

УДК 621.373

КП

№ держреєстрації 0116U006732

Інв. №

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
(СумДУ)
40007, м. Суми, вул. Римського-Корсакова, 2
тел. (0542) 687-776 факс(0542) 33-40-49

ЗАТВЕРДЖУЮ
Проректор з наукової роботи
док. фіз.-мат. наук, професор

_____ А.М. Черноус

ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ
**МУЛЬТИГАРМОНІЧНІ РЕЗОНАНСНІ ВЗАЄМОДІЇ У ДВОПОТОКОВИХ
СУПЕРГЕТЕРОДИННИХ ЛАЗЕРАХ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ З
ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ**

(остаточний)

Начальник НДЧ
канд. фіз.-мат. наук, с.н.с.

Д. І. Курбатов

Керівник НДР
док. фіз.-мат. наук, професор

О. В. Лисенко

2018

Рукопис завершено 20 червня 2018 року
Результати цієї роботи розглянуто науковою радою СумДУ,
протокол № 9 від 27.06.2018 р.

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР,
док. фіз.-мат. наук.,
зав. каф. ПМтаМСС

(підпис)
(20.06.18)

О. В. Лисенко
(розділи 1–4, висновки)

ст. викладач, канд. фіз.-мат. наук

(підпис)
(20.06.18)

Г. А. Олексієнко
(розділ 1)

ст. викладач, канд. фіз.-мат. наук

(підпис)
(20.06.18)

В. В. Коваль
(розділ 2)

аспірант

(підпис)
(20.06.18)

Ю. Ю. Волк
(реферат, розділи 1–4)

асистент

(підпис)
(20.06.18)

А. Ю. Брусник
(розділ 3)

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 79 с., 21 рис., 52 джерела.

ГВИНТОВІ ЕЛЕКТРОННІ ПУЧКИ, ДВОПОТОКОВА НЕСТІЙКІСТЬ, ЛАЗЕРИ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ, ПАРАМЕТРИЧНІ ВЗАЄМОДІЇ ХВИЛЬ, ХВИЛІ ПРОСТОРОВОГО ЗАРЯДУ.

Об'єкт дослідження – нелінійні процеси в мультигармонічних двопотокових супергетеродинних лазерах на вільних електронах з гвинтовими електронними пучками.

Предмет дослідження – вимушене випромінювання потужнострумовими релятивістськими електронними пучками в електромагнітних полях і його використання для формування потужних мультигармонічних електромагнітних хвиль.

Мета роботи – встановлення основних фізичних закономірностей, що пов'язані з мультигармонічними резонансними взаємодіями у двопотокових супергетеродинних лазерах на вільних електронах (СЛВЕ) Н-убітронного типу з гвинтовими електронними пучками, визначення ефективних режимів роботи СЛВЕ, з'ясування умов за яких стає можливим формування інтенсивних електромагнітних хвиль із широким частотним спектром.

Методи дослідження – як базовий математичний апарат для теоретичного дослідження нелінійних процесів у супергетеродинних лазерах на вільних електронах був використаний ієрархічний підхід до теорії коливань і хвиль [1-4]. Також застосовувалися стандартні чисельні й чисельно-аналітичні методи, у тому числі, метод повільно змінних амплітуд.

Побудована самоузгоджена кубічно-нелінійна теорія мультигармонічних двопотокових СЛВЕ клістронного типу з Н-убітронною накачкою гвинтовими релятивістськими електронними пучками. Ураховано множинні трихвильові резонансні взаємодії хвиль різного типу. Показано, що темпи зростання електромагнітних хвиль у ДСЛВЕ із гвинтовими РЕП істотно вищі, а довжини насичення набагато менше, що дозволяє зменшити поздовжні габарити ДСЛВЕ. Встановлені оптимальні режими роботи.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕОРІЇ СИЛЬНОСТРУМОВИХ ПРИСТРОЇВ З ГВИТОВИМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ	8
1.1. Метод усереднених характеристик	8
1.2. Модернізована асимптотична схема на випадок систем, що використовують гвинтові електронні пучки	13
1.3. Застосування модернізованої асимптотичної схеми в задачі руху..	15
2 МНОЖИННІ РЕЗОНАНСНІ ВЗАЄМОДІЇ В ПРОЛІТНІЙ СЕКЦІЇ ДСЛВЕ Н-УБІТРОННОГО ТИПУ ІЗ ГВИТОВИМ ЕЛЕКТРОННИМ ПУЧКОМ	21
2.1 Модель мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ клістронного типу з гвинтовим РЕП	21
2.2 Множинні взаємодії у пролітній секції ДСЛВЕ	25
2.3 Підсилення мультигармонічної хвилі просторового заряду в пролітній секції двопотокового СЛВЕ з гвинтовим електронним пучком	29
2.4 Вплив параметрів гвинтового релятивістського електронного пучка на формування ХПЗ з широким частотним спектром	33
2.4.1 Вплив кута вльоту пучка на формування мультигармонічної ХПЗ	33
2.4.2 Вплив середнього значення релятивістського фактора на формування мультигармонічної ХПЗ.....	35
2.4.3 Вплив різниці парціальних релятивістських факторів на формування мультигармонічної ХПЗ.....	37
2.4.4 Вплив середнього значення плазмової частоти на формування мультигармонічної ХПЗ	39
3 МУЛЬТИГАРМОНІЧНІ ПРОЦЕСИ В ОДНОСЕКЦІЙНОМУ ДСЛВЕ Н-УБІТРОННОГО ТИПУ З ГВИТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ	42

3.1	Модель односекційного мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ з гвинтовим РЕП.....	42
3.2	Основні рівняння у слабосигнальному наближенні.....	45
3.3	Взаємодія хвиль у слабосигнальному наближенні.....	49
4	ФОРМУВАННЯ ПОТУЖНОЇ МУЛЬТИГАРМОНІЧНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ДВОПОТОКОВИМ СУПЕРГЕТЕРОДИННИМ ЛАЗЕРОМ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ КЛІСТРОННОГО ТИПУ З ГВИНТОВИМ ЕЛЕКТРОННИМ ПУЧКОМ.....	57
4.1	Множинні трихвильові параметричні резонанси у двопотоковому СЛВЕ клістронного типу з гвинтовим РЕП.....	57
4.2	Система кубічно-нелінійних рівнянь для комплексних амплітуд хвиль	59
4.3	Формування потужних електромагнітних хвиль із широким частотним спектром.....	67
	ВИСНОВКИ.....	72
	ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ.....	74

