовірність цієї події через функцію розподілу системи, розглянемо на площині xoy чотири нескінченних квадранта (рис. 6.9) з вершинами в точках A (β, δ); B (β, γ); C (α, γ); E (α, δ).

Якщо позначити ймовірність потрапляння у відповідний квадрант P з індексом вершини квадранта P_a, P_b, P_c, P_e, то нас цікавить імовірність потрапляння в прямокутник D:

$$P_D = P\,[(X, Y) \in D] = P_a - P_b - P_e + P_c.$$

Доданки правої частини:

$$P_a = F\,(x_a, y_a) = F\,(\beta, \delta),$$

$$P_b = F\,(x_b, y_b) = F\,(\beta, \gamma),$$

$$P_e = F\,(x_e, y_e) = F\,(\alpha, \delta),$$
$$P_c = F\,(x_c, y_c) = F\,(\alpha, \gamma).$$

Таким чином,

$$P\,[(X, Y) \in D] = F\,(\beta, \delta) - F\,(\beta, \gamma) - F\,(\alpha, \delta) + F\,(\alpha, \gamma). \quad (6.4)$$

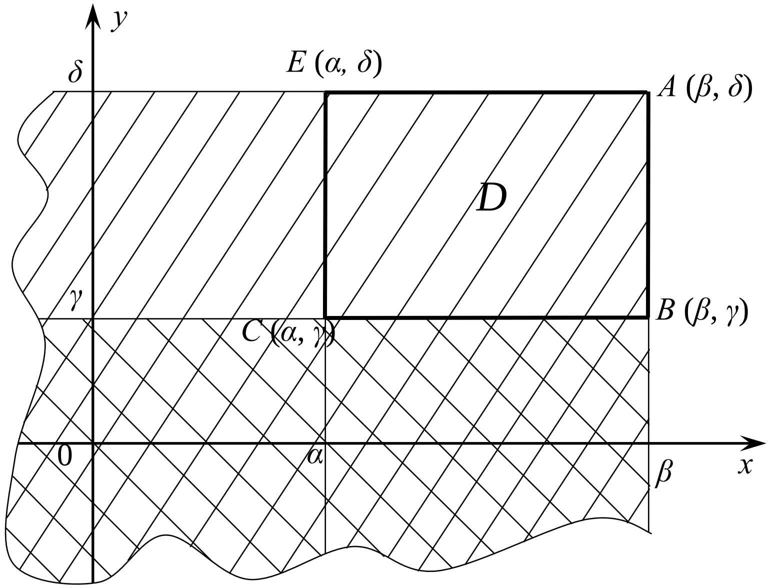

Рисунок 6.9 – Чотири нескінченних квадранти

За формулою (6.4) за допомогою функції розподілу системи може бути обчислена ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в прямокутник D, сторони якого паралельні координатним осям.

6.3. Щільність розподілу системи двох випадкових величин

Функція розподілу існує для систем будь-яких випадкових величин, як перервних, так і неперервних. Для системи неперервних випадкових величин, крім функції розподілу, існує й щільність розподілу системи двох випадкових величин [35].

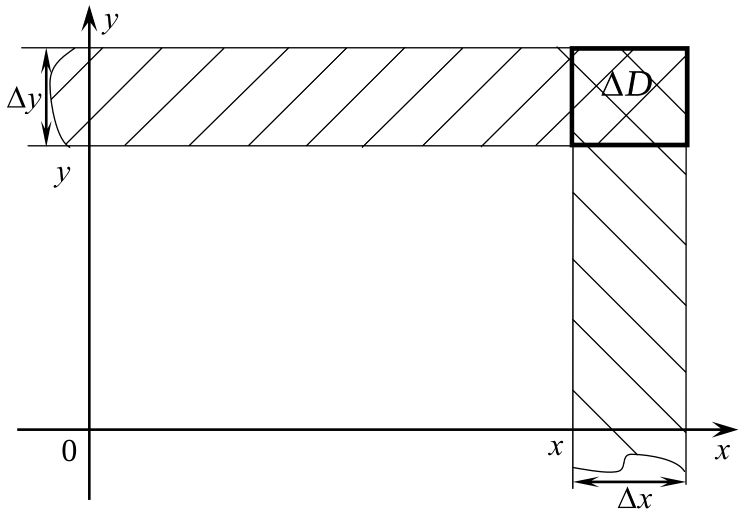

Рисунок 6.10 – Геометричне зображення системи двох безперервних випадкових величин

Визначимо поняття й величину щільності розподілу системи двох випадкових величин так само, як і окрему випадкову величину.

Нехай є система двох неперервних випадкових величин. Геометрично вона може бути подана випадковою точкою (X, Y) на площині *xoy* (рис. 6.10). Задача визначення щільності розподілу системи двох випадкових величин зводиться до визначення щільності ймовірності потрапляння випадкової точки в різні елементарні області площини *xoy*. Для розв'язання цієї задачі розглянемо на площині *xoy* елементарний прямокутник ΔD зі сторонами Δx і Δy, що примикає до точки з координатами x, y. За формулою (6.4) ймовірність потрапляння точки в цей прямокутник

$$P\,[(X,\,Y) \in \Delta D] = F\,(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - F\,(x + \Delta x,\, y) -$$

$$- F(x, y + \Delta y) + F(x, y).$$

Розділимо ймовірність потрапляння випадкової точки в елементарний прямокутник на площу цього прямокутника й перейдемо до межі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$:

$$\lim \frac{P\left[(X,Y) \in D\right]}{\Delta D} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x+\Delta x, y) - F(x, y+\Delta y) + F(x,y)}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

Якщо функція $F(x, y)$ диференційована, то права частина наведеного виразу являє собою другу змішану частинну похідну функції $F(x, y)$ за x та y. Позначивши цю похідну через $f(x, y)$, одержимо

$$F(x, y) = \partial^2 \cdot F(x, y)/\partial x \partial y = F_{xy}(x, y). \qquad (6.5)$$

Вираз (6.5) називають *щільністю розподілу системи*.

Таким чином, щільність розподілу системи є межею відношення ймовірності потрапляння в елементарний прямокутник до площини цього прямокутника, коли обидва його розміри прямують до нуля й виражається другою змішаною похідною функцією розподілу системи за обома аргументами [34].

Геометрично функція $f(x, y)$ подана деякою поверхнею (рис. 6.11), що аналогічна кривій розподілу для окремої випадкової величини і називається **поверхнею розподілу** [35].

Якщо перетнути поверхню розподілу $f(x, y)$ площиною, паралельною площині *xoy*, і спроектувати перетин на площину *xoy*, то отримаємо криву, в кожній точці якої щільність розподілу постійна. Такі криві називаються кривими однакової щільності.

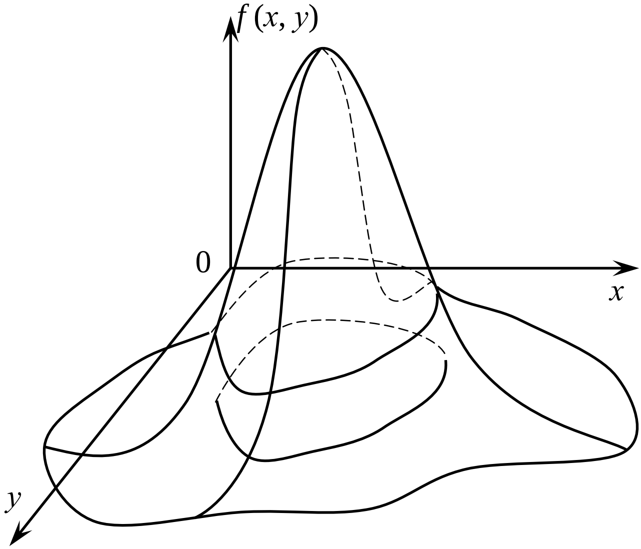

Рисунок 6.11 – Геометричне зображення функції $f(x, y)$ (крива однакової щільності) – поверхня розподілу

Розглядаючи щільність розподілу однієї випадкової величини $f(x)$, ми ввели поняття елемента ймовірності $f(x)dx$ – імовірності події, яка полягає в тому, що випадкова величина X потрапляє на елементарну ділянку, що примикає до x (рис. 6.12). Геометрично елемент імовірності визначається елементарною площиною, обмеженою кривою розподілу, і спирається на ділянку dx [33].

Аналогічне поняття елемента ймовірності і для системи двох випадкових величин. Елементом імовірності системи двох випадкових величин буде $f(x, y)\,dxdy$.

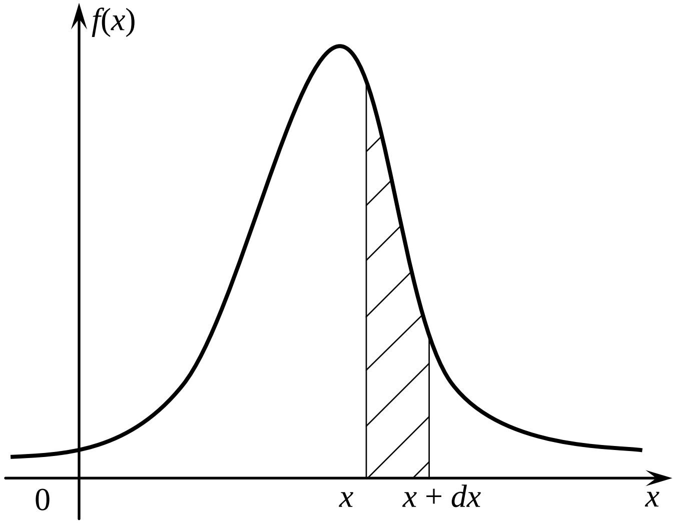

Рисунок 6.12 – Геометричне зображення елемента ймовірності визначеною елементарною площиною, обмеженою кривою розподілу

Величина елемента ймовірності є не що інше, як імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в елементарний прямокутник dD зі сторонами dx і dy. Геометрично ця ймовірність визначається об'ємом елементарного паралелепіпеда (рис. 6.13), обмеженого зверху поверхнею розподілу $f(x, y)$, і спирається на елементарний прямокутник dD, що примикає до точки (x, y).

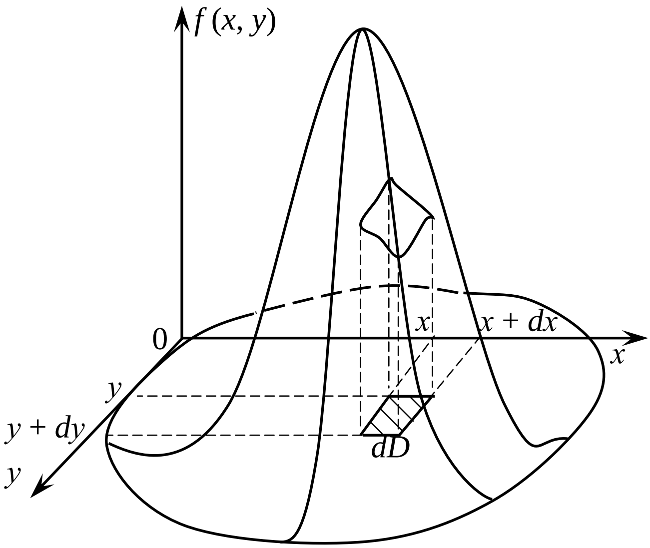

Рисунок 6.13 – Імовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в елементарний прямокутник dD зі сторонами dx і dy (обсяг елементарного паралелепіпеда)

Використовуючи поняття елемента ймовірності для системи двох випадкових величин, можна визначити ймовірність потрапляння випадкової точки в довільну область D. Ця ймовірність визначається підсумовуванням елементів імовірності на всій заданій області:

$$p\,[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (6.6)$$

Геометрично ймовірність потрапляння випадкової точки в область D зображується об’ємом циліндричного тіла (рис. 6.14), що має в основі область D та обмеженого зверху поверхнею розподілу [34].

Формула (6.6) є формулою в загальному вигляді та визначає ймовірність потрапляння точки в задану площину. З неї випливає формула для ймовірності потрапляння точки в прямокутник *D*, обмежений абсцисами α і β та ординатами γ і δ:

$$p\,[(X, Y) \in D] = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f\,(x, y)\,dx\,dy. \qquad (6.7)$$

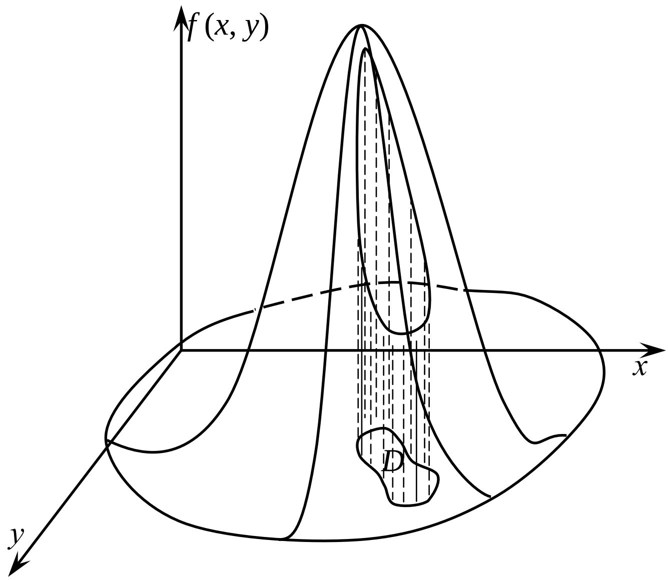

Рисунок 6.14 – Імовірність потрапляння випадкової точки в область *D*

Використовуючи поняття елемента ймовірності системи, аналогічно формулі (6.7) можна одержати вираз, що визначає функцію розподілу системи $F\,(x, y)$ через щільність розподілу $f\,(x, y)$. Як відомо, функція розподілу виражає ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в нескінченний квадрант або, що те саме, в прямокутник, який визначається абсцисами $-\infty$ і x та ординатами $-\infty$ і y. Таким чином, за аналогією до формули (6.7)

$$F(X, Y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{6.8}$$

Відзначимо **дві основні властивості щільності розподілу системи**.

1. Щільність розподілу системи є функцією невід'ємною:

$$f(x, y) \geq 0.$$

За визначенням, щільність розподілу є межею відношення двох невід'ємних величин (імовірності потрапляння в прямокутник до площі прямокутника) і, отже, від'ємною бути не може [38].

2. Подвійний інтеграл у нескінченних межах від щільності розподілу системи дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy = 1. \tag{6.9}$$

Інтеграл (6.9) являє собою ймовірність потрапляння випадкової точки в усю площину *xoy*, тобто ймовірність достовірної події, а тому дорівнює одиниці. Геометрично ця властивість означає, що об'єм тіла, обмежений поверхнею розподілу $f(x, y)$ і площиною *xoy*, дорівнює одиниці.

Для розв'язання задачі з визначення щільності розподілу окремих випадкових величин, що входять до системи, але за відомої щільності розподілу системи $f(x, y)$ скористаємося формулами (6.3). Тоді

$$F_1(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Продиференціювавши цей вираз за x, одержимо щільність розподілу величини X:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy. \tag{6.10}$$

Аналогічно для випадкової величини Y

$$f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx. \tag{6.11}$$

Таким чином, щоб одержати щільність розподілу однієї з випадкових величин, що входять до системи, потрібно щільність розподілу системи проінтегрувати в нескінченних межах за аргументом, що відповідає іншій випадковій величині.

Якщо інша випадкова величина має кінцеві межі (інтервал можливих значень), то інтегрувати необхідно в межах крайніх значень випадкової величини.

Приклад 2. Дана функція розподілу системи двох випадкових величин

$$F(x, y) = \left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{y}{5}}\right)$$

за зміни X та Y від 0 до ∞.

Визначити щільність розподілу системи двох випадкових величин і щільності розподілу випадкових величин, що входять до системи.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Щільність розподілу системи знайдемо за формулою

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(1 - e^{-\frac{x}{2}}\right)\left(1 - e^{-\frac{y}{5}}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left(1 - e^{-\frac{y}{5}}\right)\right] = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}.$$

2. Щільність розподілу окремих випадкових величин, що входять до системи, визначимо за формулами (6.10) і (6.11) з урахуванням зауваження до них:

$$f_1(x) = \int_0^\infty f(x, y)dy = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}dy =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\left|e^{-\frac{y}{5}}\right|_0^\infty = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}},$$

$$f_2(x)=\int_0^{\infty} f(x,y)dx=-\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}\int_0^{\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{2}}dx=$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}\left|e^{-\frac{x}{2}}\right|_0^{\infty}=-\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}.$$

Відповідь:

$$f(x,y)=\frac{1}{10}\,{}^{-\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right]},$$

$$f_1(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}};\ f_2(y)=\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}.$$

Можна розв'язати приклад і по-іншому.

За визначенням

$$f_1(x)=F'_1(x) \quad \text{і} \quad f_2(y)=F'_2(y),$$
$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

За результатами розв'язання прикладу з п. 6.2 маємо

$$F_1(x)=1-e^{-\frac{x}{2}}, \quad \text{а} \quad F_2(y)=1-e^{-\frac{y}{5}}.$$

Звідси

$$f_1(x)=\frac{\partial}{\partial x}F_1(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, \quad \text{а} \quad f_2(y)=\frac{\partial}{\partial y}F_2(y)=\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}};$$

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}}=\frac{1}{10}e^{-\left[\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right]}.$$

6.4. Залежні та незалежні випадкові величини

Розглядаючи залежні випадкові події, ми ввели поняття умовної ймовірності *P* (*A*/*B*), якою називали ймовірність події *A*, обчислену за умови, що мало місце подія *B*.

Аналогічно для характеристики залежності випадкових величин, що входять до системи, введене поняття умовних законів розподілу.

Умовним законом розподілу величини *X*, що входить до системи (*X*, *Y*), називають її закон розподілу, обчислений за умови, що інша випадкова величина *Y* набула певного значення.

Цей закон може бути заданий як функцією розподілу $F(x/y)$ – умовною функцією розподілу, так і щільністю розподілу $f(x/y)$ – умовною щільністю розподілу.

При вивченні системи випадкових величин завжди необхідно звертати увагу на ступінь і характер їх залежності, що можуть бути різними. В одних випадках залежність між випадковими величинами може бути настільки тісною, що, знаючи значення однієї випадкової величини, можна з точністю вказати значення іншої випадкової величини, що входить до системи. В іншому крайньому випадку залежність між випадковими величинами, які утворюють систему, настільки слабка, що їх практично можна вважати незалежними.

Установимо поняття незалежності випадкових величин.

Випадкова величина Y називається незалежною від випадкової X, якщо закон розподілу величини Y не залежить від того, якого значення набула величина X [1].

Використовуючи поняття умовного закону розподілу, умову незалежності випадкової величини Y від X можна записати у вигляді

$$f(x/y) = f_2(y), \qquad (6.12)$$

при будь-якому x. Якщо ж Y залежить від X, то

$$f(x/y) \neq f_2(y). \qquad (6.13)$$

Залежність чи незалежність випадкових величин, як і випадкових подій, завжди взаємна, тобто якщо X не залежить від Y, то і Y не залежить від X.

Сформулюємо більш загальне визначення незалежних випадкових величин, що утворюють систему.

Випадкові величини X і Y називаються **незалежними**, якщо закон розподілу кожної з них не залежить від того, якого значення набула інша. В іншому випадку величини X і Y називаються **залежними** [1].

Для незалежних випадкових величин безперервного типу справедлива рівність

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{6.14}$$

тобто щільність розподілу системи незалежних випадкових величин дорівнює добутку щільності розподілу окремих величин, що входять до системи.

Таким чином, вираз (6.14) можна розглядати як необхідну й достатню умову незалежності випадкових величин.

Для залежних випадкових величин щільність розподілу системи дорівнює щільності розподілу однієї з величин, що входять до системи, помноженій на умовну щільність розподілу іншої величини, обчислену за умови, що перша величина набула заданого значення:

$$\left.\begin{aligned} f(x, y) &= f_1(x) f(y/x), \\ f(x, y) &= f_2(x) f(x/y) \end{aligned}\right\}. \tag{6.15}$$

Часто по самому виду функції розподілу системи можна зробити висновок, що випадкові величини, які утворюють систему, незалежні. Дійсно, якщо щільність розподілу системи $f(x, y)$ розпадається на добуток двох функцій, одна з яких залежить лише від x, а інша – лише від y, то можна зробити висновок, що випадкові величини X і Y незалежні.

Це можна добре продемонструвати на прикладі розподілу (розсіювання) точок падіння снарядів щодо центра розсіювання. Причини, що викликають розсіювання снарядів за дальністю, здебільшого відмінні від причин, що призводять до розсіювання снарядів у напрямку. Звідси відхилення розривів від центра розсіювання за дальністю $X_{р}$ і напрямком $Z_{р}$ – незалежні випадкові величини.

Розсіювання снарядів підпорядковується так званому нормальному закону із серединними відхиленнями *Вд* і *Вб*. Щільність розподілу снарядів щодо центра розсіювання має вигляд

$$f(x_p, z_p) = \frac{\rho^2}{\pi B\partial B\text{б}} e^{-\rho\left[\frac{x_p^2}{B\partial^2} + \frac{z_p^2}{B\text{б}^2}\right]}.$$

Перетворимо праву частину у виразі щільності:

$$f(x, z) = \frac{\rho^2}{\pi B\partial B\text{б}} e^{-\rho\left[\frac{x_p^2}{B\partial^2} + \frac{z_p^2}{B\text{б}^2}\right]} =$$

$$= \frac{\rho}{B\partial\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x_p^2}{B\partial^2}} \frac{\rho}{B\text{б}\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{z_p^2}{B\text{б}^2}} = f_1(x_p) f_2(z_p),$$

де f_1 $(x_р)$ і f_2 $(z_р)$ – щільності розподілу точок падіння снарядів за дальністю і напрямком таким чином:

$$f_1(x_р) \cdot f_2(z_р) = f_1(x_р) \cdot f_2(z_р),$$

що й відображає незалежність випадкових величин $X_р$ і $Z_р$.

6.5. Числові характеристики розподілу системи випадкових величин

Для характеристики розподілу системи двох випадкових величин, як і для характеристики розподілу однієї випадкової величини, застосовують початкові й центральні моменти різних ступенів.

Початковим моментом порядку k, S системи (X, Y) називається математичне сподівання X^k і Y^S, тобто

$$\alpha_{kS} = M[X^k Y^S].$$

Характеристикою положення системи (X, Y) є сукупність перших початкових моментів, що являють собою математичне сподівання випадкових величин, які входять до системи:

$$\alpha_{1,0} = M[XY^0] = M[X] = m_x,$$

$$\alpha_{0,1} = M[X^0Y] = M[Y] = m_y.$$

Геометрично величини m_x і m_y визначають на площині положення середньої точки, центра розподілу системи, навколо якого розсіюються випадкові точки (X, Y).

Другі центральні моменти являють собою дисперсії величин X і Y:

$$\mu_{2,0} = M[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0] = M[(x - m_x)^2] = D_x;$$

$$\mu_{0,2} = M[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2] = M[(x - m_y)^2] = D_y;$$

Дисперсії випадкових величин характеризують розсіювання випадкової точки в напрямку осей *ox* і *oy* або, що те саме, розсіювання випадкових величин щодо своїх математичних сподівань [33].

Однак ці моменти не є характеристиками випадкових величин, що входять до системи, з точки зору їх взаємного зв'язку. Необхідна така характеристика, *яка була б як обидві випадкові величини в їх сукупності як єдине ціле*, тобто характеризувала зв'язок між випадковими величинами, що утворюють систему. Такими характеристиками є змішані центральні моменти. Найбільш часто застосовують другий змішаний центральний момент, так званий кореляційний або момент зв'язку.

Як ми відзначили, кореляційним моментом (моментом зв'язку) називається другий змішаний центральний момент (другим моментом його називають тому, що сума показників степеня в зосереджених випадкових величинах $\overset{\circ}{X}$ і $\overset{\circ}{Y}$ дорівнює двом):

$$\mu_{1,1} = \left[\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y} \right].$$

Для кореляційного моменту системи двох випадкових величин (X, Y) введене спеціальне позначення k_{xy}. Тоді

$$k_{xy} = M[^\circ\overset{\circ}{X} \overset{\circ}{Y}\,] = M[(X - m_x)(Y - m_y)]. \qquad (6.16)$$

Розрахункові формули:

– для перервних випадкових величин

$$k_{xy} = \Sigma_i \Sigma_j\, (x_i - m_x)\, (y_j - m_y)\, p_{ij}; \qquad (6.17)$$

– для безперервних випадкових величин

$$k_{xy} = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)\, (y - m_y)\, f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (6.18)$$

Визначимо, чому дорівнює кореляційний момент системи, утвореної двома незалежними випадковими величинами. Якщо $f(x, y)$ – щільність розподілу системи незалежних випадкових величин X і Y зі щільністю розподілу $f_1(x)$ і $f_2(y)$, то

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Підставляючи цей вираз у формулу (6.18), маємо вираз

$$k_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int (x - m_x)(y - m_y) f_1(x) f_2(y) dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y) f_2(y) dy,$$

за яким кореляційний момент дорівнює добутку інтегралів, кожен з яких, як і перший центральний момент відповідної випадкової величини, дорівнює нулю [34].

Таким чином, для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю, тобто $k_{xy} = 0$. Отже, якщо кореляційний момент двох випадкових величин відмінний від нуля, то це є ознакою залежності між ними.

З точки зору характеристики зв’язку випадкових величин кореляційний момент має один недолік. Як другий змішаний центральний момент він характеризує розсіювання випадкових величин. Тому його величина буде залежати не лише від ступеня залежності випадкових величин, а й від характеру розсіювання їх відносно математичного сподівання. З формули (6.17) бвчимо, що якщо будьяка випадкова величина системи (X, Y) має малу ділянку розсіювання щодо свого математичного сподівання, то, якою б *тісною* залежністю не були зв’язані випадкові величини X і Y, кореляційний момент буде мати малу величину.

Ми вже відзначили, що для незалежних випадкових величин кореляційний момент дорівнює нулю. Для залежних випадкових величин кореляційний момент відмінний від нуля. Доцільно для характеристики зміни випадкових величин мати такий коефіцієнт, який збільшувався б у міру посилення залежності між випадковими величинами і в той самий час не залежав від характеру розподілу випадкових величин щодо їх математичного сподівання. З метою виконання цієї вимоги для характеристики зв'язку між випадковими величинами системи (X, Y) застосовують так званий коефіцієнт кореляції, що визначається за формулою [35]:

$$R_{xy} = k_{xy}/\sigma_x\sigma_y, \tag{6.19}$$

де σ_x і σ_y – середні квадратичні відхилення випадкових величин X і Y, що утворюють систему.

Для незалежних випадкових величин коефіцієнт кореляції дорівнює нулю (оскільки k_{xy} = 0).

Випадкові величини, для яких коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, називаються некорельованими, або непозв'язаними. Таким чином, незалежні випадкові величини X і Y є некорельованими, оскільки для них R_{xy} = 0. Однак зворотне твердження про те, що некорельовані випадкові величини завжди незалежні, не має місця. Іншими словами, мають місце такі випадкові величини, для яких коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, незважаючи на те, що вони залежні. З цього випливає, що рівність нулю коефіцієнта кореляції необхідна, але недостатня умова незалежності випадкових величин. Для всіх незалежних випадкових величин R_{xy} = 0, але якщо для будь-яких двох випадкових величин визначено, що вони некорельовані (тобто для них коефіцієнт кореляції дорівнює нулю), то це ще не означає, що вони незалежні.

Справа у тому, що коефіцієнт кореляції характеризує не будь-яку, а лише лінійну залежність. Як зазначалося на початку цього підрозділу, випадкові величини в загальному випадку пов'язані ймовірнісною залежністю. Лінійна ймовірнісна залежність полягає в тому, що в разі зростання однієї випадкової величини інша має тенденцію змінюватися (зростати або спадати) за лінійним законом.

Ми показали, що для незалежних випадкових величин коефіцієнт кореляції дорівнює нулю. Подивимося, чому буде дорівнювати коефіцієнт кореляції, якщо випадкові величини тісно пов'язані лінійною залежністю

$$Y = aX + b.$$

Визначимо величину коефіцієнта кореляції цієї залежності:

$$R_{xy} = k_{xy}/\sigma_x\sigma_y,$$

$$k_{xy} = M\,[(X - m_x)\,(Y - m_y)].$$

Обчислимо m_y:

$$m_y = M\,[aX + b] = aM\,(X) + b = am_x + b.$$

Тоді

$$k_{xy} = M\,[(X - m_x)\,(aX - b - am_x - b)] =$$

$$= M\,[(X - m_x)\cdot a(X - m_x)] = aM\,[(X - m_x)^2] = a\sigma_x^2.$$

Отже,

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{D(aX + b)} = \sqrt{a^2 D_x} = |\,a\,|\,\sigma_x.$$

Тепер визначимо коефіцієнт кореляції:

$$R_{xy} = k_{xy}/\sigma_x\sigma_y = a\sigma_x^2/\sigma_x|a|\sigma_x = a/|a|.$$

Таким, чином, при точній функціональній лінійній залежності коефіцієнт кореляції $R_{xy} = \pm 1$, причому знак при одиниці визначається знаком при коефіцієнті за лінійної функції.

У загальному випадку одержуємо, що коефіцієнт кореляції приймати будь-які значення в інтервалі

$$-1 \le R_{xy} \le +1. \qquad (6.20)$$

Позитивний знак при коефіцієнті лінійної функції свідчить про те, що при збільшенні однієї величини інша також збільшується. Таким чином, якщо коефіцієнт кореляції має значення в межах $0 < R_{xy} < 1$, то це означає, що випадкові величини X та Y знаходяться в імовірнісній лінійній залежності і що при збільшенні (зменшенні) однієї з випадкових величин інша випадкова величина має тенденцію в середньому також збільшуватися (зменшуватися). Про такі випадкові величини говорять, що вони мають позитивну кореляцію, прикладом цього є зв'язок випадкової величини q – ваги осколка та l – його довжини.

Якщо коефіцієнт кореляції має від'ємне значення, тобто $-1 < R_{xy} < 0$, то це означає, що випадкові величини X і Y знаходяться в ймовірнісній залежності, але характер їх змін різний: при збільшенні (зменшенні) однієї з них інша має тенденцію в середньому зменшуватися (збільшуватися). Про такі випадкові величини говорять, що вони мають негативну кореляцію, прикладом якої є зв'язок випадкової величини ваги осколка q та його початкової швидкості v_0. При цьому як при позитивній, так і при негативній кореляції більшій за абсолютним значенням величині коефіцієнта відповідає й великий ступінь зв'язку між випадковими величинами.

Скориставшись результатами дослідів над системою двох випадкових величин, і задавши на графіку у вигляді точок усі одержані з досліду пари значень випадкових величин в першому наближенні, можна зробити висновок про наявність і характер кореляційної залежності між ними. На рисунку 6.15 показані приклади реєстрації результатів дослідів над системою. За результатами, показаними на рис. 6.15 *а*, можна зробити висновок, що випадкові величини від X до Y знаходяться в тісній позитивній кореляційній залежності. Випадкові величини V і W (рис. 6.15 *б*) знаходяться в більш слабкій негативній кореляційній залежності. За результатами дослідів із системою випадкових величин T і U (рис. 6.5 *в*) можна зробити висновок, що випадкові величини T і U не корельовані [25].

Такі є числові характеристики системи двох випадкових величин. У подальшому при вивченні питань, пов'язаних з обробленням дослідних даних, ми розглянемо й питання визначення з дослідів характеристик системи випадкових величин.

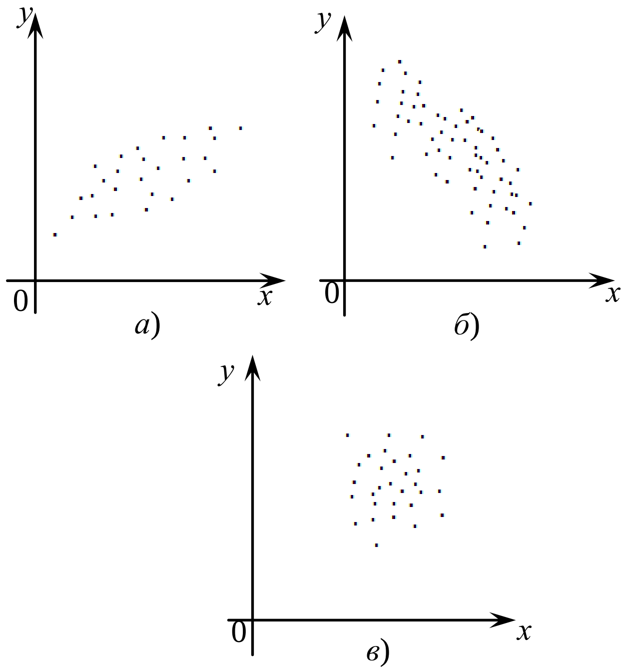

Рисунок 6.15 – Реєстрація результатів дослідів над системою двох випадкових величин

6.6. Поняття про систему кількох випадкових величин

Ми вже наводили приклад системи трьох випадкових величин, що відображають випадкове положення точки розриву під час стрільби з дистанційним підривником. На практиці стрільби доводиться розглядати й такі системи, які об’єднують набагато більшу кількість випадкових величин. Так, під час стрільби з витратою N снарядів має місце система $2N$ випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_N, Y_1, Y_2, ..., Y_N), що відображає розподіл випадкових точок N розривів.

Повною характеристикою системи довільного числа випадкових величин є закон розподілу системи, що може бути заданий як інтегральною, так і диференціальною функцією.

За аналогією з системою двох випадкових величин наведемо загальні положення, що стосуються законів розподілу як системи в цілому, так і її частини.

Функцією розподілу системи випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_k, ..., X_n) називається ймовірність спільного виконання умов вигляду $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = p\,[(X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \ldots (X_n < x_n)]. \quad (6.20)$$

Щільністю розподілу системи n випадкових величин буде n-на змішана похідна від функції розподілу системи, взята один раз за кожним аргументом:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \partial^n F(x_1, x_2, ..., x_n)/\partial x_1, \partial x_2, ..., \partial x_n. \quad (6.21)$$

Закон розподілу системи кількох випадкових величин є повною, вичерпною ймовірнісною характеристикою системи. Однак не завжди може бути встановлений та в деяких випадках цього й не потрібно. У ряді завдань приблизний тип закону розподілу відомий заздалегідь і потрібно визначити лише його характеристики [9].

Розглянемо числові характеристики системи кількох випадкових величин. Ці характеристики повинні відображати як окремі випадкові величини, що входять до системи, так і систему в цілому. Мінімальне число характеристик системи випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n) зводиться до такого:

– n математичних сподівань, що характеризують середні значення величин,

$$m_1, m_2, ..., m_n;$$

– n дисперсій, що характеризують розсіювання випадкових величин щодо математичного сподівання,

$$D_1, D_2, ..., D_n;$$

– $n\,(n - 1)$ кореляційних моментів (або коефіцієнтів кореляції), що характеризують попарно зв'язок (кореляцію) всіх величин, що входять до системи,

де

$$k_{ij} = M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{Y}_j],$$

або

$$\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i, \quad \text{а} \quad \overset{\circ}{X}_j = X_j - m_j.$$

Отже, кореляційні моменти (коефіцієнти кореляції) складаються для будь-якої пари випадкових величин, що входять до системи, за умови $i \neq j$, при якій число кореляційних моментів буде $n\ (n - 1)$. Однак якщо розглянути дисперсію випадкової величини, то за формою вона являє собою кореляційний момент величини X_i «з самою собою», а саме:

$$D_i = M\left[\overset{\circ}{X}{}_i^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_i\right] = k_{ii}, \text{ (або } k_{ij} \text{ за умови } i = j).$$

Для зручності запису і зіставлення кореляційних моментів доцільно останні розміщувати у вигляді таблиці (матриці).

Така таблиця називається кореляційною матрицею системи випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n).

Діагональ $k_{11} - k_{nn}$ називається головною діагоналлю матриці. Оскільки $k_{ij} - k_{ji}$, то елементи кореляційної матриці, розміщені симетрично щодо головної діагоналі, однакові. По головній діагоналі кореляційної матриці розміщені дисперсії випадкових величин, що входять до системи.

Якщо випадкові величини, що входять до системи, некорельовані, то всі елементи кореляційної матриці, крім розміщених по головній діагоналі, дорівнюють нулю.

Така матриця називається ***діагональною*** [21].

Якщо таблиця складається з коефіцієнтів кореляції, то вона називається нормованою кореляційною матрицею. Всі елементи головної діагоналі нормованої кореляційної матриці дорівнюють одиниці. Нормована кореляційна матриця має вигляд

$X_i \backslash X_j$	$X_1, X_2, ..., X_n$
X_1 X_2 . . . . . X_n	$\begin{Vmatrix} k_{11}, k_{12}, ..., k_{1n} \\ k_{21}, k_{22}, ..., k_{2n} \\ . \quad . \quad ... \quad . \\ . \quad . \quad ... \quad . \\ . \quad . \quad ... \quad . \\ k_{n1}, k_{n1}, ..., k_{nn} \end{Vmatrix} = \Vert k_{ij} \Vert$

$$\Vert k_{ij} \Vert = \begin{Vmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & D_2 & 0 & 0 & ... & 0 \\ & & D_2 & 0 & ... & 0 \\ & & & & & .... \\ & & & & & ... \\ & & & & & .. \\ & & & & & D_n \end{Vmatrix}$$

$$\Vert R_{ij} \Vert = \begin{Vmatrix} 1 & R_{12} & R_{18} & ... & R_{1n} \\ & 1 & R_{12} & ... & R_{2n} \\ & & 1 & ... & R_{3n} \\ & & & & .... \\ & & & & .... \\ & & & & ... \\ & & & & 1 \end{Vmatrix}$$

Елементи матриці, розміщені нижче від головної діагоналі, зазвичай не записують, оскільки матриця симетрична.

Висновки до розділу 6

Таким чином, основні поняття про систему випадкових величин та функцію розподілу системи двох випадкових величин під час вивчення дозволяють визначати числові характеристики розподілу системи випадкових величин, а також щільність її розподілу. Під час цього визначення дається можливість відзначити дві основні властивості щільності розподілу, системи випадкових величин.

У цьому розділі наведені основні поняття про систему випадкових величин, функцію розподілу системи двох випадкових величин, її числові характеристики, щільність розподілу системи двох випадкових величин, залежні й незалежні випадкові величини, а також систему кількох випадкових величин. Також подані приклади до матеріалу розділу та варіанти їх розв’язання.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Система випадкових величин, функція і щільність розподілу системи двох випадкових величин, числові характеристики розподілу системи випадкових величин, властивості щільності розподілу, залежні й незалежні, перервні та неперервні випадкові величини, система кількох випадкових величин, щільність розподілу окремих випадкових величин, координати положення розриву, вектор системи координат, розсіювання снарядів, випадкове явище, об’єктивна закономірність, температура повітря, закони розподілу системи, ймовірність потрапляння випадкової точки, квадрант випадкових величин, елементарний прямокутник, геометричне зображення функції кривою розподілу, поверхня розподілу, початкові й центральні моменти різних ступенів, змішаний центральний момент, момент зв’язку, *зосереджені випадкові величини, математичне сподівання, середні квадратичні відхилення випадкових величин, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції, коефіцієнт лінійної функції, реєстрація результатів дослідів, діагональ матриці, нормована кореляційна матриця.*

Питання для повторення та самоконтролю

1. У чому полягає суть системи випадкових величин?

2. Дати визначення функції розподілу системи двох випадкових величин.

3. Дати визначення щільності розподілу системи двох випадкових величин.

4. У чому полягає відмінність залежних і незалежних випадкових величин?

5. У чому полягає відмінність перервних і неперервних випадкових величин?

6. Перелічити числові характеристики розподілу системи випадкових величин.

7. Дати визначення й показати за допомогою формули кореляційний момент системи двох випадкових величин.

8. Дати визначення й показати за допомогою формули коефіцієнта кореляції системи двох випадкових величин.

9. Дати визначення й показати за допомогою формули середнє квадратичне відхилення системи двох випадкових величин.

10. У чому полягає ймовірність потряпляння точки в задану площину? (Показати формулу в загальному вигляді).

11. Дати визначення діагональній матриці.

Завдання для самопідготовки

1. Графічно зобразити положення випадкових точок падіння снаряда в системі координат.

2. Графічно зобразити функцію розподілу системи *двох випадкових величин.*

3. Графічно зобразити ймовірність потрапляння випадкової точки в задану область: прямокутника неправильної форми, прямокутника з нескінченними сторонами.

4. Зобразити на аркуші кореляційну матрицю системи випадкових величин (точок падіння снарядів у площину цілі).

5. *Зобразити на аркуші загальний вигляд визначення ймовірності влучення снаряда в задану площину.*

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Застосування теорії ймовірностей під час підготовки даних для стрільби артилерією.

2. Теорія ймовірностей у статистиці влучень у ціль.

3. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

4. *Теорія ймовірностей в артилерії під час визначення ефективності вогневого ураження.*

Розділ 7

НОРМАЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

7.1. Нормальний розподіл системи випадкових величин (нормальний розподіл на площині)

Як для окремої випадкової величини, так і для системи двох випадкових величин нормальний розподіл найбільш поширений. Оскільки система двох випадкових величин графічно зображується розподілом положення випадкової точки на площині, нормальний закон розподілу системи двох випадкових величин часто називають «нормальним розподілом (нормальним законом) на площині».

В артилерійській практиці ми також часто стикаємося з нормальним законом розподілу на площині. Розсіювання снарядів (точок падіння снарядів), будучи системою двох випадкових величин (X_p, Z_p), підпорядковується нормальному закону на площині, що називається законом розсіювання снарядів при ударній стрільбі. Випадкові похибки щодо визначення обчислених дальності X_y та напрямку Z_y підпорядковуються нормальним законам. Спільна дія цих двох випадкових похибок призводить до випадкового відхилення середньої траєкторії від центра цілі, яке також підпорядковується нормальному закону розподілу на площині. Похибки визначення положення цілі та вогневої позиції також підпорядковуються нормальному закону на площині. Можна навести ще багато прикладів. Про них мова йтиме далі. Дію цих законів нам доведеться вивчати і враховувати під час вирішення питань ефективності стрільби.

Вид аналітичного виразу нормального розподілу на площині залежить від того, залежними або незалежними випадковими величинами утворена система, а також від того, в якій системі координат він описаний. Найбільш простий вигляд щільність розподілу в прямокутній системі координат має тоді, коли система на площині (X, Y) утворена двома незалежними випадковими величинами, а початок координат збігається з їх математичними сподіваннями.

7.1.1. Канонічний вигляд нормального закону на площині[1)]

Розглянемо одночасно дію двох незалежних випадкових величин, кожна з яких підпорядковується нормальному закону із щільністю розподілу.

Для випадкової величини X

$$f_1(x) = \rho/E_x\sqrt{\pi}\cdot e^{-\rho^2 x^2/E_x^2}.$$

Для випадкової величини Y

$$f_2(x) = \rho/E_y\sqrt{\pi}\cdot e^{-\rho^2 y^2/E_y^2}.$$

Спільна дія цих двох випадкових величин утворює систему (X, Y). Графічно в прямокутній системі координат ця система відбивається розподілом випадкової точки (рис. 7.1) [21].

У підрозділі 6.4 було показано, що для системи, утвореної незалежними випадковими величинами, справедлива рівність

$$f(x, y) = f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Відповідно до цього

$$f_1(x, y) = \rho/E_x\sqrt{\pi}\cdot e^{-\rho^2 x^2/E_x^2}\cdot\rho/E_y\sqrt{\pi}\cdot e^{-\rho^2 y^2/E_y^2}$$

або остаточно

---

1) Канонічний – взятий за зразок (від грецького kanonikos – установлений правилом).

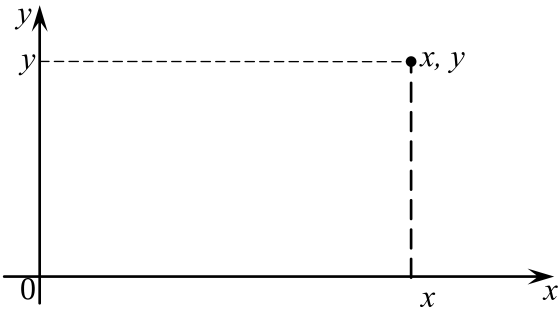

Рисунок 7.1 – Спільна дія двох незалежних випадкових величин у прямокутній системі координат

$$f(x, y) = \rho^2/\pi E_x E_y \cdot e^{-\rho^2[x^2/E_x^2 + y^2/E_y^2]}. \qquad (7.1)$$

Ми одержали канонічний вираз щільності нормального розподілу на площині.

Наприклад: щільністю нормального закону розсіювання снарядів (розривів) при ударній стрільбі щодо центра розсіювання буде

$$f(x_p, y_p) = \rho^2/\pi B\partial B\delta \cdot e^{-\rho^2(x_p^2/B\partial^2 + z_p^2/B\delta^2)}, \qquad (7.2)$$

де x_p – випадковий відхил розриву від центра розсіювання за дальністю (напрямком стрільби);

z_p – те саме, але за напрямком (перпендикулярним до напрямку стрільби);

$B\partial$ і $B\delta$ – серединні відхили, що характеризують розсіювання розривів при ударній стрільбі за дальністю і напрямком.

Як і для однієї випадкової величини, аналітичний вираз для щільності нормального розподілу на площині може бути записаний через середні квадратичні відхилення:

$$f(x, y) = 1/2\pi\sigma_x\sigma_y \cdot e^{-[x^2/2\sigma_x^2 + y^2/2\sigma_y^2]}. \qquad (7.3)$$

Графік функції (7.1), або, як часто говорять, нормальний закон на площині зображений на рис. 7.2. Поверхня розподілу має вигляд пагорба з вершиною над центром розподілу ($m_x = m_y = 0$). Краями вона спрямована в нескінченність, асимптотично наближаючись до площини *xoy*.

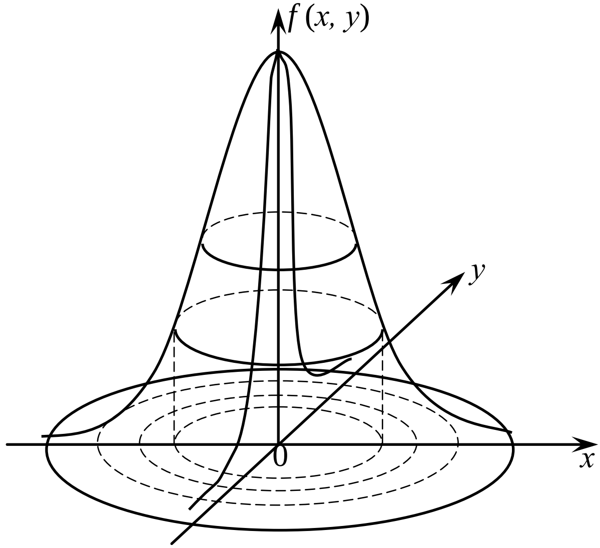

Рисунок 7.2 – Зображення нормального закону на площині

Якщо поверхня розподілу перетнута площинами, паралельними площині *xoy*, то для всіх точок проекції лінії перетину на площину *xoy* значення щільності розподілу матиме сталу величину $f(x, y) = \mathrm{const}$.

З аналітичного виразу щільності розподілу [формула (7.1)] бачимо, що величина щільності буде сталою лише в тому разі, якщо сталий показник степеня, тобто для всіх точок (X, Y), що задовольняють рівняння

$$(x^2 / E^2{}_x) + (\mathrm{y}^2 / E^2{}_y) = \mathrm{const} = k^2. \qquad (7.4)$$

Звідси в перетинах поверхні розподілу матимемо еліпси з півосями. Рівнянням проекції цих еліпсів на площину буде

$$(x^2 / kE^2{}_x) + (\mathrm{y}^2 / kE^2{}_y) = 1. \qquad (7.5)$$

Порівнюючи вирази (7.1) і (7.4), легко встановити, що величина щільності розподілу для цієї системи випадкових величин визначається величиною k: менше k – більше значення щільності розподілу, більше k – менше значення щільності розподілу [22].

Таким чином, еліпси, описувані рівнянням (7.5), відображають характер розподілу або розсіювання випадкової точки (X, Y) на площині навколо центра розсіювання. Тому їх називають **еліпсами розсіювання**.

У кожному еліпсі розсіювання величини їх головних півосей рівні kE_x і kE_y, а їх спрямування відповідно збігаються з напрямками осей координат. Еліпс, для якого $k = 1$, називається одиничним еліпсом розсіювання й позначається ε.

В одиничного еліпса величини головних півосей рівні серединним відхилам E_x і E_y. Якщо ми говоримо, що нам відомий одиничний еліпс ε, то цим самим стверджуємо, що відомі (задані) серединні відхили E_x і E_y. А це означає, що повністю відомий закон нормального розподілу в канонічному вигляді (формула (7.1)). Тому одиничний еліпс і є характеристикою нормального розподілу на площині. З цієї самої причини нормальне розсіювання випадкових точок іноді називають еліптичним. Серединні відхили E_x і E_y називають головними серединними відхилами, а напрямки головних півосей еліпса – напрямками головних осей розсіювання.

Повним еліпсом розсіювання називається такий, головні півосі якого рівні п’яти серединним відхилам, $k = 5$ (рис. 7.3). Із практичною ймовірністю можна вважати, що повний еліпс охоплює всі можливі положення випадкової точки (X, Y) щодо центра розсіювання (в деяких курсах теорії ймовірностей для повного еліпса розсіювання беруть $k = 4$) [7, 18].

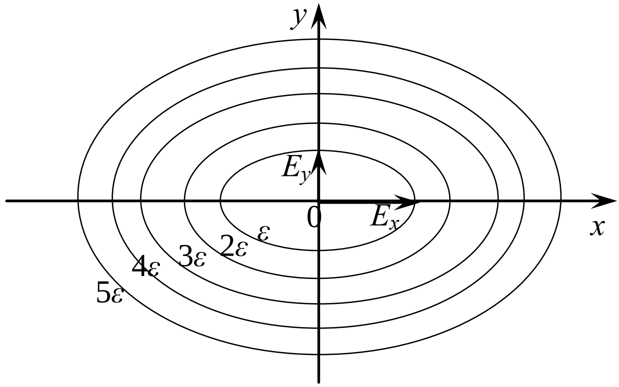

Рисунок 7.3 – Повний еліпс розсіювання

7.1.2. Загальний вираз нормального закону на площині

Раніше було розглянуто канонічний вид щільності нормального розподілу системи двох випадкових величин. Канонічний вид аналітичного виразу щільності був одержаний за умови, якщо система утворена незалежними випадковими величинами, а m_x і m_y дорівнюють нулю (формула (7.1), рис. 7.2).

Якщо система утворена двома незалежними випадковими величинами, математичні сподівання яких не дорівнюють нулю, то щільність нормального розподілу матиме вигляд

$$f(x, y) = \rho^2/\pi E_x E_y \cdot e^{-\rho^2[(x-m_x)^2/E_x^2+(y-m_x)^2/E_y^2]}. \qquad (7.6)$$

У цьому разі центр розсіювання системи буде в точці (m_x, m_y), а головні осі розсіювання – паралельні осям координат (рис. 7.4).

Якщо система утворена залежними випадковими величинами (X, Y), то головні осі розсіювання (u, v) не будуть збігатися з напрямком осей координат, а складатимуть із ним деякий кут α, що визначається з рівняння (рис. 7.5):

$$tg2\alpha = 2R_{xy}E_xE_y/(E_x^2 - E_y^2).$$

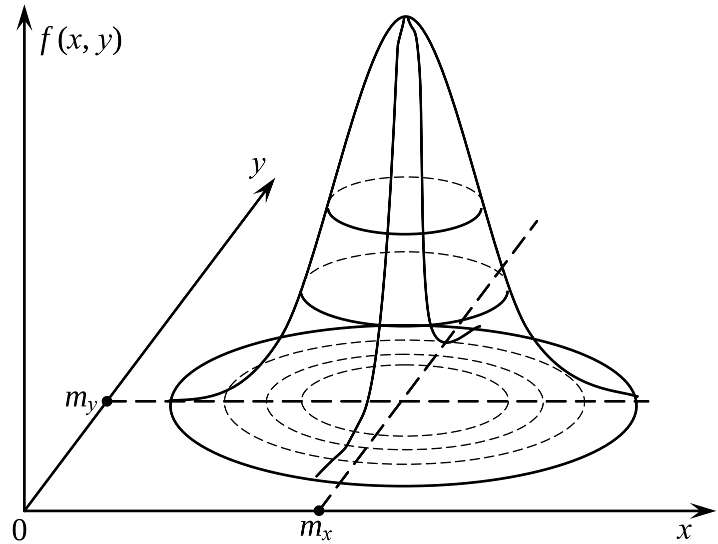

Рисунок 7.4 – Щільність нормального закону розподілу, утворена двома незалежними випадковими величинами

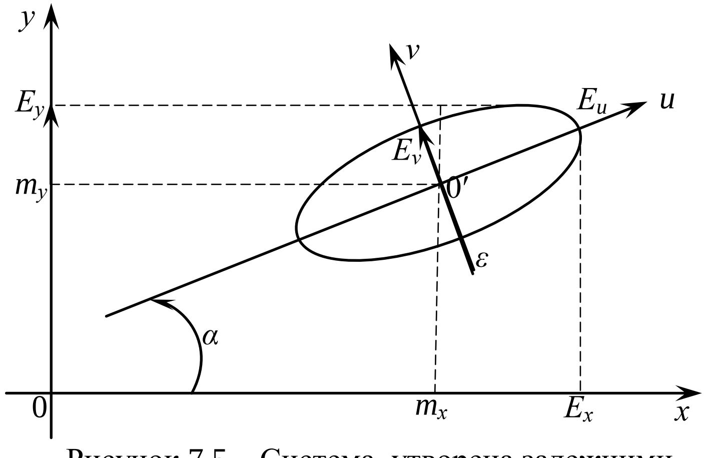

Рисунок 7.5 – Система, утворена залежними випадковими величинами (*X*, *Y*), і головні осі розсіювання (*u*, *v*), що не збігаються з напрямком осей координат

Щільність нормального розподілу на площині системи двох залежних випадкових величин має вигляд

$$f(x, y) = \rho^2/\pi E_x E_y \sqrt{1-R_{xy}^2} \cdot e^{-\frac{\rho^2}{1-R_{xy}^2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2} - 2R_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{E_x E_y} + \frac{(y-m_y)^2}{E_y^2}\right]}. \quad (7.7)$$

де R_{xy} – коефіцієнт кореляції, що характеризує залежність між випадковими величинами X і Y.

Поверхня розподілу системи показана на рис. 7.6.

Раніше зазначалося, що коефіцієнт кореляції відображає зв'язок, тобто лінійну ймовірну залежність між двома випадковими величинами, а не взагалі залежність.

Для нормального розподілу можна достовірно стверджувати, що при $R_{xy} = 0$ випадкові величини незалежні (а не лише некорельовані). Дійсно, якщо у виразі $R_{xy} = 0$ (7.6), то

$$f(x, y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{E_y^2}\right]} =$$

$$= \frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}} \cdot \frac{\rho}{E_y\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2\frac{(y-m_y)^2}{E_y^2}} = f_1(x) f_2(y),$$

що й доводить незалежність випадкових величин X і Y.

У загальному випадку щільність розподілу будь-якої системи двох випадкових величин може мати канонічний вигляд, якщо вона (система) описана в системі координат, осі якої збігаються з напрямком головних осей розсіювання [24].

Таким чином, закон розподілу однієї й тієї самої системи двох випадкових величин може бути відображений щільністю розподілу системи двох незалежних величин, якщо обрана система координат, осі якої збігаються з напрямком головних осей розсіювання, або щільністю розподілу системи двох залежних величин, якщо осі координат повернуті відносно напрямку головних осей розсіювання на кут α.

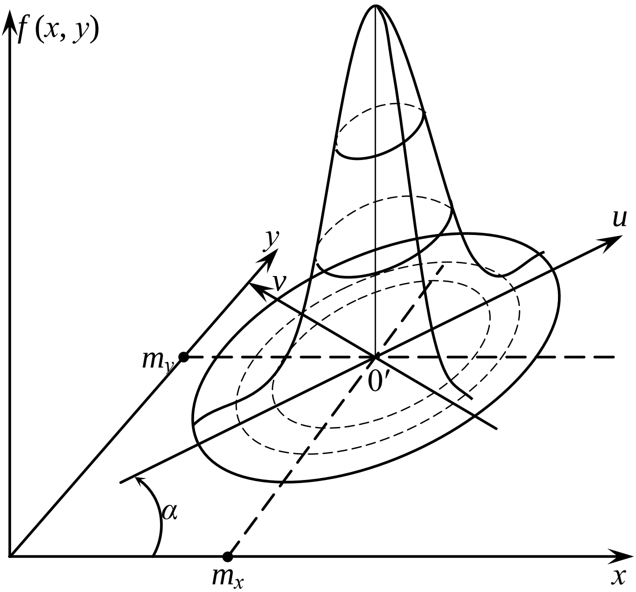

Рисунок 7.6 – Щільність нормального розподілу на площині (поверхня розподілу системи)

Простежимо цей процес на прикладі розподілу помилок визначення положення цілі при засіканні її далекоміром. Помилка в положенні цілі – результат помилки щодо визначення дальності до цілі далекоміром $x_з$ і помилки визначення напрямку на ціль, що призводить до випадкової помилки $z_з$. Головна вісь розсіювання $X_з$ помилки збігається з лінією спостереження; головна вісь розсіювання помилок $Z_з$ перпендикулярна (рис. 7.7). Таким чином, система ($X_з$, $Z_з$) є системою незалежних випадкових величин із щільністю розподілу

$$f(x_з, y_з) = \frac{\rho^2}{\pi E_{x_з} E_{z_з}} e^{-\rho^2\left(\frac{x_з^2}{E_{x_з}^2}+\frac{z_з^2}{E_{z_з}^2}\right)}.$$

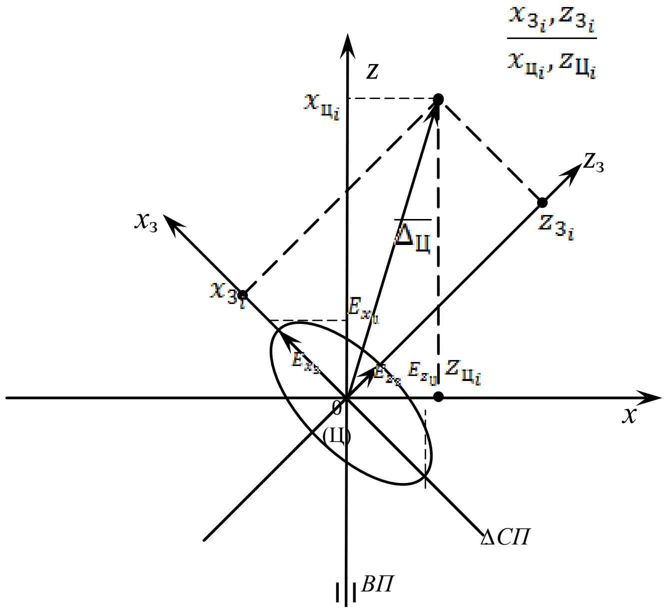

Рисунок 7.7 – Розподіл помилок визначення положення цілі при засіканні її далекоміром

Під час оцінювання точності визначення установок необхідно знати розподіл помилок у положенні цілі в системі координат *xoz*, пов’язаної з напрямком стрільби, тобто знати закон розподілу системи випадкових величин ($X_ц$, $Z_ц$).

При еліптичному розподілі системи ($X_з$, $Z_з$) перехід до системи ($X_ц$, $Z_ц$) супроводжується переходом до системи залежних випадкових величин.

Таким чином, об’єктивно існуючий розподіл помилки у визначенні положення цілі $\overline{\Delta}_ц$ може бути зафіксовано (описано):

– розподілом системи двох незалежних випадкових величин ($X_з$, $Z_з$) із серединними відхиленнями $E_{x_з}$ і $E_{z_з}$ $[R_{x_з z_з} = 0]$;

– розподілом системи двох залежних випадкових величин ($X_ц$, $Z_ц$) із серединними відхиленнями $E_{x_Ц}$ і $Z_{x_Ц}$ та коефіцієнтом кореляції $R_{x_Ц z_Ц}$, який відображає залежність між випадковими величинами $X_ц$, і $Z_ц$.

У системі координат *xoz* щільність нормального закону розподілу помилок у положенні цілі матиме вигляд

$$f(x_Ц, y_Ц) = \frac{\rho^2}{\pi E_{x_Ц} E_{z_Ц} \sqrt{1_Ц - R^2_{x_Ц z_Ц}}} \times$$

$$\times e^{-\frac{\rho^2}{1 - R^2_{x_Ц z_Ц}} \left[\frac{x_Ц^2}{E_{x_Ц}^2} - 2R_{x_Ц z_Ц} \frac{x_Ц z_Ц}{E_{x_Ц} E_{z_Ц}} + \frac{z_Ц^2}{E_{z_Ц}^2} \right]}.$$

Подібних до системи ($X_ц$, $Z_ц$) систем залежних випадкових величин, що описують помилки в положенні цілі, безліч, як і безліч значень кута повороту осей координат відносно головних осей розсіювання. Для кожного напряму осей координат система двох залежних випадкових величин характеризуватиметься своїми серединними відхиленнями $E\ [X_ц^{\alpha}]$, $E\ [Z_ц^{\alpha}]$ і своїм коефіцієнтом кореляції $R\ [X_ц^{\alpha}, Z_ц^{\alpha}]$ [25].

Оскільки вираз щільності розподілу загалом і в канонічному вигляді для однієї й тієї самої системи двох випадкових величин відображає одне й те саме явище (розподіл випадкової точки на площині), але різною системою координат, то можливо перейти від одного виду завдання закону розподілу системи до іншого.

Отже, більшість задач імовірнісного оцінювання системи двох випадкових величин розв'язується тоді, коли закон розподілу системи заданий у канонічному вигляді. Але якщо закон розподілу системи двох випадкових величин (рис. 7.5 і 7.6) заданий у довільній системі координат, то необхідно знайти характеристики закону розподілу системи двох випадкових величин у системі координат *xoy*, осі якої спрямовані вздовж головних осей розсіювання системи *uo'v*.

Практично задача зводиться до такого (рис. 7.5). За відомими числовими характеристиками системи (X, Y) в довільній системі координат m_x, m_y, E_x, E_y, R_{xy} знайти головні серединні відхилення E_u та E_v і кут α, що визначає напрямок головних осей розсіювання.

У цьому випадку напрямок головних осей розсіювання визначається за формулою

$$tg2\alpha = 2R_{xy}E_xE_y/(E_x^2 - E_y^2). \quad (7.8)$$

Головні серединні відхилення визначимо з виразів*

$$\left.\begin{aligned} E_u^2 &= E_x^2\cos^2\alpha + E_y^2\sin^2\alpha + R_{xy}E_xE_y\sin2\alpha, \\ E_v^2 &= E_x^2\sin^2\alpha + E_y^2\cos^2\alpha + R_{xy}E_xE_y\sin2\alpha \end{aligned}\right\}. \quad (7.9)$$

Рівняння (7.8) дає два значення кута α, що розрізняються на π/α, тобто α_1 визначає напрямок осі *ou*, а $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ – напрямок осі *ov*. Позитивний напрямок кута α – від позитивного напрямку осі *ox* до позитивного напрямку осі *oy* [25].

Приклад 1. За результатами досвідчених стрільб були визначені числові характеристики розподілу точок падіння снарядів у вибраній системі координат (порядок оброблення стрільб буде розглянуто в розділі 9):

$$E_x = 27{,}5 \text{ м}, \quad E_z = 12{,}5 \text{ м}, \quad R_{xz} = 0{,}9.$$

Визначити серединні відхилення, що характеризують розсіювання снарядів за дальністю та напрямком.

Р о з в' я з а н н я. Шукані величини обчислимо за формулами (7.9):

$$Вд^2 = E_{xp}^2 = E_x^2\cos^2\alpha + E_z^2\sin^2\alpha + R_{xz}E_xE_y\sin2\alpha,$$
$$Вб^2 = E_{zp}^2 = E_x^2\sin^2\alpha + E_z^2\cos^2\alpha + R_{xz}E_xE_y\sin2\alpha.$$

Величину α визначимо з умови формули (7.8):

$$tg2\alpha = 2R_{xz}E_xE_z/(E_x^2 - E_z^2).$$

---

*Для визначення головних серединних відхилень можна використовувати й формули

$$\left.\begin{array}{l}(E_u+E_v)^2=E_x^2+E_y^2+2E_xE_y\sqrt{1-R_{xy}^2},\\(E_u-E_v)^2=E_x^2+E_y^2-2E_xE_y\sqrt{1-R_{xy}^2}\end{array}\right\}.$$

1. Розраховуємо величину кута α:

$tg2\alpha = 2 \cdot 0{,}90 \cdot 27{,}5 \cdot 12{,}5/(27{,}5^2 - 12{,}5^2) = 1{,}031$,

$2\alpha = 45°54'$; $\alpha_1 = 22°57'$($\alpha_2 = 112°57'$).

Напрямок осі ox_p становить із віссю ox кут $\alpha = 22°57'$ (рис. 7.8).

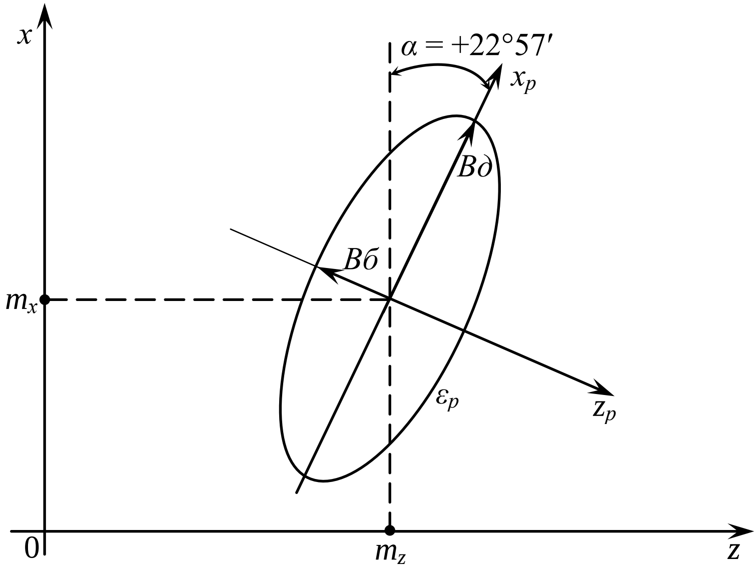

Рисунок 7.8 – Серединні відхилення, що характеризують розсіювання снарядів

2. Розраховуємо серединні відхилення, що характеризують розсіювання снарядів:

$$\sin^2\alpha = \sin^2 22°57' = 0{,}152, \quad \cos^2 22°57' = 0{,}848;$$

$$\sin 2\alpha = \sin 45°54' = 0{,}718,$$

$$Bд^2 = 756 \cdot 0{,}848 + 156 \cdot 0{,}152 + 0{,}9 \cdot 27{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 0{,}718 = = 887 \text{ м}^2,$$

$$Bб^2 = 756 \cdot 0{,}152 + 156 \cdot 0{,}848 - 0{,}9 \cdot 27{,}5 \cdot 12{,}5 \cdot 0{,}718 = = 24 \text{ м}^2.$$

7.1.3. Колове розсіювання

Колове розсіювання – окремий випадок еліптичного розсіювання, що відповідає випадку, коли головні серединні відхилення випадкових величин, які утворюють систему, рівні між собою, тобто

$$E_x = E_y = r. \tag{7.10}$$

У цьому разі еліпс перетворюється на коло і розсіювання називається коловим.

При коловому розсіюванні координатні осі прямокутної системи координат можуть проходити в будь-якому напрямку, залишаючись весь час головними осями розсіювання. Таким чином, при коловому розсіюванні випадкові величини X і Y незалежні при будь-якому виборі прямокутної системи координат [16].

7.1.4. Розподіл випадкової точки (*X, Y*) на площині в заданому напрямку

Як зазначалося, повною характеристикою нормального розподілу системи двох випадкових величин є одиничний еліпс розсіювання – повна характеристика розподілу випадкової точки на площині. Головні серединні відхилення характеризують розподіл випадкової точки вздовж головних осей розсіювання.

Однак для вирішення ряду завдань необхідно знати закон розподілу випадкової точки в певному напрямку, відмінному від напрямку головних осей розсіювання. Наприклад, трапляються випадки, коли головні серединні відхилення, що характеризують точність визначення установок для стрільби (рис. 7.9), не збігаються з напрямком стрільби та до нього перпендикулярним. А для вирішення питань стрільби необхідно знати, як розподіляються величини відхилення центра розсіювання снарядів від цілі за дальністю (вздовж осі ox) і напрямком (уздовж осі oz).

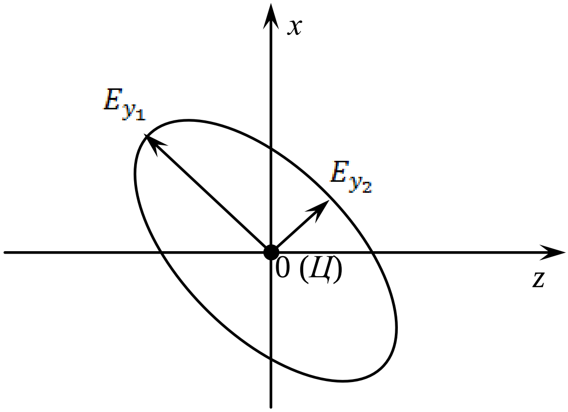

Рисунок 7.9 – Головні серединні відхилення, що характеризують точність визначення установок для стрільби

У загальному випадку завдання формулюється так. Є нормальний розподіл системи на площині (u, v) з одиничним еліпсом розсіювання ε; більший з головних серединних відхилень складає з деяким напрямком *on* кут α. Потрібно визначити серединне відхилення, що характеризує розподіл випадкової точки в напрямку *on* (рис. 7.10).

