

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Кафедра прикладної математики та
моделювання складних систем

ДИПЛОМНА РОБОТА
тема роботи:
**МОДЕЛЮВАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ ФІЗИЧНИХ ПОЛІВ У СКІНЧЕННІЙ
ПЛАСТИНІ З ДЕФЕКТАМИ**

Завідувач випускової
кафедри:

д. ф.-м. н., проф. О.В. Лисенко

Керівник роботи:

к. ф.-м. н. Т.С. Сушко

Рецензент:

к. ф.-м. н., с.н.с. О.Б. Лисенко

Виконавець:

студент факультету ЕлІТ,
гр. ПМ.м.н-71
О.В. Шевченко

Затверджено на засіданні кафедри " __ " _____ 20__ р., протокол №

Суми 2019

РЕФЕРАТ

Дипломна робота містить 89с., 40 рисунків, джерел 74, додатки 2.

Об'єкт дослідження – проблема теорії руйнування ЕМП матеріалів з дефектами структури для обмежених середовищ.

Мета роботи – подальший розвиток методів дослідження параметрів руйнування, що характеризують область в околі вершини тріщини однорідного ЕМП матеріалу, для пластин і різної кількості тріщин у вигляді прямих.

Крайова задача руйнування скінченої електромагнетопружної пластини, що містить тріщини, зводиться до мішаної системи алгебраїчних рівнянь, сингулярних інтегральних рівнянь та сукупності додаткових умов. Ця система розв'язується чисельно за допомогою одного з методів механічних квадратур. В роботі розглянуті пластини у формі трикутника, квадрата та еліпса і тріщини у формі прямих, а також розробка програми мовою Python з використанням ООП, яка обчислює ефекти зв'язаності електромагнетопружних полів, крайові дефекти, що виникають в околі границі пластини, коефіцієнти інтенсивності польових величин ($K_I, K_{II}, K_B, K_D, K_E, K_H$).

ЕЛЕКТРОМАГНЕТОПРУЖНІСТЬ, СКІНЧЕНА ПЛАСТИНА, ДЕФЕКТИ,
КРАЙОВА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ, МІШАНА СИСТЕМА
АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ,
ДОДАТКОВІ УМОВИ, ЕФЕКТ ЗВ'ЯЗНОСТІ, КРАЙОВІ ДЕФЕКТИ,
КОЕФІЦІЄНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.....	8
2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМАГНЕТОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА	13
2.1 Постановка задачі	13
2.2 Комплексні подання польових величин	15
2.3 Інтегральні рівняння граничної задачі.....	22
2.4 Додаткові умови - умови однозначності переміщень	25
2.5 Асимптотика розв'язків в околі вершин тріщин. Характеристики руйнування	26
2.6 Енергетичний критерій руйнування	32
2.7 Чисельний алгоритм	36
2.8 Квадратурні формули розімкнених контурах Γ_m	37
2.9 Квадратурні формули замкнених контурах Γ_0	38
2.10 Зведення до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.....	40
3 РЕЗУЛЬТАТИ.....	46
3.1 Режими роботи програми.....	46
3.2 Порівняння характеристик руйнування при різних параметрах.....	50
3.3 Висновки.....	60
ВИСНОВОК.....	61
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	63
Додаток А.....	70
Додаток Б.....	71

ВСТУП

Електромагнетопружні (ЕМП) матеріали належать до інтелектуальних матеріалів. Такі матеріали стали перспективними кандидатами в якості основних компонентів багатофункціональних апаратів перетворення енергії, наприклад: датчиків, приводів, перетворювачів і пристроїв поверхневих акустичних хвиль, їх унікальний ефект зв'язку ЕМП. Однак під час обслуговування цих ЕМП компонентів, зазвичай розвиваються тріщини або дефекти матеріалів, що значно зменшить їх продуктивність і залишковий ресурс, особливо в середовищах динамічного навантаження.

Широке застосування ЕМП матеріалів в інженерних додатках сприяло інтересам у вивченні тріщин в однорідних електромагнетопружних матеріалах. Через власний магнітоелектричний ефект зв'язку, магнітоелектропружні матеріали використовувалися в розумних структурах для різних застосувань

Електромагнетопружні (ЕМП) матеріали вперше було виявлено 1980х роках. Тоді з'ясували, що композити володіють як п'єзоелектричними (ПЕ) так і п'єзомагнітними (ПМ) фазами, представляючи електромагнітний ефект сполучення. Маючи здатність перетворювати механічну, електричну і магнітну енергії, ЕМП матеріали викликають великий інтерес для дослідження в декількох областях інженерії, як клас важливих функціональних матеріалів,. Як правило, ці матеріали можуть передчасно виходити з ладу через наявність деяких дефектів (таких як тріщини і отвори), що виникають в ході виробничого процесу і подальшої обробки.

Розуміння механізму руйнування матеріалів ЕМП є складним завданням, і були проведені важливі теоретичні роботи щодо проблем руйнування в матеріалах ЕМП.

Відповідно до сучасних уявлень, явище руйнування високоміцних матеріалів і виготовлених з них конструкційних елементів відбувається шляхом поширення тріщини, тобто шляхом утворення нових поверхонь тіла. У структурі реального конструкційного матеріалу завжди є або виникають в процесі його

деформування дефекти типу тріщин (розриви суцільності, загострені порожнини, включення і т.п.). Тому питання про міцність деформованого твердого тіла нерозривно пов'язане з питанням про зародження і поширення в ньому тріщин.

Хоча з практичної точки зору запобігання виникненню дефектів типу тріщин є вкрай важливим завданням, її здійснення в загальному випадку пов'язане з великими труднощами і взагалі кажучи, важко піддається реалізації. У зв'язку з цим при оцінці несучої здатності тіла припускають наявність тріщин, які є в структурі реальних твердих тіл, і визначають ті умови, при яких відбувається поширення найбільш небезпечної тріщини, що приводить до локального або повного руйнування тіла.

Коефіцієнти інтенсивності, включаючи коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН), коефіцієнт інтенсивності електричної індукції (КІЕІ) і коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції (КІМІ) є ключовими параметрами руйнування, які характеризують область в околі вершини тріщини однорідного ЕМП матеріалу.

Вивчення моделі руйнування привертає інтерес багатьох людей через розбіжності між теорією та експериментами.

Актуальність теми. Електромагнетопружні матеріали викликають великий інтерес для дослідження в ряді галузей інженерії, як клас важливих функціональних матеріалів. Проте, великий недолік таких матеріалів є їх крихкість і низька в'язкість руйнування. Тому велике значення має вивчення проблеми руйнування таких матеріалів для різних конфігурацій середовищ за наявності в них дефектів. Вивчення моделі руйнування привертає інтерес багатьох людей через розбіжності між теорією та експериментами.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є розвиток методів дослідження параметрів руйнування, що характеризують область в околі вершин тріщин в скінченій ЕМП пластині з однорідного ЕМП матеріалу.

Для досягнення сформульованої мети необхідно:

- звести граничну задачу до крайової задачі теорії функцій комплексного змінного;

- привести цю крайову задачу до системи рівнянь;
- отримати вирази для коефіцієнтів інтенсивності фізичних полів в околі вершини тріщини;
- отримати енергетичний критерій руйнування у вигляді додатньої функції, що залежить від коефіцієнтів інтенсивності;
- отримати чисельні результати для різних конфігурацій пластини та тріщин та визначити залежність параметрів руйнування від властивостей матеріалу та геометрії тріщини та пластини.
- написати програму для отримання чисельних результатів для різних модифікацій параметрів

Об'єктом дослідження в роботі є проблема руйнування ЕМП матеріалів.

Предметом дослідження є аналіз впливу властивостей матеріалу та геометрії пластини і тріщин на ній на параметри руйнування цієї пластини

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Електромагнетопружні матеріали та структури, отримали значну увагу завдяки можливості розробки адаптивних структур, які є одночасно легкими і володіють можливостями адаптивного управління. Через їхню крихкість, тріщинами в цих матеріалах значно зацікавлені.

Таким чином, аналіз руйнування цього класу матеріалів, що містять такі дефекти, як тріщини, є важливою проблемою.

Магнетоелектропружний матеріал явно складається з безлічі тріщин з надзвичайно високою щільністю.

Тому взаємодія між декількома тріщинами в магнетоелектропружних матеріалах в проникних і непроникних умовах на поверхні тріщин відіграє важливу роль у аналізі та проектуванні розумних структур. Слід зазначити, що різні магнітоелектричні граничні умови на поверхнях тріщин призводять до різномірних результатів поведінки руйнування цих матеріалів. Однак більшість аналізів руйнування для інтелектуальних матеріалів пов'язані зі статичним або квазістатичним навантаженням.

Але, можливо, дуже важливим є вивчення перехідних умов завантаження в цих матеріалах.

Дослідження теорії поширення крихкої тріщини в рамках механіки суцільного середовища привело до створення нової галузі механіки - теорії тріщин. Основи цієї теорії закладені в відомих роботах Гриффітса [1, 2], де вперше на основі енергетичного методу розв'язано задачу про необхідну величину граничного руйнівного навантаження для нескінченної однорідної пластини з прямолінійною макроскопічною тріщиною заданої довжини, коли така пластинка розтягується.

Пружні напруження в околі кінців тріщини можна представити у вигляді $\frac{N}{\sqrt{r}} + O(1)$, де r - мінімальна відстань від вершини тріщини; N - коефіцієнт інтенсивності напружень; $O(1)$ - обмежена величина при $r \rightarrow 0$. Згідно Ірвіну, поширення тріщини настає тоді, коли коефіцієнт пружного напруження N досягає

деякого (постійного для даного матеріалу при заданих умовах) значення, і величина цього коефіцієнту може служити характеристикою міцності властивостей матеріалу.

Важливим етапом у розвитку теорії тріщин були роботи Ірвіна [3, 4], узагальнюючі і вдосконалюючі теорію Гриффітса на випадок квазікрихкого руйнування. Квазікрихкі матеріали при звичайних випробуваннях поведуться як досить пластичні, однак при наявності тріщин їх руйнування відбувається за схемою крихкого руйнування.

Дослідження Ірвіна і Орована показали, що можна використовувати співвідношення, отримані при ідеально крихкому руйнуванні, і для квазікрихких матеріалів, якщо замінити при цьому поверхневу енергію матеріалу ефективною поверхневою енергією, що включає ще й енергію, витрачену на мікропластичну деформацію в приповерхневому шарі тріщини.

Концепція Ірвіна-Орована значно розширила область використання теорії тріщин крихкого руйнування в інженерній практиці і тим самим сприяла збільшенню інтересу до цієї проблеми.

У роботах радянських дослідників (М.Я. Леонова, В.В. Панасюка, Г.П. Черепанова, В.В. Новожилова, Л.І. Сєдова, П.М. Витвицького, Д.Д. Івлєва, В.З. Партона, Е.М. Морозова та ін.) значна увага приділяється питанням обліку пластичних деформацій в околі вершин тріщини, що розповсюджується, в деформуєчому квазікрихкому тілі і формулюванні на цій основі завдань механіки руйнування як відповідних крайових задач механіки суцільних середовищ.

До теперішнього часу запропоновані різні підходи для пояснення механізму квазікрихкого руйнування; найбільш простою і досить універсальною розрахунковою моделлю твердого квазікрихкого тіла для вирішення задач про поширення тріщин є « δ_k -модель». У разі макроскопічних тріщин « δ_k -модель» Леонова-Панасюка для ідеально крихкого тіла призводить до таких же результатів, як теорія Ірвіна-Орована.

Аналіз статичного або квазістатичного руйнування в розумному матеріалі привернув значну увагу в останні роки [54–59]. Кінцеву тріщину в нескінченному

п'єзоелектричному середовищі при перехідних електромеханічних навантаженнях вивчали Чен і Каріхалу [60]. У даній роботі вивчено вплив напрямків електричних навантажень на динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН). У роботі Лі [61] було розглянуто напівнескінченний тріщинний п'єзоелектричний матеріал через магнітоелектричний вплив точкового навантаження на поверхні тріщин. Розрахована швидкість вивільнення енергії механічної деформації та досліджено динамічні коефіцієнти інтенсивності електропружного поля. У статті [62] розглянуто задачу про розрив межі між різнорідними п'єзоелектричними шарами при магнітоелектричних впливах. Досліджено вплив коефіцієнта навантаження, геометрії розташування тріщин та властивостей матеріалу на коефіцієнти інтенсивності поля. Позапланова перехідна деформація нескінченного ФГМ з кінцевою тріщиною була досліджена Zhang et al. [63]. Обговорено вплив ФГМ на ДКІН і їх динамічний перебіг, відповідний статичним SIF. Динамічною антиплоскостною механічною і плоскою задачею електричної і магнітної тріщин магнітоелектропружної середовища було досліджено Лі [64]. Вони досліджували вплив властивостей матеріалу та застосованих електромагнітних впливів на динамічні фактори інтенсивності. Фенг і Су [65] проаналізували перехідну характеристику функціонально градуйованої магнітоелектропружної пластини, що містить внутрішню тріщину, перпендикулярну до межі. Su et al. [66] Досліджено проблему розшарування між різнорідними магнітоелектропружними смугами при антиплоскостних механічних і плоских магнітоелектричних впливах. У цьому дослідженні було прийнято магнітоелектрична проникна граничне умова. Проблема перехідного процесу аналізували Юн і Чжоу [67] для магнітоелектропружної пластини, що містить непроникну тріщину, перпендикулярну межі. Досліджено вплив геометричних параметрів та магнітоелектричних впливів на динамічний відгук. Garcí'a-Sa'nchez et al. [68] виконували теоретичні дослідження для оцінки ДКІН тріщин двовимірних (2-D), однорідних і лінійних п'єзоелектричних твердих тіл. Вони досліджували вплив механічного та електричного навантаження на руйнування середовища. Чень [69]

вивчав динамічний відгук проникної і непроникної тріщини, що поширюється в магнітоелектропружному твердому тілі, підданому змішаним навантаженням.

Вищезазначені проблеми обмежені однією або двома періодичними тріщинами. Для магнітоелектропружної пластини ніколи не виконувався перехідний аналіз декількох дефектів, таких як вбудовані та крайові тріщини, але останнім часом з використанням техніки розподілу дислокацій (ТРД) публікуються статті, що мають кілька досліджених тріщин. ТРД є потужним напіваналітичним методом для розрахунку точних рішень антипланкових і плоских проблем тріщин на основі принципу суперпозиції.

Кілька тріщин в ортотропній підкладці, посиленій покриттям функціонально градірованих матеріалів ТРД з метою отримання ДКІН під час збудження з гармонікою часу, були досліджені Монфаредом і Аятолхахі [70]. Досліджено вплив кутової частоти, довжини тріщини та властивостей матеріалу на ДСІФ. Взаємодія множинних рухомих тріщин з довільною розташуванням у функціонально градуйованій магнітоелектропружній смузі при антиплоскостном механічному та плоскому магнітоелектричному навантаженні вивчали Bagheri et al. [71]. ДКІН, пов'язаний з вершинами тріщин, обчислювали за допомогою чисельної зворотної схеми Лапласа. Vafa et al. [72] використовували ТРД і метод чисельної інверсії для отримання перехідної характеристики смуги ФГ, ослабленої декількома горизонтальними тріщинами.

Досліджено проблему кругового ортотропного бруса з кількома тріщинами під крутильним перехідним навантаженням Хасані і Монфареда [73]. Вони використовують теорію торсіон Сен-Венан і ТРД для аналізу множинних тріщин. Нещодавно Багері [74] отримав коефіцієнти напруженості поля для множинних тріщин у п'єзоелектричній половинної площині при перехідному навантаженні. Цей автор використовував ТРД для вирішення проблеми.

Тим не менше, більшість ЕМП матеріалів - типові композити, які складаються з п'єзоелектричних і п'єзомагнітних фаз і, отже, неминуче існують матеріальні точки взаємодії між різними фазами. Крім того, ФГМ матеріали скоріше композити двофазних частинок, синтезовані таким чином, що обсяг

руйнування складових матеріалів безперервно коливається в поздовжньому просторовому напрямку, щоб отримати заданий склад в результаті щодо плавної зміни механічних властивостей [34]. Експериментальні дослідження [38] показують, що мікроструктура і точки взаємодії між складовими впливають на поведінку руйнування в ФГМ і тому, коли масштаб дослідження зменшується до певного рівня, точки взаємодії в ФГМ повинні бути розглянуті. У разі аналізу ЕМП матеріалів з складними точками взаємодії, робота спрямована на створення методу механіки руйнування, який не вимагає безперервних і диференційованих властивостей матеріалу.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМАГНЕТОПРУЖНОГО СЕРЕДОВИЩА

2.1 Постановка задачі

В декартових осях $0x_1x_2$ розглянемо пластину, обмежену досить гладким замкнутим контуром Γ_0 , що містить тріщини Γ_m ($m = \overline{1, M}$). Будемо вважати, що тріщини розташовані випадковим чином і їх конфігурації також мають випадковий характер, проте Γ_m - ляпунові дуги і $\bigcap \Gamma_m = \emptyset$. Нехай на кордоні Γ_m діє розпираючий нормальний тиск p_m . На зовнішньому контурі Γ_0 задамо досить гладкі розподіли електричного φ^E або магнітного φ^H потенціалів і компоненти вектора механічного напруження X_{1n}, X_{2n} (рис. 2.1).

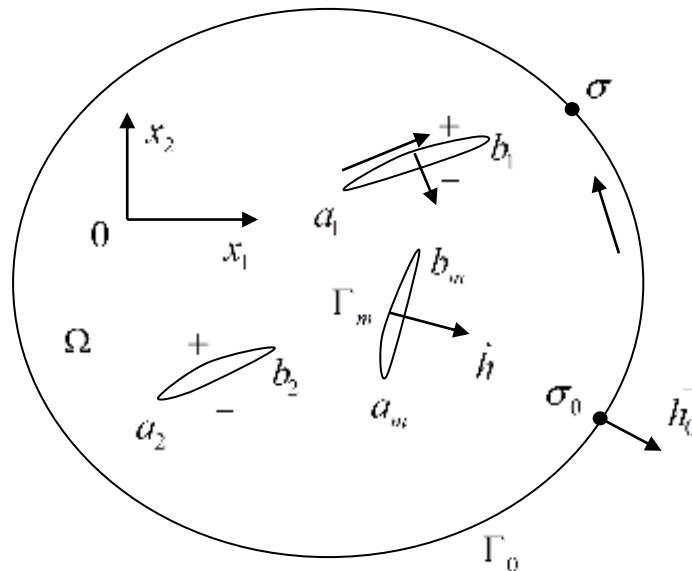


Рисунок 2.1-Область яку займає пластина з тріщинами

Матеріальні рівняння [39]

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} & g_{11} & g_{21} & p_{11} & p_{21} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} & g_{12} & g_{22} & p_{12} & p_{22} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} & g_{16} & g_{26} & p_{16} & p_{26} \\ -g_{11} & -g_{12} & -g_{16} & \beta_{11} & \beta_{12} & v_{11} & v_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} & -g_{26} & \beta_{12} & \beta_{22} & v_{12} & v_{22} \\ -p_{11} & -p_{12} & -p_{16} & v_{11} & v_{12} & \chi_{11} & \chi_{12} \\ -p_{21} & -p_{22} & -p_{26} & v_{12} & v_{22} & \chi_{12} & \chi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Диференційні рівняння рівноваги, електро і магнетостатики [40, 41]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} = 0,$$

$$\partial_1 \sigma_{12} + \partial_2 \sigma_{22} = 0, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad (k = 1, 2), \quad (2.2)$$

$$\partial_1 D_1 + \partial_2 D_2 = 0, \quad \partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = 0, \quad \partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = 0. \quad (2.4)$$

Співвідношення Коші

$$e_{11} = \partial_1 u_1, \quad e_{22} = \partial_2 u_2, \quad 2e_{12} = \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1. \quad (2.5)$$

Умови сумісності деформацій

$$\partial_1^2 e_{22} + \partial_2^2 e_{11} = 2\partial_1 \partial_2 e_{12}. \quad (2.6)$$

До вище вказаних співвідношень потрібно доповнити механічні, електричні та магнітні крайові умови на границі тіла.

У відповідних рівняннях (2.1)-(2.6): $s_{ij} = s_{ij}^{DB}$ коефіцієнти деформації, отримані шляхом вимірювання при постійних значеннях індукції електричного і магнітного полів, $g_{kj} = g_{kj}^{\sigma D}$ і $p_{kj} = p_{kj}^{\sigma D}$ - п'єзоелектричні і п'єзوماгнітні коефіцієнти деформації і напруження виміряні при постійних напруженнях і індукціях, $\beta_{kl} = \beta_{kl}^{\sigma}$, $\chi_{kl} = \chi_{kl}^{\sigma}$ і $\nu_{kl} = \nu_{kl}^{\sigma}$ - коефіцієнти діелектричної, магнітної і електромагнітної сприйнятливості, виміряний при постійних напруженнях; $u = (u_1, u_2)$ - вектор переміщення; σ_{ij} і e_{ij} - тензори напруження і деформації; D_i і B_i - компоненти векторів електричної та магнітної індукції; E_i і H_i - електричне і магнітне напруження полів.

В результаті отримання відповідних результатів коефіцієнтів маємо можливість записати крайові умови на повній границі області:

$$\Gamma_0 + \Gamma, \text{ де } \Gamma = \bigcup_{m=1, \overline{M}} \Gamma_m, \quad \Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset, \quad \Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset \quad (i \neq j).$$

$$\Gamma_0 + \Gamma, \quad \Gamma = \bigcup_{m=1, \overline{M}} \Gamma_m,$$

$$\Gamma_0 \cap \Gamma = \emptyset, \quad \Gamma_j \cap \Gamma_i = \emptyset \quad (i \neq j)$$

Механічні крайові умови:

$$\begin{aligned} X_{1n}|_{\Gamma_0} &= f_1(\zeta), \quad X_{2n}|_{\Gamma_0} = f_2(\zeta), \quad X_{1n}^\pm|_{\Gamma_m} = -p_m \cos \psi, \\ X_{2n}^\pm|_{\Gamma_m} &= -p_m \sin \psi, \quad (m = \overline{1, M}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Електричні і магнітні крайові умови:

$$E_s|_{\Gamma_0} = f_3(\zeta), \quad H_s|_{\Gamma_0} = f_4(\zeta), \quad D_n^\pm|_{\Gamma_m} = 0, \quad B_n^\pm|_{\Gamma_m} = 0 \quad (2.8)$$

2.2 Комплексні подання польових величин

Маємо можливість ввести функцію напружень $F_1(x_1, x_2)$, електричний і магнітний потенціали φ^E і φ^H відповідно до співвідношень

$$\sigma_{11} = \partial_2^2 F_1, \quad \sigma_{12} = -\partial_1 \partial_2 F_1, \quad \sigma_{22} = \partial_1^2 F_1 \quad (2.9)$$

$$E_1 = -\partial_1 \varphi^E, \quad E_2 = -\partial_2 \varphi^E \quad (2.10)$$

$$H_1 = -\partial_1 \varphi^H, \quad H_2 = -\partial_2 \varphi^H \quad (2.11)$$

В відповідності рівняння (2.9) маємо можливість тотожно задовольнити (2.2), а в результаті рівнянь (2.10) та (2.11) задовольнимо умову рівняння (2.4). Для виконання співвідношення (2.3) додаємо відповідні для розв'язку функції $F_2(x_1, x_2)$ і $F_3(x_1, x_2)$ за допомогою тотожності

$$\begin{aligned} D_1 &= \partial_2 F_2, \quad D_2 = -\partial_1 F_2, \\ B_1 &= \partial_2 F_3, \quad B_2 = -\partial_1 F_3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Виражаючи вектор стовпець в лівій частині рівняння (2.1) за допомогою функції $F_m(x_1, x_2)$ ($m = 1, 2, 3$) з використанням відповідностей (2.9), (2.12) і підставляючи далі отримаємо вирази деформації e_{ij} , напруження E_m і H_m в рівняння (2.6) і (2.4), приходимо до системи

$$L_{ij}(\partial_1, \partial_2)F_j = 0 \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (2.13)$$

де

$$\begin{aligned} L_{11}(\partial_1, \partial_2) &= s_{11}\partial_2^4 - 2s_{16}\partial_1\partial_2^3 + (2s_{12} + s_{66})\partial_1^2\partial_2^2 - 2s_{26}\partial_1^3\partial_2 + s_{22}\partial_1^4, \\ L_{12}(\partial_1, \partial_2) &= g_{11}\partial_2^3 - g_{22}\partial_1^3 - (g_{21} + g_{16})\partial_1\partial_2^2 + (g_{12} + g_{26})\partial_1^2\partial_2 = L_{21}(\partial_1, \partial_2), \\ L_{13}(\partial_1, \partial_2) &= p_{11}\partial_2^3 - p_{22}\partial_1^3 - (p_{21} + p_{16})\partial_1\partial_2^2 + (p_{12} + p_{26})\partial_1^2\partial_2 = L_{31}(\partial_1, \partial_2), \\ L_{22}(\partial_1, \partial_2) &= -\beta_{11}\partial_2^2 - \beta_{22}\partial_1^2 + 2\beta_{12}\partial_1\partial_2, \\ L_{23}(\partial_1, \partial_2) &= -\nu_{11}\partial_2^2 - \nu_{22}\partial_1^2 + 2\nu_{12}\partial_1\partial_2 = L_{32}(\partial_1, \partial_2), \\ L_{33}(\partial_1, \partial_2) &= -\chi_{11}\partial_2^2 - \chi_{22}\partial_1^2 + 2\chi_{12}\partial_1\partial_2. \end{aligned}$$

Нехай A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента матриці $\|L_{ij}\|$, що знаходиться в відповідності перетину i -го рядка і j -го стовпчика. За допомогою функції $\Psi_m(x_1, x_2)$, ($m = \overline{1,3}$) отримаємо три системи рішень

$$\begin{aligned} F_{11}(x_1, x_2) &= A_{11}\Psi_1, & F_{12}(x_1, x_2) &= A_{12}\Psi_1, & F_{13}(x_1, x_2) &= A_{13}\Psi_1, \\ F_{21}(x_1, x_2) &= A_{21}\Psi_2, & F_{22}(x_1, x_2) &= A_{22}\Psi_2, & F_{23}(x_1, x_2) &= A_{23}\Psi_2, \\ F_{31}(x_1, x_2) &= A_{31}\Psi_3, & F_{32}(x_1, x_2) &= A_{32}\Psi_3, & F_{33}(x_1, x_2) &= A_{33}\Psi_3. \end{aligned} \quad (2.14)$$

В результаті підстановки в рівняння (2.13) першої системи функцій $F_j = F_{1j}$, рівняння системи в відповідності два і три задовольнятимуться тотожно, а перше зведеться до вигляду

$$(L_{11}A_{11} + L_{12}A_{12} + L_{13}A_{13})\Psi_1 = \Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_1 = 0,$$

де

$$\Delta(\partial_1, \partial_2) = \det\|L_{ij}\|.$$

Цілком схожим методом підстановки в (2.13) послідовно другої $F_j = F_{2j}$ третьої $F_j = F_{3j}$ системи функцій (2.14) перше і третє, і відповідно, перше та друге рівняння в (2.13) задовольняються тотожно. З інших отримаємо

$$\Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_2 = 0, \quad \Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_3 = 0$$

В результаті отримаємо рівняння відповідно до розв'язуючих функцій $\Psi_m(x_1, x_2)$

$$\Delta(\partial_1, \partial_2)\Psi_m = 0, \quad (m = \overline{1,3}). \quad (2.15)$$

З отриманням висновків за допомогою співвідношення, можемо сказати що отримане рівняння (2.15) –являється однорідним диференціальним рівнянням в частинних похідних восьмого порядку. Частковий розв'язок вказаного рівняння візьмемо в вигляді

$$\Psi = f(x_1 + \mu x_2), \quad (2.16)$$

де μ – деяка константа, f – досить гладка функція.