ВСТУП

Як відомо, двопотокові супергетеродинні лазери на вільних електронах (ДСЛВЕ) [1-7] характеризуються низкою унікальних властивостей, які роблять їх досить перспективними для різних практичних застосувань. Одним з основних переваг ДСЛВЕ є їх особлива компактність і здатність працювати в режимах з надзвичайно високим рівнем підсилення, можливість формувати потужний мультигармонічний електромагнітний сигнал із широким частотним спектром [1-5]. Це забезпечується за рахунок ефекту супергетеродинного підсилення електромагнітних хвиль у плазмі релятивістських електронних пучків [1-3]. Ідея цього ефекту полягає в тому, щоб використовувати власні нестійкості пучка різних типів (у тому числі і поздовжніх електронних хвиль) для підсилення поперечної електромагнітної хвилі сигналу [1-3]. Параметричний механізм взаємодії, який є основним для традиційних лазерів на вільних електронах (ЛВЕ), тут використовується тільки для перетворення підсилення від поздовжніх електронних хвиль у підсилення хвиль поперечного електромагнітного сигналу. Також зазначимо, що хвилі, які підсилюються за рахунок нестійкості, характеризуються лінійною дисперсійною залежністю [1-9]. Завдяки цій властивості гармоніки таких хвиль виявляються пов'язаними одна з одною великою кількістю трихвильових параметричних резонансів [1, 3-5, 8]. Це призводить до інтенсивного збудження вищих гармонік, які до того ж підсилюються за рахунок власної нестійкості. У результаті цього такі системи можуть бути джерелами потужних мультигармонічних електромагнітних хвиль із широким частотним спектром.

Подальше вивчення показало, що односекційні ДСЛВЕ-підсилувачі характеризуються яскраво вираженою схильністю до самозбудження внаслідок надзвичайно високого рівня підсилення. Як показано в роботах [1-2], досить ефективним методом вирішення цієї проблеми є використання схем клістронного типу ДСЛВЕ. Головною особливістю цієї конструкції є дуже глибоке розв'язання вводу-виводу. Це приводить до повного усунення згаданої вище схильності односекційних ДСЛВЕ до самозбудження.

Раніше було досліджено мультигармонічні ДСЛВЕ клістронного типу, які використовують прямолінійні релятивістські електронні пучки [1-3]. Використання гвинтових двопотокових електронних пучків у пристроях такого типу розглянуто не було. Попередній аналіз показує, що використання таких пучків може істотно збільшити як коефіцієнти підсилення електромагнітних хвиль (це приведе до зменшення поздовжніх габаритів таких пристроїв), так і ширину частотного спектра електромагнітних хвиль [6-8]. Тому, у роботі в кубічному нелінійному наближенні проведений аналіз динаміки формування мультигармонічних електромагнітних хвиль у ДСЛВЕ клістронного типу, які використовують гвинтові двопотокові РЕП. Показано, що використання гвинтових РЕП дозволяє одержати потужний електромагнітний сигнал з більш широким спектром порівняно з ДСЛВЕ, який використовує прямолінійні пучки.

Варто також сказати, що гвинтові електронні пучки використовуються у двопотокових супергетеродинних ЛВЕ досить давно. Однак режими роботи таких пристроїв, коли формуються потужні електромагнітні хвилі із широким частотним спектром, у кубічному нелінійному наближенні раніше вивчені не були.

Основні результати даної науково-дослідної роботи подані в роботах [44—52].

1 ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕНИХ ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕОРІЇ СИЛЬНОСТРУМОВИХ ПРИСТРОЇВ З ГВИТОВИМИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ

1.1. Метод усереднених характеристик

Як відомо, самоузгоджену теорію нелінійних процесів у пристроях сильнострумової електроніки можна розділити на дві частини [1, 3]. Перша з них є задачею руху заряджених частинок у заданих електромагнітних полях, друга — задача збудження електромагнітних полів зарядженими частинками при заданому русі. Вирішення обох цих задач дозволяє побудувати повну самоузгоджену картину взаємодії частинок з електромагнітними полями.

Для формування першої з вище згаданих задач, задачі руху, використовують у найбільш загальному випадку кінетичне рівняння [1, 3]. У багатьох випадках для опису нелінійних процесів можна застосувати менш загальні, але більш прості квазігідродинамічні рівняння [1—3]. Як у випадку кінетичного, так і у випадку квазігідродинамічного опису використовують рівняння в частинних похідних.

Для вирішення задачі руху, яка описується рівняннями в частинних похідних, використовують різні методи [1, 3]. Серед цих методів, що враховують специфіку нелінійних процесів у пристроях сильнострумової та плазмової електроніки, варто виділити метод усереднених характеристик [1, 3]. З одного боку, цей метод включає в себе переваги плазмового підходу, а з іншого боку — базується на математично обґрунтованих асимптотичних схемах вирішення систем диференціальних рівнянь. Завдяки використанню асимптотичних схем інтегрування можна отримувати частину результатів, як в аналітичному вигляді, так і у вигляді добре адаптованому для методів чисельного аналізу.

Для формування другої з вище згаданих задач, задачі збудження електромагнітних полів, використовують рівняння Максвелла. Густина електричного струму й густини заряду, які входять у рівняння Максвелла, обчислюють, використо-

вуючи рівняння руху. Рівняння Максвелла можна вирішувати різними способами, але найбільш часто у теорії сильнострумової електроніки застосовують метод повільно змінних амплітуд [1, 3].

Якщо в досліджуваному пристрої поширюються хвилі з широким частотним спектром, то рівняння Максвелла зручно розкласти в ряди Фур'є й отримати диференціальні рівняння для амплітуд хвиль. Щоб таке розкладання можна було здійснити досить легко, густини електричних струмів і густини зарядів, які знаходяться за допомогою методу усереднених характеристик і входять у рівняння Максвелла, повинні бути представлені у вигляді Фур'є-гармонік за такими самими фазами, якими характеризуються електромагнітні поля у досліджуваній системі. Відзначимо, що під час застосування методу усереднених характеристик відбувається перехід від неусереднених величин до усереднених, у тому числі, і до усереднених фаз. А усереднені й неусереднені фази є різними величинами. У методі усереднених характеристик після отримання розв'язків у вигляді функцій від усереднених величин здійснюється зворотний перехід до неусереднених величин, у тому числі, і до неусереднених фаз.