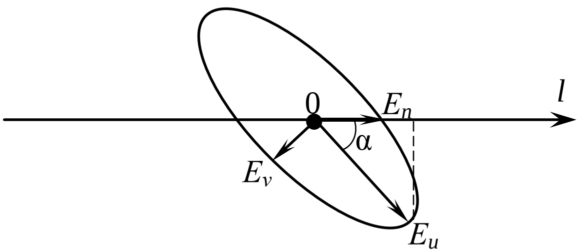

Рисунок 7.10 – Серединні відхилення, що характеризують розподіл випадкової точки в напрямку *on*

Розподіл точки в напрямку *on* тотожний розподілу проекції точки вздовж *on*, або, що те саме, розподілу випадкової величини N – видалення проекції точки на напрям *on* від початку координат. Випадкова величина [18]:

$$N = U\cos\alpha + V\sin\alpha.$$

Можна показати, що випадкова величина як лінійна функція двох незалежних випадкових величин із нормальними розподілами (для конкретного напряму) підпорядковується нормальному закону із щільністю розподілу

$$f(n) = \frac{\rho}{E_n\sqrt{\pi}} e^{-\rho\frac{n^2}{E_n^2}}, \tag{7.11}$$

де величина серединного відхилення визначається за формулою

$$E_n^{\,2} = E_u^{\,2} \cdot \cos^2\alpha + E_v^{\,2} \cdot \sin^2\alpha. \tag{7.12}$$

З аналітичної геометрії відомо, що величина, обчислена за формулою (7.12), визначає відстань від центра еліпса до дотичної. Отже, щоб графічно визначити (показати) серединне відхилення E_n, яке характеризує розподіл випадкової точки в заданому напрямку *on*, необхідно до одиничного еліпса розсіювання провести дотичну, перпендикулярну до заданого напрямку. Відстань від центра розподілу (центра еліпса) до дотичної і буде шуканим серединним відхиленням. Тому іноді серединне відхилення E_n називають серединним відхиленням, що викликається еліпсом розсіювання для даного напрямку [7].

Характеристики осколкової дії снаряда

Осколковою дією снаряда (міни) є уражувальна дія, що завдається цілі осколками, які з’являються під час розривання снаряда (міни).

Осколкову дію снаряда (міни) використовують головним чином для ураження відкрито розташованої живої сили противника: піхоти в районах зосередження, на марші, номерів причіпних гарматних обслуг та ін.

Одночасно з осколками під час розриву снаряда виникає ударна хвиля, яка також завдає ураження цілі. Однак радіус уражувальної дії ударної хвилі по відкрито розташованої живій силі значно менший від уражувальної дії осколків. Тому під час розгляду осколкової дії по відкрито розташованій живій силі, а також по деяких видах бойової техніки враховують вплив основного уражувального фактора – *вбивчих осколків*; дію другого уражувального фактора – *ударної хвилі* – не враховують.

Осколкової дії снарядів можна зазнати отримана і під час ударної, і під час дистанційної стрільб.

При зазнанні осколкової дії під час ударної стрільби підривник установлюють або на миттєву (осколкову), або на сповільнену дію (для отримання рикошетів).

Під час установлення підривника на осколкову дію миттєво розривається снаряд, якщо він стикається з поверхнею землі або іншою перешкодою. При цьому уражувальна дія снаряда (міни) даного калібру залежить від характеру ґрунту і місцевості в районі цілі, а також від кута зіткнення снаряда з перешкодою.

Як би миттєво не розривався снаряд під час зіткнення з перешкодою, в останній виникає воронка, і частина осколків, що з’являються, буде перехоплена її стінками. Чим м’якший ґрунт у районі цілі, тим глибша воронка і тим слабіша осколкова дія снаряда.

Найбільш придатні для осколкової дії твердий ґрунт і рівна поверхня в районі цілі.

Осколкова дія снаряда в значному ступені залежить також і від кута зіткнення з перешкодою; якщо на перешкоду впливає рівна земна поверхня, то осколкова дія снаряда буде залежати від кута падіння θ_c.

Найбільша осколкова дія має місце під час розриву снаряда на горизонтальній поверхні під кутом $\theta_c = 90°$, тому що за цих умов здійснюється рівномірне розлітання осколків по колу.

Приклад 2. Проводиться стрільба по цілі, розміщеній перпендикулярно до лінії спостереження. Фронт цілі – 20 м поправка на зсув 3-00, *Вд* = 20 м, *Вб* = 3 м.

Середня траєкторія проходить через центр цілі (рис. 7.11). Спостереження за дальністю дозволяють визначати розриви, що відхилилися від бічних меж цілі не більше ніж на 1 м. Визначити ймовірність отримання знаків «+» або «–» під час одного пострілу.

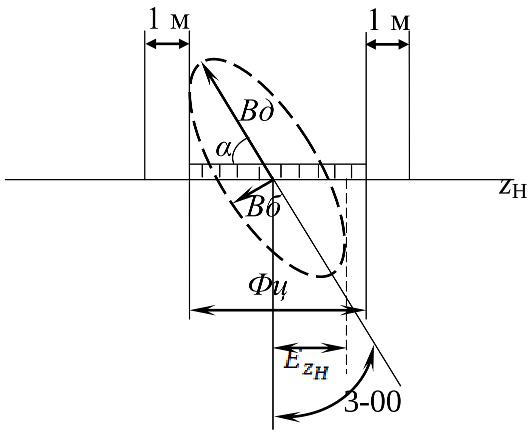

Рисунок 7.11 – Графічне зображення стрільби по цілі, розміщеній перпендикулярно до лінії спостереження (середня траєкторія проходить через центр цілі)

Р о з в’ я з а н н я. Математично ця задача зводиться до визначення ймовірності того, що випадкова величина відхилення, викликаного нормальним розподілом на площині в напрямку $z_н$, не вийде за межі ділянки шириною $Ф_ц + 2$. Оскільки центр розподілу збігається з центром ділянки (цілі), шукану ймовірність визначимо за формулою

$$p = Ф\,[(0{,}5\,Ф_ц + 1)/Ez_н)],$$

де $Ez_н$ – серединне відхилення, що викликається одиничним еліпсом розсіювання в напрямку фронту цілі; він характеризує розподіл розривів за напрямком $z_н$, який нас цікавить.

1. Знаходимо серединне відхилення $Ez_н$ (формула (7.12)):

$Ez_н{}^2 = Bд^2\cos^2\alpha + Bб^2\sin^2\alpha, \quad \alpha = 90° – ПС = 72°;$

$Ez_н{}^2 = 20^2 \cdot 0{,}309^2 + 3^2 \cdot 0{,}951^2 = 46{,}332$ (див. рис. 7.10).

2. Розраховуємо шукану ймовірність (табл. 1 додатка):

$$p = Ф\,[(10+1)/6{,}8] = Ф\,(1{,}62) = 0{,}72546.$$

Відповідь: $p = 72{,}5$ %.

7.1.5. Перехід до довільної системи координат

Ми наводили формули, що дозволяють розраховувати головні серединні відхилення й напрямки головних осей розсіювання, якщо відомі характеристики розподілу випадкової точки, в довільній системі координат (формула (7.9)).

Може бути розв'язана й зворотна задача: за заданими головними серединними відхиленнями E_u і E_v визначити серединні відхилення розсіювання E_x та E_y і коефіцієнт кореляції, що характеризують розподіл системи двох випадкових величин у вибраній системі координат, повернутій відносно головних осей розсіювання на кут α.

Мабуть, серединними відхиленнями, що характеризують розподіл системи в напрямку координатних осей нової системи координат, будуть такі, які викликаються одиничним еліпсом розсіювання на напрям осей координат (рис. 7.12) [7].

Тоді їх величини можуть бути визначені за формулами

$$\left.\begin{aligned} E_x^2 &= E_u^2\cos^2\alpha + E_v^2\sin^2\alpha, \\ E_y^2 &= E_u^2\sin^2\alpha + E_v^2\cos^2\alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (7.13)$$

Коефіцієнт кореляції R_{xy} обчислюємо зі співвідношення (7.8):

$$R_{xy} = tg2\alpha\,(E_x{}^2 – E_y{}^2)/2E_xE_y. \qquad (7.14)$$

Цей прийом використовують, наприклад, коли розглядають сумарну дію на площині кількох по-різному спрямованих еліптичних розподілів. Перш ніж розрахувати характеристики сумарного закону, зводять характеристики розглянутих законів до єдиної системи координат.

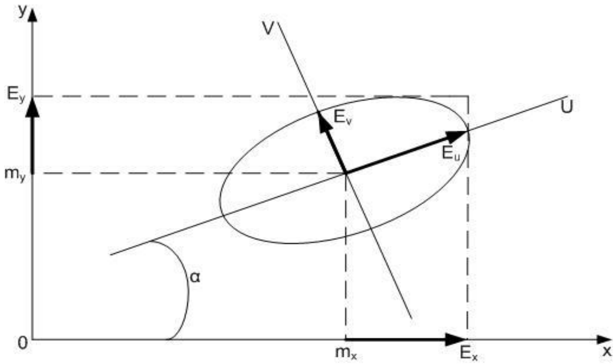

Рисунок 7.12 – Одиничний еліпс розсіювання – серединні відхилення, що характеризують розподіл системи в напрямку координатних осей нової системи координат

7.2. Визначення ймовірності різних значень випадкових величин (імовірність потрапляння випадкової точки в різні області)

У теорії та практиці стрільби дуже часто доводиться вирішувати завдання, пов'язані з розрахунком імовірності потрапляння випадкової точки в площини різних контурів. Так, у Правилах стрільби та управління вогнем наведена середня витрата снарядів для ураження різних цілей, розрахована за формулою $N = m/p$, де m – необхідне число влучень, а p – імовірність влучення в ціль (у наведені розміри цілі) при одному пострілі. Уражувальна дія ядерного вибуху характеризується $R_п$ – радіусом зони ураження. Практично ймовірність ураження одиночної цілі визначається розрахунком імовірності влучення епіцентру в коло радіусом $R_п$ (рис. 7.13) [13].

Доводиться розв’язувати й зворотну задачу: за заданою ймовірністю ураження цілі визначати величину радіуса наведеної зони ураження, а за нею – необхідну потужність заряду, що забезпечує виконання завдання із заданою надійністю.

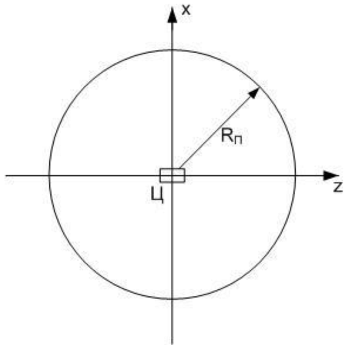

Рисунок 7.13 – Імовірність ураження одиночної цілі

У цих та ряді інших завдань необхідно розраховувати ймовірності потрапляння випадкової точки в різні площини. У цьому підрозділі розглянуті прості і в той самий час найбільш типові випадки розрахунку ймовірностей:

– ймовірність потрапляння в прямокутник зі сторонами, паралельними головним осям розсіювання;

– ймовірність потрапляння до смуги нескінченної довжини;

– ймовірність потрапляння в еліпс розсіювання та коло;

– ймовірність потрапляння в площини довільної форми з використанням сітки колового розсіювання.

7.2.1. Імовірність потрапляння в прямокутник зі сторонами, паралельними головним осям розсіювання

При даній постановці завдання розглядається випадок визначення ймовірності попадання випадкової точки в прямокутник за умови, що головні осі розсіювання й сторони прямокутника паралельні координатних осях. Отже, маємо випадок, коли система складена з незалежних випадкових величин та її щільність розподілу визначається виразом

$$f(x,y)=\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left[\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{E_y^2}\right]}$$

Потрібно обчислити ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник *D* (рис. 7.14). Згідно загальній формулі (6.6) [21]

$$p\left[(X,Y)\in D\right]=\int\limits_{x_n}^{x_m}\int\limits_{y_n}^{y_m} f(x,y)dxdy=\int\limits_{x_n}^{x_m} f_1(x)dx\int\limits_{y_n}^{y_m} f_2(y)dy=$$

$$=\int\limits_{x_n}^{x_m}\frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}}dx\int\limits_{y_n}^{y_m}\frac{\rho}{E_y\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{(x-m_y)^2}{E_y^2}}dy$$

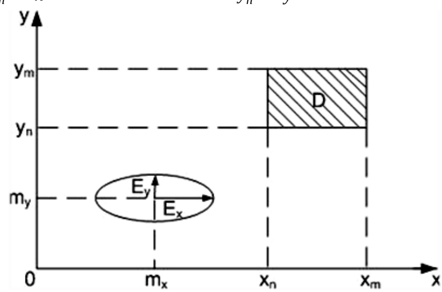

Рисунок 7.14 – Імовірність потрапляння випадкової точки в прямокутник *D*

Перший множник – імовірність потрапляння випадкової величини *X* на ділянку (x_n, x_m), може бути обчислений за допомогою функції *F* (*x*):

$$p\,(x_n<X<x_m)=\left[F\left(\frac{x_m-m_x}{E_x}\right)-F\left(\frac{x_n-m_x}{E_x}\right)\right].$$

Відповідно другий множник – імовірність потрапляння випадкової величини *Y* на ділянку (x_y, x_m), визначається таким чином:

$$p\,[(X,\,Y) \in D] = [F\,(x_m - m_x/E_x) - F\,(x_n - m_x/E_x)] \times$$
$$\times\,[F\,(y_m - m_y/E_y) - F\,(y_n - m_y/E_y)]. \qquad (7.15)$$

Формулу (7.15) дуже широко використосовують у теорії стрільби для розрахунку ймовірності влучення в цілі, контури яких близькі до прямокутних або можуть бути прийняті прямокутними (складені з прямокутників) [5].

Приклад 3. Здійснюється стрільба по цілі, обриси і розміри якої показані на рис. 7.15. Сторони цілі паралельні напрямку стрільби. Серединне відхилення за дальністю *Вд* = 20 м, а за напрямком *Вб* = 3 м. Центр розсіювання снарядів (точка С) зміщений відносно середини переднього краю цілі в бік недольоту на 10 м і вправо – на 3 м. Визначити ймовірність улучення в ціль з одного пострілу.

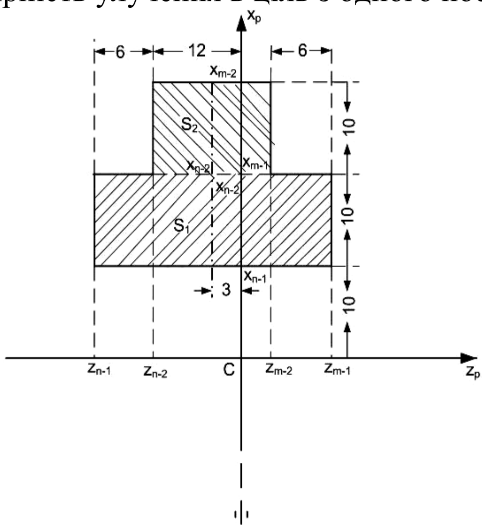

Рисунок 7.15 – Імовірність влучення в ціль з одного пострілу

Р о з в’ я з а н н я. Ціль складного контуру уявляємо у вигляді площ S_1 і S_2. Тоді ймовірність влучення в ціль з одного пострілу визначається за теоремою складання:

p [$Ц$] = p [(x_p, z_p) ϵ $S_ц$] = p [(x_p, z_p) ϵ S_1] + p [(x_p, z_p) ϵ S_2].

Центр розсіювання снарядів суміщений із початком координат. Отже,

$$m_{x_p} = m_{z_p} = 0 \cdot$$

Здійснюємо розрахунки.

Для S_1

$x_{p2} = x_{m-1}/Bд$ = 20/20 = 1; $x_{p1} = x_{n-1}/Bд$ = 10/20 = 0,5,

$z_{p2} = z_{m-1}/Bб$ = 9/3 = 3; $z_{p1} = z_{n-1}/Bб$ = –21/3 = –7.

Використовуючи табл. А.2 додатка А, визначимо

$$p\,[(x_p, z_p) \in S_1] = [F\,(1) - F\,(0{,}5)] \cdot [F\,(3) - F\,(-7)] =$$
$$= [0{,}75 - 0{,}63203] \cdot [0{,}97849 - 0] = 0{,}1152.$$

Для S_2

$$x_{p2} = 30/20 = 1{,}5, \quad x_{p1} = 20/20 = 1,$$
$$z_{p2} = 3/3 = 1, \quad z_{p1} = -9/3 = -3.$$

Використовуючи табл. А.2 додатка А, визначимо

$$p\,[(x_p, z_p) \in S_2] = [F\,(1{,}5) - F\,(1)] \cdot [F\,(1) - F\,(-3)] =$$
$$= [0{,}84416 - 0{,}75] \cdot [0{,}75 - 0{,}02151] = 0{,}0685.$$

Імовірність улучення в ціль

$$p\,[Ц] = 0{,}1152 + 0{,}0685 = 0{,}1837.$$

Відповідь: p [$Ц$] = 18,4 %.

7.2.2. Імовірності потрапляння в смугу нескінченної довжини

Нехай система похибок на площині характеризується одиничним еліпсом ε [E_x, E_y]. Визначимо ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) не вийде за межі нескінченної смуги ММ, певним чином розміщеної відносно одиничного еліпса (рис. 7.16).

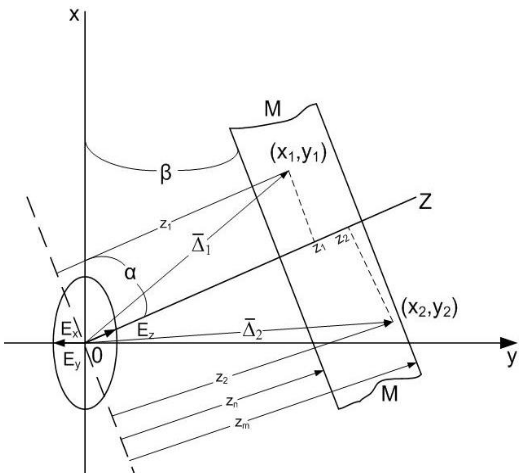

Рисунок 7.16 – Одиничний еліпс розсіювання $\varepsilon\ [E_x, E_y]$, що характеризує систему похибок випадкових точок (x_1, y_1), які знаходяться на площині нескінченної довжини смуги ММ

Нескінченною називається така смуга, межі якої за одним із напрямків виходять за практичні межі можливих положень випадкової точки [9].

Під час розподілу системи двох величин на площині можливі різні положення випадкової точки (X, Y) в межах повного еліпса розсіювання. Нашої умові задовольнятимуть лише ті, які потрапляють у межі смуги ММ. Для вирішення завдання з визначення ймовірності потрапляння випадкової точки в задану смугу найзручніше скористатися розподілом випадкової точки на площині в заданому напрямку (формули (7.11) і (7.12)). Будуть розрахункові формули найбільш простими, якщо напрямок розподілу проекції випадкової точки oz вибрати перпендикулярним до межі смуги.

Відповідно до формули (7.11) випадкова величина Z підпорядковується нормальному закону із щільністю розподілу

$$f(z) = \frac{\rho}{E_z\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{z^2}{E_z^2}},$$

де за формулою (7.12)

$$E_z = \sqrt{E_x^2 \cos^2 \alpha + E_y^2 \sin^2 \alpha},$$

а $\alpha = 90° - \beta$ – кут між нормаллю до смуги (віссю *oz*) і напрямком головного серединного відхилення E_x. Тоді ймовірність потрапляння випадкової точки системи (*X*, *Y*) в смугу ММ визначимо як імовірність потрапляння випадкової величини *Z* на ділянку (z_n, z_m) за допомогою таблиці значень функції розподілу для нормального закону *F* (*x*) (рис. 7.17):

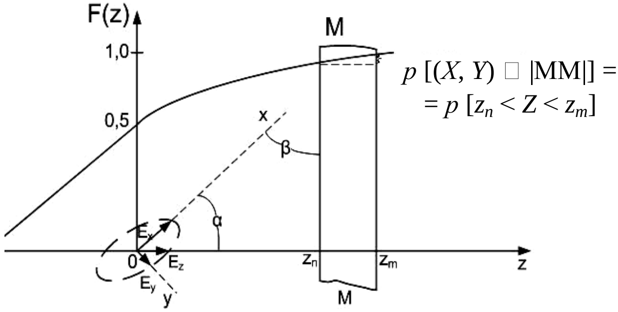

Рисунок 7.17 – Імовірність потрапляння випадкової величини *Z* на ділянку (z_n, z_m)

$$p\ [(X, Y) \in |MM|] = p\ [(z_n < z < z_m) =$$

$$= \int_{z_n}^{z_m} f(z)dz = F\ (x_2) - F\ (x_1), \qquad (7.16)$$

де $x_2 = z_m/E_z$ і $x_1 = z_n/E_z$.

Приклад 4. Визначити ймовірність потрапляння снаряда в смугу мінних загороджень шириною 15 м, якщо центр розсіювання снарядів знаходиться в 20 м від середини смуги, напрямок стрільби з напрямком смуги створює кут 60°, *Вд* = 20 м, *Вб* = 3 м (рис. 7.18).

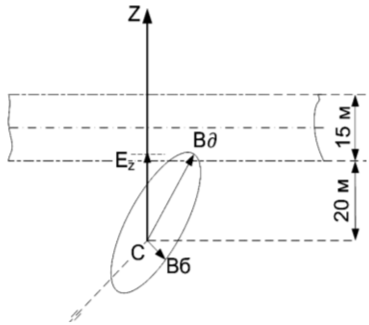

Рисунок 7.18 – Імовірність потрапляння снаряда в смугу мінних загороджень шириною 15 м

Р о з в’ я з а н н я. Шукану ймовірність знайдемо за формулою

$$p = p\,(z_1 < z < z_2) = F\,(x_2) - F\,(x_1),$$

де $x_2 = z_2/E_z$ і $x_1 = z_1/E_z$.

1. Розрахуємо величину видалення меж смуги від центра розсіювання:

$z_2 = 20 + l = 20 + 7{,}5 = 27{,}5$ м,

$z_1 = 20 - l = 20 - 7{,}5 = 12{,}5$ м.

2. Розрахуємо величину серединного відхилення E_z за формулою (7.10) за $\alpha = 90 - 60 = 30°$:

$E_z^2 = B\partial^2\cos^2\alpha + B\textit{б}^2\sin^2\alpha = 400{\cdot}3/4 + 64{\cdot}1/4 = 316$ м^2,

$E_z = 17{,}8$ м.

3. Визначимо входи в табл. А.2 додатка А й випишемо значення функції розподілу:

$x_2 = 27{,}5/17{,}8 = 1{,}54$, $F\,(x_2 = 1{,}54) = 0{,}85053$,

$x_1 = 12{,}5/17{,}8 = 0{,}702$, $F\,(x_1 = 0{,}702) = 0{,}68206$.

4. Розрахуємо шукану ймовірність потрапляння снаряда в смугу мінних загороджень (табл. А2 додатка А):

$$p = F\,(x_1) - F\,(x_2) = 0{,}85053 - 0{,}68206 = 0{,}16847.$$

Відповідь: $p = 16{,}8$ %.

7.2.3. Імовірність потрапляння в еліпс розсіювання та в коло

Знайдемо ймовірність того, що випадкова точка із щільністю розподілу

$$f(x,y) = \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right]}$$

потрапить в еліпс розсіювання, рівняння якого має вигляд

$$x^2/(kE_x)^2 + y^2/(kE_y)^2 = 1.$$

За загальною формулою (6.6) шукана ймовірність

$$p_k = p\left|(X,Y)\in\varepsilon_k\right| = \iint\limits_{(\varepsilon_k)} f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(\varepsilon_k)} \frac{\rho^2}{\pi E_x E_y} e^{-\rho^2\left[\frac{x^2}{E_x^2}+\frac{y^2}{E_y^2}\right]} dxdy.$$

Замінимо змінні:

$$\rho_x/E_x = U, \quad \rho_y/E_y = V.$$

Після підстановки отримаємо

$$p_k = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\varepsilon_k)} e^{-(U^2+V^2)} dUdV\ .$$

Перейшовши до полярних координат:

$$U = r\cdot\cos\varphi, \quad V = r\cdot\sin\varphi,$$

тоді

$$U^2 + V^2 = r^2.$$

Якобіан такого перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} & \frac{\partial U}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\phi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r\ \cdot$$

Отже, шукана ймовірність з новими змінними

$$p_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{(\varphi)}\int\limits_{(r)} re^{-r^2} d\varphi dr\ .$$

Інтегрування за φ проводимо від 0 до 2π. Із співвідношення $r^2 = U^2 + V^2 = (pk)^2$ бачимо, що інтегрування за r повинне проводитися від 0 до pk. Таким чином,

$$p_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{pk} r e^{-r^2} dr = \frac{1}{\pi}\left|\varphi\right|_0^{2\pi} \left| -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right|_0^{pk} =$$

$$= -(e^{-(pk)^2} - 1) = 1 - e^{-p^2k^2}.$$

Отже, ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в еліпс розсіювання ε_k, головні півдіаметри якого a і b,

$$P_k = p[(x, y) \in \varepsilon_k] = 1 - e^{-\rho^2k^2}, \qquad (7.17)$$

де $k = a/E_x = b/E_y$; a і b – головні серединні відхилення еліпса розсіювання ε_k [13].

Як бачимо з виразу (7.17), ймовірності потрапляння випадкової точки в еліпси розсіювання визначаються лише величиною k. Це дозволило завчасно розрахувати таблицю ймовірностей, підготовлену й розміщену в «Збірнику таблиць для розрахунку ймовірностей».

Цілком природно, що за формулою (7.17) або за допомогою складеної за нею таблиці може бути розрахована ймовірність потрапляння в коло при коловому нормальному розподілі випадкової точки.

Обсяг вирішуваних завдань і порядок користування таблицею розглянуто в «Керівництві з роботи з таблицями». Там само розібрано зміст і порядок вирішення завдань за допомогою таблиці ймовірностей потрапляння випадкової точки в коло радіусом r при еліптичному законі, якщо центр розсіювання системи збігається з центром кола. Входами в таблицю є:

– величина радіуса кола, виражена в більшому головному серединному відхиленні, $r_1 = r / a$;

– ексцентриситет одиничного еліпса розсіювання

$$e_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2},$$

де $a > b$.

7.2.4. Імовірність потрапляння в площини довільної форми

На практиці для обчислення ймовірностей потрапляння в площину (цілі) довільної форми найбільш часто застосовують такі наближені способи.

1. Задану область D (рис. 7.19), обведену жирною лінією), наближено замінюють на область, складену з прямокутників S_i, боки яких паралельні головним осям розсіювання (рис. 7.19).

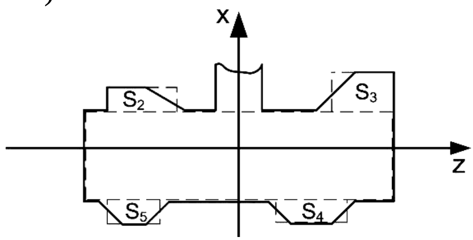

Рисунок 7.19 – Імовірність потрапляння в площину (цілі) довільної форми, складеної з прямокутників S_i

Ймовірності потрапляння в окремі прямокутники $p\,[(X, Y) \in S_i]$ розраховують за формулою (7.15). Потім імовірності додають:

$$p\,[(X, Y) \in S_i] = \Sigma_{(i)}\, p\,[(X, Y) \in S_i]. \qquad (7.18)$$

2. Коли розміри цілі невеликі порівняно із серединними відхиленнями (і не перевищують 0,5–1 серединного відхилення в напрямку відповідних осей), ймовірність потрапляння в область D може бути наближено обчислена за формулою (рис. 7.20):

$$p\,[(X, Y) \in D] = S_D \cdot f\,(x_d, y_d),$$

де S_d – площина цілі;

$f\,(x_d, y_d)$ – значення щільності розподілу системи для деякої точки області (приблизного положення центра ваги площини) [5].

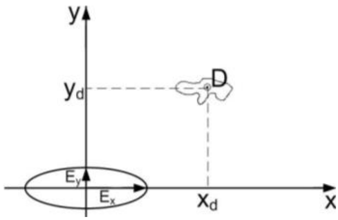

Рисунок 7.20 – Імовірність потрапляння в задану область *D* довільної форми

Приклад 5. Визначити ймовірність потрапляння випадкової точки в ціль, що має форму рівнобічного трикутника зі стороною a = 8 м, одна зі сторін якого паралельна осі *ох*, а центр ваги віддалений від центра розсіювання системи на такі величини: x_0 = 8 м, y_0 = 10 м, E_x = 10 м, E_y = = 20 м (рис. 7.21).

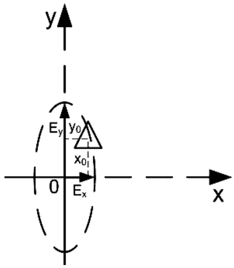

Рисунок 7.21 – Імовірність потрапляння випадкової точки в ціль, що має форму рівнобічного трикутника

Р о з в' я з а н н я. Шукану ймовірність визначимо за формулою

$$p_ц = S_D \cdot f\,(x_0, y_0).$$

1. Розрахуємо площину цілі:

$S_ц = a^2\sqrt{3}/4 = 64\sqrt{3}/4 = 27{,}7$ м^2.

2. Розрахуємо величину щільності розподілу системи для точки $x_0\, y_0$ (використовуємо табл. 3 додатка А $\varphi\,(x)$):

$$f\,(x_0, y_0) = f_1\,(x_0) \cdot f_2\,(y_0),$$

$f_1\,(x_0) = 1 \cdot \varphi\,(x_0/E_x)/E_x = 1 \cdot \varphi\,(8/10)/10 = 1 \cdot 0{,}23/10 =$

= 0,023;

f_2 (y_0) = 1 · φ $(y_0/E_y)/E_y$ = 1·φ (10/20)/20 = 1·0,25/20 = = 0,013;

3. Розраховуємо шукану ймовірність:

$$p_ц = 27{,}7 \cdot 0{,}000296 = 0{,}0082.$$

Відповідь: $p_ц$ = 0,8 %.

Для визначення ймовірності потрапляння в цілі малих розмірів застосовують й інший спосіб, що ґрунтується на заміні цілі складного контуру рівновеликим прямокутником S зі сторонами, паралельними координатним осям. При цьому

$$p_ц \approx p_S.$$

Так, в умовах попереднього прикладу 5 (рис. 7.22) сторона рівновеликого квадрата дорівнює:

1. $a = \sqrt{S} = \sqrt{27{,}7} = 5{,}26$ м. $0{,}5\,a = 2{,}63$ м.

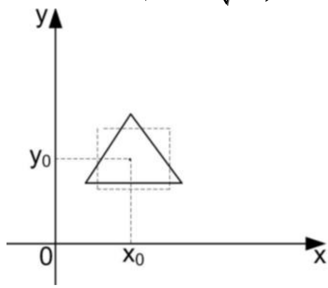

Рисунок 7.22 – Імовірність потрапляння в ціль малих розмірів (трикутник)

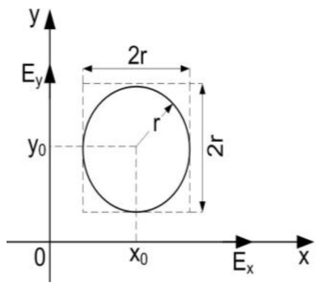

Рисунок 7.23 – Імовірність потрапляння в ціль малих розмірів (коло)

2. Тоді ймовірність потрапляння в квадрат буде

$$p_S = \left[F\left(\frac{x_0 + r}{E_x}\right) - F\left(\frac{x_0 - r}{E_x}\right)\right]\left[F\left(\frac{y_0 + r}{E_y}\right) - F\left(\frac{y_0 - r}{E_y}\right)\right] =$$

= [F (1,5) – F (0,5)] · [F (0,65) – F (0,15)] =

= [0,84416 – 0,63203] · [0,66946 – 0,54029] = 0,0274.

3. Визначаємо ймовірність потрапляння в коло:

$$p_ц = S_ц/S \cdot p_S = 78{,}6/100 \cdot 0{,}0274 = 0{,}0215.$$

Відповідь: $p_ц \approx 2{,}2$ %.

Той самий приклад 5, розв'язаний за допомогою щільності розподілу системи для центра кола, дає відповідь:

$p_ц = S_ц f(x_0, y_0) = 78{,}6 \cdot 0{,}000296 = 0{,}0233$.

При складних контурах цілі використовують заздалегідь підготовлену «сітку колового розподілу» (рис. 7.24).

Порядок побудови сітки та її використання при розрахунку ймовірностей викладені в «Керівництві з роботи з таблицями для розрахунку ймовірностей». Щоб за допомогою сітки колового розподілу розрахувати ймовірність потрапляння випадкової точки (X, Y) в задану площину, необхідно:

1) розрахувати координати контурних точок цілі щодо центра розсіювання в одиницях головних серединних відхилень E_x й E_z;

2) за одержаними координатами нанести задану площину на сітку колового розподілу (при цьому контури площини можуть бути сильно спотвореними);

3) виписати ймовірності потрапляння в ті квадрати сітки які накриті площиною розглянутої фігури;

4) для одержання ймовірності потрапляння випадкової точки при одному випробуванні (досліді) в задану площину додати всі виписані ймовірності.

Так, імовірність потрапляння в ціль (рис. 7.24):

$$p_ц = 0{,}01\left(\frac{3}{5}\cdot 174 + \frac{3}{5}\cdot 156 + \frac{1}{2}\cdot 174 + 174 + 156 + \frac{1}{2}\cdot 124 + 156 + \right.$$
$$\left. + 156 + 136 + 111 + \frac{3}{5}\cdot 124 + \frac{3}{4}\cdot 124 + \frac{2}{5}\cdot 111 + \frac{1}{10}\cdot 89\right) = 0{,}146.$$

Необхідної точності розрахунку ймовірностей можна домогтися застосовуючи сітку відповідного масштабу (сітку 1; 0,5; 0,2; 0,1E).

Чим більший масштаб, тим вища точність розрахунку ймовірності. Якщо ціль має дуже складні контури (або без чітко виражених контурних точок), то зручніше побудувати частину сітки, що накриває ціль. При цьому повинен витримуватися один і той самий масштаб.

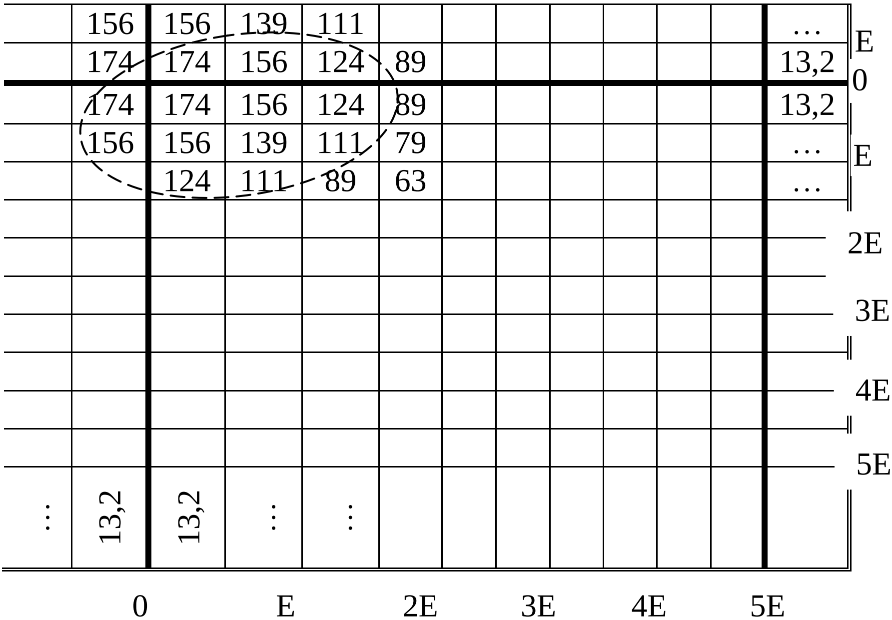

Рисунок 7.24 – Сітка колового розподілу

7.3. Похибки-вектори. Дія похибок-векторів на площині

У підрозділі 5.3 розглянуті питання, пов'язані з помилками вимірювання. Ми показали випадковий характер похибок вимірювання й навели правила оцінювання випадкових помилок та визначення ймовірностей того, що помилка вимірювання набуде одне із значень заданого інтервалу. При цьому ми розглядали лише величини цих помилок, не враховуючи їх напрямки. Під час вимірювання будь-якої величини помилки вимірювання мають однаковий напрямок із напрямком вимірюваної величини. Тому про те, що помилки можуть мати різні напрямки на площині (в просторі), не згадувалися.

Умова практики і, зокрема, вирішення завдань підготовки ведення артилерійського вогню приводять до необхідності дослідити джерела помилок з урахуванням не лише величини, а й напрямку їх дії [16].

Так, під час розрахунку установок по цілі ми можемо натрапити на такі помилки (рис. 7.25):

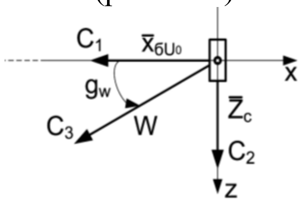

Рисунок 7.25 – Помилки під час розрахунку установок по цілі за величиною і напрямком їх дії

– за наявності помилок в обліку відхилення початкової швидкості снаряда ми одержуємо помилку обчисленої дальності і, як наслідок, відхилення середньої траєкторії від цілі на величину вектора $\overline{ЦC_1} = \overline{x_{\delta_{v0}}}$, що діє вздовж напрямку стрільби;

– помилка в обліку деривації призведе до помилок визначення кутоміра й до зміщення середньої траєкторії щодо цілі на величину вектора $\overline{ЦC_2} = \overline{z_c}$;

– помилка в обліку вітру призведе до помилок визначення як дальності, так і кутоміра; при цьому величини помилок обчислених установок за дальністю та напрямком і відповідне їм відхилення середньої траєкторії від цілі будуть залежати не лише від величини, а й від напрямку дії помилок (δW, $\delta\gamma_w$).

Ці приклади засвідчують, що мають місце випадкові величини, які безпосередньо діють на площині, маючи випадковими як величину, так і напрямок: помилки в положенні вогневої позиції та цілі, помилки щодо визначення вектора балістичного вітру та ін. Таким чином, ми доходимо висновку про необхідність вивчати помилки-вектори та їх закони розподілу.

Помилками-векторами ми будемо називати випадкові помилки, що характеризуються не лише величиною, а й напрямком. При цьому для окремих джерел помилок, наприклад помилок щодо визначення положення ВП, випадкові як величина, так і напрямок помилки (рис. 7.26), а для інших, наприклад для помилок щодо визначення дальності до розриву за допомогою далекоміра, випадковою є лише величина помилки δD_1, а напрямок її дії задано умовами досвіду – напрямком лінії спостереження (рис. 7.27) [17].

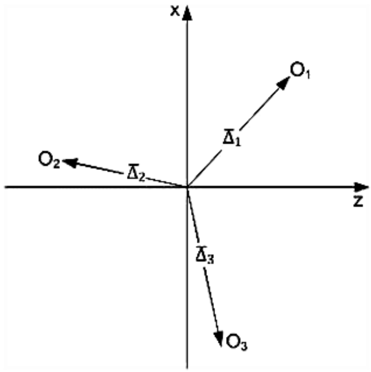

Рисунок 7.26 – Графічне зображення джерела помилок-векторів щодо визначення положення ВП

У ряді випадків для з’ясування характеру дії помилок-векторів достатньо простежити їх дію на прикладах випадкових значень помилок-векторів. Тому, перш ніж перейти до встановлення законів розподілу помилок-векторів і характеристик цих законів, розглянемо умови виникнення, додавання й характер дії окремих помилок-векторів.

Додавання помилок-векторів нерозривно пов’язане з умовами, в яких вони виникають під час практичної роботи. Це питання виникає тому, що нас часто цікавить сумарний вплив усіх джерел помилок, тобто кінцевий результат. Тому розглянемо різні умови виникнення помилок-векторів і правила їх додавання.

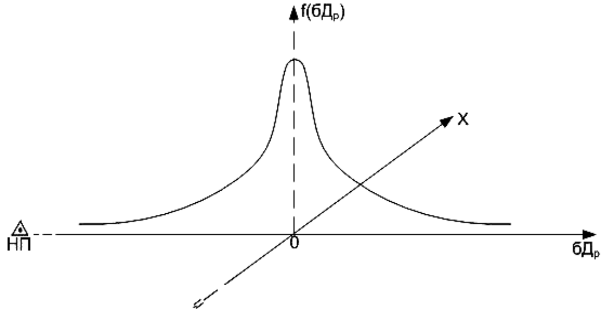

Рисунок 7.27 – Графічне зображення помилок щодо визначення дальності до розриву за допомогою далекоміра

За наявності однієї помилки. Припустимо, що при підготовці обчислених установок по цілі необхідно визначити дані, які характеризують вектор $\overline{ОЦ}$ (рис. 7.28). Це дальність $Д^{ц}$ і доворот від основного напрямку $\partial^{ц}$.

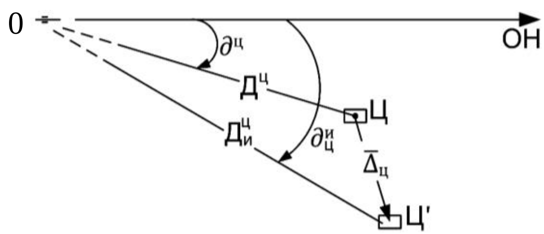

Рисунок 7.28 – Помилки при визначенні положення цілі за дальністю та доворотом

Якщо при визначенні положення цілі буде допущена помилка $\overline{\Delta}_{ц}$, то замість істинних значень дальності й довороту ми одержимо помилкові $Д_{и}^{ц}$ й $\partial_{и}^{ц}$. При цьому значення дальності й довороту на ціль випадкові, оскільки випадкове значення помилки-вектора $\overline{\Delta}_{ц}$.

З рисунка 7.28 бачимо, що

$$\overline{OЦ'} = \overline{OЦ} + \overline{\Delta}_ц ,$$

тобто помилка-вектор відповідає нашому загальному поняттю про помилки, а певна величина $\overline{OЦ'}$ дорівнює істинному значенню $\overline{OЦ'}$ плюс випадкова помилка $\overline{\Delta}_ц$ [9].

За наявності двох помилок на одному кінці відрізка доводиться враховувати їх спільну дію.

Розглянемо приклад стрільби по рухомій цілі (рис. 7.29).

За результатами засічення цілі та визначення параметрів її руху була визначена точка зіткнення $Ц_у$. Випадкова помилка пострілу по точці зіткнення буде $\overline{\Delta}$. На момент розриву ціль знаходиться в точці $Ц_р$.

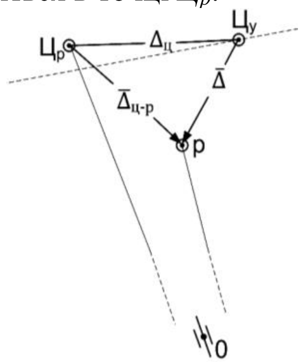

Рисунок 7.29 – Помилки засічення цілі та визначення параметрів її руху під час стрільби по рухомій цілі

При цьому $\overline{\Delta}_ц$ – випадкова помилка в положенні цілі на момент розриву внаслідок помилок щодо визначення параметрів її руху. Спільна дія цих двох джерел призводить до сумарної помилки (відхилення розриву від цілі) $\overline{\Delta}_{ц-р}$, що визначається за формулою

$$\overline{\Delta}_{ц-р} = \overline{\Delta}_ц + \overline{\Delta},$$

і замість істинного вектора $\overline{OЦ}_р$ одержуємо випадковий (помилковий) вектор *OP*, який може бути поданий як

$$\overline{OP} = \overline{OЦ}_{p} + \overline{\Delta}_{ц-p} = \overline{OЦ}_{p} + \overline{\Delta}_{ц} + \overline{\Delta} .$$

Ми одержали звісний вираз випадкового значення величини, що визначається, лише вже у векторній формі.

З розгляду прикладу дії двох (аналогічно кількох) незалежних помилок-векторів на одному кінці відрізка можна зробити висновок, що вони поводяться як вектори і додаються геометрично за правилом паралелограма.

За наявності помилок на обох кінцях відрізка. Припустимо, що при визначенні положення ВП була допущена помилка $\overline{\Delta}_{б}$, а при визначенні положення цілі – $\overline{\Delta}_{ц}$ (рис. 7.30).

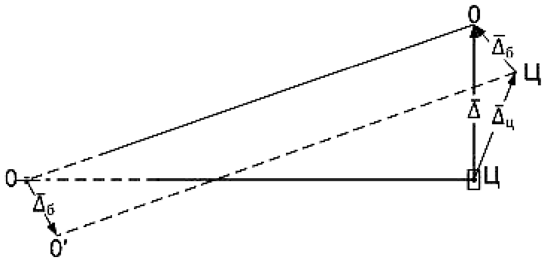

Рисунок 7.30 – Помилка, допущена при визначенні положення цілі

У результаті дії цих помилок положення ВП на карті (ПУВ) буде нанесене точкою O_1, а цілі – $Ц_1$, і замість істинного вектора $\overline{OЦ}$ буде визначений вектор $\overline{OЦ_1}$. Будучи доданим до істинної точки стояння гармати – точки *O*, вектор $\overline{OC} = \overline{O_1Ц_1}$ призведе до зміщення середньої траєкторії відносно цілі на величину помилки-вектора $\overline{\Delta}$ = *ЦС*. Як бачимо з рисунку 7.30,

$$\overline{OC} = \overline{OЦ} + \overline{ЦЦ}_1 + \overline{Ц_1C} = \overline{ЦC} + \overline{\Delta}_{ц} + (-\overline{\Delta}_{б}) = \overline{OЦ} + \overline{\Delta} ,$$

$$\overline{\Delta} = \overline{\Delta}_{ц} - \overline{\Delta}_{б} .$$

Таким чином, для визначення сумарної дії незалежні помилки-вектори можна переносити з одного кінця обумовленого відрізка на інший паралельно самим собі, але змінюючи їх напрямки на зворотні. Після перенесення всіх помилок-векторів на один кінець обумовленого відрізка їх додають за правилом додавання векторів, одержуючи сумарну помилку-вектор.

За наявності декількох помилок-векторів, що діють в одному напрямку, сумарна помилка-вектор дорівнює алгебраїчній сумі діючих помилок. Дійсно, якщо помилка в обліку відхилення початкової швидкості Δ_{V0} викликає зменшення обчисленої дальності на 80 м, в обліку поздовжньої складовій вітру W_x – збільшення дальності на 25 м, в обліку балістичного відхилення температури повітря [19]

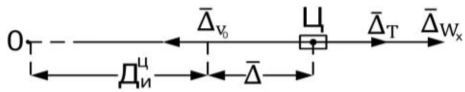

Рисунок 7.31 – Помилка в обліку відхилення початкової швидкості снаряда Δ_{V0}

ΔT – збільшення дальності на 15 м, то будуть мати місце три помилки-вектори (рис. 7.31): $\bar{\Delta}_{V_c}$ = –80 м, $\bar{\Delta}_{W_x}$ = +25 м, $\bar{\Delta}_T$ = +15 м. Спільна їх дія призведе до того, що середня траєкторія буде відхилена від цілі на величину сумарної помилки-вектора $\bar{\Delta}$, величина якої і напрямок будуть визначені алгебраїчною сумою діючих помилок. У нашому прикладі $\bar{\Delta}$ = –80 + 25 + 15 = – 40 м. Таким чином, дальність до цілі буде визначена з помилкою – 40 м. Ми розглянули приклади, що дозволяють усвідомити природу виникнення й дії випадкових помилок-векторів. Проте у кожному конкретному випадку величина діючої помилки-вектора нам не відома. Таким чином, для врахування впливу помилок-векторів як випадкових величин ми вдалися до ймовірнісного оцінювання їх дії.

Як і більшість випадкових помилок, помилки-вектори підпорядковуються нормальному закону з математичним сподіванням, рівним нулю. За математичного сподівання, що дорівнює нулю, закон розподілу скалярною випадковою величиною повністю визначається серединним відхиленням (дисперсією). Для характеристики закону розподілу помилок-векторів необхідно знати не лише величину серединного відхилення, а й напрямок дії помилок-векторів. Такою характеристикою є векторіальна помилка.

Векторіальною помилкою називають характеристику закону розподілу помилок-векторів, що діють уздовж однієї прямої. За нормального закону розподілу випадкових помилок векторіальна помилка чисельно дорівнює серединному відхиленню. Таким чином, векторіальна помилка є не що інше як серединне відхилення, що характеризує розподіл випадкових помилок у певному напрямку.

Так, якщо має місце векторіальна помилка $\vec{E}_u$ (при цьому повинні бути задані величина E_u і напрямок дії помилок), то під цим розуміють, що у цьому напрямку діють випадкові помилки, підпорядковані нормальному закону з щільністю ймовірності [12]

$$f(u)=\frac{\rho}{E_u\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{u^2}{E_u^2}}.$$

Такі положення, що стосуються загальних питань, пов'язаних із помилками-векторами і законами їх розподілу. Перейдемо до розгляду дії на площині кількох векторіальних помилок.

7.3.1. Дія на площині кількох векторіальних помилок, по-різному спрямованих, і підпорядкованих нормальному закону розподілу

Припустимо, що на площині одночасно діють дві незалежні випадкові помилки-вектори $\bar{X}$ і $\bar{Y}$, спрямовані під прямим кутом. Одна помилка X діє уздовж осі ox і підпорядковується нормальному закону з щільністю розподілу

$$f_1(x) = \frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}.$$

Друга помилка $\overline{Y}$ діє уздовж осі *oy*; її щільність розподілу буде

$$f_2(y) = \frac{\rho}{E_y\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{y^2}{E_y^2}}.$$

Дія двох джерел помилок-векторів аналогічна дії двох випадкових величин, а останнє, як нам відомо, призводить до системи випадкових точок або випадкових векторів на площині. Використовуючи це відносно випадкових помилок, ми можемо стверджувати, що одночасна дія двох джерел помилок-векторів під прямим кутом один до одного приводить до утворення системи помилок-векторів на площині. Початок випадкової помилки-вектора на площині збігатиметься з початком координат, а кінець – із точкою (*X*, *Y*).

Дійсно, якщо в системі помилок $\overline{X}$ має місце випадкова помилка $\bar{x}_1$, а в системі помилок $\overline{Y}$ – випадкова помилка $\bar{y}_1$ (рис. 7.32), то спільна їх дія призведе до появи сумарної помилки-вектора

$$\overline{\Delta} = \bar{x}_1 + \bar{y}_1.$$

Цей результат ми одержали внаслідок появи окремих помилок-векторів $\bar{x}_1$ й $\bar{y}_1$. Таким чином, одночасна дія двох незалежних випадкових помилок-векторів $\overline{X}$ і $\overline{Y}$ приводить до системи випадкових помилок-векторів на площині, підпорядкованій нормальному закону з щільністю розподілу

$$f(\overline{\Delta}) = f(x, y) = \rho/\pi E_x E_y \cdot e^{-\rho^2(x^2/E_x^2 + y^2/E_y^2)}, \qquad (7.19)$$

де *x* і *y* – координати кінця випадкової помилки вектора $\overline{\Delta}$ [24].

Формулою (7.19) задається розподіл системи помилок-векторів на площині із щільністю розподілу випадкової точки (X, Y), яка визначає випадкове положення кінця помилки-вектора. Випадкове положення кінця помилки-вектора за сталого початку помилок у центрі розподілу повністю визначає як величину, так і напрямок випадкової помилки-вектора на площині. Таким чином, весь математичний апарат теорії ймовірностей, розроблений для системи двох випадкових величин, може бути повністю застосований для ймовірнісного оцінювання випадкових помилок-векторів.

Приклад 7. Помилки пострілу характеризуються серединними відхиленнями за дальністю $Вдп$ = 0,6 км, у напрямку $Вбп$ = 0,4 км. Визначити ймовірність знищення цілі з одного пострілу, якщо радіус зони ураження боєприпасу R_n = 1,74 км.

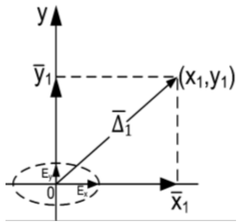

Рисунок 7.32 – Сумарна помилка-вектора за спільної дії випадкових помилок-векторів

Р о з в’ я з а н н я. Математичне розв’язання цієї задачі зводиться до розрахунку ймовірності того, що помилка-вектор пострілу за своєю величиною не перевищує радіуса зони ураження:

$$p\,[Ц] = p\,(|\bar{\Delta}| < R_n)$$

Ця ймовірність може бути визначена розрахунком імовірності потрапляння випадкової точки в коло з радіусом R_n:

$$p\,[Ц] = p\,(|\bar{\Delta}| < R_n) = p\,[(X, Z) < \varepsilon_{Rn}].$$

Розрахунок проводиться з використанням таблиці А.4.

1. Обчислимо входи в таблицю А.4.:

$$-r_1 = R_n / B\partial_n = 1{,}74 / 0{,}6 = 2{,}9.$$

$$-e_1 = \sqrt{1-(B\delta_n / B\partial_n)^2} = \sqrt{1-(0{,}4/0{,}6)^2} = 0{,}745.$$

2. За таблицею А.4. визначимо ймовірність попадання в коло:

$$p\,[(X, Z) < \varepsilon_{Rn}] = 0{,}9241.$$

Відповідь: p [*Ц*] = 92 %.

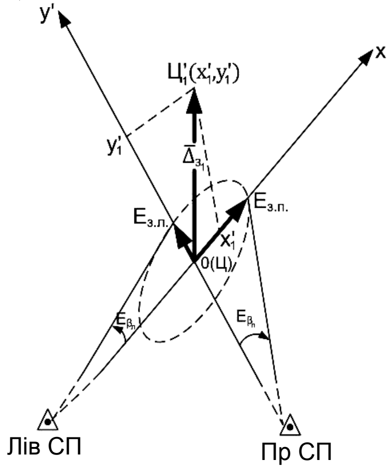

Рисунок 7.33 – Результат дії двох векторіальних помилок під час засічки положення цілі (розриву) постами спряженого спостереження

Ми розглянули випадок, якщо на площині діють дві незалежні векторіальні помилки, спрямовані перпендикулярно одна до одної, але можуть мати місце і випадки, якщо дві незалежні векторіальні помилки діють не під прямим кутом одна до одної. Наприклад, під час засічки цілі (розриву) постами спряженого спостереження помилка-вектор у положенні цілі є результатом дії двох векторіальних помилок (рис. 7.33):

$E_{з.п}$ – векторіальна помилка засічки правого пункту, спрямована уздовж лінії спостереження лівого пункту і $E_{з.л}$ – векторіальна помилка засічки лівого пункту, спрямована уздовж лінії спостереження правого пункту (при дослідженні дії цих джерел помилок робиться припущення, що напрямки НПЦ і НПЦ′ паралельні внаслідок невеликих величин E_β);

$E_{\beta п}$ і $E_{\beta л}$ – серединні кутові помилки засічки правого і лівого пунктів. І в цьому випадку спільна дія двох векторіальних помилок приводить до системи помилок-векторів на площині. При цьому якщо розподіл помилок засічок слід нормальному закону, то щільність розподілу помилок-векторів $\overline{\Delta}_з$ системи (X', Y') або, що те саме, у косокутній системі координат ($X'OY'$) буде [19]

$$f(\overline{\Delta}_з) = f(x', y') = \rho/\pi E_{з.п}E_{з.л} \cdot e^{-\rho^2(x'^2/E^2_{з.п}+y'^2/E^2_{з.л})}. \quad (7.20)$$

Вираз $x'^2/E^2_{з.п} + y'^2/E^2_{з.л} = 1$ є рівнянням одиничного еліпса, вираженим через сполучені півдіаметри $E^2_{з.п}$ й $E^2_{з.л}$.

Таким чином одночасна дія двох джерел помилок-векторів, спрямованих під кутом один до одного, приводить до системи помилок-векторів на площині. При цьому сполученими півдіаметрами одиничного еліпса розсіювання будуть серединні відхилення законів розподілу помилок-векторів, що додаються. Якщо помилки-вектори діють під прямим кутом один до одного, то серединні відхилення законів, що додаються, будуть головними серединними відхиленнями системи помилок-векторів на площині.

Спільна дія в одній площині кількох по-різному спрямованих і незалежних векторіальних помилок також призведе до розподілу сумарної помилки-вектора на площині.

Прийоми і методи визначення одиничного еліпса цього розподілу будуть розглянуті в розділі 8.

7.3.2. Закон розподілу величини помилки-вектора за коловим законом

У теорії стрільби часто доводиться розраховувати ймовірність ураження цілі (математичного сподівання числа уражених цілей та ін.), якщо відомий координатний закон ураження, що встановлює залежність ймовірності ураження цілі G (x, z) від її віддалення (координат) від місця вибуху (рис. 7.32), і закон розподілу видалення вибуху від цілі $f(\bar{\Delta}) = f(x, z)$. У цьому випадку ймовірність ураження цілі обчислюється за формулою повної ймовірності [16]

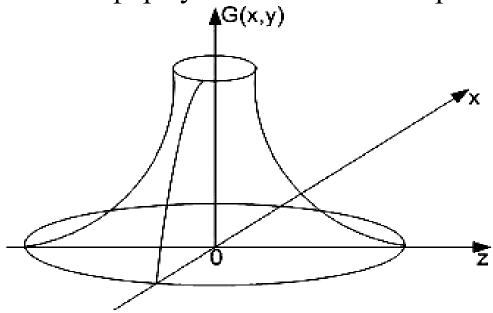

Рисунок 7.34 – Графічне зображення координатного закону ураження, що встановлює залежність ймовірності ураження цілі G (x, z) від її віддалення (координат) від місця вибуху

$$p[Ц] = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,z)G(x,z)dxdz = 4\int\limits_{0}^{5B\partial n}\int\limits_{0}^{5B\delta n} f(x,z)G(x,z)dxdx. \quad (7.21)$$

Розрахунок за цією формулою методом чисельного інтегрування досить громіздкий (інтеграли вигляду (7.21) не виражаються через елементарні функції).

Якщо розподіл помилок пострілу може бути замінений коловим, розрахунок імовірності ураження цілі (або математичного сподівання збитку) може бути значно скорочений, якщо ми будемо знати щільність розподілу віддалення вибуху від цілі $f(r) = f(\Delta)$. Тоді

$$p\,[Ц] = \int_0^{\infty} f(r) \cdot G(r)dr, \quad (7.22)$$

де $f(r) = f(\Delta)$ – щільність розподілу величини віддалення вибуху від цілі або щільність розподілу величини помилки-вектора у відхиленні вибуху від цілі;

$G(r)$ – коловий координатний закон ураження;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Аналітичний вираз щільності $f\,(r)$ можна легко одержати. Нехай випадкова точка $(X,\ Y)$ має нормальний коловий розподіл із серединним відхиленням $E_x = E_y$ (рис. 7.35) [1].

Потрібно знайти закон розподілу випадкової величини r – відстань від точки $(X,\ Y)$ до центра розподілу O, тобто модуля величини випадкового вектора з складовими $(X,\ Y)$.

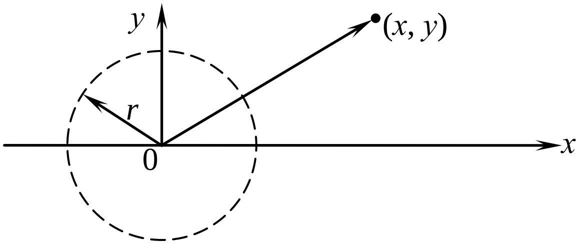

Рисунок 7.35 – Нормальний коловий розподіл випадкової точки $(x,\ y)$ із серединним відхиленням $E_x = E_y$ – ймовірність попадання в коло, радіусом r

Обчислимо спочатку функцію розподілу $F\ (r)$. За визначенням

$$F\ (r) = p\ (R < r).$$

За своїм фізичним змістом – це ймовірність попадання випадкової точки в коло, радіусом r. Тоді за формулою (7.17)

$$F\ (r) = 1 - e^{-(\rho \cdot k)^2} = 1 - e^{-(\rho \cdot r/E)^2}\,. \qquad (7.23)$$

Диференціюючи функцію розподілу $F(r)$ за r, обчислимо щільність розподілу:

$$f\,(r) = 2\rho^2/E^2 \cdot r\,e^{-(\rho \cdot r/E)^2} = 1/\sigma^2 \cdot r\,e^{-r^2/2\sigma^2}\,. \qquad (7.24)$$

Величину E (σ) у теорії помилок називають коловою помилкою (круговою середньою квадратичною помилкою) [18].

Цей вираз щільності розподілу, як і функції $F(r)$, має сенс лише за позитивних значень r; за $r \leq 0$ щільність розподілу $f(r) = 0$. Крива розподілу величини R-модуля помилки-вектора за коловим законом показана на рис. 7.36.

Приклад 8. Розрахувати ймовірність ураження цілі з одного пострілу за коловим законом розподілу помилок пострілу з $B_n = 0{,}4$ км, якщо координатний закон ураження колової цілі й задана показникова функція

$$G(r) = e^{-(r/R_n)^2},$$

а радіус наведеної зони ураження $R_n = 1{,}5$ км.

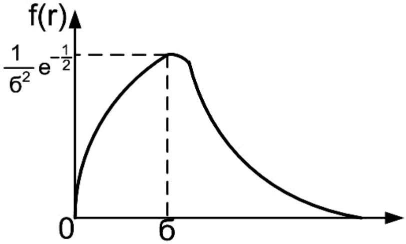

Рисунок 7.36 – Крива розподілу величини R-модуля помилки-вектора за коловим законом

Р о з в' я з а н н я. 1. Складемо розрахункову формулу на підставі теореми про повну ймовірність, ймовірність ураження цілі

$$p\,[Ц] = \int_0^{\infty} f(r) \cdot G(r)dr.$$

Підставляючи в цю формулу значення щільності розподілу величини помилки пострілу $f(r)$ [формула (7.24)] і заданого координатного закону ураження, тоді

$$p[Ц] = \int_0^{\infty} \frac{2\rho^2}{Bn^2} r e^{-\left(\rho \frac{r}{Bn}\right)^2} e^{-\left(\frac{r}{R_n}\right)^2} dr = \frac{1}{Bn^2} \int_0^{\infty} 2\rho^2 r e^{-\rho^2 \left(\frac{1}{Bn^2} + \frac{1}{\rho^2 R_n^2}\right)^{r^2}} dr.$$

Щоб одержаний інтеграл звести до табличного, підінтегральну функцію помножимо і поділимо на

$$(1/Bn^2 + 1/\rho^2 R_n^2),$$

$$p[Ц] = -\frac{1}{Bn^2} \cdot \frac{\rho^2 R_n^2 Bn^2}{Bn^2 + \rho^2 R_n^2} \int_0^{\infty} -2\rho^2 \left(\frac{1}{Bn^2} + \frac{1}{\rho^2 R_n^2} \right) \times$$

$$\times e^{-\rho^2\left(\frac{1}{Bn^2}+\frac{1}{\rho^2 R_n^2}\right)} dr = \frac{\rho^2 R_n^2}{Bn^2 + \rho^2 R_n^2}.$$

Таким чином, формулою для розрахунку ймовірності ураження цілі буде

$$p\,[Ц] = \rho^2 R_n^{\,2}/(Bn^2 + \rho^2 R_n^{\,2}). \qquad (7.25)$$

2. Обчислимо ймовірність:

$p\,[Ц] = (0{,}477 \cdot 2{,}6)^2/[0{,}4^2 + (0{,}477 \cdot 2{,}6)^2] =$

$= 1{,}54/(0{,}16 + 1{,}54) = 0{,}906.$

Відповідь: $p\,[Ц] \approx 91$ %.

Приклад 9. В умовах попереднього прикладу 8 визначимо величину радіуса зони ураження, що забезпечує ймовірність ураження цілі $p\,[Ц] = 0{,}95$.

Р о з в’ я з а н н я. Розрахункову формулу одержимо, розв’язавши (7.25) щодо R_n:

$$R_n = \frac{1}{\rho} Bn \sqrt{\frac{p[Ц]}{1 - p[Ц]}} = 2{,}1 Bn \sqrt{\frac{p[Ц]}{1 - p[Ц]}}\,. \qquad (7.26)$$

Підставляючи у формулу (7.26) заданий рівень імовірності ураження цілі та колову помилку пострілу, одержимо шукану величину радіуса зони ураження:

$$R_n = 2{,}1 \cdot 0{,}4\sqrt{0{,}95/(1\text{–}0{,}95)} = 3{,}67 \text{ км}.$$

Відповідь: $R_n = 3{,}67$ км.

7.4. Нормальний розподіл трьох випадкових величин (нормальний розподіл у просторі)

Наочним прикладом дійсно нормального розподілу точки в просторі є розподіл розривів під час дистанційної стрільби, що визначається сукупною дією трьох незалежних випадкових величин: N – випадковим відхиленням траєкторії від середньої за нормаллю із серединним відхиленням B_n; випадковим відхиленням у напрямку Z із серединним відхиленням *Вб*; випадковим відхиленням розриву вздовж траєкторії внаслідок випадкових помилок роботи дистанційних детонаторів *T* із серединним відхиленням *Bt* [10].

Характеристикою системи трьох випадкових величин із нормальним законом розподілу є одиничний еліпсоїд, канонічне рівняння якого для розсіювання повітряних розривів щодо центра розсіювання точки *С* (рис. 7.37) буде

$$n_p^2/Bn^2 + z_p^2/B\textit{б}^2 + t_p^2/Bt^2 = 1.$$

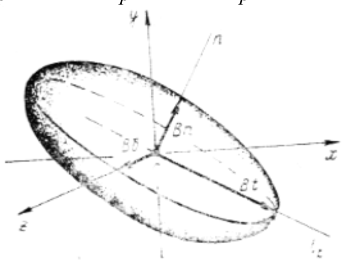

Рисунок 7.37 – Одиничний еліпсоїд щодо розсіювання повітряних розривів відносно центра розсіювання точки *С*

При цьому щільність нормального розподілу системи (N_p, Z_p, T_p) у канонічному вигляді

$$f(n_p, z_p, t_p) = \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} BnB\textit{б}Bt} e^{-\left[\frac{n_p^2}{Bn^2}+\frac{z_p^2}{B\textit{б}^2}+\frac{t_p^2}{Bt^2}\right]}. \qquad (7.27)$$

Дуже часто необхідно знати числові характеристики розподілу випадкової точки за напрямками, що нас цікавлять.

Цими характеристиками будуть відхилення, викликані одиничним еліпсоїдом за заданим напрямком.

Так, характеристикою розсіювання повітряних розривів за дальністю щодо центра розсіювання буде $Bp\textit{д} = E\,[X_p]$, серединним відхиленням повітряних розривів за висотою є серединне відхилення $Bp\textit{в} = E[Y_p]$. Обидва ці серединні відхилення графічно (рис. 7.38) зображують відстань від центра розсіювання до площини, дотичної до еліпсоїда й перпендикулярної до заданого напрямку. Випадкові величини відхилень повітряних розривів за дальністю X_p та напрямком Z_p незалежні. Тому щільність розподілу повітряних розривів у горизонтальній площині буде [21]

$$f(x_p, z_p) = \frac{\rho^2}{\pi Вр\partial Вб} e^{-\left[\frac{x_p^2}{Вр\partial^2} + \frac{z_p^2}{Вб^2}\right]}.$$

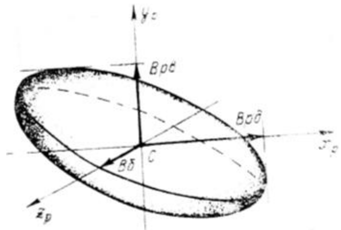

Рисунок 7.38 – Графічне зображення двох серединних відхилень (*Врд*, *Врв*) від центра розсіювання за площиною

Приклад 10. Стрільба проводиться з 122-мм гаубиці Д-30 на заряді 1, дальність стрільби 6 км.

Визначити: 1) ймовірність того, що в горизонтальній площині розрив відхилиться від центра розсіювання не більше ніж на 50 м; 2) максимальне відхилення розриву за висотою від центра розсіювання з імовірністю 90 %.

Р о з в’ я з а н н я 1. Ймовірність відхилення розриву в горизонтальній площині від центра розсіювання не більше ніж 50 м обчислюється як імовірність потрапляння випадкової точки (X_p, Z_p) у коло r = 50 м, центр якого збігається з центром розсіювання системи, за допомогою таблиці А.4.

$$p\ [(x_p, z_p) \in \varepsilon_r] = \varphi(e_1; r/a).$$

Для цього діємо таким чином.

Із таблиць стрільби обчислюємо серединні відхилення розривів у горизонтальній площині *Врд* = 43 м, *Вб* = 2,4 м.

Розраховуємо входи у таблицю А.4.:

$$e_1 = \sqrt{1-\left(\frac{B\textit{б}}{Bp\partial}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{2,4}{43}\right)^2} = 0,9984,$$

$$r_1 = r/Bp\partial = 50/43 = 1,16. \; r_1 = \frac{r}{Bp\partial} = \frac{50}{43} = 1,16.$$

За величинами e_1 = 0,9984 і r_1 = 1,16 входимо в таблицю і визначаємо шукану ймовірність

$$p\,[(x_p, z_p) \in \varepsilon_r] = 0,5646.$$

Відповідь: $p\,[(x_p, z_p) \in \varepsilon_r]$ = 56,5 %.

Р о з в' я з а н н я. 2. Максимальне відхилення за висотою за ймовірності 90 % обчислюється через довірчий інтервал випадкової величини Y_p за умови

$$p\,[|Y_p| < \varepsilon_{y_p}] = 56,5\ \%,$$

$$p\,[|Y_p| < \varepsilon_{y_p}] = 90\ \%.$$

За допомогою табл. А.1 Ф (x), маючи на увазі, що

$$\Phi\,(\varepsilon_{y_p}/Bp\textit{в}) = 0,90.$$

Цікаву для нас величину обчислимо таким чином.

Із таблиць стрільби визначимо серединне відхилення розривів за висотою $Bp\textit{в}$ = 14 м.

Ф (x) із табл. А.1. одержимо, що ймовірності 0,90 відповідає значення x:

$$x = \varepsilon_{y_p}/Bp\textit{в} = 2,139.$$

Розрахуємо величину максимального відхилення за висотою

$$\varepsilon_{y_p} = x \cdot Bp\textit{в} = 2,439 \cdot 14 = 34,1.$$

Відповідь: з імовірністю 90 % $|\varepsilon_{y_p}|$ = 34 м.

У загальному вигляді нормальний розподіл системи трьох незалежних випадкових величин може бути поданий так [22].

Нехай X, Y й Z – незалежні випадкові величини з щільністю розподілу:

$$\left.\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_x}e^{-\rho^2\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}},\\
f_2(y) &= \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_y}e^{-\rho^2\frac{(y-m_y)^2}{E_y^2}},\\
f_3(z) &= \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E_z}e^{-\rho^2\frac{(z-m_z)^2}{E_z^2}}.
\end{aligned}\right\}$$

Щільність розподілу системи одержимо перемноженням щільності розподілу окремих випадкових величин:

$$f(x,y,z) = f_1(x)\,f_2(y)\,f_3(z) =$$
$$= \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}}E_xE_yE_z}e^{-\rho^2\left[\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{E_y^2}+\frac{(z-m_z)^2}{E_z^2}\right]}. \tag{7.28}$$

Одиничний еліпсоїд цієї системи показаний на рис. 7.37.