Результатом підстановки функції (2.16) в рівняння (2.15) являє собою отриманням алгебраїчного рівняння восьмої степені відповідно до μ

$$\Delta(1, \mu) = \begin{vmatrix} L_{11}(1, \mu), & L_{12}(1, \mu), & L_{13}(1, \mu) \\ L_{21}(1, \mu), & L_{22}(1, \mu), & L_{23}(1, \mu) \\ L_{31}(1, \mu), & L_{32}(1, \mu), & L_{33}(1, \mu) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.17)$$

Оскільки комбінація матеріальних сталих і дійсних чисел входять до коефіцієнтів цього рівняння, то маємо вісім коренів $\mu_k (k = \overline{1,8})$. А так як потенціал енергії, що складається з позитивно визначених функцій - пружного, електричного і магнітного потенціалів, то коренями μ_k не можуть бути дійсними

[42, 43]. Далі будемо вважати, що вони являються простими, як це і є для більшості відомих керамік. У відповідності зі сказаним введемо

$$\operatorname{Im} \mu_k > 0, \quad \mu_{k+4} = \bar{\mu}_k, \quad (k = \overline{1,4}). \quad (2.18)$$

За своїм фізичним змістом $\Psi_m (m = \overline{1,3})$ - дійсні функції, тому спільні розв'язки рівняння (2.15) представимо у вигляді

$$\Psi_1(x_1, x_2) = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \delta_{1k} f_{1k}(z_k), \quad \Psi_m = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \delta_{mk} \int f_{mk}(z_k) dz_k, \quad (m = \overline{2,3}) \quad (2.19)$$

Тут $f_{mk}(z_k), (m = \overline{1,3})$ - функції аналітичні в своїх афінних областях z_k , δ_{mk} - деякі константи.

Тепер представимо зазначені вище системи розв'язків. Будемо виходити з (2.9), (2.12), (2.14), (2.19).

Перша система рівнянь матиме вигляд

$$\begin{aligned} F_{11} &= A_{11}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \delta_{1k} A_{11}(1, \mu_k) f_{1,k}^{(4)}(z_k), \\ F_{12} &= A_{12}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \delta_{1k} A_{12}(1, \mu_k) f_{1k}^{(5)}(z_k), \\ F_{13} &= A_{13}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \delta_{1k} A_{13}(1, \mu_k) f_{1k}^{(5)}(z_k). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Польові величини

$$\begin{aligned} \{\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}\} &= \{\partial_2^2, -\partial_1 \partial_2, \partial_1^2\} A_{11}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = \\ &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \\ \{D_1^{(1)}, D_2^{(1)}\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{12}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \\ \{B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\} &= \{\partial_2, -\partial_1\} A_{13}(\partial_1, \partial_2) \Psi_1 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\Phi_{1k}(z_k) = \frac{d^6}{dz_k^6} f_{1k}(z_k) = f_{1k}^{(6)}(z_k).$$

Для отримання електричного і магнітного напруження, а також механічних переміщень, використаємо матеріальні рівняння (2.1) та співвідношення (2.21).

Отримаємо

$$\begin{aligned} E_1^{(1)} &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[g_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{13}(1, \mu_k) \right] \mu_k \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \\ E_2^{(1)} &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \left[(-g_{21} \mu_k^2 - g_{22}) A_{11}(1, \mu_k) - \beta_{22} A_{12}(1, \mu_k) - \nu_{22} A_{13}(1, \mu_k) \right] \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \\ \Phi_{1k}(z_k) &= f_{1k}^{(6)}(z_k). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \alpha_{1k}^E &= \left[g_{16} A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{11} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{11} A_{13}(1, \mu_k) \right] \mu_k, \\ \beta_{1k}^E &= - \left[(g_{21} \mu_k^2 + g_{22}) A_{11}(1, \mu_k) + \beta_{22} A_{12}(1, \mu_k) + \nu_{22} A_{13}(1, \mu_k) \right]. \end{aligned}$$

Покажемо, що має місце рівність

$$\beta_{1k}^E = \mu_k \alpha_{1k}^E. \quad (2.23)$$

Запишемо з врахуванням відомої властивості визначників

$$\begin{aligned} \mu_k \alpha_{1k}^E - \beta_{1k}^E &= (g_{16} \mu_k^2 + g_{21} \mu_k^2 + g_{22}) A_{11}(1, \mu_k) + (\beta_{22} + \beta_{11} \mu_k^2) A_{12}(1, \mu_k) + \\ &+ (\nu_{22} + \nu_{11} \mu_k^2) A_{13}(1, \mu_k) = - \{ L_{21} A_{11} + L_{22} A_{12} + L_{23} A_{13} \} = 0. \end{aligned}$$

Таким чином

$$\{ E_1^{(1)}, E_2^{(1)} \} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{ 1, \mu_k \} \alpha_{1k}^E \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k). \quad (2.24)$$

Повністю аналогічно знаходимо компоненти магнітного напруження

$$\{ H_1^{(1)}, H_2^{(1)} \} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{ 1, \mu_k \} \alpha_{1k}^H \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k),$$

де

$$\alpha_{1k}^H = [p_{16}A_{11}(1, \mu_k) + v_{11}A_{12}(1, \mu_k) + \chi_{11}A_{13}(1, \mu_k)]\mu_k. \quad (2.25)$$

Із (2.4), (2.24), (2.25) знаходимо електричний φ_1^E і магнітний φ_1^H потенціали

$$\begin{aligned} \varphi_1^E &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k), \\ \varphi_1^H &= -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k), \quad \varphi_{1k}(z_k) = \int \Phi_{1k}(z_k) dz_k \end{aligned} \quad (2.26)$$

Тепер знайдемо механічні переміщення. Із (2.1) знаходимо

$$\begin{aligned} \partial_1 u_1^{(1)} = e_{11}^{(1)} &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 p_k^{(1)} \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \\ \partial_2 u_2^{(1)} = e_{22}^{(1)} &= 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k q_k^{(1)} \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \end{aligned} \quad (2.27)$$

де

$$\begin{aligned} p_k^{(1)} &= (s_{11}\mu_k^2 + s_{12})A_{11}(1, \mu_k) - g_{21}A_{12}(1, \mu_k) - p_{21}A_{13}(1, \mu_k), \\ q_k^{(1)} &= \left(s_{12}\mu_k + \frac{s_{22}}{\mu_k} \right) A_{11}(1, \mu_k) - \frac{g_{22}}{\mu_k} A_{12}(1, \mu_k) - \frac{p_{22}}{\mu_k} A_{13}(1, \mu_k). \end{aligned}$$

Інтегруючи (2.27) сумісно, отримуємо

$$\{u_1^{(1)}, u_2^{(1)}\} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k^{(1)}, q_k^{(1)}\} \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \quad (2.28)$$

Інтегральні характеристики полів. Нехай на пластині знаходиться AB -гладка крива. Компоненти вектора механічного напруження, нормальні компоненти векторів електричної та магнітної індукції, дотичні компоненти векторів електричного та магнітного напруження визначаються рівностями:

$$X_{1n}^{(1)} = \sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k),$$

$$X_{2n}^{(1)} = \sigma_{12} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k),$$

$$D_n^{(1)} = D_1 \cos \psi + D_2 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) A_{12}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k), \quad B_n^{(1)} = B_1 \cos \psi + B_2 \sin \psi,$$

$$E_s^{(1)} = E_2 \cos \psi - E_1 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) \alpha_{1k}^E \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k),$$

$$H_s^{(1)} = H_2 \cos \psi - H_1 \sin \psi = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) \alpha_{1k}^H \delta_{1k} \Phi_{1k}(z_k).$$

Тут ψ – кут між нормаллю до дуги AB та променем Ox_1 . Між диференціалами $d\zeta_k$ і ds має місце співвідношення

$$\begin{aligned} d\zeta_k &= a_k(\psi) ds, \\ \zeta_k &= \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad \zeta \in AB, \quad a_k(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Із врахуванням співвідношень (2.29), (2.30) знаходимо:

$$X_1^{(1)} = \int_{AB} X_{1n} ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \Big|_A^B,$$

$$X_2^{(1)} = \int_{AB} X_{2n} ds = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \Big|_A^B,$$

$$\Pi_1^D = \int_{AB} D_n ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \Big|_A^B, \quad (2.31)$$

$$\Pi_1^B = \int_{AB} B_n ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \Big|_A^B,$$

$$A_1^E = \int_{AB} E_s ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \Big|_A^B,$$

$$A_1^H = \int_{AB} H_s ds = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \delta_{1k} \varphi_{1k}(z_k) \Big|_A^B, \quad \Phi_{1k}(z_k) = \frac{d\varphi_{1k}(z_k)}{dz_k}.$$

Підрахуємо також механічний момент сил, діючих на дугу AB , відносно початку. Маємо

$$\begin{aligned}
M &= \int_{AB} (X_{2n}x_1 - X_{1n}x_2) ds = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) \int_{AB} z_k \Phi_k(z_k) dz_k = \\
&= \left[F_{11} - 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) z_k \varphi_k(z_k) \right]_A^B,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

де F_{11} - функція напруження, визначена в (2.20).

Друга і третя системи приводять до ідентичних результатів.

2.3 Інтегральні рівняння граничної задачі

Шляхом зведення крайових умов (2.7) –(2.8) з використанням комплексні подання (2.29) - (2.8) до наступних граничних задач теорії аналітичних функцій комплексних змінних z_k

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k) \Big|_{\Gamma_0} &= f_1, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 -a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}(z_k) \Big|_{\Gamma_0} &= f_2, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) \alpha_{1k}^E \Phi_{1k}(z_k) \Big|_{\Gamma_0} &= f_3, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) \alpha_{1k}^H \Phi_{1k}(z_k) \Big|_{\Gamma_0} &= f_4, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}^\pm(z_k) \Big|_{\Gamma_m} &= -p_m \cos \psi, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 -a_k(\psi) A_{11}(1, \mu_k) \Phi_{1k}^\pm(z_k) \Big|_{\Gamma_m} &= -p_m \sin \psi, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) A_{12}(1, \mu_k) \Phi_{1k}^\pm(z_k) \Big|_{\Gamma_m} &= 0, \\
2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi) A_{13}(1, \mu_k) \Phi_{1k}^\pm(z_k) \Big|_{\Gamma_m} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Тут знак «+» відповідає лівому берегу Γ_m (при русі від його початку a_m до кінця b_m); знак «-» відповідає правому берегу Γ_m (рис. 2.1).

Представимо крайові умови (2.33) в більш компактній формі.

На Γ_0

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 a_{0k}(\psi) \Phi_{1k}^+(z_k) = F_{0n} \quad (n = \overline{1,4}) \quad (2.34)$$

На $\Gamma = \bigcup \Gamma_m$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} a_k(\psi) \Phi_{1k}^\pm(z_k) = F_n^\pm \quad (n = \overline{1,4})$$

$$R_{1k}^0 = R_{1k} = \mu_k A_{11}(1, \mu_k), \quad R_{2k}^0 = R_{2k} = -A_{11}(1, \mu_k),$$

$$R_{3k}^0 = \alpha_{1k}^E, \quad R_{4k}^0 = \alpha_{1k}^H, \quad R_{3k} = A_{12}(1, \mu_k), \quad R_{4k} = A_{13}(1, \mu_k),$$

$$F_{0n} = f_n \quad (n = \overline{1,4}),$$

$$F_1^\pm = -p_m \cos \psi, \quad F_2^\pm = -p_m \sin \psi, \quad F_3^\pm = 0, \quad F_4^\pm = 0 \quad (m = \overline{1, M}).$$

За допомогою узагальненого інтегралу типу Коші будемо шукати розв'язок крайової задачі (2.33)

$$\Phi_{1k}(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma) d\sigma_k}{(\sigma_k - z_k) a_{0k}(\psi)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta) d\zeta_k}{(\zeta_k - z_k) a_k(\psi)}, \quad (k = \overline{1,4}) \quad (2.35)$$

$$\sigma_k = \operatorname{Re} \sigma + \mu_k \operatorname{Im} \sigma, \quad \sigma \in \Gamma_0,$$

$$\zeta_k = \operatorname{Re} \zeta + \mu_k \operatorname{Im} \zeta, \quad \zeta \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m \quad (m = \overline{1, M}),$$

$$a_{0k}(\psi) = \mu_k \cos \psi - \sin \psi, \quad \frac{d\sigma_k}{a_{0k}(\psi)} = ds_0,$$

$$z_k = \operatorname{Re} z + \mu_k \operatorname{Im} z, \quad z = x_1 + ix_2 \in \Omega, \quad \frac{d\zeta_k}{a_k(\psi)} = ds.$$

Тут ds_0 і ds – елементи дуг Γ_0 і Γ відповідно.

Граничні значення функції (2.35) на Γ_0 і Γ наступні

$$\left\{ \Phi_{1k}(z_k) \right\}_{\substack{z_k \rightarrow \sigma_{0k} \\ (z \rightarrow \sigma_0 \in \Gamma_0)}}^+ = \frac{i\omega_{0k}(\sigma_0)}{2a_{0k}(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \sigma_{0k}} ds_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \sigma_{0k}} ds, \quad (2.36)$$

$$\left\{ \Phi_{1k}(z_k) \right\}_{\substack{z_k \rightarrow \zeta_{0k} \\ (z \rightarrow \zeta_0 \in \Gamma)}}^{\pm} = \pm \frac{i\omega_{1k}^{(m)}(\zeta_0)}{2a_k(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \zeta_{0k}} ds_0.$$

За допомогою підстановки в крайові умови (2.34) граничних значень (2.36) отримаємо

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 a_{0k}(\psi_0) \left\{ \frac{i\omega_{0k}(\sigma_0)}{2a_{0k}(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \sigma_{0k}} ds_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \sigma_{0k}} ds \right\} = F_{0n}(\sigma_0),$$

$$\sigma_0 \in \Gamma_0,$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} a_k(\psi_0) \left\{ \pm \frac{i\omega_{1k}(\zeta_0)}{2a_k(\psi_0)} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \zeta_{0k}} ds_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds \right\} = F_n^{\pm}(\zeta_0),$$

$$\zeta_0 \in \bigcup \Gamma_m.$$

Необхідно, щоб виконувалися наступні рівності

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \omega_{0k}(\sigma) = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \omega_{1k}(\zeta) = 0.$$

Наступним кроком перехід до інтегральних рівнянь

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \frac{a_{0k}(\psi_0)}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \sigma_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \sigma_{0k}} ds \right) = F_{0n}(\sigma_0),$$

$$2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k(\psi_0)}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \zeta_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds \right) = F_n(\zeta_0), \quad (n = \overline{1,4}). \quad (2.38)$$

Таким чином, крайова задача теорії функцій (2.34) звелася до змішаної системи з $4(M+1)$ алгебричних і $4(M+1)$ сингулярних інтегральних рівнянь щодо $4M$ функцій $\omega_{1k}^m(\zeta)$ та 4-ох функцій $\omega_{0k}(\sigma)$, $(m = \overline{1, M}; k = \overline{1, 4})$. Рівняння (2.37), (2.38) необхідно розглядати спільно з додатковими умовами.

2.4 Додаткові умови - умови однозначності переміщень

З фізичних міркувань для функцій $\omega_{1k}^{(m)}(\zeta)$, визначених на розімкнутих контурах Γ_m , шукаємо в класі функції з кореневими особливостями на кінцях розрізів для розв'язання системи (2.37) - (2.38) [44, 47]. В цьому класі розв'язок рівнянь (2.38) визначається не повністю. Щоб отримати фіксований розв'язок необхідно виконати деякі додаткові умови, які випливають з фізичних міркувань. Вимагатимемо, щоб механічні переміщення, електричний і магнітний потенціали були однозначними функціями в області, зайнятої тілом з тріщинами.

Отримаємо умови однозначності переміщень, для цього проінтегруємо функції (2.35).

Маємо:

$$\varphi_k(z_k) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_0} \omega_{0k}(\sigma) \ln(\sigma_k - z_k) ds_0 - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \omega_{1k}(\zeta) \ln(\zeta_k - z_k) ds, \quad (2.39)$$

$$\varphi_k'(z) = \Phi_k(z), \quad (k = \overline{1,4}).$$

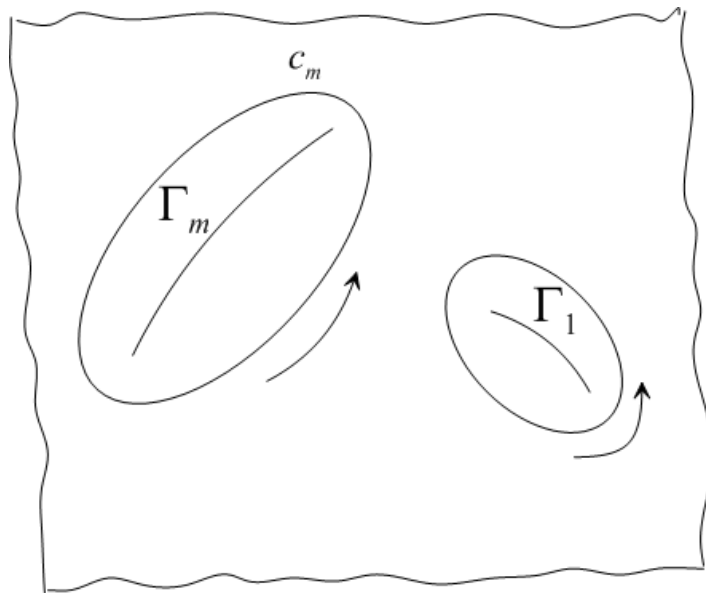


Рисунок 2.2. До умов однозначності переміщень

Приріст функції $\varphi_k(z_k)$ при обході Γ_m по замкнутому контуру C_m , що містить Γ_m і що не містить інших розрізів (рис. 2.2) знаходимо з (2.39)

$$\Delta\varphi_k(z_k) = -i \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds \quad (2.40)$$

Використовуючи формули (2.26), (2.28), отримаємо з урахуванням (2.40), умови однозначності поля переміщень в пластині у вигляді

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 p_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 q_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, (m = \overline{1, M}) \\ \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 a_{1k}^E \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 a_{1k}^H \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, (m = \overline{1, M}) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Таким чином, побудований аналітичний алгоритм зводиться до вирішення системи з 4 (M + 1) алгебраїчних рівнянь (2.37), 4 (M + 1) сингулярних інтегральних рівнянь першого роду (2.38) спільно з 4M додатковими умовами (2.41). Ці умови фіксують неоднозначність розв'язку, що виникає при вирішенні змішаної системи (2.37) - (2.38), в класі функцій необмежених на кінцях дуг Γ_m ($m = \overline{1, M}$) [44].

2.5 Асимптотика розв'язків в околі вершин тріщин. Характеристики руйнування

Асимптотика розв'язків в вершинах тріщин. Введемо параметризацію контуру Γ_m (нижче індекс m опускаємо)

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1), \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma = \bigcup \Gamma_m, \\ -1 \leq \beta, \quad \beta_0 \leq 1. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Густини $\omega_{1k}(\zeta)$, що фігурують в поданнях (2.35), мають кореневі особливості [47]. Нехай

$$\omega_{1k}(\zeta) = \frac{\omega_{1k}^*(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} = \frac{\Omega_{1k}(\beta)}{s'(\beta)\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta}. \quad (2.43)$$

Звідси отримуємо в вершинах тріщини

$$\omega_{1k}^*(c) = \frac{\Omega_{1k}(\pm 1)}{s'(\pm 1)\sqrt{2}} \sqrt{(a-b)\zeta'(\pm 1)}, \quad \zeta' = \frac{d\zeta}{d\beta}, \quad (2.44)$$

де верхній знак відповідає кінцю тріщини $c = b$, нижній - початку $c = a$.

Для дослідження асимптотики комплексних потенціалів в вершинах тріщин скористаємося формулами поведінки інтегралів типу Коші в околі кінців лінії інтегрування [44]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-c)^\gamma(\zeta-z)} = \pm \frac{e^{\pm i\pi\gamma} f(c)}{2i \sin \pi\gamma} (z-c)^{-\gamma} + F_c(z),$$

$$\lim_{z \rightarrow c} (z-c)^\gamma F_c(z) = 0, \quad (2.45)$$

$$0 < \gamma < 1.$$

Тут верхній знак відповідає кінцю $c = b$, нижній - початку $c = a$, у нашому випадку $\gamma = \frac{1}{2}$, тому (2.45) спрощується. Маємо у вершині c

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\sqrt{\zeta-c}(\zeta-z)} = \frac{f(c)}{2} (z-c)^{\frac{1}{2}} + F_c(z). \quad (2.46)$$

Головну асимптотику функцій (2.35) отримаємо з урахуванням формул (2.45), (2.46). Маємо

$$\Phi_{1k}(z_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)d\zeta_k}{a_k(\psi)(\zeta_k - z_k)} = \frac{i\Omega_{1k}(\pm 1)}{2\sqrt{2}\zeta'_k(\pm 1)} \left[\pm (c_k - z_k) \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$c_k = \operatorname{Re} c + \mu_k \operatorname{Im} c, \quad \zeta'_k(\pm 1) = \left. \frac{d\zeta_k(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\pm 1}. \quad (2.47)$$

Верхній знак відповідає вершині тріщини $c = b$, нижній $c = a$.

Згідно рисунку 2.3

$$z - b = re^{i\theta_b}, \quad z - a = -re^{i\theta_a},$$

$$z_k - a_k = -r(\cos \theta_a + \mu_k \sin \theta_a), \quad (2.48)$$

$$b_k - z_k = -r(\cos \theta_b + \mu_k \sin \theta_b),$$

де r – мала відстань від точки z до вершини c .

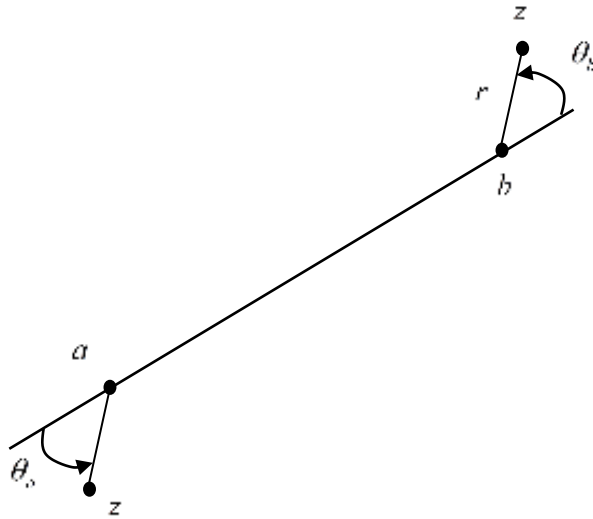


Рисунок 2.3. До виводу асимптотики функцій $\Phi_{1k}(z_k)$ у вершинах тріщини, кути θ_b і θ_a відраховуються від дотичної на продовженні тріщини проти годинникової стрілки

Тепер, головну асимптотику (2.47) у вершині c можна представити у вигляді

$$\Phi_{1k}^c(z_k) = \frac{\Omega_{1k}(\pm 1)}{2\sqrt{2\zeta'_k(\pm 1)}} \frac{(\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{r}} = \frac{1}{2\sqrt{2r}} \Psi_{1k}^c, \quad (2.49)$$

$$\Psi_{1k}^c = \frac{\Omega_{1k}(\pm 1)}{\sqrt{\zeta'_k(\pm 1)}} (\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c)^{-\frac{1}{2}}.$$

де верхній знак відповідає кінцю тріщини $c = b$, нижній – початку $c = a$.