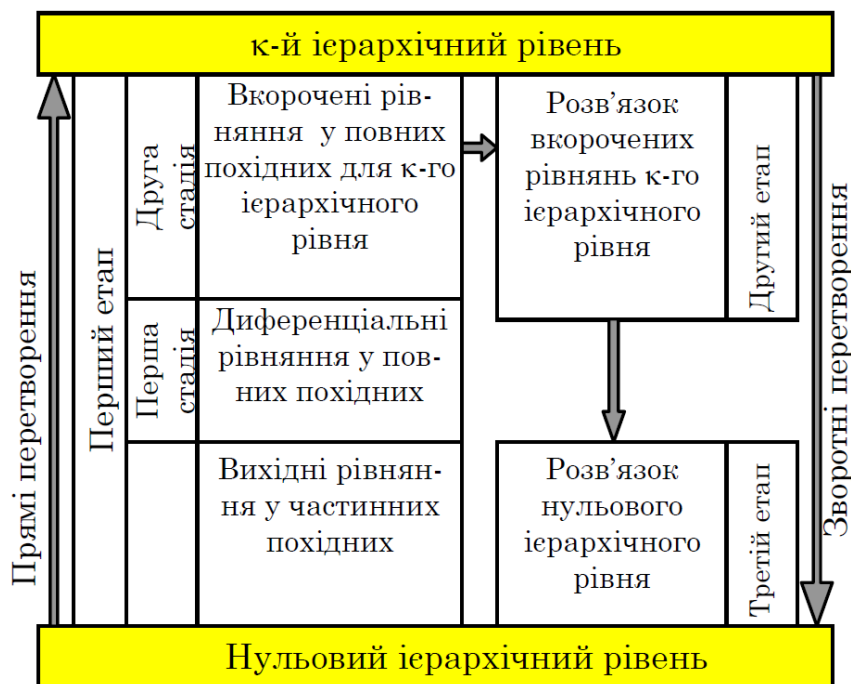


Рисунок 1.1 — Схема обчислювальної процедури методу усереднених характеристик

Аналізуючи загальну схему вирішення задач із мультигармонічними резонансними взаємодіями можна переконатися у тому, що зворотний перехід від усереднених величин до неусереднених з метою використання отриманих розв'язків у рівняннях Максвелла можна проводити не для всіх величин, а тільки для деяких. Виявляється, що для більшості практично цікавих випадків достатньо здійснювати зворотний перехід тільки лише для швидких фаз, за якими відбувається розкладання в ряди Фур'є у рівняннях Максвелла. У зв'язку з цим, виникає наступне питання: чи можливо модернізувати схему асимптотичного інтегрування таким чином, щоб було можливо отримувати розв'язки, які б відразу залежали від неусереднених фаз без додаткового зворотного переходу. Зазначимо, така модернізація значно спростила б загальний алгоритм асимптотичного інтегрування та дозволила б збільшити ефективність методу усереднених характеристик.

Продемонструємо модернізований алгоритм асимптотичного інтегрування з урахуванням зворотного перетворення для декількох швидких фаз. Як вихідну систему рівнянь використовуємо систему:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}), \quad \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) + \frac{1}{\xi} \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}) \quad (1.1)$$

де \mathbf{x} — вектор повільних змінних, $\boldsymbol{\psi} = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k\}$ — вектор швидких фаз, $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x})$ — вектор-функція повільних змінних, $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})$ і $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})$ — вектор-функції повільних і швидких змінних, ξ — великий параметр задачі. Для переходу до усереднених повільних змінних використовуємо заміну Крилова-Боголюбова в модернізованій формі, що залежить від вектора неусереднених швидких фаз

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{u}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}) \quad (1.2)$$

Функції $\mathbf{u}^{(n)}$ підбираємо таким чином, щоб праві частини усереднених рівнянь для повільних змінних не залежали від швидких

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} \mathbf{A}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}) \quad (1.3)$$

Алгоритм знаходження $\mathbf{u}^{(n)}$ й $\mathbf{A}^{(n)}$, які входять в (1.2)–(1.3), описуємо в такий спосіб. Осциляторні компоненти (1.15) отримуються зі співвідношення

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(n)} = & \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \dots \sum_{m_k=-N}^{m_k=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}}{i(m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k)} \times \\ & \times \exp(i(m_1\psi_1 + \dots + m_k\psi_k)) \end{aligned} \quad (1.4)$$

за умови, щоб жоден зі знаменників (1.4) не перетворювався в нуль. Випадки, коли знаменники в (1.4) дорівнюють нулю

$$m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0 \quad (1.5)$$

називають комбінаційними резонансами [23]. Це значить, що осциляторні доданки в (1.4) визначаються нерезонансними компонентами $\mathbf{g}^{(n)}$.

Функція $\mathbf{A}^{(n)}$ визначається як середнім значенням $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$, так і компонентами $\mathbf{g}^{(n)}$, пов'язаними з комбінаційними резонансами (1.5)

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)} \Big|_{m_1\Omega_1 + \dots + m_k\Omega_k = 0} \quad (1.6)$$

У рівняннях (1.4) і (1.6) використовували позначення

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)} &= \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1 \Psi_1, \dots, m_k \Psi_k} = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^k \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1 \Psi_1 + \dots + m_k \Psi_k)} d\Psi_1 \dots d\Psi_k \end{aligned} \quad (1.7)$$

Функції $\mathbf{g}^{(n)}$, через які визначаються $\mathbf{u}^{(n)}$ й $\mathbf{A}^{(n)}$ в (1.4) і (1.6), мають такий вигляд:

$$\mathbf{g}^{(1)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi) \quad (1.8)$$

$$\mathbf{g}^{(2)} = \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left[\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y_s \right) \right] \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^{(3)} &= \frac{1}{\xi^3} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \right. \right. \\ &- \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} + \frac{\partial Y_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \Psi_s} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} + Y_s \right) \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \Psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Наявність декількох швидких фаз якісно змінює процедуру асимптотичного інтегрування — виникає необхідність урахування комбінаційних резонансів (1.5). З погляду математичної процедури, урахування комбінаційних резонансів міститься в поділі $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ на резонансні компоненти, для яких виконується умова (1.5), і нерезонансні, для яких ця умова не виконується. Так як частоти Ω_s , що залежать від повільних змінних \mathbf{x} , із часом змінюються, то в процесі інтегрування ми постійно повинні перевіряти умову (1.5). Така перевірка з погляду комп'ютерного моделювання зводиться до перевірки нерівності

$$m_1 \Omega_1 + \dots + m_k \Omega_k \leq 1/\xi \quad (1.11)$$

Так як кількість гармонік N , що враховується при комп'ютерному моделюванні, обмежене ($m_s \leq N$), то комп'ютерна перевірка умови (1.11) є нескладним завданням.

Також варто враховувати, що виходячи з фізичних міркувань, практично всі резонансні умови типу (1.5), (1.11) є відомими. Тому доцільно дану перевірку об'єднати із процедурою знаходження $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ (1.7). Функції $\mathbf{g}^{(n)}$, що використовуються в задачах потужнострумової електроніки, як правило, формуються величинами, що мають вид рядів Фур'є з повільно змінними амплітудами. Тому чисельне знаходження амплітуд $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ при відповідних комбінаційних фазах, по суті, зводиться до аналізу резонансних умов і формування $\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_k}^{(n)}$ як функції повільних змінних.

Таким чином, описаний алгоритм (1.1)-(1.10) дозволяє вирішувати мультигармонічні нелінійні задачі з урахуванням специфіки мультигармонічних резонансних взаємодій у пристроях потужнострумової електроніки.