Імовірність потрапляння випадкової точки в паралелепіпед зі сторонами, паралельними головним осям розсіювання, може бути розраховано за допомогою таблиць $F(x)$, рис. 7.38

$$p\left[(x,y,z)\in D\right] = \left[F\left(\frac{\beta-m_x}{E_x}\right)-F\left(\frac{\alpha-m_x}{E_x}\right)\right]\left[F\left(\frac{\delta-m_y}{E_y}\right)-\right. \tag{7.29}$$
$$\left.-F\left(\frac{\gamma-m_y}{E_y}\right)\right]\left[F\left(\frac{\lambda-m_z}{E_z}\right)-F\left(\frac{\mu-m_z}{E_z}\right)\right].$$

Так само за допомогою табличних функцій легко може бути розрахована ймовірність потрапляння випадкової точки в еліпсоїд розсіювання ε_k із півосями a, b і c:

$$p_k = p\,[(X, Y, Z) \in \varepsilon_k] = \Phi\pi\,(x = k) - 2k\varphi\,(x = k), \tag{7.30}$$

де $k = a/E_x = b/E_y = c/E_z$;

$\Phi\,(x = k)$ – значення табличної функції $\Phi\,(x)$ табл. А.1. за $x = k$;

$\varphi\,(x = k)$ – значення табличної функції $\varphi\,(x)$ табл. А.3. за $x = k$.

Наведемо стислу таблицю ймовірностей
$p_k = p\ [(X, Y, Z) \in \varepsilon_k]$, розрахованих за формулою (7.30).

k	p_k	k	p_k	k	p_k
0,5	0,00986	2,0	0,38935	4,0	0,93648
1,0	0,07133	3,0	0,74855	5,0	0,99013

Висновки до розділу 7

Із вищевикладеного можна зробити висновок, що закон розподілів однієї і тієї самої системи двох випадкових величин може бути відображений щільністю розподілу системи двох незалежних величин, якщо обрана система координат, осі якої збігаються з напрямком головних осей розсіювання, або щільністю розподілу системи двох залежних величин, якщо осі координат повернені щодо напрямку головних осей розсіювання на кут α.

Виходячи з цього, для визначення сумарної дії незалежної помилки-вектора можна переносити з одного кінця обумовленого відрізка на інший паралельно самим собі, але змінюючи напрямки їх на зворотні. Після перенесення всіх помилок-векторів на один кінець обумовленого відрізка їх додають за правилом додавання векторів, одержуючи сумарну помилку-вектор.

Отже, з цього випливає, що весь математичний апарат теорії ймовірностей, розроблений для системи двох випадкових величин, може бути повністю застосований для ймовірнісного оцінювання випадкових помилок-векторів.

Таким чином, одночасна дія двох джерел помилок-векторів, спрямованих під кутом один до одного, приводить до системи помилок-векторів на площині. При цьому сполученими півдіаметрами одиничного еліпса розсіювання будуть серединні відхилення законів розподілу помилок-векторів, що додаються.

Таким чином, вивчення питань нормального розподілу системи двох випадкових величин найбільш поширене й графічно зображується розподілом положення випадкової точки на площині, а нормальний закон розподілу системи двох випадкових величин називають «нормальним розподілом (нормальним законом) на площині», і дозволяє використовувати його не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці.

Так, в артилерійській практиці часто трапляється нормальний закон розподілу на площині – розсіювання снарядів (точок падіння снарядів) і підпорядковується нормальному закону на площині, що називають законом розсіювання снарядів під час ударної стрільби. Дуже важливе значення відіграє визначення ймовірності випадкових величин та ймовірність потрапляння в площі цілей довільної форми.

У цьому розділі розглянуті нормальний розподіл системи двох випадкових величин, канонічний вигляд нормального закону на площині, запропоновані загальний вираз нормального закону на площині, колове розсіювання, розподіл випадкової точки на площині в заданому напрямку, поданий перехід до довільної системи координат, також розглянуті прості і в той самий час найбільш типові випадки визначення ймовірностей потраплянь: у прямокутник зі сторонами, паралельними головним осям розсіювання, у смугу нескінченної довжини, в еліпс розсіювання і в коло, у площі довільної форми з використанням сітки колового розсіювання.

Окремо розглянуті помилки-вектори, їх дія на площині, дія на площині кількох векторіальних помилок порізному спрямованих, що підпорядковуються нормальним законам розподілу, висвітлюється закон розподілу величини помилки-вектора за коловим законом, нормальний розподіл трьох випадкових величин (нормальний розподіл у просторі).

Також у розділі наведені приклади до матеріалу розділу та варіанти їх розв'язання.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Нормальний розподіл системи випадкових величин, нормальний розподіл на площині, канонічний вигляд нормального закону на площині, щільність розподілу, середні квадратичні відхилення, одиничний і повний еліпси, нормальний закон на площині, поверхня розподілу системи, розподіл помилок, визначення положення цілі, характеристики закону розподілу системи двох випадкових величин, колове розсіювання, розподіл випадкової точки на площині в заданому напрямку, серединні відхилення, розподіл випадкової точки, напрямок імовірності, випадкова величина, перехід до довільної системи координат, коефіцієнт кореляції, ймовірність ураження одиночної цілі, потрапляння в прямокутник, імовірність влучення в ціль з одного пострілу, потрапляння у смугу нескінченної довжини, в еліпс розсіювання, у площі довільної форми і в коло, нескінченна смуга, шукана ймовірність, «сітка колового розподілу», помилки-вектори, дія помилок-векторів на площині, помилки в обліку відхилення початкової швидкості снаряда, в обліку деривації, в обліку вітру, у положенні вогневої позиції та цілі, у визначенні вектора балістичного вітру, наявність однієї помилки, наявність двох помилок на одному кінці відрізка, наявність помилок на обох кінцях відрізка, наявність декількох помилок-векторів, що діють за одним напрямком, дія на площині кількох векторіальних помилок, нормальний закон розподілу, векторіальні помилки, математичний апарат теорії ймовірностей, закон розподілу величини помилки-вектора за коловим законом, повна ймовірність, координатний закон ураження, нормальний розподіл трьох випадкових величин у просторі, табличні фун-

кції.

Питання для повторення та самоконтролю

1. У чому полягає нормальний розподіл системи випадкових величин?

2. Надати визначення щільності розподілу.

3. У чому полягає нормальний розподіл на площині?

4. Для чого необхідні середні квадратичні відхилення?

5. Надати пояснення поверхні розподілу системи.

6. Зобразити загальний вираз нормального закону на площині.

7. Надати пояснення коловому розсіюванню випадкових точок.

8. Графічно зобразити розподіл випадкової точки (X, Y) на площині у заданому напрямку.

9. Сформулювати перехід до довільної системи координат.

10. Надати визначення ймовірності різних значень випадкових величин (імовірність потрапляння випадкової точки в різні області).

11. Графічно зобразити та написати формулу ймовірності потрапляння в прямокутник зі сторонами, паралельними головним осям розсіювання.

12. У чому полягає ймовірність потрапляння в смугу нескінченної довжини?

13. У чому полягає ймовірність потрапляння в еліпс розсіювання і в коло?

14. У чому полягає ймовірність потрапляння в площі довільної форми?

15. Подати пояснення помилкам-векторам та їх діям на площині.

16. Подати пояснення дії на площині кількох векторіальних помилок, по-різному спрямованих і підпорядкованих нормальним законам розподілу.

17. У чому полягає закон розподілу величини помилки-вектора за коловим законом?

18. У чому полягає нормальний розподіл трьох випадкових величин (нормальний розподіл у просторі)?

Завдання для самопідготовки

1. Знайти інші галузі науки, де використовували результати дії законів нормального розподілу системи випадкових величин.

2. Визначити або знайти інші форми цілей, в які можлива стрільба артилерії.

3. Користуючись законами розсіювання снарядів під час стрільби на ураження, графічно зобразити ймовірність потрапляння в площі довільної форми.

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Галузі застосування закону розсіювання випадкових точок.

2. Історія виникнення теорії ймовірностей та її застосування у нанотехнологіях.

3. Застосування нормального закону розподілу системи випадкових величин в артилерії під час ураження цілей.

4. Форми цілей для ураження артилерії, способи ураження різних форм цілей.

5. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

Розділ 8

ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ФУНКЦІЙ ВИПАДКОВИХ АРГУМЕНТІВ

У теорії стрільби часто доводиться оцінювати випадкові величини, що є функцією інших випадкових величин. Так, для оцінювання можливих значень поправки дальності на вітер доводиться досліджувати функцію

$$\Delta Д_W = 0{,}1\Delta X_W \cdot W_x.$$

Поздовжня складова балістичного вітру величина випадкова, що має свій розподіл $f\ (W_x)$ із параметрами $M\,[W_x]$; $\sigma\ [W_x]$. У цьому разі похибка дальності виражена лінійною функцією одного випадкового аргументу W_x. Завдання зводиться до визначення числових характеристик закону розподілу випадкової величини похибки дальності $f\,(\Delta Д_W) : M\,[\Delta Д_W]$ і $\sigma\,[\Delta Д_W]$.

При оцінюванні точності стрільби досліджується дії різних джерел помилок. Наприклад, випадкова помилка дальності $X_{\delta\Delta Д W}$ унаслідок помилок визначення похибки на поздовжній вітер (відповідно до наведеної розрахункової формули похибки дальності $\Delta Д_{Wx}$ дорівнюватиме

$$\Delta Д_W = \Delta Д_{W_{іст}} + \delta\Delta Д_W = 0{,}1\left(\Delta X_{W_{іст}} + \delta\Delta X_w\right)\left(W_{x_{іст}} + \delta W_x\right) =$$

$$= \left[0{,}1\Delta X_{W_{іст}} W_{x_{іст}}\right] + \left[0{,}1\Delta X_{W_{іст}}\delta W_x + W_{x_{іст}} \cdot 0{,}1\delta\Delta X_w + 0{,}1\delta\Delta X_w \delta W_x\right],$$

$$X_{\delta\Delta Д_w} = \delta\left[\Delta Д_W\right] = 0{,}1\left[\Delta X_w \delta W_x + W_x \delta\Delta X_w + \delta_{\Delta X_W}\delta W_x\right],$$

де $\delta\Delta X_W$ і δW_x – табличні помилки визначення поздовжнього балістичного вітру.

У цьому випадку нас цікавить випадкова помилка дальності $X_{\delta\Delta Д W}$, що є нелінійною функцією трьох незалежних випадкових величин:

– випадкової помилки визначення поздовжньої складової балістичного вітру δW_x;

– випадкової табличної помилки;

– випадкової величини поздовжнього вітру W_x.

У цьому випадку також завдання полягає у визначенні числових характеристик закону розподілу помилки дальності $M [X_W]$ і $\sigma [X_W]$ за відомими числовими характеристиками аргументів: закону розподілу помилок у визначенні поздовжньої складової балістичного вітру $M [\delta W_x]$ і $\sigma [\delta W_x]$, закону розподілу випадкової величини поздовжнього вітру $M[W_x]$ і $\sigma[W_x]$.

Таким чином, виникає необхідність мати такий математичний апарат, за допомогою якого можна було б визначати закони розподілу функцій випадкових аргументів. Розглянемо вирішення цього питання у загальному вигляді.

Безпосереднє встановлення закону розподілу випадкової величини або системи випадкових величин в ряді випадків може виявитися досить складним. Звідси виникає завдання побічно визначати закони розподілу, що нас цікавлять, на підставі вже відомих законів розподілу інших випадкових величин. При цьому зазвичай нас цікавить випадкова величина, що подається як функція інших випадкових величин. Знаючи закони розподілу аргументів, здебільшого можна встановити закон розподілу функції. Таким чином і виникає завдання щодо встановлення «законів розподілу функцій випадкових аргументів» [31].

Однак під час вирішення практичних завдань іноді достатньо знати деякі числові характеристики, основними з яких є математичне сподівання й дисперсія (середнє квадратичне або серединне відхилення). У цих умовах виникає завдання з визначення лише числових характеристик функцій випадкових аргументів.

8.1. Числові характеристики функцій випадкових аргументів. Теореми про числові характеристики та їх використання під час розв’язання окремих завдань

8.1.1. Загальні формули для розрахунку математичного сподівання і дисперсії функції

Завдання полягає у такому: випадкова величина є деякою функцією декількох випадкових величин $X_1, X_2,..., X_n$:

$$Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Відомий закон розподілу системи аргументів $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

$$f(x_1, x_2, ..., x_3).$$

Потрібно визначити математичне сподівання й дисперсію випадкової величини Y.

Якщо вдасться встановити закон розподілу випадкової величини Y, наприклад, щільність розподілу $g(y)$, то математичне сподівання й дисперсія можуть бути легко визначені за відомими формулами

$$m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y g(y) dy$$

і

$$D_y = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - m_y)^2 g(y) dy.$$

Отже, як зазначалося, завдання із визначення закону розподілу $g(y)$ часто виявляється досить складним. Тому використовують прийоми і методи, що дозволяють обчислити математичне сподівання й дисперсію функції випадкових аргументів, використовуючи закони розподілу аргументів або лише числові характеристики [22].

У цьому розділі розглянемо задачу із визначення числових характеристик функції при заданому законі розподілу аргументів.

Припустимо, що випадкова величина дискретного типу X пов’язана з величиною Y функціональною залежністю

$$Y = \varphi(x).$$

Потрібно визначити математичне сподівання величини Y:

$$m_y = M[Y] = m[\varphi(X)]. \qquad (8.1)$$

Якщо відомий закон розподілу випадкової величини X, заданий, наприклад, рядом розподілу

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

,

то для випадкової величини Y можна скласти ряд значень $y_i = \varphi(x_i)$ і мати відповідні до них імовірності $p_i = p[y_i = \varphi(x_i)] = p(x_i)$

$y_i = \varphi(x_i)$	$y_1 = \varphi(x_1)$	$y_2 = \varphi(x_2)$	...	$y_n = \varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	...	p_n

.

Використовуючи значення $\varphi(x_i)$ і відповідні до них імовірності p_i, можна визначити математичне сподівання величини Y: [29]

$$m_y = M[\varphi(X)] = \Sigma_{(i)}\, \varphi(x_i)p_i. \qquad (8.2)$$

Приклад 1. Випадкова величина X має такий ряд розподілу:

x_i	0	1	3	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

.

Визначити математичне сподівання випадкової величини $Y = 3X - 4$.

Р о з в' я з а н н я. Складемо ряд розподілу випадкової величини Y.

y_i	−4	−1	5	11
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

.

Тоді

$m_y = \Sigma_{(i)} y_i p_i = (-4)\cdot 0,1 + (-1)\cdot 0,4 + 5\cdot 0,3 + 11\cdot 0,2 = 2,9.$

Якщо випадкова величина X безперервного типу з щільністю розподілу $f(x)$, то формула для розрахунку математичного сподівання величини $Y = \varphi(X)$ буде

$$m_y = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x) \cdot f(x)\, dx. \quad (8.3)$$

Аналогічно можуть бути обчислені вирази, що визначають математичне сподівання функції від двох випадкових аргументів X і Y, $Z = \varphi(X, Y)$:

– для перервних випадкових величин

$$M[Z] = M[\varphi(X,Y)] = \Sigma_{(i)}\Sigma_{(j)}\varphi(x_i, y_j)p_{i,j}, \quad (8.4)$$

де $p_{i,j} = p[(X = x_i)(Y = y_j)]$ – імовірність того, що система (X, Y) набуде значення (x_i, y_j);

– для безперервних величин

$$M[Z] = M[\varphi(X,Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y) \cdot f(x, y)\, dxdy, \quad (8.5)$$

де $f(x, y)$ – щільність розподілу системи (X, Y).

Приклад 2. Визначити математичне сподівання випадкової величини $Z = aX + bY + c$, якщо задана щільність розподілу (x, y) системи (X, Y).

Р о з в' я з а н н я. Математичне сподівання обчислюється за формулою (8.5):

$$m_y = \iint_{-\infty}^{+\infty}(ax + by + c)\cdot f(x, y)\, dxdy = \iint_{-\infty}^{+\infty}axf(x, y)\, dxdy$$
$$+ \iint_{-\infty}^{+\infty}byf(x, y)\, dxdy + \iint_{-\infty}^{+\infty}cf(x, y)\, dxdy) =$$
$$= a\int_{-\infty}^{+\infty}x[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\, dy]\, dx + b\int_{-\infty}^{+\infty}y[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\, dx]\, dy +$$
$$+ c\int_{-\infty}^{+\infty}f(x, y)\, dxdy.$$

Застосовуючи до одержаного виразу (6.9–6.11) правила, позначені формулами, одержуємо

$$m_y = a\int_{-\infty}^{+\infty}xf_1(x)\, dx + b\int_{-\infty}^{+\infty}yf_2(x)\, dy + c$$

або остаточно

$$m_y = a\cdot m_x + b\cdot m_y + c.$$

Якщо є функція довільного числа випадкових величин $W = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n)$, то математичне сподівання такої функції обчислюється за аналогічними формулами. Так, для випадку безперервних випадкових величин

$$M[W] = M[\varphi(X_1, X_2, ..., X_n)] =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty},...,\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1, dx_2, ..., dx_n, \quad (8.6)$$

де $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – щільність розподілу системи

$(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Таким чином, математичне сподівання функції будь-якого числа випадкових аргументів може бути обчислене, крім закону розподілу функції.

Дисперсія, як й інші моменти, також являє собою математичне сподівання деякої функції. Тому формули для її розрахунку можна одержати так само, як і раніше. Наведемо формули для обчислення дисперсій функції безперервних випадкових аргументів:

– дисперсія функції одного випадкового аргументу

$$D\,[\varphi\,(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi\,(x) - m_\varphi]^2 \cdot f\,(x)\,dx, \qquad (8.7)$$

або

$$D\,[\varphi\,(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty}[\varphi\,(x)]^2 \cdot f\,(x)\,dx - m_\varphi^{\;2}, \qquad (8.8)$$

де $m_\varphi = M\,[\varphi(x)]$ – математичне сподівання функції $\varphi\,(X)$;

$f\,(x)$ – щільність розподілу величини X;

– дисперсія функції двох аргументів

$$D\,[\varphi\,(X,Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty}[\varphi\,(x,y) - m_\varphi]^2 \cdot f\,(x,y)\,dxdy \qquad (8.9)$$

або

$$D\,[\varphi\,(X,Y)] = \iint_{-\infty}^{+\infty}[\varphi\,(x,y)]^2 \cdot f\,(x,y)\,dxdy - m_\varphi^{\;2}, \qquad (8.10)$$

де m_φ – математичне сподівання функції $\varphi\,(X, Y)$;

$f\,(x, y)$ – щільність розподілу системи (X, Y);

– дисперсія функції довільного числа аргументів

$$D\Big[\varphi\big(X_1, X_2, ..., X_n\big)\Big] = \int_{-}^{+}...\int_{\infty}^{\infty}\Big[\varphi\big(x_1, x_2, ..., x_n\big) - m_\varphi\Big]^2 f\,\big(x_1, x_2, ..., x_n\big)\times$$

$$\times\, dx_1, dx_2, ..., dx_n. \qquad (8.11)$$

Такі формули дозволяють розрахувати математичні сподівання й дисперсії функцій випадкових аргументів, якщо відомі закони розподілу аргументів. Однак переважно для обчислення числових характеристик функцій не потрібно знати закони розподілу аргументів, а достатньо знати певні числові характеристики. При цьому для їх обчислення використовують теореми про математичне сподіввання й дисперсії [35].

8.1.2. Теореми про математичне сподівання і дисперсії

Раніше було показано, як обчислювати числові характеристики функцій, якщо відомі закони розподілу випадкових аргументів. Однак здебільшого для обчислення числових характеристик функцій досить знати лише певні числові характеристики законів розподілу аргументів; при цьому припускається можливим взагалі обходитися без законів розподілу. Визначення числових характеристик функцій за заданими числовими характеристиками аргументів широко застосовують у теорії стрільби, що дозволяє досить значно спрощувати вирішення низки завдань. Такі методи переважно відносять до лінійних функцій. Однак деякі елементарні нелінійні функції також припускають подібний підхід.

Розглянемо основні теореми про математичне сподівання й дисперсії функції, що являють в своїй сукупності вельми простий апарат обчислення цих характеристик, і покажемо приклади використання їх в артилерійській практиці.

8.1.3. Математичне сподівання й дисперсія сталої величини

Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій величині:

$$M[C] = C.$$

Дійсно, якщо розглянути C як окремий випадок випадкової величини, що може набувати лише одного значення, то за загальною формулою математичного сподівання [1]

$$M[C] = C \cdot 1 = C.$$

Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D[C] = 0,$$

оскільки

$$D[C] = M[(C - m_c)^2] = M[(C - C)^2] = M[0] = 0.$$

8.1.4. Винесення сталого коефіцієнта за знак математичного сподівання і дисперсії

Сталий коефіцієнт можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M[CX] = CM[X]. \tag{8.12}$$

Доведення:

$$M[CX] = \Sigma_{(i)}[Cx_i]p_i = C\Sigma_{(i)}x_i p_i = CM[X].$$

Сталий коефіцієнт можна виносити за знак дисперсії та підносити його до квадрата:

$$D[CX] = C^2 D[X]. \tag{8.13}$$

Дійсно,

$$D[CX] = M \cdot \left\{ \left[CX - M(CX) \right]^2 \right\} = M\left\{ \left[CX - Cm_x \right]^2 \right\} =$$

$$= C^2 M\left[\left(X - m_x \right)^2 \right] = C^2 D_x.$$

Добуваючи з обох частин рівності (8.13) квадратний корінь, одержимо

$$\Sigma[CX] = [C]\sigma_x, \text{ або } E[CX] = [C]E_x, \tag{8.14}$$

тобто сталий коефіцієнт можна виносити за знак середнього квадратичного (серединного) відхилення та брати його за абсолютним значенням [10].

Приклад 3. Випадкова величина X підпорядковується нормальному закону з математичним сподіванням $m_x = 5$ м і серединним відхиленням $E_x = 3$ м. Визначити математичне сподівання й серединне відхилення величини $Y = -7X$.

Р о з в’ я з а н н я. $m_y = M(-7X) = (-7)m_x = (-7)5 = -35$, $E_y = |-7|\, E_x = 7 \cdot 3 = 21$.

Відповідь: $m_y = -35$ м, $E_y = 21$ м.

8.1.5. Математичне сподівання і дисперсія суми випадкових величин

Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань.

Доведення наведемо у ситуації системи безперервних випадкових величин (X, Y):

$$M\left[X+Y\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\left(x+y\right)f\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int xf\left(x,y\right)dxdy+$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int yf\left(x,y\right)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dy\right]dx+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}y\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)dx\right]dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_1\left(x\right)dx+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}yf_2\left(y\right)dy=$$

$$=M\left[X\right]+M\left[Y\right].$$

Таким чином,

$$M\,[X+Y]=M\,[X]+M\,[Y]. \qquad (8.15)$$

Теореми додавання математичних сподівань можуть бути поширені на довільне число доданків:

$$M\,[\Sigma_{i=1}{}^{n}X_i]=\Sigma_{i=1}{}^{n}M\,[X_i], \qquad (8.16)$$

тобто математичне сподівання суми кількох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань.

Варто спеціально зазначити, що теорема додавання математичних сподівань справедлива для будь-яких випадкових величин як залежних, так і незалежних [21].

Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій плюс подвоєний кореляційний момент:

$$D\,[X+Y]=D_x+D_y+2\,K_{xy}. \qquad (8.17)$$

Нехай $Z = X + Y$. За формулою (8.15) $m_z = m_x + m_y$ перейдемо від випадкових величин X, Y, Z до відповідних центрованих величин $\mathring{X}, \mathring{Y}, \mathring{Z}$, тоді

$$Z-m_z=(X-m_x)+(Y-m_y),$$

або

$$\mathring{Z}=\mathring{X}+\mathring{Y},$$

$$D\,[X+Y]=D\,[Z]=M\,[\mathring{Z}^2]=M\,[\mathring{X}^2]+2M\,[\mathring{X}\mathring{Y}]+$$

$$+ M[\overset{\circ}{Y}{}^2] = D_x + D_y + 2K_{xy}.$$

Формула (8.17) може бути поширена на будь-яке число доданків:

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D_{x_i} + 2\sum_{i<j} K_{ij}\,, \qquad (8.18)$$

де K_{ij} – кореляційний момент величин X_i, X_j; знак $i < j$ під сумою означає, що підсумовування поширюється на всі можливі попарні сполучення випадкових величин:

$X_1, X_2, ..., X_n : K_{12}$ ($K_{X1,X2}$: i = 1 < j = 2) : K_{13}; ...

Друга половина матриці (K_{21}, K_{31}, ...) врахована коефіцієнтом 2.

Із формули (8.18) бачимо, що її права частина являє собою суму всіх членів кореляційної матриці. Тому її можна подати у більш загальному вигляді

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}\,, \qquad (8.19)$$

де подвійна сума поширюється на всі елементи кореляційної матриці системи величини (X_1, X_2, ..., X_n), містить як кореляційні моменти, так і дисперсії. Якщо випадкові величини, що входять до суми, некорельовані, то кореляційні моменти дорівнюють нулю,

$$D[\Sigma_{i=1}{}^{n}X_i] = \Sigma_{i=1}{}^{n}Dx_i, \qquad (8.20)$$

тобто дисперсія суми некорельованих випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків [18].

Формули для дисперсії суми випадкових величин можуть бути використані для визначення серединних відхилень суми випадкових величин, підпорядкованих нормальним законам розподілу. Тоді матимемо:

– для суми залежних випадкових величин

$$E^2[\Sigma_{i=1}{}^{n}X_i] = \Sigma_{i=1}{}^{n}Ex_i{}^2 + 2\Sigma_{i<j}Rx_ix_jEx_iEx_j, \qquad (8.21)$$

де Rx_ix_j – коефіцієнт залежних випадкових величин X_i, X_j;

– для суми незалежних випадкових величин

$$E^2[\Sigma_{i=1}{}^n X_i] = \Sigma_{i=1}{}^n E x_i{}^2. \qquad (8.22)$$

8.1.6. Математичне сподівання і дисперсія лінійної функції

Є лінійна функція декількох випадкових аргументів X_1, X_2, ..., X_n , тоді

$$Y = \Sigma_{i=1}{}^n \cdot a_i X_i + b,$$

де a_i і b – невипадкові (сталі) коефіцієнти.

Доведемо, що математичне сподівання лінійної функції дорівнює тій самій лінійній функції від математичних сподівань аргументів, тобто

$$m_y = M\,[\Sigma_{i=1}{}^n \alpha_i X_i + b] = \Sigma_{i=1}{}^n \alpha_i\, m_{x_i} + b, \qquad (8.23)$$

а дисперсія лінійної функції виражається формулою

$$D_y = D[\Sigma_{i=1}{}^n \alpha_i X_i + b] = \Sigma_{i=1}{}^n \alpha_i{}^2 D_{x_i} + 2\Sigma_{i=1}{}^n \alpha_i \alpha_j K_{x_i x_j}. \quad (8.24)$$

Використовуючи раніше доведені теореми про математичне сподівання, одержимо

$$m_y = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] + M\,[b] = \sum_{i=1}^{n} a_i m_{x_i} + b.$$

Застосовуючи формули (8.13) і (8.18) і враховуючи, що $D\,(b) = 0$, одержимо

$$D_y = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] + D[b] = D\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right].$$

Позначимо $Z_i = a_i X_i$. Тоді

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i = \sum_{i=1}^{n} Z_i\ ,$$

будемо мати

$$D\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right] = \sum_{i=1}^{n} D_{z_i} + 2\sum_{i<j} K_{z_i z_j}\ .$$

Перший член доданків правої частини

$$\sum_{i=1}^{n} D_{z_i} = \sum_{i=1}^{n} D\left[a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 D_{x_i}.$$

Обчислимо кореляційний момент $K_{z_i z_j}$:

$$K_{z_i z_j} = M\left[\left(z_i - m_{z_i}\right)\left(z_j - m_{z_j}\right)\right].$$

Маємо

$$z_i - m_{z_i} = a_i X_i - a_i m_{x_i} = a_i\left(X_i - m_{x_i}\right).$$

Аналогічно

$$z_j - m_{z_j} = a_j\left(X_j - m_{x_j}\right),$$

тоді

$$K_{z_i z_j} = M\left[\left(z_i - m_{z_i}\right)\left(z_j - m_{z_j}\right)\right] =$$

$$= a_i a_j M\left[\left(X_i - m_{x_i}\right)\left(X_j - m_{x_j}\right)\right] = a_i a_j K_{x_i x_j}$$

і формула дисперсії буде

$$D_y = \Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i^{2} D_{x_i} + 2\Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i\alpha_j K_{x_i x_j}.$$

Якщо випадкові величини (X_1, X_2, ..., X_n), що входять до лінійної функції, некорельовані, то

$$D\left[\Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i X_i + b\right] = \Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i^{2} X_{x_i}, \qquad (8.25)$$

тобто *дисперсія лінійної функції некорельованих випадкових величин дорівнює сумі добутків квадратів коефіцієнтів на дисперсії відповідних аргументів* [24].

Якщо аргументи, складові лінійної функції, підпорядковуються нормальному закону, то на підставі формул (8.24) і (8.25) можуть бути складені формули для визначення серединних відхилень лінійних функцій:

– для лінійної функції залежних випадкових величин

$$E^2\left[\Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i X_i + b\right] = \Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i^{2} E_{x_i}^{2} + 2\Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i\alpha_j R_{x_i} R_{x_j} E_{x_i} E_{x_j}; \qquad (8.26)$$

– для лінійної функції незалежних випадкових величин

$$E^2\left[\Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i X_i + b\right] = \Sigma_{i=1}{}^{n}\alpha_i^{2} E_{x_i}^{2}. \qquad (8.27)$$

8.1.7. Математичне сподівання і дисперсія добутку випадкових величин

Маємо величину $Z = XY$, де X і Y – випадкові величини. Доведемо, що

$$m_z = M[XY] = m_x m_y + K_{xy}, \tag{8. 28}$$

тобто *математичне сподівання добутків двох випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань плюс кореляційний момент* [27].

За визначенням кореляційний момент є другим змішаним центральним моментом. Отже,

$$K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY - m_xY - m_yX + m_xm_y] =$$
$$= M[XY] - m_xm_y - m_xm_y + m_xm_y = M[XY] - m_xm_y,$$

звідси

$$M[XY] = m_xm_y + K_{xy},$$

оскільки

$$K_{xz} = \sigma_x \sigma_y R_{xy} = 1/2\rho^2 \cdot E_x E_y R_{xy} = 2{,}2E_x E_y R_{xy},$$

то формула (8.28) може бути подана у вигляді

$$M[XY] = m_x m_y + \sigma_x \sigma_y R_{xy} = m_x m_y + 2{,}2E_x E_y R_{xy}. \tag{8.29}$$

Цілком очевидно, що якщо випадкові величини X й Y некорельовані, то $K_{xy} = R_{xy} = 0$ і

$$M[XY] = m_x m_y. \tag{8.30}$$

Це положення відоме під назвою теореми множення математичних сподівань [35].

Теорема множення математичних сподівань поширюється й на довільне число співмножників, лише в цьому разі для її застосування недостатньо того, щоб величини були некорельованими, а потрібно, щоб перетворювалися на нуль і деякі вищі змішані моменти, кількість яких залежить від числа співмножників у добутку. Ці умови завідомо виконані за незалежності випадкових величин, що входять у добуток. У цьому разі

$$M\left[\prod_{i=1}^{n} X_i\right] = \prod_{i=1}^{n} M[X_i], \tag{8.31}$$

тобто *математичне сподівання добутків незалежних ви-*

падкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань [33].

Якщо випадкові величини X і Y, утворюють добуток $Z = XY$ незалежні, то

$$D_z = D\,[XY] = D_x D_y + m_x^{\,2} D_y + m_y^{\,2} D_x. \qquad (8.32)$$

Дійсно, якщо X і Y незалежні, то

$$D\left[Z\right] = M\left[Z^2\right] = M\left[\left(Z - m_z\right)^2\right] = M\left[\left(XY - m_x m_y\right)^2\right] =$$

$$= M\left[X^2Y^2\right] - 2m_x m_y M\left[XY\right] + m_x^2 m_y^2 =$$

$$M\left[X^2Y^2\right] - 2m_x m_y M\left[Y\right] M\left[X\right] + m_x^2 m_y^2 =$$

$$M\left[X^2\right] M\left[Y^2\right] - + m_x^2 m_y^2,$$

але

$$D_x = M\,[X^2] - m_x^{\,2},$$

звідси

$$M\,[X^2] = D_x + m_x^{\,2}.$$

Аналогічно

$$M\,[Y^2] = D_y + m_y^{\,2},$$

тоді

$$D_z = D_x D_y + m_x^2 D_y + m_y^2 D_x + m_x^2 m_y^2 - m_x^2 m_y^2 =$$

$$= D_x D_y + m_x^2 D_y + m_y^2 D_x,$$

що і доводить формулу (8.32).

Якщо перемножуються центровані випадкові величини, тобто $U = \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}$, то $m_{x^\circ} = m_{y^\circ} = 0$, і формула (8.33) набирає вигляду

$$D_U = D\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = D\left[\overset{\circ}{X}\right] D\left[\overset{\circ}{Y}\right], \qquad (8.33)$$

тобто *дисперсія добутку незалежних центрованих випадкових величин дорівнює добутку їх дисперсій* [34].

Як приклад розглянемо застосування одержаних теорем для вирішення деяких питань, що мають самостійне значення в теорії стрільби.

8.1.8. Визначення числових характеристик випадкової величини кількості влучень в ціль з декількох незалежних пострілів

Розглянемо стрільбу з N пострілів з імовірністю влучення в ціль при i-му пострілі p. Потрібно обчислити математичне сподівання і дисперсію влучень.

Кількість влучень в ціль за всіх пострілів X може бути подане сумою випадкових величин:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n = \Sigma_{i=1}{}^{N} \cdot X_i,$$

де $X_1 + X_2 + ... + X_n$ – характеристична випадкова величина кількості влучень при i-му пострілі.

За теоремою про математичне сподівання суми одержимо

$$m_x = M\,[\Sigma_{i=1}{}^{N} X_i] = \Sigma_{i=1}{}^{N} m_i.$$

Для характеристичної випадкової величини справедлива рівність

$$m_{xi} = p_i,$$

тоді

$$m_x = \Sigma_{i=1}{}^{N} \cdot p_i. \qquad (8.34)$$

Якщо умови для кожного пострілу однакові (коректури не вводяться), тоді $p_1 = p_2 = ... = p_N = p$ і формула (8.34) набере вигляду

$$m_x = N \cdot p. \qquad (8.35)$$

Оскільки теорема додавання математичних сподівань застосовна як до залежних, так і до незалежних випадкових величин, формули (8. 34) і (8.35) застосовні до будь-яких пострілів, що супроводжуються незалежними помилками пострілу, так і залежними (залежність помилок пострілів зумовлюється наявністю в сумарних помилках повторюваної частини, наприклад, помилок у положенні цілі, ВП, визначення метеорологічних умов і т. д.) [35].

Формули (8.34) і (8.35) часто застосовують у теорії стрільби, якщо потрібно обчислити середню кількість влучень за декількох пострілів. Формула (8.35) може бути використана для розрахунку витрати снарядів N, забезпечення середньої необхідної кількості влучень m, якщо ймовірність влучення з кожного пострілу p

$$N = m / p. \tag{8.36}$$

Для дисперсії кількості влучень прості формули можуть бути одержані лише для незалежних пострілів. У цьому випадку через незалежність випадкових відхилень снарядів від цілі випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_N$ незалежні, й до них застосовна теорема додавання дисперсій:

$$D_x = \Sigma_{i=1}^{N} \cdot D_{xi}.$$

Обчислимо дисперсії випадкової величини X_i. Оскільки $m_{xi} = p_i$, то з ряду розподілу маємо

$$D_{x_i} = \left(0 - p_i\right)^2 \left(1 - p_i\right) + \left(1 - p_i\right)^2 p_i = p_i(1 - p_i) = p_i q_i,$$

звідси

$$D_x = \Sigma_{i=1}^{N} \cdot p_i q_i. \tag{8.37}$$

Із формули (8.37) обчислимо середнє квадратичне відхилення кількості влучень: [37]

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} p_i q_i}\,. \tag{8.38}$$

За незмінних умов, якщо $p_1 = p_2 = ... = p_N = p$, маємо

$$\left.\begin{aligned} D_x &= Npq \\ \sigma_x &= \sqrt{Npq} \end{aligned}\right\}. \tag{8.39}$$

Приклад 4. Ціль – бліндаж, із розмірами по фронту $2m$ = 3 м, за глибиною $2l$ = 2,5 м. Стрільба проводиться з 122-мм гаубиці Д-30 на заряді 4, дальності стрільби 3 км. Середня траєкторія проходить через центр цілі.

Визначити: 1) середню кількість влучень в ціль за витрати 40 снарядів; 2) необхідну витрату снарядів для руйнування бліндажа даного типу, якщо для цього в середньому потрібно два влучення.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Розрахуємо ймовірність влучення у бліндаж з одного пострілу за формулою

$$p = \Phi\,(l\,/\,B\partial) \cdot \Phi\,(m\,/\,B\delta).$$

для заряду 4 і Д = 3 км: $B\partial$ = 12 м, $B\delta$ = 1,2 м.

Таким чином, використовуючи табл. 1 додатка

$$p = \Phi\,(1{,}25/12) \cdot \Phi\,(1{,}5/1{,}2) = \Phi\,(0{,}104) \cdot \Phi\,(1{,}25) =$$
$$= 0{,}05592 \cdot 0{,}60083 = 0{,}0336.$$

2. Визначимо середню кількість влучень на 40 пострілів [формула (8.35)]:

$$m_ц = N \cdot p = 40 \cdot 0{,}0336 = 1{,}3439 \approx 1{,}34.$$

Відповідь: середня кількість влучень на 40 пострілів – 1,3 влучення.

3. Визначимо необхідну витрату снарядів для одержання в середньому двох влучень [формула (8.36)]:

$$N = m\,/\,p = 2/0{,}0336 = 59{,}6.$$

Відповідь: для одержання в середньому на одну стрільбу двох влучень необхідно у кожній стрільбі витрачати 60 снарядів. При стрільбі на руйнування, якщо в процесі всієї стрільби проводиться спостереження і вводяться коректури, можна з деяким припущенням вважати, що середня траєкторія з'єднана з центром цілі. Тому розглянутий у п. 3 цього прикладу порядок розрахунку витрати снарядів застосований при складанні таблиці середньої витрати снарядів для руйнування [4].

Дисперсія кількості влучень при залежних пострілах може бути розрахована за формулою

$$D_x = \sum_{i=1}^{N} p_i q_i + 2\sum_{i \angle j}\left(p_{ij} - p_i p_j\right), \qquad (8.40)$$

де p_i й p_j – імовірності влучення в ціль при i-му й j-му пострілах.

8.1.9. Визначення математичного сподівання кількості уражених цілей під час стрільби по груповій цілі

Математичне сподівання кількості або відсотка уражених елементарних цілей – основний показник ефективності стрільби по груповій цілі. Розглянемо, як можна розрахувати цю величину.

Припустимо, що групова ціль складається з k елементарних цілей, імовірність ураження i-ї елементарної цілі p_i. Потрібно обчислити математичне сподівання кількості уражених елементарних цілей $M[a']$ [37].

Випадкова величина кількості уражених елементарних цілей може бути подана сумою характеристичних випадкових величин X_i, кожна з яких відображає ураження i-ї цілі. Розмірковуючи, як і при одержанні формули (8.34), обчислюємо

$$M[a'] = \Sigma_{i=1}^{k} \cdot p_i \tag{8.41}$$

Математичне сподівання відсотка уражених цілей, очевидно, обчислимо за формулою

$$M[\alpha] = (\Sigma_{i=1}^{k} p_i / k) \cdot 100 = p_{сер} (), \tag{8.42}$$

де $p_{сер}$ – середня ймовірність ураження елементарних цілей в %, розміщених у межах групової цілі.

8.1.10. Математичне сподівання і дисперсія кількості пострілів до *k*-го влучення в ціль

Раніше ми показали, що математичне сподівання m кількості пострілів до першого влучення розраховуються за формулами

$$m = 1 / p, \quad D = q / p^2,$$

де p – імовірність влучення в ціль з одного пострілу;

$$q = 1 - p.$$

У розглянутій задачі стрільба проводиться до k-го влучення. Потрібно обчислити математичне сподівання m_N і дисперсію кількості пострілів D_N.

Розглянемо випадкову величину N – кількість пострілів до k-го влучення включно.

Якщо N_1 – кількість пострілів до першого влучення (ураховуючи перше); N_2 – кількість пострілів від першого до другого влучення (враховуючи друге); N_k – кількість пострілів від (k – 1)- до k-го влучення (враховуючи k-те), то випадкову величину загальної витрати снарядів можна подати сумою

$$N = N_1 + N_2 + ... + N_k.$$

Очевидно, що випадкові величини $N_1 + N_2 + ... + N_k$ незалежні і кожна з них має математичне сподівання і дисперсію як і для розподілу витрат снарядів для першого влучення, що визначаються за формулами (4.16) і (4.18). Застосовуючи теореми додавання математичних сподівань і дисперсій, одержуємо [38]

$$\left.\begin{aligned} m_N &= \sum_{i=1}^{k} m_{N_i} = \frac{k}{p}, \\ D_N &= \sum_{i=1}^{k} D_{N_i} = \frac{kq}{p^2}, \text{ або } \sigma_N = \frac{\sqrt{kq}}{p} \end{aligned}\right\}. \qquad (8.43)$$

8.1.11. Проектування випадкової точки на площині на довільну пряму

У п. 7.1. були наведені формули, що дозволяють визначати середні квадратичні та серединні відхилення, що характеризують розподіл випадкової точки (X, Y) за заданим напрямком. Тепер на підставі розглянутих теорем можна їх довести.

У загальному вигляді задача сформулюється так. Випадкова точка на площині (X, Y) подана на рис. 8.1. Обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини Z – характеристик розподілу випадкової точки у напрямку $0Z$.

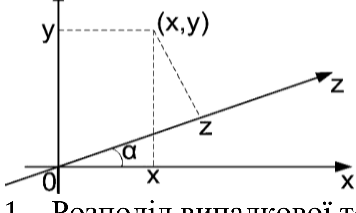

Рисунок 8.1 – Розподіл випадкової точки (X, Y) у напрямку $0Z$

Із рисунка 8.1 бачимо, що

$$Z = X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \sin\alpha,$$

тобто випадкова величина Z є лінійною функцією двох заданих випадкових величин X і Y.

На підставі теорем про математичне сподівання [формула (8.23)] і дисперсії [формула (8.24)] лінійної функції одержимо

$$\left.\begin{aligned} m_z &= m_x \cdot \cos\alpha + m_y \cdot \sin\alpha, \\ D_z &= D_x \cos^2\alpha + D_y \sin^2\alpha + 2K_{xy} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \\ &= D_x \cos^2\alpha + D_y \sin^2\alpha + K_{xy} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (8.44)$$

Якщо випадкова точка (X, Y) задана головними серединними відхиленнями E_x і E_y, то випадкова величина Z буде лінійною функцією некорельованих (для нормального розподілу – незалежних) випадкових величин. Тоді за формулою (8.44) за $K_{xy} = 0$ одержимо формулу

$$E_z^2 = E_x^2 \cdot \cos^2\alpha + E_y^2 \cdot \sin^2\alpha.$$

Використовуючи одержану формулу дисперсії (8.44), ми здійснюємо і перехід від довільної системи координат до системи координат головних осей розсіювання. Отже, (див. рис. 8.2) [16]

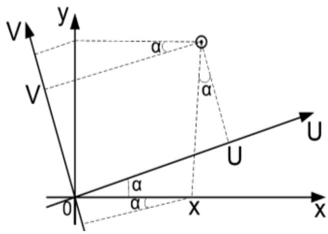

Рисунок 8.2 – Перехід від довільної системи координат до системи координат головних осей розсіювання

$$U = X \cdot \cos\alpha + Y \cdot \sin\alpha,$$

$$V = Y \cdot \cos\alpha - X \cdot \sin\alpha.$$

Тоді відповідно до формули (8.44) будемо мати

$$\sigma_u^2 = \sigma_x^2 \cos^2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2\alpha + K_{xy} \sin 2\alpha$$

і

$$\sigma_v^2 = \sigma_x^2 \sin^2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2\alpha - K_{xy} \sin 2\alpha.$$

Вираз для $tg\ 2\alpha$, за допомогою якого обчислюються величина кута α, визначальний напрямок головних осей розсіювання, може бути одержаний так:

Обчислимо вираз для моменту зв'язку K_{uv}:

$$K_{uv} = M\left[\overset{\circ}{U}\overset{\circ}{V}\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}\cos\alpha + \overset{\circ}{Y}\sin\alpha\right)\left(\overset{\circ}{Y}\cos\alpha - \overset{\circ}{X}\sin\alpha\right)\right] =$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\cos^2\alpha - \frac{1}{2}\overset{\circ}{X}{}^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\overset{\circ}{Y}{}^2\sin 2\alpha - \overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\sin^2\alpha\right] =$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)\right] - \frac{1}{2}\sin 2\alpha M\left[\overset{\circ}{X}{}^2 - \overset{\circ}{Y}{}^2\right] =$$

$$= K_{xy}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\left(D_x - D_y\right).$$

Оскільки випадкові величини U і V незалежні, то $K_{uv} = 0$, тоді

$$K_{xy}\cdot\cos 2\alpha - 1/2\sin 2\alpha\cdot(D_x - D_y) = 0.$$

Поділивши обидві частини на $\cos 2\alpha$, одержимо формулу

$$tg 2\alpha = \frac{2K_{xy}}{D_x - D_y} = \frac{2R_{xy}E_xE_y}{E_x^2 - E_y^2}.$$

Звідси і формула (7.14):

$$R_{xy} = \frac{tg 2\alpha\left(E_x^2 - E_y^2\right)}{2E_xE_y}.$$

8.2. Закон розподілу лінійної функції від аргументу, підпорядкованого нормальному закону розподілу

У п. 8.1. були доведені теореми, що дозволяють розрахувати характеристики розподілу функцій випадкових аргументів. Однак щоб використовувати ці характеристики за ймовірнісного оцінювання випадкових значень функції, необхідно знати вид її закону розподілу (нормальний закон, закон рівної ймовірності та ін.). У теорії стрільби дуже часто на противагу аргументу стають випадкові величини, підпорядковані нормальним законам розподілу. Наше завдання таке: встановити, який вид закону розподілу має функція від аргументу, підпорядкованого нормальному закону.

Нехай випадкова величина *X* підпорядкована нормальному закону з щільністю ймовірності

$$f(x) = \frac{\rho}{E_x \sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}} .$$

Потрібно визначити, яким законом підпорядкована випадкова величина *Y*, пов'язана з величиною *X* лінійної функціональної залежності [33]

$$Y = aX + b,$$

де a і b – сталі аргументи.

У теорії ймовірностей доведено теорему, яка стверджує, що лінійне перетворення випадкової величини не змінює виду закону її розподілу [16].

На підставі цієї теореми ми можемо припустити, що лінійна функція від аргументу, підпорядкованого нормальному закону, також підпорядкована нормальному закону (рис. 8.3).

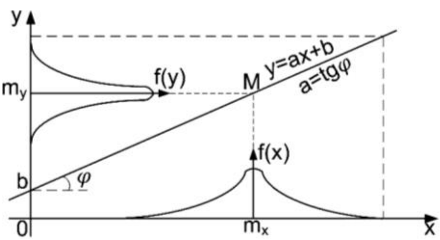

Рисунок 8.3 – Лінійна функція від аргументу, підпорядкованого нормальному закону

Отже,

$$f(y) = \rho/E_y \sqrt{\pi} \ \cdot \ e^{-\rho^2 (y-m_y)^2 / E_y^2} .$$

Числові характеристики розподілу функції обчисляться на підставі теорем про математичне сподівання і дисперсію лінійної функції [17]

$$\left.\begin{aligned} m_y &= \alpha m_x + b, \\ E_y &= |\alpha|\, E_x \end{aligned}\right\}. \tag{8.45}$$

Приклад 5. Точність поздовжнього балістичного вітру характеризується серединною помилкою $E\,[\delta W_x] = 1{,}5$ м/с.

Для умов стрільби з 122-мм гаубиці Д-30 (заряд 3, дальність 6 км) визначити ймовірність того, що помилка дальності внаслідок помилок визначення поздовжнього вітру не перевищить 20 м.

Р о з в' я з а н н я. Помилка дальності внаслідок помилок визначення поздовжнього вітру $X_{\delta Wx}$ відповідає помилці визначення похибки на вітер:

$$X_{\delta W_x} = \delta\, \Delta Д_W = 0{,}1\, \Delta X_W\, W_x.$$

Таким чином, цікава нам помилка $X_{\delta Wx}$ є лінійною функцією помилки визначення поздовжнього вітру, що підпорядковується нормальному закону з серединною помилкою $E\,[\delta W_x]$. На підставі розібраної теореми помилка дальності $X_{\delta Wx}$ також підпорядковується нормальному закону. Отже, для розрахунку довірчої ймовірності можна використати таблицю значень функції $\Phi(x)$:

$$p\left(\left|X_{\delta W_x}\right| < 20\right) = \Phi\left(\frac{20}{E\left[X_{\delta W_x}\right]}\right),$$

де на підставі формули (8.2.1)

$$E\,[X_{\delta Wx}] = 0{,}1 \cdot \Delta X_W \cdot E\,[\delta W_x].$$

1. Розрахуємо серединну помилку дальності внаслідок помилок визначення поздовжнього вітру:

Із таблиць стрільби $\Delta X_W = 163$ м,

тоді

$$E\,[X_{\delta Wx}] = 16{,}3 \cdot 1{,}5 = 24{,}45 \text{ м}.$$

2. Розрахуємо шукану ймовірність (табл. А.1)

$p\,(|X_{\delta Wx}| < 20) = \Phi\,(20 / 20{,}45) = \Phi\,(0{,}82) = 0{,}41979$.

Відповідь: $p\,(|X_{\delta Wx}| < 20) = 42$ %.

8.3. Закон розподілу суми двох випадкових величин. Композиція законів розподілу

Композицією законів розподілу називають визначення закону розподілу суми двох незалежних випадкових величин, підпорядкованих цим законом розподілу. Для позначення композиції законів розподілу застосовують символічний запис

$$g(z) = f_1(x) * f_2(y) \text{ для } Z = X + Y,$$

де $*$ – символ композиції [25].

Цілком природно, що поняття й положення для композиції законів розподілу двох випадкових величин шляхом послідовних операцій можна поширити на суму будь-якого скінченного числа випадкових величин.

Розв’язання задачі композиції законів розподілу має дуже велике значення. Дуже часто під час вирішення практичних завдань, зокрема, в теорії та практиці стрільби, ми стикаємося з необхідністю досліджувати суми випадкових величин. Так, випадкова помилка пострілу за дальністю X є сумою двох випадкових помилок (рис. 8.4): випадкової помилки дальності внаслідок помилок визначення установок X_y і випадкової помилки дальності внаслідок розсіювання снарядів X_p:

$$X = X_y + X_p.$$

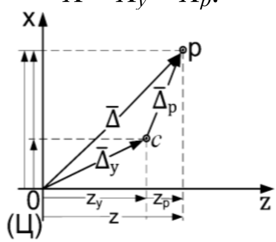

Рисунок 8.4 – Сума двох випадкових помилок X_y і X_p

Для вирішення ряду завдань з оцінювання ефективності стрільби необхідно знати закон розподілу помилки пострілу

$$f(x) = f_1(x_y) * f_2(x_p).$$

Тут ми спостерігаємо композицію двох нормальних розподілів [24].

Помилка визначення азимута (дирекційного кута) за цього напрямку за допомогою, наприклад, артилерійської бусолі δA складається з помилки приладу δB_1 і помилки внаслідок округлення при знятті відліку δB_2. Таким чином

$$\delta A = \delta B_1 + \delta B_2$$

і

$$f(\delta A) = f_1(\delta B_1) \cdot f_2(\delta B_2).$$

У цьому випадку проводиться композиція нормального закону із законом рівної ймовірності [35].

Розглянемо порядок розв'язання задачі із визначення закону розподілу суми двох випадкових величин.

8.3.1. Загальні формули композиції законів розподілу

Розглянемо приклад композиції законів розподілу двох дискретних випадкових величин.

Нехай випадкова величина X має ряд розподілу

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

.

Випадкова величина Y відповідно буде

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

.

Потрібно визначити ряд розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

Із зіставлення можливих значень випадкових величин X і Y можна припустити, що випадкова величина Z може набувати значень Z_k – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 або 7. Імовірності одержання цих значень також можуть бути визначеними, якщо простежити можливі випадки їх одержання. Розглянемо визначення ймовірності $p_k = p$ (z = 4). Подія $z = 4$ є сумою декількох подій (можливе поєднання значень X і Y), члени якої є добутком подій:

$$(z_k = 4) = (x = 4)(y = 0) + (x = 3)(y = 1) + (x = 2)(y = 2) + \\ + (x = 1)(y = 3).$$

Неважко побачити те, що цікавить нас, являє собою суму добутків подій:

$$\left(z_k = 4\right) = \sum_{i=0}^{4}\left(x_i\right)\left(y = 4 - x_i = z_k - x_i\right).$$

Застосовуючи до одержаного виразу теореми про ймовірність суми та добутки подій, одержимо формулу для розрахунку ймовірності [37].

$$p\left(z_k = 4\right) = \sum_{i=0}^{4} p\left(x_i\right) p\left(y = 4 - x_i\right) =$$

$$= p\left(x = 4\right) p\left(y = 0\right) + p\left(x = 3\right) p\left(y = 1\right) + p\left(x = 2\right) p\left(y = 2\right) +$$

$$+ p\left(x = 1\right) p\left(y = 3\right) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}24.$$

Провівши такий розрахунок, одержимо ряд розподілу випадкової величини Z:

z_i	0	1	2	3	4	5	6	7
p_k	0,02	0,07	0,15	0,23	0,24	0,18	0,09	0,02

.

Із прикладу бачимо, що ймовірність суми $p(z)$ визначається за формулою

$$p(z) = \Sigma_{(i)} p\,(x_i) \cdot p\,(z - x_i). \tag{8.46}$$

Використовуючи безперервні випадкові величини, ймовірності замінимо елементами ймовірностей, а підсумовування – інтегруванням:

$$f\,(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx f_2\,(z - x)\,dz. \tag{8.47}$$

Звідси шукана щільність розподілу суми двох випадкових величин

$$\left.\begin{aligned} f\left(z\right)dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(x\right)dx f_2\left(z - x\right)dx, \\ f\left(z\right)dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1\left(z - y\right)dx f_2 y dy \end{aligned}\right\}. \tag{8.48}$$

Застосування формул (8.48) покажемо на прикладах композицій різних законів розподілів.

8.3.2. Композиція нормальних законів

Дві незалежні випадкових величини X і Y підпорядковані нормальним законам розподілу із щільністю ймовірностей:

$$f_1(x)=\frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}}$$

і

$$f_2(y)=\frac{\rho}{E_y\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{(x-m_y)^2}{E_y^2}}.$$

Потрібно обчислити щільність ймовірності величини $Z = X + Y$.

Застосовуючи загальну формулу композиції законів розподілу (8.2), маємо

$$g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\cdot f_2(z-x)\,dx=$$

$$=\rho^2/E_xE_y\pi\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\rho^2\left[(x-m_x)^2/E_x^2+(z-x-m_y)^2/E_y^2\right]}dx.$$

Перетворимо показник степеня при e:

$$\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}+\frac{\left(z-x-m_y\right)^2}{E_y^2}=$$

$$=\frac{x^2-2m_xx+m_x^2}{E_x^2}+\frac{\left(z-m_y\right)^2-2\left(z-m_y\right)x+x^2}{E_y^2}=$$

$$=\frac{E_x^2+E_y^2}{E_x^2E_y^2}x^2-2\left(\frac{m_x}{E_x^2}+\frac{\left(z-m_y\right)}{E_y^2}\right)x+\left(\frac{m_x^2}{E_x^2}+\frac{\left(z-m_y\right)^2}{E_y^2}\right).$$

Введемо позначення:

$$A=\rho^2(E_x^2+E_y^2)/E_x^2\cdot E_y^2,$$
$$B=\rho^2[m_x/E_x^2+(\mathrm{z}-m_y)/E_y^2],$$
$$C=\rho^2[m_x^2/E_x^2+(\mathrm{z}-m_y)^2/E_y^2].$$

Тоді вираз функції набере вигляду

$$g(z) = \rho^2 / \pi E_x E_y \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot e^{-Ax^2+Bx-C}\, dx. \qquad (8.49)$$

У виразі (8.49) інтеграл може бути обчислений [24].

Для обчислення інтеграла перетворимо показник степеня, доповнивши його до повного квадрата, тоді

$$Ax^2 + 2Bx + C = (\sqrt{Ax})^2 - 2Bx + (B/\sqrt{A})^2 + (C - B^2/A) =$$
$$= (\sqrt{Ax} - B/\sqrt{A})^2 + (C - B^2/A)$$

і

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(\sqrt{A}x-\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2+\left(C-\frac{B^2}{A}\right)\right]} = e^{-\left(C-\frac{B^2}{A}\right)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{A}x-\frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2} dx. \qquad (8.50)$$

У показнику степеня першого множника зробимо обернену заміну:

$$C = \rho^2 \frac{m_x^2 E_y^2 + \left(z - m_y\right)^2 E_x^2}{E_x^2 E_y^2},$$

$$\frac{B^2}{A} = \rho^2 \frac{m_x^2 E_y^4 + 2m_x\left(z - m_y\right) E_x^2 E_y^2 + \left(z - m_y\right)^2 E_x^4}{\left(E_x^2 + E_y^2\right) E_x^2 E_y^2},$$

$$C - \frac{B^2}{A} = \rho^2 \frac{m_x^2 E_x^2 E_y^2 + \left(z - m_y\right)^2 E_x^4 + m_x^2 E_y^4}{\left(E_x^2 + E_y^2\right) E_x^2 E_y^2} +$$

$$+ \frac{\left(z - m_y\right)^2 E_x^2 E_y^2 - m_x^2 E_y^4 - 2m_x\left(z - m_y\right) E_x^2 E_y^2 - \left(z - m_y\right)^2 E_x^4}{\left(E_x^2 + E_y^2\right) E_x^2 E_y^2} =$$

$$= \rho^2 \frac{E_x^2 E_y^2 \left[m_x^2 + \left(z - m_y\right)^2 - 2m_x\left(z - m_y\right)\right]}{\left(E_x^2 + E_y^2\right) E_x^2 E_y^2} = \rho^2 \frac{\left[z - \left(m_x + m_y\right)\right]^2}{E_x^2 + E_y^2}.$$

Таким чином, перший множник виразу (8.50) буде

$$e^{-\left(C-\frac{B^2}{A}\right)} = e^{-\rho^2 \frac{\left[z-\left(m_x+m_y\right)\right]^2}{E_x^2+E_y^2}}. \qquad (8.51)$$

Для обчислення інтеграла у виразі (8.50) замінемо змінну, позначивши

$$\sqrt{A}x - B/\sqrt{A} = t, \quad \text{звідси} \quad dx = 1/\sqrt{A} \cdot dt.$$

Після заміни змінної, скориставшись інтегралом Ейлера – Пуассона, одержимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{A}x - \frac{B}{\sqrt{A}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{E_x E_y}{\rho\sqrt{E_x^2 + E_y^2}} \sqrt{\pi}. \qquad (8.52)$$

Використавши одержані результати у (8.50, 8.51, 8.52), одержимо значення інтеграла у виразі

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ax^2 + 2Bx - C} dx = e^{-\rho^2 \frac{\left[z - \left(m_x + m_y\right)\right]^2}{E_x^2 + E_y^2}} \frac{E_x E_y \sqrt{\pi}}{\rho\sqrt{E_x^2 + E_y^2}}.$$

Підставивши отримане значення інтеграла у вираз (8.48), одержимо аналітичний вираз щільності розподілу суми

$$g\,(z) = (\rho \,/\, \sqrt{E_x^2 + E_y^2}\sqrt{\pi}\,) \cdot e^{-\rho^2\left[z - (m_x + m_y)\right]^2/(E_x^2 + E_y^2)}. \qquad (8.53)$$

Ми маємо нормальний закон розподілу випадкової величини $Z = X + Y$:

$$g\,(z) = (\rho \,/\, E_z\sqrt{\pi}\,) \cdot e^{-\rho^2 (z - m_z)^2 / E_z^2}.$$

де

$$m_z = m_x + m_y \ \text{ і } \ E_z^2 = E_x^2 + E_y^2. \qquad (8.54)$$

Таким чином, при композиції нормальних законів знову виходить нормальний закон, причому центри розсіювання і квадрати серединних (середніх квадратичних) відхилень підсумовуються алгебраїчно [22].

Правило для композиції двох нормальних законів може бути поширене на суму будь-якого числа випадкових величин.

Якщо є n незалежних випадкових величин

$$X_1, X_2, ..., X_n,$$

підпорядкованих нормальним законам із центрами розсіювання

$$m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$$

і серединними відхиленнями

$$E_{x_1}, E_{x_2}, ..., E_{x_n},$$

то величина $Z = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}$ також підпорядковується нормальному закону з такими параметрами:

– центром розсіювання

$$m_z = \Sigma_{i=1}{}^{n} m_{x_i}; \tag{8.55}$$

– серединним відхиленням

$$E_z = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}{}^{n} E_{x_i}^2}; \tag{8.56}$$

– середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma_z = \sqrt{\sum\nolimits_{i=1}{}^{n} \sigma_{x_i}^2}. \tag{8.57}$$

Зауваження. При додаванні декількох залежних випадкових величин, підпорядкованих нормальному закону, закон розподілу суми також виявляється нормальним із параметрами

$$\left.\begin{aligned} m_z &= \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}, \\ E_z &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} E_i^2 + 2\sum_{i<j} R_{ij} E_i E_j}, \\ \sigma_z &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} R_{ij} \sigma_i \sigma_j} \end{aligned}\right\}, \tag{8.58}$$

де R_{ij} – коефіцієнт кореляції величин X_i, X_j, а підсумовування поширюється на всі різні попарні комбінації величин, що входять до суми [21].

Приклад 6. Точність установок характеризується серединними помилками E_{x_y} = 80 м, E_{z_y} = 40 м, а серединні відхилення, що характеризують розсіювання снарядів, дорівнюють *Вд* = 60 м, *Вб* = 30 м. Визначити ймовірність ураження одиночної цілі з одного пострілу, якщо радіус наведеної зони ураження снаряда по цій цілі $R_П$ = 250 м, а точкою прицілювання є центр цілі.

Р о з в’ я з а н н я. Математично розв’язання прикладу зводиться до визначення ймовірності того, що помилка пострілу (відхилення розриву від цілі) не перевищить величини $R_П$:

$$p\,[Ц] = p\,[(X, Z) \in \varepsilon_{R\text{п}}],$$

де X і Z – випадкові помилки пострілу за дальністю та напрямком. Шукана ймовірність обчислюється за таблицею ймовірностей потрапляння випадкової точки (X, Z) у коло. Для цього необхідно знати серединні помилки пострілу. Так, для помилки пострілу є сумою помилок визначення установок і розсіювання, тобто

$$X = X_y + X_p \text{ і } Z = Z_y + Z_p,$$

то серединні помилки пострілу обчисляться за формулою

$$E_x^2 = Вдп^2 = E_{x_y}^2 + Вд^2 \text{ і } E_z^2 = Вбп^2 = E_{z_y}^2 + Вб^2.$$

1. Розрахуємо серединні помилки пострілу:

$$Вд\,п^2 = 80^2 + 60^2 = 10\,000 \text{ м}^2;\ Вдп = 100 \text{ м},$$

$$Вб\,п^2 = 40^2 + 30^2 = 2\,500 \text{ м}^2;\ Вбп = 50 \text{ м}.$$

2. Розрахуємо входи у табл. А.4:

$$r_1 = R_П/Вдп = 250/100 = 2{,}5,$$

$$e_1 = \sqrt{1 - \frac{Вбп^2}{Вдп^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{50}{100}\right)^2} = 0{,}87.$$

3. За таблицею А.4 визначимо ймовірність для r_1 = 2,5 і e_1 = 0,87:

$$p\,[(X, Z) \in \varepsilon_{R\text{п}}], = 0{,}8891.$$

Відповідь: $p\,[Ц]$ = 89 %.

8.3.3. Композиція нормального закону із законом рівної ймовірності

Обчислимо щільність імовірності сумарного закону, що виходить при композиції нормального закону, щільність розподілу якого

$$f_1(x)=\frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{(x-m_x)^2}{E_x^2}}$$

із законом рівної ймовірності

$$f_2(y) = 1 / (\beta - \alpha) \text{ при } \alpha < y < \beta.$$

Використовуючи загальний вираз для щільності розподілу при композиції двох законів [формула (8.48)], одержимо

$$g(z)=\int_{\alpha}^{\beta} f_1(z-y)\, f_2(y)\,dy=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{[y-(z-m_x)]^2}{E_x^2}}dy.$$

У цьому виразі підінтегральна функція – не що інше, як щільність нормального закону з математичним сподіванням, що дорівнює $z - m_x$, і серединним відхиленням E_x. Інтеграл від цієї функції як імовірність попадання випадкової величини, підпорядкованої нормальному закону, на ділянку (α, β) може бути визначений за допомогою таблиць значень функції розподілу або таблиць значень функції $\Phi(x)$. Тоді для визначення величин щільності сумарного закону розрахункової формули буде [30]

$$g(z) = 1/(\beta - \alpha)\{F[(\beta - (z - m_x))/E_x] - F[(\alpha - (z - m_x))/E_x]\} =$$
$$= 1/2(\beta - \alpha)\{\Phi[(\beta - (z - m_x))/E_x] - \Phi[(\alpha - (z - m_x))/E_x]\}. \quad (8.59)$$

В артилерійській практиці часто трапляються випадки, якщо випадкові величини, що додаються, мають спільний початок, що збігається з їх математичним сподіванням, тобто тоді $m_x = m_y = 0$.

Якщо закони мають один і той самий початок, що збігаються з точкою математичних сподівань, то випадкові величини додаються, а їх щільності ймовірностей будуть такими:

– нормального закону

$$f_1(x)=\frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}e^{-\rho^2\frac{x^2}{E_x^2}};$$

– закону рівної ймовірності

$$f_2(y) = 1/2l_y.$$

Відповідно до формули (8.13) і враховуючи, що $m_x = 0$, $\beta = l$, а $\alpha = -\,l$, одержимо розрахункову формулу для щільності сумарного закону

$$g(z) = 1/2\, l_y\, [F((l - z)/E_x) - F((l + z)/E_x)],$$

або

$$g(z) = 1/2l_y\, [F((z + l)/E_x) - F((z - l)/E_x)] =$$
$$= 1/4l_y\, [\Phi((z + l)/E_x) - \Phi((z - l)/E_x)].$$

Розглянемо на виявлення виду сумарного закону, що утворюється при композиціях нормального закону і закону рівної ймовірності, що мають один і той самий початок.

Середні квадратичні відхилення законів, що додаються, дорівнюють:

$$\sigma_x = E_x / \rho\sqrt{2}, \quad \sigma_y = l_y / \sqrt{3}.$$

Середнє квадратичне відхилення сумарного закону

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\frac{E_x^2}{\left(\rho\sqrt{2}\right)^2} + \frac{l_y^2}{3}} = \frac{E_x}{\rho\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{\left(\rho\sqrt{2}\right)^2}{3}\left(\frac{l_y}{E_x}\right)^2}.$$

Таким чином,

$$\sigma_z = E_z / \rho\sqrt{2}\sqrt{1 + 0{,}152\, l_{y_o}^2}\,), \qquad (8.60)$$

де

$$l_{y_0} = l_y / E_x.$$

Як бачимо із виразу (8.60), вид закону залежить від величини l_{y_o}: чим більша l_{y_o}, тим більше сумарний закон буде відрізнятися від нормального. На рисунку 8.5 зображені криві розподілу сумарного закону, що за порівняно невеликих значень l_{y_o} мають вигляд кривих нормального закону. За великих значень l_{y_o} криві сумарного закону стають плосковершинними [31].

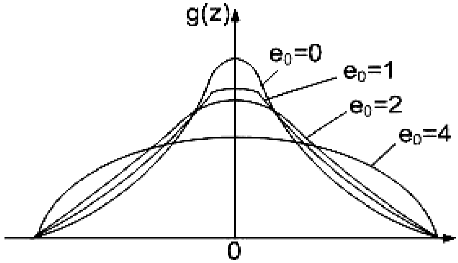

Рисунок 8.5 – Криві розподілу сумарного закону

Порівняльні розрахунки свідчать, що за $l_{y_o} \le E_x$ ($l_{y_o} \le 1$) помилки у величинах щільності розподілу при заміні дійсного сумарного закону нормальним законом із середнім квадратичним відхиленням, визначеним формулою (8.60), не перевищують 0,5 % величини щільності.

Цією похибкою можна знехтувати, а під час вирішення практичних завдань вважати, що сумарний закон є нормальним із середнім квадратичним відхиленням, визначеним за формулою (8.60) (під час вирішення деяких завдань похибки від припущення про те, що сумарний закон нормальний, невеликі й за $l_{y_o} \le (10–15)\ E_x$). У цьому випадку серединне відхилення (серединне відхилення називають «наведеним» тому, що сумарний закон ми беремо за нормальний або зводимо до нормального) сумарного закону, обчислюємо за формулою [35].

$$E_z^2 = E_x^2 + 0{,}152\ l_y^2 = E_x^2 + 0{,}038(2l_y)^2. \qquad (8.61)$$

Приклад 7. Біноклем вимірюється відхилення розриву від цілі в межах α = 2-00–3-00. Точність вимірювання кута біноклем характеризується серединною помилкою $E[\delta\alpha_1]$ = $= 2\sqrt{k+1}$, де k – кількість переміщень бінокля. Результат вимірювань округлюється до 0-05.

Розрахувати ймовірність того, що помилки у визначенні відхилень розривів не перевищать 0-10.

Р о з в' я з а н н я. Сумарна помилка визначення відхилення розриву від цілі є сумою двох помилок:

$$\delta\alpha = \delta\alpha_1 + \delta\alpha_2,$$

де $\delta\alpha_1$ – випадкова помилка вимірювання відхилень із серединною помилкою $E\,[\delta\alpha_1] = 2\sqrt{k+1}$;

$\delta\alpha_2$ – випадкова помилка внаслідок округлення результатів вимірювання з параметром l = 2,5 под. кут. ($2l$ = = 5 под. кут.).