Для отримання асимптотики величин польових в околі вершин тріщин необхідно виконати підстановку в (2.21), (2.24), (2.25) замість $\Phi_{1k}(z_k)$ головну асимптотику (2.49). Маємо

$$\{\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{12}^{(1)}, \sigma_{22}^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k^2, -\mu_k, 1\} A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Psi_{1k}^c + 0(1),$$

$$\{D_1^{(1)}, D_2^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{12}(1, \mu_k) \Psi_{1k}^c + 0(1),$$

$$\{B_1^{(1)}, B_2^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\mu_k, -1\} A_{13}(1, \mu_k) \Psi_{1k}^c + 0(1), \quad (2.50)$$

$$\{E_1^{(1)}, E_2^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_{1k}^E \Psi_{1k}^c + 0(1),$$

$$\{H_1^{(1)}, H_2^{(1)}\} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{1, \mu_k\} \alpha_{1k}^H \Psi_{1k}^c + 0(1).$$

Характеристики руйнування на вершинах тріщин. Коефіцієнти інтенсивності механічних, електричних і магнітних величин являють собою характеристики руйнування. На продовженні тріщини по дотичній за вершину (в її околі) на нескінченно малий елемент діє розриваюче напруження σ_n (на площадці з нормаллю \vec{n}_c) та зсувне напруження τ_{ns} (рис. 2.4).

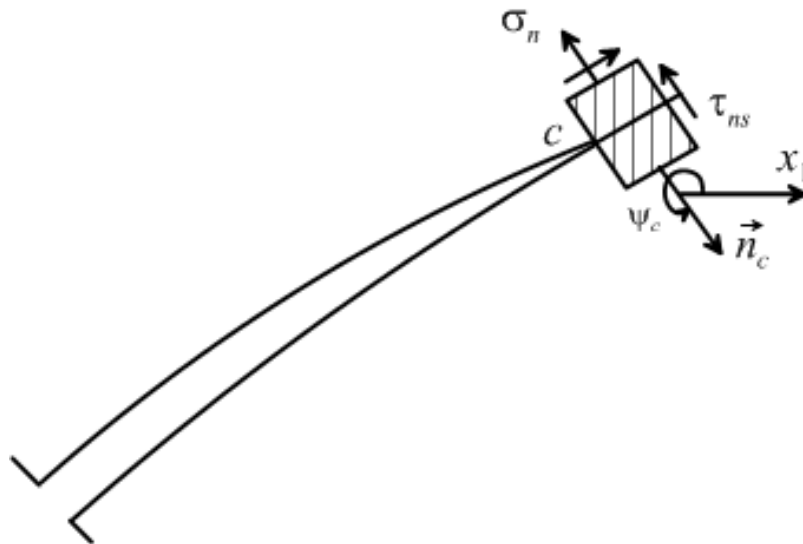


Рисунок 2.4. До визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I і K_{II} .

У механіці руйнування коефіцієнти інтенсивності нормального відриву K_I і поперечного зсуву K_{II} визначаються рівностями [7,45]

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \sigma_n^{(1)}), \quad K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} \tau_{ns}^{(1)}), \quad (2.51)$$

Крім цього, визначимо згідно [19] коефіцієнти інтенсивності електричної та магнітної індукції $K_D = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} D_n^{(1)})$, $K_B = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} B_n^{(1)})$. (2.52)

Маємо на вершині c

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_{11} \cos^2 \psi_c + \sigma_{12} \sin 2\psi_c + \sigma_{22} \sin^2 \psi_c, \\ \tau_{ns} &= \sigma_{12} \cos 2\psi_c + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{11}}{2} \sin 2\psi_c,\end{aligned}\tag{2.53}$$

де ψ – кут нормалі до площадки, на якій обчислюються ці напруження, та віссю Ox_1 .

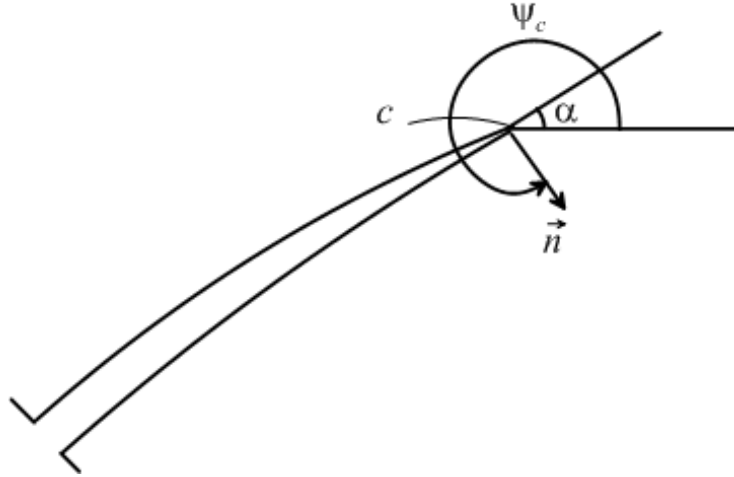


Рисунок 2.5 – До визначення біному $\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c$ у глобальних координатах Ox_1x_2

На продовженні тріщини по дотичній за вершину c θ_a і θ_b дорівнюють нулю ($\theta_c = 0$), $\alpha = \psi_c - \frac{3}{2}\pi$ (рис. 2.5). Відтак, у (2.49) комбінація

$$\cos \theta_c + \mu_k \sin \theta_c = a_k(\psi_c).$$

Звідси та з (2.49)

$$\Psi_{1k}^c = \frac{\Omega_{1k}(\pm 1)}{a_k(\psi_c) \sqrt{s'(\pm 1)}}.\tag{2.54}$$

З урахуванням (2.54) та (2.50) визначимо коефіцієнти інтенсивності (2.51), (2.52).

Маємо

$$K_I = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 a_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 b_k(\psi_c) A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1), b_k(\psi) = \frac{da_k(\psi)}{d\psi}, \quad (2.55)$$

$$K_D = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$K_B = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1).$$

Знайдемо тепер коефіцієнтами інтенсивності K_E та K_H , які визначимо наступним чином

$$K_E^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} E_s^{(1)}), \quad K_H^{(1)} = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{2\pi r} H_s^{(1)}). \quad (2.56)$$

Згідно (2.29), (2.54), (2.56) виводимо

$$K_E^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$K_H^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \Omega_{1k}(\pm 1),$$

$$\text{де,} \quad \alpha_1^E = [\alpha_{11}^E, \alpha_{12}^E, \alpha_{13}^E, \alpha_{14}^E], \quad \alpha_1^H = [\alpha_{11}^H, \alpha_{12}^H, \alpha_{13}^H, \alpha_{14}^H].$$

Математично, ці вирази можна записати у матричній формі в такий спосіб:

$$\begin{pmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_D \\ K_B \\ K_E \\ K_H \end{pmatrix} (\pm 1) = \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A} \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{(r)}(\pm 1) \\ \Omega_{12}^{(r)}(\pm 1) \\ \Omega_{13}^{(r)}(\pm 1) \\ \Omega_{14}^{(r)}(\pm 1) \end{pmatrix} \right\},$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_1) & a_2(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_2) & a_3(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_3) & a_4(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_4) \\ b_1(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_1) & b_2(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_2) & b_3(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_3) & b_4(\psi_c) A_{11}^{(r)}(1, \mu_4) \\ A_{12}^{(r)}(1, \mu_1) & A_{12}^{(r)}(1, \mu_2) & A_{12}^{(r)}(1, \mu_3) & A_{12}^{(r)}(1, \mu_4) \\ A_{13}^{(r)}(1, \mu_1) & A_{13}^{(r)}(1, \mu_2) & A_{13}^{(r)}(1, \mu_3) & A_{13}^{(r)}(1, \mu_4) \\ \alpha_{11}^{E(r)} & \alpha_{12}^{E(r)} & \alpha_{13}^{E(r)} & \alpha_{14}^{E(r)} \\ \alpha_{11}^{H(r)} & \alpha_{12}^{H(r)} & \alpha_{12}^{H(r)} & \alpha_{12}^{H(r)} \end{pmatrix}$$

2.6 Енергетичний критерій руйнування

У концепції руйнування Гриффітса [7, 45, 46] принципове значення має величина енергостоку (потіку енергії) у вершину тріщини при її просуванні у тілі. Якщо тріщина знаходиться у магнетоелектропружному середовищі, то крім механічної енергії, у потік енергії може входити електрична та магнітна енергії, що вивільняються при її просуванні. Формулювання критерію руйнування залежить від виду електричних та магнітних умов на берегах тріщини.

Розглянемо два деформованих стани магнетоелектропружного тіла, що містить тріщину. Нехай $\sigma_{ij}^{(0)}, e_{ij}^{(0)}, u_i^{(0)}, \varphi_0^E, \varphi_0^H$ – компоненти тензорів напружень, деформацій, вектори переміщення, а також електричний та магнітний потенціали у деякому початковому стані тіла «0», а $\sigma_{ij}^{(1)}, e_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}, \varphi_1^E, \varphi_1^H$ – відповідні величини у стані «1», для якого частина двосторонньої поверхні тріщини одержує приріст $\Delta\Sigma$. У припущенні відсутності об'ємних сил та вільних зарядів у тілі запишемо вираз для збільшення внутрішньої енергії при переході магнетоелектропружного тіла зі стану «0» у стан «1». Це приріст $\Delta A_{\Delta\Sigma}$ визначає потік енергії при утворенні розриву $\Delta\Sigma$.

Маємо, наступне [46]

$$\begin{aligned} \Delta A_{\Delta\Sigma} = & \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} D_j^{(0)} n_j [\varphi_1^E] ds - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [D_j^{(1)} \varphi_1^E] n_j ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [D_j^{(1)}] n_j \varphi_0^E ds + \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} B_j^{(0)} n_j [\varphi_1^H] ds - \frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [B_j^{(1)} \varphi_1^H] n_j ds - \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\Delta\Sigma_1} [B_j^{(1)}] n_j \varphi_0^H ds, \quad [f] = f^+ - f^-$$

Тут знаки \pm відповідають граничним значенням величин $u_j^{(1)}, \varphi_1^E, \varphi_1^H, D_j^{(1)}, B_j^{(1)}$ на двосторонній поверхні $\Delta\Sigma$, а інтегрування ведеться по одній стороні цієї поверхні.

Умова локального руйнування має вигляд

$$\gamma(\Delta\Sigma_1 + \Delta\Sigma_2) = -\Delta A_{\Delta\Sigma}, \quad (2.58)$$

де γ – густина поверхневої енергії.

У моделі тріщини на Γ (припускаємо, що $p=0$)

$$D_n^{(0)} = D_j^{(0)} n_j = 0, \quad B_n^{(0)} = B_j^{(0)} n_j = 0, \quad \sigma_{ij}^{(0)} n_j = 0 \quad (i, j=1,2). \quad (2.59)$$

Нехай тріщина Γ просунулася по дотичній за вершину c на малу відстань $h = \Delta l$ та її вершина c зайняла положення c' . З огляду на безперервність $\varphi_E^{(0)}, \varphi_H^{(0)}, \sigma_{ij}^{(0)}, D_j^{(0)}, B_j^{(0)}$ на ділянці cc' , отримаємо з (2.57) з урахуванням крайових умов (2.7) - (2.8).

$$\Delta A_{\Delta l} = \frac{1}{2} \int_{cc'} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} D_j^{(0)} n_j [\varphi_i^E] ds + \frac{1}{2} \int_{cc'} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^H] ds \quad (2.60)$$

Відповідно до (2.58), (2.60) умова поширення тріщини матиме вигляд

$$2\gamma = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l} \left\{ \int_0^{\Delta l} \sigma_{ij}^{(0)} n_j [u_i^{(1)}] ds + \int_0^{\Delta l} D_j^{(0)} n_j [\varphi_1^E] ds + \int_0^{\Delta l} B_j^{(0)} n_j [\varphi_i^H] ds \right\} \quad (2.61)$$

Підрахуємо праву частину формули (2.61). Маємо, у силу (2.50) в точці M на ділянці cc' (рис. 2.6)

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^{(0)} n_j &= \sigma_{11}^{(0)} n_1 + \sigma_{12}^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \mu_k A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \frac{Q_{11}(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}}, \\ \sigma_{2j}^{(0)} n_j &= \sigma_{21}^{(0)} n_1 + \sigma_{22}^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 -A_{11}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \frac{Q_{12}(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}}, \\ D_j^{(0)} n_j &= D_1^{(0)} n_1 + D_2^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \frac{Q_{13}(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$B_j^{(0)} n_j = B_1^{(0)} n_1 + B_2^{(0)} n_2 = \frac{1}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \Omega_{1k}(\pm 1) = \frac{Q_{14}(\pm 1)}{\sqrt{2rs'(\pm 1)}}.$$

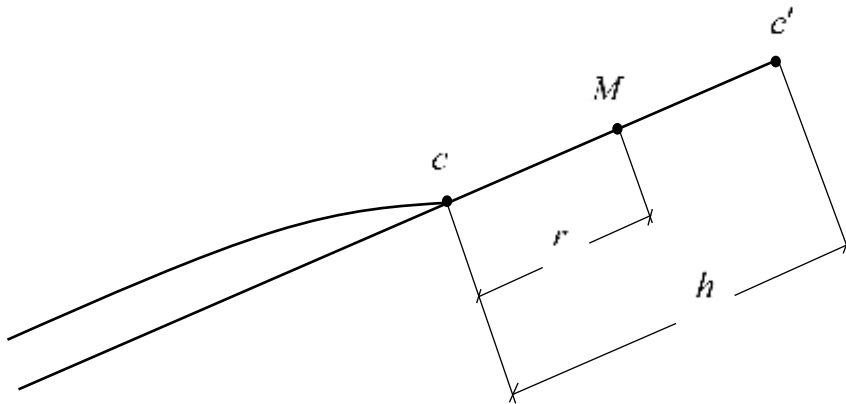


Рисунок 2.6 До підрахунку стоку енергії в вершину c

Тепер підрахуємо стрибки $[u_i^{(1)}], [\varphi_1^E], [\varphi_1^H]$ в точці $M \in cc'$, віддаленої від вершини c' на відстані $h-r$.

Інтегрування асимптотик (2.47) дає

$$\varphi_{1k}(z_k) = -\frac{i\Omega_{1k}(1)}{\sqrt{2\zeta'_k(1)}} (b'_k - z_k)^{\frac{1}{2}} \text{ в околі вершини } c' = b' \quad (2.63)$$

$$\varphi_{1k}(z_k) = \frac{i\Omega_{1k}(-1)}{\sqrt{2\zeta'_k(-1)}} (z_k - a'_k)^{\frac{1}{2}} \text{ в околі вершини } c' = a'.$$

Враховуючи рівності

$$b'_k - z_k = (h-r)a_k(+1), \quad z_k - a'_k = -(h-r)a_k(-1),$$

знаходимо скачок $\varphi_{1k}(z_k)$ на cc'

$$[\varphi_{1k}] = \mp \frac{2i\Omega_{1k}(\pm 1)}{\sqrt{2s'(\pm 1)}} \sqrt{\pm(h-r)}, \quad [\varphi_{1k}] = \varphi_{1k}^+ - \varphi_{1k}^-, \quad (2.64)$$

де верхній знак відповідає вершині $c = b$, нижній - вершині $c = a$.

Використовуючи формули (2.26), (2.28) та вирази для стрибків функцій $\varphi_k(z_k)$ на cc' запишемо

$$\{[u_1], [u_2]\} = \mp \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(h-r)}}{\sqrt{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{p_k^{(1)}, q_k^{(1)}\} i\Omega_{1k}(\pm 1), \quad (2.65)$$

$$\{[\varphi_1^E], [\varphi_1^H]\} = \pm \frac{2\sqrt{2}\sqrt{(h-r)}}{\sqrt{s'(\pm 1)}} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 \{\alpha_{1k}^E, \alpha_{1k}^H\} i\Omega_{1k}(\pm 1)$$

Тепер, з урахуванням співвідношень (2.65), (2.62), умова поширення тріщини (2.61) буде виглядати так

$$2\gamma = \frac{1}{s'(\pm 1)} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \sqrt{\frac{(h-r)}{r}} dr \right) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 (Q_{11}p_k^{(1)} + Q_{12}q_k^{(1)} + Q_{13}\alpha_{1k}^E + Q_{14}\alpha_{1k}^H) \Omega_{1k}(\pm 1), \quad (2.66)$$

де

$$\sum_{k=1}^4 \mu_k A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Omega_{1k}(\pm 1) = Q_{11}(\pm 1),$$

$$\sum_{k=1}^4 A_{11}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Omega_{1k}(\pm 1) = -Q_{12}(\pm 1),$$

$$\sum_{k=1}^4 A_{12}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Omega_{1k}(\pm 1) = Q_{13}(\pm 1),$$

$$\sum_{k=1}^4 A_{13}(1, \mu_k) \delta_{1k} \Omega_{1k}(\pm 1) = Q_{14}(\pm 1)$$

Введемо в розгляд наступні величини: скаляри g_k ($k = \overline{1,4}$) та матрицю

рядок g

$$g_1 = Q_{11}p_1^{(1)} + Q_{12}q_1^{(1)} + Q_{13}\alpha_{11}^E + Q_{14}\alpha_{11}^H, \quad [g_1, g_2, g_3, g_4] = g, \quad (2.67)$$

$$g_2 = Q_{11}p_2^{(1)} + Q_{12}q_2^{(1)} + Q_{13}\alpha_{12}^E + Q_{14}\alpha_{12}^H,$$

$$g_3 = Q_{11}p_3^{(1)} + Q_{12}q_3^{(1)} + Q_{13}\alpha_{13}^E + Q_{14}\alpha_{13}^H,$$

$$g_4 = Q_{11}p_4^{(1)} + Q_{12}q_4^{(1)} + Q_{13}\alpha_{14}^E + Q_{14}\alpha_{14}^H.$$

Враховуючи (2.34) і (2.43), отримуємо зв'язок між вектор-стовпцями Q_1 і Ω_1

$$\Omega_1 = R_{nk}^{-1} Q_1, \quad Q_1 = \{Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, Q_{14}\}^T \quad (2.68)$$

Нарешті, обчислюємо

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \sqrt{\frac{(h-r)}{r}} dr = \frac{\pi}{2}. \quad (2.69)$$

Враховуючи рівності (2.67), (2.68), (2.69), представимо умову поширення тріщини (2.66) в наступній матричній формі

$$2\gamma = \frac{\pi}{2s'(\pm 1)} \text{Im}(gR_1^{-1}Q_1) \quad (2.70)$$

Права частина в (2.70) є, очевидно, квадратичною формою змінних Q_{1j} ($j = \overline{1,4}$), а так як Q_{1j} – лінійні комбінації коефіцієнтів інтенсивності, то робимо висновок, що величина енергостоків в кожну вершину є квадратична форма змінних K_i . Можемо записати (сумуємо за повторними індексами – за i та j)

$$2\gamma = \alpha_{ij} K_i K_j \quad (i, j = \overline{1,4}), \quad (2.71)$$

де $K_1 = K_I, K_2 = K_{II}, K_3 = K_D, K_4 = K_B$ і α_{ij} – коефіцієнти, які залежать від матеріальних констант магнетоелектричної кераміки.

2.7 Чисельний алгоритм

Побудуємо алгоритм чисельного розв'язання мішаної системи (2.37), (2.38), (2.41) з застосуванням методу механічних квадратур до сингулярних інтегральних рівнянь [47,48,49,50]

$$\text{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \omega_{0k}(\sigma) = 0, \quad \text{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \omega_{1k}(\zeta) = 0, \quad (2.72)$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \frac{a_{0k}(\psi_0)}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \sigma_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \sigma_{0k}} ds \right) = F_{0n}(\sigma_0), \quad (2.73)$$

$$2\text{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k(\psi_0)}{2\pi} \left(\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma)}{\sigma_k - \zeta_{0k}} ds_0 + \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta)}{\zeta_k - \zeta_{0k}} ds \right) = F_n(\zeta_0), \quad (n = \overline{1,4}).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 p_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 q_k^{(1)} \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (m = \overline{1, M}) \\ \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^E \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \alpha_{1k}^H \int_{\Gamma_m} \omega_{1k}^{(m)}(\zeta) ds = 0, \quad (m = \overline{1, M}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.8 Квадратурні формули розімкнених контурах Γ_m

Введемо параметризацію контура Γ_m (нижче індекс m опускаємо)

$$\begin{aligned} \zeta = \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad a = \zeta(-1), \quad b = \zeta(1), \quad \zeta, \zeta_0 \in \Gamma = \cup \Gamma_m, \\ -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Наприклад, для параболічного контуру можемо ввести параметризацію так

$$\zeta(\beta) = (p_2 \beta^2 + ip_1 \beta) e^{i\alpha} + ih, \quad -1 \leq \beta \leq 1, \quad (2.76)$$

де p_1, p_2 - числові параметри, що визначають геометричні розміри параболи, зокрема, коли один з параметрів дорівнює нулю, маємо прямолінійний контур; параметр α - визначає кут нахилу осі параболи до осі Ox ; $(0; h)$ - координати вершини параболи.

Будем шукати щільності $\omega_{1k}^{(m)}(\zeta)$ на розімкнених контурах Γ_m в класі функцій, що мають кореневі особливості на кінцях інтервалу $(-1; 1)$, покладемо

$$\omega_{1k}(\zeta) = \frac{\omega_{1k}^*(\zeta)}{\sqrt{(\zeta - a)(\zeta - b)}} = \frac{\Omega_{1k}(\beta)}{s'(\beta) \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad s'(\beta) = \frac{ds}{d\beta}. \quad (2.77)$$

Введемо на $(-1; 1)$:

точки інтерполяції

$$\beta_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n} \pi\right), \quad (j = \overline{1, n}), \quad T_n(\beta_j) = 0, \quad (2.78)$$

та коллокації

$$\beta_{om} = \cos\left(\frac{\pi m}{n}\right), \quad (m = \overline{1, n-1}), \quad U_{n-1}(\beta_{om}) = 0, \quad (2.79)$$

де $T_n(\beta)$ та $U_n(\beta)$ - многочлени Чебишова 1-го та 2-го роду відповідно.

Квадратурні формули Гауса для системи вузлів (2.78) дають

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta) ds}{\zeta_k - \zeta_{0k}} &= \int_{-1}^1 \frac{\Omega_{1k}(\beta) d\beta}{\sqrt{1-\beta^2} (\zeta_k(\beta) - \zeta_k(\beta_0))} = \\ &= \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_{1k}(\beta_j)}{\zeta_k(\beta_j) - \zeta_k(\beta_0)} + \pi \Omega_{1k}(\beta_0) \frac{U_{n-1}(\beta_0)}{T_n(\beta_0)}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

На системі вузлів (2.79) другий доданок в (2.80) зникає і отримуємо квадратурну формулу

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\omega_{1k}(\zeta) ds}{\zeta_k - \zeta_{0k}} &= \int_{-1}^1 \frac{\Omega_{1k}(\beta) d\beta}{\sqrt{1-\beta^2} (\zeta_k(\beta) - \zeta_k(\beta_{0m}))} \square \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\Omega_{1k}(\beta_j)}{\zeta_k(\beta_j) - \zeta_k(\beta_{0m})}, \\ &(m = \overline{1, n-1}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Для регулярного інтегралу звичайна квадратурна формула Гауса дає [51]

$$\int_{-1}^1 \frac{K(\zeta(\beta), \zeta(\beta_0)) \Omega_{1k}(\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}} d\beta \square \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n K(\zeta(\beta_j), \zeta(\beta_0)) \Omega_{1k}(\beta_j). \quad (2.82)$$

2.9 Квадратурні формули замкнених контурах Γ_0

Введемо параметризацію контура Γ_0

$$\sigma = \sigma(\varphi), \quad \sigma_0 = \sigma(\varphi_0), \quad \sigma, \sigma_0 \in \Gamma_0, \quad 0 \leq \varphi, \varphi_0 \leq 2\pi. \quad (2.83)$$

Приклади параметризації наведені нижче

$$\sigma(\varphi) = a_r (a_0 + e^{i\varphi} + a_1 e^{-i\varphi} + a_2 e^{-2i\varphi} + a_3 e^{-3i\varphi}) e^{i\gamma}, \quad (2.84)$$

де

$$a_r = \frac{R_1 + R_2}{2}, \text{ для «еліптичного контуру» : } a_0 = a_2 = a_3 = 0; a_1 = \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, R_1,$$

R_2 – півосі еліпса;

$a_r = 2l_h$ – висота для «трикутника» (з округленими кутами) контурів:
 $a_0 = -0,25, a_2 = 0,25, a_1 = a_3 = 0$ (рисунок 2.7);

$$a_r = \frac{2l}{0,88085}, \text{ – для «квадратних» (з округленими кутами) контурів:}$$

$a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = -0,12036, 2l$ – середня лінія (рисунок 2.7).

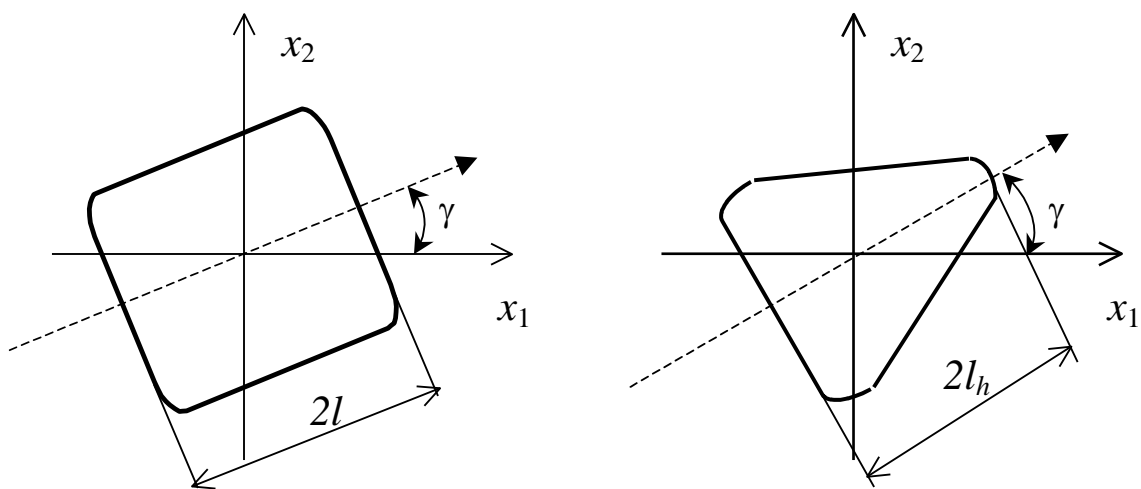


Рисунок 2.7

Після виконання параметризації замкненого контуру Γ_0 , контурний інтеграл переходить у визначений інтеграл за параметром φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), наприклад, в (2.73) інтеграл за замкненим контуром набуває такого вигляду

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega_{0k}(\sigma) ds_0}{\sigma_k - \sigma_{0k}} = \int_0^{2\pi} \frac{\omega_{0k}(\sigma(\varphi)) \frac{ds_0}{d\varphi}(\varphi)}{\sigma_k(\varphi) - \sigma_k(\varphi_0)} d\varphi = \int_0^{2\pi} K(\sigma(\varphi), \sigma(\varphi_0)) \omega_{0k}(\sigma(\varphi)) d\varphi$$

При обчисленні сингулярних і регулярних інтегралів на замкненому контурі Γ_0 використовуємо квадратурну формулу [50]

$$\int_0^{2\pi} y(\varphi) K(\varphi, \varphi_0) d\varphi \square \frac{2\pi}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} y(\varphi_j) K(\varphi_j, \varphi_0) \quad (2.85)$$

де

n_1 - кількість точок, що поділяють інтервал $[0, 2\pi)$;

$\varphi_{0m} = \frac{2\pi(m-1)}{n_1}$, $\varphi_j = \varphi_{0j} + \frac{\pi}{n_1} = \frac{2j-1}{n_1} \pi$, $(j, m = \overline{1, n_1})$ - вузли коллокації та

інтерполяції відповідно.