1.2. Модернізована асимптотична схема на випадок систем, що використовують гвинтові електронні пучки

У робочій області СЛВЕ електрони рухаються як під дією електромагнітних хвиль сигналу, накачування й ХПЗ, так і виконують обертальний рух щодо поздовжнього фокусуєчого магнітного поля. Причому незбурений рух електронів (у випадку відсутності хвиль) відбувається по гвинтовій траєкторії. Тому для рішення задачі руху використовують стандартний перехід від прямокутної декартової системи координат для швидкостей $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z})$ до циліндричної $\mathbf{v}_\alpha = (v_{\alpha \perp}, p_{\alpha 0}, v_{\alpha z})$. Відповідна заміна записується у вигляді:

$$v_{\alpha x} = v_{\alpha \perp} \cos p_{\alpha 0}, \quad v_{\alpha y} = v_{\alpha \perp} \sin p_{\alpha 0}, \quad (1.12)$$

де $p_{\alpha 0}$ — обертальна фаза α -го сорту часток (індекс α приймає значення b й p ; індексом b характеризуємо параметри пучка, індексом p — параметри плазми).

Використання асимптотичних схем інтегрування [1, 14] приводить до необхідності переходу до повільно змінних $\bar{v}_{\alpha\perp}$, $\bar{p}_{\alpha 0}$ і швидкоосцилюючим величинам $\tilde{v}_{\alpha\perp}$, $\tilde{p}_{\alpha 0}$:

$$\begin{aligned} v_{\alpha x} &= (\bar{v}_{\alpha\perp} + \tilde{v}_{\alpha\perp}) \cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}) \\ v_{\alpha y} &= (\bar{v}_{\alpha\perp} + \tilde{v}_{\alpha\perp}) \sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0}) \end{aligned} \quad (1.13)$$

де

$$\bar{p}_{\alpha 0} = - \int_0^t \frac{\omega_H}{\bar{\gamma}_\alpha} dt'$$

— незбурена фаза обертання електронів у поздовжнім магнітному полі; $\bar{\gamma}_\alpha$ — усереднений релятивістський фактор часток α -го сорту пучка; $e = -|e|$ — заряд електрона; m_e — маса спокою електрона; c — швидкість світла у вакуумі, .

Асимптотичне інтегрування задачі руху при використанні заміни (1.13) ускладнюється двома математичними проблемами. Перша пов'язана з тим, що в рівнянні руху для фази $p_{\alpha 0}$ [9] з'являється вираз з розподілом на $\bar{v}_{\alpha\perp}$. Це значить, що отримана система не може описувати динаміку хвиль при куті вльоту частинок $\beta = 0^\circ$, тому що в цьому випадку в рівняннях буде розподіл на нуль. Друга проблема обумовлена тим, що в заміні (1.13) аргумент функції $\cos(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$ й $\sin(\bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{p}_{\alpha 0})$ містить осциляторну періодичну функцію фази $\tilde{p}_{\alpha 0}$. Це призводить до необхідності розкладання цих функцій у ряд Фур'є-Бесселя [14]. Відзначимо, що рівняння Максвелла у свою чергу, розкладаються в ряди Фур'є по швидких фазах. Тому, щоб використовувати рішення завдання руху при знаходженні густин струму, які входять у рівняння Максвелла, необхідно провести зворотний перехід від функцій Бесселя до гармонічних функцій. У досліджуваних системах у трихвильовій резонансній взаємодії одночасно бере участь величезна кількість гармонік ХПЗ. Тому, прямі й зворотні перетворення в таких завданнях є досить громіздкими обчислювальними процедурами й знижують ефективність обчислювального алгоритму. Отже, виникає питання про модернізацію заміни (1.13) для

спрощення алгоритму рішення завдання руху в пристроях потужнострумової електроніки, що використовують гвинтові РЕП.

У даній роботі ми пропонуємо ввести принципово нову заміну змінних у порівнянні з (1.13):

$$v_{\alpha x} = \bar{v}_{\alpha\perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha x}, \quad v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha\perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \tilde{v}_{\alpha y} \quad (1.14)$$

де $\tilde{v}_{\alpha x}$, $\tilde{v}_{\alpha y}$ — осциляторні x - і y - компоненти вектора швидкості пучка й плазми.

Таким чином, пропонується замість осциляторних перпендикулярної швидкості $\bar{v}_{\alpha\perp}$ й фази $\bar{p}_{\alpha 0}$ ввести осциляторні компоненти швидкості $\tilde{v}_{\alpha x}$, $\tilde{v}_{\alpha y}$. Така заміна, дозволяє вирішити вище описані проблеми й спростити весь алгоритм рішення самоузгодженого завдання.

1.3. Застосування модернізованої асимптотичної схеми в задачі руху

Для знаходження рішень задачі руху будемо використовувати модернізований метод усереднених характеристик [13], а також заміну (1.14). У якості вихідного використовуємо релятивістське квазігідродинамічне рівняння руху. Відповідно до методу усереднених характеристик [1, 13] робимо перехід від рівняння в частинних похідних до його характеристик, рівнянь у повних похідних. Вважаємо, що згодом t амплітуди хвиль міняються повільно. Для опису такої залежності введемо повільний час $\tau = t/\xi$, де ξ — великий параметр задачі й має такий вигляд

$$\xi \sim \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \left/ \left| \frac{dx}{dt} \right| \right. \gg 1$$

де ψ — швидка фаза; x — повільна змінна.

Далі запишемо вектор повільних змінних \mathbf{x} , вектор-функцію \mathbf{X} , вектор швидких фаз $\boldsymbol{\psi}$ і вектор фазових швидкостей $\boldsymbol{\Omega}$ у неявному виді

$$\mathbf{x} = \{x_{v_{\alpha x}}, x_{v_{\alpha y}}, x_{v_{\alpha z}}, x_{\gamma_\alpha}, x_\tau\} = \{v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z}, \gamma_\alpha, \tau\},$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_{v_{\alpha x}}, X_{v_{\alpha y}}, X_{v_{\alpha z}}, X_{\gamma_\alpha}, X_\tau\}, \quad (1.15)$$

$$\Psi = \{p_{1,\alpha,1}, \dots, p_{1,\alpha,N}, p_{2,\alpha,1}, \dots, p_{2,\alpha,N}, p_{3,\alpha,1}, \dots, p_{3,\alpha,N}, p_{0\alpha}\},$$

$$\Omega = \{\Omega_{1,\alpha,1}, \dots, \Omega_{1,\alpha,N}, \Omega_{2,\alpha,1}, \dots, \Omega_{2,\alpha,N}, \Omega_{3,\alpha,1}, \dots, \Omega_{3,\alpha,N}, \Omega_{0\alpha}\},$$

Де $p_{1,m} = \omega_{1,m} t - k_{1,m} z$ – фаза електромагнітної хвилі сигналу m -ї гармоніки;
 $p_{2,m} = \omega_{2,m} t - k_{2,m} z$ – фаза електромагнітної хвилі накачування m -ї гармоніки;
 $p_{3,m} = \omega_{3,m} t - k_{3,m} z$ – фаза хвилі ХПЗ m -ї гармоніки; N – кількість гармонік у системі; $\Omega_{1,\alpha,m} = \omega_{1,m} - k_{1,m} \bar{v}_{\alpha z}$, $\Omega_{2,\alpha,m} = \omega_{2,m} + k_{2,m} \bar{v}_{\alpha z}$, $\Omega_{3,\alpha,m} = \omega_{3,m} - k_{3,m} \bar{v}_{\alpha z}$, $\Omega_{\alpha 0} = -\omega_{H,\alpha} / \bar{\gamma}_\alpha$;
 m – номер гармоніки.