1. Встановлюємо вид сумарного закону, за величин α = 2-00–3-00, $k = 2$,

тоді

$$E\,[\delta\alpha_1] = 2\sqrt{2+1} = 3{,}46 \text{ под. кут.}$$

Так як $l = 2{,}5 < E\,[\delta\alpha_1]$, сумарний закон може бути взятий за нормальний і шукану ймовірність можна розрахувати із використанням таблиць значень Ф (x).

2. Розрахуємо зведену серединну помилку сумарного закону:

$$E^2\,[\delta\alpha] = E^2\,[\delta\alpha_1] + 0{,}038\,(2l)^2 = 12 + 0{,}038\cdot 25 = 12{,}95;$$

$$E^2\,[\delta\alpha] = 3{,}6 \text{ поділ. кутоміра}$$

3. За допомогою табл. А.1 Ф (x) визначимо шукану ймовірність:

p = Ф (10/$E\,[\delta\alpha]$) = Ф (10/3,6) = Ф (2,78) = 0,93922.

Відповідь: $p\,[\delta\alpha < (0\text{-}10)] \approx 94$ %.

Оцінимо похибку в прикладі 7 за рахунок того, що сумарний закон взятий за нормальний. Для цього розрахуємо ймовірність за формулою (рис. 8.6):

$$p = 2\sum_{(i)} \Delta g\left(z_i\right) = 2\Delta \sum_{(i)} g\left(z_i\right),$$

де $g(z_i)$ – щільність ймовірності сумарного закону за z_i = 1,25; 3,75; 6,25; 8,75; $\Delta = 2{,}5$.

Розрахуємо значення щільності:

$$g\left(z_i\right) = \frac{1}{2l}\left[F\left(\frac{z_i + l}{E\left[\delta\alpha_1\right]}\right) - F\left(\frac{z_i - l}{E\left[\delta\alpha_1\right]}\right)\right] = 0{,}2\left[F_1 - F_2\right].$$

Розрахуємо шукану ймовірність:

$$p = 2\,\Delta\Sigma_{(i)} g\,(z_i) = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}187702 = 0{,}93851.$$

Відносна помилка внаслідок припущення про нормальний вигляд сумарного закону

(0,93922 – 0,93851) /0,93851 · 100 = 0,0757 %.

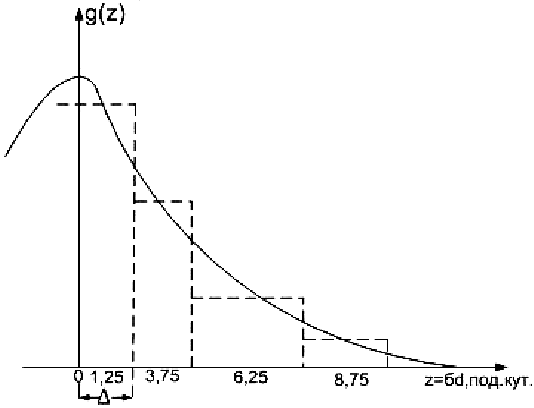

Рисунок 8.6 – Графічне зображення сумарного закону взятого за нормальний

Помилка становить менше ніж 0,1 %. Такою величиною можна знехтувати, одержавши значні переваги у простоті розрахунку ймовірності.

z_i	1,25	3,75	6,25	8,75
$z_i / E\,[\delta\alpha_1]$	0,36	1,08	1,81	2,53
$l / E\,[\delta\alpha_1]$	0,72	0,72	0,72	0,72
$(z_i + l) / E\,[\delta\alpha_1]$	1,08	1,80	2,53	3,25
$(z_i - l) / E\,[\delta\alpha_1]$	− 0,36	0,36	1,09	1,81
$F\,\{(z_i + l) / E\,[\delta\alpha_1]\}$	0,76683	0,88764	0,95604	0,98582
$F\,\{(z_i - l) / E\,[\delta\alpha_1]\}$	0,40403	0,59597	0,76889	0,88893
$F_1 - F_2$	0,36280	0,29167	0,18715	0,09689
$g(z_i) = 0{,}2[F_1 - F_2]$	0,072560	0,058334	0,037430	0,019378

8.4. Закон розподілу лінійної функції від нормального розподілу аргументів

У пункті 8.2 ми розглянули питання визначення закону розподілу і числових характеристик лінійної функції від одного аргументу, підпорядкованого нормальному закону.

Тут завдання зводиться до визначень виду і характеристик закону розподілу лінійної функції від декількох випадкових аргументів, підпорядкованих нормальним законам розподілу.

Ця система випадкових величин (X_1, X_2, ..., X_n), підпорядкована нормальному закону. Потрібно обчислити закон розподілу випадкової величини Y, що є лінійною функцією величин X_i :

$$Y = \Sigma_{i=1}^{n} a_i X_i + b.$$

У пункті 8.2 ми довели, що лінійна функція від одного випадкового аргументу, підпорядкованого нормальному закону, також розподіляється нормально. Величина Y являє собою суму декількох лінійних функцій, кожна з яких має нормальний розподіл. Звідси на підставі положень про композицію нормальних законів випливає, що і величина Y підпорядкована нормальному розподілу [16].

Обчислимо параметри закону розподілу величини Y. Застосовуючи теореми про математичне сподівання й дисперсії лінійної функції, одержимо

$$m_y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_{x_i} + b, \tag{8.62}$$

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i \le j} \alpha_i \alpha_j R_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \tag{8.63}$$

або

$$E_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 E_{x_i}^2 + 2\sum_{i \le j} \alpha_i \alpha_j R_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \tag{8.64}$$

де R_{ij} – коефіцієнт кореляції величин X_i, X_j.

Якщо випадкові величини (X_1, X_2, ..., X_n) незалежні, то формули (8.63) і (8.64) наберуть вигляду

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_{x_i}^2, \tag{8.65}$$

$$E_y{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 E_{x_i}^2 . \qquad (8.66)$$

Варто зазначити, що лінійна функція від декількох аргументів підпорядкована нормальному закону і в тому разі, якщо закони розподілу аргументів відмінні від нормального. Для цього необхідно лише, щоб кількість аргументів була достатньо великою. На практиці для одержання закону розподілу, що наближено може бути взятий за нормальний, звичайно досить п'яти-десяти доданків у лінійній функції, при цьому потрібно, щоб випадкові аргументи лінійної функції ($\alpha_i X_i$) мали б один і той самий порядок. Параметри закону розподілу функції при цьому визначають за формулами (8.61) і (8.62). За необхідності може бути одержана величина серединного відхилення за співвідношенням [18]

$$E_y{}^2 = 2\rho^2\sigma_y{}^2 = 2\rho^2 \cdot \sum_{(i)} \sigma_{x_i}^2 .$$

8.5. Визначення числових характеристик нелінійних функцій. Лінеаризація функцій

У пункті 8.1. були розглянуті теореми, що дозволяють досить легко визначати числові характеристики функцій. Однак вони застосовні, головним чином, до лінійних функцій (за винятком теорем про числові характеристики добутку випадкових величин). У практиці доводиться оцінювати і нелінійні функції випадкових аргументів. Так, горизонтальна дальність до кінця активної ділянки може бути розрахована за наближеною формулою

$$X_к = WT_к{}^2 \cdot \cos\theta/2,$$

з якої бачимо, що випадкова величина горизонтальної дальності $X_к$ функціонально визначається випадковими значеннями величин: W – прискорення за рахунок тяги реактивного двигуна, θ – кута нахилу дотичної до траєкторії в точці сходу снаряда з напрямною і $T_к$ – часу роботи двигуна.

Для оцінювання можливих значень $X_к$ необхідно визначити її середнє значення $m_{x_к}$ і характеристику розсіювання $\sigma_{x_к}$. У нашому користуванні немає формул (теорем), що дозволили б безпосередньо визначити числові характеристики функції $X_к = \varphi\ (W,\ \theta,\ T_к)$ за відомими числовими характеристиками аргументів (m_w, m_θ, $m_{tк}$, σ_w, ...), оскільки розглянута функція нелінійна [16].

У подібних випадках замінюють нелінійну функцію лінійною, проводячи, таким чином, лінеаризацію функції. Правомірність такої наближеної заміни ґрунтується на тому, що зазвичай під час вирішення практичних завдань випадкові значення аргументів змінюються у вузьких межах. При цьому функції, не будучи лінійними у всьому діапазоні значень своїх аргументів, виявляються майже лінійними у вузькому діапазоні з випадкових змін. Розглянемо зміст і схему розв'язання задачі.

8.5.1. Лінеаризація функції одного випадкового аргументу

Нехай випадкова величина Y пов'язана з випадковою величиною X деякої лінійної функціональної залежності (рис. 8.7).

$$Y = \varphi\ (X).$$

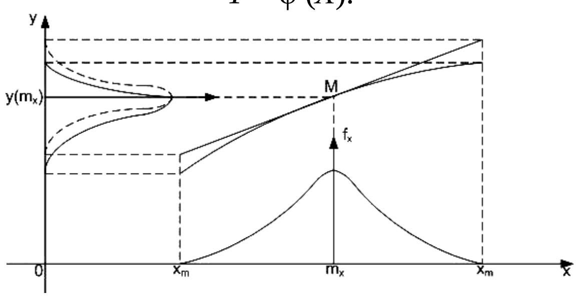

Рисунок 8.7 – Лінійна функціональна залежність випадкової величини Y від випадкової величини X

Відомі числові характеристики аргументу m_x і D_x. Потрібно обчислити числові характеристики величини Y – математичне сподівання m_y і дисперсію D_y.

Задача може бути розв'язана заміною нелінійної функції лінійною – рівнянням дотичної в точці математичного сподівання аргументу. Точка математичного сподівання взята тому, що зазвичай цій точці відповідає відрізок максимальних значень щільності розподілу випадкового аргументу X, а отже, і функції $Y = \varphi(X)$. У цьому випадку ми найбільш точно будемо лінеаризувати функцію на ділянці, що відповідає найбільш імовірним значенням цієї функції.

Рівняння дотичної в точці $x = m_x$ має вигляд

$$y = \varphi(m_x) + (\partial\varphi/\partial x)_{m_x} \cdot (x - m_x).$$

На підставі його наближене вираження функціональної залежності випадкових величин X й Y буде

$$y = \varphi(m_x) + (\partial\varphi/\partial x)_{m_x} \cdot (X - m_x). \quad (8.67)$$

Функція (8.22) лінійна й до неї можуть бути застосовані відомі теореми про математичне сподівання і дисперсії лінійної функції. Використовуючи їх, матимемо

$$m_y = M[\varphi(m_x) + (\partial\varphi/\partial x)_{m_x} \cdot (X - m_x)] =$$
$$= \varphi(m_x) + (\partial\varphi/\partial x)_{m_x} \cdot M[X - m_x].$$

Враховуючи, що $M[x - m_x]$, остаточно одержимо

$$m_y = m_\varphi = \varphi(m_x), \quad (8.68)$$

тобто математичне сподівання функції дорівнює функції від математичного сподівання аргументу [16].

Визначимо дисперсію:

$$D_y = D[\varphi(m_x) + (\partial\varphi/\partial x)_{m_x} \cdot (X - m_x)] = [\partial\varphi/\partial x)_{m_x}]^2 D_x,$$

звідси

$$\left.\begin{aligned} D_y = D_\varphi = [(\partial\varphi/\partial x)_{m_x}]^2 D_x, \\ \sigma_y = \sigma_\varphi = [(\partial\varphi/\partial x)_{m_x}]\, \sigma_x. \end{aligned}\right\} \quad (8.69)$$

Таким чином, ми розв'язали задачу й одержали такі правила:

– щоб знайти математичне сподівання майже лінійної функції, потрібно у вираз функції замість аргументу підставити його математичне сподівання;

– щоб знайти середнє квадратичне відхилення майже лінійної функції, треба середнє квадратичне відхилення аргументу помножити на абсолютне значення похідної функції в точці, що відповідає математичному сподіванню аргументу.

Формули (8.68) і (8.69) дають наближені відповіді, оскільки рішення вироблено на основі заміни дійсної нелінійної функції лінійною. Однак, як уже зазначалося, для більшості практичних завдань це допущення не має відчутних похибок. За необхідності похибки можуть бути оцінені за допомогою більш точного відображення функціональної залежності додатком до формули (8.67) третього члена розвинення функції φ (x) в ряд Тейлора і подальшого визначення більш точних значень m_φ і D_φ [17, 22].

Приклад 8. Визначити математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення поздовжнього вітру за умови, що кут вітру в межах (1/8 – 3/8)π додержується закону рівної ймовірності.

Р о з в’ я з а н н я. Поздовжній вітер розраховується за формулою

$$W_x = W \cdot \cos A_W.$$

Застосовуючи до зазначеної функції метод лінеаризації і використовуючи формули (8.68) і (8.69), одержимо такі розрахункові формули:

– для математичного сподівання

$$m_{W_x} = W \cos\left(m_{A_W}\right);$$

– для середнього квадратичного відхилення

$$\sigma_{W_x} = \left| \left(\frac{\partial W_x}{\partial A_W} \right)_{m_{A_W}} \right| \sigma_{A_W} = \left| -W \sin\left[m_{A_W} \right] \right| \sigma_{A_W}.$$

Обчислимо числові характеристики розподілу кута вітру:

$$m_{A_W} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\right)\pi = \frac{\pi}{4} \ \ \text{рад},$$

$$\sigma_{A_W} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{8}\right)\pi = \frac{\pi}{8\sqrt{3}} = 0{,}227 \ \ \text{рад}.$$

Розрахуємо числові характеристики поздовжнього вітру:

$$m_{W_x} = W\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,7071W,$$

$$\sigma_{W_x} = W\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0,227 = 0,7071\cdot 0,227\cdot W = 0{,}165W.$$

Відповідь: $m_{Wx} = 0{,}7W$, $\sigma_{Wx} = 0{,}16W$.

8.5.2. Лінеаризація функції декількох випадкових аргументів

Нехай випадкова величина Y, що нас цікавить, – нелінійна функція n випадкових величин

$$Y = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Задані числові характеристики системи:

– математичне сподівання: $m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$;

– кореляційна матриця

$$\left\| K_j \right\| = \left\| \begin{matrix} k_{11}k_{12},...,k_{1n} \\ k_{22},...,k_{2n} \\ ...\, k_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Потрібно наближено визначити числові характеристики величини Y: m_y і σ_y.

Для розв'язання задачі лінеаризуємо функцію. Це рівнозначно тому, що у розвиненні функції в ряд Тейлора близько точок ($m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}$) зберегти лише члени першого порядку. Тоді

$$Y = \varphi\left(m_{x_1}, m_{x_2}, ..., m_{x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m \left(X_i - m_{x_i}\right). \qquad (8.70)$$

Застосовуючи до лінійної функції (8.25) теореми про числові характеристики, одержимо

$$m_y = (m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3} ..., m_{x_n}), \qquad (8.71)$$

$$\left.\begin{aligned} D_y &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m D_{x_i} + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_m k_{ij}, \\ \sigma_y^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 + 2\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)_m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_m R_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.72)$$

Якщо випадкові аргументи некорельовані, то $R_{ij} = 0$ і формула для середнього квадратичного відхилення набере простого вигляду [13, 22]

$$\sigma_y^{\ 2} = \Sigma_{i=1}^{\ n} (\partial\varphi / \partial x_i)_m^{\ 2} \cdot \sigma_{x_i}^{\ 2}. \qquad (8.73)$$

Приклад 9. Визначити середнє значення горизонтальної дальності до кінця активної ділянки траєкторії і встановити ступінь впливу на її розкид різних джерел, числові характеристики розподілу яких дорівнюють:

– прискоренню за рахунок тяги реактивного двигуна $m_w = 20$ м/с^2, $\sigma_w = 0{,}5$ м/с^2;

– куту нахилу дотичної до траєкторії в точці сходу снаряда з напрямною $m_\theta = 45°$, $\sigma_\theta = 1°$;

– часу роботи двигуна снаряда $m_{t_к} = 5$ с, $\sigma_{t_к} = 0{,}1$ с.

Р о з в’ я з а н н я. Як зазначено на початку розділу, горизонтальна дальність до кінця активної ділянки траєкторії може бути розрахована за формулою

$$X_к = W \cdot T_к^{\ 2} / 2 \cdot \cos\theta.$$

Розв’язання проведемо із застосуванням методу лінеаризації функції. Тоді математичне сподівання горизонтальної дальності $X_к$, як її середнє значення, обчислиться за формулою (8.73), а вплив різних джерел на її розкид визначиться їх вагою («питомою вагою»), визначеною за формулою

$$g\,(x_к)_i = \sigma^2[X_к]_i / \sigma^2[X_к], \qquad (8.74)$$

де $\sigma[X_к]$ – окреме середнє квадратичне відхилення горизонтальній дальності внаслідок розкиду i-го параметра;

воно визначається i-м числом формули (8.26):

$$\sigma\,[X_к]_i = |\partial\varphi\,/\partial\lambda_i|_m \cdot \sigma_{\lambda_i}.$$

Використовуючи формулу (8.71), визначимо середнє значення горизонтальної дальності:

$$m_{x_к} = m_w\,\frac{m_{t_к}^2}{2}\cos m_\theta = 20\cdot\frac{25}{2}\cdot\cos 45° = 177\ м.$$

Визначимо окремі середні квадратичні відхилення горизонтальної дальності:

$$\sigma[X_к]_w = \left|\frac{\partial X_к}{\partial w}\right|_m \sigma_w = \left(\frac{m_{t_к}^2}{2}\cos m_\theta\right)\sigma_w = \frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0,5 = 4,42\ м,$$

$$\sigma[X_к]_\theta = \left|\frac{\partial X_к}{\partial \theta}\right|_m \sigma_\theta = \left(-m_w\,\frac{m_{t_к}^2}{2}\sin m_\theta\right)\sigma_{\theta\,рад} =$$

$$= \left(20\cdot\frac{25}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1°}{57,3} = 3,09\ м,$$

$$\sigma[X_к]_{t_к} = \left|\frac{\partial X_к}{\partial t_к}\right|_m \sigma_{t_к} = \left(m_w\,\frac{2m_{t_к}}{2}\cos m_\theta\right)\sigma_{t_к} = \left(20\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0,1 = 7,08\ м.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення горизонтальної дальності:

$$\sigma^2[X_к] = \sigma^2[X_к]_w + \sigma^2[X_к]_\theta + \sigma^2[X_к]_{t_к} =$$

$$= 4,42^2 + 3,09^2 + 7,08^2 = 79,19\ м^2,$$

$$\sigma[X_к] = \sqrt{79,19} = 8,9\ м.$$

Розрахуємо ваги джерел розкиду горизонтальної дальності:

$$g\,(X_к)_w = \sigma^2[X_к]_w\,/\,\sigma^2[X_к] = 19,53/79,19 = 0,25,$$
$$g\,(X_к)_\theta = \sigma^2[X_к]_\theta\,/\,\sigma^2[X_к] = 9,54/79,19 = 0,12,$$
$$g\,(X_к)_{t_к} = \sigma^2[X_к]_{t_к}\,/\,\sigma^2[X_к] = 50,12/79,19 = 0,63.$$

Відповідь: 1. Числові характеристики розподілу горизонтальної дальності до кінця активної ділянки $m_{x_к}$ = 177 м, $\sigma\,[X_к]$ = 8,9 м.

2. Розкид горизонтальної дальності на 63 % визначається розсіюванням часу роботи двигуна, на 25 % – розсіюванням величин прискорення за рахунок тяги реактивно-

го двигуна і на 12 % – розсіюванням кута нахилу дотичної в точці сходу снаряда з напрямної.

8.6. Композиція нормальних законів на площині

Із композицією нормальних розподілів на площині пов'язано багато задач теорії стрільби. Розглянемо приклад, що оцінює помилки визначення топографічних даних.

Помилки визначення топографічних даних є наслідком спільної дії двох джерел: випадкових помилок визначення положення вогневої позиції $f_1(\vec{\Delta}_б)$ і випадкових помилок визначення положення цілі $f_2(\vec{\Delta}_ц)$. У загальному випадку характеристиками розподілів цих помилок будуть поодинокі еліпси $\varepsilon_б$ і $\varepsilon_ц$ (рис. 8.8). Нас цікавить сумарна дія цих джерел помилок, оскільки як відхилення кінця обумовленого вектора $\overrightarrow{ОЦ}$ є результатом сумарної дії двох помилок-векторів (рис. 8.9) [17]:

$$\vec{\Delta}_{т.д} = \vec{\Delta}_б + \vec{\Delta}_ц .$$

Щоб оцінити сумарну помилку $\vec{\Delta}_{т.д}$, необхідно визначити її закон розподілу, а це зводиться до композиції двох розподілів на площині:

$$f\left(\vec{\Delta}_{т.д}\right) = f_1\left(\vec{\Delta}_б\right) * f_2\left(\vec{\Delta}_ц\right).$$

Дослідимо випадок, якщо вид законів, що додаються, відомий, і достатньо визначити числові характеристики сумарного закону. Розв'яжемо задачу у загальному вигляді.

Розглянемо суму двох некорельованих випадкових векторів (рис. 8.10):

– $\vec{V}_1$ зі складовими X_1 і Y_1 та числовими характеристиками $m_{x_1}, m_{y_1}, D_{x_1}, D_{y_1}, K_{x_1 y_1}$;

– $\vec{V}_2(X_2, Y_2, m_{x_2}, m_{y_2}, D_{x_2}, D_{y_2}, K_{x_2 y_2}$;

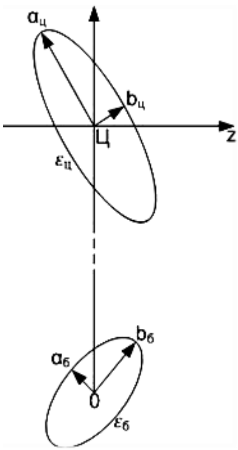

Рисунок 8.8 – Характеристики розподілів помилок поодиноких еліпсів

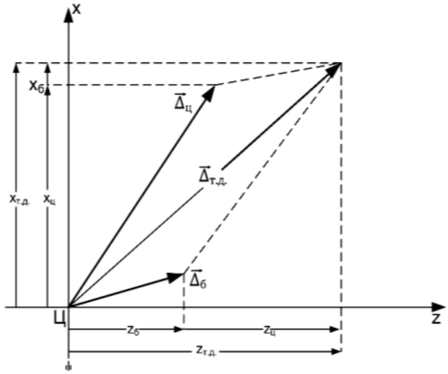

Рисунок 8.9 – Результат сумарної дії двох помилок-векторів

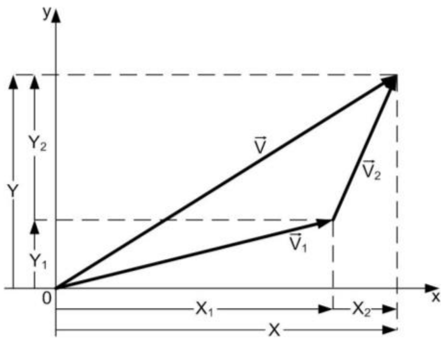

Рисунок 8.10 – Сума двох некорельованих випадкових векторів

Потрібно визначити числові характеристики розподілу випадкового вектора $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$: математичні сподівання m_x

і m_y, дисперсії D_x і D_y та момент зв'язку складових K_{xy}.

Складові сумарного випадкового вектора дорівнюють сумі складових випадкових сумарних векторів:

$$X = X_1 + X_2$$

і

$$Y = Y_1 + Y_2.$$

Застосовуючи до цих виразів теореми про математичні сподівання і дисперсії суми некорельованих випадкових величин, одержимо

$$\left.\begin{aligned} m_x &= m_{x_1} + m_{x_2}, \\ m_y &= m_{y_1} + m_{y_2} \end{aligned}\right\}$$

і

$$\left.\begin{aligned} D_x &= D_{x_1} + D_{x_2}, \\ D_y &= D_{y_1} + D_{y_2}. \end{aligned}\right\}$$

Обчислимо вираз для кореляційного моменту складових сумарного вектора. За визначенням кореляційного моменту

$$K_{xy} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[\left(\overset{\circ}{X}_1 + \overset{\circ}{X}_2\right)\left(\overset{\circ}{Y}_1 + \overset{\circ}{Y}_2\right)\right] =$$

$$= M\left[\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}_1\right] + M\left[\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}_1\right] + M\left[\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{Y}_2\right] + M\left[\overset{\circ}{X}_2\overset{\circ}{Y}_2\right].$$

Оскільки вектори $\vec{V}_1$ і $\vec{V}_2$ некорельовані, то середні два члени дорівнюють нулю.

Два крайніх члени являють собою кореляційні моменти складових доданків векторів. Таким чином,

$$K_{xy} = K_{x_1y_1} + K_{x_2y_2},$$

тобто кореляційні моменти також додаються.

Кореляційний момент складових сумарного вектора дорівнює сумі кореляційних моментів складових випадкових векторів, що додаються. Це правило часто називають **теоремою додавання кореляційних моментів** [10].

Одержані формули можуть бути поширені на композицію у n законах розподілу.

Якщо

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{V_i}, \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{і} \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

то

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}, \quad m_y = \sum_{i=1}^{n} m_{y_i},$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2, \quad \sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{y_i}^2,$$

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i y_i}$$

або

$$R_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_{x_i y_i} \sigma_{x_i} \sigma_{y_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_{x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} \sigma_{y_i}^2}}.$$

Перейдемо тепер до розв'язання задач із композиції нормальних законів на площині.

При композиції нормальних законів проекції сумарних векторів $X = \Sigma_{i=1}{}^{n} X_i$ і $Y = \Sigma_{i=1}{}^{n} Y_i$ як суми випадкових величин, підпорядкованих нормальним законом розподілів, також додержуються нормального закону. Отже, і система випадкових величин (X, Y) відповідає нормальному закону.

Таким чином, ми встановили, що при композиції нормальних законів на площині сумарний закон також нормальний.

Задача зводиться до визначення його числових характеристик.

Якщо нормальні закони на площині, що беруть участь у композиції, задані в єдиній системі координат і відомі щільності розподілу $f_i\ (x_i, y_i)$, а також числові характеристики: $m_{x_i}, m_{y_i}, E_{x_i}, E_{y_i}, R_{x_i y_i}$, то числові характеристики сумарного закону обчислимо за розглянутим правилом додавання випадкових векторів. Розрахунковими формулами будуть:

– для математичних сподівань складових сумарного закону

$$m_x = \Sigma_{i=1}{}^n m_{x_i}\,, \quad m_y = \Sigma_{i=1}{}^n m_{y_i}\,; \tag{8.75}$$

– для середніх відхилень складових сумарного закону

$$E_x{}^2 = \Sigma_{i=1}{}^n E^2_{x_i}\,, \quad E_y{}^2 = \Sigma_{i=1}{}^n E^2_{y_i}\,; \tag{8.76}$$

– для коефіцієнта кореляції складових сумарного закону

$$R_{xy} = \Sigma_{i=1}{}^n R_{x_i y_i} E_{x_i} E_{y_i} \;/\; E_x E_y. \tag{8.77}$$

У разі необхідності потім можуть бути визначені головні серединні відхилення сумарного закону за правилами, розглянутими в 7.1.

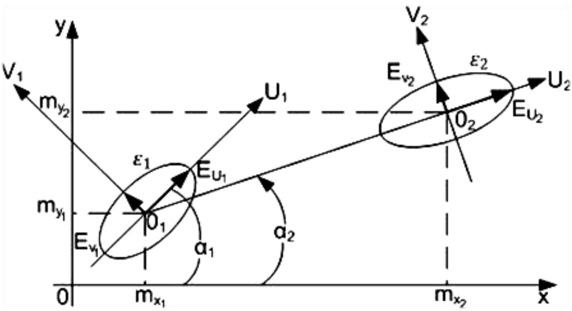

Рисунок 8.11 – Закони в композиції, задані у різних системах координат

Якщо закони, що беруть участь у композиції, задані в різних системах координат (рис. 8.11) і при цьому відомі характеристики законів $f_i\ (u_i,\, v_i)$: $m_{x_i}, m_{y_i}, E_{u_i}, E_{v_i}, \alpha_i$, то перш ніж скористатися одержаними формулами, необхідно одержати числові характеристики законів, що складаються у єдиній системі координат. Для розв’язання цієї задачі скористаємося формулами (7.13). Тоді серединні відхилення, що характеризують розподіл системи $(U_i,\, V_i)$ у системі координат XOY,

$$E_{x_i}^2 = E_{u_i}^2 \cos^2 \alpha_i + E_{v_i}^2 \sin^2 \alpha_i,$$
$$E_{y_i}^2 = E_{u_i}^2 \sin^2 \alpha_i + E_{v_i}^2 \cos^2 \alpha_i.$$

Використовуючи ці вирази у формулі (8.75), одержимо

$$\left.\begin{aligned} E_x{}^2 &= \Sigma_{(i)}\, E_{x_i}^2 = \Sigma_{(i)}\,(Пр[\,E_{u_i}\,]_{\,x})^2 + \Sigma_{(i)}(Пр\,[\,E_{v_i}\,]_x)^2, \\ E_x{}^2 &= \Sigma_{(i)}\, E_{y_i}^2 = \Sigma_{(i)}\,(Пр[\,E_{u_i}\,]_{\,y})^2 + \Sigma_{(i)}(Пр\,[\,E_{v_i}\,]_y)^2, \end{aligned}\right\} \qquad (8.78)$$

де E_i – головні серединні відхилення законів, що додаються, тобто квадрати серединних відхилень сумарного закону за обраними осями координат дорівнюють сумі квадратів проекцій головних серединних відхилень законів, що додаються, на ті самі осі координат. Це не суперечить змісту розв'язуваної задачі – композиції нормальних законів на площині, тому що кожний розподіл, що бере участь у композиції, може розглядатися за умови, за яких $m_{u_i} = E_{u_i} = 0$ (або $m_{v_i} = E_{v_i} = 0$). Такі розподіли називають *«виродженими нормальними розподілами на площині»* [21].

Таким чином, завдання композиції нормальних законів на площині зводиться до композиції векторіальних відхилень $\overleftrightarrow{E}_i = 0$.

Обчислимо вираз для коефіцієнта кореляції складових сумарного закону. На основі теореми додавання кореляційних моментів маємо

$$K_{xy} = \sum_{(i)} K_{x_i y_i}\,,$$

де $K_{x_i y_i}$ – момент зв'язку складових векторіальних відхилень, що додаються.

Випадкова точка векторіального відхилення $\overleftrightarrow{E}_{w_i}$ визначиться системою випадкових величин (X, Y), значення яких дорівнюють (рис. 8.12) $X_i = W_i \cos\alpha_{\,i}$ і $Y_i = \sin\alpha_{\,i}$. [22].

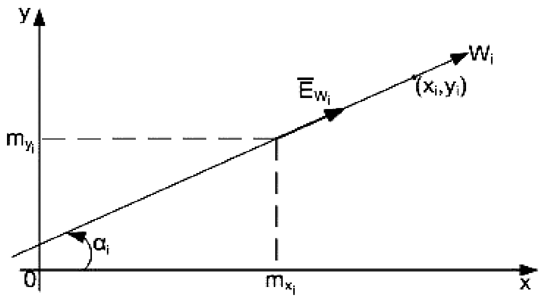

Рисунок 8.12 – Система випадкових величин (*X*, *Y*),

Звідси

$$\sigma_{x_i} = |\cos\alpha_i|\sigma_{w_i} \quad \text{і} \quad \sigma_{y_i} = |\sin\alpha_i|\sigma_{w_i}, \text{ а}$$

$$K_{x_i y_i} = M\,[X_i Y_i] = M\,[W_i \cos\alpha_i W_i \sin\alpha_i] = M\,[W_i^2]\sin\alpha_i \cdot$$

$$\cdot \cos\alpha_i = \sigma_{w_i}^2 \sin\alpha_i \cos\alpha_i,$$

тоді

$$R_{x_i y_i} = \frac{K_{x_i y_i}}{\sigma_{x_i y_i}} = \frac{\sigma_{w_i}^2 \sin\alpha_i \cos\alpha_i}{\sigma_{w_i}^2 |\sin\alpha_i||\cos\alpha_i|} = \pm 1.$$

Знак при одиниці визначається напрямом дії векторіального відхилення: при дії у напрямку I–III чвертей ($\sin\alpha_i$ і $\cos\alpha_i$ мають однакові знаки) $R = +1$ (позитивна лінійна залежність); для напрямку II–IV чвертей ($\sin\alpha_i$ і $\cos\alpha_i$ мають різні знаки) $R = -1$ (негативна лінійна залежність) [13].

У формулі (8.75) у добутку $R_{x_i y_i}, E_{x_i}, E_{y_i}$ знак коефіцієнта кореляції можна врахувати, якщо умовно прописувати знаки проекцій векторіальних відхилень на осі координат, беручи знак плюс, якщо проекції збігаються з позитивним напрямком осі координат, і мінус, – якщо з негативним напрямком. Зміна напрямку на площині складових векторіальних відхилень не призведе до помилки, оскільки при цьому зміняться знаки обох проекцій.

Таким чином, доходимо до такої практичної схеми розв’язання задач із композиції нормальних розподілів на площині: [9].

1. У вибраній системі координат *XOY* скласти креслення, на якому зобразити векторіальні відхилення (головні серединні відхилення) законів $\vec{E}_i$, що додаються; i – порядковий номер векторіальних відхилень, що додаються.

2. Математичні сподівання сумарного закону можна обчислити за формулами (8.75):

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \sum_i m_{x_i}, \\ m_y &= \sum_i m_{y_i}, \end{aligned}\right\} \tag{8.79}$$

де m_{x_i} і m_{y_i} – математичні сподівання випадкових величин із векторіальним відхиленням $\vec{E}_i$.

3. Визначити проекції векторіальних помилок на осі координат:

$$E_{x_i} = \Pi p\left(\vec{E}_i\right)_x \quad \text{і} \quad E_{y_i} = \Pi p\left(\vec{E}_i\right)_y,$$

зберігаючи у них умовний знак (плюс або мінус).

4. Розрахувати серединні відхилення сумарного закону по осях координат:

$$\left.\begin{aligned} E_x{}^2 &= \Sigma_{(i)} E_{x_i}^2 = \Sigma_{(i)}[\Pi p(\vec{E}_i)_x]^2, \\ E_x{}^2 &= \Sigma_{(i)} E_{y_i}^2 = \Sigma_{(i)}[\Pi p(\vec{E}_i)_y]^2, \end{aligned}\right\} \tag{8.80}$$

5. Розрахувати коефіцієнт кореляції складових сумарного закону:

$$R_{xy} = \Sigma_{(i)} E_{x_i} E_{y_i} / E_x E_y = \Sigma_{(i)}[\Pi p\ (E_i)_x]\cdot[\Pi p\ (E_i)_y] / E_x E_y. \tag{8.81}$$

де $E_{x_i} = \Pi p\ (\vec{E}_i)$ і $E_{y_i} = \Pi p\ (\vec{E}_i)$ зі своїми умовними знаками.

Головні серединні відхилення при додаванні декількох векторіальних відхилень (п. 4) зручно розраховувати за допомогою табл. 8.1.

Таблиця 8.1 – Головні серединні відхилення

E_i	$E_{x_i} = Пр(\vec{E}_i)_x$	$E^2_{x_i}$	$E_{y_i} = Пр(\vec{E}_i)_y$	$E^2_{y_i}$	$E_{x_i}E_{y_i}$
$E_1 = \ldots$	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
$E_n = \ldots$	…	…	…	…	…
		$E_x^2 = \sum_{i=1}^{n} E^2_{x_i} = \ldots$		$E_y^2 = \sum_{i=1}^{n} E^2_{y_i} = \ldots$	$\sum_{i=1}^{n} E_{x_i}E_{y_i} = \ldots$

Головні серединні відхилення сумарного закону розраховуються за формулами [22]

$$\left.\begin{aligned} & tg\,2\alpha = \frac{2\sum_{i=1}^{n} E_{x_i}E_{y_i}}{E_x^2 - E_y^2}, \text{ звідси } \alpha = \ldots, \\ & E_u^2 = E_x^2 \cos^2\alpha + E_y^2 \sin^2\alpha + \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}E_{y_i} \sin 2\alpha, \\ & E_v^2 = E_x^2 \sin^2\alpha + E_y^2 \cos^2\alpha + \sum_{i=1}^{n} E_{x_i}E_{y_i} \sin 2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (8.82)$$

Приклад 10. Провести композицію двох нормальних законів на площині, що характеризуються одиничними еліпсами ε_1 і ε_2 (рис. 8.13):

$m_{x_1} = 5$ м, $m_{y_1} = 14$ м, $E_{u_1} = 8$ м, $E_{v_1} = 3$ м, $\alpha_1 = 50°$,

$m_{x_2} = 12$ м, $m_{y_2} = 7$ м, $E_{u_2} = 6$ м, $E_{v_2} = 4$ м, $\alpha_2 = 20°$.

Визначити ймовірність потрапляння випадкової точки системи, що характеризується сумарним законом, у коло, центр якого збігається з центром розсіювання сумарного закону, а його радіус дорівнює 20 м.

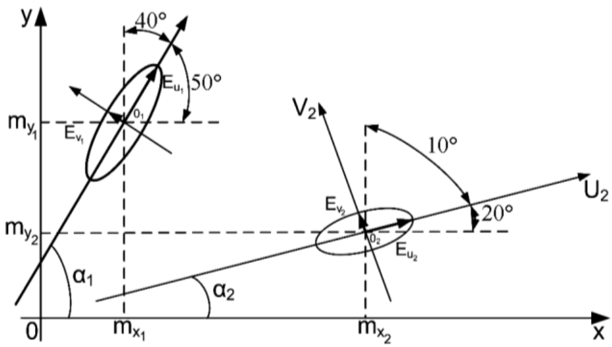

Рисунок 8.13 – Креслення із зазначенням головних серединних відхилень

Р о з в’ я з а н н я. Попередньо визначимо головні серединні відхилення сумарного закону. Потім шукану ймовірність потрапляння випадкової точки в коло підрахуємо за допомогою таблиці Збірника таблиць.

1. Складемо креслення із зазначенням головних серединних відхилень (рис. 8.13).

2. Математичні сподівання сумарного закону обчислимо за формулами (8.77):

$$m_x = \Sigma_{i=1}^{2} m_{x_i} = 5 + 12 = 17 \text{ м},$$

$$m_y = \Sigma_{i=1}^{2} m_{y_i} = 14 + 7 = 21 \text{ м}.$$

(Для розв’язання задачі, математичне сподівання не потрібне).

3. Розрахуємо серединні відхилення сумарного закону по осях координат за допомогою табл. 8.2

4. Розрахуємо головні серединні відхилення [формули (8.82)]:

а) $tg\, 2\alpha = 2\Sigma_{(i)} E_{x_i} E_{y_i} \;/\; (E_x^2 E_y^2) = 2{\cdot}33{,}45 \;/\; (65{,}32 - 59{,}50) =$ $= 11{,}54, \quad 2\alpha = 85°03'$;

б) $\sin\alpha = \sin 42°32' = 0{,}676$, $\sin^2\alpha = 0{,}456$, $\cos^2\alpha = 0{,}544$, $\sin 2\alpha = 0{,}996$;

$$E_u^2 = E_x^2 \cos^2 \alpha + E_y^2 \sin^2 \alpha + \sum_{(i)} E_{x_i} E_{y_i} \sin 2\alpha =$$

$$= 65{,}32 \cdot 0{,}544 + 59{,}5 \cdot 0{,}456 + 33{,}45 \cdot 0{,}996 = 95{,}0,$$

$$E_u = 9{,}75 \text{ м},$$

$$E_v^2 = E_x^2 \sin^2 \alpha + E_y^2 \cos^2 \alpha - \sum_{(i)} E_{x_i} E_{y_i} \sin 2\alpha =$$

$$= 65{,}32 \cdot 0{,}456 + 59{,}5 \cdot 0{,}544 - 33{,}45 \cdot 0{,}996 = 28{,}9,$$

$$E_v = 5{,}38 \text{ м}.$$

Таблиця 8.2 – Серединні відхилення сумарного закону по осях координат

E_i, м	E_{x_i}, м	$E_{x_i}^2$, м	E_{y_i}, м	$E_{y_i}^2$, м	$E_{x_i} E_{y_i}$, м
$E_{u_1} = 8$	$E_{u_1} \cos 50° = 5{,}15$	26,52	$E_{u_1} \cos 40° = 37{,}45$	37,45	+31,50
$E_{v_1} = 3$	$-E_{v_1} \cos 40° = -2{,}29$	5,24	$E_{v_1} \cos 50° = 3{,}72$	3,72	– 4,42
$E_{u_2} = 6$	$E_{u_2} \cos 20° = 5{,}63$	31,69	$E_{u_2} \cos 70° = 4{,}20$	4,20	11,52
$E_{v_2} = 4$	$-E_{v_2} \cos 70° = -1{,}37$	1,87	$E_{v_2} \cos 20° = 3{,}76$	14,13	– 5,15
$E_x^2 = \sum_{(i)} E_{x_i}^2 = 65{,}32$			$E_y^2 = \sum_{(i)} E_{y_i}^2 = 59{,}50$		$\sum_{(i)} E_{x_i} E_{y_i} = 43{,}02 - 9{,}57 = 33{,}45$

5. Визначимо ймовірність попадання в коло.

Для входу в таблицю

$$r_1 = r / E_u = 20 / 9{,}75 = 2{,}05;$$

$$e_1 = \sqrt{1 - (E_v / E_u)^2} = \sqrt{1 - (5{,}38 / 9{,}75)^2} = 0{,}83.$$

За одержаними величинам r_1 = 2,05 і e_1 = 0,83 за табл. А.4 визначимо шукану ймовірність

$$p = 0{,}7753.$$

Відповідь: $p\,[(XY) \in \varepsilon_r] = 77{,}5$ %.

Математичні схеми розв’язання задачі композиції нормальних законів на площині можуть бути використані й для визначення сумарного закону розподілу помилок-векторів на площині [24].

Приклад 11. При визначенні вихідних даних і установок для стрільби діють джерела помилок, зазначені в табл. 8.3.

Таблиця 8.3 – Джерела помилок

Джерела помилок	Векторіальні помилки	
	величина, м	напрямок
Помилки в положенні ВП	$E_б = 5$	Колова помилка
Помилки в положенні цілі	$a_ц = 25$ $b_ц = 15$	Еліптична помилка. Великий діаметр еліпса становить з напрямком кут у 30°
Помилки метеорологічної підготовки стрільби	$E_{x_м} = 24$	За напрямком стрільби
	$E_{z_м} = 24$	Перпендикулярно до напрямку стрільби
Помилки балістичної підготовки стрільби	$E_{x_б} = 30$	За напрямком стрільби
Помилки технічної підготовки	$E_{x_{тех}} = 5$	За напрямком стрільби
	$E_{z_{тех}} = 5$	Перпендикулярно до напрямку стрільби
Помилки таблиць стрільби	$E_{x_{т.с}} = 15$	За напрямком стрільби
	$E_{z_{т.с}} = 6$	Перпендикулярно до напрямку стрільби

Визначити одиничний еліпс, що характеризує помилки установок для стрільби.

Р о з в' я з а н н я. Потрібно визначити головні серединні відхилення E_u і E_v та кут α, для цього необхідно провести композицію зазначених в умові законів розподілу помилок на площині.

1. Скласти креслення із зображенням усіх векторіальних помилок (рис. 8.14). Математичні сподівання всіх помилок дорівнюють нулю. Тому початок усіх векторіальних помилок при їх графічному зображенні повинен збігатися з початком координат (точка Ц).

Але при такому зображенні у ділянці точки Ц буде нагромадження зображень векторіальних помилок, що ускладнить користування кресленням. Для більшої наочності доцільно векторіальні помилки на кресленні умовно зображати послідовно по осях координат.

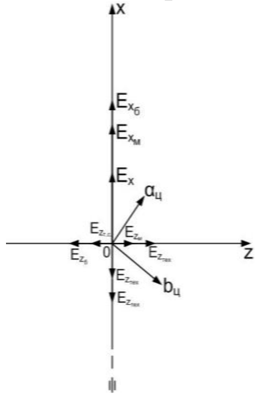

Рисунок 8.14 – Зображення всіх векторіальних помилок

2. Математичне сподівання всіх помилок дорівнюють нулю, звідси

$$m_x = m_z = 0.$$

3. Скласти розрахункову таблицю і розрахувати величини, що входять до неї (табл. 8.4).

4. Розрахувати головні серединні відхилення закону помилок визначення установок для стрільби за формулами:

а) $tg2\alpha = 2\Sigma_{(i)} E_{x_i} E_{z_i} /(E_x^2 - E_z^2) = 2 \cdot 160/(2281 - 496) = 0,1792$, $2\alpha = 10°10'$, $\alpha = 5°5'$;

б) $\sin\alpha = \sin 5°05' = 0,0886$, $\sin^2\alpha = 0,0078$, $\cos^2\alpha = 0,992$, $\sin 2\alpha = 0,176$,

$$E_u^2 = E_x^2 \cos^2\alpha + E_z^2 \sin^2\alpha + 2\sum_{(i)} E_{x_i} E_{z_i} \sin 2\alpha =$$

$$= 2\,281 \cdot 0,992 + 496 \cdot 0,0078 + 2 \cdot 160 \cdot 0,176 = 2\,298,$$

$$E_u = 48 \text{ м},$$

$$E_v^2 = E_x^2 \sin^2\alpha + E_z^2 \cos^2\alpha - \sum_{(i)} E_{x_i} E_{z_i} \sin 2\alpha =$$

$$= 2\,281 \cdot 0,0078 + 496 \cdot 0,992 - 2 \cdot 160 \cdot 0,176 = 478,$$

$$E_v = 22 \text{ м}.$$

Таблиця 8.4 – Розрахункова таблиця

E_i, м	E_{x_i}, м	$E^2_{x_i}$, м	E_{z_i}, м	$E^2_{z_i}$	E_{x_i}, E_{z_i}, м
$E_{x_б} = 5$	$E_{x_б} = 5$	25	0	0	0
$E_{z_б} = 5$	0	0	$-E_{z_б} = -5$	25	0
$\alpha_ц = 25$	$\alpha_ц \cos 30° =$ $= 21{,}6$	466	$\alpha_ц \cos 60° =$ $= 12{,}5$	156	+ 270
$b_ц = 16$	$-b_ц \cos 30° =$ -8	64	$b_ц \cos 30° =$ $= 13{,}8$	190	– 110
$E_{x_м} = 24$	$E_{x_м} = 24$	576	0	0	0
$E_{z_м} = 8$	0	0	$E_{z_м} = 8$	64	0
$E_{x_Б} = 30$	$E_{x_Б} = 30$	900	0	0	0
$E_{x_{тех}} = 5$	$-E_{x_{тех}} = -5$	25	0	0	0
$E_{z_{тех}} = 5$	0	0	$E_{z_{тех}} = 5$	25	0
$E_{x_{т.с}} = 15$	$-E_{x_{т.с}} = -15$	225	0	0	0
$E_{z_{т.с}} = 6$	0	0	$-E_{z_{т.с}} = -6$	36	0
	$E^2_x = \sum_{(i)} E^2_{x_i} = 2281$		$E^2_z = \sum_{(i)} E^2_{z_i} = 496$		$\Sigma_{(i)} E_{x_i}, E_{z_i} =$ $= +270 -$ $-110 =$ $= +160$

Відповіді (рис. 8.15): 1. Помилки визначення установок для стрільби характеризуються одиничним еліпсом із головними серединними відхиленнями

$$E_u = 48 \text{ м},\quad E_v = 22 \text{ м},\quad \alpha = \widehat{XU} = 5°05'.$$

2. Характеристиками точності визначення установок за дальністю і напрямком будуть серединні помилки:

$$E_{x_y} = E_x = \sqrt{2\,281} = 47{,}8 \text{ м і } E_{z_y} = E_z = \sqrt{496} = 22{,}3 \text{ м}.$$

Залежність між помилками визначення установок за дальністю X_y та напрямком Z_y слабка. Вона зумовлюється лише одним джерелом – помилками в положенні цілі.

Коефіцієнт кореляції може бути розрахований за формулою

$$R\,[X_y, Z_y] = \Sigma_{(i)} E_{x_i} E_{z_i} \; / \; E_x E_z = 160 \,/\, 47{,}8 \cdot 22{,}3 = 0{,}15.$$

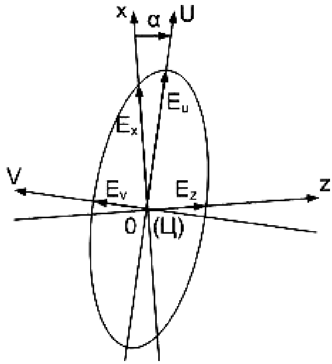

Рисунок 8.15 – Помилки визначення установок для стрільби, що характеризуються одиничним еліпсом із головними серединними відхиленнями

8.7. Помилки функцій внаслідок помилок аргументів

У пункті 5.3 ми встановили, що помилки вимірювань є центрованими випадковими величинами. У пункті 7.3 розглянули дію помилок-векторів і встановили, що розподіл помилки-вектора на площині відповідає нормальному розподілу системи (X, Y) – випадкових величин координат кінця помилки-вектора. На підставі цього визначили, що до помилок вимірювання та помилок-векторів застосовні всі математичні схеми, вироблені для зосереджених випадкових величин. У цьому розділі належить вирішити завдання щодо визначення помилок функцій внаслідок помилок аргументів та їх імовірнісного оцінювання [22].

8.7.1. Лінійна функція одного аргументу

Припустимо, що задана лінійна функція одного аргументу

$$Y = \varphi(X) = aX + b.$$

При визначенні аргументу X мають місце випадкові помилки δ_x, підпорядковані нормальному закону з серединною помилкою $E_{\delta x}$ ($m_x = 0$, див. 5.3). Потрібно визначити вид і числові характеристики закону розподілу помилок функції $\delta_y = \delta_\varphi$.

Випадкове значення функції внаслідок помилок визначення аргументу може бути подане у вигляді [24]

$Y_0 + \delta_y = \varphi_0 + \delta_\varphi = a(X_0 + \delta_x) + b = aX_0 + a\delta_x + b$,

де $Y_0 = \varphi_0 = aX_0 + b$ – справжнє значення функції;

$\delta_y = \delta_\varphi = a\delta_x$ – випадкова помилка функції внаслідок помилки аргументу.

Одержаний вираз випадкової помилки функції $\delta_y = \delta_\varphi$ являє собою лінійну функцію однієї випадкової величини – випадкової помилки аргументу δ_x. Отже, помилки функції δ_y додержуються нормального закону. Зауважимо, що коефіцієнт a за випадкової помилки аргументу – похідна від функції за аргументом [17].

Таким чином, вираз випадкової помилки функції внаслідок помилки аргументу можна одержати за формулою

$$\delta_y = \delta_\varphi = a\delta_x = \partial\varphi/\partial x \cdot \delta_x. \qquad (8.83)$$

Застосувавши до виразу (8.83) теорему про дисперсії лінійної функції, одержимо формулу для розрахунку серединної помилки функції

$$E_{\delta_\varphi} = \partial\varphi/\partial x \cdot E_{\delta_x}. \qquad (8.84)$$

Приклад 12. Для умов стрільби з 122-мм гаубиці Д-30 (заряд 3, дальність 6 км) визначити серединну помилку дальності внаслідок помилок визначення початкової швидкості снаряда, точність визначення якої характеризується серединною помилкою $E[\delta\Delta v_0] = 0{,}7$ %.

Р о з в’я з а н н я. Шукана помилка є помилкою визначення поправки дальності на відхилення початкової швидкості:

$$\Delta Д_{v_0} = \Delta X_{v_0} \Delta v_0.$$

Застосовуючи до цього виразу формулу (8.84), одержимо розрахункову формулу серединної помилки дальності

$$E\left[X_{\delta\Delta v_0}\right] = E\left[\delta\Delta Д_{v_0}\right] = \left|\frac{\partial \Delta Д_{v_0}}{\partial \Delta v_0}\right| E\left[\delta\Delta v_0\right] = \Delta X_{v_0} E\left[\delta\Delta v_0\right].$$

Із таблиць стрільби ΔX_{v_o} = 64 м розраховуємо шукану величину серединної помилки:

$$E\,[X_{\delta\Delta v_o}] = 64\cdot 0{,}7 = 44{,}8.$$

Відповідь: серединна помилка дальності внаслідок помилок визначення початкової швидкості $E\,[X_{\delta\Delta v_o}]$ = 44,8 м.

8.7.2. Лінійна функція кількох аргументів

Аналогічно випадкове значення функції внаслідок випадкових помилок визначення аргументів може бути подане у вигляді

$$Y_0 + \delta_y = \varphi_0 + \delta_\varphi = a_1\left(X_{1_0} + \delta_{x_1}\right) + a_2\left(X_{2_0} + \delta_{x_2}\right) + \ldots + b =$$
$$= \sum_{(i)} a_i\left(X_{i_0} + \delta_{x_i}\right) + b.$$

Звідси виразом випадкової помилки функції внаслідок помилок аргументів буде

$$\delta_y = \delta_\varphi = \Sigma_{(i)}\alpha_i\,\delta_{x_i} = \Sigma_{(i)}\partial\varphi/\partial x_i\,\delta_{x_i}\,. \qquad (8.85)$$

За формулою (8.40) помилки функції є лінійною функцією кількох випадкових величин – випадкових помилок аргументів δ_{x_i}. Таким чином, помилки функції відповідають нормальному закону, а серединна помилка на підставі теореми про дисперсії лінійної функції кількох випадкових величин обчислиться за формулою

$$E^2_{\delta_\varphi} = \Sigma_{(i)}(\partial\varphi/\partial x_i)^2\,E^2_{\delta_{x_i}}\,, \qquad (8.86)$$

де $\partial\varphi\,/\,\partial x_i$ – окремі похідні функції за аргументами X_i;

$E^2_{\delta_{x_i}}$ – серединні помилки визначення аргументів.

Приклад 13. Для умов стрільби з 122-мм гаубиці Д-30 (заряд 3, дальність 6 км) визначити серединну помилку дальності внаслідок помилок визначення метеорологічних умов стрільби, що характеризуються серединними помилками $E\,[\delta W_x] = 1{,}8$ м/с, $E\,[\delta \Delta T] = 1{,}4°$, $E\,[\delta \Delta H] =$ $= 1{,}7$ мм рт. ст.

Р о з в' я з а н н я. Досліджуваною функцією буде похибка дальності на метеорологічні умови стрільби:

$$\Delta Д_м = 0{,}1\Delta X_W W_x + 0{,}1\Delta X_T \Delta T + 0{,}1\Delta X_H \Delta H.$$

Застосовуючи до одержаного виразу формулу (8.86), одержимо розрахункову формулу для шуканої серединної помилки:

$$E^2\left[X_M\right] = \sum_1^3 \left(-\frac{\partial \Delta Д_M}{\partial \Delta_i} E_{\delta\Delta_i}\right)^2 = \left(0{,}1\Delta X_W E\left[\delta W_x\right]\right)^2 +$$

$$+\left(0{,}1\Delta X_T E\left[\delta\Delta T\right]\right)^2 + \left(0{,}1\Delta X_H E\left[\delta\Delta H\right]\right)^2.$$

Із таблиць стрільби $\Delta X_W = 163$ м, $\Delta X_T = 95$ м, $\Delta X_H =$ $= 15$ м.

Підставляючи ці величини в розрахункову формулу, маємо

$$E^2[X_M] = (16{,}3\cdot 1{,}8)^2 + (9{,}5\cdot 1{,}4)^2 + (1{,}5\cdot 1{,}7)^2 = 1\,044 \text{ м}^2.$$

Відповідь: серединна помилка дальності внаслідок помилок метеорологічної підготовки стрільби $E^2[X_M] = 32$ м.

8.7.3. Функція, в якої коефіцієнт при аргументі, визначеного з помилкою, величина випадкова

Розглянемо помилку дальності внаслідок помилки в табличної похибки на балістичне відхилення температури.

Досліджуваною функцією буде

$$\Delta Д_T = 0{,}1\Delta X_T \Delta T.$$

Тут, як і раніше, поправка дальності також може бути подана сумою двох величин:

$$\Delta Д_T = \Delta Д_{T_0} + \delta\,\Delta Д_{\delta\Delta X_T} = 0{,}1(\Delta X_{T_0} + \delta\Delta X_T)\,\Delta T.$$

Звідси шуканою випадковою помилкою дальності буде

$$X_{\delta\Delta X_Т} = 0{,}1\delta\Delta X_T \Delta T = \Delta T\cdot 0{,}1\delta\Delta X_T.$$

Зауважимо, що такий самий вираз випадкової помилки ми одержимо, якщо до формули похибки дальності застосуємо правила визначення випадкової помилки функції за формулою (8.85)

$$X_{\delta\Delta X_{\text{T}}} = (\partial\Delta\, Д_T / \partial X_T)\cdot \delta\Delta\, X_T = \Delta T{\cdot}0{,}1\delta\Delta\, X_T.$$

Застосовувати ж відразу формулу (8.86) для визначення серединної помилки не можна, оскільки вона складена для помилок, поданих лінійною функцією випадкової величини, а помилка $X_{\delta\Delta X_{\text{T}}}$ є добуток двох випадкових величин: випадкової величини балістичного відхилення температури повітря ΔT і випадкової помилки табличної поправки $\delta\Delta X_T$. Звернемо увагу, що отриманий вираз похибки відповідає змісту розглянутого процесу: величина помилки дальності внаслідок помилки табличної похибки визначається не лише останньою, а й залежить від величини балістичного відхилення температури повітря. Отже, необхідно враховувати розподіл випадкових значень балістичного відхилення температури повітря. Це можна зробити, якщо до одержаного виразу випадкової помилки дальності застосувати теорему про дисперсії добутка двох незалежних випадкових величин. Враховуючи, що математичне сподівання помилки $M\,[\delta\Delta X_T] = 0$, одержимо такі розрахункові формули:

$$\sigma^2\left[X_{\delta\Delta X_T}\right] = \sigma^2[\Delta T]\big(0{,}1[\delta\Delta X_T]\big)^2 + M^2[\Delta T]\big(0{,}1[\delta\Delta X_T]\big)^2$$

або

$$E^2\left[X_{\delta\Delta X_T}\right] = 2{,}2E^2[\Delta T]\big(0{,}1E[\delta\Delta X_T]\big)^2 + M^2[\Delta T]\big(0{,}1E[\delta\Delta X_T]\big)^2,$$

де $E\,[\Delta T]$, ($\sigma\,[\Delta T]$) і $M\,[\Delta T]$ – серединне (середнє квадратичне) відхилення й математичне сподівання розподілу випадкової величини балістичного відхилення температури повітря; визначаються з довідкових таблиць за висотою траєкторії;

$E\,[\delta\Delta X_T]$, ($\sigma\,[\delta\Delta X_T]$) – серединна (середня квадратична) помилка табличної похибки на балістичне відхилення температури.

Таким чином, загальна схема розв'язання задачі не змінилася: за загальним правилом складаємо вираз випадкової помилки функції [формула (8.85)], а потім застосовуємо до неї відповідну теорему про дисперсії функції [24].

Приклад 14. Визначимо серединну помилку дальності внаслідок помилки табличної поправки на поздовжній балістичний вітер активної ділянки траєкторії, якщо висота траєкторії Y_a = 800 м, таблична поправка на 10 м/с, ΔX_{Wa} = = 1 200 м, а серединна помилка табличної поправки дорівнює 5 % її величини: $E[\delta\Delta X] = 0{,}05\Delta X$.

Р о з в' я з а н н я. 1. Вихідною функцією для визначення помилки є похибка дальності на поздовжній вітер активної ділянки траєкторії:

$$\Delta Д_{Wa} = 0{,}1\Delta X_{Wa}\, Wa_x.$$

2. Складемо вираз випадкової помилки дальності внаслідок помилки табличної похибки:

$$X_{\delta\Delta X_{W_a}} = \delta\left(\Delta Д_{W_a}\right)_{\delta\Delta X_{W_a}} = \frac{\partial \Delta Д_{W_a}}{\partial \Delta X_{W_a}}\delta\Delta X_{W_a} = W_{a_x}\cdot 0{,}1\Delta X_{W_a}.$$

3. Визначимо вигляд і зміст функціональної залежності: помилки дальності внаслідок помилок табличної похибки на поздовжній вітер активної ділянки траєкторії, що є добутком двох незалежних випадкових величин – випадкової величини поздовжнього вітру Wa_x і випадкової помилки табличної похибки $\delta\Delta X_{Wa}$.

4. Застосовуючи теорему про дисперсії добутку двох незалежних випадкових величин, одержимо

$$E^2\left[X_{\delta\Delta XW_a}\right] = 2{,}2E^2\left[W_{a_x}\right]\left(0{,}1E\left[\delta\Delta X_{W_a}\right]\right)^2 +$$
$$+M^2\left[W_{a_x}\right]\left(0{,}1E\left[\delta\Delta X_{W_a}\right]\right)^2.$$

5. Розрахуємо серединну помилку:

– за Y_a = 800 м із довідкових таблиць $E[Wa_x]$ = 4,4 м/с (математичне сподівання поздовжнього вітру дорівнює нулю);

$E^2[X_{\delta\Delta\,XWa}] = 2{,}2 \cdot 4{,}4^2 \cdot (0{,}05 \cdot 120)^2 = 1\,532$ м^2.

Відповідь: $E\,[X_{\delta\Delta\,XWa}] = 39$ м.

8.7.4. Нелінійні функції

Зміст і порядок визначення помилок нелінійних функцій внаслідок помилок аргументів визначаються видом функції. У деяких задачах розв'язання зводиться до випадків, розглянутих раніше. До таких функцій, як $Y = X^{2}$, $Z = XY$ і деяких інших, застосовані розглянуті методи, що дозволяють скласти вираз випадкової помилки функції. Дійсно, наведені функції можуть бути подані сумою істинних значень і помилок:

$$Y_0 + \delta_y = (X_0 + \delta_x)^2 = X_0^2 + 2\,X_0\,\delta_x + \delta_x^{2}.$$

Якщо знехтувати квадратом помилки аргументу, то випадкова помилка функції буде

$$\delta Y = 2\,X\delta X = \partial\varphi/\partial x{\cdot}\delta X.$$

Аналогічно до другої функції (нехтуючи добутком помилок)

$$\delta Z = Y\delta X + X\delta Y = \Sigma_{(i)}[(\partial\varphi/\partial\lambda_i)\cdot\delta\lambda_i].$$

Надалі до одержаних виразів застосовані теореми про дисперсії лінійної функції (якщо аргументи X, Y – сталі величини) або добутки випадкових величин (якщо аргументи – величини випадкові) [13, 22].

Проте у ряді випадків такі порівняно прості методи визначення помилок функцій не можуть бути застосовані. Розглянемо функцію випадкового аргументу в степені, вище ніж два, наприклад $Y = X^{3}$. Якщо до цієї функції застосувати розглянутий метод, то

$$\delta Y = 3X^2\delta X + 3X\delta^2 X + \delta^3 X \cong \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta X.$$

Одержали вираз випадкової помилки, що вже траплявся нам. Однак застосувати до цього виразу теореми про дисперсії функцій відразу не можна, оскільки попередньо необхідно визначити $D\,[X^2]$.

Більш важкою задачею є визначення помилок тригонометричних функцій внаслідок помилок аргументів, якщо аргументи – величини випадкові.

Під час розв'язання подібних задач застосовують метод лінеаризації функції, відповідно до якого наближений вираз функції має такий вигляд:

$$Y = \varphi\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_m \left(X_i - m_{x_i}\right).$$

Розсіювання значень функції визначається другим членом. Якщо це розсіювання викликано помилками у визначенні аргументів, тобто $X_i - m_{x_i} = \delta X_i$, то одержимо формулу випадкової помилки функції

$$\delta Y = \delta \varphi = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}\right)_m \delta \lambda_i .$$

Середню квадратичну помилку функції визначимо за формулою (8.73) для незалежних помилок:

$$\delta \sigma_{\delta_y}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}\right)_m^2 \sigma_{x_i}^2$$

або за формулою (8.72) для залежних помилок.

За необхідності більш точно визначити помилку функції останню розвивають у ряд Тейлора й для помилки функції враховують другий, третій і четвертий члени ряду. Відповідно до цього середня квадратична помилка функції внаслідок помилок аргументів визначається з формули (у разі нормального розподілу незалежних помилок)

$$\sigma_{\delta\varphi}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}\right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{{}^{w}\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_i}\right)_m^2 \sigma_{\lambda_i}^2 + \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}\right)_m^2 \sigma_{\lambda_i} \sigma_{\lambda_j} . \qquad (8.87)$$

8.7.5. Загальна схема розв'язання задачі з визначення помилок функції внаслідок помилок аргументів

На підставі викладеного можна рекомендувати таку схему розв'язання задач щодо визначення помилок функції:

1. Відповідно до завдання встановити (скласти) аналітичний вираз досліджуваної функції:

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_1, ..., \lambda_n).$$

2. Скласти вираз випадкової помилки функції внаслідок помилок аргументів:

$$\delta\varphi = \Sigma_{(i)}\,(\partial\varphi/\partial\lambda_i)\cdot\delta\lambda_i. \qquad (8.88)$$

3. Проаналізувати і встановити вид функції $\delta\varphi$.

4. Відповідно до виду функції $\delta\varphi$ застосувати теорему про дисперсії функції для розрахунку середньої квадратичної $\sigma_{\delta\varphi}$ або серединної $E_{\delta\varphi}$ помилки.

Якщо досліджувана функція нелінійна, то за необхідності застосовують метод лінеаризації функції або метод розвинення функції в ряд Тейлора [1, 16].

Приклад 15. Розрахувати середню квадратичну помилку визначення поздовжнього вітру, якщо середня квадратична помилка визначення величини вітру $\sigma\,[\delta W] = 2{,}2$ м/с, а кута вітру $\sigma\,[\delta A_W] = 10°$; математичне сподівання величини вітру $m_w = 6{,}5$ м/с, а кут вітру змінюється в межах від 0 до $\pi/2$ за законом рівної ймовірності.

Р о з в' я з а н н я. 1. Встановити аналітичний вираз досліджуваної функції – розрахункову формулу поздовжнього вітру:

$$W_x = \cos A_W.$$

2. Застосувати метод лінеаризації, скласти вирази випадкової помилки поздовжнього вітру:

$$\delta W_x = \left(\frac{\partial W_x}{\partial W}\right)_m \delta W + \left(\frac{\partial W_x}{\partial A_W}\right)_m \delta A_W = \cos m_{A_W}\,\delta W - m_w \sin m_{A_W}\,\delta A_w.$$

3. Із одержаної формули бачимо, що випадкова помил-

ка визначення поздовжнього вітру – лінійна функція двох незалежних випадкових величин: помилок визначення величини δW й кута вітру δA_W. На підставі теореми про дисперсії лінійної функції незалежних випадкових величин одержимо

$$\sigma^2\left[\delta W_x\right]=\left(\cos m_{A_W}\sigma\left[\delta W\right]\right)^2+\left(m_w\sin m_{A_W}\sigma\left[\delta A_W\right]\right)^2.$$

4. Розрахуємо шукану середню квадратичну помилку.

Із умови $0 < A_W < \pi/2$ визначимо $m_{A_W} = \pi/4$,

$$\sigma\left[\delta A_W\right] = 10° = 10 : 57{,}3 = 0{,}1745\ \textit{рад},$$

тоді

$$\sigma^2\left[\delta W_x\right]=\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot 2{,}2\right)^2+\left(6{,}5\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}1745\right)^2=3{,}056.$$

Відповідь: середня квадратична помилка визначення поздовжнього вітру $\sigma\left[\delta W_x\right] = 1{,}75$ м/с.

Якщо застосувати більш точну формулу (8.87), тоді

$$\sigma^2\left[\delta W_x\right]=\left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial W}\right)_m\sigma\left[\delta W\right]\right]^2+\left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial A_W}\right)_m\sigma\left[\delta A_W\right]\right]^2+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial W^2}\right)_m\sigma\left[\delta W\right]\right]^2+\left[\left(\frac{\partial^2 A_w}{\partial A_W^2}\right)_m\sigma\left[\delta A_W\right]\right]^2+$$

$$+\left[\left(\frac{\partial^2 W_x}{\partial W\partial A_W}\right)_m\right]^2\sigma\left[\delta W\right]\sigma\left[\delta A_W\right]=3{,}056+0$$

$$+\left[-m_w\cos m_{A_W}\sigma\left[\delta A_W\right]\right]^2+\left[-\sin m_{A_W}\right]^2\sigma\left[\delta W\right]\sigma\left[\delta A_W\right]=$$

$$=3{,}056+\left[-6{,}5\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot 0{,}1745\right]^2+\left[-\sin\frac{\pi}{4}\right]^2\cdot 2{,}2\cdot 0{,}1745=$$

$$=3{,}056+0{,}641+0{,}192=3{,}889.$$

Відповідь: $\sigma\left[\delta W_x\right] = 1{,}97$ м/с.

Висновки до розділу 8

Таким чином, під час розгляду законів розподілу функцій випадкових аргументів ми стикаємося з необхідністю обчислення числових характеристик функцій випадкових аргументів.

Однак під час вирішення практичних завдань достатньо знати або обчислювати певні числові характеристики, основними з яких є математичне сподівання й дисперсія, середньоквадратичне та серединне відхилення функцій випадкових аргументів.

Наприклад, математичне сподівання функції будь-якого числа випадкових аргументів може бути обчислене у всіх випадках, крім закону розподілу функції.

Однак переважно для обчислення числових характеристик функцій не потрібно знати закони розподілу аргументів, а достатньо знати деякі числові характеристики. При цьому для їх обчислення використовують теореми про математичне сподівання й дисперсію, а теорема додавання математичних сподівань справедлива для будь-яких випадкових величин як залежних, так і незалежних.

У цьому розділі наведені формули для дисперсії суми випадкових величин можуть бути використані для визначення серединних відхилень суми випадкових величин, що підпорядкованих нормальним законам розподілу.

На практиці, під час обчислення помилок, застосовують формули до будь-яких пострілів, що супроводжуються незалежними помилками пострілу, так і залежними, зумовлені наявністю в сумарних помилках повторюваної частини, наприклад, помилок у положенні цілі, вогневої позиції, визначення метеорологічних умов і т. д.

Математичне сподівання числа або відсотка уражених елементарних цілей – основний показник ефективності стрільби по груповій цілі, на підставі цього ми можемо припустити, що лінійна функція від аргументу, підпорядкованого нормальному закону, також підпорядкована нормальному закону.

Із композицією нормальних розподілів на площині пов'язано багато задач теорії стрільби.

Так, наприклад, для розв'язання задачі композиції законів розподілу, що дуже часто трапляється при вирішенні практичних завдань, зокрема в теорії й практиці стрільби, ми стикаємося з необхідністю досліджувати суми випадкових величин, а це має дуже велике значення.