2.10 Зведення до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

З використанням, наведених формул, які наведені вище (2.81), (2.82), (2.85), будемо знаходити розв'язки системи (2.72)-(2.74) у точках інтерполяції на відповідних контурах, тоді мішана система зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \omega_{0k}(\varphi_j) &= 0, \quad j = \overline{1, n_1}, \\ \operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \Omega_{1k}^{(r)}(\beta_i) &= 0, \quad i = \overline{1, n}, r = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk}^0 \frac{a_{0k}(\psi(\varphi_{ol}))}{2} &\left[\frac{2}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\omega_{0k}(\varphi_j) \frac{ds_0(\varphi_j)}{d\varphi}(\varphi_j)}{\sigma_k(\varphi_j) - \sigma_{0k}(\varphi_{ol})} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{n} \sum_{r=1}^M \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_{1k}^{(r)}(\beta_i)}{\zeta_k^{(r)}(\beta_i) - \sigma_{0k}(\varphi_{ol})} \right] = F_{0n}(\sigma_0(\varphi_{ol})), \quad i = \overline{1, n_1}, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^4 R_{nk} \frac{a_k^{(r)}(\psi(\beta_{om}))}{2} &\left[\frac{2}{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\omega_{0k}(\varphi_j) \frac{ds_0(\varphi_j)}{d\varphi}(\varphi_j)}{\sigma_k(\varphi_j) - \zeta_k^{(r)}(\beta_{om})} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{n} \sum_{\bar{r}=1}^M \sum_{i=1}^n \frac{\Omega_{1k}^{(\bar{r})}(\beta_i)}{\zeta_k^{(\bar{r})}(\beta_i) - \zeta_k^{(r)}(\beta_{om})} \right] = F_n^{(r)}(\zeta_k^{(r)}(\beta_{om})), \\ m = \overline{1, n-1}, r = \overline{1, M} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^4 \left\{ \begin{array}{c} p_k \\ q_k \\ \alpha_{1k}^E \\ \alpha_{1k}^H \end{array} \right\} \sum_{i=1}^n \Omega_{1k}(\beta_i) = 0. \quad (2.88)$$

В результаті, мішана система (2.37)-(2.38) та додаткова умова до неї зводяться до системи $8(n_1 + n \cdot M)$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень комплексних функцій $\omega_{0k}(\varphi_j)$ та $\Omega_{1k}(\beta_i)$ в вузлах інтерполяції φ_j ($j = \overline{1, n_1}$) та β_i ($i = \overline{1, n}$), $r = \overline{1, M}$ відповідно.

Розкриваючи дійсні та уявні частини відповідних функцій за формулами:

$$\operatorname{Re} f(z) = \frac{f(z) + \overline{f(z)}}{2}, \quad \operatorname{Im} f(z) = \frac{f(z) - \overline{f(z)}}{2i},$$

приходимо до системи лінійних рівнянь відносно $\omega_{0k}(\varphi_j)$, $\overline{\omega_{0k}(\varphi_j)}$, $\Omega_{1k}(\beta_i)$ та $\overline{\Omega_{1k}(\beta_i)}$ у відповідних точках інтерполяції, що набувають вигляду:

- алгебраїчні рівняння (2.86):

$$R_n^0 \begin{pmatrix} \omega_{01}(\varphi_j) \\ \omega_{02}(\varphi_j) \\ \omega_{03}(\varphi_j) \\ \omega_{04}(\varphi_j) \\ \overline{\omega_{01}(\varphi_j)} \\ \overline{\omega_{02}(\varphi_j)} \\ \overline{\omega_{03}(\varphi_j)} \\ \overline{\omega_{04}(\varphi_j)} \end{pmatrix} = 0 \quad (j = \overline{1, n_1}), \quad R_n \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{12}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{13}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{14}^{(r)}(\beta_i) \\ \overline{\Omega_{11}^{(r)}(\beta_i)} \\ \overline{\Omega_{12}^{(r)}(\beta_i)} \\ \overline{\Omega_{13}^{(r)}(\beta_i)} \\ \overline{\Omega_{14}^{(r)}(\beta_i)} \end{pmatrix} = 0 \quad (i = \overline{1, n}), (r = \overline{1, M}) \quad (2.89)$$

$$R_n^0 = \begin{pmatrix} R_n^{0*} & \overline{-R_n^{0*}} \\ \mu_1 \cdot A_{11}(1, \mu_1) & \mu_2 \cdot A_{11}(1, \mu_2) & \mu_3 \cdot A_{11}(1, \mu_3) & \mu_4 \cdot A_{11}(1, \mu_4) \\ -A_{11}(1, \mu_1) & -A_{11}(1, \mu_2) & -A_{11}(1, \mu_3) & -A_{11}(1, \mu_4) \\ \alpha_{11}^E & \alpha_{12}^E & \alpha_{13}^E & \alpha_{14}^E \\ \alpha_{11}^H & \alpha_{12}^H & \alpha_{13}^H & \alpha_{14}^H \end{pmatrix},$$

$$R_n = \left(R_n^* \mid \overline{-R_n^*} \right)$$

$$R_n^* = \begin{pmatrix} \mu_1 \cdot A_{11}(1, \mu_1) & \mu_2 \cdot A_{11}(1, \mu_2) & \mu_3 \cdot A_{11}(1, \mu_3) & \mu_4 \cdot A_{11}(1, \mu_4) \\ -A_{11}(1, \mu_1) & -A_{11}(1, \mu_2) & -A_{11}(1, \mu_3) & -A_{11}(1, \mu_4) \\ A_{12}(1, \mu_1) & A_{12}(1, \mu_2) & A_{12}(1, \mu_3) & A_{12}(1, \mu_4) \\ A_{13}(1, \mu_1) & A_{13}(1, \mu_2) & A_{13}(1, \mu_3) & A_{13}(1, \mu_4) \end{pmatrix}.$$

• інтегральні рівняння (2.87)

$$\sum_{j=1}^{n_1} R_{11}(\varphi_{ol}, \varphi_j) \begin{pmatrix} \omega_{01}(\varphi_j) \\ \omega_{02}(\varphi_j) \\ \omega_{03}(\varphi_j) \\ \omega_{04}(\varphi_j) \\ \frac{\omega_{01}(\varphi_j)}{\omega_{01}(\varphi_j)} \\ \frac{\omega_{02}(\varphi_j)}{\omega_{02}(\varphi_j)} \\ \frac{\omega_{03}(\varphi_j)}{\omega_{03}(\varphi_j)} \\ \frac{\omega_{04}(\varphi_j)}{\omega_{04}(\varphi_j)} \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^M \sum_{i=1}^n R_{12}(\varphi_{ol}, \beta_i) \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{12}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{13}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{14}^{(r)}(\beta_i) \\ \frac{\Omega_{11}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{11}^{(r)}(\beta_i)} \\ \frac{\Omega_{12}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{12}^{(r)}(\beta_i)} \\ \frac{\Omega_{13}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{13}^{(r)}(\beta_i)} \\ \frac{\Omega_{14}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{14}^{(r)}(\beta_i)} \end{pmatrix} = F_{0n}(\sigma_0(\varphi_{ol})),$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} R_{21}(\beta_{om}, \varphi_j) \begin{pmatrix} \omega_{01}(\varphi_j) \\ \omega_{02}(\varphi_j) \\ \omega_{03}(\varphi_j) \\ \omega_{04}(\varphi_j) \\ \frac{\omega_{01}(\varphi_j)}{\omega_{01}(\varphi_j)} \\ \frac{\omega_{02}(\varphi_j)}{\omega_{02}(\varphi_j)} \\ \frac{\omega_{03}(\varphi_j)}{\omega_{03}(\varphi_j)} \\ \frac{\omega_{04}(\varphi_j)}{\omega_{04}(\varphi_j)} \end{pmatrix} + \sum_{r=1}^M \sum_{i=1}^n R_{22}(\beta_{om}, \beta_i) \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{12}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{13}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{14}^{(r)}(\beta_i) \\ \frac{\Omega_{11}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{11}^{(r)}(\beta_i)} \\ \frac{\Omega_{12}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{12}^{(r)}(\beta_i)} \\ \frac{\Omega_{13}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{13}^{(r)}(\beta_i)} \\ \frac{\Omega_{14}^{(r)}(\beta_i)}{\Omega_{14}^{(r)}(\beta_i)} \end{pmatrix} = F_{0n}^{(r)}(\zeta_k(\beta_{om})), \quad (2.90)$$

$(i = \overline{1, n_1}, m = \overline{1, n-1}, r = \overline{1, M}),$

Щоб R_j можна було подати у єдиному вигляді матричних добутків введемо функцію U таким чином:

$$U^0(N, s', \mathbf{R}, a_k, z_k, z_{0k}) = \frac{1}{N} \cdot s' \cdot \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_1}{z_1 - z_{01}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{z_2 - z_{02}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_3}{z_3 - z_{03}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_4}{z_4 - z_{04}} \end{pmatrix},$$

тоді R_{ij} подамо у вигляді:

$$\begin{aligned} R_{11}(\varphi_{ol}, \varphi_j) &= U \left(n_1, \frac{ds_0}{d\varphi}(\varphi_j), \mathbf{R}_{nk}^0, a_{0k}(\psi(\varphi_{ol})), \sigma_k(\varphi_j), \sigma_{0k}(\varphi_{ol}) \right), \\ R_{12}(\varphi_{ol}, \beta_i) &= U \left(2n, 1, \mathbf{R}_{nk}^0, a_{0k}(\psi(\varphi_{ol})), \zeta_k(\beta_i), \sigma_{0k}(\varphi_{ol}) \right), \\ R_{21}(\beta_{om}, \varphi_j) &= U \left(n_1, \frac{ds_0}{d\varphi}(\varphi_j), \mathbf{R}_{nk}, a_k(\psi(\beta_{om})), \sigma_k(\varphi_j), \zeta_k(\beta_{om}) \right), \\ R_{22}(\beta_{om}, \beta_i) &= U \left(2n, 1, \mathbf{R}_{nk}, a_k(\psi(\beta_{om})), \zeta_k(\beta_i), \zeta_k(\beta_{om}) \right), \end{aligned}$$

додаткові умови (2.88):

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & -p_1 & -p_2 & -p_3 & -p_4 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 \\ \alpha_{11}^E & \alpha_{12}^E & \alpha_{13}^E & \alpha_{14}^E & -\alpha_{11}^E & -\alpha_{12}^E & -\alpha_{13}^E & -\alpha_{14}^E \\ \alpha_{11}^H & \alpha_{12}^H & \alpha_{13}^H & \alpha_{14}^H & -\alpha_{11}^H & -\alpha_{12}^H & -\alpha_{13}^H & -\alpha_{14}^H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_{11}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{12}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{13}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{14}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{11}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{12}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{13}^{(r)}(\beta_i) \\ \Omega_{14}^{(r)}(\beta_i) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.91)$$

При параметризації контурів та побудові матриці системи (2.89)-(2.91) використовуються такі співвідношення:

- на розрізах Γ_m :

$$\begin{aligned}
\zeta(\beta) &= x_1(\beta) + ix_2(\beta) \\
\zeta &= \zeta(\beta), \quad \zeta_0 = \zeta(\beta_0), \quad -1 \leq \beta, \beta_0 \leq 1, \\
\zeta_\nu &= \operatorname{Re} \zeta + \mu_\nu \operatorname{Im} \zeta = \zeta_\nu(\beta), \quad \zeta_{0\nu} = \operatorname{Re} \zeta_0 + \mu_\nu \operatorname{Im} \zeta_0 = \zeta_\nu(\beta_0), \\
e^{i\psi} &= \cos \psi + i \sin \psi = -i \frac{d\zeta}{ds} = -i \frac{\zeta'(\beta)}{s'(\beta)}, \quad e^{i\psi_0} = -i \frac{\zeta'(\beta_0)}{s'(\beta_0)}, \\
a_j(\psi) &= \frac{d\zeta_j}{ds} = \frac{\zeta'_j(\beta)}{s'(\beta)}, \quad a_j(\psi_0) = \frac{\zeta'_j(\beta_0)}{s'(\beta_0)}, \\
s'(\beta) &= \sqrt{[x'_1(\beta)]^2 + [x'_2(\beta)]^2}
\end{aligned}$$

• на контурі пластинки Γ_0 :

$$\begin{aligned}
\sigma(\varphi) &= y_1(\varphi) + iy_2(\varphi) \\
\sigma &= \sigma(\varphi), \quad \sigma_0 = \sigma(\varphi_0), \quad 0 \leq \varphi, \varphi_0 \leq 2\pi, \\
\sigma_\nu &= \operatorname{Re} \sigma + \mu_\nu \operatorname{Im} \sigma = \sigma_\nu(\varphi), \quad \sigma_{0\nu} = \operatorname{Re} \sigma_0 + \mu_\nu \operatorname{Im} \sigma_0 = \sigma_\nu(\varphi_0), \\
e^{i\psi} &= \cos \psi + i \sin \psi = -i \frac{d\sigma}{ds_0} = -i \frac{\sigma'(\varphi)}{s'_0(\varphi)}, \quad e^{i\psi_0} = -i \frac{\sigma'(\varphi_0)}{s'_0(\varphi_0)}, \\
a_{0j}(\psi) &= \frac{d\sigma_j}{ds_0} = \frac{\sigma'_j(\varphi)}{s'_0(\varphi)}, \quad a_{0j}(\psi_0) = \frac{\sigma'_j(\varphi_0)}{s'_0(\varphi_0)}, \\
s'_0(\varphi) &= \sqrt{[y'_1(\varphi)]^2 + [y'_2(\varphi)]^2}.
\end{aligned}$$

Таким чином, за умови, що в пластинці є тріщини, задача зводиться до розв'язання $8(n_1 + n * M)$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $8(n_1 + n * M)$ невідомих: $\omega_{0k}(\varphi_j)$, $\overline{\omega_{0k}(\varphi_j)}$, $\Omega_{1k}(\beta_i)$ та $\overline{\Omega_{1k}(\beta_i)}$ ($k=1,4$; $j=\overline{1,n_1}$; $i=\overline{1,n}$).

Для відновлення значень функцій $\Omega_{1k}(\beta)$ в довільній точці відрізка $[-1,1]$ можна скористатися інтерполяційним многочленом Лагранжа за вузлами (2.78).

Маємо

$$\Omega_{1k}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \Omega_{1k}(\beta_j) \frac{T_n(\beta) \sqrt{1-\beta_j^2}}{\beta - \beta_j}, \quad -1 \leq \beta \leq 1. \quad (2.92)$$

Зокрема, на кінцях інтервалу $\beta = \pm 1$

$$\begin{aligned}\Omega_{1k}(1) &= -\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^j \Omega_{1k}(\beta_j) \operatorname{ctg} \left(\frac{2j-1}{4n} \pi \right), \\ \Omega_{1k}(-1) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+n} \Omega_{1k}(\beta_j) \operatorname{tg} \left(\frac{2j-1}{4n} \pi \right).\end{aligned}\tag{2.93}$$

Ці значення використовуються для обчислення коефіцієнтів інтенсивності в вершинах тріщин.

3 РЕЗУЛЬТАТИ

3.1 Режими роботи програми

При запуску програмного продукту вікно програми матиме наступний вигляд :

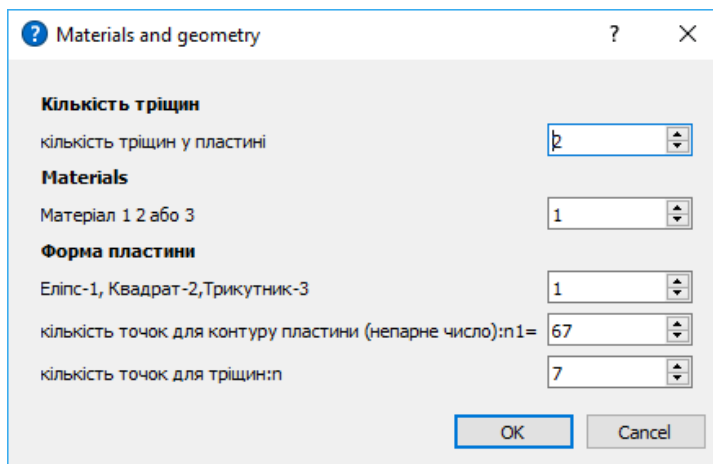


Рисунок 3.1- Матеріали та геометрія

Програмне вікно дозволяє вибрати кількість тріщин в інтервалі від 1 до кількості , які не будуть виходити за межі пластини в залежності від її форми та розмірів.

Також доступний вибір матеріалів пластини 1, 2 або 3 опис яких наведений в Додатку А.

Форму пластини можливо задавати в вигляді (еліпс, квадрат та трикутник).

Необхідними параметрами для розв'язку є кількість точок для контуру пластини та точки для тріщин

Далі в залежності від вибору форми пластини вводяться наступні параметри, якщо вибрано форму пластини в вигляді еліпса

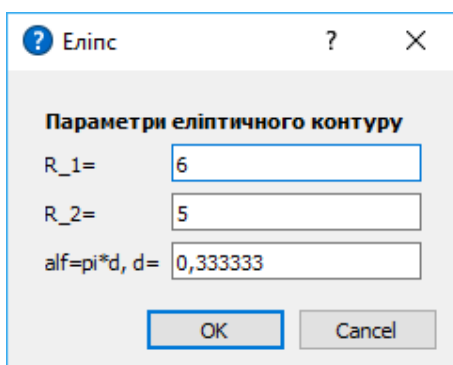


Рисунок 3.2 Параметри для пластини в вигляді еліпса

Якщо вибрана форма пластини в вигляді квадрата, або трикутника то вхідні параметри мають вигляд:

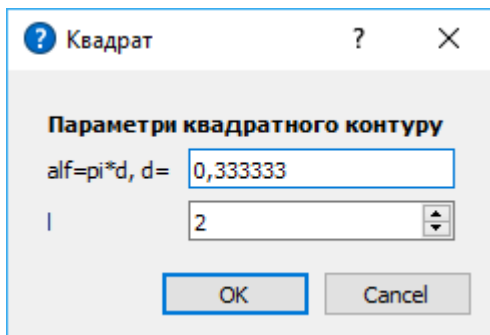


Рисунок 3.3 Параметри квадратного контуру

Аналогічний вигляд матиме вікно для задання параметрів в вигляді трикутника

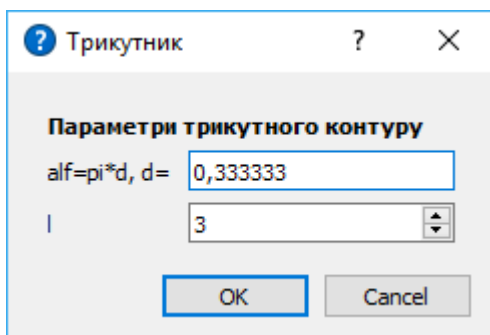


Рисунок 3.4 Параметри для трикутного контуру

Після задання відповідних параметрів, можливий вибір конфігурації для задання тріщин, який наведений на Рисунку 3.5

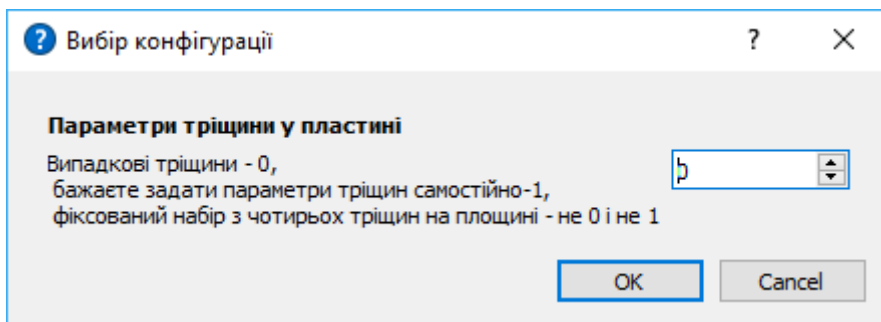


Рисунок 3.5 Вибір конфігурації параметрів тріщини

При виборі побудові випадкових тріщин параметр $p1$ випадковим чином, який далі буде фіксованим, параметр $p2$ дорівнює 0.

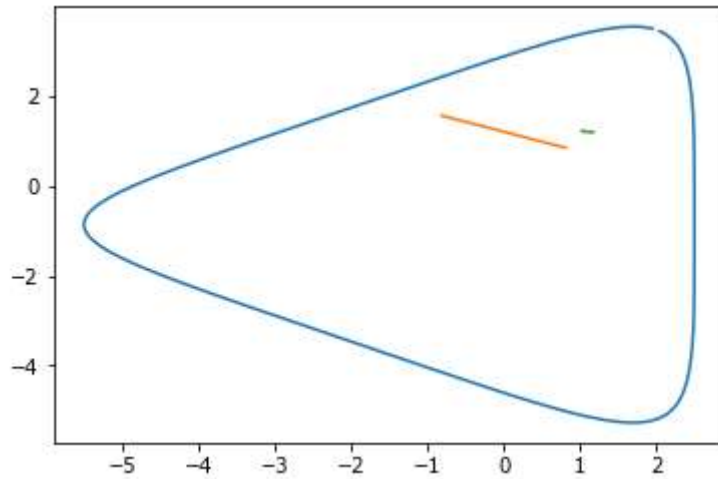


Рисунок 3.6 Пластина в вигляді трикутника з тріщинами

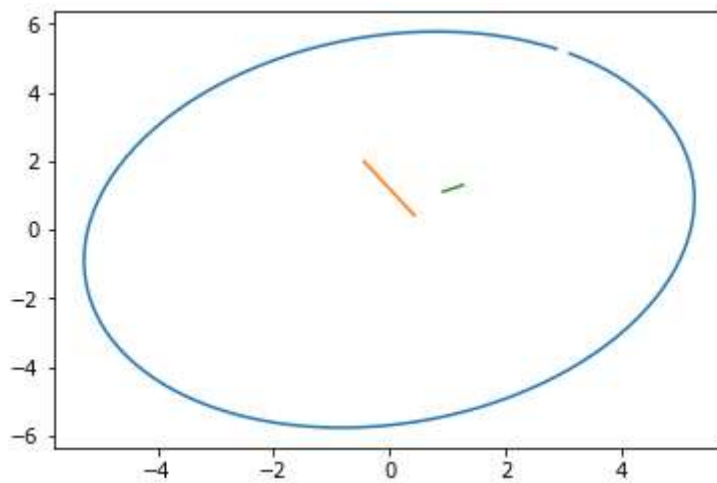


Рисунок 3.7 Еліпса з тріщинами

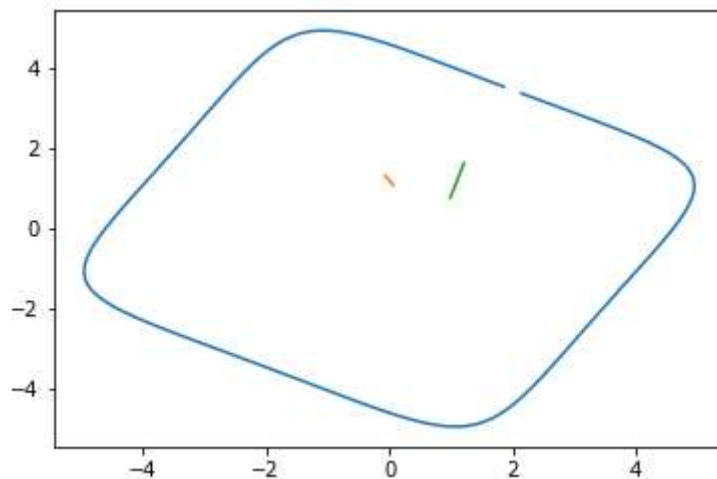


Рисунок 3.8 Квадрат з тріщинами

Якщо, вибираємо 1 то необхідно задавати параметри тріщини на площині, отримано Рисунок 3.10 з побудованою пластиною та тріщинами