Далі переходимо від неусереднених змінних до усереднених повільних змінних. Для цього використовуємо модернізовану заміну Крилова-Боголюбова [13-14] і заміну (1.14) у якій осциляторні добавки залежать від неусередненого вектора швидких фаз Ψ

$$v_{\alpha x} = \bar{v}_{\alpha \perp} \cos \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), v_{\alpha y} = \bar{v}_{\alpha \perp} \sin \bar{p}_{\alpha 0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi),$$

$$v_{\alpha z} = \bar{v}_{\alpha z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \gamma_\alpha = \bar{\gamma}_\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\gamma_\alpha}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \quad (1.16)$$

$$\tau = \bar{\tau} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_\tau^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi).$$

Відмітимо, що усереднені змінні задовольняють системі

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} \cos \bar{p}_{\alpha 0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha x}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{v}_{\alpha\perp}}{dt} \sin \bar{p}_{\alpha 0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha y}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{v}_{\alpha z}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{v_{\alpha z}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{\gamma}_{\alpha}}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\gamma_{\alpha}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{\tau}}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\tau}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

У рівняннях (1.17) шукана функція $\mathbf{u}^{(n)}$ має вигляд [13-14]:

$$\mathbf{u}^{(n)} = \sum_{m_1=-N}^{m_1=+N} \dots \sum_{m_{\kappa}=-N}^{m_{\kappa}=+N} \frac{\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_{\kappa}}^{(n)}}{i(m_1\Omega_1 + \dots + m_{\kappa}\Omega_{\kappa})} \times \exp(i(m_1\psi_1 + \dots + m_{\kappa}\psi_{\kappa})) \quad (1.18)$$

Відзначимо, що випадки, коли знаменники в (1.18) обертаються в нуль

$$m_1\Omega_1 + \dots + m_{\kappa}\Omega_{\kappa} = 0 \quad (1.19)$$

називають комбінаційними резонансами. Тому, не один зі знаменників рішень (1.18) не повинен обертатися в нуль, іншими словами, осциляторні функції $\mathbf{u}^{(n)}$ повинні визначатися тільки нерезонансними компонентами $\mathbf{g}^{(n)}$.

На відміну від функції $\mathbf{u}^{(n)}$ рішення для функції $\mathbf{A}^{(n)}$ визначаються як резонансними компонентами так і середніми значеннями $\langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle$. Тому рішення для функції $\mathbf{A}^{(n)}$ має такий вигляд [13-14]:

$$\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{g}_{m_1, \dots, m_{\kappa}}^{(n)} \Big|_{m_1\Omega_1 + \dots + m_{\kappa}\Omega_{\kappa} = 0} \quad (1.20)$$

У наведених рішеннях (1.18) і (1.20) використовувалося наступне позначення

$$\mathbf{g}_{m_1, \dots, m_{\kappa}}^{(n)} = \langle \mathbf{g}^{(n)} \rangle_{m_1\psi_1, \dots, m_{\kappa}\psi_{\kappa}} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\kappa} \cdot \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}^{(n)} e^{-i(m_1\psi_1 + \dots + m_{\kappa}\psi_{\kappa})} d\psi_1 \dots d\psi_{\kappa}$$

Функції $\mathbf{g}^{(n)}$ до третього наближення по $1/\xi$ мають вигляд [13-14]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}^{(1)} &= \frac{1}{\xi} \mathbf{X}(\bar{\mathbf{x}}, \psi), \\
\mathbf{g}^{(2)} &= \frac{1}{\xi^2} \sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right), \\
\mathbf{g}^{(3)} &= \frac{1}{\xi^3} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(1,j)} - \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \bar{x}^{(j)}} A^{(2,j)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(2,j)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(2)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)}} u^{(1,j)} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} - \sum_s \frac{\partial \mathbf{u}^{(1)}}{\partial \psi_s} \frac{\partial^2 \Omega_s}{\partial \bar{x}^{(j)} \partial \bar{x}^{(k)}} u^{(1,j)} u^{(1,k)} \right) \right]. \quad (1.21)
\end{aligned}$$

При рішенні задачі руху обмежимося лінійним наближенням по $1/\xi$.

З огляду на, що $\cos \bar{p}_{0\alpha} = (\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$ й $\sin \bar{p}_{0\alpha} = ((-i)\exp(ip_{0\alpha})/2 + c.c.)$ знаходимо за допомогою функцій $\mathbf{u}^{(n)}$ і $\mathbf{A}^{(n)}$, відповідно рішення рівнянь (1.19) і (1.21). У підсумку одержуємо $u_\tau^{(n)} = 0$ для будь-яких n ; $A_\tau^{(1)} = 1$, $A_\tau^{(n)} = 0$ для $n > 1$; $A_{v_z}^{(1)} = 0$, $A_{v_\perp}^{(1)} = 0$, $A_{v_{p_0}}^{(1)} = 0$. Співвідношення для осциляторної компоненти швидкості $\tilde{v}_{\alpha x}^{(1)}$ в першому наближенні записуються у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{\chi,m})} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[\frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \left(\frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha\perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H,\alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{3,m} \pm p_0)} &= \frac{(\pm 1)e \bar{v}_{\alpha\perp} \bar{v}_{\alpha z}}{m_e \bar{\gamma}_\alpha 2c^2} \sum_{m=1}^N \left[\frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \times \left(\frac{\omega_{H,\alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha,3,m} \pm ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{\chi,m} \pm 2p_0)} &= \frac{(\mp 1)e \bar{v}_{\alpha\perp}^2}{m_e \bar{\gamma}_\alpha 8c^2} (i\omega_{H,\alpha} \pm 2) \times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[\frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1 \pm s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} \pm \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} \pm 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\
\frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{3,m})} &= \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{1,m} \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{2,m} \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha x}}^{(1)(p_{3,m} \pm 2p_0)} = 0.
\end{aligned}$$

Аналогічно одержуємо вираз в першому наближенні для осциляторної компоненти швидкості $\tilde{v}_{\alpha y}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{\chi,m})} &= \frac{(-1)e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[\frac{E_{\chi y,m}(\bar{\tau})}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} + s_\chi \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \left(\frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} - \frac{\bar{v}_{\alpha\perp}^2}{2c^2} (1 - i\omega_{H,\alpha} s_\chi) \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m}) + c.c. \right], \\ \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{3,m\pm p_0})} &= \frac{(\mp 1)e \bar{v}_{\alpha\perp} \bar{v}_{\alpha z}}{m_e \bar{\gamma}_\alpha 2c^2} \sum_{m=1}^N \left[\frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \times \left(\frac{\omega_{H,\alpha}}{2\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} - 1 \right) \exp(ip_{\alpha,3,m} \pm ip_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\ \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{\chi,m\pm 2p_0})} &= \frac{(\pm 1)e \bar{v}_{\alpha\perp}^2}{m_e \bar{\gamma}_\alpha 8c^2} (i\omega_{H,\alpha} \pm 2) \times \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[\frac{E_{\chi y,m}(\bar{\tau})(1 \pm s_\chi)}{(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} \pm \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \exp(ip_{\alpha,\chi,m} \pm 2p_{\alpha 0}) + c.c. \right], \\ \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{3,m})} &= \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{1,m\pm p_0})} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{2,m\pm p_0})} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha y}}^{(1)(p_{3,m\pm 2p_0})} = 0. \end{aligned}$$