Таким чином, ми розв'язали задачі й одержали такі висновки:

– щоб обчислити математичне сподівання майже лінійної функції, потрібно у вираз функції замість аргументу підставити його математичне сподівання;

– щоб обчислити середнє квадратичне відхилення майже лінійної функції, потрібно середнє квадратичне відхилення аргументу помножити на абсолютне значення похідної функції в точці, що відповідає математичному сподіванню аргументу.

Таким чином, ми встановили, що під час розв'язання задачі композиції нормальних законів на площині, що зводяться до композиції векторіальних відхилень, які дорівнюють нулю, то сумарний закон також нормальний, тоді математичні схеми розв'язання задачі композиції нормальних законів на площині можуть бути використані й для визначення сумарного закону розподілу помилок-векторів на площині.

У кожному підрозділі цього розділу наводяться приклади практичного спрямування та варіанти їх розв'язання під час визначення числових характеристик (величини числа влучень в ціль за декількох незалежних пострілів, стрільбі по груповій цілі, нелінійних функціях, лінеаризації функцій). Наведені такі закони: розподілу лінійної функції від аргументу, розподілу суми двох випадкових величин, розподілу лінійної функції від нормального розподілу аргументів та композиції нормальних законів із законом рівної ймовірності, а також нелінійної функції та загальна схема розв'язання задачі з визначення помилок функції внаслідок помилок аргументів.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Закон розподілу функцій випадкових аргументів, числові характеристики закону розподілу, математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне та серединне відхилення функцій випадкових аргументів, щільність розподілу, системи перервних і безперервних випадкових величин, нормальний закон розподілу аргументів, кореляційний момент, матриця, лінійна функція від аргументу, композиція нормальних розподілів, теорія і практика стрільби, похідна функція, композиція векторіальних відхилень, лінеаризація функцій, закон рівної ймовірності, середня кількість влучень в ціль, потрібна та необхідна витрата снарядів, середня траєкторія, показник ефективності стрільби, довірча ймовірність, попарні комбінації величин, радіус наведеної зони ураження снаряда, щільність ймовірностей, крива розподілу, точність вимірювання та округлення результатів, лінійна функціональна залежність, поздовжній вітер, кут вітру, час роботи двигуна снаряда, розсіювання величин прискорення, вироджені нормальні розподіли на площині, теорема додавання кореляційних моментів, позитивна і негативна лінійні залежності, векторіальні відхилення, головні серединні відхилення, джерела помилок, одиничний еліпс, метеорологічні умови стрільби, балістичне відхилення температури повітря, лінійна і нелінійна функції, композиція нормальних законів, лінеаризація функцій, помилки функцій, помилки-вектори на площині.

Питання для повторення та самоконтролю

1. У чому полягає закон розподілу функцій випадкових аргументів?

2. Які існують числові характеристики закону розподілу?

3. Надати визначення та пояснення математичному сподіванню (навести формулу).

4. Надати визначення та пояснення дисперсії (навести формулу).

5. Надати визначення та пояснення середньоквадратичному та серединному відхиленню функцій випадкових аргументів (навести формулу).

6. Надати визначення та пояснення щільності розподілу (навести формулу).

7. Що таке система перервних і безперервних випадкових величин?

8. Надати визначення нормального закону розподілу аргументів (навести формулу).

9. Надати визначення та пояснення кореляційному моменту (навести формулу).

10. Надати визначення та пояснення лінійній функції від аргументу.

11. Що таке композиція нормальних розподілів?

12. Надати пояснення похідної функції.

13. Надати пояснення композиції векторіальних відхилень та як вони виникають?

14. У чому полягає процес лінеаризації функцій, пояснити та навести приклади?

15. Надати визначення та пояснення закону рівної ймовірності.

16. Пояснити, що таке середня кількість влучень в ціль?

17. Надати пояснення потрібної та достатньої витрати снарядів.

18. Пояснити, що таке середня траєкторія польоту снарядів?

19. Що таке показник ефективності стрільби?

20. Надати пояснення довірчої ймовірності.

21. Надати пояснення щільності ймовірностей.

22. У чому полягає точність вимірювання та округлення результатів?

23. Надати пояснення розсіюванню величин прискорення.

24. Надати визначення та пояснення виродженим нормальним розподілам на площині.

25. У чому міститься лінійна функціональна залежність? (навести формулу).

26. Надати визначення та пояснення теореми додавання кореляційних моментів (навести формулу).

27. Надати пояснення позитивній і негативній лінійним залежностям (навести формулу).

28. Звідки виникають джерела помилок, надати пояснення та перелічити їх?

29. Надати пояснення активній та пасивній ділянкам траєкторій польоту реактивного снаряда (час роботи двигуна снаряда).

30. Як виникають векторіальні відхилення?

31. Надати пояснення та перелічити метеорологічні умови стрільби та їх табличні значення.

32. Надати пояснення балістичним відхиленням температури повітря (навести формулу).

33. Надати пояснення та навести формулу лінійної й нелінійної функцій.

34. Як виникають помилки-вектори на площині, надати пояснення, навести формулу та графічно зобразити.

35. Надати пояснення та перелічити балістичні умови стрільби та їх табличні значення.

Завдання для самопідготовки

1. Визначити інші галузі науки, де використовують закон розподілу функцій випадкових аргументів на практиці.

2. Визначити попарні комбінації величин, їх залежність та графічно зобразити на рисунку.

3. На аркуші паперу графічно зобразити радіус наведеної зони ураження снаряда.

4. На аркуші паперу намалювати рисунок одиничного еліпса розсіювання снарядів відносно напрямку стрільби.

5. На рисунку зобразити появу векторіальних відхилень та як вони впливають на результат стрільби.

Теми, запропоновані для написання рефератів

1. Використання основних законів теорії ймовірностей у нанотехнологіях.

2. Застосування основних положень теорії ймовірностей в артилерії.

3. Числові характеристики законів розподілу в інших галузях.

4. Вплив формул розсіювання на результати стрільби артилерії.

5. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

6. Застосування композиції векторіальних відхилень в артилерії під час ураження цілей.

7. Перспективи застосування основних законів теорії ймовірностей у військовій галузі.

Розділ 9

ОБРОБЛЕННЯ ДОСЛІДНИХ ДАНИХ

9.1. Поняття про закон великих чисел. Теореми Чебишова й Бернуллі

Під поняттям закону великих чисел розуміють на увазі розділ теорії ймовірностей, що містить ряд теорем, які є одним із основних положень теорії ймовірностей. На початку нашого курсу ми відзначали, що більшість випадкових подій мають стійку частоту, що полягає в тому, що частота за великої кількості випробувань, проведених за однакових умов, коливається в певних межах поблизу деякого числа – ймовірності цієї події. Наявність цієї закономірності пов'язана з масовістю явищ, із великою кількостю виконуваних однорідних дослідів. При цьому виявляється одна з основних властивостей стійкості масових випадкових явищ: випадкові відхилення від середнього, неминучі під час кожного досліду, при масових явищах взаємно погашаються, а результат вирівнюється.

Ця стійкість середніх є «законом великих чисел». Таким чином, під «законом великих чисел» мають на увазі закономірності, які полягають у тому, що за великої кількості випадкових явищ середній їх результат практично перестає бути випадковим. Ця властивість дозволяє оперувати з масовими випадковими явищами, що є невипадковими, отже, пророкувати середні результати масових явищ майже точно.

Закон великих чисел поданий рядом теорем, що встановлюють за великої кількості дослідів факт і умови наближення середніх характеристик до деяких виявлених сталих. Ці теореми передбачають умови збіжності за ймовірністю випадкових величин до деяких сталих, невипадкових величин.

Із усіх теорем закону великих чисел розглянемо дві: перша встановлює залежність між середнім арифметичним значенням і математичним сподіванням (теореми Чебишова), а друга – між частотою та ймовірністю події (теорема Бернуллі) [3]. Перш ніж сформулювати їх, доведемо одну з нерівностей, що увійшла в теорію ймовірностей під назвою нерівності Чебишова.

Умова нерівності Чебишова формулюється так: якщо є випадкова величина X із математичним сподіванням m_x і дисперсією D_x, то, яке б не було позитивне число α, справедлива нерівність [23]

$$p\,(|X - m_x| \geq \alpha) \leq D_x / \alpha^2, \tag{9.1}$$

тобто ймовірність того, що відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання буде більшим або дорівнювати α, не перевищить значення D_x / α^2.

Для доведення розглянемо перервну випадкову величину із багатокутником розподілу, зображеним на рис. 9.1.

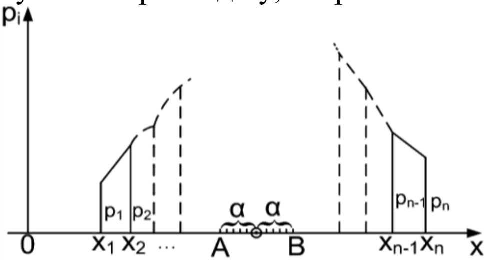

Рисунок 9.1 – Перервна випадкова величина із багатокутником розподілу

За визначенням дисперсія величини X має вигляд

$$D_x = M\left[\left(X - m_x\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 p_i =$$

$$= \sum_{|x_i - m_x| < \alpha}\left(x_i - m_x\right)^2 p_i + \sum_{|x_i - m_x| \geq \alpha}\left(x_i - m_x\right)^2 p_i.$$

Оскільки всі члени суми позитивні, то якщо поширити підсумовування лише на ті значення X, що розміщені поза відрізком AB, її величина може лише зменшитися й одержимо нерівність

$$D_x \geq \sum_{|x_i - m_x| \geq \alpha} (x_i - m_x)^2 p_i,$$

яке ще більше посилиться, якщо величину $x_i - m_x$, що входить під знак суми, замінити меншою величиною α. Тоді

$$D_x \geq \sum_{|x_i - m_x| \geq \alpha} |x_i - m_x|^2 p_i \geq \sum_{|x_i - m_x| \geq \alpha} \alpha^2 p_i = \alpha^2 \sum_{|x_i - m_x| \geq \alpha} p_i.$$

Отже, $\sum\limits_{|x_i - m_x| \geq \alpha} p_i$ є не що інше, як імовірність того, що ухилення величини X від свого математичного сподівання буде не менше від α, тобто

$$\sum_{|x_i - m_x| \geq \alpha} p_i = p(|X - m_x| \geq \alpha,$$

тоді

$$D_x \geq \alpha^2 p\ (|X - m_x| \geq \alpha),$$

звідси

$$p\ (|X - m_x| \geq \alpha) \leq D_x / \alpha^2.$$

Аналогічне доведення може бути проведене і для безперервних випадкових величин. Цю нерівність використовують при доведенні теорем закону великих чисел. Крім того, нерівність може бути застосована для наближеного оцінювання практично можливих меж значень випадкової величини.

9.1.1. Теорема Чебишова

Математичне сподівання є числовою характеристикою розподілу випадкової величини – центром розсіювання. У дослідах математичне сподівання проявляється через середній результат (середнє арифметичне з одержаних окремих результатів).

Ми розглянули формули, за якими може бути обчислене математичне сподівання, але можливі випадки, якщо його не можна обчислити хоча б тому, що невідомий закон розподілу випадкової величини. Тоді вдаються до досліду і визначають середнє арифметичне значення випадкової величини. Цілком природно постає питання про оцінювання заміни математичного сподівання середнім арифметичним значенням [16, 21, 35].

Спочатку визначимо основні параметри – математичне сподівання й дисперсію середнього арифметичного значення.

Припустимо, що випадкова величина X має математичне сподівання m_x і дисперсію D_x. Зробимо n незалежних дослідів і визначимо середнє арифметичне значення з одержаних результатів $\overline{X}$. Якщо X_1, X_2, ..., X_n – значення величини X у першому, другому і т. д. дослідах, то середнім арифметичним значенням буде

$$\overline{X} = (\Sigma_{i=1}{}^{n} X_i) / n.$$

Величини X_1, X_2, ..., X_n – незалежні випадкові величини, кожна з яких розподіляється за тим самим законом, що і випадкова величина X, тобто

$$m_{x_1} = m_{x_2} = ... = m_{x_n} = m_x,$$

$$D_{x_1} = D_{x_2} = ... = D_{x_n} = D_x.$$

Застосовуючи до середнього арифметичного теореми про математичне сподівання й дисперсію суми незалежних випадкових величин X_i, одержимо

$$M[\overline{X}] = m_{\overline{X}} = M[(\Sigma_{i=1}{}^{n} X_i) / n] = 1/n \Sigma_{i=1}{}^{n} M[X_i] = 1/n \cdot n m_x = \\ = m_x,$$

тобто

$$m_{\overline{X}} = m_x, \tag{9.2}$$

$$D[\overline{X}] = D_{\overline{X}} = D[(\Sigma_{i=1}{}^{n} X_i) / n] = 1/n^2 \Sigma_{i=1}{}^{n} D[X_i] = 1/n^2 \cdot n D_x = \\ = 1/n \cdot D_x,$$

тобто

$$\left.\begin{array}{l} D_{\overline{X}} = D_x / n, \\ \sigma_{\overline{X}} = \sigma_x / \sqrt{n},\ E_{\overline{X}} = E_x / \sqrt{n} \end{array}\right\}. \tag{9.3}$$

Із виразу (9.3) випливає, що математичне сподівання середнього арифметичного не залежить від кількості дослідів і відповідне математичному сподіванню величини X, що спостерігається, а з виразу (9.3) можна зробити висновок, що за досить великої кількості дослідів дисперсія середнього арифметичного може бути як завгодно малою. Отже, розсіювання середнього арифметичного щодо математичного сподівання за досить великої кількості дослідів буде малим і чим більше дослідів, тим меншим воно буде. Цю властивість стійкості середнього арифметичного в кількісній формі і встановлює теорема Чебишова, що може бути сформульована таким чином: із імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що за достатньо великої кількості дослідів середнє арифметичне значення випадкової величини як завгодно мало відрізняється від математичного сподівання (інакше кажучи, середнє арифметичне значення випадкової величини зводиться за ймовірністю до її математичного сподівання), тобто [34]

$$p\left(\left|\bar{X} - m_x\right| \le \varepsilon \right) > 1 - \delta, \tag{9.4}$$

де ε й δ – як завгодно малі позитивні числа.

Дійсно, застосовуючи до випадкової величини $\bar{X}$ нерівність Чебишова, матимемо

$$p\left(\left|\overline{X} - m_x\right| \ge \varepsilon\right) > \frac{D_{\overline{X}}}{\varepsilon^2} = \frac{D_x}{n\varepsilon^2}.$$

Яким би малим не було ε, можна взяти n такої величини, що буде виконана нерівність

$$D_x / n\varepsilon^2 < \delta.$$

Тоді для цієї умови одержимо

$$p\ (|\overline{X}\ - m_x|\ \ge \varepsilon) \le \delta.$$

або, переходячи до протилежного події, маємо вираз, що визначає теорему

$$p\ (|\overline{X}\ - m_x| < \varepsilon) > 1 - \delta.$$

Якщо відома або може бути обчислена дисперсія (серединне відхилення) закону розподілу випадкової величини X, то можна, найімовірніше, оцінити відхилення середнього арифметичного значення щодо математичного сподівання [34].

Приклад 1. Випадкова величина X підпорядковується нормальному закону із серединним відхиленням $E_x = 1{,}5$ м. Яка ймовірність того, що з 25 вимірювань середнє арифметичне з одержаних результатів не буде відрізнятися від математичного сподівання більше ніж на 1 м?

Р о з в' я з а н н я. Шукана ймовірність обчислиться за допомогою таблиці наведеної функції Лапласа за формулою

$$p = p\,(|\,\overline{X} - m_x| < 1) = \Phi\,(x = 1/\,E_{\overline{X}}).$$

Розрахуємо $E_{\overline{X}}$:

$$E_{\overline{X}} = E_x/\sqrt{n} = 11{,}5/\sqrt{25} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Тоді із таблиці А.1 обчислимо

$$p = \Phi\,(1/0{,}3) = \Phi\,(3{,}33) = 0{,}97064.$$

Відповідь: $p = p\,(|\,\overline{X} - m_x| \le 1) = p\,(|\,\delta_{m_x}| \le 1) = 97\ \%$.

Цей результат означає, що якщо математичне сподівання визначати як середнє арифметичне з 25 вимірювань, то в середньому в 97 випадках із 100 помилка не перевищить 1 м (або відхилення середнього арифметичного від математичного сподівання не перевищить 1 м).

Приклад 2. За умови попереднього прикладу 1 визначити кількість вимірювань, за результатами яких потрібно визначати середнє арифметичне з тим, щоб з імовірністю 90 % помилка у визначенні математичного сподівання не перевищувала 0,5 м.

Р о з в' я з а н н я. Необхідна кількість вимірювань обчислиться з формули (9.3):

$$n = E_x^{\,2}/\,E_{\bar{x}}^2,$$

де $E_{\bar{x}}$ визначається із розв'язання рівняння

$$p\,[|\,\overline{X} - m_x| < 0{,}5] = \Phi\,(x = 0{,}5/\,E_{\overline{X}}) = 0{,}90.$$

За таблицею А.1 значень функції Ф (x) обчислимо, що для Ф (x) = 0,90, x = 2,44. Отже,

$$E_x = 0,5 / 2,44 = 0,205,$$

тоді

$$n = E_x^2 / E_{\bar{x}}^2 = (1,5 / 0,205)^2 = 53,54.$$

Відповідь: щоб у середньому в 90 випадках із 100 помилка не перевищувала 0,5 м, результат потрібно визначати як середнє арифметичне із результатів 54 вимірювань.

9.1.2. Теорема Бернуллі

Теорема Бернуллі встановлює зв’язок між частотою події та її ймовірністю і формулюється так: із імовірністю, як завгодно близькою до одиниці, можна стверджувати, що за досить великої кількості дослідів частота події як завгодно мало відрізняється від його ймовірності, тобто

$$p\ (|r - p| < \varepsilon) > 1 - \delta, \tag{9.5}$$

де ε й δ – як завгодно малі позитивні числа: $r = m/n$, n – кількість дослідів. Потрібно довести справедливість формули за досить великого n.

Дійсно, якщо позначити через X_1, X_2, ..., X_n випадкові величини кількості появи події, що нас цікавить в першому, другому і т. д. дослідах, то частота появи події в n дослідах може бути подана як середнє арифметичне величин $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$r = (\Sigma_{i=1}^{n} X_i)/n.$$

За теоремою Чебишова ця частота як середнє арифметичне за ймовірністю зводиться до свого математичного сподівання, тобто

$$p(|r - m_r| < \varepsilon) > 1 - \delta.$$

Якщо врахувати, що математичні сподівання X_i рівні між собою і чисельно рівні ймовірності появи події, то

$m_r = M\ [(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) / n] = 1/n \cdot M\ [\Sigma_{i=1}^{n} X_i] = 1/n \cdot nM\ [X] = 1/n \cdot np = p,$

що і доводить справедливість формули (9.5).

Теорема Я. Бернуллі встановлює стійкість частоти за сталих умов досліду. Однак найчастіше неможливо відтворити велику кількість раз одні й ті самі умови досліду, але й за змінних умов досліду аналогічна стійкість також існує. Властивість стійкості частот за змінних умов досліду встановлюється за допомогою теореми Пуассона, що формулюється так: «якщо виникає n незалежних дослідів і ймовірність появи події A у i-му досліді дорівнює p_i, то за збільшення n частота події A зводиться за ймовірністю до середнього арифметичного ймовірностей p_i» [18, 35].

9.2. Основні завдання математичної статистики і методів їх вирішення

На початку курсу ми відзначали, що математичні закони теорії ймовірностей – це не абстрактні функціональні залежності, а математичні вираження об'єктивних закономірностей, реально існуючих у масових випадкових явищах природи. Ці закони тією чи іншою мірою виявляються в дослідах, за результатами яких можна безперечно і точно встановити закономірність, властиву цьому явищу. Розробленням методів реєстрації, опису та аналізу статистичних експериментальних даних, одержуваних у результаті спостереження масових випадкових явищ, займається математична статистика [29].

Завдання математичної статистики як науки зводиться до оброблення спостережень над масовими випадковими явищами. Залежно від характеру вирішуваних практичних питань і від обсягу наявних дослідних даних ці завдання можуть набирати тієї чи іншої форми. Найчастіше розв'язання задачі зводиться до такого: встановлення законів розподілу випадкових величин, що вимагає одержання та оброблення великої кількості (кількох сотень) результатів досліду; перевірки прийнятих гіпотез про підпорядкування випадкової величини передбачуваного закону розподілу $F(x)$; обчислення невідомих параметрів закону розподілу досліджуваних випадкових величин і оцінювання їх точності. Все це має практичне застосування в дослідженні питань стрільби наземної артилерії. Розглянемо питання реєстрації та систематизації дослідних даних.

9.2.1. Статистична функція розподілу

Кожен дослід фіксується: зазначаються його номер і результат (табл. 9.1). Сукупність одержаних у досліді значень досліджуваної величини називають простою статистичною сукупністю (простим статистичним рядом) і являє собою первинний статистичний матеріал, що підлягає обробленню.

Використовуючи простий статистичний ряд, можна скласти таблицю значень і побудувати графік статистичної функції розподілу.

Таблиця 9.1 – Статистична функція розподілу

Номер досліду	1	2	3	...	13	...	24	25
Результат вимірювання	−12	−13	+2	...	+9	...	−3	+6

На відміну від функції розподілу, що відображає об'єктивний закон розподілу випадкової величини і визначає ймовірність події $p(X < x)$, статистична функція розподілу $F^*(x)$ визначається дослідними даними і являє собою частоту події $X < x$, зумовлену цим статистичним матеріалом:

$$F^*(x) = r(X < x). \tag{9.6}$$

Із формули (9.6) бачимо, що для того щоб обчислити значення статистичної функції розподілу за даного x, необхідно підрахувати кількість дослідів, у яких величини X набуде значення, меншого за x, і одержане число m_i поділити на загальну кількість результатів дослідів.

Приклад 3. У результаті 20 дослідів над випадковою величиною X були одержані результати, зазначені в простому статистичному ряді (табл. 9.2). Побудувати статистичну функцію розподілу для випадкової величини X.

Таблиця 9.2 – Одержані результати дослідів над випадковою величиною X (простий статистичний ряд)

Номер досліду	Значення випадкової величини x_i	Номер досліду	Значення випадкової величини x_i
1	+2	11	−12
2	−12	12	+6
3	+15	13	+10
4	−9	14	−4
5	+3	15	+2
6	+19	16	+11
7	+2	17	+6
8	+10	18	+10
9	+15	19	−1
10	+13	20	+15

Р о з в’ я з а н н я. Розмістимо одержані значення у порядку зростання: –12, –12, –9, –4, –1, +2, +2, +2, 3, 6, 6, 10, 10, 10, 11, 13, 15, 15, 15, 19.

Найменше одержане значення X дорівнює –12. Отже, $F^*(-12) = 0$. Значення X, що дорівнює –12, було одержане два рази. Тоді частота $r\ (X < -9) = 2/12 = 1/10$.

Тому графік статистичної функції в точці $x_i = -12$ має стрибок, що дорівнює 1/10. Аналогічно цьому розраховують частоти і для всіх інших значень величини X, одержаних із досліду. Величини, одержані під час розрахунку, наведені в табл. 9.3; графік статистичної функції розподілу – на рис. 9.2.

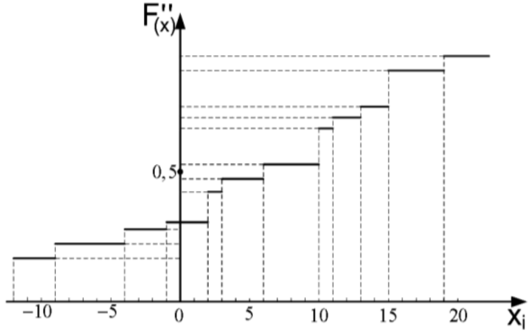

Рисунок 9.2 – Графік статистичної функції розподілу

Таблиця 9.3 – Розрахунок частот величини X

x_i	$r_i = m_i / n$	$F^*(x_i) = r\,(X < x_i) = \Sigma_{(i-1)} r_i$
−12	2/20	0
−9	1/20	2/20
−4	1/20	3/20
−1	1/20	4/20
+2	3/20	5/20
+3	1/20	8/20
+6	2/20	9/20
+10	3/20	11/20
+11	1/20	14/20
+13	1/20	15/20
+15	3/20	16/20
+19	1/20	19/20
> +19	–	1

Складання простого статистичного ряду або побудова графіка статистичної функції розподілу вирішує завдання опису результату досліду. Однак за великої кількості дослідів побудова статистичної функції розглянутим способом є дуже трудомісткою. З іншого боку, часто для більшої наочності доцільно одержати статистичну криву розподілу випадкової величини, що відображає зміну щільності розподілу $f(x)$. Для цього складається так званий статистичний ряд [20].

9.2.2. Статистичний ряд. Гістограма

За великої кількості результатів досліду простий статистичний ряд стає громіздким. Щоб надати результатам досліду великої компактності і наочності, складають так званий статистичний ряд. Для цього діють так.

Усі одержані в досліді значення випадкової величини X, розміщені у порядку зростання, поділяють на інтервали або «розряди» і підраховують частоту для кожного розряду:

$$r_i = m_i / n,$$

де m_i – кількість значень, одержаних в i-му розряді;

n – загальна кількість одержаних у досліді значень випадкової величини X. Цілком очевидна необхідність рівності

$$\Sigma_{i=1}^{n} r_i = 1.$$

Потім складають таблицю (табл. 9.4), в якій зазначають межі розрядів (інтервалів) і відповідні їм частоти. Цю таблицю й називають статистичним рядом.

Таблиця 9.4 – Межі розрядів (інтервалів) і відповідні до них частоти (статистичний ряд)

Межа розрядів I_i	x_1, x_2	x_2, x_3	...	x_i, x_{i+1}	...	x_k, x_{k+1}
Частота розрядів r_i	r_1	r_2	...	r_i	...	r_k

У таблиці:

I_i – позначення i-го розряду;

x_i, x_{i+1} – межі i-го розряду;

r_i – частота i-го розряду;

k – кількість розрядів.

Графічне зображення статистичного ряду називають *гістограмою*. Будується гістограма таким чином. По осі абсцис (рис. 9.3) відкладають межі розрядів і на кожному з них як на основі будується прямокутник, площа якого дорівнює частоті цього розряду. За збільшення кількості дослідів можна вибирати все менші й менші розряди (інтервали x_i, x_{i+1}), при цьому гістограма буде наближатися до деякої кривої, що являє собою криву розподілу випадкової величини [30].

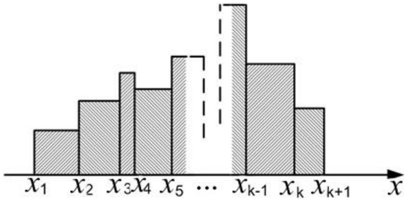

Рисунок 9.3 – Гістограма – графічне зображення статистичного ряду

Користуючися статистичним рядом, можна наближено побудувати графік статистичної функції розподілу. Для цього використовують одержані з досліду значення частот, що відповідають межам розрядів x_1, x_2, x_3, ..., тоді

$$F^*(x_1) = r(X < x_1) = 0,$$
$$F^*(x_2) = r(X < x_2) = r_1,$$
$$F^*(x_3) = r(X < x_3) = r_1, + r_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^*(x_k) = r(X < x_k) = \Sigma^{k-1}{}_{i=1}\, r_i,$$
$$F^*(x_{k+1}) = \Sigma^{k}{}_{i=1}\, r_i = 1.$$

З'єднуючи кінці ординат, відповідних величин $F^*(x_i)$ (рис. 9.4), одержимо наближений графік статистичної функції розподілу.

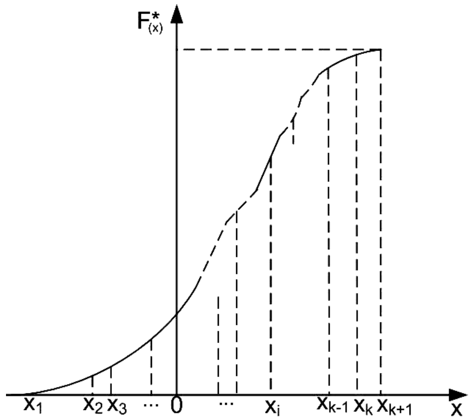

Рисунок 9.4 – Наближений графік статистичної функції розподілу

9.2.3. Числові характеристики статистичного розподілу

Розглядаючи закони розподілу випадкових величин, ми відзначали ряд параметрів, що відображають основу закономірності розподілу, – математичне сподівання, дисперсію, початкові та центральні моменти різних порядків.

Під час оброблення дослідних даних можуть бути одержані аналогічні числові характеристики статистичних розподілів, сенс яких полягає в тому, що вони визначаються за випадковим, одержаним із досліду значенням досліджуваної величини; величини ймовірностей замінені частотою, одержаною з досліду, а величини математичних сподівань – середніми арифметичними з одержаних у дослідах значень випадкової величини. Таким чином, ми можемо одержати такі числові характеристики статистичних розподілів.

За аналогією з математичним сподіванням статистичну середню, що дорівнює середньому арифметичному з одержаних у дослідах значень випадкової величини, обчислимо так:

$$M^*(x) = \bar{x} = (\Sigma_{i=1}^{n} x_i) / n, \qquad (9.7)$$

а статистичну дисперсію – з виразу

$$D^*(x) = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}, \qquad (9.8)$$

де

$$m_x^* = M^*(X) = \bar{x};$$

статистичні початкові і центральні моменти визначимо за формулами

$$\alpha_k(X) = (\Sigma_{i=1}^{n} x_i^k) / n, \qquad (9.9)$$

$$\mu_k^*(X) = (\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)^k) / n; \qquad (9.10)$$

статистичний момент зв'язку системи двох випадкових величин буде

$$K_{xy}^* = [\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)] / n =$$
$$= [\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})] / n. \qquad (9.11)$$

Цілком природно, що ці статистичні характеристики будуть відрізнятися від дійсних параметрів закону розподілу досліджуваних випадкових величин. За обмеженої кількості дослідів статистичні числові характеристики є випадковою величиною [22].

На основі закону великих чисел у міру збільшення кількості дослідів статистичні характеристики наближаються (зводяться за ймовірністю) до параметрів закону розподілу. З цієї причини вони можуть дати певне уявлення про параметри закону розподілу досліджуваної випадкової величини, хоча й мають випадкових характер.

9.2.4. Вирівнювання статистичних рядів

Як ми відзначали, у всякому статистичному розподілі неминучий елемент випадковості, що внаслідок обмеженої кількості спостережень може тією чи іншою мірою спотворити характер розподілу досліджуваної випадкової величини. Тому під час оброблення дослідних даних доводиться підбирати за цим статистичним рядом таку теоретичну криву, яка б у найкращому вигляді характеризувала цей статистичний матеріал і менше залежала від випадковостей, пов'язаних із недостатньою кількістю досліджуваних даних. Це і є змістом завдання щодо вирівнювання статистичних рядів. Здебільшого характер закону розподілу величини, що досліджується, відомий заздалегідь. З огляду на це завдання вирівнювання статистичного ряду практично зводиться до раціонального вибору таких значень параметрів, за яких вибраний теоретичний розподіл найкраще відповідав би одержаному в досліді статистичному розподілу [34].

Наприклад, відомо, що розсіювання снарядів за дальністю (аналогічно і за напрямком) як результат впливу великої кількості випадкових факторів підпорядковується нормальному закону [24]

$$f(x_p) = \frac{\rho}{B\partial\sqrt{\pi}} e^{-\rho^2 \frac{x_p^2}{B\partial^2}}$$

і завдання вирівнювання результатів стрільб, проведених для встановлення характеру розсіювання снарядів за дальністю, переходить у завдання щодо раціонального вибору серединного відхилення *Вд*. Під час дослідження інших величин, крім характеристики розсіювання випадкової величини (дисперсії або серединного відхилення), може виникнути необхідність у виборі математичного сподівання. Отже, потрібно так підібрати параметри, щоб обрана функція найкраще описувала одержаний дослідний матеріал.

Цілком природно скористатися для вирішення цього завдання методом моментів. У розділі 5 показано, що моменти різних степенів із різних боків характеризують розподіл випадкових величин. Так, перший початковий момент (математичне сподівання) визначає центр розсіювання випадкової величини, другий центральний момент (дисперсію) – розсіювання випадкової величини відносно математичного сподівання, третій центральний момент слугує для характеристики асиметрії, а четвертий – для характеристики «крутості». Отже, якщо ми підберемо параметри так, щоб кілька найважливіших моментів (при вирівнюванні статистичних рядів нераціонально домагатися рівності моментів вище від четвертого, оскільки точність обчислення моментів різко знижується із зростанням їх порядку) теоретичного розподілу були однаковими щодо відповідних статистичних характеристик, то можна стверджувати, що вибраний розподіл досліджуваної випадкової величини найкраще відображає характер статистичного розподілу випадкової величини.

9.2.5. Критерії згоди

Як би добре не була підібрана теоретична крива, між нею і статистичним розподілом неминучі розбіжності. Необхідно оцінити їх, тобто вирішити, чи випадкові чинності обмеженої кількості результатів досліду цих розбіжностей або ж істотні й викликані тим, що підібрана крива погано вирівнює цей статистичний розподіл. Оцінюємо розбіжність теоретичних та статистичних кривих за допомогою так званих критеріїв згоди, наразі які використовують багато величин. Розглянемо критерій А. М. Колмогорова й критерій λ^2 Пірсона [38].

За критерієм Колмогорова за запобіжну розбіжність взята абсолютна величина максимальної різниці між значеннями статистичної функції розподілу $F^*(x)$ і відповідної теоретичної функції розподілу

$$D = \max|F^*(x_i) - F(x_i)| \tag{9.12}$$

Величину D визначаємо за графіком теоретичної та статистичної кривих (рис. 9.5). Потім визначаємо ймовірність того, що за рахунок чисто випадкових причин між $F^*(x)$ і $F(x)$ можуть відбутися розбіжності більші за D:

$$p(\lambda)=1-\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}=1-k(\lambda).$$

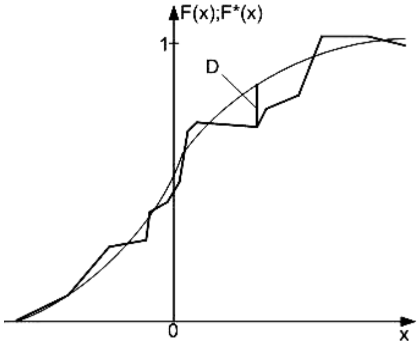

Рисунок 9.5 – Графік теоретичної та статистичної кривих

Величина $k(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2\lambda^2}$ може бути визначена за відповідною таблицею Збірника таблиць, входженням в яку слугує величина $\lambda = D\sqrt{n}$, де n – кількість спостережень у досліді. Якщо ймовірність мала, то взяту теоретичну криву варто відкинути як ту, що суперечить розподілу статистичних даних. Як бачимо з критерію Колмогорова, його можна застосовувати лише у тому разі, якщо точно відома теоретична функція $F(x)$ (не лише її вигляд, а й усі параметри). Якщо параметри теоретичного розподілу будуть визначені за статистичними даними, то критерій покаже завищене значення ймовірності, а це може призвести до того, що буде взятий розподіл, що погано узгоджується з дослідними даними [18, 38].

Критерій χ^2 вільний від зазначеного недоліку і тому став поширеним за узгодження дослідних даних. Як критерій згоди u взята сума квадратів різниць $(r_i - p_i)^2$ з деякими значеннями c_i:

$$u = \Sigma_{i=1}^{k} c_i (r_i - p_i)^2, \tag{9.13}$$

де r_i – частота появи значень випадкової величини в i-му розряді статистичного ряду;

p_i – ймовірність, відповідна до i-го розряду;

k – кількість розрядів статистичного ряду;

c_i – коефіцієнти, що відображають «вагомість» розрядів,

$$c_i = n / p_i.$$

Враховуючи, що $r_i = m_i / n$ і $c_i = n / p_i$, одержимо

$$u = \chi^2 = \Sigma^k_{i=1} n/p_i \cdot 1/n^2(m_i - np_i)^2,$$

звідси

$$u = \chi^2 = \Sigma^k_{i=1} (m_i - np_i)^2/np_i \tag{9.14}$$

або

$$u = \chi^2 = n\Sigma^k_{i=1} (r_i - p_i)^2/p_i, \tag{9.15}$$

Оцінювання теоретичного розподілу за допомогою критерію Пірсона за своїм змістом аналогічне оцінюванню за допомогою критерію Колмогорова [2]. Використовуючи досліджені дані та взяту теоретичну функцію розподілу за формулою (9.14) або (9.15) визначаємо міру розбіжності χ^2, потім імовірність того, що за рахунок чисто випадкових причин міра розбіжності буде більшою від величини, одержаної при розрахунку. Якщо ця ймовірність мала, взята теоретична крива повинна бути відкинута через те, що вона суперечить дослідженим даним. Імовірність визначаємо за спеціальною таблицею, входженнями в яку слугують розраховані міра розбіжності χ^2 і величина $r = k - s$, де k – кількість розрядів; s – кількість накладених зв'язків (кількість рівностей моментів, взятих при вирівнюванні статистичного ряду).

Приклад 4. Результати 500 вимірювань з визначення помилки у вимірюванні кута між двома точками наведені у таблиці 9.5.

Таблиця 9.5 – Результати 500 вимірювань з визначення помилки у вимірюванні кута між двома точками

Межі помилок, под. кут.	Кількість помилок у цих межах	Межі помилок, под. кут	Кількість помилок у цих межах
Від –5 до –3	9	0–1	114
Від –3 до –2	31	1–2	79
Від –2 до –1	75	2–3	36
Від –1 до 0	148	3–5	8

Перевірити відповідність нормального розподілу до одержаного розподілу помилок у досліді, використовуючи критерії χ^2 і Колмогорова.

Р о з в' я з а н н я. За теоретичний розподіл беремо нормальний розподіл, дисперсія якого D_x дорівнює статистичній дисперсії, одержаній з досліду:

$$D_x = D_x^* = \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - m_x^*\right) r_{x_i},$$

де x_i – величина помилки, відповідна до серединних меж помилок, наведених у таблиці: – 4; – 2,5; – 1,5; і т. д.;

m_x^* – середнє арифметичне з одержаних результатів:

$$m_x^* = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i r_i;$$

r_i – частоти помилок у відповідних межах.

Величину $D_x = D_x^*$ розрахуємо за допомогою таблиці 9.6.

Серединне відхилення

$$E_x^* = \rho\sqrt{2}\sqrt{D_x^*} = 0{,}674 \cdot 1{,}42 = 0{,}958, \quad E_x^* \approx 1.$$

Цю величину серединного відхилення й будемо використовувати під час розрахунку ймовірності p_i розрядів.

1. Перевіряємо узгодженість за критерієм (табл. 9.7)

$$\chi^2 = n\Sigma_{i=1}{}^{8} \cdot (r_i - p_i)^2/p_i.$$

Таблиця 9.6 – Результати розрахунків величини $D_x = D_x^*$

Розряд I_i	Середня величина помилки у розрядах x_i	Частота r_i (1/500)	$x_i r_i$ (1/500)	$x_i - m_x^*$	$(x_i - m_x^*)^2$	$(x_i - m_x^*)^2 \times$ $\times r_i$ (1/500)
Від − 5 до − 3	− 4	9	− 36	− 2,5	6,25	56
Від − 3 до − 2	− 2,5	31	− 75,5	− 2,0	4,0	124
Від − 2 до − 1	− 1,5	75	− 112,5	− 1,0	1,0	75
Від − 1 до 0	− 0,5	148	− 74	0	0	0
Від 0 до 1	0,5	114	57	+ 1,0	1,0	114
Від 1 до 2	1,5	79	118,5	+ 2,0	4,0	316
Від 2 до 3	2,5	36	90	+ 3,0	9,0	324
Від 3 до 5	4	8	32	+ 4,5	12,25	98
	$m_x^* = \Sigma\, x_i r_i = -0{,}5$, $D_x^* = 2{,}2$				$\Sigma(1 \cdot 1\ 107) / 500 = 2{,}214$	

Таблиця 9.7 – Результати узгодженості за критерієм

Розряд I_i	r_i	$p_i =$ $= F(x_{i+1}) -$ $- F(x_i)$	$r_i - p_i$	$(r_i - p_i)^2 \times$ $\times (10^{-6})$	$(r_i - p_i)^2/p_i \times$ $\times (10^{-3})$
Від −5 до −3	9 / 500 = = 0,018	0,022	− 0,004	16	0,73
Від −3 до −2	0,062	0,067	− 0,005	25	0,32
Від −2 до −1	0,150	0,161	− 0,011	121	0,75
Від −1 до 0	0,296	0,250	+ 0,046	2 106	8,40
Від 0 до 1	0,228	0,250	− 0,022	484	1,93
Від 1 до 2	0,158	0,161	− 0,003	9	0,06
Від 2 до 3	0,072	0,067	+ 0,005	25	0,32
Від 3 до 5	0,016	0,022	− 0,006	36	1,64
	$(\Sigma_{(i)} r_i = 1{,}000)$				$\Sigma_{(i)} 10^{-3} \cdot 14{,}25$

$$\chi^2 = n\Sigma_{i=1}{}^{8}\cdot(r_i - p_i)^2 / p_i = 500 \cdot 10^{-3} \cdot 14{,}25 = 7{,}1.$$

Кількість накладених зв'язків $s = 3$:

$$1)\ \Sigma_{i=1}{}^{k}\cdot r_i = 1,\quad 2)\ D_x = D_x^*,\quad 3)\ m_x = m_x^*.$$

Тоді величинами для входження в таблицю 9.8 будуть $\chi^2 = 7{,}1$ і $r = k - s = 8 - 3 = 5$.

Таблиця 9.8 – Імовірність p для критерію χ^2

χ^2 \ r	...	4	5	6	...
...	...	...	...	...	...
7	...	0,1359	0,2200	0,3208	...
8	...	0,0916	0,1562	0,2381	...
...	...	...	...	...	...

За таблицею 9.8 визначаємо ймовірність $p = 0{,}2136$.

Імовірність велика, отже, узгодженість хороша.

2. Перевіряємо узгодженість за критерієм Колмогорова [18, 38].

Для визначення ймовірності входженням у таблицю є величина

$\lambda = D\sqrt{n} = 0{,}024 \cdot \sqrt{500} = 0{,}024 \cdot 22{,}4 = 0{,}538.$

За величиною $\lambda = 0{,}538$ спеціальної таблиці [2] визначаємо величини $k(\lambda) = 0{,}0658$, $D_{\max} = 0{,}024$.

Значення функції $k(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \cdot e^{-2k^2\lambda^2}$

λ	0,28	...	0,52	0,54	...	2,46
$k(\lambda)$	0,0000	...	0,0503	0,0675	...	1,00

Тоді величина шуканої ймовірності

$$p = 1 - k(\lambda) = 0{,}9342.$$

Як бачимо з прикладу, критерій Колмогорова у разі невідомих характеристик закону розподілу досліджуваної випадкової величини (у цьому прикладі закону розподілу помилок) показує дуже завищену ступінь узгодженості [18, 38].

Таблиця 9.9 – Узгодженість за критерієм Колмогорова

Розряд I_i	r_i	Значення помилки на межі розрядів x_i	$F^*(x_i)$	$F(x_i)$	$D=\left\|F^*(x_i)-F(x_i)\right\|$
Від −5 до −3	0,018	− 5	0	0	0
Від −3 до −2	0,062	− 3	0,018	0,022	0,004
Від −2 до −1	0,148	− 2	0,080	0,089	0,009
Від −1 до 0	0,296	− 1	0,228	0,250	0,022
Від 0 до 1	0,228	0	0,524	0,500	0,024
Від 1 до 2	0,160	1	0,752	0,750	0,002
Від 2 до 3	0,072	2	0,912	0,911	0,001
Від 3 до 5	0,016	3	0,984	0,978	0,006

Такі основні питання математичної статистики і методи їх вирішення. Розглянемо конкретні завдання й практичні методи оброблення дослідних даних.

9.3. Завдання оброблення дослідних даних

У попередньому розділі були розглянуті деякі завдання математичної статистики, спрямовані головним чином на обчислення законів розподілу випадкових величин за результатами дослідів. Однак на практиці часто буває, що вид закону відомий заздалегідь, а потрібно обчислити лише деякі параметри – числові характеристики розподілу. Так, якщо відомо, що закон розподілу випадкової величини нормальний, то завдання проведення та оброблення досліду зводиться до визначення двох його параметрів m і E (або σ). Далі розглянемо методи визначення основних параметрів розподілу випадкової величини математичного сподівання m і дисперсії D (середнього квадратичного σ або серединного відхилення E), а для системи випадкових величин – коефіцієнти кореляції.

Аналітичні вирази законів розподілу випадкових величин є математичним відображенням (функцією) об'єктивних закономірностей. Ці закони виявляються в дослідах, що й обумовлює можливість визначення числових характеристик розподілу за результатами досліду. Теорема Чебишова встановлює збіжність середнього арифметичного до математичного сподівання. Однак зазвичай кількість результатів досліду буде обмеженою. Тому одержані на підставі оброблення результатів досліду числові характеристики завжди будуть містити елемент випадковості. За дуже великої кількості дослідів середнє арифметичне з великою ймовірністю буде вельми близьке до математичного сподівання. Якщо кількість дослідів невелика, то заміна математичного сподівання середнім арифметичним супроводжується випадковими помилками, що в середньому тим більші, чим менша кількість дослідів. Звідси друге завдання – оцінити точність і надійність одержаних з досліду числових характеристик закону розподілу випадкової величини.

Таким чином, можна сформулювати такі основні завдання оброблення дослідних даних.

Перше завдання – обчислити числові характеристики законів розподілу досліджуваних випадкових величин: математичні сподівання й дисперсії (середні квадратичні або серединні відхилення), а для системи випадкових величин – моменти зв'язку (коефіцієнти кореляції). Числові характеристики, обчислені за результатами досліду, будемо позначати тими самими літерами, що й «справжні» значення, але із хвилястою рискою зверху $\tilde{a}$; $\tilde{m}_x$; $\tilde{D}_x$; $\tilde{E}_x$; $\tilde{K}_{xy}$; ... .

Друге завдання – оцінити точність і надійність обчислених числових характеристик.

Розроблені методи визначення числових характеристик повинні задовольняти три очевидні вимоги:

– числові характеристики повинні бути незміщеними, тобто не повинні містити сталих похибок (систематичних помилок); ця вимога буде виконана, якщо $M(\tilde{a}) = a$;

– числові характеристики повинні бути ефективними, тобто мати найбільшу точність; ця вимога буде виконана, якщо розкид випадкових значень параметра буде мінімальним: $D(\tilde{a}) = \min$;

– обчислені з досліду числові характеристики повинні бути спроможними, тобто повинні зводитися за ймовірністю до істинного значення цього параметра:

$$\lim_{n\to\infty}[|\tilde{\alpha} - \alpha| > \varepsilon] = 0.$$

Обчислені з досліду числові характеристики, що задовольняють перелічені три вимоги, будемо називати відповідними значеннями: $\tilde{m}_x$ – відповідне значення математичного сподівання; $\tilde{D}_x$ – відповідне значення дисперсії; $\tilde{K}_{xy}$ – відповідне значення моменту зв'язку і т. д. [30].

Таким чином, завданнями оброблення дослідних даних є визначення та оцінювання точності й надійності відповідних значень числових характеристик розподілу випадкових величин. Розглянемо порядок розв'язання цих задач.

9.4. Визначення відповідного значення числової характеристики

Припустимо, що за n незалежних випробувань були одержані значення випадкової величини X: $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Потрібно обчислити відповідні значення математичного сподівання $\tilde{m}_x$ і дисперсії $\tilde{D}_x$.

За відповідне значення математичного сподівання беремо статистичне середнє

$$m_x^* = \bar{x} = \Sigma_{i=1}^{n} x_i / n.$$

Статистичне середнє задовольняє всі три вимоги, сформульовані у п. 9.3:

– воно є незсуненою характеристикою, оскільки за формулою $M(\bar{X}) = m_x$;

– воно є ефективною характеристикою і розраховується за формулою $D_{\bar{x}} = 1/n \cdot D_x$, тобто ми можемо досягти необхідної точності (можна довести, що для нормального розподілу $D_{\bar{x}} = 1/n \cdot D_x = D_{\min}$. Для інших законів розподілу величина $\bar{X}$ може бути неефективною) зростанням кількості випробувань;

– за теоремою Чебишова середнє арифметичне зводиться за ймовірністю до математичного сподівання випадкової величини.

Отже, за відповідне значення математичного сподівання варто брати середнє арифметичне з результатів випробувань: [24]

$$\tilde{m}_x = m_x^* = \bar{x} = \Sigma_{i=1}^{n} x_i / n. \qquad (9.16)$$

Перейдемо до визначення дисперсії. При розв’язанні цієї задачі математичне сподівання випадкової величини може бути відомим, а може бути і невідомим і визначатися за результатами цього досліду.

Розглянемо випадок, якщо математичне сподівання відоме.

Оскільки дисперсія є математичним сподіванням величини $(X - m_x)^2 \cdot [D_x = M(X - m_x)^2]$, то на підставі виразу (9.16) за відповідне значення цього математичного сподівання потрібно взяти середнє значення цієї випадкової величини, тобто

$$\tilde{D}_x = \tilde{\sigma}_x^2 = 1/n\, \Sigma_{i=1}^{n} (X - m_x)^2.$$

Легко показати, що ця величина задовольняє три висунуті вимоги:

– $M[\tilde{D}_x] = 1/n \cdot nD_x = D_x$, що встановлює її незміщення;

– її точність зростає зі збільшенням n, а для нормального розподілу величина $\tilde{D}_x$ абсолютно ефективна;

– за теоремою Чебишова величина $\tilde{D}_x$ зводиться за ймовірністю до свого математичного сподівання, яким є справжнє значення дисперсії.

Якщо математичне сподівання випадкової величини невідоме, то за відповідне значення можна випробувати статистичну дисперсію

$$D_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2.$$

Величина статистичної дисперсії ефективна (абсолютна для нормального розподілу) і зводиться за ймовірністю до свого математичного сподівання, але виявляється величиною зміщеною. Розрахуємо величину математичного сподівання $M\,[D_x^*]$.

Відповідно до формули (9.2) як математичне сподівання середнього арифметичного одержимо

$$M\left[D_x^*\right] = M\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 / n\right] = M\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = D\left[(X_i - \bar{X}\right].$$

Обчислимо одержану дисперсію. У цьому виразі розглянемо дисперсію суми залежних величин, оскільки до величини $\bar{x}$ входить і x_i. Перетворимо цей вираз для того, щоб мати лінійну функцію незалежних випадкових величин. Для цього з величини середнього $\bar{x}$ необхідно вилучити x_i. Тоді

$$X_i - \bar{X} = X_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = X_i - \frac{1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j = \frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j.$$

Враховуючи, що $D_{x_i} = D_{x_j} = D_x$, для дисперсії одержимо вираз

$$D\left[X_i - \bar{X}\right] = D\left[\frac{n-1}{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_j\right] =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 D_x + \frac{1}{n^2}(n-1)D_x = \frac{n-1}{n}D_x.$$

Таким чином, математичне сподівання статистичної дисперсії [24]

$$M[D_x^*] = (n-1)/n \cdot D_x.$$

Це показує, що якщо за дисперсію випадкової величини брати статистичну дисперсію, то буде допускатися систематична помилка (зміщення), що зменшує величини дисперсії у $(n-1)/n$ разів. Щоб позбутися від сталої похибки, необхідно за відповідне значення дисперсії брати величину

$$\tilde{D}_x = \frac{n}{n-1} D_x^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \tag{9.17}$$

Аналогічно цьому можна показати, що статистичний момент зв'язку для системи випадкових величин є зміщеною величиною на той самий коефіцієнт, що і статистична дисперсія. Тому за відповідне значення моменту зв'язку за невідомих математичних сподівань варто брати величину

$$\tilde{K}_{xy} = \frac{n}{n-1} K_{xy}^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \tag{9.18}$$

Переходячи до середніх квадратичних і серединних відхилень і коефіцієнтів кореляції, одержимо розрахункові формули:

– за відомих математичних сподівань

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_x^2 = 1/n \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2, \\
&\tilde{E}_x^2 = 2\rho^2 \tilde{\sigma}_x^2 = 2\rho^2 / n \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 = 0,455/n \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2, \\
&\tilde{R}_{xy} = \tilde{K}_{xy} / \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)(y_i - m_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - m_y)^2}};
\end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

– за невідомих математичних сподівань

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,\\
&\tilde{E}_x^2 = \frac{2\rho^2}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{0,455}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2,\\
&\tilde{R}_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9.20)$$

Для системи випадкових величин за нормального розподілу в подальшому можуть бути розраховані відповідні значення головних серединних (середніх квадратичних) відхилень $\tilde{E}_u$ і $\tilde{E}_v(\tilde{\sigma}_u, \tilde{\sigma}_v)$ та кут $\tilde{\alpha}$, визначальний їх напрямок у прямокутній системі координат, за формулами (7.8) і (7.9) [9].

Приклад 5. За результатами метеорологічних вимірювань для висоти траєкторії Y_i були одержані величини середнього відхилення температури від табличного значення (у градусах):

$\Delta\tau_1 = -13{,}5$, $\Delta\tau_2 = -9{,}1$, $\Delta\tau_3 = -20{,}8$,

$\Delta\tau_4 = +2{,}5$, $\Delta\tau_5 = -17{,}0$.

Визначити математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення середнього відхилення температури повітря для висоти траєкторії Y_i [22].

Р о з в' я з а н н я. Шукані величини обчисляться за формулами (9.16) і (9.20):

$$M[\Delta\tau] = \overline{\Delta}\tau = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta\tau_i; \quad \sigma^2[\Delta\tau] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta\tau_i - \overline{\Delta}\tau\right)^2.$$

Розрахунки зручно робити за допомогою таблиці 9.10.

Таблиця 9.10 – Результати розрахунку середнього квадратичного відхилення та середнього відхилення температури повітря для висоти траєкторії Y_i

$\Delta\tau_i$	$\Delta\tau_i - \overline{\Delta}\tau$	$(\Delta\tau_i - \overline{\Delta}\tau)^2$
−13,5 −9,1 −20,8 +2,9 −17,0	−2,0 +2,4 −9,3 +14,4 −5,5	4,00 5,76 86,49 207,36 30,25
$\Sigma\Delta\tau_i$ = 2,9 – 60,4 = = – 57,5	Контроль: Σ16,8 – 16,8 = 0	Σ333,86
$\overline{\Delta}\tau$ = – 57,5/5 = = – 11,5		$\sigma^2[\Delta\tau]$ = 333,86/4 = = 83,46

Відповідь: розподіл середнього відхилення температури повітря для висоти траєкторії Y_i має такі числові характеристики: $M[\Delta\tau] = -11{,}5°$, $\sigma[\Delta\tau] = 9{,}1°$.

Так розраховують та складають таблиці характеристик розподілу відхилень метеорологічних факторів від їх табличного значення (за місяць, за 3 місяці, за півроку, за рік, для певного району і т. д.).

Приклад 6. Після відстрілювання снарядів та зведення даних про точки снарядів до табличних умов були одержані такі величини дальностей до розриву x_i і відхилень у напрямку z_i (табл. 9.11).

Таблиця 9.11 – Результати розрахунків величини дальностей до розриву x_i і відхилень у напрямку z_i під час відстрілювань снарядів та зведення даних про точки снарядів до табличних умов

Номер пострілу	1	2	3	4	5	6	7
x_i, м	2 096	3 028	3 075	2 959	3 020	3 045	2 986
z_i, м	7	−4	4	−3	3	2	−2

Визначити: 1) табличну дальність і характеристики розсіювання снарядів; 2) головні серединні відхилення еліпса розсіювання снарядів.

Р о з в' я з а н н я. 1. На першому етапі розрахунку визначимо табличну дальність, характеристики розсіювання й коефіцієнт кореляції між складовими розсіювання по осях координат [формули (9.16) і (9.20)]:

$$\tilde{Д}_{\text{табл}} = \tilde{M}\,[X] = \bar{x} = 1/n\Sigma_{i=1}^{n}x_i = 3\,000 + 1/n\Sigma_{i=1}^{n}\Delta x_i;$$

$$\Delta x_i = x_i - 3\,000,$$

$$\tilde{B}\partial^{\,2} = (0{,}455/(n-1))\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$= (0{,}455/(n-1))\Sigma_{i=1}^{n}(\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2,$$

$$\overline{\Delta x} = 1/n\Sigma_{i=1}^{n}\Delta x_i,$$

$$\tilde{B}б^{\,2} = (0{,}455/(n-1))\Sigma_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2, \quad \bar{z} = 1/n\Sigma_{i=1}^{n}z_i,$$

$$\tilde{R}_{xz} = \Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2} =$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n}(\Delta x_i - \Delta x)(z_i - \bar{z})/\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i-\overline{\Delta x})^2\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2}.$$

Для спрощення розрахунків величини x_i зменшуємо на 3 000. Розрахунок проводимо за допомогою таблиці 9.12.

Використовуємо дані таблиці, обчислимо:

$$\bar{x} = 3\,000 + 1/7 \cdot 109 = 3\,015{,}6, \quad \overline{\Delta}x = 109{:}7 = 15{,}6 \approx$$

$$\approx 16 \text{ м},$$

$$\bar{z} = 1/7 \cdot 7 = 1,$$

$$\tilde{B}\partial^{\,2} = 0{,}455/(7-1) \cdot 9\,031 = 685,$$

$$\tilde{B}б^{\,2} = 0{,}455/(7-1) \cdot 100 = 7{,}59,$$

$$\tilde{R}_{xz} = 352/\sqrt{9\,030 \cdot 100} = 0{,}335.$$

Відповідь: 1) таблична дальність $Д_{\text{табл}}$ = 3 016 м; 2) серединні відхилення, що характеризують розсіювання снарядів: за дальністю, $B\partial$ = 26 м; у напрямку $Bб$ = 2,8 м.

Таблиця 9.12 – Результати розрахунків табличної дальності і характеристик розсіювання снарядів

$\Delta\, x_i$	z_i	$\Delta\, x_i - \overline{\Delta} x$	$z_i - \overline{z}$	$(\Delta\, x_i - \overline{\Delta} x)^2$	$(z_i - \overline{z})^2$	$(\Delta\, x_i - \overline{\Delta} x) \times (z_i - \overline{z})$
− 4	+ 7	− 20	+ 6	400	36	− 120
28	− 4	+ 12	− 5	144	25	− 60
75	4	59	3	3 481	9	+ 177
− 41	− 3	− 57	− 4	3 249	16	228
20	3	4	2	16	4	8
45	2	29	1	841	1	29
− 14	− 2	− 30	− 3	900	9	90
		Контроль				
Σ=168 – – 59 = = 109	Σ = 16 – – 9 = 7	Σ = 104 – – 107= – 3,0	Σ = 12–12 = = 0	Σ = 9 031	Σ = 100	Σ = 532 – 180 = = 352

Примітка. $\Sigma\ (\Delta\, x_i - \overline{\Delta}\ x) = -3$, а не нулю внаслідок округлення $\overline{\Delta}\ x = 15{,}6 \approx 16$.

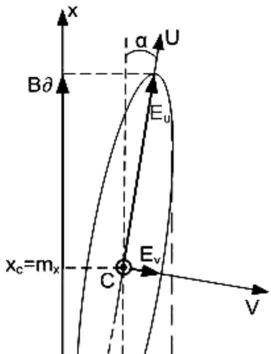

Рисунок 9.6 – Центр розсіювання x_c і z_c

2. Відповідні значення головних серединних відхилень обчислимо за формулами:

$m_x = x$; $m_z = \bar{z}$, $tg2\alpha = 2\,\tilde{R}_{xz}\cdot\tilde{B}\partial\cdot\tilde{B}б \;/\; \tilde{B}\partial^2 - \tilde{B}б^2$,

$$\tilde{E}_u^2 = \tilde{B}\,\partial^2\cos^2\tilde{\alpha} + \tilde{B}\,б^2\sin^2\tilde{\alpha} + \tilde{R}_{xz}\cdot\tilde{B}\partial\cdot\tilde{B}б\cdot\sin2\tilde{\alpha},$$

$$\tilde{E}_v^2 = \tilde{B}\,\partial^2\sin^2\tilde{\alpha} + \tilde{B}\,б^2\cos^2\tilde{\alpha} - \tilde{R}_{xz}\cdot\tilde{B}\partial\cdot\tilde{B}б\cdot\sin2\tilde{\alpha}.$$

У нашому випадку

$$m_x = 3\,016 \text{ м}; \quad m_z = 1 \text{ м},$$

$$tg2\alpha = 2\cdot0{,}335\cdot26\cdot2{,}8 \,/\, (685 - 7{,}59) = 0{,}0720,$$

звідси

$$2\alpha = 4°09', \quad \alpha = 2°04',$$

$\cos\alpha = \cos 2°04' = 0{,}9993$; $\cos^2\alpha = 0{,}998$, $\sin^2\alpha = 0{,}002$;

$$\sin2\alpha = 0{,}0723.$$

Остаточно маємо

$E_u^2 = 685\cdot0{,}998 + 7{,}59\cdot0{,}002 + 0{,}335\cdot26\cdot2{,}8\cdot0{,}0720 = 685$,

$E_v^2 = 685\cdot0{,}002 + 7{,}59\cdot0{,}998 - 0{,}335\cdot26\cdot2{,}8\cdot0{,}0720 = 7{,}18$.

Відповідь (рис. 9.6): 1) центр розсіювання $x_c = m_x = 3\,016$ м, $z_c = m_z = 1$ м; 2) головні серединні відхилення $E_u = 26$ м, $E_v = 2{,}7$ м; 3) напрямок головних осей розсіювання $\widehat{XU}$ визначається кутом $\alpha = 2°04'$.

На завершення зазначимо, що в артилерії внаслідок малої величини кута α їм нехтують і вважають, що головні осі розсіювання збігаються з напрямом стрільби і перпендикулярні до нього, а головними серединними відхиленнями є *Вд* і *Вб*.

9.5. Оцінювання точності та надійності визначення числових характеристик за результатами досліду

Оцінювання точності та надійності визначення параметра закону розподілу за результатами досвіду зводиться до розв'язання ймовірнісного рівняння

$$p\,(|\tilde{\alpha} - \alpha| < \varepsilon) = \alpha, \qquad (9.21)$$

де характеристики оцінювання маємо ε – довірчий інтервал; α – довірча ймовірність.

Під час оцінювання задаються однією з цих характеристик і визначають значення іншої. Наприклад, завдання сформулюється так: визначити довірчий інтервал для математичного сподівання за довірчої ймовірності 90 % або з імовірністю 90 % обчислити максимальну помилку у визначенні математичного сподівання: [34]

$$p\,(|\tilde{m}-m|<\varepsilon)=\alpha=\int_{m-\varepsilon}^{m+\varepsilon} f\,(\tilde{m})\,d\tilde{m}$$

або

$$p\,(|\delta_m|<\varepsilon)=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f\,(\delta_m)\,d(\delta_m).$$

9.5.1. Оцінювання математичного сподівання

Математичне сподівання визначається як середнє арифметичне з результатів досліду. Якщо відомо, що серединне (середнє квадратичне) відхилення випадкової величини X підпорядковується нормальному закону розподілу, то серединне відхилення, що характеризує розподіл випадкових значень $\tilde{m}_x = \tilde{x}$, на підставі формули (9.3) буде

$$E_{\tilde{m}_x} = E_{\bar{x}} = E_x\,/\,\sqrt{n}\,, \tag{9.22}$$

аналогічно йому

$$\sigma_{\tilde{m}_x} = \sigma_x\,/\,\sqrt{n}\,.$$

У цьому випадку завдання з оцінювання математичного сподівання зводиться до визначення ймовірності попадання випадкової величини $\tilde{m} = \bar{x}$, підпорядкованої нормальному закону з $E_{\tilde{m}_x}$, у заданий інтервал. Це завдання може бути розв’язане за допомогою таблиці Φ (x) або Φ (y), якщо задано σ_x [35].

Приклад 7. Випадкова величина X має нормальний розподіл із E_x = 20 м. Математичне сподівання визначається за чотирма результатами досліду. Визначити: 1) довірчий інтервал для математичного сподівання, що відповідає довірчій ймовірності 80 % (або, що те саме, максимальну величину помилки $\delta_{\max}\, m_x$ із надійністю 80 %); 2) довірчу ймовірність для довірчого інтервалу у визначенні математичного сподівання ± 30 м (або надійність, або ймовірність того, що помилка у визначенні математичного сподівання не перевищить 30 м).

Р о з в' я з а н н я. Відповіді знайдемо за допомогою таблиці Ф (x), розв'язуючи рівняння

$$p\,(|\tilde{m} - m_x| < \varepsilon) = \alpha = \Phi\,(\varepsilon \,/\, E_{\bar{x}}),$$

де

$$E_{\bar{x}} = E_x/\sqrt{n} = 20/\sqrt{n} = 20/\sqrt{4} = 10 \text{ м}.$$

1. За α = 80 % (табл. А. 1) Ф (x) визначаємо:

$$x = \varepsilon \,/\, E_{\bar{x}} = 1{,}90,$$

розраховуємо

$$\varepsilon = x\,E_{\bar{x}} = 1{,}9 \cdot 10 = 19 \text{ м}.$$

Відповідь: $p\,(|\tilde{m}_x - m_x| < 19) = p\,(|\delta m_x| < 19) = 80$ %, або $\tilde{m}_x - 19 < m_x < \tilde{m}_x + 19$ м із надійністю 80 %.

2. За величиною $x = \varepsilon / E_{\bar{x}} = 30/10 = 3$ входимо в таблицю А. 1 й визначаємо:

$$\Phi\,(x = 3) = 0{,}95698.$$

Відповідь: $p\,(|\tilde{m}_x - m_x| < 30) = p\,(|\delta m_x| < 30) = 95{,}7$ %, або $\tilde{m}_x - 30 < m_x < \tilde{m}_x + 30$ м із надійністю 95,7 %.

Таким чином, оцінювання знайденого з досліду математичного сподівання при відомому серединному (середньому квадратичному) відхиленні випадкової величини зводиться до задачі із визначення ймовірності потрапляння випадкової величини на задану ділянку, симетричну щодо математичного сподівання.

Якщо серединне відхилення невідоме і визначається за результатами того самого досліду, то застосовувати розглянутий прийом можна за досить великого числа результатів досліду: $n > 20 - 30$. За меншої кількості дослідів використання при оцінюванні математичного сподівання серединного відхилення

$$E_{\bar{x}} = \bar{E}_x / \sqrt{n}$$

призведе до завищення результатів оцінювання.

Якщо серединне відхилення випадкової величини невідоме, то для оцінювання визначається з досліду математичного сподівання нормального розподілу використовується закон розподілу Стьюдента.

Цей розподіл дозволяє абсолютно точно за будь-якої кількості вимірювань $n \geq 2$ вирішити питання про ймовірність нерівності

$$p\,(|m^* - m| < \varepsilon) = \alpha \tag{9.23}$$

Розподіл Стьюдента $S_k\,(t)$ відображає закон розподілу випадкової величини T – ухилення статистичного середнього від математичного сподівання вимірюваної величини, вираженого в одиницях відповідного значення середнього квадратичного відхилення статистичного середнього, тобто [18]

$$T = (m^*{}_x - m_x)/\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = (\bar{x} - m_x)/\tilde{\sigma}_{\bar{x}}, \tag{9.24}$$

де

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\tilde{\sigma}_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}\,. \tag{9.25}$$

Закон розподілу Стьюдента має вигляд [1]

$$S_k(t) = \frac{\Gamma(k+1)/2}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(k/2)}(1 + t^2/k)^{-(k+1)/2}, \tag{9.26}$$

де $k = n - 1$, а n – число вимірювань;

$\Gamma\,(x)$ – гамма-функція, аналітичний вираз якої має вигляд

$$\Gamma\,(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

На рисунку 9.7 зображені криві розподілу Стьюдента (суцільна лінія) і нормального розподілу (пунктирна лінія) за невеликого значення n.

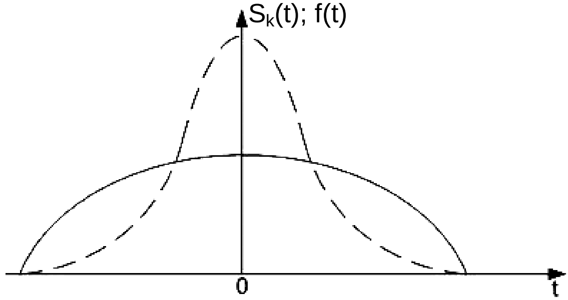

Рисунок 9.7 – Зображення кривих розподілу Стьюдента (суцільна лінія) і нормального розподілу (пунктирна лінія)

Згідно нормальному розподілу більші відхилення малоймовірні, а тому за малої кількості вимірювань вони можуть не робити свого впливу на результат досліду, і ми можемо одержати завищені значення середнього квадратичного відхилення, розрахованого за формулою (9.20). А це призведе до завищення оцінювання математичного сподівання, якщо його проводити за нормальним законом. Як бачимо із зіставлення кривих розподілу, порівняно з нормальним законом $f(t)$ розподіл Стьюдента $S_k(t)$ зближується з нормальним. Практично обидва розподіли збігаються за $n = 20 – 30$.

Із виразів (9.24)–(9.26) бачимо, що розподіл Стьюдента не залежить від істинного значення характеристики розсіювання випадкової величини σ_x або E_x. Розподіл Стьюдента пов'язує щільність імовірності $S_k(t)$ з величинами

$$k = n - 1 \quad \text{і} \quad t = (\bar{x} - m_x) \cdot \sqrt{n}/\tilde{\sigma}_x = \varepsilon_m \sqrt{n}/\tilde{\sigma}_x = \varepsilon_m / \sigma_{\bar{x}}.$$

Отже, за заданого довірчого інтервалу $\pm\varepsilon$ задача з визначення довірчої ймовірності α і може бути розв'язана таким чином:

$$p\left(|T| < t_\alpha\right) = \int_{-t_\alpha}^{+t_\alpha} S_k(t)\,dt = 2\int_0^{t_\alpha} S_k(t)\,dt.$$

Враховуючи співвідношення (9.5.4), одержимо

$$p\,(|\,\bar{x}-m_x\,|\,\angle t_\alpha\sigma_{\bar{x}}) = 2\int_0^{t_\alpha} S_k\,(t)\,dt = \alpha. \qquad (9.27)$$

Рівняння (9.27) щодо визначення довірчої ймовірності α за заданого інтервалу $\varepsilon_m = t_\alpha\sigma_{\bar{x}}$ або за визначенням довірчого інтервалу ε_m за заданої надійності α розв'язується за допомогою таблиці значень t_α, вміщеній у збірнику таблиць, що пов'язує три величини: n – число вимірювань (у таблицю входить величина $k = n - 1$); α – величину довірчої ймовірності; ε_m – величину заданого (запланованого) довірчого інтервалу (в таблиці $t_\alpha = \varepsilon_m/\sigma_{\bar{x}}$) [35].