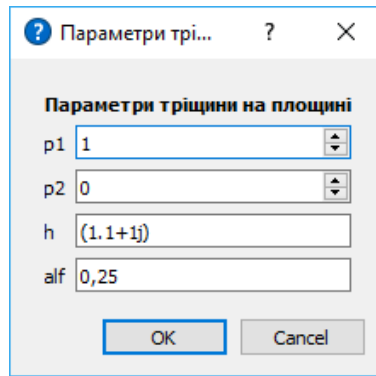


Рисунок 3.9 Параметри тріщини

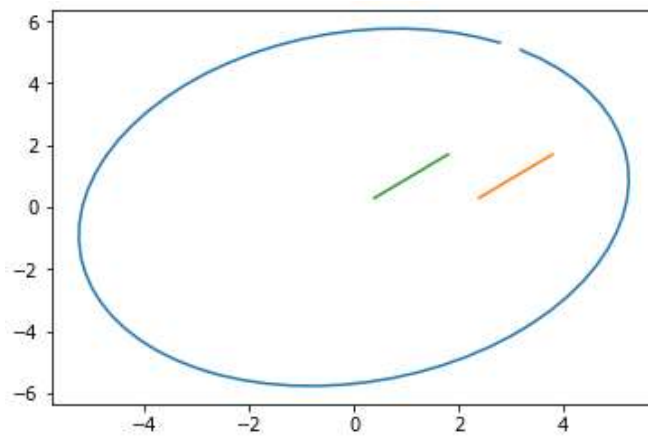


Рисунок 3.10 Пластина з тріщинами, які задані самостійно

В наступному вікні вводяться

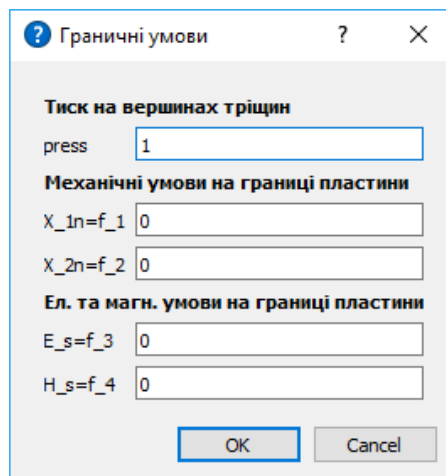


Рисунок 3.11 Граничні умови

3.2 Порівняння характеристик руйнування при різних параметрах

Задаємо початкові умови для дослідження коефіцієнтів інтенсивності матеріал «М1» форма пластини «Еліпса», кількість тріщин 3, граничні умови залишимо за замовчуванням. Отримаємо значення параметрів на

	вершина $\beta = 1$	ρ_1	h	$\frac{\alpha}{\pi}$	K1	K2	KD	KB	KE	KN	gamma
crack 1	(2.1-1j)	1	(1.1-1j)	0.0	-0.187593	0.023924	4.513708e-07	0.000095	0.002739	0.000007	3.258760e-07
crack 2	(-1.1+2j)	1	(-1.1+1j)	0.5	-0.226778	-0.006536	-7.835457e-08	-0.000117	-0.025961	-0.000070	8.167978e-07
crack 3	(2.1+1j)	1	(1.1+1j)	0.0	-0.203020	-0.012198	7.614181e-07	0.000429	-0.001396	-0.000004	3.785834e-07

Рисунок 3.12 Значення коефіцієнтів в точці $\beta=1$, для 3 тріщин

	вершина $\beta = -1$	ρ_1	h	$\frac{\alpha}{\pi}$	K1	K2	KD	KB	KE	KN	gamma
crack 1	(0.10000000000000009-1j)	1	(1.1-1j)	0.0	0.176892	0.008905	-2.437592e-07	-0.000079	0.001019	0.000003	2.823851e-07
crack 2	(-1.1+0j)	1	(-1.1+1j)	0.5	0.223043	0.002262	3.386902e-08	0.000022	0.025534	0.000069	7.895439e-07
crack 3	(0.10000000000000009+1j)	1	(1.1+1j)	0.0	0.207240	-0.014655	-9.559741e-07	-0.000381	-0.001678	-0.000005	3.959825e-07

Рисунок 3.12 Значення коефіцієнтів в точці $\beta=-1$, для 3 тріщин

У однієї тріщини будемо змінювати кут нахилу $[-\pi/4, \pi/4]$, та більш детально дослідимо значення коефіцієнтів інтенсивності

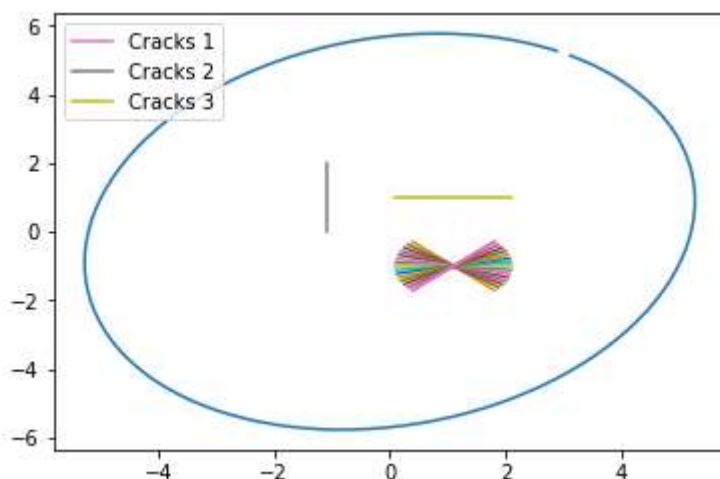


Рисунок 3.13 Зміна кута нахилу тріщини

Залежність відстаней між вершинами тріщин до найближчої вершини тріщини, що обертається від кута повороту отримаємо

	α/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	α/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	0.0	1.521354	1.325654	-0.785398	0.0	2.736072	2.141445
1	-0.706858	0.0	1.481660	1.371640	-0.706858	0.0	2.756361	2.218788
2	-0.628319	0.0	1.450777	1.425070	-0.628319	0.0	2.784531	2.294971
3	-0.549779	0.0	1.429471	1.484832	-0.549779	0.0	2.820176	2.369659
4	-0.471239	0.0	1.418305	1.549847	-0.471239	0.0	2.862801	2.442550
5	-0.392699	0.0	1.417591	1.619107	-0.392699	0.0	2.911843	2.383899
6	-0.314159	0.0	1.427346	1.691691	-0.314159	0.0	2.966690	2.309536
7	-0.235619	0.0	1.447301	1.766771	-0.235619	0.0	3.026698	2.233616
8	-0.157080	0.0	1.476923	1.843607	-0.157080	0.0	3.091208	2.156470
9	-0.078540	0.0	1.515469	1.921543	-0.078540	0.0	3.159558	2.078461
10	0.000000	0.0	1.562050	2.000000	0.000000	0.0	3.231099	2.000000
11	0.078540	0.0	1.615699	2.078461	0.078540	0.0	3.305196	1.921543
12	0.157080	0.0	1.675422	2.156470	0.157080	0.0	3.381239	1.843607
13	0.235619	0.0	1.740248	2.233616	0.235619	0.0	3.458648	1.766771
14	0.314159	0.0	1.809250	2.309536	0.314159	0.0	3.536871	1.691691
15	0.392699	0.0	1.881568	2.383899	0.392699	0.0	3.615388	1.619107
16	0.471239	0.0	1.956413	2.442550	0.471239	0.0	3.693713	1.549847
17	0.549779	0.0	2.033072	2.369659	0.549779	0.0	3.771389	1.484832
18	0.628319	0.0	2.110899	2.294971	0.628319	0.0	3.847991	1.425070
19	0.706858	0.0	2.189317	2.218788	0.706858	0.0	3.780092	1.371640
20	0.785398	0.0	2.267806	2.141445	0.785398	0.0	3.702517	1.325654

Рисунок 3.14 Залежність відстаней між вершинами

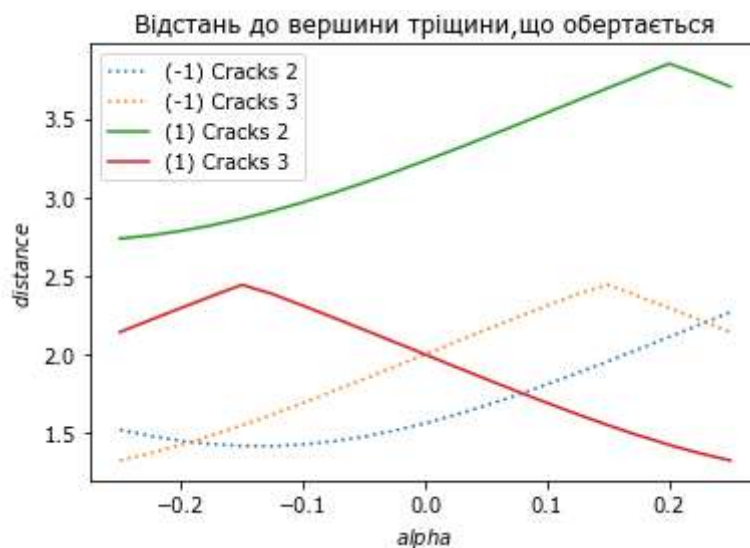


Рисунок 3.15 Графічне зображення відстаней

	a/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	a/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	0.201036	0.260397	0.249991	-0.785398	-0.232824	-0.247236	-0.197638
1	-0.706858	0.193631	0.257826	0.245160	-0.706858	-0.227618	-0.244816	-0.196069
2	-0.628319	0.187339	0.254330	0.239846	-0.628319	-0.222530	-0.242259	-0.195030
3	-0.549779	0.182239	0.250155	0.234424	-0.549779	-0.217621	-0.239667	-0.194501
4	-0.471239	0.178355	0.245599	0.229180	-0.471239	-0.212944	-0.237137	-0.194454
5	-0.392699	0.175663	0.240954	0.224300	-0.392699	-0.208468	-0.234752	-0.194858
6	-0.314159	0.174097	0.236465	0.219888	-0.314159	-0.204169	-0.232580	-0.195685
7	-0.235619	0.173559	0.232322	0.215984	-0.235619	-0.199989	-0.230670	-0.196916
8	-0.157080	0.173929	0.228655	0.212589	-0.157080	-0.195869	-0.229054	-0.198543
9	-0.078540	0.175081	0.225548	0.209684	-0.078540	-0.191751	-0.227754	-0.200573
10	0.000000	0.176892	0.223043	0.207240	0.000000	-0.187593	-0.226778	-0.203020
11	0.078540	0.179249	0.221153	0.205226	0.078540	-0.183380	-0.226126	-0.205907
12	0.157080	0.182059	0.219871	0.203618	0.157080	-0.179129	-0.225796	-0.209261
13	0.235619	0.185254	0.219173	0.202397	0.235619	-0.174899	-0.225778	-0.213109
14	0.314159	0.188787	0.219021	0.201557	0.314159	-0.170798	-0.226062	-0.217462
15	0.392699	0.192639	0.219370	0.201098	0.392699	-0.166999	-0.226635	-0.222306
16	0.471239	0.196803	0.220169	0.201031	0.471239	-0.163740	-0.227482	-0.227583
17	0.549779	0.201286	0.221358	0.201372	0.549779	-0.161345	-0.228588	-0.233169
18	0.628319	0.206096	0.222873	0.202138	0.628319	-0.160219	-0.229934	-0.238852
19	0.706858	0.211232	0.224648	0.203343	0.706858	-0.160825	-0.231496	-0.244322
20	0.785398	0.216672	0.226613	0.204991	0.785398	-0.163619	-0.233247	-0.249188

Рисунок 3.16 Коефіцієнт нормального відриву K_I

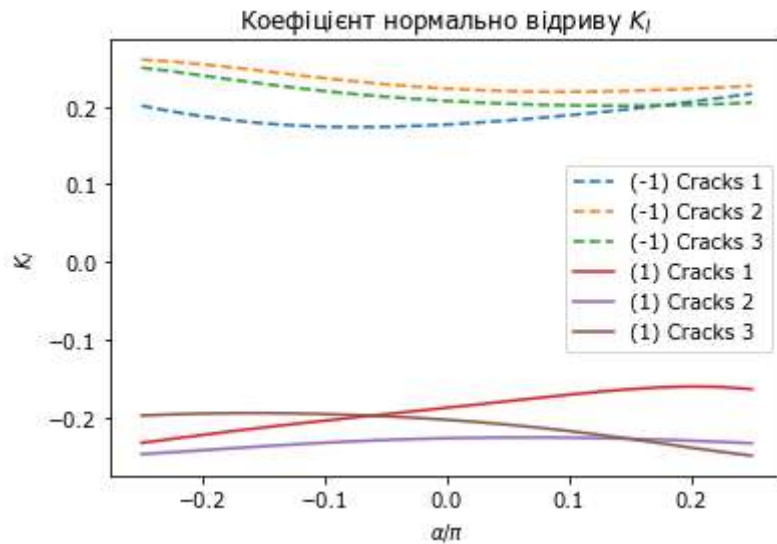


Рисунок 3.17 Графічне зображення K_I

	a/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	a/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	-0.065754	0.011988	-0.015440	-0.785398	0.040333	-0.004904	-0.003889
1	-0.706858	-0.060290	0.009730	-0.017102	-0.706858	0.040757	-0.004605	-0.004208
2	-0.628319	-0.053335	0.007636	-0.018306	-0.628319	0.040495	-0.004441	-0.004671
3	-0.549779	-0.045423	0.005819	-0.019028	-0.549779	0.039655	-0.004418	-0.005269
4	-0.471239	-0.037012	0.004345	-0.019297	-0.471239	0.038380	-0.004528	-0.005989
5	-0.392699	-0.028472	0.003239	-0.019169	-0.392699	0.036724	-0.004751	-0.006822
6	-0.314159	-0.020085	0.002490	-0.018709	-0.314159	0.034774	-0.005059	-0.007755
7	-0.235619	-0.012049	0.002066	-0.017980	-0.235619	0.032544	-0.005422	-0.008775
8	-0.157080	-0.004498	0.001919	-0.017033	-0.157080	0.030032	-0.005806	-0.009868
9	-0.078540	0.002497	0.002001	-0.015913	-0.078540	0.027183	-0.006185	-0.011016
10	0.000000	0.008905	0.002262	-0.014655	0.000000	0.023924	-0.006536	-0.012198
11	0.078540	0.014734	0.002662	-0.013290	0.078540	0.020143	-0.006842	-0.013389
12	0.157080	0.020012	0.003168	-0.011844	0.157080	0.015724	-0.007096	-0.014553
13	0.235619	0.024779	0.003759	-0.010342	0.235619	0.010534	-0.007294	-0.015648
14	0.314159	0.029073	0.004422	-0.008808	0.314159	0.004449	-0.007441	-0.016618
15	0.392699	0.032924	0.005153	-0.007269	0.392699	-0.002634	-0.007545	-0.017398
16	0.471239	0.036339	0.005955	-0.005755	0.471239	-0.010778	-0.007618	-0.017912
17	0.549779	0.039305	0.006836	-0.004299	0.549779	-0.019968	-0.007673	-0.018083
18	0.628319	0.041774	0.007801	-0.002936	0.628319	-0.030060	-0.007724	-0.017843
19	0.706858	0.043673	0.008856	-0.001706	0.706858	-0.040724	-0.007784	-0.017158
20	0.785398	0.044899	0.010001	-0.000646	0.785398	-0.051382	-0.007865	-0.016047

Рисунок 3.17 Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву

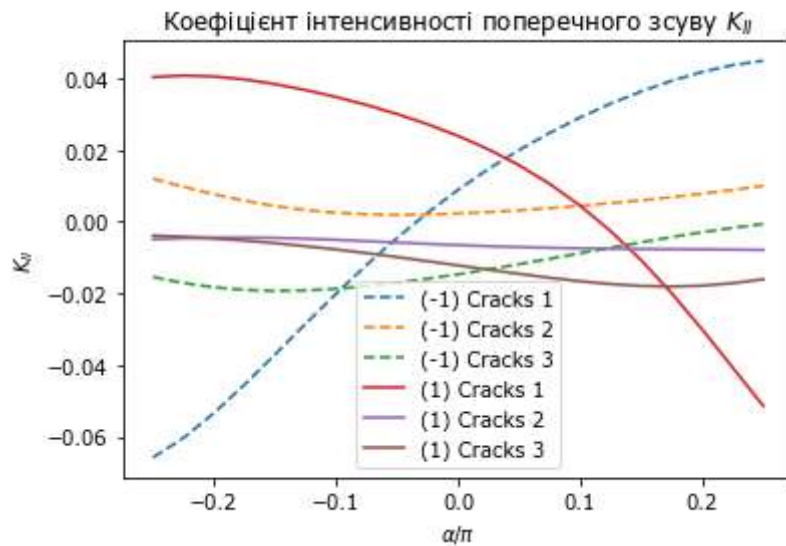


Рисунок 3.18 Графічне зображення K_{II}

	a/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	a/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	-4.215057e-07	2.639398e-07	-1.123679e-06	-0.785398	5.224897e-07	-8.222838e-08	3.497398e-07
1	-0.706858	-4.031310e-07	2.311758e-07	-1.104983e-06	-0.706858	5.312136e-07	-7.059585e-08	3.768810e-07
2	-0.628319	-3.736630e-07	1.957097e-07	-1.089605e-06	-0.628319	5.356848e-07	-6.165716e-08	4.116336e-07
3	-0.549779	-3.386619e-07	1.593748e-07	-1.077201e-06	-0.549779	5.363742e-07	-5.567301e-08	4.521920e-07
4	-0.471239	-3.038539e-07	1.244460e-07	-1.066267e-06	-0.471239	5.335871e-07	-5.267033e-08	4.967175e-07
5	-0.392699	-2.738978e-07	9.323398e-08	-1.055030e-06	-0.392699	5.275895e-07	-5.245710e-08	5.434156e-07
6	-0.314159	-2.517613e-07	6.765166e-08	-1.041983e-06	-0.314159	5.184905e-07	-5.467295e-08	5.906916e-07
7	-0.235619	-2.385998e-07	4.888985e-08	-1.026037e-06	-0.235619	5.063169e-07	-5.885166e-08	6.371579e-07
8	-0.157080	-2.339989e-07	3.731974e-08	-1.006535e-06	-0.157080	4.910437e-07	-6.449291e-08	6.816684e-07
9	-0.078540	-2.364278e-07	3.259265e-08	-9.831781e-07	-0.078540	4.726962e-07	-7.112594e-08	7.233124e-07
10	0.000000	-2.437592e-07	3.386902e-08	-9.559741e-07	0.000000	4.513708e-07	-7.835457e-08	7.614181e-07
11	0.078540	-2.537332e-07	4.007207e-08	-9.251816e-07	0.078540	4.272881e-07	-8.588157e-08	7.955521e-07
12	0.157080	-2.642920e-07	5.010492e-08	-8.912895e-07	0.157080	4.008246e-07	-9.351127e-08	8.255121e-07
13	0.235619	-2.737679e-07	6.299171e-08	-8.549938e-07	0.235619	3.724677e-07	-1.011391e-07	8.513317e-07
14	0.314159	-2.809422e-07	7.794720e-08	-8.171899e-07	0.314159	3.427949e-07	-1.087324e-07	8.733107e-07
15	0.392699	-2.850111e-07	9.438740e-08	-7.789581e-07	0.392699	3.123014e-07	-1.163086e-07	8.920436e-07
16	0.471239	-2.854981e-07	1.119064e-07	-7.415475e-07	0.471239	2.812134e-07	-1.239143e-07	9.084520e-07
17	0.549779	-2.821440e-07	1.302338e-07	-7.063479e-07	0.549779	2.491836e-07	-1.316060e-07	9.237583e-07
18	0.628319	-2.748018e-07	1.491882e-07	-6.748479e-07	0.628319	2.150481e-07	-1.394342e-07	9.392960e-07
19	0.706858	-2.633542e-07	1.686316e-07	-6.485630e-07	0.706858	1.768144e-07	-1.474268e-07	9.560112e-07
20	0.785398	-2.476717e-07	1.884328e-07	-6.289280e-07	0.785398	1.322374e-07	-1.555737e-07	9.736185e-07

Рисунок 3.19 Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції K_D

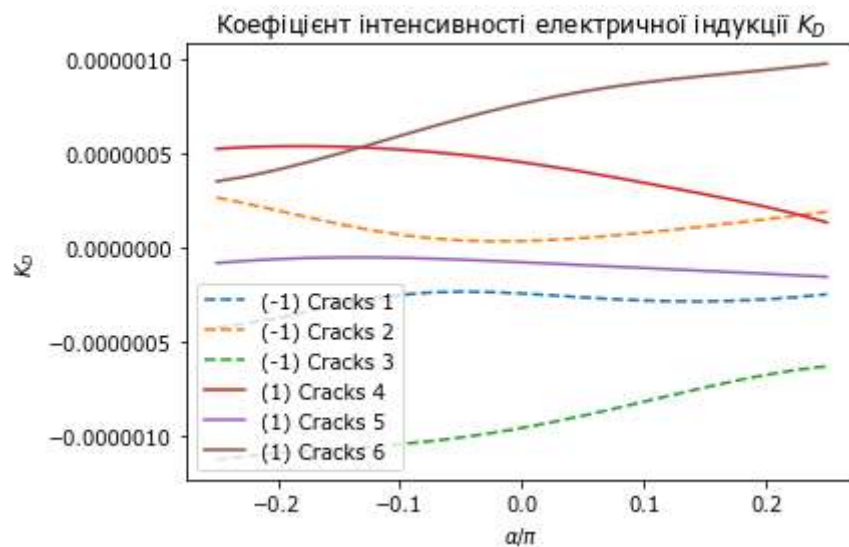


Рисунок 3.20 Графічне зображення K_D

	α/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	α/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	-0.000242	0.000295	-0.000627	-0.785398	0.000353	-0.000090	0.000313
1	-0.706858	-0.000172	0.000211	-0.000594	-0.706858	0.000336	-0.000087	0.000308
2	-0.628319	-0.000111	0.000137	-0.000563	-0.628319	0.000315	-0.000086	0.000308
3	-0.549779	-0.000064	0.000078	-0.000534	-0.549779	0.000290	-0.000087	0.000314
4	-0.471239	-0.000032	0.000036	-0.000508	-0.471239	0.000264	-0.000090	0.000323
5	-0.392699	-0.000015	0.000009	-0.000484	-0.392699	0.000237	-0.000094	0.000335
6	-0.314159	-0.000011	-0.000005	-0.000461	-0.314159	0.000209	-0.000099	0.000350
7	-0.235619	-0.000019	-0.000008	-0.000440	-0.235619	0.000180	-0.000104	0.000368
8	-0.157080	-0.000034	-0.000004	-0.000420	-0.157080	0.000152	-0.000109	0.000387
9	-0.078540	-0.000055	0.000007	-0.000400	-0.078540	0.000123	-0.000113	0.000407
10	0.000000	-0.000079	0.000022	-0.000381	0.000000	0.000095	-0.000117	0.000429
11	0.078540	-0.000105	0.000040	-0.000363	0.078540	0.000066	-0.000120	0.000451
12	0.157080	-0.000131	0.000061	-0.000346	0.157080	0.000037	-0.000121	0.000474
13	0.235619	-0.000157	0.000084	-0.000330	0.235619	0.000008	-0.000123	0.000498
14	0.314159	-0.000180	0.000110	-0.000315	0.314159	-0.000022	-0.000124	0.000524
15	0.392699	-0.000200	0.000138	-0.000302	0.392699	-0.000053	-0.000125	0.000550
16	0.471239	-0.000216	0.000170	-0.000292	0.471239	-0.000087	-0.000126	0.000579
17	0.549779	-0.000227	0.000205	-0.000285	0.549779	-0.000123	-0.000127	0.000609
18	0.628319	-0.000232	0.000244	-0.000282	0.628319	-0.000162	-0.000129	0.000641
19	0.706858	-0.000231	0.000286	-0.000284	0.706858	-0.000205	-0.000132	0.000676
20	0.785398	-0.000224	0.000331	-0.000290	0.785398	-0.000254	-0.000136	0.000712

Рисунок 3.21 Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції

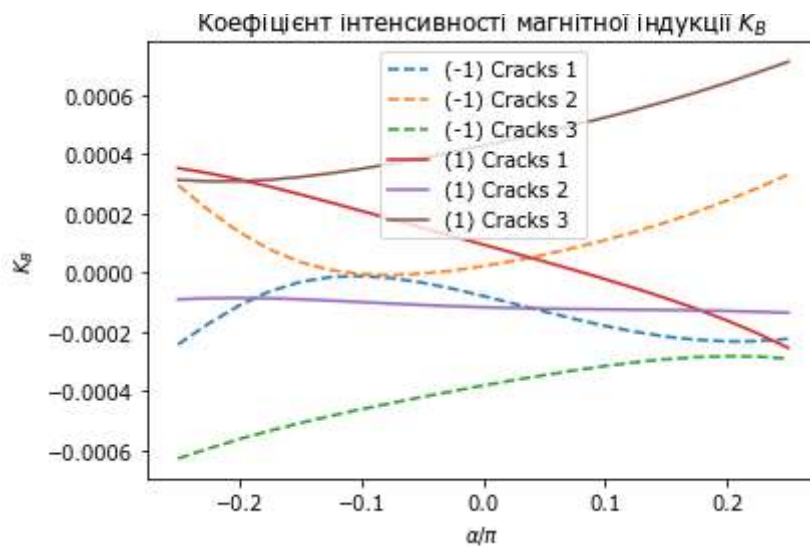


Рисунок 3.22 Графічне зображення K_B

	a/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	a/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	-0.021596	0.029810	-0.001768	-0.785398	0.022112	-0.028303	-0.000445
1	-0.706858	-0.019644	0.029516	-0.001958	-0.706858	0.020471	-0.028026	-0.000482
2	-0.628319	-0.017546	0.029115	-0.002096	-0.628319	0.018724	-0.027734	-0.000535
3	-0.549779	-0.015334	0.028638	-0.002178	-0.549779	0.016888	-0.027437	-0.000603
4	-0.471239	-0.013045	0.028116	-0.002209	-0.471239	0.014982	-0.027147	-0.000686
5	-0.392699	-0.010707	0.027584	-0.002194	-0.392699	0.013017	-0.026874	-0.000781
6	-0.314159	-0.008346	0.027070	-0.002142	-0.314159	0.011009	-0.026626	-0.000888
7	-0.235619	-0.005980	0.026596	-0.002058	-0.235619	0.008967	-0.026407	-0.001005
8	-0.157080	-0.003623	0.026176	-0.001950	-0.157080	0.006903	-0.026222	-0.001130
9	-0.078540	-0.001288	0.025821	-0.001822	-0.078540	0.004825	-0.026073	-0.001261
10	0.000000	0.001019	0.025534	-0.001678	0.000000	0.002739	-0.025961	-0.001396
11	0.078540	0.003292	0.025317	-0.001521	0.078540	0.000652	-0.025887	-0.001533
12	0.157080	0.005523	0.025171	-0.001356	0.157080	-0.001430	-0.025849	-0.001666
13	0.235619	0.007709	0.025091	-0.001184	0.235619	-0.003502	-0.025847	-0.001791
14	0.314159	0.009844	0.025073	-0.001008	0.314159	-0.005558	-0.025879	-0.001902
15	0.392699	0.011922	0.025113	-0.000832	0.392699	-0.007595	-0.025945	-0.001992
16	0.471239	0.013935	0.025205	-0.000659	0.471239	-0.009609	-0.026042	-0.002051
17	0.549779	0.015877	0.025341	-0.000492	0.549779	-0.011600	-0.026169	-0.002070
18	0.628319	0.017737	0.025514	-0.000336	0.628319	-0.013565	-0.026323	-0.002043
19	0.706858	0.019506	0.025718	-0.000195	0.706858	-0.015502	-0.026502	-0.001964
20	0.785398	0.021174	0.025942	-0.000074	0.785398	-0.017404	-0.026702	-0.001837