Осциляторні компоненти швидкості $\tilde{v}_{\alpha z}^{(1)}$ в першому наближенні мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{3,m})} &= \frac{e}{m_e \bar{\gamma}_\alpha} \left(1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) \sum_{m=1}^N \left[\frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right], \\ \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{\chi,m\pm p_0})} &= \frac{e \bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e \bar{\gamma}_\alpha} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[\frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1 \pm s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} \pm \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \left(\left(1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m} \pm ip_{\alpha 0}) + c.c. \right] \\ &\quad \times \left(\left(1 - \frac{\bar{v}_{\alpha z}^2}{c^2} \right) - \frac{\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m}}{\omega_{\chi,m}} \right) \exp(ip_{\alpha,\chi,m} \pm ip_{\alpha 0}) + c.c. \Big], \\ \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{1,m})} &= \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{2,m})} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{3,m\pm p_0})} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{1,m\pm 2p_0})} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{2,m\pm 2p_0})} = \frac{1}{\xi} u_{v_{\alpha z}}^{(1)(p_{3,m\pm 2p_0})} = 0. \end{aligned}$$

Осциляторні функції релятивістського фактора в першому наближенні $\tilde{\gamma}_\alpha^{(1)}$ мають вигляд

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{3,m})} = \frac{e\bar{v}_{\alpha z}}{m_e c^2} \sum_{m=1}^N \left[\frac{E_{3z,m}(\bar{\tau})}{i\bar{\Omega}_{\alpha,3,m}} \exp(ip_{\alpha,3,m}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{\chi,m} \pm p_0)} = \frac{e\bar{v}_{\alpha\perp}}{2m_e c^2} \sum_{m=1}^N \sum_{\chi=1}^2 \left[\frac{E_{\chi x,m}(\bar{\tau})(1 \pm s_\chi)}{i(\bar{\Omega}_{\alpha,\chi,m} \pm \bar{\Omega}_{\alpha 0})} \times \exp(ip_{\alpha,\chi,m} \pm ip_{\alpha 0}) + c.c. \right],$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{1,m})} + \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{2,m})} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{3,m} \pm p_0)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{1,m} \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{2,m} \pm 2p_0)} = \frac{1}{\xi} \mathbf{u}_{\gamma\alpha}^{(1)(p_{3,m} \pm 2p_0)} = 0.$$

Де *c.c.* – комплексно спряжена (complex conjugate) величина; $E_{\chi x,m}$, $E_{\chi y,m}$ – комплексні амплітуди x - і y - компонент m -х гармонік електромагнітних хвиль ($\chi = 1$ – хвиля сигналу, $\chi = 2$ – хвиля накачування); $E_{3z,m}$ – m -а гармоніка хвилі просторового заряду; $\eta_1 = E_{1y,1}/(iE_{1x,1}) = \pm 1$, $\eta_2 = E_{2y,1}/(iE_{2x,1}) = \pm 1$ – знакові функції, що характеризують напрямок обертання електромагнітних хвиль.

Таким чином, використовуючи рішення (1.18) і (1.20), а також функції (1.21) одержуємо розв'язки для системи (1.16), а також для постійних компонент (1.17) у рамках лінійного наближення по $1/\xi$. Дані рішення, на відміну від рішень отриманих із заміною (1.14) (див. [13]), можна відразу використовувати при рішенні польової задачі. Таким чином, загальний алгоритм розв'язку самоузгодженої задачі значно спрощується, завдяки використанню запропонованої заміни (1.14) (замість стандартної (1.13)) у задачі руху.

2 МНОЖИННІ РЕЗОНАНСНІ ВЗАЄМОДІЇ В ПРОЛІТНІЙ СЕКЦІЇ ДСЛВЕ Н-УБІТРОННОГО ТИПУ ІЗ ГВИНТОВИМ ЕЛЕКТРОННИМ ПУЧКОМ

2.1 Модель мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ клістронного типу з гвинтовим РЕП

Розглядаємо наступну модель мультигармонічного ДСЛВЕ клістронного типу із гвинтовим двопотоковим електронним пучком (рис. 2.1). Такий ДСЛВЕ складається із трьох секцій: секції модуляції I, пролітної секції II і прикінцевої секції III. Уздовж осі приладу Z (рис. 2.1) рухається гвинтовий двопотоковий РЕП 1, послідовно проходячи через всі секції пристрою. Гвинтовий двопотоковий РЕП знаходиться у фокусувальному магнітному полі з індукцією \mathbf{B}_0 , яке спрямоване уздовж осі Z приладу. Пучок 1 складається із двох парціальних взаємно-проникних гвинтових електронних потоків із близькими за значенням парціальними релятивістськими швидкостями v_1, v_2 ($v_1 - v_2 \ll v_1, v_2$). Швидкості електронів цих пучків спрямовані під кутом α відносно фокусувального магнітного поля з індукцією \mathbf{B}_0 . Плазмові частоти парціальних електронних пучків приймаємо однаковими $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$ виходячи з того, що найбільші інкременти зростання двопотокової нестійкості у гвинтових двопотокових РЕП реалізуються саме за цих умов [49]. Приймаємо, що просторовий заряд пучка є скомпенсованим, у поперечній площині пучок є однорідним, тепловим розкидом і зіткненнями електронів нехтуємо.

На вхід секції модуляції I, у якій створене періодичне реверсивне поперечне циркулярно-поляризоване Н-убітронне магнітне поле з індукцією $\mathbf{B}_{2,I}$ (позиція 2 на рис. 2.1), подається монохроматичний електромагнітний сигнал з напруженістю електричного поля $\mathbf{E}_{1,I}$, частотою $\omega_{1,I}$ й хвильовим числом $k_{1,I}$. Основним призначенням секції модуляції I є збудження у гвинтовому двопотоковому РЕП 1

хвилі просторового заряду. У поданій роботі вивчаємо випадок, коли на вхід модулятора I подається монохроматичний сигнал $\{\omega_{1,1}, k_{1,1}\}$. Тому магнітне поле модулятора з індукцією $\mathbf{B}_{2,1}$ в секції I вибираємо монохроматичним з періодом ондуляції $\lambda_{2,1}$. У результаті трихвильового параметричного резонансу монохроматичної хвилі сигналу $\{\omega_{1,1}, k_{1,1}\}$ з монохроматичним магнітним полем модулятора I у двопотокових електронному пучку збуджується хвиля просторового заряду з напруженістю електричного поля $\mathbf{E}_{3,1}$, частотою $\omega_{3,1}$ й хвильовим числом $k_{3,1}$.