Приклад 8. У результаті досліду одержані такі значення випадкової величини в метрах: 2 630, 2 580, 2 560, 2 590. Визначити: 1) математичне сподівання випадкової величини; 2) з імовірністю 70 % максимальну величину помилки у визначенні математичного сподівання; 3) імовірність того, що помилка у визначенні математичного сподівання не перевищить 1 % її величини.

Р о з в' я з а н н я. Розрахунковими формулами будуть:

– математичне сподівання

$$m_x \cong \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2600 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i;$$

– максимальна величина помилки

$$\delta_{\max} m_x = \varepsilon_m = t_\alpha \sigma_{\bar{x}},$$

де t_α знайдемо за таблицею А. 8 для розподілу Стьюдента $t_\alpha = \varphi$ (α = 0,70 і $k = n - 1$);

– середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x_i - \Delta\bar{x}\right)^2};$$

– шукана ймовірність за п. 3 знаходимо за таблицею А. 8 для розподілу Стьюдента:

$$\alpha = \varphi\,(k = n - 1 \quad \text{і} \quad t_\alpha = 0{,}01\cdot m/\sigma_{\bar{x}}).$$

1. Розраховуємо математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення (табл. 9.13).

Таблиця 9.13 – Результати розрахунків математичного сподівання й середнього квадратичного відхилення

Δx_i	$\Delta x_i - \overline{\Delta x}$	$(\Delta x_i - \overline{\Delta x})^2$
+30	+40	1600
−20	−10	100
−40	−30	900
−10	0	0
Σ = 30 – 70 = –40 $\overline{\Delta x}$ = 1/4(–40) = –10	Контроль: Σ = +40 – 40 = 0	Σ = 2 600

$$m_x = 2\,600 + \overline{\Delta x} = 2\,600 - 10 = 2\,590 \text{ м.}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{1/4 \cdot 3} \cdot 2\,600 = 14{,}7 \text{ м.}$$

2. Розраховуємо максимальну величину помилки, використовуючи таблицю А. 8 значення t_α для $\alpha = 2\int_0^{t_\alpha} S_k(t)\,\partial t.$

Таблиця 9.14 – Результати розрахунків максимальної величини помилки

α / $k = n - 1$	0,1	…	0,7	0,8	0,9	…
1	0,134	…	1,963	3,078	6,314	…
2	…	…	1,336	1,886	2,920	…
3	$t_\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\sigma_{\bar{x}}}$	…	1,250	1,638	2,353	…
4	0,134	…	1,190	1,533	2,132	…
…	…	…	…	…	…	…

Для $\alpha = 0{,}70$ і $k = 3$ знаходимо $t_\alpha = 1{,}250$. Тоді

$$\delta_{\max} m_x = \varepsilon_m = t_\alpha \sigma_{\bar{x}} = 1,25 \cdot 14,7 = 18,4 \text{ м}.$$

3. Шукана ймовірність за п. 3:

$$\left.\begin{aligned} & t_\alpha = \frac{\varepsilon_m}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0,01 \cdot 2590}{14,7} = 1,76 \\ & k = 3 \end{aligned}\right\} \quad \text{за таблицею А. 8}$$

$\alpha = 0,817$.

Відповіді: 1) $m_x \approx \bar{x} = 2\,590$ м;

2) p ($|\delta m_x|$) < 18,4) = 70 %. 3) p ($|\delta m_x|$) < 1 %m_x) = 81,7 %.

9.5.2. Оцінювання середнього квадратичного і серединного відхилень

Як і розв'язання попередньої задачі, ймовірнісне оцінювання середнього квадратичного відхилення за малого числа вимірювань проводиться за допомогою спеціального розподілу, за яким складено таблиці довірчої ймовірності $\alpha = L_k(q)$, де $q = \varepsilon_\sigma / \tilde{\sigma}_x$ є граничною величиною помилки ($\pm\varepsilon_\sigma$) у визначенні відповідного значення середнього квадратичного відхилення $k = n - 1$, де n – кількість вимірювань.

Для розв'язання задачі з імовірнісного оцінювання визначення відповідного значення середнього квадратичного відхилення складена таблиця, вміщена в збірнику таблиць, що пов'язує: n – кількість вимірювань (у таблицю входить величина $k = n - 1$); ε_σ – величину заданого (запланованого) довірчого інтервалу (у таблиці А. 9 $q = \varepsilon_\sigma / \tilde{\sigma}_x$); α – величину довірчої ймовірності [27].

Таким чином, розподіл $L_k(q)$ і таблиця ймовірностей із цього розподілу. $\alpha(q, k)$ дозволяють вирішити два завдання за ймовірнісним оцінюванням середнього квадратичного відхилення: 1) за необхідною величиною довірчого інтервалу ε_σ (необхідною точністю $\delta_{\max} \cdot \sigma_x = \varepsilon_\sigma$), можна за даною кількістю вимірювань n визначити довірчу ймовірність α; 2) за заданою величиною довірчої ймовірності α

визначити довірчий інтервал ε_σ.

За допомогою таблиці $L_k\,(q)$ може бути оцінене і відповідне значення серединного відхилення. Для цього при розрахунку q величину помилки ε_E необхідно нормувати в одиницях відповідного значення серединного відхилення $\widetilde{E}_x$, тобто знайти величину $q_E = \varepsilon_E / \widetilde{E}_x$.

Приклад 9. Із досліду при $n = 5$ визначено серединне відхилення випадкової величини кута $E_\beta = 23$ тис. Визначити: 1) довірчу ймовірність для довірчого інтервалу $\varepsilon_E = 10$ тис; 2) довірчий інтервал ε_E за довірчої ймовірності 90 %.

Р о з в' я з а н н я. Шукані величини будемо визначати з використанням таблиці для розподілу $L_k\,(q)$ (табл. 9.15).

Таблиця 9.15 – Таблиця значень $L_k\,(q)$ залежно від $k = n - 1$

<table>
<tr><th>q / $k = n - 1$</th><th>...</th><th>0,40</th><th>0,50</th><th>...</th><th>0,90</th><th>1,00</th><th>...</th></tr>
<tr><td>3</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="2">$L_k(q) = 0{,}703$</td><td>0,774</td><td>...</td><td>0,893</td><td>0,910</td><td>...</td></tr>
<tr><td>5</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td><td>...</td></tr>
</table>

Довірча ймовірність

$$\alpha = L\,(q = \varepsilon_E / E_\beta;\;\; k = n - 1),$$

де $\varepsilon_E = 10$, $E_\beta = 23$, $n = 5$.

Довірчий інтервал

$$\varepsilon_E = q_E \cdot E_\beta,$$

де $q = \varphi[\alpha = L_k\,(q);\, k = n - 1]$ а $\alpha = 90$ % (за табл. А. 10).

1. Довірча ймовірність $L_k\,(q) = 0{,}728$, так як

$$q_E = 10/23 = 0{,}435 \quad \text{і} \quad k = 5 - 1 = 4.$$

2. $q_E = 0{,}4$, так як

$$k = 4 \;\text{ і }\; \alpha = L_k\,(q) = 0{,}90.$$

Отже, довірчий інтервал

$$\varepsilon_E = 0{,}941 \cdot 23 = 21{,}64 \text{ тис.}$$

Відповідь: 1) $\alpha = p\,(|\tilde{E} - E| < 10$ тис.$) = 72{,}8$ %;

2) $p\,(|\tilde{E}_\beta - E_\beta| < 21{,}6$ тис.$) = 90$ %.

9.5.3. Наближене оцінювання числових характеристик

Раніше були розібрані методи точного оцінювання числових характеристик, знайдених за результатами досліду. Якщо є таблиці, складені з розподілу Стьюдента, і таблиці значень функції $L_k\,(q)$, то таке оцінювання не викликає труднощів. Якщо ці таблиці відсутні, то за нормального закону розподілу випадкової величини X, знайдені з досліду числові характеристики, можна оцінити за допомогою таблиці (наприклад, за допомогою шкали $\Phi\,(x)$ артилерійської логарифмічної лінійки), функції Лапласа (зведеної функції Лапласа), вважаючи, що:

– випадкові помилки визначення математичного сподівання підлягають нормальному закону з характеристиками, обумовленими формулами (9.25) і (9.20):

$$\sigma^2_{\tilde{m}} = \sigma^2_{\bar{x}} = 1/n\tilde{\sigma}^2_x = 1/n(n-1)\Sigma_{i=1}{}^n(x_i - \bar{x})^2,$$

або

$$E^2_{m\tilde{x}} = E^2_{\bar{x}} = 1/n\cdot\tilde{E}^2_x = [2\rho^2/n\,(n-1)]\Sigma_{i=1}{}^n(x_i - \bar{x})^2; \quad (9.28)$$

– випадкові помилки визначення середнього квадратичного відхилення підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma^2[\delta\sigma] = [1/2\,(n-1)]\cdot\tilde{\sigma}^2, \quad (9.29)$$

а для серединного відхилення

$$E^2[\delta E] = [\rho^2/(n-1)]\cdot\tilde{E}^2. \quad (9.30)$$

Як ми зазначали вище, за кількості вимірювань $n \geq 20$–30 наближене оцінювання практично не відрізняється від точного.

Приклад 10. За результатами досліду за $n = 7$ були визначені $m_x = 100$ м і $E_x = 10$ м. Оцінити знайдені величини точним і наближеним способами і визначити: 1) довірчий інтервал за довірчої ймовірності 90 %; 2) довірчу ймовірність для довірчого інтервалу в 10 % знайдених величин.

Р о з в’ я з а н н я. 1. Виявляємо оцінювання математичного сподівання:

– точним методом (п. 2):

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0{,}95 \\ k &= n-1=6 \end{aligned}\right\}$$ за табл. А. 9 одержуємо t_α = 2,447;

довірчий інтервал дорівнює

$\varepsilon_1 (m) = t_\alpha \sigma_{\bar{x}} = t_\alpha (1/\rho\sqrt{2}\sqrt{n}) \cdot E_x = 2{,}447 \cdot (1/0{,}647\sqrt{7}) \cdot$ $\cdot\, 10 = 13{,}7$ м;

– наближеним методом:

$$p\,(|\tilde{m}_x - m| < \varepsilon_2) = 0{,}95 = \Phi\,[\varepsilon_2(m)/E_{\bar{x}}].$$

За табл. А. 1 для $\Phi\,(x) = 0{,}95$ знаходимо $\varepsilon_E/E_{\bar{x}} = 2{,}96$. Тоді

$$\varepsilon_2\,(m) = 2{,}96 \cdot E_{\bar{x}} = 2{,}96 \cdot E_x/\sqrt{n} = 2{,}96 \cdot 10/\sqrt{7} = 11{,}2 \text{ м}.$$

Знаходимо довірчу ймовірність для ε_m = 10 % m:

– точним методом (п. 3):

$$\left.\begin{aligned} t_\alpha &= \frac{\varepsilon_m}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0{,}10\cdot 100}{5{,}62} = 1{,}78 \\ k &= 6 \end{aligned}\right\}$$ за табл. А. 9 $\alpha_1 = 0{,}868 =$ $= 86{,}8$ %;

– наближеним методом:

$\alpha_2 = \Phi\,(\varepsilon_m/E_{\bar{x}}) = \Phi\,(0{,}10 \cdot 100/3{,}78) = \Phi\,(2{,}65) =$ $0{,}92613 = 92{,}6$ %.

2. Зробимо оцінювання серединного відхилення.

Знаходимо довірчий інтервал для α = 0,95:

– точним методом (п. 2):

$$\left.\begin{aligned} k &= 6 \\ \alpha &= L_k(q) = 0{,}95 \end{aligned}\right\}$$ за табл. А. 9 q_E = 0,915;

довірчий інтервал дорівнює

$$\varepsilon_1\,(E) = q_E E_x = 0{,}915 \cdot 10 = 9{,}15 \text{ м};$$

– наближеним методом:

$$p\,(|\tilde{E}_x - E_x| < \varepsilon_2) = 0{,}95 = \Phi\{\varepsilon_2(E)/E[\delta E]\},$$

де

$$E\,[\delta E] = \rho \cdot E_x/\sqrt{n-1} = 0{,}477 \cdot 10/\sqrt{6} = 1{,}94 \text{ м.}$$

За таблицею А. 1 для $\Phi\,(x) = 0{,}95$ знаходимо $\varepsilon_2/E[\delta E] = 2{,}96$.

Тоді

$$\varepsilon_2\,(E) = 2{,}96E\,[\delta E] = 2{,}96 \cdot 1{,}94 = 5{,}74 \text{ м.}$$

Знаходимо довірчу ймовірність для $\varepsilon_E = 10\ \%\ E_x$:

$$\left.\begin{aligned} q &= \varepsilon_1(E)/E_x = 0{,}10 \\ k &= 6 \end{aligned}\right\} \text{за табл. А. 10}$$

$\alpha_1 = L_k\,(q) = 0{,}264 = 26{,}4\ \%$;

– наближеним методом:

$\alpha_2 = \Phi\ (\varepsilon_2(E)/E[\delta E]) = \Phi\ (0{,}1 \cdot 10/1{,}94) = \Phi\ (0{,}516) = 0{,}27219 = 27{,}2\ \%$.

Із відповідей бачимо, що наближений метод завищує оцінювання точності й надійності знайдених із досліду числових характеристик.

Відповіді:

	Точним методом	Наближеним методом
1. Оцінювання математичного сподівання:		
– довірчий інтервал за $\alpha = 0{,}95$	$\varepsilon_1(m) = 13{,}7$ м	$\varepsilon_2(m) = 11{,}2$ м
– довірча ймовірність для $\varepsilon_m = 0{,}1m$	$\alpha_1(m) = 86{,}8\ \%$	$\alpha_2(m) = 92{,}6\ \%$
2. Оцінювання серединного відхилення:		
– довірчий інтервал за $\alpha = 0{,}95$	$\varepsilon_1(E) = 9{,}15$ м	$\varepsilon_2(E) = 5{,}74$ м
– довірча ймовірність для $\varepsilon_E = 0{,}1E$	$\alpha_1(E) = 26{,}4\ \%$	$\alpha_2(E) = 27{,}2\ \%$

За наближеним оцінюванням довірчі інтервали, що характеризують точність, менші ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$), а довірчі ймовірності, що характеризують надійність, більші ($\alpha_2 < \alpha_1$). Якщо цей приклад розв'язати за $n = 30$, то одержимо такі відповіді: а) під час оцінювання математичного сподівання [22]

$\varepsilon_1(m) = 5{,}5$ м, а $\varepsilon_2(m) = 5{,}4$ м і $\alpha_1(m) \approx \alpha_2(m) = 99{,}98$ %;

б) під час оцінювання серединного відхилення $\varepsilon_1(E) = 2{,}79$ м, а $\varepsilon_2(E) = 2{,}62$ м і $\alpha_1(E) = 55{,}1$ %, а $\alpha_2(E) = 55{,}4$ %.

9.5.4. Оцінювання числових характеристик системи двох випадкових величин

Знайдені з досліду числові характеристики випадкових величин, що утворюють систему (X, Y), $\tilde{m}_x$, $\tilde{E}_x(\tilde{\sigma}_x)$ і $\tilde{m}_y$, $\tilde{E}_y(\tilde{\sigma}_y)$, оцінюються за загальними правилами розглянутими методами. Знайдена величина коефіцієнта кореляції $\tilde{R}_{xy}$ (моменту зв'язку $\tilde{K}_{xy}$) не оцінюється.

Основні серединні відхилення точним методом оцінювати не має сенсу, так як за невеликої кількості результатів досліду значення кута $\tilde{\alpha}$, одержане обробленням, значною мірою випадкове.

Наближено оцінювати основні серединні відхилення можна з використанням серединних (середніх квадратичних) помилок, що визначаються за формулами (9.29) і (9.30). Кут $\tilde{\alpha}$ можна приблизно оцінити з використанням серединної помилки [24]

$$E\,[\delta\alpha] = E_\alpha = (\rho\sqrt{2}/\sqrt{n-1}) \cdot (\tilde{E}_u\,\tilde{E}_v/|E_u^2 - E_v^2|)\ \text{рад}, \quad (9.31)$$

де $\tilde{E}_u$ і $\tilde{E}_v$ – відповідні значення основних серединних відхилень.

Для умов прикладу 6 п. 9.4 серединна помилка, що характеризує точність розрахунку кута α, дорівнює

$$E\,[\delta\alpha] = (\rho\sqrt{2}/\sqrt{n-1}) \cdot (\tilde{B}\partial\,\tilde{B}б/(B\partial^2 - Bб^2) = (0{,}674/\sqrt{7-1}) \times$$
$$\times\, (26{,}2 \cdot 2{,}68/(685 - 7{,}18)) = 0{,}0285\ \text{рад} = 1°38'.$$

Таким чином, $E\,[\delta\alpha] = 1°38' \approx 79$ % α.

Помилки у визначенні кута α за малої кількості результатів досліду можуть досягати значних величин. Тому визначати основні серединні відхилення має сенс лише тоді, коли кількість результатів досліду досить велике (близько багатьох десятків) або напрямок основних осей розсіювання (хоча б орієнтовно) відомо заздалегідь. Так, під час оброблення стрільб беруть, що одна з основних осей розсіювання збігається з напрямком стрільби.

9.6. Поняття про вилучення анормальних результатів

Під час оброблення одержаних у досліді даних іноді доводиться стикатися з тим, що частина їх значно відрізняється від основної кількості одержаних результатів.

Ми відзначали, що результати досліду є випадковими величинами, через це кожен результат дає величину, відмінну від інших. Але ці відмінності повинні носити випадковий характер, тобто їх розподіл повинен підлягати закону $f\,(x_i - m_x)$. Якщо серед результатів трапляються такі, що сильно відрізняються від усієї групи, то природно з'являється сумнів у випадковому характері цього результату; виникає підозра, що одержаний результат – наслідок грубого прорахунку або короткочасної зовнішньої зміни умов досліду. І якщо буде встановлено, що «сумнівний» результат досліду носить невипадковий характер, то він повинен бути виключений з оброблення як анормальний [20].

Облік або неврахування «сумнівного» спостереження може сильно позначитися на результатах оброблення спостережень. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 11. У результаті відстрілювання нової гармати на одних і тих самих установках одержуємо такі дальності (у порядку зростання): 8 200, 8 210, 8 220, 8 220, 8 245, 8 275, 8 310, 8 600 м. Результат 8 600 м значно відрізняється від інших і з цієї точки зору видається «сумнівним». Облік та неврахування дальності 8 600 м сильно змінює результат оброблення стрільб. Так, при обліку результату 8 600 м:

($\overline{x}$ = 8 285 м), $Bд$ = 89 м, σ_x = 132 м;

при виключенні з оброблення цього результату

($\overline{x}$ = 8 240 м), $Bд$ = 27 м, σ_x = 40 м.

Як бачимо, результати сильно відрізняються один від одного.

Завдання полягатиме в тому, щоб встановити правила визначення анормальних результатів з одержаного ряду результатів досліду.

Під час дослідження певної випадкової величини завжди можна встановити межі практично можливих помилок. Імовірність появи помилок більше встановлених меж мала, і можна вважати, що одержання їх у цій серії вимірювань є подією практично неможливою.

У більшості випадків у артилерійській практиці вважають невипадковими і виключають як анормальні ті результати, щодо яких імовірність одержання більших або однакових їм результатів становить 0,01 або 0,001. Отже, необхідно розв’язати співвідношення

$$p\ [|x_i - \overline{x}\ | \geq \varepsilon] = 0{,}01\ (\text{або } 0{,}001),$$

з якого визначається гранична величина відхилення від середнього ε. Якщо відхилення «сумнівного» результату від середнього з досліду буде більше ε, то з імовірністю 0,99 (0,999) можна стверджувати, що результат цього вимірювання не випадковий і повинен бути виключений з оброблення як анормальний.

Для практичного вирішення питання про оцінювання анормальних результатів вимірювань складена таблиця 9.16.

Таблиця 9.16 – Результати оцінювання анормальних результатів вимірювань (витяг із табл. $t_\beta = \varepsilon / E_{x\,(n-1)}$)

<table>
<tr><th>α
n</th><th>0,10</th><th>0,05</th><th>0,025</th><th>0,01</th></tr>
<tr><td>3</td><td>16,8</td><td>32,3</td><td>105</td><td>105</td></tr>
<tr><td>4</td><td>7,35</td><td>10,7</td><td>15,0</td><td>23,6</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4,71</td><td>5,58</td><td>6,52</td><td>7,89</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td><td rowspan="2" colspan="2">$t_\beta = \varepsilon / E_{x\,(n-1)}$</td><td>…</td></tr>
<tr><td>23</td><td>4,39</td><td>5,88</td></tr>
<tr><td>24</td><td>4,39</td><td>4,84</td><td>5,28</td><td>5,86</td></tr>
<tr><td>25</td><td>4,39</td><td>4,84</td><td>5,27</td><td>5,84</td></tr>
</table>

За цією таблицею можна визначити найбільші можливі відхилення окремих результатів вимірювань t_β від середнього, що відповідають певній ймовірності α:

$$p\,[(x_n - \bar{x}_{n-1}) / \widetilde{E}_{x(n-1)} > t_\beta] = \alpha,$$

де x_n – сумнівний результат вимірювання;

$\bar{x}_{n-1}$ – середнє з результатів вимірювань без урахування x_n;

$\widetilde{E}_{x(n-1)}$ – підходяще значення серединного відхилення без урахування x_n;

$t_\beta = \varepsilon / E_{x(n-1)}$ – величина найбільшого можливого відхилення, нормована в серединних відхиленнях;

α – імовірність появи відхилень, більших t_β (імовірність того, що результат x_n не анормальний);

n – кількість вимірювань у групі разом із сумнівними результатами вимірювання.

Таблиці для оцінювання анормальних результатів наведені у додатку А. Покажемо на прикладах, як ними користуватися.

Приклад 12. В умовах прикладу 11 вирішимо питання, чи є результат 8 600 м анормальним?

Р о з в’ я з а н н я. У досліді ми одержали такі дальності: 8 200, 8 210, 8 220, 8 220, 8 245, 8 275, 8 310, 8 600 м.

1. Визначаємо середню дальність без урахування результату 8 600 м:

$$\bar{x}_{(n-1)} = 8\,250 + (-50-40-30-30-5+2+60)/7 = 8\,240 \text{ м.}$$

2. Визначаємо серединне відхилення без урахування результату 8 600 м:

$$E_{x\,(n-1)} = 27 \text{ м.}$$

3. Визначаємо відхилення сумнівного результату від середнього, виражене в серединних відхиленнях:

$$t_\beta = (x_n - \bar{x}_{n-1})/E_{x\,(n-1)} = (8\,600 - 8\,240)/27 = 13{,}33.$$

4. За таблицею 9.16. визначаємо, що для числа вимірювань $n = 8$ імовірність того, що результат $x_i = 8\,600$ м не анормальний, значно менше ніж 0,01 (для $n = 8$ і $\alpha = 0{,}01$: : $t_\beta = 7{,}89$). Отже, результат вимірювання 8 600 м анормальний.

Є аналогічні таблиці для оцінювання анормальних результатів, коли серединне відхилення випадкової величини відоме із досліду (див. збірник таблиць).

9.7. Оброблення результатів вимірювань

9.7.1. Завдання оброблення й загальні методи їх вирішення

Основним завданням у практичній роботі є визначення різних величин вимірюваннями. Однак вимірювання, як би ретельно вони не проводились, будуть супроводжуватися помилками, і кожне значення результату вимірювань буде не істинним, а лише наближеним. Найчастіше це пояснюється неточністю методу вимірювання (крім помилок, що супроводжують вимірювання, на точність вимірювання впливає і мінливість самої вимірюваної величини. У більшості випадків останньою обставиною нехтують і вважають, що в процесі вимірювань вимірювана величина залишається постійною. Якщо наперед відомо, що вимірювана величина змінюється в процесі досліду, то застосовують спеціальний метод оброблення дослідів, який буде розглянуто як метод оброблення «за різницями».). Таким чином, у результаті вимірювань виходять випадкові значення вимірюваної величини. З усіх варіантів можливих значень ми повинні вибрати найкращий. Іншими словами, якщо при визначенні значення вимірюваної величини неминучі помилки, то в середньому вони повинні бути мінімальними. Обрані за цим правилом значення вимірюваної величини назвемо відповідним значенням. Але як би ретельно не було вибране відповідне значення, воно буде містити помилку й відрізнятися від істинного. Тому, якщо не можна визначити справжнє значення величини, то необхідно з ймовірнісної точки зору оцінити помилку у виборі відповідного значення [19].

Таким чином, перше завдання оброблення результатів вимірювань полягає у визначенні відповідного значення вимірюваної величини та оцінюванні точності й надійності відповідного значення.

При вирішенні її зазвичай характеристики точності результатів вимірювання, що залежать від застосовуваних приладів і методів вимірювання, будуть відомі заздалегідь.

Якщо характеристики точності методу вимірювання не відомі, для їх визначення організовують спеціальні досліди, за результатами яких можна одержати лише відповідне значення серединної (середньої квадратичної) помилки. Отже, виникає необхідність у виборі відповідного значення серединної помилки та оцінюванні його точності й надійності.

Отже, друге завдання оброблення результатів вимірювань полягає у визначенні відповідного значення характеристик точності методу вимірювання та оцінювання їх точності та надійності.

Розглянемо, як вирішувати ці завдання.

У п. 5.3. під час дослідження помилок вимірювання було показано, що випадкова величина результату вимірювання X є не що інше, як сума істинного значення вимірюваної величини α і випадкової помилки вимірювання Δ:

$$X = \alpha + \Delta.$$

Там само було встановлено, що випадкова величина результату вимірювання підлягає нормальному закону з математичним сподіванням

$$M(x) = \alpha$$

і серединним відхиленням

$$E_x = E_{\delta\alpha},$$

де $E_{\delta\alpha}$ – серединна помилка методу вимірювання.

Таким чином, якщо береться n результатів вимірювання $x_1, x_2, ..., x_n$, то завдання із визначення вимірюваної величини, характеристики точності методу вимірювання та їх оцінювання зводиться до розглянутих у 9.4 завдань визначення числових характеристик нормального розподілу випадкової величини [20].

Відповідне значення вимірюваної величини необхідно визначати за формулою

$$\tilde{a} = \bar{x} = 1/n \cdot \Sigma_{i=1}{}^{n} x_i, \tag{9.32}$$

а серединне відхилення

$$\tilde{E}_{\delta}{}^2 = \tilde{E}_x = (2\rho^2/n{-}1) \cdot \Sigma_{i=1}{}^{n}(x_i - \bar{x})^2 =$$
$$= (0{,}455/n{-}1) \cdot \Sigma_{i=1}{}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{9.33}$$

або

$$E_{\delta}{}^2 = 0{,}455/n \cdot \Sigma(x_i - a)^2, \tag{9.34}$$

де величина α визначається попередньо більш точним методом ніж той, який випробовується; у цьому разі α вважається істинним значенням вимірюваної величини (математичне сподівання результату вимірювання).

Приклад 13. Дальність до цілі вимірювалася 10 разів і були одержані такі результати:

x_1 = 1 490 м, x_2 = 1 500 м, x_3 = 1 480 м, x_4 = 1 510 м,
x_5 = 1 512 м, x_6 = 1 504 м, x_7 = 1 487 м, x_8 = 1 494 м,

x_9 = 1 485 м, x_{10} = 1 498 м.

Точність вимірювання дальності характеризується серединною помилкою E_x = 20 м. Визначити:

– дальність до цілі (відповідне значення дальності до цілі);

– імовірність того, що помилка у визначенні дальності до цілі не перевищить 10 м (визначення довірчої ймовірності);

– з імовірністю 90 % граничну величину помилки у визначенні дальності до цілі (визначення довірчого інтервалу);

– необхідну кількість вимірювань із тим, щоб з імовірністю 90 % помилка у визначенні дальності до цілі не перевищувала 3 м.

Р о з в' я з а н н я. 1. Дальність до цілі визначається як середнє арифметичне з одержаних результатів:

$$\tilde{Д} = \Sigma_{i=1}^{10} x_i/10 = 1496,$$

$$Д = 1496 \text{ м}.$$

2. Точність дальності характеризується серединною помилкою

$$E_{\delta Д} = E_x/\sqrt{n} = 20/\sqrt{10} = 6{,}33,$$

$$E_{\delta Д} = 6{,}33 \text{ м}.$$

Довірча ймовірність може бути знайдена за допомогою наведеної функції Лапласа:

$$p\,[|\delta Д| < 10] = \Phi\,(10/6{,}33) = \Phi\,(1{,}58) = 0{,}71344,$$

(табл. А. 1) p = 71,3 %.

Ми одержали ймовірність того, що істинне, невідоме значення дальності знаходиться в межах від 1 486 до 1 506 м [$\tilde{Д} \pm 10$].

3. Граничну величину помилки можна визначити також із використанням наведеної функції Лапласа:

$$p\,[|\delta Д| < \varepsilon] = \Phi\,(\varepsilon/E_{\delta Д}) = 0{,}90.$$

За таблицею А. 1 Ф (x) визначаємо, що $\varepsilon/E_{\delta Д}$ = 2,4386.

Звідси

$$\varepsilon = 2{,}4386 \cdot 6{,}33 = 15{,}4,$$

$$\varepsilon = 15{,}4 \text{ м}.$$

4. Необхідне число вимірювань можна визначити зі співвідношення

$$E_{\delta Д} = E_x / \sqrt{n},$$

звідки

$$n = E^2_x / E^2_{\delta Д}.$$

Величину $E_{\delta Д}$ знаходимо з умови

$$p\ [|\delta Д| < 3] = \Phi\ (3/E_{\delta Д}) = 0{,}90.$$

За таблицею А. 1 наведеної функції Лапласа можна визначити $3/E_{\delta Д} = 2{,}4386$, звідки $E_{\delta Д} = 3/2{,}4386 = 1{,}23$.

Тоді

$$n = (20/1{,}23)^2 = 264{,}39 \approx 265.$$

Якщо серединна помилка методу вимірювання (приладу) $E_{\delta Д}$ невідома, то її визначають за результатами тих самих вимірювань. У цьому разі ймовірнісне оцінювання середнього арифметичного виробляється з використанням розподілу Стьюдента.

Приклад 14. Для визначення серединної помилки, що характеризує точність приладу, були проведені вимірювання їх величини α = 400 м й одержані в метрах такі результати: 440, 390, 370, 400 (табл. 9.17). Визначити серединну помилку приладу та оцінити її при довірчій ймовірності 90 % і довірчому інтервалі 20 % E.

Таблиця 9.17 – Результати розрахунків серединної помилки, що характеризує точність приладу

x_i	$x_i - \alpha = x_i - 400$	$(x_i - \alpha)^2$
440	+40	1 600
390	−10	100
375	−25	625
400	0	
		Σ 2 325

Р о з в’ я з а н н я. Шукану серединну помилку знайдемо з виразу

$$E_\delta^2 = 0{,}455/n \cdot \Sigma_{i=1}^{n}(x_i - a)^2,$$

а ймовірнісне оцінювання повинне бути проведене з використанням функції $L_k(q)$.

1. Розраховуємо серединну помилку (п. 9.4, приклад 5)

$$E^2_\delta = (0{,}455/4) \cdot 2\,325 = 265,$$

$$E_\delta = 16{,}3 \text{ м}.$$

2. Визначаємо довірчий інтервал за довірчої ймовірності 95 % (пп. 9.5.2, приклад 9):

$$\left.\begin{array}{l} k = n - 1 = 3, \\ \alpha = L_k(q) = 0{,}95 \end{array}\right\} \text{ за таблицею А. 10} \quad q_E = 1{,}914,$$

$$\varepsilon_E = q_E \cdot E_\delta = 1{,}914 \cdot 16{,}3 = 31{,}4.$$

3. Визначаємо довірчу ймовірність для довірчого інтервалу ε_E = 2 % E (п. 9.5, пп. 1, приклад 8):

$$\left.\begin{array}{l} q_E = \varepsilon / E_\delta = 0{,}20, \\ k = 3 \end{array}\right\} \text{ за таблицею А. 10 } \alpha = L_k(q) = 0{,}359 =$$

= 35,9 %.

Відповіді: 1. Серединна помилка, характеризуючи точність приладу, E_δ = 17 м.

2. Довірчий інтервал за довірчої ймовірності 95 % дорівнює 32 м. Отже, ймовірність того, що помилка у визначенні величини за результатами чотирьох вимірювань не перевищить 32 м, дорівнює 95 %:

$$p\,[|\delta| < 32] = 95\ \%.$$

3. Довірча ймовірність для довірчого інтервалу ε_E = = 20 % E дорівнює 36 %. Отже, надійність того, що помилка у визначенні серединної помилки за чотирма результатами вимірювання не перевищує 20 % її величини, дорівнює 36 %.

9.7.2. Оброблення результатів вимірювань за різницями між результатами окремих вимірювань

Під час проведення вимірювань не виключена можливість того, що вимірювана величина не залишиться постійною. Вимірявши її кілька разів, ми одержимо результати, що будуть супроводжуватися випадковими помилками. Останні не можуть точно характеризувати метод вимірювань, оскільки будуть включати не лише властиві цьому методу помилки, а й ті, що виникають у результаті зміни вимірюваної величини.

В артилерійській практиці під час полігонних відстрілів зарядів із гармат доводиться визначати характеристики розсіювання снарядів і для цього вимірюють відхилення точок падіння снарядів. Ці відхилення можуть досить точно характеризувати розсіювання лише тоді, коли умови стрільби залишаються незмінними. Насправді умови стрільби можуть змінюватися (змінюються температура повітря, тиск, швидкість і напрямок вітру, нагрівання ствола гармати та ін.). Все це призводить до сповзання траєкторії, тобто до того, що при стрільбі на одній установці прицілу центр розсіювання змінює своє положення. Отже, точки падіння відхиляються не лише через розсіювання, а і внаслідок сповзання траєкторії під час усієї стрільби.

Якщо в процесі вимірювання вимірювана величина змінюється, відповідне значення серединного відхилення визначають за різницями між результатами послідовних вимірювань.

Оброблення за різницями дозволяє значною мірою позбутися від помилок внаслідок зміни вимірюваної величини і одержати тим самим більш точні, ніж при звичайному обробленні, значення шуканих характеристик.

Оброблення за різницями має завдання визначити відповідне значення серединного відхилення. Визначення відповідного значення вимірюваної величини до задачі оброблення за різницями не входить.

Припустимо, що при n вимірюваннях одержані результати: x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Різниці між випадковими результатами вимірювань $u_i = x_{i+1} - x_i$ дорівнюють різницям між істинними помилками вимірювань. Дійсно, випадкові результати вимірювань можна подати у такому вигляді:

$$x_1 = \alpha_1 + \delta_1,$$
$$x_2 = \alpha_2 + \delta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_i = \alpha_i + \delta_i,$$
$$x_{i+1} = \alpha_{i+1} + \delta_{i+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_n = \alpha_n + \delta_n.$$

При допущенні $\alpha_{i+1} \approx \alpha_i$ різниці між результатами вимірювань будуть однаковими:

$$u_1 = x_2 - x_1 = \alpha_2 + \delta_2 - \alpha_1 - \delta_1 = \delta_2 - \delta_1,$$
$$u_2 = x_3 - x_2 = \alpha_3 + \delta_3 - \alpha_2 - \delta_2 = \delta_3 - \delta_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_i = x_{i+1} - x_i = \alpha_{i+1} + \delta_{i+1} - \alpha_i - \delta_i = \delta_{i+1} - \delta_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_{n-1} = x_n - x_{n-1} = \alpha_n + \delta_n - \alpha_{n-1} - \delta_{n-1} = \delta_n - \delta_{n-1}.$$

Отже,

$$u_i = x_{i+1} - x_i = \delta_{i+1} - \delta_i.$$

Всього різниць буде $n - 1$.

Якщо серединна помилка методу вимірювань E_δ, то серединне відхилення розподілу випадкової величини різниці дорівнюватиме

$$E_u = \sqrt{2} \cdot E_\delta.$$

Звідси серединна помилка методу вимірювань визначається з формули [18]

$$E^2_\delta = 0,5\, E^2_u. \qquad (9.35)$$

Серединне відхилення розподілу різниць знаходимо за формулою (9.19) з урахуванням того, що m = 0, а число різниць $n - 1$:

$$E_u^2 = (2\rho^2/n–1) \cdot \Sigma_{i=1}^{n-1} u_i^2.$$

Тоді серединну помилку методу вимірювання визначають за різницею між сусідніми результатами вимірювань і знаходять зі співвідношення [19]

$$E_\delta^2 = (\rho^2/n–1) \cdot \Sigma_{i=1}^{n-1} u_i^2 = (0{,}227/n–1) \cdot \Sigma_{i=1}^{n-1} u_i^2. \quad (9.36)$$

Зауваження. При складанні різниць необхідно додержуватися тієї послідовності, в якій проводилися вимірювання, тобто з кожного наступного віднімати попередній результат. Цим самим ми виключимо помилки, що виникають через зміну вимірюваної величини.

Цілком очевидно, що якщо вимірювана величина в процесі досліду не змінюється, то результати розрахунку серединних помилок за різницями і за загальними формулами (формула (9.32) і (9.33)) збігатимуться. Розбіжність результатів розрахунків за цими двома способами служить ознакою мінливості вимірюваної величини в процесі досліду.

Приклад 15. Для ілюстрації порядку оброблення результатів вимірювання за різницями розв'яжемо приклад. Візьмемо, що вимірювана величина при першому вимірюванні має розмір 15 м, а при всіх наступних вона зменшується на 1 м порівняно з попереднім: 13 м, 12 м і т. д. Величини випадкових помилок вимірювання візьмемо навмання з таблиці випадкових чисел нормального розподілу з E_δ = 1 м: +1,0551; −1,2302; −0,9302; +0,0604; +2,4743; −0,2534; −0,9752; −1,7571.

За цими помилками δ_i одержимо результати вимірювань, наведені в графі 2 розрахункової таблиці 9.18. Методом різниць визначити серединну помилку, що характеризує точність приладу, використовуваного під час вимірювання.

Р о з в' я з а н н я. 1. Складаємо розрахункову таблицю 9.18.

2. Розраховуємо шукану серединну помилку (формула (9.36)):

$$E_\delta^2 = 0{,}227/(n–1) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} u_i^2 = 0{,}227/7 \cdot 33{,}29 = 1{,}08 \text{ м.}$$

Відповідь: серединна помилка, що характеризує точність приладу, E_δ = 1,04 м.

Якщо цей приклад розв'язувати за загальними правилами (формула (9.33)), то відповідь буде E_δ = 2,11 м.

Таблиця 9.18 – Результати оброблення результатів вимірювання точності приладу

Номер вимірювання	x_i, м	$u_i = x_{i+1} - x_i$	u_i^2
1	15,0551	−3,2853	10,79
2	11,7698	−0,0 000	0,49
3	11,0698	−0,0094	0,00
4	11,0604	+1,4139	2,00
5	12,4743	−3,7277	13,88
6	8,7466	−1,7218	2,96
7	7,0248	−1,7819	3,17
8	5,2429	–	–
		Контроль: $\Sigma u_i = x_n - x_1$, Σu_i = +1,4139 – 11,2261 = 9,8122, $x_n - x_1$ = 5,2429 – 15,0551 = = 9,8122	Σu_i^2 = 33,29

9.7.3. Оброблення результатів вимірювань, проведених із різним ступенем точності

У деяких випадках вимірювати можна кількома приладами (методами), що мають різну точність. Так, положення цілі може бути визначене різними способами: засічкою технічними засобами розвідки, звуковою розвідкою, за аерофотознімком та ін. Точність, з якою положення цілі визначається кожним способом (а отже, і точність визначення установок для стрільби), буде різною. Що ж брати за відповідне значення, маючи ряд нерівноточних результатів? Під час розв'язання подібних завдань точності методів вимірювань будуть відомі. Тому завдання оброблення результатів нерівноточних вимірювань полягає у визначенні відповідного значення вимірюваної величини й оцінюванні його точності.

У цьому разі визначити відповідне значення α як середнє арифметичне з результатів вимірювань, не можна, оскільки необхідно якось врахувати точність кожного результату, врахувати ту вагу, яку має кожен у сукупності з усіма одержаними результатами. Таким чином, необхідно виробити правило визначення відповідного значення вимірюваної величини. При цьому необхідно прагнути до того, щоб одержана функція була не надто складною, задовольнялася рівність $M(\tilde{a}) = a$ і дисперсія розподілу відповідного значення була найменшою [31].

Нехай ми маємо ряд результатів незалежних вимірювань: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, точність кожного з них відповідно характеризується $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$.

Із практики відомо, що найбільш простою функціональною залежністю є лінійна залежність.

Запишемо відповідне значення $\tilde{\alpha}$ у вигляді будь-якої лінійної функції

$$\tilde{\alpha} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \Sigma_{i=1}{}^{n}c_ix_i,$$

де x_i – результати нерівноточних вимірювань;

c_i – деякі постійні коефіцієнти.

У нашій лінійній функції коефіцієнти c_i необхідно вибрати так, щоб були виконані друге і третє з наведених умов, тобто так, щоб

$$M\left(a\right) = M\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = a$$

і $D(\widetilde{a}) = D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right)$ мала б найменше значення.

Вважаючи, що результати вимірювання вільні від постійної похибки, матимемо

$$m_{x_1} = m_{x_2} = \ldots = m_{x_n} = a.$$

Тоді

$$M(\tilde{a}) = M\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i m_{x_i} = a\sum_{i=1}^{n} c_i \ ,$$

$$M(\widetilde{a}) = a\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right). \qquad (9.37)$$

Дисперсія відповідного значення

$$D(\tilde{a}) = D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D_{x_i} \ ,$$

$$D(\widetilde{a}) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D_{x_i} \ . \qquad (9.38)$$

За співвідношенням (9.36), для виконання другого з поставлених нами умов $M(\widetilde{\alpha}) = a$, необхідно, щоб $\Sigma_{i=1}^{n} \cdot c_i = 1$. Щоб виконати третю умову, необхідно серед коефіцієнтів c_i, що задовольняють рівності $\Sigma_{i=1}^{n} \cdot c_i = 1$, вибрати ті, які забезпечують одержання найменшої величини дисперсії відповідного значення, тобто найменшого значення до співвідношення (9.38). Дослідження зі спільного виконання двох останніх умов приводять до висновку, що коефіцієнти c_i повинні бути визначені з рівності [10]

$$c_i = g_i \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} g_i\right), \qquad (9.39)$$

де g_i називається «вагою i-того вимірювання» і розраховується за формулою

$$g_i = \sigma^2_{кр}/\sigma^2_{i} \ \text{або} \ g_i = E^2_{кр}/E^2_{i}. \qquad (9.40)$$

Таким чином, формула для розрахунку відповідного значення вимірюваної величини буде

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i g_i / \sum_{i=1}^{n} g_i) . \tag{9.41}$$

Неважко помітити, що математичне сподівання відповідного значення вимірюваної величини дорівнює його істинному значенню:

$$M\left(a\right) = M\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} g_i M\left(x_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} g_i} = \frac{a\sum_{i=1}^{n} g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i} = a.$$

Для оцінювання точності відповідного значення вимірюваної величини знайдемо дисперсію, що характеризує розсіювання її випадкових значень:

$$D\left(a\right) = D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i g_i}{\sum_{i=1}^{n} g_i}\right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} g_i^2 D_{x_i}.$$

Зі співвідношення (9.39)

$$\sigma_{x_i}^2 = D_{x_i} = \sigma_{кр}{}^2/g_i.$$

Підставивши це значення у формулу дисперсії, одержимо

$$D\left(a\right) = \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i}\right) \sum_{i=1}^{n} g_i^2 D_{x_i} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} g_i}\right) \sum_{i=1}^{n} g_i^2 \frac{\sigma_{кр}^2}{g_i} = \frac{1}{\left(\sum g_i\right)^2} \sigma_{кр}^2 \sum g_i = \frac{\sigma_{кр}^2}{g_i}.$$

Таким чином, середня квадратична помилка вимірюваної величини [24]

$$\sigma_{\tilde{\alpha}} = \sigma_{кр} / \sqrt{\sum_{(i)} g_i}\,, \tag{9.42}$$

де $g_i = \sigma^2_{кр}/\sigma^2_i$, або серединна помилка вимірюваної величини

$$E_{\tilde{\alpha}} = E_{кр} / \sqrt{\sum_{(i)} g_i}\,, \tag{9.43}$$

де $g_i = E^2_{кр}/E^2_{xi}$.

Приклад 16. Дальність до нерухомої цілі визначена двома способами і одержані результати:

1) де $x_1 = 3\,200$ м, $\sigma_1 = 20$ м;

2) де $x_2 = 4\,000$ м, $\sigma_2 = 40$ м.

Визначити відповідне значення дальності до цілі й оцінити його точність.

Р о з в' я з а н н я. 1. Визначаємо ваги способів вимірювання:

$g_i = \sigma^2_{кр}/\sigma^2_{xi}$, $\sigma_{кр} = 40$ м, $g_1 = (40/20)^2 = 4$, $g_2 = 1$.

Розраховуємо дальність до цілі:

$$\tilde{Д} = \Sigma_{i=1}^{2} \cdot x_i g_i / \Sigma_{i=1}^{2} \cdot g_i = (3\,200 \cdot 4 + 4\,000 \cdot 1)/(4 + 1) =$$
$$= 16\,800/5 = 3\,360;$$
$$Д = 3\,360 \text{ м}.$$

2. Визначаємо середнє квадратичне (серединне) відхилення, що характеризує точність визначення дальності:

$$\sigma_{\tilde{Д}} = \sigma_{кр} / \sqrt{\sum_{i=1}^{2} g_i} = 40/\sqrt{5} = 17{,}8 \text{ м};$$

$$\sigma_{\delta Д} = 17{,}8 \text{ м } (E_{\delta Д} = \rho\sqrt{2}\,\sigma_{\delta Д} = 0{,}674 \cdot 17{,}8 = 12 \text{ м}).$$

Якщо кожним із k способів вироблялося кілька вимірювань, то для скорочення розрахункової формули відповідного значення $\tilde{\alpha}$ визначають відповідне значення за кожною групою результатів вимірювання (за кожним методом вимірювань):

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{m_i} x_j / m_i,$$

де m_i – число вимірювань i-тим методом.

Остаточні формули:

$$\widetilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i m_i g_i / \sum_{i=1}^{k} m_i g_i , \qquad (9.44)$$

$$E_{\widetilde{\alpha}} = E_{кр} / \sqrt{\sum_{i=1}^{k} m_i g_i} . \qquad (9.45)$$

Приклад 17. Дальність до цілі визначалася чотири рази далекоміром: x'_1 = 980 м; x'_2 = 1 000 м; x'_3 = 1 020 м; x'_4 = 1 000 м; два рази – засічкою з короткою базою: x''_1 = = 1 150 м; і x''_2 = 1 050 м. При цьому $E_{\text{далекоміром}}$ = 1 % *Д* і $E''_{\text{кор.бази}}$ = 2 % *Д*. Визначити відповідне значення дальності до цілі та оцінити його точність.

Р о з в' я з а н н я.

1) $\left.\begin{array}{l} \bar{x}\,' = 1\,000 \text{ м}, E' = 1\,\%\,Д \\ \bar{x}\,'' = 1\,100 \text{ м}, E'' = 2\,\%\,Д \end{array}\right\} E_{кр};\quad \left\{\begin{array}{l} g_1 = 4, \\ g_2 = 1. \end{array}\right.$

2) $\widetilde{Д}$ = (1 000 · 4 · 4 + 1 100 · 2 · 1)/(4 · 4 + 2 · 1) = 1 010; *Д* = 1010 м.

3) $E_{\delta Д} = 2/\sqrt{18} \approx 0{,}47\ \%\ Д$; $E_{\delta Д}$ = 4,8 м.

Як бачимо з прикладу 17, відповідне значення дальності ближче до середнього з результатів більш точного способу вимірювань, але не збігається з ним. Точність дальності та використання усіх результатів ($E_{\delta Д}$ = 0,47 % *Д*) вище, ніж та точність, яка була б одержана при використанні лише результатів більш точного методу вимірювань ($E_{\delta Д'}$ = = 0,5 % *Д*).

Висновки до розділу 9

Таким чином, в артилерійській практиці під час полігонних відстрілів зарядів із гармат доводиться визначати характеристики розсіювання снарядів, а оброблення результатів стрільб дозволяє значною мірою позбутися помилок внаслідок зміни вимірюваної величини і одержати тим самим більш точні, ніж при звичайному обробленні, значення шуканих характеристик.

У цьому розділі подані поняття про закон великих чисел (теореми Чебишева та Бернуллі), наведені основні завдання математичної статистики й методів їх розв'язання, статистична функція розподілу, статистичний ряд і гістограма, числові характеристики статистичного розподілу, вирівнювання статистичних рядів, критерії згоди, завдання оброблення дослідних даних, способи визначення відповідного значення числової характеристики, також надані оцінювання точності й надійності визначення числових характеристик за результатами досліду, оцінювання математичного сподівання, оцінювання середнього квадратичного й серединного відхилень, наближене оцінювання числових характеристик, оцінювання числових характеристик системи двох випадкових величин, подані поняття про виключення анормальних результатів та оброблення результатів вимірювань, наведені задачі оброблення і загальні методи їх розв'язання.

Також у розділі наведені різні способи оброблення результатів вимірювань за різницями між результатами окремих вимірювань, проведених із різним ступенем точності.

Ці результати оброблення дозволяють використовувати теорію ймовірностей не лише в артилерійській науці, а в будь-якій її галузі, а також більш глибоко проводити вивчення в навчальних закладах.

Навчальний тренінг

Основні терміни і поняття

Закон великих чисел, теорема Чебишева, теорема Бернуллі, завдання математичної статистики, методи вирішення, статистична функція розподілу, статистичний ряд, гістограма, числові характеристики статистичного *розподілу, вирівнювання статистичних рядів, критерії згоди, завдання та способи оброблення, дослідні дані, способи визначення, оцінювання точності, оцінювання надійності, результати досліду, оцінювання математичного сподівання, середнє квадратичне відхилення, серединне відхилення, наближене оцінювання, числові характеристики, система двох випадкових величин, анормальні результати, оброблення, способи оброблення, вимірювання, методи вирішення, ступінь точності, теорія ймовірностей, артилерійська наука.*

Питання для повторення та самоконтролю

1. Надати визначення та основні поняття про закон великих чисел.

2. Сформулювати теорему Чебишова та з якою метою й де вона використовується (графічне зображення).

3. Сформулювати теорему Бернуллі та з якою метою та де вона використовується (графічне зображення).

4. Перелічити галузі застосування математичної статистики.

5. Які основні завдання математичної статистики та методи їх вирішення?

6. Надати визначення статистичної функції розподілу та її графічне зображення.

7. Що таке статистичний ряд і гістограма (навести формули й графічне зображення).

8. Надати пояснення числовим характеристикам статистичного розподілу.

9. З якою метою застосовують вирівнювання статистичних рядів та критерії згоди?

10. Які основні завдання оброблення дослідних даних?

11. Які існують способи визначення відповідного значення числової характеристики?

12. У чому міститься оцінювання точності й надійно-

сті визначення числових характеристик за результатами досліду?

13. У чому міститься оцінювання математичного сподівання?

14. У чому міститься оцінювання середнього квадратичного й серединного відхилень?

15. Що включає поняття про наближене оцінювання числових характеристик?

16. У чому міститься оцінювання числових характеристик системи двох випадкових величин?

17. З якою метою проводиться виключення анормальних результатів та оброблення результатів вимірювань?

18. Які існують способи оброблення результатів вимірювань за різницями між результатами окремих вимірювань, проведених із різним ступенем точності?

Завдання для самопідготовки

1. Знайти інші галузі науки, де використовується теорема Чебишова та з якою метою.

2. Визначити інші галузі застосування математичної статистики.

3. Практично скласти статистичний ряд і гістограму для інших галузей науки, де їх використовують, та графічно зобразити.

4. Знайти практичне застосування числовим характеристикам статистичного розподілу.

5. Де в артилерії застосовують способи визначення відповідного значення числової характеристики?

6. За результатами досліду ведення АТО знайти оцінювання точності й надійності визначення числових характеристик щодо артилерії.

Теми, що пропонуються для написання рефератів

1. Використання основних законів теорії ймовірностей в артилерійській науці.

2. Використання числових характеристик під час підготовки даних для стрільби артилерії.

3. Застосування теорії ймовірностей в артилерії.

4. Застосування нормального закону розподілу системи випадкових величин в артилерії під час ураження цілей.

5. Тенденції розвитку застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

6. Вплив числових характеристик законів розсіювання на точність артилерійського вогню.

7. Перспективи застосування теорії ймовірностей у військовій галузі.

8. Перспективи застосування основних законів теорії ймовірностей у військовій галузі.

ВИСНОВКИ

Таким чином, вивчення питань теорії ймовірностей дозволяє використовувати їх не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці у визначенні точності роботи механізмів різного роду, оброблення результатів спостережень у фізиці, астрономії, зовнішньої балістики та теорії стрільби під час ураження об'єктів, цілей, у визначенні точності влучення у ціль, імовірності знаходження центра розсіювання снарядів від цілі, оброблення результатів спостережень і засічки цілей для їх ураження.

У підручнику наведені основні поняття про події та класифікація подій (достовірні, неможливі, рівноможливі, протилежні, спільні й несумісні), наведені частота та ймовірність появи подій, способи знаходження чисельних значень імовірності події (класичний, статистичний, геометричний), наведені основні теореми: теорема додавання ймовірностей, теорема множення ймовірностей, наведена формула повної ймовірності; шкала ймовірності влучення в ціль під час розсіювання снарядів, повна ймовірність події й теорема гіпотез. У розділі подані деякі варіанти застосування вищеперелічених теорем в артилерійській науці під час стрільби та ураження (знищення) об'єктів, цілей.

Вивчення правил визначення ймовірностей комбінації під час повторення випробувань, використання формули бінома Ньютона дозволяє застосовувати їх не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці при вирішенні багатьох питань артилерійської стрільби, під час якої доводиться стикатися з визначенням імовірності появи події не менше заданого числа раз, біноміальним розподілом імовірностей комбінацій із перельотів і недольотів, вирішення яких дозволяє артилерії наносити надійне ураження об'єктам і цілям противника.

У підручнику розглянуті питання щодо визначення ймовірності комбінацій при незмінних імовірностях подій, порядок і можливості використання формули бінома Ньютона, визначення можливості появи події не менше заданої кількості разів, наведений графік розподілу ймовірностей та застосуванням їх в артилерійській науці.

Під час розгляду випадкового явища з позицій визначення кількісної величини відхилення точки падіння снаряда від цілі, виникає необхідність розглядати випадкові величини, а вони можуть бути дискретні та безперервні, й виникає необхідність введення поняття закону розподілу випадкової величини. Цей закон дозволяє використовувати випадкові величини не лише в теоретичних аспектах, а й на практиці у визначенні точності влучення артилерійським снарядом у будь-яку ціль під час вогневого ураження противника.

У підручнику наведене поняття закону розподілу випадкової величини, поданий ряд розподілу та багатокутник розподілу; наведені формули і визначення функції розподілу та щільності розподілу безперервних випадкових величин; наведені числові характеристики випадкових величин, поняття про моменти, про математичне сподівання випадкової величини, про моду та медіану, про початкові центральні моменти; дисперсію та середнє квадратичне відхилення; наведені визначення, формули та графічне зображення дисперсії та середнього квадратичного відхилення; наведені поняття про розсіювання й середню витрату снарядів та ураження спостережної цілі, а також використання цих даних в артилерійській науці.

Точність стрільби артилерії завжди залежала від точності розрахунків і підпорядковувалася законам теорії ймовірностей. Це дозволяє проводити розрахунки з урахуванням основних положень, законів, теорем розподілу випадкових величин під час стрільби й попадання у різні форми об’єктів, цілей.

Закони, теореми та основні положення теорії ймовірностей завжди використовували не лише в теоретичних аспектах теорії стрільби, а й на практиці у визначенні точності підготовки даних для стрільби, точності проведення вимірювань, оброблення результатів спостережень під час засічки цілей, що сприяє захопленню вогневої переваги над противником під час ураження його об’єктів, цілей та одержання перемоги у цілому.

У підручнику також наведені основні поняття, теореми та закони теорії ймовірностей: щільність розподілу, нормальний закон розподілу, центрована випадкова величина, математичне сподівання випадкової величини, середнє квадратичне відхилення, запропоновані характеристики нормального закону розподілу, також наведені поняття про щільність імовірності нормального закону, щільність розсіювання снарядів та серединне відхилення снарядів за дальністю та напрямком, наведені можливості ймовірності потрапляння випадкової величини, використання функції розподілу та щільності розподілу під час розрахунку влучення в ціль, а також імовірність улучення в ціль з одного пострілу.

У підручнику також наведені види помилок: систематичні, грубі й випадкові та кількість джерел помилок, надані визначення, графічне зображення та математичний вираз закону рівної ймовірності, числових характеристик нормального розподілу та числових характеристик закону рівної ймовірності.

Таким чином, основні поняття про систему випадкових величин та функцію розподілу системи двох випадкових величин під час вивчення дозволяють визначати числові характеристики розподілу системи випадкових величин, а також щільність її розподілу. Під час цього визначення надається можливість відзначити дві основні властивості щільності розподілу, системи випадкових величин.

У підручнику подані основні поняття про систему випадкових величин, функцію розподілу системи двох випадкових величин, її числові характеристики, щільність розподілу системи двох випадкових величин, про залежні й незалежні випадкові величини, а також про систему кількох випадкових величин.

Із вищевикладеного можна зробити висновок, що закон розподілів однієї й тієї самої системи двох випадкових величин може бути відображений щільністю розподілу системи двох незалежних величин, якщо обрана система координат, осі якої збігаються з напрямком основних осей розсіювання, або щільністю розподілу системи двох залежних величин, якщо осі координат повернені щодо напрямку основних осей розсіювання на кут α.

Виходячи з цього, для визначення сумарної дії незалежної помилки-вектора можна переносити з одного кінця обумовленого відрізка на інший паралельно самим собі, але змінюючи напрямки їх на зворотні. Після перенесення всіх помилок-векторів на один кінець обумовленого відрізка їх складають за правилом додавання векторів, отримуючи сумарну помилку-вектор.

Тому з цього робимо висновок, що весь математичний апарат теорії ймовірностей, розроблений для системи двох випадкових величин, може бути повністю застосований для ймовірнісного оцінювання випадкових помилок-векторів.

Таким чином, одночасна дія двох джерел помилок-векторів, спрямованих під кутом один до одного, призводить до системи помилок-векторів на площині. При цьому сполученими півдіаметрами одиничного еліпса розсіювання будуть серединні відхилення законів розподілу помилок-векторів, що складаються.

Таким чином, під час розгляду законів розподілу функцій випадкових аргументів ми стикаємося з необхідністю знаходження числових характеристик функцій випадкових аргументів.

Однак при вирішенні практичних завдань достатньо знати або обчислювати деякі числові характеристики, основними з яких є математичне сподівання й дисперсія, середньоквадратичне та серединне відхилення функцій випадкових аргументів.

Наприклад, математичне сподівання функції будь-якого числа випадкових аргументів може бути знайдене у всіх випадках, крім закону розподілу функції.

Однак у багатьох випадках для знаходження числових характеристик функцій не потрібно знати закони розподілу аргументів, а достатньо знати деякі числові характеристики. При цьому для їх обчислення використовують теореми про математичне сподівання й дисперсію, а теорема додавання математичних сподівань справедлива для будь-яких випадкових величин як залежних, так і незалежних.

У підручнику наведені формули для дисперсії суми випадкових величин можуть бути використані для визначення серединних відхилень суми випадкових величин, що підпорядковуються нормальним законам розподілу.

На практиці під час обчислення помилок застосовують формули до будь-яких пострілів, які супроводжуються як незалежними помилками пострілу, так і залежними, що обумовлюються наявністю в сумарних помилках повторюваної частини, наприклад, помилок у положенні цілі, вогневої позиції, визначення метеорологічних умов і т. д.

Математичне сподівання числа або відсотка уражених елементарних цілей – основний показник ефективності стрільби по груповій цілі, на підставі цього ми можемо укласти, що лінійна функція від аргумента, підпорядкованого нормальному закону, також підпорядкована нормальному закону.

Із композицією нормальних розподілів на площині пов'язані багато задач теорії стрільби.

Так, наприклад, для розв'язання задачі композиції законів розподілу, що дуже часто зустрічається при вирішенні практичних завдань, зокрема, в теорії та практиці стрільби, ми стикаємося з необхідністю досліджувати суми випадкових величин, а це має дуже велике значення.

Таким чином, ми вирішили завдання й одержали такі правила:

– щоб знайти математичне сподівання майже лінійної функції, потрібно у вираз функції замість аргумента підставити його математичне сподівання;

– щоб знайти середнє квадратичне відхилення майже лінійної функції, потрібно середнє квадратичне відхилення аргумента помножити на абсолютне значення похідної функції в точці, що відповідає математичному сподіванню аргумента.

Таким чином, ми встановили, що при розв'язанні задачі композиції нормальних законів на площині, які зводяться до композиції векторіальних відхилень, що дорівнюють нулю, то сумарний закон також нормальний, тоді математичні схеми розв'язання задачі композиції нормальних законів на площині можуть бути використані і для визначення сумарного закону розподілу помилок-векторів на площині.

У підручнику наведені закони: розподілу лінійної функції від аргумента, розподілу суми двох випадкових величин, розподілу лінійної функції від нормального розподілу аргументів та композиція нормальних законів із законом рівної ймовірності, а також нелінійні функції й загальна схема розв'язання задачі з визначення помилок функції внаслідок помилок аргументів.

Таким чином, в артилерійській практиці під час полігонних відстрілів зарядів із гармат доводиться визначати характеристики розсіювання снарядів, а оброблення результатів стрільб дозволяє значною мірою позбутися помилок внаслідок зміни вимірюваної величини та одержати тим самим більш точні, ніж при звичайному обробленні, значення шуканих характеристик.

У підручнику також подані поняття про закон великих чисел (теореми Чебишова та Бернуллі), наведені основні завдання математичної статистики й методів їх вирішення, статистична функція розподілу, статистичний ряд і гістограма, числові характеристики статистичного розподілу, вирівнювання статистичних рядів, критерії згоди, завдання оброблення дослідних даних, способи визначення відповідного значення числової характеристики, також надані оцінювання точності й надійності визначення числових характеристик за результатами досліду, оцінювання математичного сподівання, оцінювання середнього квадратичного і серединного відхилень, наближене оцінювання числових характеристик, оцінювання числових характеристик системи двох випадкових величин, подані поняття про виключення анормальних результатів та оброблення результатів вимірювань, наведені задачі оброблення і загальні методи їх вирішення.

Також у підручнику наведені різні способи оброблення результатів вимірювань за різницями між результатами окремих вимірювань, проведених із різним ступенем точності.

У всіх розділах підручника наведені приклади до основних понять і теорем теорії ймовірностей та варіанти їх розв’язання.

Ці результати оброблення дослідів дозволяють використовувати теорію ймовірностей не лише в артилерійській науці, а в будь-якій її галузі, а також більш глибоко проводити вивчення в навчальних закладах.

Теорія ймовірностей є важливою наукою не лише для артилерії, її застосовують в інших сферах діяльності людини на практиці, у повсякденному житті. На ній побудовані всі лотереї та азартні ігри, ставки за депозитами й кредитами, прийняття рішень на біржах акцій та валют також не обходиться без неї. При цьому застосовують достатньо складні для розуміння процеси прийняття рішень та аналізу подій, однак теорія ймовірностей наявна скрізь.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е. С. Теория вероятности / Е. С. Вентцель. – Москва : Наука, 1964. – 572 с.

2. Пугачёв В. С. Теория случайных функций и её применение к задачам автоматического управления / В. С. Пугачёв. – Москва : Гостехиздание. 1957. – 207 с.

3. Пугачёв В. С. Элементы теории случайных функций / В. С. Пугачёв. – Ленинград : Издание ВВИФ им. Исуковского, 1954. – 210 с.

4. Правила стрільби та управління вогнем наземної артилерії. Дивізіон, батарея, взвод, гармата. – Київ : Видавництво «Варта», 2008. – 254 с.

5. Теоретические основы управления огнем наземной артиллерии : учебник. – Ленинград : Издание ВАА, 1978. – 454 с.

6. Петренко В. М. Підготовка стрільби і управління вогнем артилерії / В. М. Петренко, М. М. Ляпа, В. Є. Житник. – Суми : Видавництво СумДУ, 2015. – 524 с.

7. Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания и контрольные задания по курсу для студентов всех специальностей БГУИР / А. В. Аксенчик, А. И. Волковец, А. А. Корбут, И. Н. Коренская. – Минск : БГУИР, 2002. – 60 с.

8. Бэлл Э. Т. Творцы математики: Предшественники современной математики : пособие для учащихся / Э. Т. Бэлл ; под ред. с доп. С. Н. Киро. – Москва : Просвещение, 1979. – 256 с.

9. Безикович А. С. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей / А. С. Безикович. – Ленинград : Изд-во Росс. акад. наук, 1923. – Том XVII, № 1–18. – С. 35–44.

10. Бернштейн С. Н. Петербургская школа теории вероятностей / С. Н. Бернштейн // Уч. зап. Лен. гос. унив. Серия матем. наук. – Ленинград, 1940. – Вып. 10, № 55. –

С. 3–11.

11. Биллингсли Л. Сходимость вероятностных мер / Л. Биллингсли. – Москва : Наука, 1981. – 175 с.

12. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики / Б. В. Болгарский. – Минск : Высшая школа, 1979. – 368 с.

13. Боровков А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – Москва : Эдиториал УССС, 1999. – 273 с.

14. Бородін О. І. Біографічний словник діячів у галузі математики / О. І. Бородін, А. С. Бугай. – Київ : Вища школа, 2003. – 234 с.

15. Brownlee K. A. Statistical theory and metohodology in science and engineering / K. A. Brownlee. – New York ; London ; Sydney, 1977. – 485 p.

16. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Наука, 1988. – 416 с.

17. Вентцель Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Наука, 1991. – 295 с.

18. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Е. С. Вентцель. – 5-е изд., стереотип. – Москва : Высшая школа, 1999. – 576 с.

19. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – Київ : КНЕУ, 2000. – 292 с.

20. Войтенко М. А. Руководство к решению задач по теории вероятностей / М. А. Войтенко. – Москва : Изд. ВЗФЭИ, 1988. – 320 с.

21. Волковец А. И. Теория вероятностей и математическая статистика : конспект лекций для студентов всех специальностей и форм обучения / А. И. Волковец, А. Б. Гуринович. – Минск : БГУИР, 2003. – 84 с.

22. Волковец А. И. Теория вероятностей и математиче-

ская статистика : практикум для студентов всех специальностей и форм обучения / А. И. Волковец, А. Б. Гуринович. – Минск : БГУИР, 2003. – 68 с.

23. Галай И. Я. Учащимся о выдающихся математиках / И. Я. Галай, Г. Д. Гриневич. – Москва : Наука, 2005. – 125 с.

24. Гихман И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. – Киев : Вища школа, 1988. – 438 с.

25. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – Москва : Высшая школа, 1977. – 479 с.

26. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – Москва : Высшая школа, 1998. – 400 с.

27. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – Москва : Наука, 1975. – 267 с.

28. Гнеденко Б. В. Очерки истории математики в России / Б. В. Гнеденко. – Москва : Изд. АН СССР, 1946. – 230 с.

29. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Высшая школа, 1984. – 223 с.

30. Жлуктенко В. І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології : навчальний посібник / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2002. – 226 с.

31. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. – Москва : Наука, 1987. – 235 с.

32. Электронный учебник по книге «Методы принятия решений» [Электронный ресурс] / М. Эддоус, Р. Стэнсфилд. – Режим доступа : http: // sider.home.nov.ru.

33. Жевняк Р. М. Теория вероятностей и математиче-

ская статистика : учебное пособие для студентов инженерно-экономических специальностей / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, В. Т. Унукович. – Минск : Харвест, 2000. – 384 с.

34. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник : у 2 ч. Ч. 1. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Київ : КНЕУ, 2005. – 304 с.

35. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посібник : у 2 ч. Ч. 2. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2005. – 364 с.

36. Карасев А. И. Курс высшей математики для экономических вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высшая школа, 1982. – Ч. 2. – 344 с.

37. Теория вероятностей в примерах и задачах : учебное пособие / В. А. Колемаев, В. Н. Калинина, В. И. Соловьев и др. – Москва : ГУУ, 2001. – 87 с.

38. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – Москва : Наука, 1975. – 146 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

Абсолютний шлях снаряда – шлях снаряда, що визначається в нерухомій стосовно гармати системі координат. – С. 424.

Абсолютна висота – висота точки місцевості над середнім рівнем Балтійського моря. Підписи абсолютної висоти на карті називаються відмітками (відм. 96,2), а на випадок, якщо підписана вершина гори – висотами (вис. 143,8). Підписи висот рівнів води називаються урізами води. – С. 424.

Абсциса вершини траєкторії – відстань від точки вильоту до проекції вершини траєкторії на горизонт гармати (міномета). – С. 424.

Алгоритм – система правил (приписів), що визначає послідовність логічних та обчислювальних операцій для розв'язання задач в усіх можливих варіантах. – С. 424.

Аналіз – процедура мисленого або реального розподілення предмета (явища, процесу), властивостей предмета або відношень між предметами на частини, ознаки, властивості, відношення. – С. 16, 31, 50, 93, 350, 417, 419, 424, 460.

Анеморумбометр (вітромір) – прилад для вимірювання швидкості й напрямку вітру. Швидкість вітру визначається за тиском вітру на рухому частину приладу – анеметричну вертушку, напрямок – за поворотом флюгера. Входить до комплекту приладів артилерійських метеорологічних станцій. – С. 424, 439.

Артилерія це: 1) складова частина основного роду Сухопутних військ – ракетних військ і артилерії; 2) вид зброї або сукупність предметів озброєння, що охоплює увесь комплекс артилерійського озброєння й бойової техніки, призначених для розвідки та ураження об'єктів (цілей) у бою та операції; 3) наука про артилерійське озброєння та його застосування. – С. 12, 424, 458.

Артилерійський вогонь – основний спосіб ураження противника артилерією в бою й операції. Ураження противника артилерійським вогнем досягається стрільбою різними видами артилерії із закритих ВП і прямою наводкою. Вогонь може вестися поодинокими пострілами, методичним і швидким вогнем, а також залпами із завданням знищення, руйнування, подавлення цілі або виснаження противника. В обороні та наступі артилерійський вогонь організовується за періодами вогневого ураження, для цього створюється система артилерійського вогню.