Рисунок 3.23 Коефіцієнт інтенсивності напруженості електричного поля,

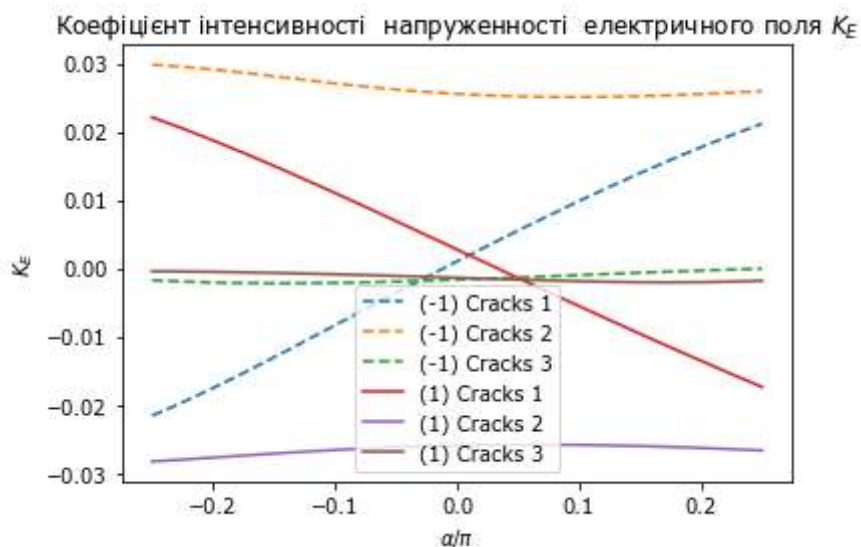


Рисунок 3.24 Графічне зображення K_E

	α/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	α/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	-0.000058	0.000080	-4.767103e-06	-0.785398	0.000060	-0.000076	-0.000001
1	-0.706858	-0.000053	0.000080	-5.280199e-06	-0.706858	0.000055	-0.000076	-0.000001
2	-0.628319	-0.000047	0.000079	-5.651833e-06	-0.628319	0.000050	-0.000075	-0.000001
3	-0.549779	-0.000041	0.000077	-5.874728e-06	-0.549779	0.000046	-0.000074	-0.000002
4	-0.471239	-0.000035	0.000076	-5.957753e-06	-0.471239	0.000040	-0.000073	-0.000002
5	-0.392699	-0.000029	0.000074	-5.918298e-06	-0.392699	0.000035	-0.000072	-0.000002
6	-0.314159	-0.000023	0.000073	-5.776397e-06	-0.314159	0.000030	-0.000072	-0.000002
7	-0.235619	-0.000016	0.000072	-5.551044e-06	-0.235619	0.000024	-0.000071	-0.000003
8	-0.157080	-0.000010	0.000071	-5.258688e-06	-0.157080	0.000019	-0.000071	-0.000003
9	-0.078540	-0.000003	0.000070	-4.912877e-06	-0.078540	0.000013	-0.000070	-0.000003
10	0.000000	0.000003	0.000069	-4.524676e-06	0.000000	0.000007	-0.000070	-0.000004
11	0.078540	0.000009	0.000068	-4.103284e-06	0.078540	0.000002	-0.000070	-0.000004
12	0.157080	0.000015	0.000068	-3.656836e-06	0.157080	-0.000004	-0.000070	-0.000004
13	0.235619	0.000021	0.000068	-3.192959e-06	0.235619	-0.000009	-0.000070	-0.000005
14	0.314159	0.000027	0.000068	-2.719363e-06	0.314159	-0.000015	-0.000070	-0.000005
15	0.392699	0.000032	0.000068	-2.244296e-06	0.392699	-0.000020	-0.000070	-0.000005
16	0.471239	0.000038	0.000068	-1.776857e-06	0.471239	-0.000026	-0.000070	-0.000006
17	0.549779	0.000043	0.000068	-1.327204e-06	0.549779	-0.000031	-0.000071	-0.000006
18	0.628319	0.000048	0.000069	-9.065340e-07	0.628319	-0.000037	-0.000071	-0.000006
19	0.706858	0.000053	0.000069	-5.267128e-07	0.706858	-0.000042	-0.000071	-0.000005
20	0.785398	0.000057	0.000070	-1.993701e-07	0.785398	-0.000047	-0.000072	-0.000005

Рисунок 3.25 Коефіцієнт напруженості магнітного поля

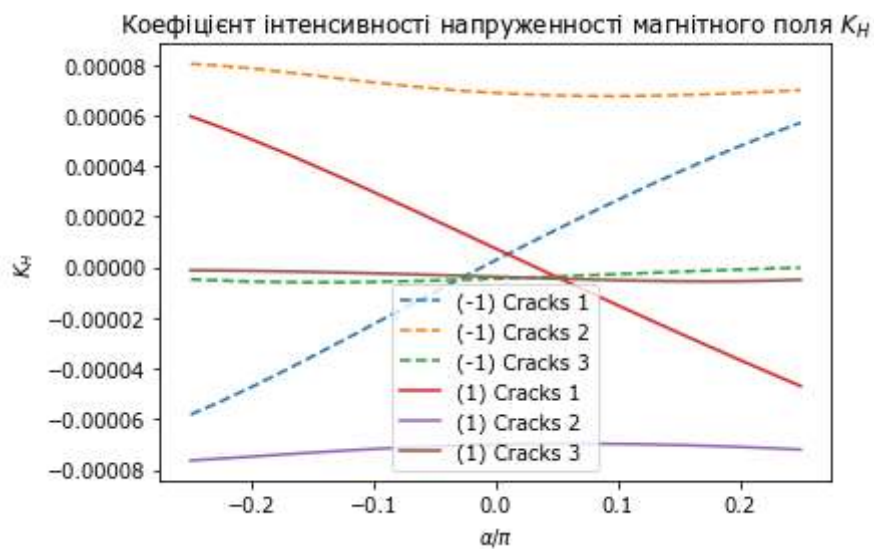


Рисунок 3.26 Графічне зображення K_H

	α/π	(-1) crack 1	(-1) crack 2	(-1) crack 3	α/π	(1) crack 1	(1) crack 2	(1) crack 3
0	-0.785398	-6.973921e-07	-1.022695e-06	-4.273787e-07	-0.785398	7.620173e-07	9.704370e-07	3.531169e-07
1	-0.706858	-6.335717e-07	-1.002449e-06	-4.169143e-07	-0.706858	7.038706e-07	9.514922e-07	3.476735e-07
2	-0.628319	-5.728991e-07	-9.783461e-07	-4.070595e-07	-0.628319	6.468593e-07	9.317018e-07	3.442484e-07
3	-0.549779	-5.167198e-07	-9.518569e-07	-3.982955e-07	-0.549779	5.921695e-07	9.118743e-07	3.427456e-07
4	-0.471239	-4.661281e-07	-9.245614e-07	-3.909506e-07	-0.471239	5.409382e-07	8.927483e-07	3.430408e-07
5	-0.392699	-4.217008e-07	-8.978834e-07	-3.852120e-07	-0.392699	4.936334e-07	8.749228e-07	3.450257e-07
6	-0.314159	-3.838372e-07	-8.729609e-07	-3.811410e-07	-0.314159	4.507678e-07	8.588579e-07	3.486089e-07
7	-0.235619	-3.526377e-07	-8.506015e-07	-3.787266e-07	-0.235619	4.125068e-07	8.448673e-07	3.537388e-07
8	-0.157080	-3.280609e-07	-8.313192e-07	-3.779241e-07	-0.157080	3.789445e-07	8.331433e-07	3.604081e-07
9	-0.078540	-3.099560e-07	-8.153907e-07	-3.786865e-07	-0.078540	3.500644e-07	8.237793e-07	3.686600e-07
10	0.000000	-2.981416e-07	-8.029202e-07	-3.809811e-07	0.000000	3.258760e-07	8.167978e-07	3.785834e-07
11	0.078540	-2.924452e-07	-7.938910e-07	-3.847954e-07	0.078540	3.064178e-07	8.121735e-07	3.903039e-07
12	0.157080	-2.927365e-07	-7.882074e-07	-3.901428e-07	0.157080	2.918305e-07	8.098528e-07	4.039736e-07
13	0.235619	-2.989641e-07	-7.857220e-07	-3.970543e-07	0.235619	2.823908e-07	8.097653e-07	4.197474e-07
14	0.314159	-3.111500e-07	-7.862558e-07	-4.055645e-07	0.314159	2.785370e-07	8.118342e-07	4.377441e-07
15	0.392699	-3.294176e-07	-7.896074e-07	-4.156878e-07	0.392699	2.809235e-07	8.159788e-07	4.579882e-07
16	0.471239	-3.539767e-07	-7.955576e-07	-4.273865e-07	0.471239	2.904402e-07	8.221139e-07	4.803292e-07
17	0.549779	-3.851240e-07	-8.038682e-07	-4.405247e-07	0.549779	3.082310e-07	8.301460e-07	5.043347e-07
18	0.628319	-4.231995e-07	-8.142787e-07	-4.548115e-07	0.628319	3.356276e-07	8.399658e-07	5.291705e-07
19	0.706858	-4.684991e-07	-8.265015e-07	-4.697476e-07	0.706858	3.739556e-07	8.514383e-07	5.535138e-07
20	0.785398	-5.210974e-07	-8.402195e-07	-4.845977e-07	0.785398	4.241331e-07	8.643906e-07	5.755740e-07

Рисунок 3.27 Енергетичний критерій руйнування

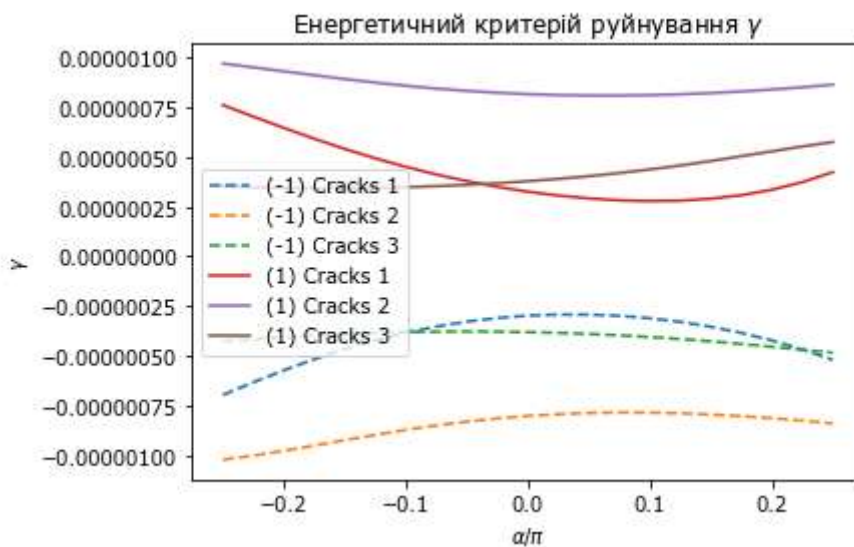


Рисунок 3.28 Графічне зображення γ

Виконаємо заміну матеріалу на матеріал «М2», геометрію пластини та тріщин залишимо без змін:

	вершина $\beta = 1$	ρ_1	h	$\frac{\alpha}{l\pi}$	K1	K2	KD	KB	KE	KH	gamma
crack 1	(2.1-1j)	1	(1.1-1j)	0.0	-0.187413	0.025287	-9.324622e-07	0.000019	0.000256	0.000004	1.532261e-07
crack 2	(-1.1+2j)	1	(-1.1+1j)	0.5	-0.223435	-0.009031	2.243085e-06	-0.000014	-0.002258	-0.000031	2.866081e-07
crack 3	(2.1+1j)	1	(1.1+1j)	0.0	-0.208437	-0.009104	5.239809e-06	0.000284	-0.000092	-0.000001	1.869391e-07

Рисунок 3.29 Результати при заміні матеріалу в вершинах тріщин $\beta=1$

	вершина $\beta = -1$	ρ_1	h	$\frac{\alpha}{l\pi}$	K1	K2	KD	KB	KE	KH	gamma
crack 1	(0.100000000000000009-1j)	1	(1.1-1j)	0.0	0.178303	0.006521	3.390038e-06	-0.000014	0.000066	9.116903e-07	1.358865e-07
crack 2	(-1.1+0j)	1	(-1.1+1j)	0.5	0.217041	0.006849	8.081215e-07	0.000073	0.002193	3.034424e-05	2.702690e-07
crack 3	(0.100000000000000009+1j)	1	(1.1+1j)	0.0	0.212927	-0.014793	-5.793695e-06	-0.000287	-0.000149	-2.068223e-06	1.958723e-07

Рисунок 3.30 Результати при заміні матеріалу в вершинах тріщин $\beta=-1$

Розглянемо пластину у формі трикутника з закругленими кутами, в якій міститься тріщини які мають конфігурацію , як і в попередньому варіанті, матеріал «М1»

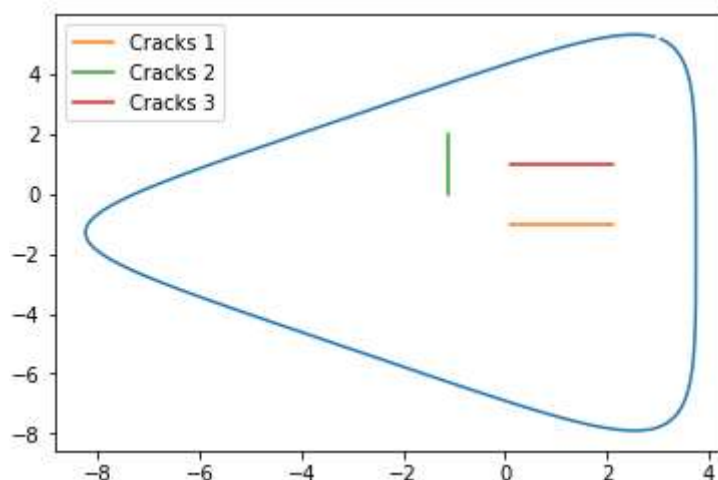


Рисунок 3.31 Трикутна пластина з 3 тріщинами «М1»

	вершина $\beta = 1$	p_1	h	$\frac{\alpha}{\pi}$	K1	K2	KD	KB	KE	KN	gamma
crack 1	(2.1-1j)	1	(1.1-1j)	0.0	5.172947	-0.421447	0.000057	-0.295174	-0.093928	-0.001206	0.001444
crack 2	(-1.1+2j)	1	(-1.1+1j)	0.5	-1.006205	-3.845011	0.000036	0.017434	-0.468496	-0.001151	0.000157
crack 3	(2.1+1j)	1	(1.1+1j)	0.0	-2.523457	-2.006639	-0.000009	0.105579	-0.205357	-0.000149	0.000283

Рисунок 3.32 Результати при трикутній пластині в $\beta=1$

	вершина $\beta = -1$	p_1	h	$\frac{\alpha}{\pi}$	K1	K2	KD	KB	KE	KN	gamma
crack 1	(0.10000000000000009-1j)	1	(1.1-1j)	0.0	-0.291133	0.103404	-4.656438e-07	0.020226	0.012215	0.000094	0.000007
crack 2	(-1.1+0j)	1	(-1.1+1j)	0.5	0.396261	0.079871	-7.369173e-07	-0.004487	0.060874	0.000136	0.000003
crack 3	(0.10000000000000009+1j)	1	(1.1+1j)	0.0	0.537655	0.216621	-4.381501e-06	-0.010441	0.019673	0.000025	0.000005

Рисунок 3.33 Результат при трикутній пластині в $\beta=-1$

3.3 Висновки

Написана програма дозволяє отримати графіки конфігурації середовища, що розглядається: пластина з тріщинами. В залежності від параметру параметризації тріщини (p_1) побудовані графіки для коефіцієнтів інтенсивності і параметру γ , що відповідає за енергетичний критерій руйнування, для трьох різних матеріалів пластинки та форми. Це дозволяє наочно порівняти результати в залежності від фізичних характеристик композицій. За допомогою таблиць наведено результати для різних характеристик руйнування, на графіках побудовані суцільні криві для вершини, що відповідають параметру параметризації $\beta = 1$, і пунктирні криві, що відповідають параметру параметризації $\beta = -1$. Як бачимо, на результати суттєво впливає як геометрія пластини так значення залежать від розмірів тріщини, їхніх розміщення на пластині, виникає вплив тріщин між собою (в залежності як близько вони розміщені одна від одної), так і характеристики.

ВИСНОВОК

На базі формалізму розробленого Л. А. Фильштинським було розглянуто крайову задачу руйнування скінченої МЕР пластини, що містить тріщини (вважається, що контури тріщин - прості ляпунові дуги що не перетинаються). В недеформованому стані тріщина являє собою математичний розріз. Для такої конфігурації досліджено ефекти зв'язаності ЕМП полів, крайові дефекти, що виникають в околі границі пластини, та коефіцієнти інтенсивності польових величин ($K_I, K_{II}, K_B, K_D, K_E, K_H$)

Для виконання поставленої задачі зроблено:

- гранична задача зведена до крайової задачі теорії функцій комплексного змінного;
- ця крайова задача зведена до змішаної системи алгебраїчних рівнянь, сингулярних інтегральних рівнянь;
- отримано вирази для коефіцієнтів інтенсивності фізичних полів в околі вершини тріщини;
- отримано енергетичний критерій руйнування у вигляді додатньої визначеної квадратичної форми від коефіцієнтів інтенсивності;
- мішана система алгебраїчних, сингулярних інтегральних рівнянь та сукупності додаткових умов розв'язана за допомогою одного з методів механічних квадратур;
- отримано чисельні результати для різних конфігурацій пластини та тріщин.
- написано програму мовою Python з використанням ООП з різними модифікаціями для задання початкових параметрів, та реалізовані способи виводу результатів представлено в вигляді графіків та таблиць

Отримані результати дають можливість зробити такі висновки:

- на коефіцієнти інтенсивності фізичних полів впливають як фізичні характеристики матеріалів, з яких складається пластинка, так і геометрія самої пластини з тріщинами;

- коефіцієнти інтенсивності, а відповідно і критерій руйнування збільшується, якщо вершина тріщини досить близько підходить до границі пластини.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Griffith A.A. The phenomena of rupture. - In: Proc. First Int. Congr. Appl. Mechanics. Delft, 1924, p.55-63.
2. Griffith A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. - Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1921, 221, p.163-198.
3. Irwin L.R., Washington D.C. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. - J. Appl. Mech., 1957, 24, N 3, p.361-364.
4. Irwin L.R. Fracture. - In: Handbuck der Physic. Berlin, 1958, Bd 6, p.551 - 590.
5. Панасюк В.В., Бережницький Л.Т. Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной. - Вопр. механики реальн. твердого тела, 1964, вып. 2, с. 3-19.
6. Панасюк В.В., Бережницький Л.Т., Ковчик С.Е. О развитии произвольно-ориентированной прямолинейной трещины при растяжении пластины. - ПМ, 1965, 1, №2, с.48-55.
7. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.- М.: Наука, 1974.-640с.
8. Панасюк В.В., Бережницький Л.Т. Визначання граничних зусиль при двохсторонньому розтязі пластини з довільно орієнтованою тріщиною. - Доп. АН УРСР. Сер. А, 1965, №1, с.36-40.
9. Панасюк В.В., Бережницький Л.Т. К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений. - ФХММ, 1965, 1, №4, с.424-434.
10. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. –М.; Л.: ОНТИ, 1935. -224 с.
11. Inglis C.E Stresses in plate due to presence of cracks and sharp conners. – Trans. Inst. Naval Archit, 1913, 60, p. 219-230.
12. Бережницький Л.Т., Делявский М.В., Мазурак Л.П., Панасюк В.В. Изгиб круглой пластины с трещиной. – В кн.: Тр. X Всесоюз. Конф. По пластинам и оболочкам. Харьков, 1977, с. 72-77.
13. Варвак П.М., Моянский В.М. Изгиб квадратной щелевой пластинки. – Исслед. тонкост. пространств. конструкций, 1974, вып 40, с. 35-41.

14. Гапонов Г.В. Определение концентрации напряжений в круглой пластине с разрезом посередине при изгибе давлением. – Изв. АН СССР. МТТ, 1976 №3, с. 165-168.
15. Белубекян Э.В. Изгиб заземленной по контуру прямоугольной пластинки с внутренней симметричной трещиной. – В кн.: Теория оболочек и пластин. М., 1973, вып. 1, с. 33-37.
16. Делявский М.В., Мазурак Л.П. Об изгибе треугольной пластины, ослабленной остrokонечными концентраторами напряжений. – В кн.: Материалы VII конф. молодых ученых Физ.-мех. ин-та АН УССР: Секция физ.-хим. механики материалов. Львов, 1975, с. 47-49.
17. Делявский М.В., Мазурак Л.П. Об одном подходе к решению задач изгиба изгиба пластин с остроугольными отверстиями. – ФХММ, 1977, 13, №6, с.96-100.
18. Jones D. P., Swedlow J.L. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of cracked plate. – Int. J. Fract., 1975, 11, N6, p. 897 – 914.
19. Wang, B.L., Mai, Y.W., Fracture of piezoelectromagnetic materials. Mech. Res. Commun. 31, 2004, 65-73.
20. Chen, W.Q., Lee, K.Y., Ding, H., General solution for transversely isotropic magneto-electro-thermo-elasticity and the potential theory method. Int. J. Eng. Sci. 42, , 2004, 1361-1379.
21. Li, X.F., Dynamic analysis of a cracked magneto-electroelastic medium under antiplane mechanical and inplane electric and magnetic impacts. Int. J. Solids Struct. 42, 2005, 3185-3205.
22. Hu, K.Q., Li, G.Q., Electro-magneto-elastic analysis of a piezoelectromagnetic strip with a finite crack under longitudinal shear. Mech. Mater. 37, 2005, 925-934
23. Yong, H.D., Zhou, Y.H.. Transient response of a cracked magneto-electroelastic strip under anti-plane impact. Int. J. Solids Struct. 44, , 2005, 705-717.
24. Guo, J.H., Lu, Z.X., Anti-plane analysis of multiple cracks originating from a circular hole in a magneto-electroelastic solid. Int. J. Solids Struct. 47, 2010, 1847-1856

25. Zhang, P.W., Dynamic fracture of a rectangular limited-permeable crack in magneto-electro-elastic media under a time-harmonic elastic P-wave. *Int. J. Solids Struct.* 48,2011, 553-566.
26. Zhong, X.C., Closed-form solutions for two collinear dielectric cracks in a magneto-electro-elastic solid. *Appl. Math. Model.* 35, 2011,2930-2944.
27. Feng, W.J., Su, R.K.L., Dynamic internal crack problem of a functionally graded magneto-electro-elastic strip. *Int. J. Solids Struct.* 43,2006, 5196-5216.
28. Ma, L., Li, J., Abdelmoula, R., Wu, L.Z., Mode III crack problem in a functionally graded magneto-electro-elastic strip. *Int. J. Solids Struct.* 44, 2007, 5518-5537.
29. Li, Y.D., Lee, K.Y., Anti-plane crack intersecting the interface in a bonded smart structure with graded magneto-electro-elastic properties. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 50, 2008, 235-242.
30. Lee, J.M., Ma, C.C., Analytical solutions for an antiplane problem of two dissimilar functionally graded magneto-electro-elastic half-planes. *Acta Mech.* 212, 2010, 21-38.
31. Rangelov, T., Stoyanov, Y., Dineva, P., Dynamic fracture behavior of functionally graded magneto-electro-elastic solids by BIEM. *Int. J. Solids Struct.* 48, 2011, 2987-2999.
32. Zhou, Z.G., Chen, Z.T., Basic solution of a Mode-I limited-permeable crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials. *Int. J. Solids Struct.* 45, 2008, 2265-2296.
33. Ma, C.C., Lee, J.M., Theoretical analysis of in-plane problem in functionally graded nonhomogeneous magneto-electro-elastic bimaterials. *Int. J. Solids Struct.* 46, 2009, 4208-4220.
34. Rekik, M., El-Borgi, S., Ounaies, Z., An Embedded Mixed-Mode Crack in a Functionally Graded Magneto-electro-elastic Infinite Medium. *Int. J. Solids Struct.* 49, 2012, 835-845.
35. Zhong, X.C., Lee, K.Y., Dielectric crack problem for a magneto-electro-elastic strip with functionally graded properties. *Arch. Appl. Mech.* 82, 2012, 791-807.