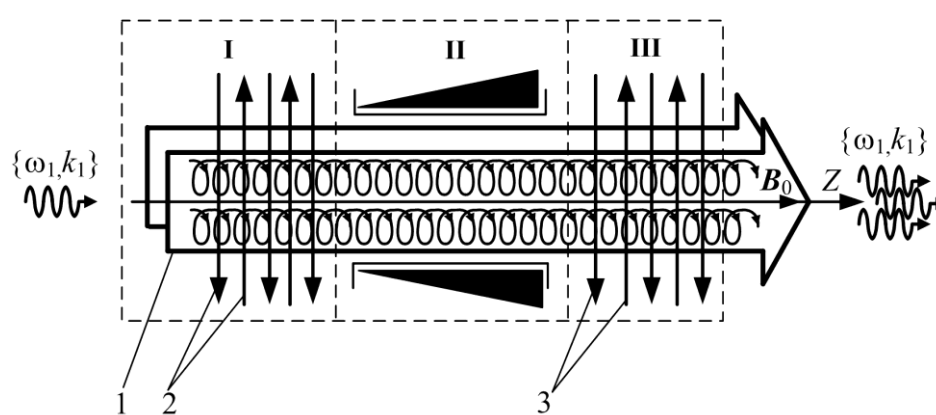


Рисунок 2.1 – Схема мультигармонічного ДСЛВЕ-клістрона Н-убітронного типу із гвинтовим двопотоковим РЕП

Далі промодульований електронний пучок 1 входить у пролітну секцію II, електромагнітна хвиля сигналу $\{\omega_{1,1}, k_{1,1}\}$ на вході в цю секцію поглинається. Основним призначенням пролітної секції II є підсилення й інтенсивне збудження вищих гармонік ХПЗ як за рахунок множинних трихвильових резонансних взаємодій гармонік ХПЗ, так і за рахунок двопотокової нестійкості. Для реалізації ефективного збудження вищих гармонік ХПЗ частоту першої гармоніки ХПЗ $\omega_{3,1}$ вибираємо багато меншою критичної частоти двопотокової нестійкості ω_{cr} . Завдяки цьому всі гармоніки, частота яких менше критичної частоти ω_{cr} будуть підсилюватися за рахунок двопотокової нестійкості. Також урахуємо, що хвилі ХПЗ, які зростають за рахунок двопотокової нестійкості, характеризуються лінійною дисперсійною залежністю. Тому між гармоніками хвиль ХПЗ виникає велика

кількість трихвильових параметричних резонансних взаємодій, про які говоримо як про множинні резонансні взаємодії. Це призводить до інтенсивного збудження й підсилення гармонік хвилі ХПЗ. Відзначимо, що у випадку вибору частоти першої гармоніки ХПЗ $\omega_{3,1}$ багато меншої критичної частоти двопотокової нестійкості ω_{cr} інкремент зростання гармонік ХПЗ буде збільшуватися зі збільшенням номера гармоніки аж до оптимальної частоти $\omega_{opt} = \sqrt{3/8} \cdot \omega_{cr}$, яка відповідає максимальному інкременту зростання [49]. Через це в пролітній секції II стає можливим формування ХПЗ із широким частотним спектром і аномальною ділянкою, у якій більш високі гармоніки мають більші амплітуди.

Після проходження пролітної секції II гвинтовий РЕП, у якому збуджені вищі гармоніки ХПЗ, спрямовується на вхід прикінцевої секції III. Основним призначенням прикінцевої секції III є перетворення мультигармонічної хвилі просторового заряду в потужну мультигармонічну електромагнітну хвилю сигналу. Для цього у прикінцевій секції створене мультигармонічне H-убітронне поле з індукцією $\mathbf{B}_{2,III}$. Завдяки параметричним резонансам між гармоніками хвилі ХПЗ і гармоніками мультигармонічного поля накачки $\mathbf{B}_{2,III}$ відбувається генерація мультигармонічного електромагнітного сигналу з напруженістю $\mathbf{E}_{1,III}$ і його підсилення. Фактично, тут відбувається зворотне перетворення енергії мультигармонічної хвилі ХПЗ в енергію мультигармонічного електромагнітного сигналу $\mathbf{E}_{1,III}$. При цьому для кожної з гармонік мультигармонічної ХПЗ виконується умова параметричного резонансу з відповідними гармоніками поля накачки й електромагнітного сигналу.

Змінюючи параметри полів накачки $\mathbf{B}_{2,III}$, $\mathbf{B}_{2,I}$, частоту першої гармоніки вхідного сигналу $\mathbf{E}_{1,I}$, довжину пролітної секції, можемо керувати формою спектра ХПЗ, а значить і формою спектра потужного мультигармонічного електромагнітного сигналу на виході ДСЛВЕ, у тому числі, і створювати ультракороткий кластер електромагнітного поля.

Порівнюючи секцію модуляції електронного пучка й прикінцеву секцію, бачимо, що з формальної точки зору їх можна вважати подібними. Головні відмінності між ними стосуються форми спектра накачки та граничних умов. Якщо на вході в секцію модуляції амплітуди всіх гармонік ХПЗ дорівнюють нулю, а амплітуда, принаймні, однієї з гармонік сигналу задається ненульовою, то в прикінцевій секції ми маємо зворотну ситуацію: на вході ненульовими задаються гармоніки ХПЗ, тоді як всі гармоніки сигналу дорівнюють нулю. Тому як для секції модуляції, так і для прикінцевої секції використовуємо одну і ту саму теоретичну модель, у якій, у загальному випадку, поля електромагнітного сигналу, накачки й ХПЗ подаємо мультигармонічними

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_1 &= \sum_{m=1}^N [(E_{1x,m} \mathbf{e}_x + E_{1y,m} \mathbf{e}_y) \exp(ip_{1,m}) + c.c.], \\
 \mathbf{B}_1 &= \sum_{m=1}^N [(B_{1y,m} \mathbf{e}_y + B_{1x,m} \mathbf{e}_x) \exp(ip_{1,m}) + c.c.], \\
 \mathbf{B}_2 &= \sum_{m=1}^N [(B_{2y,m} \mathbf{e}_y + B_{2x,m} \mathbf{e}_x) \exp(ip_{2,m}) + c.c.], \\
 \mathbf{E}_3 &= \sum_{m=1}^N [E_{3z,m} \mathbf{e}_z \exp(ip_{3,m}) + c.c.].
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

У співвідношеннях (2.1) $E_{1x,m}$, $E_{1y,m}$, $E_{1,m}$, $B_{1y,m}$, $B_{1x,m}$, $B_{2y,m}$, $B_{2x,m}$, $E_{3z,m}$ – проекції амплітуд m -х гармонік відповідних полів, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орти осей X , Y і Z ;

$$p_{\chi,m} = \omega_{\chi,m} \cdot t - k_{\chi,m} \cdot z = m\omega_{\chi,1} \cdot t - k_{\chi,m} \cdot z \tag{2.2}$$