Ефективність ураження цілі артилерійським вогнем досягається точністю стрільби, масуванням вогню і раптовістю його відкриття, широким маневром та вмілим управлінням артилерійськими підрозділами (частинами, групами). – С. 10–11, 37, 424–425, 437, 439, 442, 449, 464, 470, 477–478.

Артилерійський дивізіон – основний вогневий і тактичний підрозділ в артилерії сучасних армій. Входить до складу частини (з’єднання), може бути окремим. Існують артилерійські дивізіони: гарматної, мінометної, реактивної, протитанкової та самохідної артилерії, зенітної артилерії та ін. Зазвичай артилерійський дивізіон включає три артилерійські батареї, підрозділ управління та забезпечення. – С. 424.

Артилерійський снаряд – основний елемент артилерійського пострілу, призначений для виконання бойового завдання відповідно до його призначення та дії. Артилерійські снаряди поділяють на такі види: основного, спеціального і допоміжного призначення. До снарядів *основного* призначення належать: осколкові, фугасні, осколково-фугасні, кумулятивні, бронебійні, бронебійно-фугасні, запальні та інші, призначені для ураження цілей; до снарядів *спеціального* призначення – димові, освітлювальні, агітаційні та інші, призначені для виконання завдань, що сприяють ураженню цілі або створенню перешкод діям противника; до снарядів *допоміжного* призначення – практичні, плитопробні, лафетопробні, навчальні та інші, призначені для навчально-бойових і випробувальних стрільб, вивчення їх будови і навчання правил поводження з ними. – С. 424.

Атмосфера – повітряна оболонка Землі, що бере участь у її добовому й річному обертанні. Простягається до висоти кількох тисяч кілометрів (приблизно 36 000 км) і поступово переходить у міжпланетний простір.

Маса атмосфери – $5{,}15710^{15}$ т, тобто менше однієї мільйонної маси Землі. Близько 99 % маси атмосфери зосереджено внизу (30–35 км), причому 0,9 маси атмосферного повітря приходиться на перші 20 км, а 0,5 – на перші 5 км.

Атмосфера Землі складається із механічної суміші газів.

Склад сухого повітря у процентному відношенні до загального об'єму: азот – 78,08; кисень – 20,95; аргон – 0,93. На частку інших газів припадає менше ніж 0,04 %. У повітрі завжди є водяна пара (від 0 до 4 %), вуглекислий газ (від 0,02 до 0,04 %) і різні домішки.

За характером зміни температури повітря з висотою атмосферу поділяють на декілька шарів: тропосферу, стратосферу, мезосферу і термосферу. Перехідні шари між основними атмосферними шарами називаються: між тропосферою і стратосферою – тропопаузою, між стратосферою і мезосферою – стратопаузою, між мезосферою і термосферою – мезопаузою. – С. 424.

Атмосферний тиск – тиск, що його зазнають усі предмети, які знаходяться в атмосфері, а також земна поверхня. Атмосферний тиск у кожній точці атмосфери дорівнює масі стовпа повітря, що лежить вище і має основу в одну одиницю площі та простягається від даного рівня до верхньої межі атмосфери.

Згідно Міжнародної системи одиниць (СІ) одиницею тиску є Паскаль (Па) – тиск, що викликається силою в один Ньютон, рівномірно розподіленою по нормальній до неї поверхні площею 1 м^2. 1 мілібар (мбар) у цій системі одиниць чисельно дорівнює 100 Па або 1гПа (гектопаскалю), а один міліметр ртутного стовпчика – 1,333 гПа, тобто 1 гПа = 1 мбар = 0,75 мм рт. ст., 1 мм рт. ст. = 1,333гПа = 1,333 мбар. – С. 425, 428.

Б

База – горизонтальна відстань між двома вибраними точками, що використовується для визначення положення інших точок. – С. 425.

База даних – структура даних, що дозволяє одержувати, нагромаджувати або видавати інформацію на запити численних незалежних користувачів. Існують чотири типи організації баз даних: мережа реляційна, локальна реляційна, мережа нереляційна і локальна нереляційна. – С. 425.

Балістика – наука про закони руху ракет, артилерійських снарядів, куль, мін, реактивних снарядів тощо. Балістика поділяється на внутрішню і зовнішню. *Внутрішня балістика* висвітлює закони руху снарядів у стволі вогнепальної зброї, а *зовнішня балістика* – рух снарядів після вильоту їх зі ствола. – С. 30, 31, 425–426, 448.

Балістична подібність – властивість артилерійських гармат, яка полягає у подібності залежностей, що характеризують процес горіння порохового заряду під час пострілу в каналах стволів різних артилерійських систем. – С. 426.

Балістична траєкторія снаряда – траєкторія руху снаряда під впливом сили ваги та сили лобового опору повітря. – С. 426.

Балістичне відхилення метеорологічної величини – умовне, постійне у межах висоти траєкторії польоту снаряда (ракети) відхилення від табличного розподілу метеовеличини, яке щодо свого впливу на політ снаряда (ракети) еквівалентне впливу дійсних, неоднакових на різних висотах відхилень метеорологічної величини. Таке відхилення метеорологічної величини називається балістичним, тому що воно залежить від балістичних характеристик артилерійської системи, снаряда, заряду або балістичних характеристик ракети. – С. 426.

Балістичний коефіцієнт – одна з основних зовнішньобалістичних характеристик снаряда (ракети), що відображає вплив його форми, калібру і маси на здатність долати опір повітря у польоті. Значення балістичного коефіцієнта використовується під час балістичних розрахунків та оцінювання аеродинамічної форми різних снарядів:

$$C = id^2/q \cdot 10^3,$$

де C – балістичний коефіцієнт; i – форма снаряда (ракети); d – калібр, м; q – маса, Н. – С. 427.

Балістичні характеристики – основні дані, що визначають закономірність розвитку процесу пострілу (пуску) і руху снаряда (ракети) на траєкторії. – С. 426.

Балістичні характеристики боєприпасів – основні дані, що визначають закономірність розвитку процесу руху снаряда (міни) у каналі ствола (внутрішньобалістичні) або на траєкторії (зовнішньобалістичні). Основні внутрішньобалістичні характеристики боєприпаса: калібр, щільність заряджання, довжина шляху в каналі ствола, відносна маса заряду (відношення її до маси снаряда), сила пороху, максимальний тиск порохових газів, тиск форсування, характеристики прогресивності горіння пороху та ін. До основних зовнішньобалістичних характеристик належать: початкова швидкість, балістичний коефіцієнт, кути кидання і вильоту, середні відхилення та ін. – С. 426–427.

Балістичний наконечник снаряда (ракети) – порожнистий гострий ковпак, закріплений нерухомо на притупленій головній частині снаряда або ракети для поліпшення їх балістичної форми (зменшує опір повітря під час польоту). Виробляється зазвичай із легких матеріалів із мінімальною товщиною стінок. – С. 427.

Балістичні умови стрільби – сукупність балістичних характеристик, що впливають на політ снаряда, міни. – С. 341, 427.

Балістична підготовка стрільби – визначення відхилень балістичних умов стрільби від табличних, що передбачає вимірювання відхилень початкової швидкості снарядів, виявлення різнобою гармат, температури зарядів, балістичних характеристик боєприпасів, розподіл боєприпасів між підрозділами й гарматами, їх сортування щодо балістичних характеристик та врахування під час підготовки стрільби. – С. 16, 22, 93, 158, 177, 250, 269–270, 324, 331–332, 339, 341, 427–428, 435–436, 451, 454, 458, 460, 463, 468, 473.

Балістична станція – прилад для вимірювання швидкості снаряда (міни) на траєкторії. – С. 427.

Балістичне відхилення температури повітря – розраховане (умовне), постійне у межах висоти траєкторії снаряда (ракети) відхилення віртуальної температури повітря від її табличного значення, яке викликає таке саме відхилення точки падіння снаряда (ракети) за дальністю, як і змінне з висотою дійсне відхилення температури повітря. – С. 177, 340, 427.

Балістичний вітер – розрахований (умовний), постійний у межах висоти траєкторії артилерійського снаряда (ракети) вітер, який викликає таке саме відхилення точки падіння снаряда (ракети) за дальністю і напрямком, як і змінний із висотою дійсний вітер. – С. 93, 333, 427.

Барометр – прилад для вимірювання атмосферного тиску. За принципом дії розрізняють: рідинний барометр, що ґрунтується на законах гідростатики; атмосферний тиск вимірюється в ньому висотою стовпчика ртуті, який зрівноважує тиск; барометр-анероїд побудований на використанні пружних деформацій тіл. Барометр-анероїд входить до комплекту приладів артилерійських метеологічних станцій. – С. 427.

Барограф – прилад для безперервної реєстрації (запису) атмосферного тиску. Складається із приймальної частини, з'єднаної з реєструвальним пристроєм системою важелів, і барабана зі стрічкою, який обертається годинниковим механізмом. Залежно від принципу дій розрізняють барограф анероїдний і ртутний, залежно від швидкості обертання барабана – добовий і тижневий. Найбільш поширені анероїдні барографи. Приймальна частина анероїдного барографа складається із декількох (залежно від потрібної чутливості) анероїдних коробок, скріплених у вигляді стовпчика (анероїдний стовпчик). Деформація анероїдного стовпчика через систему важелів, що надто збільшує розмах коливань висоти стовпчика, передається на перо самописця, яке переміщується по стрічці. Входить до комплекту приладів артилерійських метеорологічних станцій. – С. 428.

Барометричний ступінь – висота в метрах, на яку необхідно піднятися або опуститися, щоб тиск атмосфери зменшився або збільшився на 1 мб (мм). Синоніми: баричний ступінь. – С. 428.

Барометричне нівелювання – визначення різниць висот точок шляхом вимірювання атмосферних тисків у цих точках за допомогою барометрів. Різниця висот двох точок знаходиться як добуток баричного ступеня висоти на різницю показань барометра у точках. Цей спосіб застосовується для визначення висот елементів бойового порядку ракетних і артилерійських підрозділів у гірських умовах. – С. 428.

Батарея – вогневий і тактичний підрозділ в артилерії. Батареї можуть бути окремими (у батальйонній і бригадній артилерії) або входити до складу артилерійського дивізіону (полку). Складається із 2–3 вогневих взводів, взводу (відділення) управління і може мати 4–8 гармат (мінометів, РСЗВ, установок ПТРК) і більше. У бою батарея виконує завдання самостійно або у складі дивізіону в повному складі або окремими взводами. Вона може одночасно виконувати одне або декілька вогневих завдань, але не більше кількості гармат у батареї. Артилерійська (реактивна) батарея може стріляти із закритих ВП і прямою наводкою, а мінометна – лише із закритих ВП.

Батареями називаються також підрозділи артилерійської розвідки (оптичної, звукометричної, топографічної, радіотехнічної і т. ін.) та управління. У ракетних військах батареї називаються стартовими й технічними, є батареї паркові, навчальні і т. ін. – С. 418, 428–429, 441, 456, 470.

Батарейний термометр – прилад для вимірювання температури метальних зарядів артилерійських пострілів. – С. 429.

Безпечне віддалення – найменша відстань від центрів (епіцентрів) ядерних вибухів, а також розривів снарядів (бомб, торпед і т. ін.) у звичайному спорядженні до передових підрозділів своїх військ, на якій особовий склад не уражається. Безпечне віддалення залежить від радіуса зони ураження боєприпасів, імовірного відхилення їх від намічених об'єктів (цілей) унаслідок розсіювання, помилок у підготовці стрільби (пуску ракет), ступеня захищеності особового складу та інших чинників. Визначаючи безпечне віддалення від наміченого центру (епіцентру) ядерного вибуху, враховують радіус безпеки за основними уражаючими факторами ядерного вибуху залежно від потужності й типу ядерного боєприпаса, виду вибуху, ступеня захищеності наших військ з урахуванням їх розташування (дій), характеру місцевості, погоди й часу доби, а також найбільш імовірне відхилення фактичного центру (епіцентру) вибуху від наміченого. Під час стрільби артилерійськими боєприпасами безпечне віддалення установлюється залежно від дальності стрільби (пуску ракет), типу ракет, що застосовуються, калібру і типу гармат (РСЗВ), виду снаряда та установлення підривника, характеру місцевості й захищеності своїх військ. Розраховуючи безпечне віддалення, враховують найбільш імовірне відхилення снарядів (ракет, мін) від наміченого об'єкта (об'єктів) і радіус розльоту бойових елементів (осколків) під час вибуху. Розрахунки і практика свідчать, що безпечне віддалення під час стрільби артилерією осколково-фугасними боєприпасами зазвичай становить 200–400 м. – С. 429.

Бойовий комплект (артилерійський боєкомплект) (бк) – це: 1) кількість і склад боєприпасів (ракет), установлених на одиницю озброєння (гармату, міномет, бойову машину, установку ПТРК і т. ін.). Боєкомплект підрозділу, частини, з'єднання, об'єднання поєднує сумарну кількість боєприпасів для усіх видів наявного озброєння за їх типами; 2) розрахунково-постачальна одиниця при визначенні витрати боєприпасів у бою і під час виконання визначеного завдання, обчислення забезпеченості боєприпасами підрозділу (частини, з’єднання, об’єднання) у бою (операції). – С. 429–430.

Боєприпаси – складова частина озброєння, призначена для ураження живої сили й техніки, зруйнування споруд (укріплень) та виконання спеціальних завдань (освітлення, задимлення, розкидання агітаційного матеріалу та ін.). – С. 430, 444.

Бойові властивості артилерії – сукупність даних, що характеризують артилерію як засіб виконання завдань ураження противника в бою та операції. Основними бойовими властивостями артилерії є велика дальність стрільби, висока точність та ефективність ураження, здатність до маневру та швидкого масування на головних напрямах. – С. 430.

Бойова ефективність зброї, ступінь його пристосованості до виконання бойових завдань у різноманітних умовах обстановки. Є тактико-технічною характеристикою зброї. Бойова ефективність визначається величиною збитку, що завдається об’єктам противника за певний час із певною витратою матеріальних засобів, з урахуванням надійності, живучості та боєготовності самої зброї. – С. 430.

Бойова ефективність озброєння – це: 1) ступінь відповідності можливих або одержаних результатів бойового застосування даного озброєння потрібним результатам; 2) ступінь пристосування зброї до виконання бойових завдань у різних умовах бойової обстановки; 3) ступінь пристосованості системи (зразка озброєння) до виконання бойових завдань у різних умовах обстановки, характеризується величиною збитку, завданого противнику за певний час та з урахуванням матеріальних витрат. – С. 430.

Бойова швидкострільність – найбільша кількість пострілів, яку можна виконати за одиницю часу з даної зброї без шкоди для матеріальної частини з урахуванням часу, необхідного для перезаряджання, зміни наводки тощо. – С. 430.

Бойові можливості – це: 1) спроможність зразка озброєння за певних умов обстановки завдавати ураження противнику та здійснювати маневр. Характеризуються кількістю одночасно уражуваних об’єктів, ступенем їх ураження, глибиною ураження, а також маневровими можливостями; 2) кількісні та якісні показники, що характеризують можливість ракетних і артилерійських підрозділів щодо виконання бойових завдань за установлений час у конкретній обстановці. Бойові можливості залежать від наявності й стану зброї та бойової техніки, рівня підготовки особового складу, його морально-психологічного стану, мистецтва командного складу в управлінні військами, організаційної структури військ, забезпеченості їх матеріально-технічними засобами, а також від характеру протидії противника, умов місцевості, метеорологічних умов та інших чинників. Бойові можливості ракетних військ і артилерії характеризуються ураженням противника, можливістю ураження противника ракетами та артилерійськими снарядами у різному спорядженні, маневровими можливостями підрозділів. Окремо визначаються можливості щодо створення щільності артилерії на 1 км фронту під час стрільби із закритих ВП і прямою наводкою. Бойові можливості оцінюються ймовірністю знищення об’єктів (цілей), математичним сподіванням числа цілей або частки площі, що уражається із заданим ступенем, бойовою (пошуковою) продуктивністю та іншими показниками. – С. 430–431.

Бойова стрільба артилерії – стрільба артилерії з метою виконання вогневого завдання (завдань) у бою та операції. На полігоні бойові стрільби проводяться по мішенях (цілях) для виконання вогневого завдання відповідно до Курсу підготовки артилерійських частин (підрозділів) в умовах, максимально наближених до бойової обстановки. Такі стрільби проводяться зазвичай на завершальному етапі злагодженості артилерійських підрозділів та частин і є найвищою формою підготовки (навчання) особового складу (підрозділів, частин) щодо застосування артилерії. – С. 431.

Бойові стрільби – артилерійські стрільби або стрільби з інших видів зброї, що проводяться бойовими або практичними снарядами і патронами. За цільовим призначенням бойові стрільби можуть бути тренувальними, заліковими, показовими, спробними. – С. 12, 431.

Бойовий потенціал об’єкта – це кількісно-якісна характеристика його можливостей із надання протидії противнику під час виконання об’єктом своїх функціональних обов’язків у бою. Бойовий потенціал об’єктів, що складаються із засобів ближнього бою або засобів підтримки, залежить від кількості вогневих засобів, що входять до нього (кількісна характеристика), ефективної швидкострільності цих вогневих засобів (якісна характеристика) та умов ведення бойових дій. Величину бойового потенціалу виражають у розрахункових одиницях. – С. 431–432, 446.

Бойовий потенціал підрозділів – сукупність матеріальних і духовних факторів, що визначають стан підрозділів та їх здатність виконувати завдання, поставлені перед ними; найважливіша складова частина воєнного потенціалу Сухопутних військ. Основні структурні елементи бойового потенціалу підрозділів: оснащеність їх сучасним озброєнням та військовою технікою, рівень бойової майстерності військовослужбовців, стан їхнього морального духу. – С. 432, 446.

Бризантні вибухові речовини – вибухові речовини, що мають високу бризантну властивість (швидкість детонації – 7 000 м/с і більше). Застосовується для спорядження осколкових, осколково-фугасних, бетонобійних, кумулятивних та інших артилерійських снарядів. – С. 432.

Бюлетень «Метеосередній» – зведення даних про метеорологічні умови стрільби, що складається із цифр. Цифри розміщуються за групами так, що значення кожної цифри визначається її місцем у групі й місцем групи у бюлетені. Групи відокремлюються одна від одної знаком «тире», який називається розділом.

У бюлетені зазначають відхилення наземного тиску атмосфери й наземної віртуальної температури повітря від їх табличних значень на рівні метеостанції; у шарах від поверхні землі до відповідних стандартних висот бюлетеня вміщують середні відхилення щільності й температури повітря, дирекційний кут напрямку (звідки дме) і швидкість середнього вітру; у титульній частині бюлетеня зазначають шифр бюлетеня – «Метео 11», умовний номер метеостанції, яка склала бюлетень, дату складання його, години та десятки хвилин закінчення зондування атмосфери, висоту метеостанції над рівнем моря. В останній групі бюлетеня наводять досягнуті висоти температурного і вітрового зондування атмосфери в кілометрах. Бюлетень містить усі необхідні дані для врахування умов стрільби наземної, зенітної й морської артилерії й урахування метеоумов під час ведення звукової розвідки. – С. 432–433.

В

Вагові знаки – плюси (мінуси) та комбінації літер, що нанесені на корпус снаряда (міни) і показують відхилення його маси від нормального табличного значення. Так, мінус (плюс) означає, що маса цього снаряда менша (більша) нормальної маси на 1/3 – 1 %, знак ТЖ означає, що маса снаряда більша нормальної понад 3 %, а ЛГ – менша нормальної понад 3 %. – С. 433.

Ведучі частини артилерійського снаряда – елементи снаряда, що забезпечують ведення його по напрямній частині каналу ствола. До ведучої частини артилерійського снаряда належать центрувальні потовщення на циліндричній частині корпусу та ведучі пояски. Ведучі частини міни – центрувальні потовщення на корпусі міни з лабіринтними кільцевими канавками для обтюрації порохових газів у каналі ствола під час пострілу і стабілізатор, розміщений у хвостовій частині міни. У реактивних снарядів ведучими частинами є центрувальні потовщення (два-три) на ракетній частині снаряда. – С. 433.

Ведучий поясок снаряда – частина артилерійського снаряда, міцно закріплена на корпусі, призначена для обтюрації порохових газів і ведення снаряда по нарізах ствола артилерійської гармати, чим забезпечується надання снаряду обертального руху для стійкого польоту його на траєкторії. Ведучі пояски бувають мідними, мідно-нікелевими і можуть бути виготовлені із залізокераміки та інших матеріалів, що здешевлює виробництво снарядів. – С. 433.

Велике зміщення – таке розташування вогневої позиції, спостережного пункту і цілі, коли кут при цілі дорівнює або більше 5-00. – С. 433.

Величина стрибка прицілу – стрибок прицілу в метрах (див. стрибок прицілу). – С. 433, 452, 471.

Вершина траєкторії снаряда (ракети) – найвища точка траєкторії. – С. 433.

Віяло: 1) віяло батареї (взводу) – взаємоузгоджений напрям стволів гармат (мінометів, бойових машин) для ведення вогню. Віяло може бути паралельним, скупченим і за шириною цілі.

Під час паралельного віяла осі каналів стволів гармат (мінометів, бойових машин) паралельні, а під час скупченого віяла продовження осей каналів стволів гармат перетинаються на цілі (об'єкті). При віялі за шириною цілі відстані між продовженням осей каналів стволів сусідніх гармат на ціль дорівнюють фронту цілі, поділеному на число гармат батареї (взводу); 2) віяло розривів – сукупність розривів снарядів (мін) батарейної (взводної) черги або залпу. – С. 433–434, 452.

Відновлення боєздатності – приведення підрозділів, частин і з'єднань, які потрапили під дію ЗМУ, ВТЗ до стану готовності до виконання бойових завдань. Включає: відновлення управління; визначення ступеня ураження особового складу й пошкодження військової техніки та зброї; проведення організаційних заходів із метою створення боєздатних підрозділів, частин і з'єднань або зведених формувань; уточнення або постановки нових бойових завдань; підняття морального духу особового складу; прикриття районів відновлення боєздатності від проникнення противника; надання медичної допомоги особовому складу; виведення військ із зон зараження, районів руйнувань, пожеж, затоплень; усунення пошкоджень на зброї та техніці; поповнення запасів матеріальних засобів тощо. Ці заходи вживаються комплексно в усіх військових ланках, їх терміни залежать від характеру й розміру втрат і рівня підготовленості військ. – С. 434.

Відносна вологість – відношення фактичної абсолютної вологості до абсолютної вологості для стану насичення за однакової температури. Відносна вологість виражається у відсотках (від 0 до 100 %). У цілком сухому повітрі відносна вологість дорівнює 0, за повного насичення повітря водяними парами – 100 %. – С. 434.

Відносна довжина снаряда – відношення довжини снаряда до його калібру. Відносна довжина снаряда, що обертається через складність стабілізації в польоті, повинна бути не більше шести калібрів. – С. 434.

Відносна маса заряду – відношення маси метального заряду до маси снаряда. Це відношення використовується під час балістичного розрахунку стволів. – С. 434.

Відносна маса розривного заряду – відношення маси розривного заряду до куба калібру даного снаряда. Відносна маса розривного заряду показує, яка кількість розривного заряду припадає на умовну одиницю об’єму снаряда і характеризує ступінь наповнення корпусу снаряда розривним зарядом. – С. 434–435.

Відносна маса снаряда – відношення маси снаряда до маси гармати у бойовому положенні. Відносна маса снаряда є складовою частиною коефіцієнта використання металу артилерійської гармати. Чим більша відносна маса снаряда, тим досконалішою вважається артилерійська гармата за однакової початкової швидкості снаряда. – С. 435.

Відносна маса ракети – відношення стартової маси ракети до маси корисного вантажу. – С. 435.

Відносна швидкість снаряда – швидкість поступального руху снаряда відносно ствола. Під час балістичного розрахунку ствола визначають відносну швидкість снаряда, яка за величиною більша абсолютної на величину швидкості відкоту ствола. – С. 435.

Відношення – завдання на множині М декартового добутку $M' \times M'' \leq M$. Пари, які належать до $M' \times M''$, є елементами відношення, а сукупність цих пар утворює графік відношення або його екстенсіонал. Відношення може мати ряд внутрішніх властивостей і деяку зовнішню семантику, що пов’язана з його ім’ям. Уся ця інформація створена до цього інтенсіоналом. – С. 435.

Відхилення наземного тиску атмосфери – різниця між виміряним наземним тиском атмосфери й табличним значенням наземного тиску, що дорівнює 750 мм рт. ст. – С. 435.

Відхилення наземної віртуальної температури повітря – різниця між вимірюваною наземною віртуальною температурою і наземною табличною віртуальною температурою, що дорівнює 15,9 °С. – С. 435.

Відхилення початкової швидкості снаряда – зміна величини дійсної швидкості снаряда від розрахункового значення. Відхилення початкової швидкості снаряда бувають додатними й від’ємними. Додатним воно вважається, якщо дійсна початкова швидкість снаряда вища розрахункової, від’ємним – навпаки. Відхилення початкової швидкості снаряда визначається за допомогою спеціальних балістичних станцій і виражається у відсотках. – С. 153, 245, 266, 435–436, 463.

Відхилення температури заряду – величина різниці дійсної температури метального заряду артилерійського пострілу й табличної температури, що дорівнює 15 °С. – С. 436, 463.

Віртуальна поправка – різниця між віртуальною і дійсною температурою повітря. – С. 436.

Віртуальна температура повітря – така температура, яку повинне мати сухе повітря, щоб його щільність дорівнювала щільності вологого повітря за однакового тиску. – С. 436, 455.

Вітер – переміщення повітряних мас відносно земної поверхні. Характеризується швидкістю, що виражається в метрах за секунду (м/с), і напрямком (звідки вітер віє), що визначається в поділках кутоміра або в градусах кута. – С. 93, 269, 291, 309, 332, 339, 426, 436, 443, 457, 465, 470.

Вітромір – прилад для визначення напрямку і швидкості вітру. – С. 422, 436.

Вітрова рушниця – стрілецький вітровимірювальний прилад для визначення вітру у шарі активної ділянки траєкторії некерованих реактивних снарядів. Визначення вітру за допомогою вітрової рушниці ґрунтується на тому, що швидкість вітру пропорційна величині зносу кулі, що парашутує, і яка закидається вертикально вгору на визначену висоту пострілом із вітрової рушниці. Напрямок вітру визначається за дирекційним кутом на точку падіння вітрової кулі. – С. 436.

Вибухова хвиля – спричинена вибухом сфера надмірного тиску середовища (газоподібного, рідкого або твердого), що швидко поширюється у всі боки від місця вибуху. – С. 436.

Вибухостійкість – спроможність об’єкта протистояти впливу уражаючих факторів вибуху. – С. 436.

Вивід імовірний – вивід, за якого кожний вираз, що використовується в ньому, має оцінювання правдоподібності у вигляді ймовірності того, що він є істинним. При виводі ймовірному застосовують спеціальні процедури для обчислювання ймовірності істинного значення результуючого виразу за ймовірністю посилань, що використовуються під час виведення. – С. 436.

Види артилерійського вогню – класифікація артилерійського за кількістю залучених засобів і тактичним призначенням. Для ураження цілей артилерійські підрозділи і частини застосовують такі види вогню: вогонь по окремій цілі, зосереджений вогонь (ЗВ), нерухомий, рухомий загороджувальний вогонь (НЗгВ, РЗгВ), масований вогонь, послідовне зосередження вогню (ПЗВ), вогневий вал. Види артилерійського вогню залежать від дій загальновійськових підрозділів, що залучаються для виконання вогневих завдань. – С. 436–437.

Вилка – різниця двох кутів піднесення (двох установок прицілу в разі однакового установлення рівня), на одному з яких під час пристрілювання отримано переліт, а на іншому – недоліт. – С. 437, 479.

Випадкова величина – величина, що внаслідок досліду може набувати те або інше значення, причому невідомо завчасно, яке саме. – С. 17, 93–95, 97, 101–102, 106–115, 118, 124, 136, 140–145, 152–157, 163–167, 172–179, 190, 195–197, 201–203, 226–228, 235, 266, 270–272, 276, 283–288, 290, 293, 306–310, 344, 346–348, 392, 412, 437.

Випробування (експеримент) – деяка сукупність умов, за яких спостерігається те або інше явище, фіксується той або інший результат. Дослід може проводитися багаторазово в подібних (незмінних основних) умовах, проте ряд другорядних умов та факторів, що неможливо проконтролювати змінюється від випробування до випробування та приводить до різних результатів наслідків експерименту. – С. 16, 28, 37, 48, 50–53, 58, 69–82, 102, 124, 367, 437, 442, 450, 462.

Випадкова подія – будь-який факт, який у результаті експерименту може відбутися або не відбутися. Випадкові події позначають великими латинськими буквами *A*, *B*, *C*. – С. 437, 448.

Висота відносна – перевищення однієї точки стосовно іншої точки (поверхні). Висота відносна точки визначається різницею абсолютних висот точок або числом проміжків між горизонталями, помноженим на висоту перетину. Застосовується у ході топогеодезичної прив'язки елементів бойового порядку. – С. 437.

Випадки – наслідки випробування, що утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. – С. 45–47, 60, 79, 226, 231, 255, 265, 293, 300, 345, 437–438.

Випадок сприятливий – подія *А*, якщо він спричиняє до обов'язкової появи події *А*. – С. 438.

Висота траєкторії – відстань за перпендикуляром від площини горизонту до вершини траєкторії. – С. 332, 372, 438–440.

Висота розриву – віддалення розриву за висотою від горизонтальної площини, що проходить через ціль. Висоту розриву вимірюють кутомірним приладом під час стрільби снарядами з дистанційним підривником (трубкою). – С. 438.

Висхідна гілка траєкторії – ділянка траєкторії від точки вильоту (пуску) до її вершини. – С. 438.

Витрата боєприпасів – кількість боєприпасів, що планується до витрати або фактично витрачена на виконання вогневого завдання. Витрата боєприпасів виражається у штуках, частках норми витрат або бойового комплекту. – С. 438, 458, 465.

Влучність стрільби (пуску) – ступінь суміщення середньої траєкторії падіння снарядів (мін, куль) із ціллю. Влучність залежить від досконалості й технічного стану зброї, боєприпасів, приладів стрільби і спостереження, а також від уміння того, хто стріляє, точно визначати положення цілі, установки для стрільби, здійснювати прицілювання, виконувати прийоми поводження зі зброєю і приладами під час підготовки стрільби та пострілу. – С. 438.

Вогонь – основний засіб ураження противника в бою і операції. Вогонь ведеться з різних видів зброї, включає також пуск ракет у звичайному спорядженні. Вогонь може вестися із завданням знищення, придушення, зруйнування цілі або виснаження противника. Ефективність ураження цілі вогнем досягається високою точністю стрільби (ударів), його раптовістю, масуванням вогню по найважливіших об'єктах (цілях), широким маневром та умілим керуванням вогнем. З урахуванням характеру цілі, кількості артилерії, що залучається, і завдання вибираються види та порядок ведення артилерійського вогню. – С. 10–12, 37, 422–423, 438–441, 446–449, 459, 465–467, 470, 477–479.

Вогневе завдання – завдання на ураження противника, що вирішується шляхом ведення вогню (пусків). Під час поставлення вогневого завдання зазначаються: ціль (об'єкт), завдання стрільби (удару) на знищення, подавлення і т. ін., час відкриття (припинення) вогню, кількість засобів (підрозділів), що залучаються, вид та витрата боєприпасів, порядок ведення вогню (швидким вогнем, чергами і т. ін.), спосіб обстрілу цілі. – С. 438.

Вогонь на знищення об'єкта (цілі) – полягає у завданні об'єкта (цілі) таких втрат (пошкоджень), через які він повністю втрачає свою боєздатність. – С. 439.

Вогонь на подавлення об'єкта (цілі) – вогонь, який полягає у завданні об'єкта (цілі) таких втрат (пошкоджень) і створенні вогнем таких умов, за яких об'єкт (ціль) тимчасово позбавляється боєздатності, обмежується (забороняється) його маневр або порушується керування. – С. 439.

Вогонь по окремих цілях (ВОЦ) – вогонь батареї, взводу або гармати (мінометa, бойової машини, установки ПТРК), що ведеться по цілі самостійно із закритої вогневої позиції або прямою наводкою. – С. 439.

Вогонь напівпрямою наводкою – спосіб ураження спостереженої наземної або надводної цілі за короткий проміжок часу, якщо гармата або установка ПТРК (вогневий засіб) наводиться за напрямком безпосередньо у ціль. При цьому висота траєкторії снаряда (ракети) може значно перевищувати висоту цілі. – С. 439.

Вогонь прямою наводкою – спосіб ураження спостереженої наземної або надводної цілі за короткий проміжок часу, коли гармата або установка ПТРК (вогневий засіб) наводиться безпосередньо на ціль. – С. 12–13, 63, 422, 427, 430, 439, 451, 457, 467, 472–474.

Вогневе ураження противника (ВУП): 1) у загальновійськовому бою полягає: в узгодженому, одночасному та послідовному комплексному вогневому впливі на нього засобів різних родів військ і спеціальних військ із застосуванням ракет і боєприпасів, заповнених звичайними та запалювальними речовинами; у завданні ударів ракетними військами й авіацією із застосуванням ракет, бомб та інших видів авіаційної зброї; у веденні усіх видів вогню артилерії та вогневими засобами танкових і механізованих військ; застосуванні дистанційних мінно-вибухових загороджень і запалювальних речовин; а на приморських напрямах – у завданні ракетних ударів та веденні вогню засобами кораблів і береговими ракетно-артилерійськими засобами ВМС;

2) знищення (придушення) противника вогнем різних видів зброї, ударами ракет, військ та авіації із застосуванням боєприпасів у звичайному спорядженні. Здійснюється впродовж усього бою. Розрізняють загальне та безпосереднє вогневе ураження.

Загальне вогневе ураження ведеться безперервно з метою постійного ураження тактичних засобів ядерного нападу та елементів високоточної зброї (ВТЗ), польової артилерії, пунктів управління військами і зброєю, засобів розвідки й радіоелектронної боротьби, систем ППО, інших ешелонів та резервів.

Безпосереднє вогневе ураження – виконання військами вогневих завдань, що проводяться за єдиним задумом і планом дії сил та засобів вогневого ураження щодо завдання ударів і ведення вогню з метою зменшення протидії підрозділів противника під час виконання військами тактичних завдань. Під час ВУП може застосовуватися ВТЗ у таких формах: вогневий наліт артилерії, поодинокий і груповий удари бойових вертольотів (літаків). Зусилля різних сил і засобів, що застосовують ВТЗ, ретельно узгоджуються за зонами відповідальності та завданнями, способами й методами їх вирішення, що виконуються. – С. 439–445.

Вогонь унакладку – зосереджений або масований вогонь артилерії, що ведеться усіма батареями (дивізіонами) одночасно за всією площиною цілі (ділянці цілей). Батареї обстрілюють ціль на трьох установках прицілу та одній – двох установках кутоміра. – С. 440.

Вогонь залпами – одночасний вогонь із декількох гармат, мінометів, ракетних і реактивних пускових установок або інших вогневих засобів. Застосовується під час стрільби на ураження об'єктів (цілей), а також урочистих салютів і відданні військових пошан. – С. 440.

Вогнева можливість артилерії – обсяг вогневих завдань, що можуть бути виконані визначеним складом артилерії (підрозділу, частини, з'єднання або угруповання артилерії об'єднання), що залучається, у визначений час або встановленою кількістю боєприпасів та досягаємою ефективністю ВУП, кількістю уражених (одночасно або послідовно) об'єктів та іншими показниками. Вогневі можливості окремої гармати (міномета, пускової установки) визначаються дальністю і точністю стрільби, бойовою швидкострільністю, потужністю боєприпаса, можуть виражатися кількістю уражених цілей, протяжністю фронту вогневого валу або загороджувального вогню і т. ін. – С. 440–441.

Вогневе спостереження – артилерійський вогонь, що ведеться по цілі у проміжках між вогневими нальотами з метою недопустити відновлення її діяльності. Ведеться методичним вогнем, серіями швидкого (методичного) вогню або їх сполученням. – С. 441.

Втрати бойові: 1) результат вогневого впливу, що веде до зниження бойового потенціалу (бойових можливостей) угруповання противника (хоча б тимчасове); 2) вихід зі строю людей і бойової техніки, а також шкода, завдана матеріальним засобам, унаслідок дії противника. Втрати бойові у живій силі поділяють на чотири групи: убиті, зниклі безвісти, поранені, хворі; у техніці – на чотири групи: безповоротні, що потребують капітального, середнього та поточного ремонту. Відрізняють втрати бойові безповоротні та поворотні. До безповоротних утрат належать: у живій силі – убиті та зниклі безвісти, а в бойовій техніці – усе, що не може бути відновлено. До поворотних утрат належать поранені та хворі, а в бойовій техніці та матеріальних засобах – усе, що може бути придатним для подальшого використання після військового або заводського ремонту. – С. 441.

Г

Гіпотеза – наукове припущення, що висувається для пояснення будь-яких явищ. – С. 441.

Горизонтальна дальність – відстань від точки вильоту до точки перетину траєкторії з горизонтом гармати. – С. 441.

Горизонт гармати – горизонтальна площина, що проходить через точку вильоту снаряда (сходу ракети з напрямної). – С. 441.

Графік пристріляних поправок – графік, що відображає залежність величини пристріляних поправок дальності, напрямку й дистанційного підривника від топографічної дальності. Будується за результатами пристрілювання не менше ніж двох реперів. Графік пристріляних поправок використовується для визначення установок для стрільби по цілі. – С. 441–442.

Графік розрахованих поправок – графік, що відображає залежність величини розрахованих поправок дальності, напрямку й дистанційної трубки від топографічної дальності. Використовується для визначення установок для стрільби по цілі. – С. 442.

Група подій повна – декілька таких подій, що внаслідок випробування неодмінно повинна статися хоча б одна із них. – С. 442.

Д

Дальність прямого пострілу – найбільша дальність стрільби, під час якої траєкторія снаряда не перевищує висоти цілі. – С. 442, 467.

Дальність стрільби – найкоротша відстань між точкою вильоту і точкою падіння снаряда. – С. 261, 429, 442–443, 456.

Дальність спостереження – найбільша відстань, на якій виявляється об’єкт (ціль). Дальність спостереження залежить від того, як ведеться спостереження: неозброєним оком або за допомогою оптичних приладів. Дальність спостереження неозброєним оком залежить від розмірів об’єкта (цілі), часу доби, стану атмосфери та висоти пункту, з якого ведеться спостереження, а дальність спостереження із використанням приладів, крім того, залежить від якості та характеристик приладів, що застосовуються. Для спостереження вночі застосовують прилади нічного бачення. – С. 442.

Десантний метеорологічний комплект (ДМК) – сукупність метеорологічних пристроїв, функціонально та конструктивно об’єднаних в один прилад. ДМК забезпечує вимірювання таких метеорологічних величин: швидкості й напрямку приземного вітру, тиску атмосфери, відносної вологості повітря. Він складається з реєструвального пристрою й датчиків. Датчики закріплюються на щоглі висотою 4 м. Реєструвальний пристрій з’єднується з датчиками за допомогою 10-метрового кабелю, що забезпечує дистанційне вимірювання величин вітру, температури і вологості повітря. Знаходиться на озброєнні метеопостів артилерійських підрозділів. – С. 10, 442.

Деривація артилерійського снаряда (від лат. derivo – відводжу) – бічне відхилення снаряда від площини кидання в бік його обертання, що викликається обертальним рухом снаряда навколо власної осі на траєкторії. – С. 443.

Дійсна дальність стрільби – дальність стрільби, на яку зберігається вражаюча дія стрільби, достатня для ураження цілі. – С. 443.

Дійсний вітер – вітер на даній висоті. Під час визначення вітру методом радіозондів (куль-пілотів) за дійсний вітер беруть середнє значення вітру у межах невеликого щодо протяжності шару атмосфери, віднесене до висоти середини шару. – С. 443.

Дія боєприпаса – ефект, який чинить боєприпас під час бойового застосування. Розрізняють такі дії боєприпаса: осколкову, ударну, фугасну, кумулятивну, запалювальну, освітлювальну, сигнальну, завадотвірну та ін.

Осколкова дія боєприпаса виявляється в ураженні цілі ударною дією осколків.

Ударна дія боєприпаса полягає в ураженні цілі за рахунок кінетичної енергії рухомого снаряда. Є основною для бронебійних і бетонобійних боєприпасів і допоміжною для фугасних та осколково-фугасних боєприпасів.

Фугасна дія боєприпаса полягає в ураженні (зруйнуванні) цілі продуктами вибуху розривного заряду й ударною хвилею, що утворюється під час цього. Характеризується об’ємом вирви (у середньому на 1 кг вибухових речовин припадає 1 $м^3$ викинутого ґрунту) і надлишковим тиском у фронті ударної хвилі.

Запальна дія боєприпаса виявляється у спалахуванні (підпалюванні) цілі. Для надійного підпалювання об’єктів (цілей) застосовуються запальні боєприпаси.

Кумулятивна дія боєприпаса полягає в ураженні цілі зосередженим і спрямованим струменем продуктів вибуху заряду та матеріалу його облицювання. – С. 443.

Дистанційна стрільба – стрільба снарядами з дистанційним підривником (трубкою) для одержання повітряних розривів. Застосовується для більш ефективного ураження цілі, створення повітряного фіктивного репера, стрільби освітлювальними й агітаційними снарядами. – С. 443.

Дистанційне мінування місцевості (ДММ) – установка протитанкових і протипіхотних мін за допомогою різних артилерійських, ракетних та авіаційних систем. Для ДММ застосовують спеціальні міни, які у разі удару об поверхню приводяться до бойового стану і підриваються під впливом цілі (наїзду, вібрації, дії магнітних та інших полів). – С. 443–444.

Достовірні відомості (інформація) – розвідувальна або будь-яка інформація, що не викликає сумнівів. – С. 444.

Дулова швидкість – відносна швидкість у снаряда (міни) в момент його вильоту із каналу ствола. – С. 444.

Е

Еліпс розсіву – еліпс, у межах якого розміщуються усі точки падіння снарядів (ракет) під час стрільби (пусків). – С. 444, 459.

Ефективність – успішність, результативність, дієвість, повнота виконання будь-чого (наприклад, вирішення завдання, досягнення мети). Категорія, що оцінює діяльність системи і визначається за результатами вирішення поставлених завдань. Очікувана ефективність прогнозується і розраховується заздалегідь, виходячи із реальних можливостей системи. – С. 12, 31, 92, 175, 423, 429, 437, 444, 453, 456.

Ефективність артилерійської стрільби – ступінь відповідності результатів стрільби поставленому вогневому завданню. Ефективність артилерійської стрільби визначається результатами стрільби, тобто ступенем ураження цілі. Ефективність артилерійської стрільби під час планування вогневого ураження може оцінюватися величиною показника ефективності. Показниками ефективності можуть бути: ймовірність ураження цілі, математичне сподівання числа уражених цілей, математичне сподівання сумарної втрати угруповання противника та ін. – С. 444.

Ефективність ураження цілі – сукупність характеристик ступеня ураження цілі (об’єкта). Оцінюється матеріальною втратою, якої зазнала ціль. Виражається через імовірність ураження, математичне сподівання числа уражених цілей, гарантовану втрату та інші показники. – С. 423, 439, 444.

Ж

Живучість військ (сил) – спроможність військ (сил) зберігати або швидко відновлювати боєздатність. Забезпечується доцільною організаційною структурою й технічною оснащеністю військ (сил), високим польовим (морським, повітряним) вишколом особового складу, використанням засобів захисту, інженерним обладнанням місцевості, своєчасним розосередженням та зміною районів розміщення, створенням резервів сил і засобів, ужиттям заходів щодо захисту військ (сил) від зброї масового ураження та інше. – С. 445.

Життєздатність – властивість військ зберігати або швидко відновлювати свою боєздатність в умовах дії противника. Життєздатність особливо важливих тилових об’єктів (арсеналів, баз, складів тощо) досягається їх захистом від усіх засобів ураження шляхом підвищення міцності конструкцій, наданням об’єктам та їхнім елементам можливо менших габаритів, а також форм, що сприяють обтіканню вибуховою хвилею; створенням технічних засобів гасіння пожежі та водовідливу, елементів збірних будівель, які швидко будуються, та іншого обладнання. – С. 445.

З

Завдання стрільби на ураження – завдання, що вирішується вогнем різних вогневих засобів. Залежно від характеру, важливості цілі та умов обстановки завданнями можуть бути: знищення, подавлення, зруйнування та виснаження. Для виконання завдання стрільби на ураження артилерійські підрозділи, частини, групи застосовують різні види вогню. – С. 445.

Закрита вогнева позиція – позиція, що приховує від наземного спостереження противника матеріальну частину артилерії, а також дим, пил, блиск пострілів під час ведення артилерійськими гарматами вогню. – С. 10, 445.

Залп – порядок ведення вогню, під час якого постріли (пуску) із декількох гармат, мінометів, ракетних і реактивних пускових установок та іншої зброї здійснюються одночасно або у найкоротший проміжок часу зазвичай за єдиною командою (сигналом). Вогонь залпом застосовується в бою під час стрільби на ураження об’єктів (цілей), а також під час святкових салютів і віддання почестей. – С. 422, 433, 439, 445, 448, 469.

Загальне вогневе ураження – процес узгодженого впливу сил вогневого ураження видів Збройних сил, родів військ і спеціальних військ на об'єкти й угруповання противника в інтересах досягнення мети операції. Воно здійснюється в тісній взаємодії з іншими видами впливу, радіоелектронним заглушенням і діями військ. Ведеться безперервно, з метою надійного ураження тактичних засобів ядерного нападу та елементів високоточної зброї (ВТЗ), польової артилерії, пунктів управління військами та зброєю, засобів розвідки та радіоелектронної боротьби, систем ППО других ешелонів і резервів, тобто таких об'єктів, можливості яких, у першу чергу, характеризують бойовий потенціал та вогневу міць угруповання військ противника, а також його стратегічну (оперативну) мобільність. – С. 441, 446.

Загороджувальний вогонь (арт. **ЗВ**) – суцільна вогнева завіса на шляху руху атакуючих танків і піхоти, торпедних катерів або рухомих хвиль морського десанту противника, що створюється на одному або одночасно на декількох рубежах; вид артилерійського вогню. Поділяється на нерухомий і рухомий.

Нерухомий ЗВ (НЗВ) ведеться на одному (одинарний НЗВ) або одночасно на декількох (глибокий НЗВ) рубежах, підготовлених на шляху руху атакуючого (контратакуючого) противника.

Рухомий ЗВ (РЗВ) ведеться на одному (одинарний РЗВ) або одночасно на двох (подвійний РЗВ) рубежах і переноситься послідовно на інші призначені рубежі. Відстань між рубежами, за якими ведеться вогонь одночасно – 150–200 м, а поміж групами рубежів – 400–600 м. – С. 10–11, 438, 446.

Задимлення – штучно створена аерозольна хмара, яка складається із дрібних частин твердої або рідкої речовини. Застосовується з метою приховання від противника розташування та характеру дій військ (сил), утруднення противнику спостереження і зниження ефективності його вогню, створення перешкоди роботі оптико-електронної апаратури, засобів спостереження й наведення зброї на ціль. Задимлення застосовується і для приховання пересування своїх військ. – С. 429, 446, 472.

Закон помилок – закон, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової помилки та відповідними їм імовіростями. – С. 163, 446.

Закон розсіву снарядів (ракет) – залежність між величиною відхилення точки падіння снаряда (ракети) від центра розсіву і ймовірністю його відхилення під час стрільби з однієї гармати на одному куті піднесення закон розсіву снарядів (ракет) є нормальним законом, (див. Нормальний закон розсіву). – С. 447.

Закон ураження цілі – залежність імовірності ураження цілі від віддалення центру (епіцентру) вибуху боєприпаса (координатний закон ураження) або від числа влучень у ціль (числовий закон ураження). Закон ураження цілі визначається уразливістю окремих цілей, параметрами уражаючих факторів вибуху боєприпаса та іншими умовами застосування боєприпасів (кутом падіння снарядів під час наземного вибуху, висотою розриву снаряда, прозорістю атмосфери та ін.). Закон ураження цілі може відображати залежність імовірності ураження цілі від дії одного або декількох уражаючих факторів. – С. 447.

Залповий вогонь – постріли (пуски), що ведуться із декількох гармат, мінометів, ракетних установок та бойових машин взводом, батареєю, дивізіоном, полком одночасно або у найкоротший проміжок часу, звичайно за єдиною командою. Залповий вогонь застосовується в бою під час стрільби на ураження цілей. – С. 446, 447.

Залежні події – події, для яких імовірність появи однієї з них залежить від того, виникла інша подія чи ні. – С. 447.

Зміщення – найкоротша відстань від вогневої позиції до площини спостереження. – С. 245, 250, 370, 434, 447, 469.

Знаки маси снаряда (міни) – знаки на корпусі снаряда (міни), що показують відхилення маси цього снаряда (міни) від номіналу (табличної маси) у вигляді знаків «+», «–» і відповідних літер під цифрами, що позначають калібр снаряда. – С. 447.

Знищення цілі (об’єкта) – полягає у завданні їй (йому) таких втрат (пошкоджень), маючи які вона (він) повністю втрачає свою боєздатність. Завдання виконується у разі, коли математичне сподівання відносної кількості уражених елементів у складі групового об’єкта становить 50–60 %. – С. 253, 447.

Зондувальний патрон (ЗП) – боєприпас до вітрової рушниці (ВР-2), в якому куля зі стрічкою (вітрова куля), пороховий заряд і засіб запалення з’єднані в одне ціле за допомогою паперової гільзи. Вітрова куля призначена для визначення напрямку і швидкості вітру у пройденому нею шарі атмосфери. Кіперна стрічка, пофарбована у червоний колір, призначена для збільшення вітрильності кулі під час її польоту, спостереження кулі у повітрі й полегшення пошуку місця її падіння. – С. 447–448.

Зона розвідки й ураження наземних (надводних) цілей засобами РВ і А – район місцевості (акваторії), в межах якого (якої) забезпечується засічка об'єктів (цілей) противника з необхідною точністю та їх ураження із заданим ступенем. – С. 448.

Зовнішня балістика – наука, що вивчає рух снарядів, мін, ракет після припинення їх силової взаємодії зі стволом зброї (пусковою установкою). – С. 30–31, 426, 448.

Зона дійсного вогню – простір, у межах якого вогонь артилерійського підрозділу (частини) або окремого зразка зброї ведеться з високою ефективністю. – С. 448.

Зона суцільного вогню – смуга (ділянка) місцевості, на якій завчасно або у ході бойових дій війська, що обороняються, готують і ведуть ефективний вогонь з усіх видів зброї для знищення атакуючого противника. Створюється перед переднім краєм оборони, на флангах у проміжках між частинами, підрозділами й у глибині оборони (для знищення противника, що вклинився). – С. 448.

Зона ураження – простір (площа) навколо центру (епіцентру) вибуху боєприпаса, у межах якого забезпечується ураження об'єкта (цілі); характеристика уражувальної дії боєприпасів (ракет, снарядів, бомб і т. ін.), ураження якими не потребує прямого влучення у ціль. Звичайно визначається зона комбінованого ураження, яка є наслідком впливу різних уражувальних факторів боєприпасів. Зону ураження поділяють на зону достовірного ураження, у межах якої ураження цілі є достовірним фактом, і зону ймовірного ураження, в якій ураження цілі – випадкова подія. Характеристики зони ураження зазвичай показують розміри так званої приведеної зони ураження, у межах якої здійснюється достовірне ураження цілі. – С. 448, 466.

Зосереджений артилерійський вогонь (ЗВ) – вогонь декількох артилерійських батарей, дивізіонів, що ведеться одночасно по одній цілі або по групі цілей, зведених у ділянку. ЗВ застосовується для знищення (подавлення) різних цілей (об'єктів) у бою та операції. – С. 10, 438, 448, 465.

Зруйнування цілі – приведення інженерних споруд до стану, непридатного для подальшого використання. Під час зруйнування досягається ураження живої сили та вогневих засобів в інженерній споруді. – С. 439, 449.

І

Імітація – це: 1) відтворення на тактичних навчаннях і маневрах дій різних об’єктів (цілей) противника; 2) відтворення фальшивих об’єктів для введення противника в оману щодо істинного їх положення (спосіб маскування), проводиться поєднано з іншими способами маскування. – С. 449.

Імовірність влучення – числова величина, що характеризує випадкову подію – влучення в ціль у конкретних умовах стрільби. Величина ймовірності влучення залежить від розміру цілі, величини розсіювання снарядів (ракет) і положення центра розсіювання щодо цілі. – С. 449.

Імовірний противник – супротивна сторона (суміжна держава, коаліція держав), яка проводить ворожу політику або висуває низку неприйнятних претензій різного характеру до нашої держави. – С. 449.

Імовірні відомості – розвідувальна інформація, що відповідає сформованій обстановці й раніше відомим даним, але одержана з одного джерела або з декількох не цілком надійних джерел. – С. 449.

Імовірнісні показники можливостей розвідки – сукупність показників, якими оцінюються можливості кожного засобу розвідки щодо виявлення певних об’єктів (цілей) противника в різних умовах обстановки. – С. 449.

Імовірність виникнення (появи) випадкової події (величини) – числова характеристика можливості появи якоїсь події (величини) за тих чи інших визначених, статистично стійких умов, тобто, коли ці події (величини) можуть повторюватися необмежену кількість разів. – С. 449.

Імовірність виявлення цілі – числова величина, яка характеризує можливість виявлення за даних умов цілі (об’єкта) з певними розмірами та властивостями. – С. 449.

Імовірність гіпотези – імовірність можливих умов, за яких може відбуватися деяка подія. Щодо можливих умов можна зробити деяку кількість припущень (гіпотез). Якщо внаслідок цього відбулася деяка подія, то можна визначити ймовірності різних гіпотез. Із цією метою використовується формула Бейеса. Ймовірність різних гіпотез до досліду змінюється після проведення досліду. Формула Бейеса використовується у теорії пристрілювання цілей. – С. 73–74, 449–450.

Імовірність інформації – відповідність одержаної інформації дійсній обстановці. Досягається позначенням часу здійснення подій, відомості які передаються; досконалим вивченням та порівнянням даних, що одержані з різноманітних джерел; перевіркою сумнівних відомостей; своєчасним виявленням дезінформаційних і маскувальних заходів противника; виключенням перекручення інформації, що передається технічними засобами зв'язку. – С. 450.

Імовірність події – числова міра ступеня об'єктивної можливості здійснення (появи) випадкової події. Ймовірність події змінюється від 0 до 1 (від 0 до 100 %). – С. 42, 450.

Імовірність достовірна – подія U, яка внаслідок випробування неодмінно повинна статися. Для достовірної події ймовірність дорівнює одиниці $P(U) = 1$. – С. 450.

Імовірність неможлива – подія, яка внаслідок досліду не може відбутися. Для неможливої події ймовірність дорівнює нулю. – С. 450.

Імовірність ураження цілі – числова величина, що характеризує випадкову подію – влучення у ціль у конкретних умовах стрільби або можливості знищення (придушення) цілі (об'єкта) за даних умов однієї стрільби (пуску). Залежить від характеру цілі, кількості та могутності боєприпасів, величини розсіювання снарядів (ракет) і береться як показник ефективності ураження окремих (точкових) цілей. – С. 89, 450, 474.

К

Кінцева швидкість – швидкість центра мас снаряда (міни) у точці падіння. – С. 450.

Коефіцієнт бойової ефективності – встановлене дослідним шляхом число, що показує, яку кількість танків може знищити той чи інший протитанковий засіб, перед тим як вийде з ладу. На використанні коефіцієнта бойової ефективності базується методика розрахунку можливостей щодо боротьби з бронеоб’єктами противника вогнем прямою наводкою. – С. 450–451.

Коефіцієнт форми снаряда – балістична характеристика снаряда, виражається відношенням коефіцієнтів лобового опору даного снаряда й еталонного. Коефіцієнт форми снаряда характеризує досконалість форми цього снаряда щодо еталонного. – С. 451.

Коефіцієнт віддалення – відношення дальності спостереження до топографічної дальності стрільби. Коефіцієнт віддалення використовується для визначення коректури напрямку під час пристрілювання спостережуваної цілі. Коефіцієнт віддалення розраховується з точністю до однієї десятої. – С. 451.

Коефіцієнт маси артилерійського снаряда – відношення маси снаряда до куба калібру каналу ствола. Найважливіша конструктивна характеристика снаряда, за якою можна наближено визначити масу снаряда або тип снаряда. – С. 451.

Коефіцієнт стрільби – коефіцієнт трансформування пристріляної поправки дальності за репером для визначення обчисленої поправки дальності по цілі. Коефіцієнт стрільби визначається як відношення пристріляної поправки дальності по реперу у метрах до топографічної дальності за репером у сотнях метрів. Коефіцієнт стрільби розраховується з точністю до однієї десятої. Коефіцієнт стрільби може бути більшим або меншим нуля. – С. 10, 451.

Контроль стрільби – перевірка пристріляних установок по реперу або цілі контрольними пострілами у разі зміни умов стрільби. Контроль стрільби здійснюється під час стрільби на ураження і полягає у визнанні відхилень розривів снарядів від цілі за дальністю, напрямом і висотою і введення коректур в установки прицілу, рівня, кутоміра і підривника (трубки). Під час здійснення контролю стрільби виправляють віяло розривів та стрибок прицілу (величину шкали). – С. 451.

Координатний закон ураження – залежність імовірності ураження окремої цілі від координат (віддалення) центру (епіцентру) вибуху боєприпаса. Координатний закон ураження застосовується для оцінювання ефективності стрільби (ударів) по цілях, ураження яких досягається не лише прямим влученням у неї снаряда (ракети), а й за рахунок дії одного або декількох уражаючих факторів вибуху боєприпаса. – С. 256–258, 267, 448, 451–452.

Критерій – показник, за допомогою якого оцінюється якість системи або повнота досягнення системою мети. Таким чином, якщо за допомогою показників вимірюються окремі відмітні ознаки різних систем, то за допомогою критерію – їх інтегральні властивості. – С. 359–360, 367, 452, 473.

Критерій бойової ефективності – показник, за числовим значенням якого оцінюється ефективність артилерійських систем, бойової техніки і дій військ. Критерій бойової ефективності – ймовірність досягнення очікуваного результату (напр., імовірність улучення в ціль, ураження об’єкта) та математичне сподівання. Для оцінювання ефективності застосування засобів ураження, крім того, може розраховуватися максимальна (мінімальна) очікувана із заданою ймовірністю втрата. – С. 452.

Кут вітру – кут між напрямком стрільби і напрямком балістичного вітру, відрахований від напрямку стрільби проти ходу годинникової стрілки. – С. 309, 335, 339, 452.

Кут засічки – кут при цілі між площинами спостереження двох спостережних пунктів. – С. 452.

Кут зустрічі – кут між дотичною до траєкторії у точці зустрічі снаряда з ціллю (перешкодою) і площиною, дотичною до поверхні цілі (перешкоди) у тій самій точці. – С. 452.

Кут кидання – кут між лінією кидання і площиною горизонту у точці вильоту. – С. 452.

Кут місця – кут між горизонтом гармати (приладом спостереження) і лінією, що з’єднує гармату (прилад спостереження) з точкою на місцевості. – С. 452, 461.

Кут місця цілі – кут у площині цілі між лінією цілі та горизонтом артилерійської гармати. – С. 452, 461.

Кут нутації – кут у площині опору між вектором повітряної швидкості снаряда та його поздовжньою віссю. – С. 452.

Кут падіння – кут між дотичною до траєкторії у точці падіння снаряда і горизонтом гармати. – С. 452, 472–473.

Кут пристріляний – кут, пристріляний по реперу (цілі); доворот від основного напрямку. – С. 452.

Кут прицілювання – кут у вертикальній площині між лінією цілі й лінією пострілу. – С. 452, 456–457.

Л

Лінія прицілювання – фіксоване положення лінії візування артилерійської панорами наведеної гармати щодо осі каналу ствола. Лінія прицілювання під час візування в ціль збігається з лінією цілі. – С. 453, 458.

Лінія спостереження – пряма лінія, що з'єднує прилад спостереження з ціллю. – С. 453.

Лінія цілі – пряма, що з'єднує точку вильоту і точку, в якій знаходиться ціль. – С. 453.

Лінія кидання – продовження осі каналу ствола гармати в момент вильоту снаряда. Лінія кидання є дотичною до траєкторії снаряда у точці вильоту. – С. 453.

Лінія пострілу – продовження осі каналу ствола наведеної гармати. – С. 453.

Логіка ймовірностей – логіка, у якій формулам приписуються оцінки зі значеннями 0, J, p [i], J1, що інтерпретуються як імовірність того, що ця формула набуває значення «істина». – С. 453.

М

Математичне сподівання – одна з найбільш важливих числових характеристик розподілу випадкових величин. Математичне сподівання чисельно дорівнює сумі добутків можливих значень випадкової величини та ймовірностей цих значень. Математичне сподівання використовується як показник ефективності стрільби артилерії по групових цілях та угрупованнях противника. – С. 17, 120–132, 137–146, 161, 166–168, 172–174, 199, 210, 270–290, 305–312, 331–339, 345–348, 356–358, 368–371, 376–381, 393, 402, 413–417, 453.

Метеорологічна підготовка – складова частина метеорологічного забезпечення. Метеорологічна підготовка організовується з метою підвищення ефективності ведення вогню артилерії. Метеорологічна підготовка передбачає наземні метеорологічні вимірювання; комплексне зондування атмосфери; складання метеорологічних бюлетенів та передавання їх у штаби дивізіонів; спостереження за небезпечними явищами погоди та гідрологічного режиму; визначення відхилень метеорологічних умов від табличних значень, що враховуються під час визначення установок: відхилення наземного тиску атмосфери на висоті вогневої (стартової) позиції, балістичного відхилення температури у межах траєкторії польоту снаряда (ракети), балістичного вітру в межах траєкторії – для ствольної артилерії та окремо у межах пасивної ділянки та активної ділянки траєкторії – для реактивної артилерії. – С. 453–454.

Метеорологічна інформація – повідомлення метеорологічного характеру всіх видів: метеорологічні бюлетені, штормові попередження, прогнози погоди та ін. – С. 454.

Метеорологічний бюлетень – зведення відомостей про метеорологічні величини. Залежно від призначення метеорологічний бюлетень може включати огляди або прогнози погоди, кліматичні та інші дані, що подаються у вигляді тексту, карт, графіків і таблиць за установленою схемою і формою. Метеорологічні бюлетені, призначені для різних видів ЗС України та родів військ, розрізняють за змістом і формою. – С. 454.

Метеорологічний пост – військовий підрозділ, оснащений залежно від його призначення та штатної належності різними метеорологічними приладами. – С. 10, 454.

Метеорологічні величини – характеристика стану атмосфери: температури й вологості повітря, швидкості та напрямку вітру, тиску атмосфери, кількості й висоти хмар, інтенсивності опадів, дальності видимості та інше. – С. 454.

Методика – сукупність прийомів (способів), що застосовуються у визначеній логічній послідовності для проведення розрахунків, досліджень. – С. 452, 454.

Метод – прийом (спосіб) наукового пізнання того чи іншого явища (об'єкта, процесу). – С. 12–16, 19–29, 32, 129, 160–164, 255–256, 271, 275, 309, 311, 333–335, 350, 358, 365–366, 384–387, 391–400, 404–407, 416–422, 441–444, 452, 454, 470.

Метеорологічні умови стрільби артилерії – стан атмосфери, зумовлений фізичними процесами, що відбуваються в атмосфері, і який характеризується сукупністю метеорологічних величин, що враховуються під час стрільби: наземний тиск атмосфери, віртуальна температура повітря, напрямок вітру та його швидкість у межах траєкторії. Через віртуальну температуру враховується вплив на політ снаряда одночасно температури і вологості повітря. Під час складання таблиць стрільби враховують нормальні (табличні) значення метеорологічних умов, під час підготовки до стрільби – відхилення реальних величин метеорологічних умов від їх нормальних (табличних) значень. – С. 454–455.

Міра точності (h) – одна із числових характеристик розсіву випадкових величин, що підпорядковується нормальному закону. Міра точності обернено пропорційна середньому квадратичному відхиленню. Виражається формулою

$$h = 1/E_2\sqrt{2}\,,$$

де E_2 – середньоквадратична помилка.

Застосовується для порівняльного оцінювання артилерійських приладів і різних методів розрахунків. – С. 455.

Мортирна стрільба – стрільба з артилерійських гармат, коли кути піднесення більше ніж 45°. Мортирна стрільба застосовується під час ураження цілей, розміщених на зворотних схилах висот, у ярах, а також для зруйнування бойових покриттів оборонних споруд. Мортирна стрільба застосовується в горах для зменшення мертвих просторів. – С. 455.

Н

Навісна стрільба – стрільба з артилерійських гармат, якщо кути піднесення від 20 до 45°. Навісна стрільба використовується для виконання різних вогневих завдань зазвичай застосовується під час стрільби із закритих вогневих позицій на дальностях, близьких до граничних. – С. 455.

Найвигідніший спосіб обстрілу цілі (об'єкта) – такий спосіб обстрілу цілі, під час якого досягається найбільша ефективність ураження заданою витратою снарядів. Спосіб обстрілу цілі під час стрільби батареєю включає: кількість установок прицілу; величину стрибка (шкали) прицілу, величину стрибка підривника (шкали трубки); кількість установок кутоміра; величину інтервалу віяла та доворот праворуч під час стрільби на двох установках кутоміра; витрату снарядів на гармату-установку. Виконуючи вогневі завдання дивізіоном, застосовують такі способи обстрілу цілі: батареями внакладку; батареями шкалою; із розподілом ділянок цілі (рубежу) та окремих цілей між батареями.

– С. 455–456.

Найменша дальність стрільби – дальність стрільби, що відповідає найменшому прицілу. – С. 456.

Найменший приціл (найменший кут прицілювання) – найменша установка прицілу, під час стрільби на якій жоден снаряд не буде торкатися за гребінь укриття перед вогневою позицією. Найменший приціл визначають після зайняття ВП за найбільш високою точкою гребеня укриття для кожної гармати у межах до 7-50 праворуч і ліворуч від основного напрямку. Для багатозарядних систем найменший приціл визначають для трьох зарядів: повного, найменшого та одного із проміжних. Найменший приціл розраховують за формулою

$$П_{min} = \beta + \alpha,$$

де β – кут укриття (у поділках кутоміра), який відраховується від горизонту гармати до гребеня укриття;

α – кут прицілювання (у тисячних), який відповідає горизонтальній дальності від гармати до гребеня укриття.

Для бойових машин реактивної артилерії найменший приціл визначають за формулою: а) для середнього калібру:

$$П_{min} = \beta + d/33 + 80;$$

б) для великого калібру:

$$П_{min} = \beta + d/17 + 50,$$

де d – віддалення до гребеня укриття (у метрах). – С. 456.

Надійність стрільби – ступінь достовірності виконання вогневого завдання у конкретних умовах. Надійність стрільби оцінюється ймовірністю виконання вогневого завдання. – С. 456.

Надійність ураження – ймовірність одержання потрібного результату ураження цілі. За показники надійності ураження беруть: для *окремої* цілі – ймовірність її ураження; для *групової* цілі – ймовірність завдання цілі втрати, не менше потрібної. – С. 456.

Накривальна група – група перелітних і недолітних розривів снарядів, отримана під час стрільби на одному куті підвищення. – С. 456.

Напрямок вітру – напрямок, що характеризується кутом, відрахованим від напрямку на північ за ходом годинникової стрілки до напрямку на точку горизонту, звідки віє вітер; виражається у поділках кутоміра (градусах кута). – С. 456.

Настильна стрільба – стрільба артилерійських гармат, якщо кути підвищення до 20°. Настільна стрільба застосовується для ураження цілей прямою наводкою, стрільби снарядами з дистанційним підривником (трубкою) та отримання рикошетів. – С. 457.

Настильна траєкторія – траєкторія снаряда під час настильної стрільби. Настильна траєкторія являє собою пологу траєкторію. Найбільш характерна для стрільби із гармат. – С. 457.

Нев'язка – помилка математичного співвідношення (умови) між виміряними величинами, що виникає внаслідок помилок результатів вимірювань цих величин. Під час топогеодезичного прив'язування ВП (СП) ходом визначається кутова та лінійна нев'язка. – С. 457.

Необхідна витрата боєприпасів (ракет) – витрата боєприпасів (ракет), необхідна для поразки цілі (об'єкта) із заданою мірою ураження. – С. 457.

Несумісні події – події, поява однієї з яких виключає появу іншої. – С. 35, 38, 45, 54, 457.

Нормальний закон розсіву – закон розсіву (розподілу) випадкової величини, що відповідає таким умовам: невеликі за абсолютною величиною відхилення більш імовірні, ніж великі відхилення; відхилення, однакові за абсолютною величиною, але протилежні за знаком, рівноймовірні; усі можливі значення випадкової величини розміщуються на обмеженому відрізку, симетричному щодо центра розсіву. Розсів снарядів (ракет) здійснюється на площі, обмеженій еліпсом, а під час стрільби снарядами (ракетами) з дистанційним підривником – у просторі, обмеженому еліпсоїдом. – С. 448, 457.

Нульова лінія прицілювання – лінія прицілювання, паралельна осі ствола гармати під час основних (нульових) установок прицільних засобів гармати. – С. 457.

Нутація снаряда (ракети) – коливальний рух осі обертового снаряда (ракети) під час його польоту. – С. 457.

О

Обстріл – процес впливу на ціль у разі її ураження вогнем артилерії (пусками ракет). – С. 93–94, 438–439, 456, 457.

Обсяг вогневих завдань артилерії – кількість цілей (об’єктів), яку повинна знищити (придушити), зруйнувати з необхідним (установленим) ступенем ураження артилерія. Обсяг вогневих завдань артилерії залежить від складу, стану й характеру дій угруповання противника, завдань, що вирішуються загальновійськовим підрозділом, частиною, з’єднанням або об’єднанням, а також завдань, що вирішуються в бою (операції) іншими засобами. – С. 457–458.

Обчислений приціл – установка прицілу, відповідна обчисленій дальності. – С. 458.

Обчислена дальність – дальність, за якою призначається установка прицілу під час стрільби артилерії або установка приладу, що забезпечує політ ракети на потрібну дальність. – С. 163, 458.

Обчислені установки для стрільби (пуску) – установки прицільних пристроїв і підривника (трубки), на яких ведеться вогонь. Визначаються з урахуванням топографічних (геодезичних), метеорологічних, балістичних, геофізичних умов стрільби (пуску) та індивідуальних поправок гармат (пускових установок). – С. 458.