36. Rojas-Diaz, R., Garcia-Sanchez, F., Saez, A. ,Dual BEM analysis of different crack face boundary conditions in 2D magneto-electroelastic solids. *Eur. J. Mech. A-Solids* 31, 2012, 152-162.
37. Bhargava, R.R., Sharma, K., Application of X-FEM to study two-unequal-collinear cracks in 2-D finite magneto-electroelastic specimen. *Comput. Mater. Sci.* 60, 2012, 75-98.
38. Cannillo, V., Manfredini, T., Montorsi, M., Siligardi, C., Sola, A. , Microstructure-based modeling and experimental investigation of crack propagation in glass-alumina functionally graded materials. *J. Eur. Ceram. Soc.* 26, 2006, 3067-3073.
39. Nan C.W. Magnetolectric effect composites of piezoelectric and piezomagnetic phases // *Phys. Rev. B* – 1994. –Vol 50. №22. – P.6082 – 6088.
40. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Наука, - 1986. – 160 с.
41. Калоеров С.А. Петренко А.В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк, Юго – Восток. 2011. – 232 с.
42. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 203 с.
43. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука. 1977. – 416 с.
44. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512с.
45. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацишин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
46. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
47. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.
48. Erdogan F.E., Gupta g.D. On the numerical solutions of singular integral equations // *Quart. Appl. Math.* – 1972. – Vol. 29, No 4. – pp. 525 – 534.

49. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. «Наукова Думка», 1981. – 324 с.
50. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Физматгиз. 1967. – 500 с.
51. Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т. Метод сингулярных интегральных уравнений в задачах дифракции. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
52. Yamamoto Y., Miya K. Electromagnetomechanical Interactions in Deformable Solids and Structures. – Amsterdam: Elsevier Science – North Holland, 1987. – 450 p.
53. Hou P. – F., Teng G.-H., Chen H.-R. Three – dimensional Greens function for a point heat source in two – phase transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic material // Mech. Mat. – 2009. – Vol. 41. – P.329 – 338.
54. Zhou, Z.G., Wu, L.Z., Wang, B.: The behavior of a crack in functionally graded piezoelectric/piezomagnetic materials under anti-plane shear loading. Arch. Appl. Mech. 74, 2005, 526–535
55. Fotuhi, A.R., Fariborz, S.J.: Anti-plane analysis of a functionally graded strip with multiple cracks. Int. J. Solids Struct. 43, 2006, 1239–1252
56. Tupholme, G.E.: Magneto-electroelastic media containing a row of moving shear cracks. Mech. Res. Commun. 45, 2012, 48–53
57. Rokne, J., Singh, B.M., Dhaliwal, R.S.: Moving anti-plane shear crack in a piezoelectric layer bonded to dissimilar elastic infinite spaces. Eur. J. Mech. A Solids 31, 2012, 47–53
58. Fu, J., Hu, K., Chen, Z., Chen, L., Qian, L.: A moving crack propagating in a functionally graded magneto-electroelastic strip under different crack face conditions. Theor. Appl. Fract. Mech. 66, 2013, 16–25
59. Mousavi, S.M., Paavola, J.: Analysis of functionally graded magneto-electro elastic layer with multiple cracks. Theor. Appl. Fract. Mech. 66, 2013, 1–8
60. Chen, Z.T., Karihaloo, B.L.: Dynamic response of a cracked piezoelectric ceramic arbitrary electro-mechanical impact. Int. J. Solids Struct. 36, 1999, 5125–5133
61. Li, X.F.: Transient response of a piezoelectric material with a semi-infinite mode-III crack under impact loads. Int. J. Fract. 111, 2001, 119–130

62. Gu, B., Wang, X., Yu, S.W., Gross, D.: Transient response of Griffith crack between dissimilar piezoelectric layers under anti-plane mechanical and in-plane electrical impacts. *Eng. Fract. Mech.* 69, 2002, 565–576
63. Zhang, Ch., Sladek, J., Sladek, V.: Effects of material gradients on transient dynamic mode-III stress intensity factors in a FGM. *Int. J. Solids Struct.* 40, 2003, 5251–5270
64. Li, X.F.: Dynamic analysis of a cracked magneto-electro-elastic medium under antiplane mechanical and inplane electric and magnetic impacts. *Int. J. Solids Struct.* 42, 2005, 3185–3205
65. Feng, W.J., Su, R.K.L.: Dynamic internal crack problem of a functionally graded magneto-electro-elastic strip. *Int. J. Solids Struct.* 43, 2006 5196–5216
66. Su, R.K.L., Feng, W.J., Liu, J.: Transient response of interface cracks between dissimilar magneto-electro-elastic strips under out-of-plane mechanical and in-plane magneto-electrical impact loads. *Compos Struct.* 78, 2007 119–128
67. Yong, H.D., Zhou, Y.H.: Transient response of a cracked magneto-electro-elastic strip under anti-plane impact. *Int. J. Solids Struct.* 44, 2007 705–717
68. García-Sánchez, F., Zhang, Ch., Sáez, A.: 2-D transient dynamic analysis of cracked piezoelectric solids by a time-domain BEM. *Comput. Methods Appl. Mech.* 197, 2008 3108–3121
69. Chen, X.: Dynamic crack propagation in a magneto-electro-elastic solid subjected to mixed loads: transient mode-III problem. *Int. J. Solids Struct.* 46, 2009, 4025–4037
70. Monfared, M.M., Ayatollahi, M.: Dynamic stress intensity factors of multiple cracks in an orthotropic strip with FGM coating. *Eng. Fract. Mech.* 109, 2013, 45–57
71. Bagheri, R., Ayatollahi, M., Mousavi, S.M.: Stress analysis of a functionally graded magneto-electro-elastic strip with multiple moving cracks. *Math. Mech. Solids* 22, 2015, 304–323
72. Vafa, J.P., Baghestani, A.M., Fariborz, S.J.: Transient screw dislocation in exponentially graded FG layers. *Arch. Appl. Mech.* 85, 2015, 1–11

73. Hassani, A.R., Monfared, M.M.: Analysis of an orthotropic circular bar weakened by multiple radial cracks under torsional transient loading. *Eng. Fract. Mech.* (in press, accepted manuscript) (2017)
74. Bagheri, R.: Several horizontal cracks in a piezoelectric half-plane under /transient loading. *Arch.Appl.Mech.* 87, 2017, 1979–1992

МАТЕРІАЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЕЯКИХ МАГНЕТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

В таблиці 1 приведені характеристики наступних матеріалів [41]: М1 (композит, пружні, п'єзоелектричні та електричні сталі якого відповідають $CdSe$, а п'єзомагнітні та магнітні - $BaTiO_3$ [53]); М2 (композит, пружні, п'єзоелектричні та електричні сталі якого відповідають PZT-4, а п'єзомагнітні та магнітні - $CoFe_2O_4$ [53]); М3 (композит на основі $BaTiO_3 - CoFe_2O_4$ [52]).

Таблиця А.1

Величина	Матеріал		
	М1	М2	М3
$s_{11}^{DB}/s_0 = s_{33}^{DB}/s_0$	22,260	10,745	7,165
s_{22}^{DB}/s_0	14,984	7,398	6,797
$s_{44}^{DB}/s_0, s_{66}^{DB}/s_0$	47,481	7,637	19,912
s_{55}^{DB}/s_0	69,204	32,680	19,802
$s_{12}^{DB}/s_0, s_{23}^{DB}/s_0$	-6,437	-2,542	-2,337
s_{13}^{DB}/s_0	-11,942	-5,595	-2,736
$g_{16}^{\sigma,D}/g_0, g_{34}^{\sigma,D}/g_0$	109,22	2,054	2,028
$g_{21}^{\sigma,D}/g_0, g_{23}^{\sigma,D}/g_0$	-4,333	-1,159	-0,496
$g_{22}^{\sigma,D}/g_0$	8,016	2,458	1,157
$p_{16}^{\sigma,B}/p_0, p_{34}^{\sigma,B}/p_0$	268,318	98,843	1,850
$p_{21}^{\sigma,B}/p_0, p_{23}^{\sigma,B}/p_0$	17,778	12,102	0,576
$p_{22}^{\sigma,B}/p_0$	31,206	22,268	1,186
$\beta_{11}^{\sigma}/\beta_0, \beta_{33}^{\sigma}/\beta_0$	19,612	0,106	0,156
$\beta_{22}^{\sigma}/\beta_0$	10,612	0,090	0,137
$\nu_{11}^{\sigma}/\nu_0, \nu_{33}^{\sigma}/\nu_0$	213,404	-14,931	-0,190
ν_{22}^{σ}/ν_0	-5,534	-3,740	-0,185
$\chi_{11}^{\sigma}/\chi_0, \chi_{33}^{\sigma}/\chi_0$	0,590	0,805	0,336
$\chi_{22}^{\sigma}/\chi_0$	0,575	0,704	0,119

$$s_0=10^{-6} \text{ МПа}^{-1}, g_0=10^{-2} \text{ МКЛ}^{-1} \text{ м}^2, p_0=10^{-5} \text{ МТЛ}^{-1},$$

$$\beta_0=10^3 \text{ МН} \cdot \text{ м}^2 \cdot \text{ МКЛ}^{-2}, \nu_0=10^{-1} \text{ МКЛ} \cdot \text{ м} \cdot \text{ МА}^{-1}, \chi_0=10^{-1} \text{ МПа} \cdot \text{ МТЛ}^{-2}.$$

КОД ПРОГРАМИ НА PYTHON

```
import os
os.environ['QT_API'] = 'pyqt5'
import numpy as np
from numpy import pi,exp
import matplotlib.pyplot as plt
import math
from formlayout import fedit
import numpy as np
import copy
import pandas as pd
class Param_crack:
    def __init__(self, p1, p2, h, alf):
        self.__p1 = p1
        self.__p2 = p2
        self.__h = h
        self.__alf = alf # угол поворота
    @property
    def p1(self):
        return self.__p1
    @p1.setter
    def p1(self, p1_new):
        self.__p1 = p1_new
    @property
    def p2(self):
        return self.__p2
    @p2.setter
    def p2(self, p2_new):
        self.__p2 = p2_new
    @property
    def h(self):
        return self.__h
    @h.setter
    def h(self, h_new):
        self.__h = h_new
    @property
    def alf(self):
        return self.__alf
    @alf.setter
```

```

def alf(self, alf_new):
    self.__alf = alf_new

def z(self, x):
    return (self.__p1*x+1.j*self.__p2*x*x)*np.exp(1.j*self.__alf)+ self
    .__h

def zk(self, x, mu):
    return np.array([np.real(self.z(x)) + mu_k * np.imag(self.z(x)) for
mu_k in mu])

def dz(self, x):
    return (self.__p1 + 2*1.j*self.__p2*x)*np.exp(1.j*self.__alf)

def dzk(self, x, mu):
    return np.array([np.real(self.dz(x)) + mu_k * np.imag(self.dz(x)) f
or mu_k in mu])

def ds(self, x):
    return np.real(np.power(np.multiply(self.dz(x), np.conj(self.dz(x))
), 1. / 2))

def eipsi(self, x):
    return -1.j * self.dz(x) / self.ds(x)

def ak(self, x, mu):
    return np.array([mu_k * np.real(self.eipsi(x)) - np.imag(self.eipsi
(x)) for mu_k in mu])

def bk(self, x, mu):
    return np.array([-mu_1 *np.imag(self.eipsi(x)) - np.real(self.eipsi
(x)) for mu_1 in mu])
class Parametrization:

def __init__(self, ar, a0, a1, a2, a3, gamma):
    self.__ar = ar
    self.__a0 = a0
    self.__a1 = a1
    self.__a2 = a2
    self.__a3 = a3
    self.__gamma = gamma # угол поворота
    print('done')

@property
def ar(self):
    return self.__ar

@ar.setter
def ar(self, ar):
    if ar > 0:
        self.__ar = ar

```



```

        else:
            print("Недопустимое значение: ar")

@property
def a0(self):
    return self.__a0

@a0.setter
def a0(self, a0):
    if a0 > 0:
        self.__a0 = a0
    else:
        print("Недопустимое значение: a0")

@property
def a1(self):
    return self.__a1

@a1.setter
def a1(self, a1):
    if a1 > 0:
        self.__a1 = a1
    else:
        print("Недопустимое значение: a1")

@property
def a2(self):
    return self.__a2

@a2.setter
def a2(self, a2):
    if a2 > 0:
        self.__a2 = a2
    else:
        print("Недопустимое значение: a2")

@property
def a3(self):
    return self.__a3

@a3.setter
def a3(self, a3):
    if a3 > 0:
        self.__a3 = a3
    else:
        print("Недопустимое значение: a3")

@property
def gamma(self):
    return self.__gamma

@gamma.setter

```

```

def gamma(self, gamma):
    if gamma > 0:
        self.__gamma = gamma
    else:
        print("Недопустимое значение: gamma")

def z(self, x):
    return self.__ar * (self.__a0 + exp(1j * x) + self.__a1 * exp(-1j *
x)
                                + self.__a2 * exp(-2j * x) + self.__a3 * exp(-3
j * x)) \
                * exp(1j * self.__gamma)

def zk(self, x, mu):
    return np.array([np.real(self.z(x)) + mu_k * np.imag(self.z(x)) for
mu_k in mu])

def dz(self, x):
    return self.__ar * 1j * exp(1j * self.__gamma) * (exp(1j * x) - sel
f.__a1 * exp(-1j * x)
                                                    - 2 * self.__a2 *
exp(-2j * x) - 3 * self.__a3 * exp(-3j * x))
def dzk(self, x, mu):
    return np.array([np.real(self.dz(x)) + mu_k * np.imag(self.dz(x)) f
or mu_k in mu])

def ds(self, x):
    return np.real(np.power(np.multiply(self.dz(x), np.conj(self.dz(x))
), 1. / 2))

def eipsi(self, x):
    return -1.j * self.dz(x) / self.ds(x)

def ak(self, x, mu):
    return np.array([mu_k * np.real(self.eipsi(x)) - np.imag(self.eipsi
(x)) for mu_k in mu])

def bk(self, x, mu):
    return np.array([-mu_1 * np.imag(self.eipsi(x)) - np.real(self.eipsi
(x)) for mu_1 in mu])
def g_jm(c_r, a_kpsi0r, z_kr, z_0kr, ds_):
    gg_1= ds_ *c_r*np.mat(np.diag(np.divide(a_kpsi0r ,np.subtract(z_kr , z_
0kr))))
    gjm1=np.hstack((np.array(gg_1),np.conj(np.array(gg_1))))
    return gjm1
class Ellipse(Parametrization):

def __init__(self, r1, r2, gamma):
    ar = 1. / 2 * (r1 + r2)
    a1 = (1. * (r1 - r2)) / (r1 + r2)
    Parametrization.__init__(self, ar, 0, a1, 0, 0, gamma)

```

```

class Triangle(Parametrization):
    def __init__(self, l, gamma):
        Parametrization.__init__(self, 2 * l, -0.25, 0, 0.25, 0, gamma)
class Square(Parametrization):
    def __init__(self, l, gamma):
        Parametrization.__init__(self, 2 * l / 0.88085, 0, 0, 0, -0.12036,
gamma)
datalist1 = [(None, '<b>Кількість тріщин<b>'),
              ('кількість тріщин у пластині', 2), (None, '<b>Матеріал<b>'),
              ('Матеріал (1, 2 або 3)', 1), (None, '<b>Форма пластини<b>'),
              ('Еліпс-1, Квадрат-2, Трикутник-3', 1),
              ('кількість точок для контуру пластини (непарне число) :n1=', 117
              ),
              ('кількість точок для тріщин:n', 17)]
k1_cracs, mat, form, n1, n = fedit(datalist1, title="Матеріали та геометрія")
#l половина висоты
if form==1:
    datalist2=[(None, '<b>Параметри еліптичного контуру <b>'),
               ('R_1=', 6.), ('R_2=', 5.), ('alf=pi*d, d=', 1./3.)]
    r1, r2, d = fedit(datalist2, title="Еліпс")
    alf = d * pi
    outcont = Ellipse(r1, r2, alf)
elif form==2:
    datalist2=[(None, '<b>Параметри квадратного контуру<b>'), ('alf=pi*d, d= '
', 1./3.), ('l', 2)]
    d, l = fedit(datalist2, title="Квадрат")
    alf = d * pi
    outcont = Square(l, alf)
else:
    datalist2=[(None, '<b>Параметри трикутного контуру<b>'), ('alf=pi*d, d= '
, 1./3.), ('l', 3)]
    d, l = fedit(datalist2, title="Трикутник")
    alf = d * pi
    outcont = Triangle(l, alf)
done
Побудова списку об'єктів тріщин і графічне зображення їх
cracs=[]

choice_list = [(None, '<b> Параметри тріщини на площині<b>'),
               ('Випадкові тріщини - 0, \n бажаєте задати параметри тріщин с
амостійно-1, \
               \n фіксований набір з чотирьох тріщин на площині - не 0 і н
e 1', 0)]
rand_or_implicit = fedit(choice_list, title="Вибір конфігурації")
for i in range(k1_cracs):
    if rand_or_implicit[0] == 0:
        p1 = np.random.rand(1)[0]
        p2 = 0 # np.random.rand(1)[0]
        alf = np.random.rand(1)[0] * pi

```

```

    cracs.append(Param_crack(p1,p2,1.1*i+1.2*1j,alf))
elif rand_or_implicit[0] == 1:
    dt_list = [(None, '<b> Параметри тріщини на площині<b>'),
                ('p1', 1), ('p2', 0),('h', 1.1+1j),('alf', 1/4)]
    p1,p2,h,alf = fedit(dt_list, title="Параметри тріщини")
    cracs.append(Param_crack(p1,p2,h,alf*pi))
else:
    k1_cracs=4
    p1,p2,h,alf=(1.,0.,1.5*1j+1.1,1./4)
    cracs.append(Param_crack(p1,p2,h,alf*pi))
    p1,p2,h,alf=(1.,0.,-1.5*1j+1.1,-1./4)
    cracs.append(Param_crack(p1,p2,h,alf*pi))
    p1,p2,h,alf=(1.,0.,-1.5*1j-1.1,1./4)
    cracs.append(Param_crack(p1,p2,h,alf*pi))
    p1,p2,h,alf=(1.,0.,1.5*1j-1.1,-1./4)
    cracs.append(Param_crack(p1,p2,h,alf*pi))
    break
fi0=[2*k*pi/n1 for k in range(n1)] #points of collocation
fi=[(2*(k+1)-1)*pi/n1 for k in range(n1)] #interpolation

z = outcont.z(np.array(fi))
Вхідні дані
Матеріали простору
Умови на нескінченності

# dictionary mater_const['key'] contains list of const for material 'key'
# s11=s33=[0], s22=[1], s44=s66=[2], s55=[3], s12=s23=[4],s13=[5]
# g16=g34=[6],g21=g23=[7],g22=[8],p16=p34=[9],p21=p23=[10],p22=[11]
# bet11=bet33=[12],bet22=[13],nu11=nu33=[14],nu22=[15],hi11=hi33=[16],hi22=
[17]
# mu1=[18],mu2=[19],mu3=[20],mu4=[21]
count = 20

s0 = 1.e-6; g0 = 1.e-2; p0 = 1.e-5; bt0 = 1.e3; nu0 = 1.e-1; hi0 = 1.e-1
mater_const = dict.fromkeys(['M1', 'M2', 'M3'])
mater_const['M1'] = [22.260 * s0, 14.984 * s0, 47.481 * s0, 69.204 * s0, -6
.437 * s0, \
                    -11.942 * s0, 109.22 * g0, -4.333 * g0, 8.016 * g0, 26
8.318 * p0, \
                    17.778 * p0, 31.206 * p0, 19.612 * bt0, 10.612 * bt0,
213.404 * nu0, \
                    -5.534 * nu0, 0.590 * hi0, 0.575 * hi0, 2.89987007j, 1
.25351156j, \
                    -1.67633363e-01 + 0.44518972j, 1.67633363e-01 + 0.4451
8972j]
mater_const['M2'] = [10.745 * s0, 7.398 * s0, 7.637 * s0, 32.680 * s0, -2.5
42 * s0, \
                    -5.595 * s0, 2.054 * g0, -1.159 * g0, 2.458 * g0, 98.8
43 * p0, \
                    12.102 * p0, 22.268 * p0, 0.106 * bt0, 0.09 * bt0, -14
.931 * nu0, \

```

```

-3.74 * nu0, 0.805 * hi0, 0.704 * hi0, 1.7671015j, 0.9
9501903j, \
-3.93881996e-01 + 0.72471621j, 3.93881996e-01 + 0.7247
1621j]
mater_const['M3'] = [7.165 * s0, 6.797 * s0, 19.912 * s0, 19.802 * s0, -2.3
37 * s0, \
-2.736 * s0, 2.028 * g0, -0.496 * g0, 1.157 * g0, 1.85
* p0, \
0.576 * p0, 1.186 * p0, 0.156 * bt0, 0.137 * bt0, -0.1
90 * nu0, \
-0.185 * nu0, 0.336 * hi0, 0.119 * hi0, 1.3066352j, 0.
92818319j, \
0.80544586j, 0.59523266j]
alf1=0
alf2=0.5
alf1=float(alf1)*pi
alf2=float(alf2)*pi
mater_correspond = {1: 'M1', 2: 'M2', 3: 'M3'}
# boundary condition
datalist3=[(None, '<b> Тиск на вершинах тріщин<b>'),
('press',1.),
(None, '<b> Механічні умови на границі пластини<b>'),
('X_1n=f_1',0.),('X_2n=f_2',0.),
(None, '<b>Ел. та магн. умови на границі пластини<b>'),
('E_s=f_3',0.),('H_s=f_4',0.)]
press,f_1,f_2,f_3,f_4= fedit(datalist3, title="Граничні умови")

#parameters of materials save in m_p and correspond vectors mu
print ('Ви вибрали матеріал ', mater_correspond[mat])
m_p=mater_const[mater_correspond[mat]]
mu=m_p[18:]
# construct the polynoms L_ij(1,mu) as function of mu
L11 = lambda x: np.poly1d([x[0], 0., 2 * x[4] + x[2], 0., x[1]])
L12 = lambda x: np.poly1d([-x[7] + x[6]], 0., -x[8]])
L13 = lambda x: np.poly1d([-x[10] + x[9]], 0., -x[11]])
L22 = lambda x: np.poly1d([-x[12], 0., -x[13]])
L23 = lambda x: np.poly1d([-x[14], 0., -x[15]])
L33 = lambda x: np.poly1d([-x[16], 0., -x[17]])
# construct the polynoms A_ij(1,mu)-cofactors of matrix L as function o
f mu
A11 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L22(x), L33(x)), -np.polymul(L23(x),
L23(x)))
A12 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L23(x), L13(x)), -np.polymul(L12(x),
L33(x)))
A13 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L12(x), L23(x)), -np.polymul(L22(x),
L13(x)))
A22 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L11(x), L33(x)), -np.polymul(L13(x),
L13(x)))
A23 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L12(x), L13(x)), -np.polymul(L11(x),
L23(x)))
A33 = lambda x: np.polyadd(np.polymul(L11(x), L22(x)), -np.polymul(L12(x),

```

```

L12(x)))
    # construct the matrices of constants c_1,c_2- for upper and lower half
spaces
R_nk = np.mat([[mu[k] * A11(m_p)(mu[k]) for k in range(4)],
               [-A11(m_p)(mu[k]) for k in range(4)],
               [A12(m_p)(mu[k]) for k in range(4)],
               [A13(m_p)(mu[k]) for k in range(4)]]])
R0_nk = np.mat([[mu[k] * A11(m_p)(mu[k]) for k in range(4)],
                [-A11(m_p)(mu[k]) for k in range(4)],
                [mu[k] * (m_p[6] * A11(m_p)(mu[k]) + m_p[12] * A12(m_p)(m
u[k])) +
                m_p[14] * A13(m_p)(mu[k])) for k in range(4)],
                [mu[k] * (m_p[9] * A11(m_p)(mu[k]) + m_p[14] * A12(m_p)(m
u[k])) +
                m_p[16] * A13(m_p)(mu[k])) for k in range(4)]]])
m_1 = np.mat([[ (m_p[0] * (mu[k] ** 2) + m_p[4]) * A11(m_p)(mu[k]) - \
                m_p[7] * A12(m_p)(mu[k]) - \
                m_p[10] * A13(m_p)(mu[k]) for k in range(4)], \
                [(m_p[4] * mu[k] + m_p[1] / mu[k]) * A11(m_p)(mu[k]) - \
                m_p[8] / mu[k] * A12(m_p)(mu[k]) - \
                m_p[11] / mu[k] * A13(m_p)(mu[k]) for k in range(4)], \
                [mu[k] * (m_p[6] * A11(m_p)(mu[k]) + m_p[12] * A12(m_p)(m
u[k])) + \
                m_p[14] * A13(m_p)(mu[k])) for k in range(4)],
                \
                [mu[k] * (m_p[9] * A11(m_p)(mu[k]) + m_p[14] * A12(m_p)(m
u[k])) + \
                m_p[16] * A13(m_p)(mu[k])) for k in range(4)]]
)
Ви вибрали матеріал M1
Базовий варіант
z = outcont.z(np.array(fi))
plt.plot(z.real,z.imag)

for k,contur in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in
range(n)]))
    plt.plot(z.real,z.imag)

plt.show()
png
png
# get a matrix of system and right part of equation AA*W=BB
# interpolation points T_n(bt)=0 on the crack
bet = np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)])
# colocation points U_(n-1)(bt)=0 on the crack
bet0 = np.array([np.cos(pi * (l + 1) / n) for l in range(n - 1)])
# integral equation 1
for fi_0 in fi0:
    f0n = np.array([[f_1], [f_2], [f_3], [f_4]])