Одиничний еліпс – еліпс розсіву, пів осі якого дорівнюють серединним відхиленням. – С. 216, 225, 230, 235, 260, 263, 324, 339, 458.

Окомірна підготовка – спосіб визначення установок для стрільби, під час якого поправки на балістичні і метеорологічні умови стрільби не враховуються або враховуються наближено. Із усіх способів визначення установок для стрільби окомірна підготовка має найнижчу точність. Після визначення установок способом окомірної підготовки пристрілювання цілі обов’язкове. – С. 458, 471.

Окомірне перенесення вогню – спосіб визначення обчислених установок по новій цілі з використанням результатів пристрілювання (стрільби та ураження) старої цілі. – С. 458.

Організація стрільби й керування вогнем – комплекс заходів, спрямованих на своєчасну підготовку та виконання артилерійськими підрозділами й групами вогневих завдань з високою ефективністю. До них належать: безперервне добування координат цілей, прийняття рішення (підготовка пропозиції) на ураження противника, постановка завдань підлеглим, контроль готовності. – С. 458–459.

Організація визначення установок для стрільби (пуску ракет) – впровадження комплексу заходів, що забезпечують отримання установок для стрільби (пуск) ракет). Організація визначення установок для стрільби включає: з'ясування бойового завдання загальновійськового підрозділу, частини, з'єднання та вогневих завдань, поставлених загальновійськовим командиром і старшим артилерійським командиром (начальником); призначення (з'ясування) основного напрямку стрільби; вибір (з'ясування) способу визначення та оновлення установок для стрільби щодо завдань бою (періодів вогневого ураження); уточнення даних щодо підрозділів та умов стрільби, необхідних для визначення установок; визначення поправок на відхилення умов стрільби від табличних та побудову графіків обчислених поправок і коефіцієнта стрільби, а за необхідності й передавання поправок у батареї; підготовку засобів визначення установок для стрільби й контроль точності їх підготовки. – С. 459.

Організація вогню – впровадження заходів, що забезпечують виконання вогневих завдань відповідно до плану бою (операції). Включає: виділення сил і засобів для ведення вогню та їх розгортання, узгодження вогню з діями військ щодо завдань, місця та часу, всебічне забезпечення ведення вогню, а також установлення порядку виклику, відкриття, ведення і припинення вогню. – С. 459.

Осколкова дія снаряда – дія боєприпасів, під час якої ураження цілі відбувається за рахунок ударної дії осколків, готових уражувальних елементів або їх сполучення. – С. 459.

Основний напрямок стрільби (ОН) – єдиний напрямок, у якому орієнтуються гармати та прилади розвідки декількох артилерійських підрозділів (частин), об'єднаних загальним управлінням. ОН задається дирекційним кутом із точністю до 1-00. – С. 10, 459.

Оцінювання ефективності стрільби (пуску) – визначення очікуваного результату стрільби (пуску) або ступеня відповідності результатів проведеної стрільби (пуску) поставленому вогневому завданню. Під час оцінювання ефективності стрільби (пуску) за показники оцінювання беруть імовірність ураження окремої цілі, математичне сподівання числа (відсотка) уражених окремих цілей зі складу групової цілі, частину площі цілі, що надійно уражається та ін. – С. 459–460.

Оцінювання точності способу визначення установок – аналіз умов, що супроводжують визначення установок для стрільби (пуску), і розрахунок серединних помилок за дальністю і напрямком, що характеризують точність способу. – С. 460.

П

Параметр – величина, що характеризує певну істотну властивість фізичного процесу, явища або системи, машини, приладу. Наприклад, абсолютна температура й абсолютний тиск. – С. 120, 143–145, 168, 248, 269, 298, 303–306, 311, 346, 351, 356–360, 365, 367, 375, 448, 460, 463.

Перенесення вогню артилерії – визначення установок для стрільби по цілі з використанням результатів пристрілювання (створення) репера або іншої цілі. Установки для стрільби з урахуванням перенесення вогню визначають способом коефіцієнта стрільби, спрощеним способом або за допомогою графіка пристріляних поправок. – С. 460.

Перевищення цілі – різниця висот цілі та вогневої позиції батареї. Під час визначення установок для стрільби враховують поправку на перевищення цілі як суму кута місця цілі й поправки кута прицілювання на кут місця цілі. – С. 460.

Перетворювач даних – функціональний пристрій, дані в якому перетворюються з одного подання на інше, еквівалентне. – С. 460.

Переліт – розрив снаряда за ціллю. Під час стрільби із закритих вогневих позицій відхилення снарядів за дальністю визначається за лінією спостереження. – С. 37–38, 74, 78, 92, 438, 457, 460.

Підготовка стрільби й управління вогнем – впровадження заходів з метою безперервної підтримки артилерійських підрозділів і частин у стані постійної готовності до виконання вогневих завдань із найбільшою ефективністю. Підготовка стрільби та управління вогнем включає: розвідку й визначення координат цілей, топогеодезичну, метеорологічну, балістичну й технічну підготовку, визначення установок для стрільби, організацію стрільби та управління вогнем. – С. 16, 420, 460.

Площа розсіву (снарядів) – площа, на якій розподіляються точки падіння снарядів під час стрільби з однієї гармати на одних і тих самих установках у приблизно однакових умовах. Площа розсіву має форму еліпса, який називається **еліпсом розсіву**. – С. 461.

Площа кидання – вертикальна площина, що проходить через лінію кидання. – С. 461.

Площина спостереження – вертикальна площина, що проходить через лінію спостереження й перпендикулярна до площини спостереження. – С. 461.

Повна підготовка – спосіб визначення установок для стрільби, що ґрунтується на врахуванні відхилень усіх умов стрільби від нормальних (табличних) значень. Точність цього способу дозволяє уражати спостережувані і неспостережувані цілі без пристрілювання. Для нанесення ракетних ударів установки прицільних пристроїв визначають лише способом повної підготовки. – С. 13, 461–462.

Повний час польоту – час руху снаряда (ракети та ін.) від точки вильоту (сходження з напрямної) до точки падіння. – С. 461.

Повітряний фіктивний репер – центр групи повітряних розривів снарядів, координати якого визначені за допомогою технічних засобів розвідки або спряженого стеження. Для створення репера стріляють на одних установках прицілу, кутоміра, рівня та підривника. Повітряний фіктивний репер використовується для визначення установок під час стрільби по цілі. – С. 461.

Поділка кутоміра – артилерійська кутомірна міра. Поділка кутоміра – центральний кут, який стягується дугою, що дорівнює 1/6000 частині довжини кола. Довжина дуги однієї поділки кутоміра приблизно дорівнює 0,001 радіуса, звідси наша тисячна. Кути у поділках кутоміра записують через риску (дефіс) і читають роздільно (наприклад, 12-45 – дванадцять сорок п’ять). Поділки кутоміра, записані до риски, інколи називають великими поділками кутоміра, а записані після риски – малими. Одна велика поділка кутоміра дорівнює 100 малим поділкам. – С. 461.

Подія – інформаційна одиниця, якій у базі знань приписується інтервал часу, під час якого ця одиниця існує. – С. 461.

Події несумісні – декілька подій у досліді називаються несумісними, якщо ніякі два з них не можуть з'явитися одночасно. – С. 462.

Події рівноможливі – декілька подій у випробуванні називаються рівноможливими, якщо вони мають однакові шанси появи в результаті випробування. Прикладами рівноможливих подій можна відзначити появу: герба або цифри під час одного підкидання монети; парного й непарного числа очок під час одного підкидання грального кубика і т. д. – С. 462.

Показник – якісна або кількісна характеристика окремої властивості або сукупності властивостей об'єкта (процесу), що розглядається. – С. 175, 200, 215, 285, 295–296, 337, 339, 341, 414, 430, 440, 443–452, 455, 458, 462, 471, 475–479.

Показники ефективності стрільби (ПЕС) – числові характеристики, за допомогою яких оцінюється випадковий очікуваний результат стрільби. За ПЕС беруться: **по окремих цілях** – імовірність її ураження; **по групових цілях** – математичне сподівання (МС) числа (відносного числа, відсотка) уражених окремих цілей зі складу групової цілі; **по угрупованню** – МС сумарної втрати (збитку). – С. 462.

Польотний час – проміжок часу від моменту вильоту (пуску) до моменту досягнення снарядом (ракетою) точки траєкторії, що розглядається. – С. 462.

Помилка – оцінювання логічного твердження або висновок про щось неправильне, хибне. Помилкою, наприклад, є: спотворення кодового сигналу інформації у разі неправильного, хибного відображення значення елемента кодової послідовності сигналу одиниці або нуля; визначення відмови як дії, що не відбулася (хибна відмова); незнаходження відмови (невиявлена відмова). – С. 47, 158–165, 170–171, 220, 244–255, 283, 291–293, 298–304, 327–337, 348–349, 366–370, 377, 380, 391–399, 403, 462.

Помилка інструментальна – помилка вимірювань, системи керування, що викликається неточністю орієнтування, регулювання й роботи самих приладів керування (наприклад, неточністю орієнтування приладів, юстування антенних пристроїв, градуювання приладів і т. ін.). – С. 462.

Помилка повної підготовки – відхилення центра розсіву снарядів (ракет) від точки прицілювання внаслідок випадкових помилок відхилень умов стрільби від нормальних (абсолютних) значень, (див. повна підготовка вихідних даних). – С. 462–463.

Помилка стрільби (пострілу, пуску) – відхилення точки розриву снаряда (ракети) від точки прицілювання. Є наслідком помилок визначення установок для стрільби (пуску) та помилок через розсівання снарядів (ракет). – С. 463.

Поновлення установок для стрільби (пуску) – процес, що полягає в уточненні установок для стрільби (пуску) під час зміни метеорологічних і балістичних умов стрільби. Поновлення установок для стрільби (пуску) здійснюють шляхом розрахунку нових поправок по цілях або повторного пристрілювання (створення) того самого репера. Поновлення установок здійснюють, якщо після пристрілювання (створення) репера минуло більше ніж 3 години. – С. 463.

Поправка – величина, що характеризує зміну характеристик руху або елементів траєкторії, відповідна відхиленням визначальних її параметрів, і яка береться з протилежним знаком. – С. 93, 228, 269, 330, 332, 435, 463–464, 467, 472.

Поправка балістична – розрахована поправка дальності на відхилення температури заряду, сумарне відхилення початкової швидкості снаряда на ковпачок підривника і непофарбованість снаряда. Поправкою напрямку на відхилення балістичних умов стрільби від табличних є поправкою на деривацію. – С. 463.

Поправка (дальності та напрямку) – 1) розраховані поправки дальності та напрямку на відхилення метеорологічних і балістичних умов від їх нормальних (табличних) значень. Поправки розраховують для різних опорних дальностей і для основного або інших напрямів стрільби. Поправки використовують для побудови графіка розрахованих поправок; 2) поправки дальності та напрямку, визначені в результаті пристрілювання (створення) реперів. Поправки використовують для визначення обчислених поправок дальності та напрямку під час перенесення вогню на ціль. – С. 463.

Поправка на різнобій гармат – поправка, що вводиться у приціл (рівень), на різницю початкових швидкостей снарядів гармати або основних гармат батарей щодо контрольної гармати дивізіону. – С. 463.

Поправка на обертання Землі – поправки дальності та напрямку, викликані дією прискорення Кориоліса. Поправка на обертання Землі залежить від дальності й напрямку стрільби. Зазвичай ця поправка розраховується під час стрільби (пуску) на великі дальності. – С. 463–464.

Поправки індивідуальні гармат – поправки у рівень (приціл), у кутомір та в установку підривника (трубки). Поправки індивідуальні гармат у *рівень* (приціл) – на різницю температур зарядів (для самохідної артилерії), різнобій, уступ та перевищення щодо основної гармати батареї, на невідповідність кута підвищення ствола за прицілом та квадрантом, на відхилення маси снарядів; поправки індивідуальні гармат у *кутомір* – на відхилення лінії прицілювання і на інтервал (якщо гармати на вогневій позиції розміщені повзводно або розосереджено); поправки індивідуальні гармат в *установку* підривника (трубки) – на різнобій і на уступ гармати щодо основної. Поправки індивідуальні гармат вводять під час стрільби командири гармат самостійно. – С. 464.

Поправка на відхилення маси снаряда – поправка на відхилення маси снаряда від нормальної (табличної). Вводиться у рівень (приціл) командиром гармати самостійно. – С. 464.

Послідовне зосередження вогню (ПЗВ) – зосереджений вогонь по цілях противника перед фронтом і на флангах своїх військ, що наступають, який послідовно переноситься з рубежу на рубіж у міру їх просування. ПЗВ може бути одинарним, подвійним, потрійним, якщо вогонь одночасно ведеться по цілях відповідно на одному, двох, трьох рубежах. – С. 11, 436, 464.

Постановка вогневих завдань – доведення вогневих завдань до командирів, штабів артилерійських підрозділів, частин, груп, з’єднань. Під час постановки вогневих завдань зазначаються: мета, завдання стрільби (знищення, зруйнування, придушення і т. ін.), час відкриття (припинення) вогню, кількість залученої артилерії (підрозділів), вид і витрата боєприпасів, порядок ведення вогню, спосіб обстрілу цілі. – С. 464.

Помилка вимірювань (серединна, середня, середня квадратична, абсолютна, відносна) – різниця між одержаним значенням вимірюваної величини та істинним (слушним) значенням. Помилками вимірювань є:

1) *абсолютна помилка* – різниця між одержаним та істин-

ним (слушним) значеннями вимірюваної величини;

2) *відносна помилка* – відношення абсолютної помилки до істинного значення вимірюваної величини;

3) *середня помилка* – визначається як середнє арифметичне із помилок вимірювань. Середня помилка є випадковою. Чим більша кількість вимірювань, тим ближче середня помилка до істинного значення вимірюваної величини;

4) *серединна помилка* – числова характеристика нормального закону розподілу випадкових помилок, що характеризує розсіювання випадкових помилок навколо центра розсіювання;

5) *середня квадратична помилка* – числова характеристика будь-якого закону розподілу випадкових помилок, що характеризує розсіювання випадкових помилок навколо центра розсіювання. Середня квадратична помилка дорівнює додатному значенню квадратного кореня із дисперсії. – С. 464–465.

Початкова швидкість снаряда – розрахункова швидкість снаряда у дулового зрізу ствола, за якої у передбаченні, що він не зазнає дії порохових газів, які витікають, а підпадає під силу опору повітря, снаряд летить на ту саму дальність, що й у разі дійсної найбільшої швидкості, набраній ним наприкінці періоду післядії. Дійсна найбільша швидкість снаряда наприкінці періоду післядії більше початкової швидкості снаряда.

Початкову швидкість снаряда визначають стрільбою з гармат по рамах-соленоїдах, установлених на визначеній відстані від дулового зрізу ствола гармати, з вимірюванням часу проходження снарядом цієї відстані й подальшим розрахунком величини початкової швидкості снаряда за формулами зовнішньої балістики, що робить розрахунок найбільш точним або за допомогою артилерійських балістичних станцій. – С. 434, 465.

Приземний вітер – вітер, напрям і швидкість якого вимірюють на малих висотах над земною поверхнею. – С. 465.

Прилади управління вогнем артилерії – прилади, що використовуються під час визначення установок для стрільби й управління вогнем артилерійських і мінометних підрозділів, під час ураження різних цілей. До них відносять: прилади визначення топографічних даних і обчислених установок для стрільби по цілі, прилади розрахунку сумарних поправок на балістичні й метеорологічні умови стрільби, прилади розрахунку коректур під час пристрілювання цілі та реперів різними способами. – С. 465–466.

Правила стрільби та управління вогнем – основні положення й рекомендації щодо підготовки стрільби та управління вогнем артилерії, стрільби на ураження різних цілей, управління вогнем артилерійських підрозділів у різних умовах бойових дій. – С. 418, 466.

Прецесія снаряда – конусоподібний рух поздовжньої осі артилерійського снаряда, що обертається відносно дотичної до траєкторії (напрямку руху центра мас). Прецесія снаряда разом із двома іншими видами руху – нутацією і власним обертанням – повністю визначає рух снаряда щодо його центра мас у процесі польоту. – С. 465–466.

Приведена зона ураження – умовна площа навколо окремої цілі, ймовірність влучення снаряда (міни, ракети) в яку чисельно дорівнює ймовірності ураження цієї цілі; характеристика уражальної дії снаряда по цій цілі. – С. 466.

Припинення вогню – припинення стрільби артилерії відповідно до встановленої команди в бою, на полігонах. Припинення вогню може відбуватися у разі дострокового одержання результатів стрільби, за необхідності дотримання умов безпеки та в інших випадках. – С. 458, 466.

Пристрій оброблення даних – функціональна частина обчислювальної системи, що призначена для виконання функцій введення, виведення, оброблення та керування даними. – С. 466.

Пристрілювання цілі – визначення стрільбою установок прицілу гармат (мінометів) і підривника (трубки) для ураження цілі. Пристрілювання цілі здійснюється за виміряними відхиленнями або за спостереженням знаків розривів. Під час пристрілювання за виміряними відхиленнями за допомогою далекоміра, спряженого спостереження, радіолокаційної станції, підрозділу звукової розвідки і вертольота визначають (оцінюють) відхилення розривів снарядів від цілі, які використовують для розрахунку коректур. Під час пристрілювання за спостереженням знаків розривів пристрілювання дальності здійснюють захопленням цілі у вилку. – С. 457, 464–466.

Пристріляні дані – дані, одержані в результаті пристрілювання дійсного репера (створення наземного, надводного або повітряного фіктивного репера) або цілі. До пристріляних даних належать пристріляні поправки дальності, напрямку та в установлення дистанційного підривника (трубки). Пристріляні дані використовують під час визначення обчисленої дальності, обчисленого довороту від основного напрямку й обчисленої установки підривника (трубки) під час стрільби по новій цілі. – С. 466.

Прицільна дальність – відстань від точки вильоту до точки перетину траєкторії снаряда (міни) з лінією прицілювання. – С. 467.

Програма польоту ракети – сукупність керувальних функцій, що регламентують політ ракети за траєкторією. – С. 467.

Простір елементарних подій – множина всіх результатів експерименту, що розглядається. – С. 467.

Пряме влучення – влучення боєприпаса (артилерійського снаряда, ПТКР та ін.) у ціль; необхідна умова ураження броньованої цілі та зруйнування довгочасної фортифікаційної споруди. Найбільша ймовірність прямого влучення артилерійської гармати досягається під час стрільби прямою наводкою на дальність прямого пострілу. – С. 467.

Прямовисна лінія – напрямок сили ваги в даній точці земної поверхні. Прямовисна лінія не зберігає абсолютно незмінного напрямку відносно нерухомих предметів і внаслідок збурень гравітаційного поля від Місяця та Сонця здійснює добові коливання порядку 0,02°. – С. 467.

Пункт зондування – район місцевості, радіусом не більше ніж 2,5 км, в якому здійснюється або планується зондування атмосфери за допомогою радіотехнічного комплексу (метеорологічної станції). Пункт зондування створюється зазвичай у складі двох метеорологічних станцій, які працюють позмінно і розміщуються одна від одної на відстані, що забезпечує зручність керування їх роботою за єдиним планом. – С. 467.

Р

Радіус дійсного ураження – відстань від центру (епіцентру) вибуху боєприпаса, у межах якого окремі цілі уражаються з імовірністю не менше ніж 50 %. – С. 467.

Радіус суцільного ураження – відстань від центру (епіцентру) вибуху боєприпаса, у межах якого окремі цілі уражаються з імовірністю не менше ніж 90 %. – С. 467–468.

Радіус ураження – відстань від центру (епіцентру) вибуху боєприпаса, у межах якого окремі цілі уражаються з імовірністю не менше потрібної. – С. 468.

Раптовість вогню – несподіване для противника відкриття і ведення вогню, що сприяють досягненню успіху у виконанні бойових завдань артилерією та іншими вогневими засобами. Досягається своєчасним розкриттям об'єктів (цілей), збереженням у таємниці прийнятого рішення і потаємністю підготовки вогневих засобів до дій. – С. 467–468.

Ракета – це: 1) літальний апарат, що рухається під дією реактивної сили, яка виникає під час відкидання частини власної маси; 2) вид літального апарату; 3) пристрій із реактивним двигуном; 4) бойовий снаряд, який приводиться в рух реактивною силою. – С. 11, 430, 456, 468.

Реактивний снаряд – некерований літальний апарат із реактивним двигуном. – С. 468.

Режим вогню – максимальна допустима кількість пострілів із різних артилерійських гармат, мінометів, бойових машин та інших видів вогнепальної зброї за визначений проміжок часу ведення вогню без втрат для матеріальної частини зброї, точності і безпеки стрільби. Визначається дослідно-розрахунковим способом у правилах стрільби. – С. 468.

Різнобій гармат – незбігання центрів групування точок падіння снарядів під час стрільби із декількох гармат по одній цілі на однакових установках прицілу і рівня внаслідок різниці індивідуальних балістичних характеристик гармат. – С. 462, 468.

Репер – допоміжна точка, за якою проводиться пристрілювання для визначення поправок із подальшим їх урахуванням під час перенесення вогню на ціль. Репери можуть бути дійсними або фіктивними. – С. 441, 443, 450, 459–462, 464–468, 474.

Репер дійсний – добре спостережуваний місцевий предмет, координати якого відомі. Пристрілювання дійсного репера здійснюють за спостереженням знаків розривів, якщо поправка на зміщення менша ніж 5-00. – С. 468.

Репер фіктивний – центр групи розривів, координати яких визначені за допомогою технічних засобів розвідки. Репер фіктивний може бути наземним, надводним, повітряним. Створення фіктивного наземного репера здійснюють за допомогою далекоміра, спряженого спостереження, РЛС, підрозділу звукової розвідки. – С. 468–469.

Рикошет – відбиття снаряда від поверхні перешкоди. – С. 34, 37, 456, 469, 470–471.

Розподіл цілей – розподіл цілей між артилерійськими підрозділами (частинами, групами), що залучаються для їх ураження. Здійснюється командиром, штабом для найбільш ефективного вирішення завдань. – С. 469, 479.

Розрахунок обчислених установок – визначення установок прицілу, рівня й довороту від основного напрямку для стрільби по цілі. Під час стрільби снарядами з дистанційною трубкою визначають обчислену установку трубки. Обчислені установки визначають з урахуванням поправок на умови стрільби. Для розрахунку обчислених установок застосовують такі способи: повну підготовку, використання даних пристрілювальної гармати, перенесення вогню від репера, скорочену окомірну підготовку. – С. 468–469.

Розсів – розкидання точок падіння (повітряних розривів) снарядів (мін, ракет та ін.) на деякій площині (просторі) під час стрільби (пуску ракет) з однієї зброї за практично однакових умов. – С. 443, 446, 454, 456–457, 460–462, 464, 469, 478–479.

С

Світловий орієнтир – група розривів освітлювальних снарядів у розташуванні військ противника для орієнтування військ, що ведуть бойові дії. Світловий орієнтир позначають залпами або серіями методичного вогню через кожні 3–5 хв. – С. 469.

Своєчасність вогню – готовність вогневих засобів до ведення вогню та його відкриття у визначений час або з урахуванням даних конкретної обстановки. Своєчасність вогню досягається постійною готовністю артилерійських з’єднань, частин і підрозділів до виконання вогневих завдань; підтриманням постійної взаємодії із загальновійськовими частинами й підрозділами; безперервною розвідкою противника та спостереженням за діями своїх військ; своєчасним плануванням ударів, вогню й маневру артилерійських частин і підрозділів та своєчасним постановленням (уточненням) їм завдань; оперативним, стійким і безперервним керуванням ударами та вогнем. – С. 469–470.

Серія швидкого вогню – призначена кількість пострілів, що здійснюються однією або декількома гарматами швидким вогнем без зміни установок для стрільби. – С. 470.

Серединна помилка (серединне відхилення) – характеристика розсіювання значень випадкової величини, що підлягає нормальному закону. *Серединною помилкою* називається половина довжини ділянки, симетричної щодо центра розсіювання, ймовірність влучення в який випадкової величини дорівнює 50 %. – С. 163, 329–332, 387, 393, 395, 396, 398–399, 403, 470, 474.

Середнє відхилення температури повітря – середнє значення відхилення температури повітря від табличного розподілу у шарі атмосфери від поверхні землі до будь-якої висоти (в градусах Цельсія). – С. 470.

Середнє відхилення щільності повітря – середнє відносне відхилення щільності повітря від табличного розподілу у шарі атмосфери від поверхні землі до будь-якої висоти, виражене у відсотках. – С. 470.

Середній вітер – середнє значення напрямку і швидкості вітру у шарі атмосфери від поверхні землі до будь-якої висоти (у поділках кутоміра і в метрах за секунду). – С. 470.

Середня траєкторія – уявна траєкторія, що проходить усередині трубки (снопа) траєкторії. – С. 36, 49, 54–55, 73, 96, 164, 228, 250, 284–285, 339, 341, 470.

Система помилок – сукупність помилок, що виникають під час підготовки стрільби й у ході стрільби артилерії (пусків ракет) по одній цілі. Випадкові помилки групуються у декілька незалежних одна від одної груп, кількість яких залежить від числа гармат, батарей, дивізіонів, що залучаються до стрільби (пусків). – С. 234, 470.

Система вогню артилерії – організований за єдиним планом вогонь усіх видів артилерії в інтересах досягнення мети бою (операції). Включає райони, ділянки та рубежі масованого, зосередженого, загороджувального вогню, вогонь окремих гармат, установок ПТРК на підступах, перед переднім краєм, на флангах і в глибині оборони, маневр вогнем для швидкого його масування і зосередження на будь-якому загрозливому напрямі або ділянці, а також систему спостереження і сповіщення про дії противника. Система вогню артилерії будується з урахуванням характеру місцевості та інженерних загороджень. – С. 470.

Скорочена підготовка – спосіб визначення установок для стрільби, за яким враховуються поправки лише на деякі умови стрільби або враховуються наближено. – С. 471.

Спряжене спостереження – спостереження, що ведеться одночасно з двох-трьох пунктів, які становлять єдину систему. Застосовується в артилерії для визначення координат цілей (орієнтирів, реперів), засічки розривів снарядів своєї артилерії. – С. 11, 471.

Спосіб обстрілу – розподіл точок прицілювання за глибиною і фронтом цілі та снарядів по них для досягнення потрібного ступеня ураження цілі. Під час виконання вогневих завдань дивізіоном застосовують способи обстрілу цілі батареями внакладку, батареями шкалою, з розподілом ділянок цілі між батареями. Спосіб обстрілу цілі для батареї включає: кількість установок прицілу, величину стрибка (шкали) прицілу, величину стрибка підривника (шкали трубки), кількість установок кутоміра, величину інтервалу віяла, витрату снарядів на гармату-установку. – С. 94, 438, 454, 463, 471.

Способи визначення установок для стрільби – повна, скорочена та окомірна підготовка. – С. 471.

Спостережна ціль (об’єкт) – ціль, спостережна неозброєним оком із використанням оптичних приладів зокрема приладів нічного бачення (інших технічних засобів), зі спостережних пунктів і постів, літальних апаратів, пунктів управління, а у ВМФ – із кораблів та берегових постів. – С. 471.

Стрільба на ураження – використання вогню для ураження різних цілей: приховано й відкрито розміщених, поодиноких і групових, броньованих та неброньованих, наземних і надводних, а також для безперервної підтримки вогнем загальновійськових підрозділів у бою. Під час ураження цілі залежно від її характеру, важливості та умови обстановки стрільбу на ураження ведуть із метою знищення, зруйнування, подавлення та виснаження цілі. Під час цього застосовують різні види вогню, способи обстрілу цілі. – С. 471, 477.

Стрибок прицілу – різниця установок прицілу під час стрільби на ураження однієї цілі. Ураження неспостережених цілей ведуть на трьох установках прицілу зі стрибком, що дорівнює третині глибини цілі, з округленням у менший бік до цілих поділок прицілу. – С. 432, 450, 471–472.

Стрільба на рикошетах – стрільба, під час якої ураження цілі досягається розривами снарядів після рикошету. Рикошетну стрільбу застосовують для ураження живої сили, розташованої відкрито або в окопах без перекриттів. Для одержання рикошетів від ґрунту стрільбу ведуть на зарядах, що забезпечують кут падіння снарядів не більше ніж 20°. Стрільбу ведуть з установкою підривника на сповільнену дію. – С. 472.

Стрільба артилерії – сукупність дій артилерійських командирів, штабів, частин та підрозділів під час виконання вогневого завдання щодо ураження різних цілей, світлового забезпечення, задимлення противника, розповсюдження агітаційного матеріалу та цілепоказань. Основна мета стрільби артилерії полягає у вогневому ураженні противника. Залежно від умов виконання вогневого завдання розрізняють: стрільбу прямою наводкою та із закритої вогневої позиції; стрільбу гарматою, взводом, батареєю, дивізіоном, групою; настильну, навісну та мортирну стрільбу; стрільбу з ударним і дистанційним підривником, дистанційною трубкою та радіопідривником, стрільбу на рикошетах, пусках ПТКР; стрільбу по нерухомій та рухомій, спостережуваній і неспостережуваній цілі. – С. 16, 268, 430, 472.

Стрільба із закритих вогневих позицій – стрільба артилерії по цілях, які не спостерігаються з вогневої позиції. Наведення на ціль здійснюється за даними того, хто керує вогнем: у горизонтальній площині – за допомогою кутоміра та точки наводки, у вертикальній – за допомогою бокового рівня; основний спосіб виконання вогневих завдань наземною артилерією. – С. 472.

Стрільба прямою наводкою: 1) стрільба, під час якої нарізна та гладкоствольна зброя наводиться безпосередньо на ціль; основний спосіб стрільби зі стрілецької зброї, протитанкової артилерії, танків, БМП. Характеризується високою точністю та швидкістю виконання вогневих завдань; 2) стрільба артилерії з відкритих вогневих позицій, під час якої гармата наводиться безпосередньо на ціль. – С. 12, 63, 472.

Стрільба на зруйнування – знищення живої сили, вогневих засобів та бойової техніки, розміщених у закритих оборонних спорудах та перекритих окопах (траншеях). Стрільбу на зруйнування ведуть також по мостах, злітно-посадкових смугах, будинках та інших об'єктах із метою приведення їх до непридатного для подальшого використання стану. Для зруйнування оборонних споруд ведуть настильну стрільбу з гармат або гаубиць по напільній (вертикальній) стінці або навісну (мортирну) стрільбу із гаубиць та мінометів по бойовому перекриттю. Стрільбу на зруйнування ведуть батареєю, взводом або гарматою. Установки для стрільби на ураження визначають пристрілюванням цілі. Застосовують фугасні, підкаліберні, кумулятивні, бетонобійні снаряди і ПТКР. – С. 473.

Ступінь виявлення об'єктів – узагальнений показник (критерій) оцінювання ефективності функціонування розвідки, який визначається математичним очікуванням кількості (частки) об'єктів противника, що виявлені (необхідно виявити) за певний час із потрібною якістю. – С. 473.

Ступінь вогневого ураження це: 1) відношення кількості виведених із ладу цілей до їх загальної кількості в об'єкті (угрупованні); 2) плануємий або досягаємий результат впливу вогневими засобами на об'єкти, групи об'єктів або угруповання противника. Інколи під ступенем ураження цілі розуміють імовірність ураження цілі (об'єкта) та математичне сподівання відсотка уражених цілей. Зазвичай виражається у відсотках. – С. 473.

Ступінь вогневого ураження групової цілі – втрата, що завдається груповій цілі внаслідок вогневого впливу. Ступінь вогневого ураження групової цілі визначається відношенням кількості уражених окремих цілей до їх загального числа, звичайно виражається у відсотках. – С. 473.

Ступінь ураження – відношення кількості виведених із ладу цілей до їх загальної кількості в об'єкті (угрупованні). Інколи під ступенем ураження цілі розуміють імовірність ураження цілі (об'єкта) та математичне сподівання відсотка уражених цілей. – С. 473.

Сумарна поправка дальності (напрямку) стрільби – сума поправок дальності (напрямку) на відхилення метеорологічних і балістичних умов стрільби від табличних. Сумарну поправку дальності (напрямку) стрільби розраховують для опорних дальностей і заданих напрямків стрільби. Ці поправки використовують для побудови графіка обчислених поправок. – С. 473–474.

Сумарне відхилення початкової швидкості снаряда – відхилення початкової швидкості, що враховує відхилення початкової швидкості снарядів через зношення каналів стволів гармати і відхилення початкової швидкості снарядів через індивідуальні властивості партії зарядів. – С. 474.

Схема вогню артилерії – графічний бойовий документ, в якому відображаються вогневі завдання (види вогню) артилерійського підрозділу, частини, групи з урахуванням можливих дій противника. Кожному виду вогню надається визначений номер (найменування). Схема вогню артилерії узгоджується з можливими діями своїх військ, сусідів. На схемі показують райони вогневих позицій і маневр артилерійських підрозділів. – С. 474.

Т

Таблиця стрільби – збірник обчислених даних, необхідних для визначення установок прицільних пристроїв для стрільби (пусків) по визначеній цілі залежно від дальності до неї та інших умов стосовно будь-яких боєприпасів конкретного зразка озброєння (системи). – С. 474.

Таблична траєкторія – траєкторія, якою переміщувався б центр мас снаряда (міни та ін.) за табличних (нормальних) умов. – С. 474.

Табличні метеорологічні поправки – поправки, взяті з оберненим знаком відхилення снаряда за дальністю і напрямом від табличної точки падіння, зумовлені постійними на усіх висотах у межах траєкторії відхиленнями метеорологічних величин і рівними 10 одиницям (10 м/с, 10 °С, 10 мм рт. ст.). – С. 474.

Табличні умови стрільби – сукупність заздалегідь фіксованих умов, для яких розраховуються таблиці стрільби. – С. 474.

Таблиця вогню артилерії – бойовий документ, що визначає завдання артилерійського підрозділу (групи, частини) щодо вогневого ураження противника і порядок їх виконання. У наступі складається за періодами вогневого ураження і завданнями загального військового підрозділу (частини), в обороні – за завданнями ураження противника на дальніх підступах до оборони, перед переднім краєм і у разі його вклинення у глибину оборони. Призначений для постановки завдань артилерійським підрозділам (частинам) і управління ними в бою. – С. 474–475.

Температура повітря – температура, яку показує термометр в умовах його повного теплового контакту з атмосферним повітрям. Температура повітря характеризує тепловий стан атмосфери і є мірою середньої кінетичної енергії руху молекул і атомів, що складають атмосферне повітря. – С. 210, 397, 435, 453, 475.

Теорія артилерійської стрільби – наука, що вивчає закономірності стрільби артилерії й розробляє практичні рекомендації щодо стрільби й керування вогнем, застосування яких забезпечує найбільш ефективне виконання вогневих завдань. Основні завдання теорії артилерійської стрільби: облік умов стрільби та їх вплив на точність вогню артилерії, розроблення способів визначення установок для стрільби, визначення найвигідніших способів обстрілу цілей та виконання вогневих завдань, обґрунтування норм витрати снарядів, оцінювання якості гармат, приладів, боєприпасів і вироблення вимог до артилерійського озброєння. Точність артилерійської стрільби ґрунтується на теорії ймовірностей, балістики, математичної статистики й обчислювальної математики. – С. 90, 475.

Теорія ймовірностей – математична наука (розділ математики), що вивчає закономірності масових випадкових явищ (подій), які спостерігаються при багатократному повторенні досліду. На її засадах побудовані математична та прикладна статистика. – С. 16, 23–33, 77, 90–91, 175, 211, 407, 416–417, 421, 475.

Технічна підготовка стрільби – комплекс заходів щодо підготовки гармат (мінометів), командирських машин управління, ЕОМ, приладів розвідки й керування вогнем, балістичних станцій, приладів метеорологічного посту й боєприпасів до стрільби (бойової роботи). У ході технічної підготовки стрільби визначаються індивідуальні поправки, що враховують під час стрільби. – С. 475.

Точність перенесення вогню – серединна помилка, що характеризує точність способу визначення установок для стрільби по цілі на підставі використання результатів пристрілювання (створення) реперів. Точність перенесення вогню залежить від віддалення цілі від репера за дальністю та від кута перенесення. Під час стрільби артилерії серединні помилки перенесення вогню становлять у дальності: 0,5–0,7 % дальності стрільби і у напрямку: 3–4 поділки кутоміра. – С. 475–476.

Точність пристрілювання – серединна помилка, що характеризує визначення установок для ураження цілі пристрілюванням точність пристрілювання, залежить від способу пристрілювання та умов її проведення. – С. 476.

Точність стрільби (пуску) – ймовірнісне оцінювання можливих положень точок падіння (розривів) снарядів (ракет, куль, мін) щодо цілі. Точність стрільби характеризується влучністю стрільби й густотою бою. Точність стрільби досягається своєчасним і повним виконанням заходів під час підготовки стрільби, визначенням установок для стрільби на ураження найбільш точним способом та коректуванням стрільби. – С. 172, 413, 476.

Точка вильоту – точка, в якій знаходиться центр мас снаряда на момент вильоту (тобто початкова точка траєкторії). – С. 476.

Точка зустрічі з ціллю – точка, в якій повинна бути ціль під час падіння снаряда (ракети). – С. 476.

Точка падіння – точка перетину траєкторії снаряда з горизонтом гармати. – С. 121, 476.

Траєкторія – лінія, що описується у просторі рухомою матеріальною точкою щодо обраної системи координат. – С. 22, 36, 49, 54–55, 73, 96, 164, 228, 250, 284–285, 339, 341, 425, 441, 456, 469, 473, 476.

Траєкторія снаряда – траєкторія центра мас снаряда після вильоту його із каналу ствола гармати. Траєкторія снаряда із кутами підвищення до 20° називається *положистою*, а стрільба – *настильною,* більше ніж 20° – *крутою,* а стрільба – *навісною* (до 45°) або *мортирною* (більше ніж 45°). – С. 425, 441, 456, 476.

У

Убивча дія – уражальний вплив осколків снаряда (міни) на різні цілі. – С. 476.

Убивча дія осколка – здатність осколка уражати живу силу та вогневі засоби на різних віддаленнях від точки розриву снаряда (міни). Убивча дія осколка залежить від маси, форми і швидкості зіткнення осколка з ціллю. – С. 476–477.

Ударна хвиля – тонка зона сильного механічного стиснення довкілля (повітря, води або ґрунту), що поширюється з надзвуковою швидкістю в усі боки від центру вибуху. Ударна хвиля характеризується різким збільшенням у ній тиску, щільності та температури речовини. Ударна хвиля виникає й у разі польоту літака, ракети та інших тіл із надзвуковою швидкістю, а також у разі потужних електричних розрядів тощо. – С. 477.

Ударні можливості: 1) складова частина бойових можливостей; 2) показник бойових можливостей військ, за допомогою якого визначають здатність військ завдавати потужних ударів противнику. – С. 477.

Управління вогнем артилерійських підрозділів – цілеспрямована діяльність командирів і штабів щодо управління частинами й підрозділами артилерії під час підготовки й виконання ними вогневих завдань. Управління вогнем артилерійських підрозділів здійснюється для своєчасного й ефективного ураження противника в конкретних умовах бою. Управління вогнем артилерійських підрозділів включає: одержання вогневих завдань або вибір цілей і час їх ураження; з’ясування (вивчення) вогневих завдань (цілей) і умов їх виконання, прийняття рішення на їх виконання, постановку (доведення) вогневих завдань частинам і підрозділам та контроль їх виконання. Управління вогнем артилерійських підрозділів повинно бути оперативним, стійким, прихованим. – С. 466, 477.

Ураження цілі (об’єкта) – вплив різними засобами ураження на ціль (об’єкт), унаслідок якого ціль (об’єкт) повністю або частково (тимчасово) втрачає здатність до нормального функціонування (виконання бойового завдання). Ураження цілі (об’єкта) полягає в знищенні (зруйнуванні), придушенні або виснаженні живої сили об’єкта. – С. 23, 68–69, 90–93, 100, 233, 257–261, 424, 438, 444–450, 459, 471–473, 476, 477, 479.

Установки для стрільби (пуску) – установки прицільних пристроїв і підривника (трубки), на яких ведеться вогонь (пуск). – С. 438, 458, 460, 473, 477.

Установки для ураження – установки прицільних пристроів, на яких ведеться стрільба на ураження. Установки для ураження можуть визначатися пристрілюванням цілі або обчислюватися без проведення пристрілювання (перенесенням вогню від репера, повною підготовкою). – С. 477–478.

Ф

Формула замкнена – вираз у формальній системі, в якій або немає змінних, або змінні пов'язані квантифікаторами. – С. 478.

Формула загальнозначуща – замкнена формула, що зберігає тотожну істинність при цих інтерпретаціях. – С. 478.

Формула відкрита – вираз у формальній системі, до якої належить хоч б одна змінна, не зв'язана квантифікатором. – С. 478.

Фронтальний вогонь – вогонь артилерії (пускової установки), що ведеться перпендикулярно до фронту цілі. Фронтальний вогонь найбільш ефективний по глибоких шляхах, оскільки розсіювання снарядів зазвичай за дальністю більше, ніж за напрямом. – С. 478.

Функція належності – характеристична функція для нечіткої множини, що набуває значення з відрізка від 0 до 1, або дрібну частину (0,01–0,999). – С. 478.

Х

Характеристики об'єкта, що захищається (охороняється) – технічні характеристики об'єкта, а також пов'язані з його створенням та експлуатацією наслідки та інші фізичні прояви, що вимірюються (фіксуються) безпосередньо засобами технічної розвідки противника та використовуються для визначення відомостей про об'єкти, які захищаються від технічних засобів розвідки. – С. 478.

Ц

Центр розсіювання – точка перетину середньої траєкторії снаряда (міни та ін.) із горизонтом зброї (поверхнею перешкоди). – С. 478.

Ціль – об'єкт противника, намічений для ураження. Цілі поділяють: *за розташуванням у просторі* – на наземні, підземні, повітряні, надводні та ін.; *за складом* – поодинокі (танк, корабель, літак та ін.), групові й складні; *за розмірами* – на точкові, площинні, лінійні; *за характером діяльності* – на активні, пасивні, рухомі зокрема маневрові, нерухомі й на такі, що з'являються; *за ступенем захищеності* – на відкриті, укриті, броньовані; *за умовами спостереження* – на спостережні та неспостережені; *за специфічними відмітними ознаками*, наприклад, за оптичною, тепловою, радіолокаційною контрастністю. Цілі можуть поділятися: за важливістю, швидкістю руху (маневреністю) та іншими ознаками. – С. 34, 37–41, 49–51, 57, 65–69, 75–78, 89–93, 97, 99, 154–155, 172–175, 230–234, 242–244, 283–286, 338, 410–412, 475–479.

Цілерозподіл – розподіл цілей між з'єднаннями, частинами, підрозділами, комплексами вогневих засобів, літаками й кораблями, які залучаються для їх ураження. Здійснюється з розрахунком на найефективніше вирішення завдань. Цілерозподіл може здійснюватися за рубежами, районами (зонами), висотами. – С. 479.

Ч

Час польоту – проміжок часу від моменту вильоту (пуску) до моменту досягнення снарядом (ракетою) точки траєкторії, що розглядається. – С. 426, 460, 479.

Частота – відношення числа появ даної події до числа усіх проведених випробувань (дослідів). – С. 15, 17, 38–43, 48, 75–76, 113, 121, 140, 343, 349–352, 354, 360, 363, 410, 479.

Числення ситуаційне – числення предикатів, в якому всі чи декілька предикатів, забезпечені помітками, що прив'язують їх до тих чи інших ситуацій. Кожна ситуація задається описом, у якому приймають участь позаситуаційні вирази та ті, що зв'язані з цією ситуацією. Як аксіоми числення ситуаційне використовує звичайні аксіоми числення предикатів й аксіоми, що відбивають специфіку зміни ситуацій і характеристик цих ситуацій в тій проблемній області, задля якої числення ситуаційне використовується. – С. 479.

Числовий закон ураження – залежність імовірності ураження цілі від числа снарядів (мін, ракет), що влучили у неї. Числовий закон ураження використовується для оцінювання ефективності стрільби (пусків) по цілях, для ураження яких потрібні прямі влучення. – С. 451, 479–480.

Ш

Швидкий вогонь – ведення вогню з однієї або декількох гармат із максимальною швидкострільністю без порушення режиму вогню. Під час ведення швидкого вогню кожна гармата здійснює постріл за готовністю. – С. 480.

Швидкість вітру – шлях, пройдений повітрям за одиницю часу. Одиниця вимірювання швидкості вітру: метр за секунду (м/с), кілометр за годину (км/год). – С. 422, 435, 480.

Швидкість звуку – швидкість поширення звукових хвиль у пружних середовищах (газах, рідинах та твердих тілах). Швидкість звуку у повітрі залежить від температури повітря. За табличної температури повітря швидкість звуку дорівнює 340,9 м/с. – С. 480.

Швидкість світла – у вільному просторі (вакуумі) – швидкість поширення будь-яких електромагнітних хвиль (зокрема, світлових). Швидкість світла у вакуумі дорівнює 299792 ± ± 0,4 км/с. – С. 480.

Швидкість снаряда абсолютна – швидкість поступового руху снаряда, що визначається у нерухомій щодо гармати системі координат. – С. 480.

Ширина вилки – різниця дальностей, відповідних двом кутам підвищення, під час стрільби на яких отримана вилка. – С. 480.

Шкала абсолютна – шкала, на якій задана метрика, що дозволяє оцінити відстань від абсолютного початку. – С. 480

Шкала розсіювання – чисельне вираження закону розсіювання снарядів (мін, ракет). Шкала розсіювання показує зв’язок відхилення снарядів, вираженого у серединних відхиленнях, від центра розсіювання та ймовірність їх отримання. – С. 480.

Шкала метрична – шкала, на якій задана метрика, що дозволяє обчислювати відстань між елементами, які відображені (проектуються) на шкалу. – С. 480.

Щ

Щільність вогню артилерії – кількість витрати снарядів (мін), що витрачаються за 1 хвилину на 1 га площі або на 100 м довжини фронту цілі. – С. 481.

Щільність сил і засобів – ступінь насичення району бойових дій (напрямку, ділянки) військами та військовою технікою, яка виражається співвідношенням кількості сил і засобів на 1 км фронту. Є показником рівня масування сил і засобів, а також розрахунковим показником під час планування операції (бою). – С. 481.

Щільність помилки – значення щільності розподілу помилки, що відповідає її визначеній величині. Щільність помилки має розмірність, обернену до розмірності помилки. – С. 481.

Щільність ураження – одна із характеристик надійності ураження (придушення або знищення) цілі артилерійським вогнем. Виражається у частках норми витрати снарядів (мін), встановленої для даних умов стрільби, або кількістю фактично витрачених снарядів на ціль або на 1 га її площі (на 100 м фронту цілі) за весь час її ураження. – С. 481.

Додаток А

(довідковий)

Довідкові таблиці для проведення розрахунків

Таблиця А.1 – Таблиця значень функції Ф (*x*) залежно від *x*

x	Ф (*x*)	*x*	Ф (*x*)	*x*	Ф (*x*)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0,00	0,00000	1,50	0,68833	3,00	0,95698
0,05	0,02690	1,55	0,70419	3,05	0,96033
0,10	0,05377	1,60	0,71949	3,10	0,96346
0,15	0,08059	1,65	0,73425	3,15	0,96638
0,20	0,40731	1,70	0,74847	3,20	0,96910
0,25	0,13391	1,75	0,76214	3,25	0,97163
0,30	0,16035	1,80	0,77528	3,30	0,97397
0,35	0,18662	1,35	0,78790	3,35	0,97615
0,40	0,21268	1,90	0,79999	3,40	0,97817
0,45	0,23851	1,95	0,81158	3,45	0,98003
0,50	0,26407	2,00	0,82266	3,50	0,98176
0,55	0,28934	2,05	0,83324	3,55	0,98335
0,60	0,31430	2,10	0,84335	3,60	0,98482
0,65	0,33892	2,15	0,85298	3,65	0,93618
0,70	0,36317	2,20	0,86216	3,70	0,98743
0,75	0,38705	2, 25	0,87038	3,75	0,93858
0,80	0,41052	2,30	0,87918	3,80	0,98962
0,85	0,43357	2,35	0,88705	3,85	0,99059
0,90	0,45618	2,40	0,69450	3,90	0,99147
0,95	0,47832	2,45	0,90157	3,95	0,99229
1,00	0,50000	2,50	0,90825	4,00	0,99302
1,05	0,52119	2,55	0,91456	4,10	0,99431
1,10	0,54188	2,60	0,93251	4,20	0,95539
1,15	0,56205	2,65	0,92613	4,30	0,99627
1,20	0,58171	2,70	0,93141	4,40	0,99700
1,25	0,60083	2,75	0,93638	4,50	0,99750
1,30	0,61942	2,80	0,94105	4,60	0,99308
1,35	0,63747	2,85	0,94543	4,80	0,99879
1,40	0,65498	2,90	0,94594	5,00	8,99926
1,45	0,67193	2,95	0,95338	5,40	8,99972
1,50	0,68833	3,00	0,95698	6,00	8,999948

Таблиця А.2 – Таблиця значень функції F(X) залежно від X

X	F (X)	X	F (X)	X	F (X)	X	F (X)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
« – »		« – »		« – »		« – »	
5,00	0,00037	3,55	0,00832	2,10	0,07833	0,65	0,33054
4,95	0,00042	3,50	0,00912	2,05	0,08338	0,60	0,34285
4,90	0,00048	3,45	0,00998	2,00	0,08867	0,55	0,35533
4,85	0,00054	3,40	0,01091	1,95	0,09421	0,50	0,36797
4,80	0,00060	3,35	0,01192	1,90	0,10001	0,45	0,38075
4,75	0,00066	3,30	0,01301	1,85	0,10605	0,40	0,39366
4,70	0,00076	3,25	0,01418	1,80	0,11236	0,35	0,40669
4,65	0,00086	3,20	0,01545	1,75	0,11893	0,30	0,41983
4,60	0,00096	3,15	0,01681	1,70	0,12577	0,25	0,43305
4,55	0,00106	3,10	0,01827	1,65	0,13287	0,20	0,44635
4,50	0,00120	3,05	0,01983	1,60	0,14026	0,15	0,45971
4,45	0,00135	3,00	0,02151	1,55	0,14790	0,10	0,47311
4,40	0,00150	2,95	0,02331	1,50	0,15584	0,05	0,48655
4,35	0,00166	2,90	0,02523	1,45	0,16403	« + »	
4,30	0,00186	2,85	0,02728	1,40	0,17251	0,00	0,50000
4,25	0,00206	2,80	0,02947	1,35	0,18127	0,05	0,51345
4,20	0,00230	2,75	0,03181	1,30	0,19959	0,10	0,52689
4,15	0,00255	2,70	0,03429	1,25	0,19959	0,15	0,54029
4,10	0,00284	2,65	0,03693	1,20	0,20915	0,20	0,55365
4,05	0,00315	2,60	0,03974	1,15	0,21897	0,25	0,56695
4,00	0,00349	2,55	0,04272	1,10	0,22906	0,30	0,58017
3,95	0,00385	2,50	0,04587	1,05	0,23941	0,35	0,59331
3,90	0,00427	2,45	0,04921	1,00	0,25000	0,40	0,60634
3,85	0,00471	2,40	0,05275	0,95	0,26084	0,45	0,61925
3,80	0,00519	2,35	0,05648	0,90	0,27191	0,50	0,63203
3,75	0,00570	2,30	0,06041	0,85	0,28322	0,55	0,64467
3,70	0,00622	2,25	0,06456	0,80	0,29474	0,60	0,65715
3,65	0,00687	2,20	0,06892	0,75	0,30648	0,65	0,66946
3,60	0,00759	2,15	0,07351	0,70	0,31842	0,70	0,68158
« + »		« + »		« + »		« + »	
0,75	0,69352	1,85	0,89395	2,95	0,97669	4,05	0,99685
0,80	0,70526	1,90	0,89999	3,00	0,97849	4,10	0,99715
0,85	0,71678	1,95	0,90579	3,05	0,98017	4,15	0,99745
0,90	0,72809	2,00	0,91133	3,10	0,98173	4,20	0,99769
0,95	0,73916	2,05	0,91662	3,15	0,98319	4,25	0,99794
1,00	0,75000	2,10	0,92167	3,20	0,98455	4,30	0,99813
1,05	0,76059	2,15	0,92649	3,25	0,98582	4,35	0,99834
1,10	0,77094	2,20	0,93108	3,30	0,98698	4,40	0,99850
1,15	0,78103	2,25	0,93544	3,35	0,98808	4,45	0,99865

Продовження табл. А.2

1	2	3	4	5	6	7	8
1,20	0,79085	2,30	0,93959	3,40	0,98908	4,50	0,99880
1,25	0,80041	2,35	0,94352	3,45	0,99002	4,55	0,99894
1,30	0,80971	2,40	0,94725	3,50	0,99088	4,60	0,99904
1,35	0,81873	2,45	0,95079	3,55	0,99168	4,65	0,99914
1,40	0,82749	2,50	0,95412	3,60	0,99241	4,70	0,99924
1,45	0,83597	2,55	0,95728	3,65	0,99309	4,75	0,99934
1,50	0,84416	2,60	0,96025	3,70	0,99371	4,80	0,99939
1,55	0,85210	2,65	0,96307	3,75	0,99429	4,85	0,99946
1,60	0,85974	2,70	0,96570	3,80	0,99481	4,90	0,99952
1,65	0,86713	2,75	0,96819	3,85	0,99529	4,95	0,99958
1,70	0,87424	2,80	0,97052	3,90	0,99573	5,00	0,99963
1,75	0,88107	2,85	0,97272	3,95	0,99615	–	–
1,80	0,88764	2,90	0,94477	4,00	0,99651	–	–

Таблиця А.3 – Таблиця значень функції $\varphi_2(x)$

x \ l	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,2691	2683	2658	2619	2566	2500	2424	2339	2249	2154
0,2	0,2666	2658	2635	2597	2545	2481	2406	2324	2235	2142
0,4	0,2595	2587	2566	2531	2482	2423	2354	2277	2194	2107
0,6	0,2479	2473	2454	2424	2382	2330	2269	2202	2129	2050
0,8	0,2326	2321	2306	2282	2248	2206	2157	2101	2039	1973
1,0	0,2143	2140	2129	2113	2087	2056	2020	1979	1929	1877
1,2	0,1939	1937	1931	1921	1906	1887	1863	1835	1803	1766
1,4	0,1723	1722	1720	1717	1712	1705	1694	1680	1663	1644
1,6	0,1503	1504	1506	1509	1512	1515	1517	1517	1514	1509
1,8	0,1288	1290	1294	1303	1314	1326	1339	1351	1361	1368
2,0	0,1083	1086	1093	1106	1123	1142	1164	1185	1206	1225
2,2	0,0895	0898	0908	0923	0944	0968	0996	1026	1055	1084
2,4	0,0726	0729	0740	0757	0780	0808	0840	0870	0910	0946
2,6	0,0578	0582	0593	0610	0634	0663	0697	0734	0774	0815
2,8	0,0452	0456	0466	0483	0507	0536	0570	0608	0649	0692
3,0	0,0347	0351	0360	0376	0398	0426	0458	0496	0536	0579
3,2	0,0262	0265	0274	0288	0308	0333	0363	0398	0436	0478
3,4	0,0194	0196	0204	0217	0234	0256	0283	0315	0350	0389
3,6	0,0141	0143	0149	0160	0175	0194	0217	0245	0273	0312
3,8	0,0101	0102	0108	0116	0128	0144	0164	0188	0215	0246
4,0	0,0071	0072	0076	0083	0093	0106	0122	0141	0165	0191
4,2	0,0049	0050	0053	0058	0066	0076	0089	0105	0124	0146
4,4	0,0033	0035	0036	0040	0046	0054	0064	0077	0092	0110
4,6	0,0022	0023	0024	0027	0032	0038	0045	0055	0067	0082
4,8	0,0014	0015	0016	0018	0022	0026	0032	0039	0048	0060
5,0	0,0009	0009	0010	0012	0014	0017	0022	0027	0034	0043

Продовження табл. А.3

x \ l	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,5	5,0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	2057	1959	1864	1770	1680	1595	1514	1439	1368	1302	1242	1108	0999
0,2	2047	1951	1857	1765	1676	1592	1512	1437	1366	1301	1241	1108	0999
0,4	2017	1927	1837	1749	1664	1583	1504	1431	1363	1298	1239	1107	0999
0,6	1969	1887	1804	1723	1643	1566	1492	1422	1356	1293	1235	1106	0998
0,8	1908	1832	1759	1686	1614	1543	1475	1409	1346	1286	1230	1104	0998
1,0	1811	1762	1701	1639	1576	1513	1451	1391	1325	1276	1223	1101	0996
1,2	1725	1680	1632	1581	1529	1476	1422	1368	1315	1263	1213	1097	0995
1,4	1616	1586	1552	1514	1473	1430	1385	1339	1293	1246	1200	1091	0992
1,6	1500	1482	1461	1438	1410	1377	1342	1305	1265	1225	1184	1083	0989
1,8	1371	1370	1364	1358	1338	1317	1292	1264	1233	1199	1164	1073	0985
2,0	1241	1253	1260	1262	1258	1249	1236	1217	1194	1168	1139	1060	0978
2,2	1110	1138	1151	1165	1173	1175	1172	1183	1149	1131	1109	1044	0971
2,4	0980	1012	1040	1064	1082	1095	1102	1103	1098	1089	1075	1024	0960
2,6	0855	0893	0929	0961	0988	1010	1027	1037	1042	1041	1034	1000	0947
2,8	0735	0778	0820	0858	0893	0923	0947	0966	0979	0987	0989	0971	0931
3,0	0624	0669	0714	0757	0797	0833	0865	0892	0913	0928	0937	0938	0911
3,2	0522	0568	0614	0659	0703	0744	0781	0814	0842	0865	0884	0900	0888
3,4	0431	0475	0521	0567	0612	0656	0697	0735	0769	0798	0821	0857	0860
3,6	0350	0392	0436	0481	0526	0571	0615	0656	0694	0728	0758	0809	0827
3,8	0281	0319	0359	0402	0446	0491	0536	0579	0620	0658	0692	0757	0791
4,0	0222	0255	0292	0332	0373	0417	0461	0504	0547	0587	0622	0702	0750
4,2	0172	0202	0234	0270	0308	0349	0391	0433	0476	0518	0558	0645	0705
4,4	0132	0157	0185	0216	0250	0288	0327	0368	0409	0451	0481	0584	0657
4,6	0099	0120	0144	0171	0201	0234	0270	0308	0347	0388	0429	0526	0606
4,8	0073	0090	0110	0133	0158	0185	0219	0254	0290	0329	0368	0466	0553
5,0	0054	0067	0083	0101	0123	0148	0176	0206	0240	0275	0312	0409	0500

Таблиця А.4 – Таблиця ймовірності влучення в коло радіуса *r*

r_1 \ e_1	**0**	**0,2**	**0,4**	**0,6**	**0,8**	**0,9**	**1,0**
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
0,2	0,0091	0,0092	0,0099	0,0113	0,0150	0,0206	0,1073
0,4	0,0357	0,0365	0,0389	0,0444	0,0586	0,0790	0,2127
0,6	0,0786	0,0802	0,0855	0,0972	0,1265	0,1661	0,3143
0,8	0,1355	0,1381	0,1468	0,1660	0,2124	0,2701	0,4105
1,0	0,2034	0,2072	0,2197	0,2467	0,3091	0,3794	0,5000
1,2	0,2793	0,2842	0,3003	0,3346	0,4095	0,4946	0,5817
1,4	0,3597	0,3656	0,3849	0,4250	0,5075	0,5802	0,6550
1,6	0,4414	0,4480	0,4698	0,5139	0,5984	0,6634	0,7195
1,8	0,5215	0,5278	0,5520	0,5978	0,6794	0,7338	0,7753
2,0	0,5975	0,6049	0,6288	0,6742	0,7488	0,7923	0,8227
2,2	0,6675	0,6749	0,6984	0,7415	0,8068	0,8400	0,8622
2,4	0,7303	0,7374	0,7596	0,7991	0,8538	0,8784	0,8945
2,6	0,7852	0,7918	0,8122	0,8470	0,8910	0,9088	0,9205
2,8	0,8320	0,8380	0,8561	0,8858	0,9201	0,9327	0,9410
3,0	0,8709	0,8762	0,8918	0,9164	0,9423	0,9510	0,9570
3,2	0,9026	0,9072	0,9203	0,9399	0,9589	0,9645	0,9691
3,4	0,9279	0,9316	0,9424	0,9576	0,9712	0,9753	0,9782
3,6	0,9476	0,9506	0,9591	0,9707	0,9801	0,9828	0,9848
3,8	0,9626	0,9650	0,9716	0,9800	0,9865	0,9883	0,9896
4,0	0,9737	0,9756	0,9806	0,9867	0,9909	0,9921	0,9930
4,2	0,9819	0,9833	0,9870	0,9912	0,9940	0,9948	0,9954
4,4	0,9878	0,9888	0,9914	0,9961	0,9961	0,9966	0,9970
4,6	0,9919	0,9926	0,9945	0,9975	0,9975	0,9978	0,9981
4,8	0,9947	0,9952	0,9965	0,9985	0,9985	0,9987	0,9988
5,0	0,9966	0,9970	0,9978	0,9991	0,9991	0,9992	0,9993

Таблиця А.5 – Значення К для відомих імовірностей Р

Р	К	Р	К	Р	К
0,01	0,210197	0,35	1,376149	0,70	2,300618
0,05	0,474861	0,40	1,498555	0,75	2,468675
0,10	0,680574	0,45	1,621167	0,80	2,659949
0,15	0,845226	0,50	1,745617	0,85	2,887910
0,20	0,990441	0,55	1,873595	0,90	3,181589
0,25	0,124586	0,60	2,007026	0,95	3,629007
0,30	0,252197	0,65	2,148296	1,00	5,389718

Таблиця А.6 – Таблиця значень P залежно від K

K	P	K	P	K	P	K	P
0	0	1,2	0,27932	2,5	0,75872	3,8	0,96255
0,1	0,00227	1,3	0,31916	2,6	0,78515	3,9	0,96255
0,2	0,00906	1,4	0,35971	2,7	0,80955	4,0	0,97374
0,3	0,02026	1,5	0,40059	2,8	0,83195	4,1	0,97816
0,4	0,03574	1,6	0,44140	2,9	0,85238	4,2	0,98191
0,5	0,05528	1,7	0,48187	3,0	0,87092	4,3	0,98509
0,6	0,07862	1,8	0,52152	3,1	0,88765	4,4	0,98777
0,7	0,10547	1,9	0,56014	3,2	0,90265	4,5	0,99001
0,8	0,13548	2,0	0,59748	3,3	0,91603	4,6	0,99188
0,9	0,16827	2,1	0,63332	3,4	0,92790	4,7	0,99343
1,0	0,20345	2,2	0,66749	3,5	0,93837	4,8	0,99470
1,1	0,24061	2,3	0,69984	3,6	0,94756	4,9	0,99575
–	–	2,4	0,73027	3,7	0,95558	5	0,99661

Таблиця А.7 – Таблиця значень *P* залежно від *r*

r \ *P*	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	0,000	0,001	0,004	0,016	0,064	0,148	0,455
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,37
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35
6	0,872	1,134	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35
7	1,239	1,564	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35
8	1,646	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	2,09	2,53	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	3,05	3,61	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34
13	4,11	4,76	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34
17	6,41	7,26	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34
18	7,02	7,91	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34
19	7,63	8,57	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34
21	8,90	9,92	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3

Продовження табл. А.7

1	2	3	4	5	6	7	8
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3
27	12,88	14,12	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3
30	14,95	16,31	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3

Продовження табл. А.7

P / *r*	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1,074	1,642	2,71	3,84	5,41	6,64	10,83
2	2,41	3,22	4,60	5,99	7,82	9,21	13,82
3	3,66	4,64	6,25	7,82	9,84	11,34	16,27
4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	18,46
5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	20,5
6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	22,5
7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	24,3
8	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,1	26,1
9	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,7	27,9
10	11,78	13,44	15,99	18,31	21,2	23,2	29,6
11	12,90	14,63	17,28	19,68	22,6	24,7	31,3
12	14,01	15,81	18,55	21,0	24,1	26,2	32,9
13	15,12	16,98	19,81	22,4	25,5	27,7	34,6
14	16,22	18,15	21,1	23,7	26,9	29,1	36,1
15	17,32	19,31	22,3	25,0	28,3	30,6	37,7
16	18,42	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	39,3
17	19,51	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	40,8
18	20,6	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	42,3
19	21,7	23,9	27,2	30,1	33,7	36,2	43,8
20	22,8	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	45,3
21	23,9	28,4	29,6	32,7	36,3	38,9	46,8
22	24,9	31,4	30,8	33,9	37,7	40,3	48,3
23	26,0	35,0	32,0	35,2	39,0	41,6	49,7
24	27,1	37,6	33,2	36,4	40,3	43,0	51,2
25	28,2	30,7	34,4	37,7	41,7	44,3	52,6
26	29,2	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	54,1
27	30,3	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	55,5
28	31,4	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	56,9
29	32,5	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	58,3
30	33,5	36,2	40,3	43,8	48,0	50,9	59,7

Таблиця А.8 – Таблиця значень α залежно від n

n \ α	0,10	0,05	0,01	0,005	0,001
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	3,29	3,82	4,98	5,47	6,63
2	3,31	3,84	4,95	5,38	6,38
3	3,33	3,86	4,93	5,33	6,18
4	3,35	3,84	4,81	5,17	5,97
5	3,40	3,85	4,47	5,12	5,87
6	3,45	3,89	4,77	5,11	5,83
7	3,90	3,92	4,78	5,11	5,82
8	3,54	3,95	4,79	5,11	5,81
9	3,59	3,99	4,81	5,13	5,81
10	3,62	4,02	4,83	5,14	5,82
11	3,66	4,05	4,85	5,16	5,83
12	3,69	4,08	4,87	5,17	5,84
13	3,73	4,11	4,89	5,19	5,85
14	3,75	4,13	4,90	5,21	5,86
15	3,78	4,16	4,92	5,22	5,87
16	3,81	4,18	4,94	5,24	5,88
17	3,83	4,20	4,96	5,25	5,89
18	3,86	4,22	4,97	5,27	5,90
19	3,88	4,24	4,99	5,28	5,91
20	3,90	4,26	5,00	5,29	5,92
21	3,92	4,28	5,02	5,31	5,93
22	3,94	4,30	5,03	5,32	5,94
23	3,96	4,31	5,04	5,33	5,95
24	3,98	4,33	5,06	5,34	5,96
25	3,99	4,35	5,07	5,35	5,97

Таблиця А.9 – Таблиця значень функції t_α залежно від k

k \ α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879
11	0,128	0,259	0,396	0,540	0,697	0,876
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868
15	0,128	0,258	0,392	0,536	0,691	0,866
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863
18	0,127	0,257	0,392	0,533	0,688	0,862
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856

Продовження табл. А.9

k \ α	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,336	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,997	4,140
15	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,878	3,922
19	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,058	1,316	1,708	2,060	2,495	2,787	3,725

Таблиця А.10 – Таблиця значень функції $L_k(q)$ залежно від q

k \ q	0,001	0,002	0,005	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	0,001	0,002	0,005	0,010	0,019	0,039	0,058	0,077	0,097
2	0,001	0,003	0,007	0,015	0,029	0,059	0,088	0,118	0,147
3	0,002	0,004	0,009	0,019	0,037	0,074	0,146	0,147	0,184
4	0,002	0,004	0,011	0,022	0,043	0,086	0,129	0,172	0,214
5	0,002	0,005	0,012	0,024	0,049	0,097	0,146	0,194	0,241
6	0,003	0,005	0,013	0,027	0,054	0,107	0,160	0,213	0,264
7	0,003	0,006	0,015	0,029	0,058	0,116	0,174	0,230	0,286
8	0,003	0,006	0,016	0,031	0,062	0,125	0,186	0,246	0,305
9	0,003	0,007	0,017	0,033,	0,066	0,132	0,197	0,261	0,323
10	0,004	0,007	0,018	0,035	0,070	0,140	0,208	0,275	0,340
12	0,004	0,008	0,019	0,039	0,077	0,155	0,228	0,301	0,371
14	0,004	0,008	0,021	0,042	0,083	0,166	0,246	0,325	0,399
16	0,004	0,009	0,022	0,045	0,089	0,177	0,263	0,346	0,425
18	0,005	0,009	0,024	0,047	0,095	0,188	0,279	0,366	0,448
20	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,198	0,293	0,384	0,470
25	0,006	0,011	0,028	0,056	0,112	0,221	0,327	0,446	0,518
35	0,006	0,012	0,031	0,061	0,122	0,242	0,356	0,462	0,559
35	0,007	0,013	0,033	0,067	0,133	0,262	0,384	0,497	0,597
40	0,007	0,014	0,036	0,072	0,142	0,279	0,408	0,525	0,628
45	0,008	0,015	0,038	0,076	0,150	0,295	0,431	0,552	0,657
50	0,008	0,016	0,040	0,080	0,158	0,303	0,452	0,576	0,682
60	0,009	0,017	0,044	0,087	0,173	0,339	0,489	0,619	0,726
70	0,009	0,019	0,047	0,094	0,187	0,364	0,522	0,656	0,762
80	0,010	0,020	0,050	0,101	0,200	0,387	0,552	0,688	0,792
90	0,011	0,021	0,053	0,107	0,211	0,408	0,579	0,716	0,818
100	0,011	0,022	0,056	0,112	0,222	0,428	0,604	0,741	0,840
150	0,014	0,028	0,069	0,137	0,271	0,500	0,701	0,833	0,914
200	0,016	0,032	0,080	0,158	0,311	0,576	0,769	0,888	0,951
250	0,018	0,036	0,089	0,177	0,345	0,629	0,815	0,924	0,972
500	0,025	0,050	0,126	0,248	0,473	0,794	0,941	0,987	0,998
1000	0,036	0,071	0,177	0,345	0,629	0,926	0,992	0,999	0,1000

Для нотаток

Навчальне видання

Макеєв Василій Ілліч,
Пушкарьов Юрій Іванович,
Ляпа Микола Миколайович та ін.

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В АРТИЛЕРІЇ

Підручник

Художнє оформлення обкладинки Ю. І. Пушкарьова
Редактори: Н. М. Мажуга, М. Я. Сагун, С. М. Симоненко
Комп’ютерне верстання Ю. І. Пушкарьова

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 28,83. Обл.-вид. арк. 26,98. Тираж 500 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ В АРТИЛЕРІЇ

Підручник