```

```

    if fi_0 == fi0[0]:
        BB = f0n.copy()
    else:
        BB = np.vstack((BB, f0n))
    # on the plate
    for fi_i in fi:
        GG = g_jm(R0_nk, outcont.ak(fi_0,mu), outcont.zk(fi_i,mu), outcont.
zk(fi_0,mu), outcont.ds(fi_i)) / n1
        if fi_i == fi[0]:
            GG1 = copy.deepcopy(GG)
        else:
            GG1 = np.hstack((GG1, GG))

    # on the crack
    for cont in copy.deepcopy(cracs):
        for bt in bet:
            GG = g_jm(R0_nk, outcont.ak(fi_0,mu), cont.zk(bt,mu), outcont.z
k(fi_0,mu), 1.) / 2 * n
            GG1 = np.hstack((GG1, GG))

    if fi_0 == fi0[0]:
        g11 = GG1.copy()
    else:
        g11 = np.vstack((g11, GG1))
AA = g11

# integral equation 2
for cont0 in copy.deepcopy(cracs):
    for bt0 in bet0:
        fn = np.array([[-press*np.real(cont0.eipsi(bt0))], [-press*np.imag(
cont0.eipsi(bt0))], [0.], [0.]])
        BB = np.vstack((BB, fn))
        # on the plate
        for fi_i in fi:
            GG = g_jm(R_nk, cont0.ak(bt0,mu), outcont.zk(fi_i,mu), cont0.zk
(bt0,mu), outcont.ds(fi_i)) / n1
            if fi_i == fi[0]:
                GG1 = copy.deepcopy(GG)
            else:
                GG1 = np.hstack((GG1, GG))

        # on the crack
        for cont in cracs:
            for bt in bet:
                GG = g_jm(R_nk, cont0.ak(bt0,mu), cont.zk(bt,mu), cont0.zk(
bt0,mu), 1.) / 2 * n
                GG1 = np.hstack((GG1, GG))
            AA = np.vstack((AA, GG1))

# algebraic conditions 1
for k in range(n1):
    g_11 = np.hstack((np.zeros((4, 8 * k), 'complex'), R0_nk, -np.conj(R0_n

```

```

k),
        np.zeros((4, 8 * (n1 - 1 - k) + 8 * n*k1_cracs), 'complex'))
    AA = np.vstack((AA, g_11))

# algebraic conditions 2+addition condition
for i in range(n):
    if i==0:
        g_11 = np.hstack((R_nk, -np.conj(R_nk), np.zeros((4, 8*(n-1))))))
    else:
        g_11 = np.vstack((g_11, np.hstack((np.zeros((4, 8*i)), R_nk, -np.conj(R_nk), np.zeros((4, 8*(n-i-1)))))))

for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    GG = np.hstack((np.zeros((4*n, 8*k*n+8*n1), 'complex'), g_11, np.zeros((4*n, 8*n*(k1_cracs-1-k)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))
for i in range(n):
    if i==0:
        g_11 = np.hstack((m_1, -np.conj(m_1)))
    else:
        g_11 = np.hstack((g_11, m_1, -np.conj(m_1)))
for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    GG = np.hstack((np.zeros((4, 8*k*n+8*n1), 'complex'), g_11, np.zeros((4, 8*n*(k1_cracs-1-k)), 'complex')))
    AA = np.vstack((AA, GG))
BB = np.mat((np.vstack((BB, np.zeros((4*k1_cracs*(n+1)+4*n1, 1), 'complex')))) * 2 * n)
W = AA.I* BB

#on the plate
omeg0 = np.array(W[:8*n1]).reshape(n1, 8)
#on the crack
omeg_c = np.array(W[8*n1:8*n+8*n1]).reshape(n, -1)
for k in range(1, k1_cracs):
    omeg_c = np.hstack((omeg_c, np.array(W[8*n*k+8*n1:8*n*(k+1)+8*n1]).reshape(n, -1)))
# value of functions omeg(1), omeg(-1)
ctan1 = np.array([(-1)**(k+2) / np.tan((2*(k+1)-1)*pi/4/n) / n for k in range(n)])
tan_1 = np.array([(-1)**(k+1+n) * np.tan((2*(k+1)-1)*pi/4/n) / n for k in range(n)])
omeg1 = np.dot(ctan1, omeg_c).reshape(-1, 8)
omeg_1 = np.dot(tan_1, omeg_c).reshape(-1, 8)

#intensity coefficicents at the tips of the cracs
#at the tip bt0=1

bt0=1.
for k, cont in enumerate(cracs):
    d_1 = np.sqrt(pi/cont.ds(bt0))*np.mat([cont.ak(bt0, mu) * A11(m_p)(mu),

```



```

        cont.bk(bt0,mu)*A11(m_p)(mu),
        [A12(m_p)(mu_) for mu_ in mu],
        [A13(m_p)(mu_) for mu_ in mu],
        [mu_ * (m_p[6] * A11(m_p)(mu_) +
m_p[12] * A12(m_p)(mu_) +
        m_p[14] * A13(m_p)(mu_)
) for mu_ in mu],
        [mu_ * (m_p[9] * A11(m_p)(mu_) +
m_p[14] * A12(m_p)(mu_) +
        m_p[16] * A13(m_p)(mu_)
) for mu_ in mu]])

#d_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH} bt=1
d_1=np.real(d_1*np.mat(omeg1[k,:4]).T)

# gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(R_nk*omeg11.T).T*omeg11.T
gamma1 = pi / 4 /cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(R_nk * np.mat(
omeg1[k,:4]).T)).T * np.mat(omeg1[k,:4]).T)
d_1=np.vstack((np.array(d_1),np.array(gamma1)))
if k==0:
    koef1=d_1
else:
    koef1=np.vstack((koef1,d_1))
koef1=koef1.reshape([-1,7])

#at the tip bt0=-1

bt0=-1.
for k,cont in enumerate(cracs):
    d_1 = np.sqrt(pi/cont.ds(bt0))*np.mat([cont.ak(bt0,mu) * A11(m_p)(mu),
        cont.bk(bt0,mu)*A11(m_p)(mu),
        [A12(m_p)(mu_) for mu_ in mu],
        [A13(m_p)(mu_) for mu_ in mu],
        [mu_ * (m_p[6] * A11(m_p)(mu_) +
m_p[12] * A12(m_p)(mu_) +
        m_p[14] * A13(m_p)(mu_)
) for mu_ in mu],
        [mu_ * (m_p[9] * A11(m_p)(mu_) +
m_p[14] * A12(m_p)(mu_) +
        m_p[16] * A13(m_p)(mu_)
) for mu_ in mu]])

#d_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH} bt=1
d_1_1=np.real(d_1*np.mat(omeg_1[k,:4]).T)
# gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(R_nk*omeg11.T).T*omeg11.T
gamma_1 = pi / 4 /cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(R_nk * np.mat(
(omeg_1[k,:4]).T)).T * np.mat(omeg_1[k,:4]).T)
d_1_1=np.vstack((np.array(d_1_1),np.array(gamma_1)))
if k==0:
    koef_1=d_1_1
else:
    koef_1=np.vstack((koef_1,d_1_1))

```

```

koef_1=koef_1.reshape([-1,7])

df1 = pd.DataFrame(koef1,
                   columns=('K1', 'K2', 'KD', 'KB', 'KE', 'KH', 'gamma'),
                   index=['crack ' + str(k) for k in range(1,k1_cracs+1)])
df_1 = pd.DataFrame(koef_1,
                    columns=('K1', 'K2', 'KD', 'KB', 'KE', 'KH', 'gamma'),
                    index=['crack ' + str(k) for k in range(1,k1_cracs+1)])
df_1.insert(0, 'вершина \n  $\beta=-1$ ', [cont.z(-1) for cont in cracs])
df1.insert(0, 'вершина  $\beta=1$ ', [cont.z(1) for cont in cracs])
df_1.insert(1, '$p_1$', [cont.p1 for cont in cracs])
df1.insert(1, '$p_1$', [cont.p1 for cont in cracs])
df_1.insert(2, '$h$', [cont.h for cont in cracs])
df1.insert(2, '$h$', [cont.h for cont in cracs])
df_1.insert(3, '$\alpha/\pi$', [cont.alf/pi for cont in cracs])
df1.insert(3, '$\alpha/\pi$', [cont.alf/pi for cont in cracs])
#df1
#df_1
У однієї тріщини змінюється кут нахилу
z = outcont.z(np.array(fi))
plt.plot(z.real, z.imag)

for k, contur in enumerate(copy.deepcopy(cracs)):
    for alf in np.linspace(-pi/4, pi/4, 15):
        if k == 0:
            contur.alf = alf
            z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for
or k in range(n)]))
            plt.plot(z.real, z.imag)
            z = contur.z(np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in
range(n)]))
            plt.plot(z.real, z.imag)

plt.show()
png
png
#кількість позицій повороту тріщини
count = 21
# interpolation points  $T_n(bt)=0$  on the crack
bet = np.array([np.cos((2 * (k + 1) - 1) * pi / 2 / n) for k in range(n)])
# colocation points  $U_{(n-1)}(bt_0)=0$  on the crack
bet0 = np.array([np.cos(pi * (l + 1) / n) for l in range(n - 1)])
cracs1=copy.deepcopy(cracs)
for k_alf, alf in enumerate(np.linspace(-pi/4, pi/4, count)):
    cracs1[0].alf=alf
    # get a matrix of system and right part of equation  $AA*W=BB$ 
    # integral equation 1
    for fi_0 in fi0:
        f0n = np.array([[f_1], [f_2], [f_3], [f_4]])
        if fi_0 == fi0[0]:

```

```

        BB = f0n.copy()
    else:
        BB = np.vstack((BB, f0n))
    # on the plate
    for fi_i in fi:
        GG = g_jm(R0_nk, outcont.ak(fi_0,mu), outcont.zk(fi_i,mu), outc
ont.zk(fi_0,mu), outcont.ds(fi_i)) / n1
        if fi_i == fi[0]:
            GG1 = copy.deepcopy(GG)
        else:
            GG1 = np.hstack((GG1, GG))

    # on the crack
    for cont in copy.deepcopy(cracs1):
        for bt in bet:
            GG = g_jm(R0_nk, outcont.ak(fi_0,mu), cont.zk(bt,mu), outco
nt.zk(fi_0,mu), 1.) / 2 * n
            GG1 = np.hstack((GG1, GG))

    if fi_0 == fi0[0]:
        g11 = GG1.copy()
    else:
        g11 = np.vstack((g11, GG1))
    AA = g11

    # integral equation 2
    for cont0 in copy.deepcopy(cracs1):
        for bt0 in bet0:
            fn = np.array([[ -press*np.real(cont0.eipsi(bt0))], [ -press*np.i
mag(cont0.eipsi(bt0))], [0.], [0.]])
            BB = np.vstack((BB, fn))
            # on the plate
            for fi_i in fi:
                GG = g_jm(R_nk, cont0.ak(bt0,mu), outcont.zk(fi_i,mu), cont
0.zk(bt0,mu), outcont.ds(fi_i)) / n1
                if fi_i == fi[0]:
                    GG1 = copy.deepcopy(GG)
                else:
                    GG1 = np.hstack((GG1, GG))

            # on the crack
            for cont in cracs1:
                for bt in bet:
                    GG = g_jm(R_nk, cont0.ak(bt0,mu), cont.zk(bt,mu), cont0
.zk(bt0,mu), 1.) / 2 * n
                    GG1 = np.hstack((GG1, GG))
                AA = np.vstack((AA, GG1))

    # algebraic conditions 1
    for k in range(n1):
        g_11 = np.hstack((np.zeros((4, 8 * k), 'complex'), R0_nk, -np.conj(
R0_nk),

```

```

np.zeros((4, 8 * (n1 - 1 - k) + 8 * n*k1_cracs),
'complex'))))
AA = np.vstack((AA, g_11))

# algebraic conditions 2+addition condition
for i in range(n):
    if i==0:
        g_11 = np.hstack((R_nk, -np.conj(R_nk), np.zeros((4, 8*(n-1))))))
    else:
        g_11 = np.vstack((g_11, np.hstack((np.zeros((4, 8*i)), R_nk, -np.c
onj(R_nk), np.zeros((4, 8*(n-i-1)))))))

    for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1)):
        GG = np.hstack((np.zeros((4*n, 8*k*n+8*n1), 'complex'), g_11, np.zeros(
(4*n, 8*n*(k1_cracs-1-k)), 'complex'))))
        AA = np.vstack((AA, GG))
    for i in range(n):
        if i==0:
            g_11 = np.hstack((m_1, -np.conj(m_1)))
        else:
            g_11 = np.hstack((g_11, m_1, -np.conj(m_1)))
    for k, cont in enumerate(copy.deepcopy(cracs1)):
        GG = np.hstack((np.zeros((4, 8*k*n+8*n1), 'complex'), g_11, np.zeros((4
, 8*n*(k1_cracs-1-k)), 'complex'))))
        AA = np.vstack((AA, GG))
    BB = np.mat((np.vstack((BB, np.zeros(( 4*k1_cracs *(n+1)+4 * n1, 1), 'co
mplex')))) * 2 * n)
    W = AA.I* BB

#on the plate
omeg0 = np.array(W[:8*n1]).reshape(n1, 8)
#on the crack
omeg_c = np.array(W[8*n1:8*n+8*n1]).reshape(n, -1)
for k in range(1, k1_cracs):
    omeg_c = np.hstack((omeg_c, np.array(W[8*n*k+8*n1:8*n*(k+1)+8*n1]).r
eshape(n, -1)))
# value of functions omeg(1), omeg(-1)
ctan1 = np.array([(-1)**(k+2) / np.tan((2*(k+1)-1)*pi/4/n) / n for k in range(n)])
tan_1 = np.array([(-1)**(k+1+n) * np.tan((2*(k+1)-1)*pi/4/n) / n for k in range(n)])
omeg1 = np.dot(ctan1, omeg_c).reshape(-1, 8)
omeg_1 = np.dot(tan_1, omeg_c).reshape(-1, 8)

#intensity coefficicents at the tips of the cracs
#at the tip bt0=1

bt0=1.
for k, cont in enumerate(cracs1):
    d_1 = np.sqrt(pi/cont.ds(bt0))*np.mat([cont.ak(bt0, mu) * A11(m_p)(m
u),

```

```

cont.bk(bt0,mu)*A11(m_p)(mu
,
[A12(m_p)(mu_) for mu_ in mu]
,
[A13(m_p)(mu_) for mu_ in mu]
,
[mu_ * (m_p[6] * A11(m_p)(mu_
m_p[14] * A13(m_p)(
mu_)) for mu_ in mu],
) + m_p[12] * A12(m_p)(mu_) +
) + m_p[14] * A12(m_p)(mu_) +
mu_)) for mu_ in mu]])

#d_1=[KI,KII,KD,KB,KE,KH} bt=1
d_1=np.real(d_1*np.mat(omeg1[k,:4]).T)

# gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(R_nk*omeg11.T).T*omeg11.T
gamma1 = pi / 4 /cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(R_nk * np.
mat(omeg1[k,:4]).T)).T * np.mat(omeg1[k,:4]).T)
d_1=np.vstack((np.array(d_1),np.array(gamma1)))
if k==0:
    koef1=d_1
else:
    koef1=np.vstack((koef1,d_1))
koef1=koef1.reshape([-1,7])
dis1=[np.abs(cracs1[k].z(1)-cracs1[0].z(1)) for k in range(k1_cracs)]
dis2=[np.abs(cracs1[k].z(1)-cracs1[0].z(-1)) for k in range(k1_cracs)]
dis=np.array([min(dis1[k],dis2[k]) for k in range(k1_cracs)]).reshape([-1,1])
if k_alf == 0:
    dist1= np.vstack((alf,dis))
    k_alf1_KI = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,0].reshape([-1,1])))
    k_alf1_KII = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,1].reshape([-1,1])))
    k_alf1_KD = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,2].reshape([-1,1])))
    k_alf1_KB = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,3].reshape([-1,1])))
    k_alf1_KE = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,4].reshape([-1,1])))
    k_alf1_KH = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,5].reshape([-1,1])))
    k_alf1_gam = np.vstack((np.array(alf),koef1[:,6].reshape([-1,1])))
else:
    dist1= np.hstack((dist1,np.vstack((alf,dis))))
    k_alf1_KI = np.hstack((k_alf1_KI,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,0
].reshape([-1,1])))))
    k_alf1_KII= np.hstack((k_alf1_KII,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,
1].reshape([-1,1])))))
    k_alf1_KD= np.hstack((k_alf1_KD,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,2]
.reshape([-1,1])))))
    k_alf1_KB= np.hstack((k_alf1_KB,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,3]
.reshape([-1,1])))))
    k_alf1_KE= np.hstack((k_alf1_KE,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,4]
.reshape([-1,1])))))

```

```

        k_alf1_KH= np.hstack((k_alf1_KH,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,5]
.reshape([-1,1])))))
        k_alf1_gam= np.hstack((k_alf1_gam,np.vstack((np.array(alf),koef1[:,
6]).reshape([-1,1]))))

    #at the tip bt0=-1

    bt0=-1.
    for k,cont in enumerate(cracs1):
        d_1 = np.sqrt(pi/cont.ds(bt0))*np.mat([cont.ak(bt0,mu) * A11(m_p)(m
u),
                                                cont.bk(bt0,mu)*A11(m_p)(mu)
,
                                                [A12(m_p)(mu_) for mu_ in mu]
,
                                                [A13(m_p)(mu_) for mu_ in mu]
,
) + m_p[12] * A12(m_p)(mu_) +
                                                [mu_ * (m_p[6] * A11(m_p)(mu_
m_p[14] * A13(m_p)(
mu_)) for mu_ in mu],
) + m_p[14] * A12(m_p)(mu_) +
                                                [mu_ * (m_p[9] * A11(m_p)(mu_
m_p[16] * A13(m_p)(
mu_)) for mu_ in mu]])

    #d_1_=[KI,KII,KD,KB,KE,KH} bt=1
    d_1_=np.real(d_1*np.mat(omeg_1[k,:4]).T)
    # gamm=pi/4(Im(tr(m_1)Re(R_nk*omeg11.T).T*omeg11.T
    gamma_1 = pi / 4 /cont.ds(bt0) * np.imag((m_1.T * np.real(R_nk * np
.mat(omeg_1[k,:4]).T)).T * np.mat(omeg1[k,:4]).T)
    d_1_=np.vstack((np.array(d_1_),np.array(gamma_1)))
    if k==0:
        koef_1=d_1_
    else:
        koef_1=np.vstack((koef_1,d_1_))
    koef_1=koef_1.reshape([-1,7])
    dis1=[np.abs(cracs1[k].z(-1)-cracs1[0].z(1)) for k in range(k1_cracs)]
    dis2=[np.abs(cracs1[k].z(-1)-cracs1[0].z(-1)) for k in range(k1_cracs)]
    dis=np.array([min(dis1[k],dis2[k]) for k in range(k1_cracs)]).reshape([-1,1])
    if k_alf == 0:
        dist_1= np.vstack((alf,dis))
        k_alf_1_KI = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,0].reshape([-1,1])))
        k_alf_1_KII = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,1].reshape([-1,1])))
)
        k_alf_1_KD = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,2].reshape([-1,1])))
        k_alf_1_KB = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,3].reshape([-1,1])))
        k_alf_1_KE = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,4].reshape([-1,1])))
        k_alf_1_KH = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,5].reshape([-1,1])))
        k_alf_1_gam = np.vstack((np.array(alf),koef_1[:,6].reshape([-1,1])))
)

```

```

else:
    dist_1= np.hstack((dist_1,np.vstack((alf,dis))))
    k_alf_1_KI = np.hstack((k_alf_1_KI,np.vstack((np.array(alf),koef_1[
: ,0].reshape([-1,1])))))
    k_alf_1_KII= np.hstack((k_alf_1_KII,np.vstack((np.array(alf),koef_1
[: ,1].reshape([-1,1])))))
    k_alf_1_KD= np.hstack((k_alf_1_KD,np.vstack((np.array(alf),koef_1[
,2].reshape([-1,1])))))
    k_alf_1_KB= np.hstack((k_alf_1_KB,np.vstack((np.array(alf),koef_1[
,3].reshape([-1,1])))))
    k_alf_1_KE= np.hstack((k_alf_1_KE,np.vstack((np.array(alf),koef_1[
,4].reshape([-1,1])))))
    k_alf_1_KH= np.hstack((k_alf_1_KH,np.vstack((np.array(alf),koef_1[
,5].reshape([-1,1])))))
    k_alf_1_gam= np.hstack((k_alf_1_gam,np.vstack((np.array(alf),koef_1
[: ,6].reshape([-1,1])))))

col=[]
col.append('$\alpha/\pi$')
col.extend(['(-1) crack ' + str(k) for k in range(1,k1_cracs+1)])
col.append('$\alpha/\pi$')
col.extend(['(1) crack ' + str(k) for k in range(1,k1_cracs+1)])
df_dist=pd.DataFrame(np.hstack((dist_1.T ,dist1.T)),columns=col)
df_KI = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KI.T ,k_alf1_KI.T)),columns=col)
df_KII = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KII.T ,k_alf1_KII.T)),columns=col)
df_KD = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KD.T ,k_alf1_KD.T)),columns=col)
df_KB = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KB.T ,k_alf1_KB.T)),columns=col)
df_KE = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KE.T ,k_alf1_KE.T)),columns=col)
df_KH = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_KH.T ,k_alf1_KH.T)),columns=col)
df_gam = pd.DataFrame(np.hstack((k_alf_1_gam.T ,k_alf1_gam.T)),columns=col)
Залежність відстаней між вершинами тріщин до найближчої вершини тріщини, що обертається
від кута повороту
print('Залежність відстаней між вершинами тріщин до найближчої вершини тріщ
ини, що обертається від кута повороту')
#df_dist
Залежність відстаней між вершинами тріщин до найближчої вершини тріщини, що
обертається від кута повороту
plt.rc('font',**{'family':'verdana'})
#plot
k=2
for dst in dist_1[2:,:]:
    plt.plot(dist_1[0,:].T/pi,dst,':',label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=2
for dst in dist1[2:,:]:
    plt.plot(dist1[0,:].T/pi,dst,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc=0)
plt.xlabel('$\alpha$')
plt.ylabel('$distance$')

```

```

plt.title('Відстань до вершини тріщини, що обертається')
plt.show()
png
png
Коефіцієнт нормально відриву  $K_I$ 
print('Коефіцієнт нормально відриву $K_I$ ')
#df_KI
Коефіцієнт нормально відриву $K_I$
k=1
for KI_ in k_alf_1_KI[1:, :]:
    plt.plot(k_alf_1_KI[0, :].T/pi, KI_, '--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KI in k_alf1_KI[1:, :]:
    plt.plot(k_alf1_KI[0, :].T/pi, KI, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc=0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$K_I$')
plt.title('Коефіцієнт нормально відриву $K_I$')
plt.show()
png
png
Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву  $K_{II}$ 
print('Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву $K_{II}$')
#df_KII
Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву $K_{II}$
k=1
for KII_ in k_alf_1_KII[1:, :]:
    plt.plot(k_alf_1_KII[0, :].T/pi, KII_, '--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KII in k_alf1_KII[1:, :]:
    plt.plot(k_alf1_KII[0, :].T/pi, KII, label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc=0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$K_{II}$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності поперечного зсуву $K_{II}$')
plt.show()
png
png
Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції  $K_D$ 
print('Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D$')
#df_KD
Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D$
k=1
for KD_ in k_alf_1_KD[1:, :]:
    plt.plot(k_alf_1_KD[0, :].T/pi, KD_, '--', label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1

```



```

for KD in k_alf1_KD[1:,:]:
    plt.plot(k_alf1_KD[0,:].T/pi,KD,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc=0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$K_D$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності електричної індукції $K_D$')
plt.show()
png
png
Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_B$
print('Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_B$')
#df_KB
Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_B$
k=1
for KB_ in k_alf_1_KB[1:,:]:
    plt.plot(k_alf_1_KB[0,:].T/pi,KB_,'--',label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KB in k_alf1_KB[1:,:]:
    plt.plot(k_alf1_KB[0,:].T/pi,KB,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc = 0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$K_B$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності магнітної індукції $K_B$')
plt.show()
png
png
Коефіцієнт інтенсивності напруженності електричного поля $K_E$
print('Коефіцієнт інтенсивності напруженності електричного поля $K_E$')
#df_KE
Коефіцієнт інтенсивності напруженності електричного поля $K_E$
k=1
for KE_ in k_alf_1_KE[1:,:]:
    plt.plot(k_alf_1_KE[0,:].T/pi,KE_,'--',label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KE in k_alf1_KE[1:,:]:
    plt.plot(k_alf1_KE[0,:].T/pi,KE,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc = 0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$K_E$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності напруженності електричного поля $K_E$')
plt.show()
png
png
Коефіцієнт інтенсивності напруженності магнітного поля $K_H$

```

```

print('Коефіцієнт інтенсивності напруженності магнітного поля $K_H$')
#df_KH
Коефіцієнт інтенсивності напруженності магнітного поля $K_H$
k=1
for KH_ in k_alf_1_KH[1:,,:]:
    plt.plot(k_alf_1_KH[0,:].T/pi,KH_,'--',label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for KH in k_alf1_KH[1:,,:]:
    plt.plot(k_alf1_KH[0,:].T/pi,KH,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc = 0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$K_H$')
plt.title('Коефіцієнт інтенсивності напруженності магнітного поля $K_H$')
plt.show()
png
png
Енергетичний критерій руйнування  $\gamma$ 
print('Енергетичний критерій руйнування $\gamma$')
#df_gam
Енергетичний критерій руйнування $\gamma$
k=1
for gam_ in k_alf_1_gam[1:,,:]:
    plt.plot(k_alf_1_gam[0,:].T/pi,gam_,'--',label='(-1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
k=1
for gam in k_alf1_gam[1:,,:]:
    plt.plot(k_alf1_gam[0,:].T/pi,gam,label='(1) Cracks '+ str(k))
    k=k+1
plt.legend(loc = 0)
plt.xlabel('$\alpha/\pi$')
plt.ylabel('$\gamma$')
plt.title('Енергетичний критерій руйнування $\gamma$')
plt.show()
png
png

```