їх фази (індекс χ приймає значення 1, 2 і 3); $\omega_{\chi,m} = m\omega_{\chi,1}$ – їх частоти ($\omega_{2,1} = 0$) і $k_{\chi,m}$ – хвильові числа. З огляду на те, що досліджувана система також знаходиться

у постійному поздовжньому фокусувальному магнітному полі $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, результуючі електричні й магнітні поля в ДСЛВЕ запишемо у вигляді

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (2.3)$$

2.2 Множинні взаємодії у пролітній секції ДСЛВЕ

Розглядаємо наступну модель двопотокового гвинтового електронного пучка в пролітній секції ДСЛВЕ, описаного у розділі 2.1. Гвинтовий пучок містить два парціальних взаємопроникних електронних потоки з близькими парціальними релятивістськими швидкостями v_1, v_2 ($v_1 - v_2 \ll v_1, v_2$). Пучок рухається під кутом α до фокусувального магнітного поля \mathbf{B}_0 по гвинтовій траєкторії. Плазмові частоти парціальних пучків приймаємо однаковими $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$, просторовий заряд пучка вважаємо скомпенсованим іонним фоном.

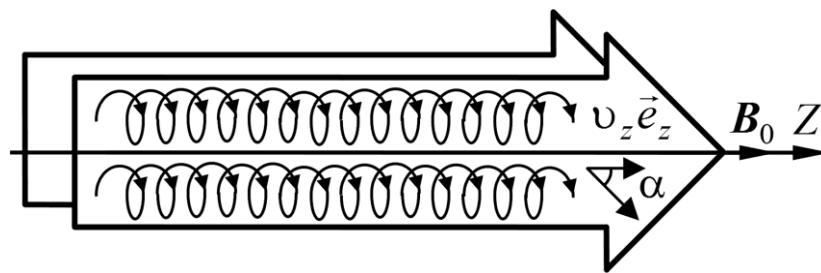


Рисунок 2.2 — Теоретична модель пучка у пролітній секції ДСЛВЕ

Електричне поле ХПЗ, що визначає динаміку двопотокової нестійкості, приймаємо мультигармонічним

$$E_z = \sum_{m=1}^N [E_m \exp(ip_m) + c.c.] \quad (2.4)$$

де N – кількість гармонік, які враховуємо для вирішення задачі;

$$p_m = \omega_m t - k_m z - \text{фаза},$$

$\omega_m = m \cdot \omega_1$ – частота m -ї гармоніки ХПЗ,

k_m – її хвильове число,

вісь Z спрямована уздовж фокусуєчого магнітного поля \mathbf{B}_0 .

Для теоретичного аналізу множинних резонансних взаємодій у пролітній секції ДСЛВЕ з гвинтовим електронним пучком використовуємо квазігідродинамічне рівняння [1, 3, 9], рівняння неперервності й рівняння Максвелла. Застосовуємо ієрархічний підхід до теорії коливань і хвиль [1, 3]. У підсумку отримуємо кубічну нелінійну систему m диференціальних рівнянь для комплексних амплітуд гармонік напруженості електричного поля ХПЗ:

$$C_{2,m} \frac{d^2 E_m}{dz^2} + C_{1,m} \frac{dE_m}{dz} + D_m E_m = C_{3,m} \left\langle E_z \cdot \sum_{m'=1}^N [E_{m'} \exp(ip_{m'}) / (im') + c.c.] \right\rangle_{p_m} + F_m \quad (2.5)$$

де

$$D_m(\omega_m, k_m) \equiv -ik_m \left(1 - \sum_{q=1}^2 \frac{\omega_p^2 (1 - (v_{qz}/c)^2)}{(\omega_m - k_m v_{qz})^2 \gamma_q} \right) \quad (2.6)$$

$$C_{1,m} = \partial D_m / \partial(-ik_m), \quad C_{2,m} = \partial^2 D_m / \partial(-ik_m)^2 / 2, \quad \langle \dots \rangle_{p_m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dots \exp(-ip_m)) dp_m,$$

F_m — функції, що враховують кубічно-нелінійні доданки, які, у тому числі, пов'язані із множинними параметричними резонансними взаємодіями в досліджуваній системі.

Вибираємо параметри системи так, щоб виконувались умови для двопотокової нестійкості [1-7, 9]. У цьому випадку дисперсійне рівняння для ХПЗ у гвинтовому двопотоковому електронному пучку

$$D_m(\omega_m, k_m) \equiv -ik_m \left(1 - \sum_{q=1}^2 \frac{\omega_p^2 (1 - (v_{qz}/c)^2)}{(\omega_m - k_m v_{qz})^2 \gamma_q} \right) = 0 \quad (2.7)$$

буде мати комплексні корені. Наближений аналітичний розв'язок рівняння (2.7) для гвинтового релятивістського двопотокового електронного пучка можна знайти аналогічно, як і для випадку прямолінійного пучка (см., наприклад, [1]). Розв'язок шукаємо як

$$k_m = \omega_m / v_{0z} + i\Gamma_m \quad (2.8)$$

де $v_{0z} = (v_{1z} + v_{2z})/2$,

$i\Gamma_m$ – нелінійна уявна добавка до хвильового числа ХПЗ. Підставляємо (2.8) в (2.7), виконуємо нескладні алгебраїчні перетворення й знаходимо наближений вираз для цієї добавки

$$i\Gamma_m \approx \pm \frac{\omega_p \sqrt{1 - (v_{0z}/c)^2}}{\gamma_0 v_{0z}} \times \left\{ 1 + \frac{\omega_m^2 \delta^2 \gamma_0}{\omega_p^2 \sqrt{1 - (v_{0z}/c)^2}} \pm \sqrt{1 + \frac{4\omega_m^2 \delta^2 \gamma_0}{\omega_p^2 \sqrt{1 - (v_{0z}/c)^2}}} \right\}^{1/2}. \quad (2.9)$$

У формулі (2.9) $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - (v_0/c)^2}$, $v_0 = (v_1 + v_2)/2$, $\delta = (v_1 - v_2)/(v_1 + v_2)$.

Зі співвідношення (2.9) випливає, якщо частота гармоніки ХПЗ ω_m буде менше критичної частоти двопотокової нестійкості у гвинтовому двопотоковому електронному пучку

$$\omega_{cr} = \frac{\sqrt{2}\omega_p}{\delta} \sqrt{\frac{1 - (v_{0z}/c)^2}{\gamma_0}} = \frac{\sqrt{2}\omega_p}{\delta} \sqrt{\frac{1 - (v_0 \cos(\alpha)/c)^2}{\gamma_0}}, \quad (2.10)$$

то дві хвилі будуть характеризуватися комплексним хвильовим числом k (у співвідношенні (2.10) використовували, що $v_{0z} = v_0 \cos \alpha$). Одна із цих хвиль буде експоненціально зростати (зростаюча хвиля). Для неї величина Γ_m (2.9) має фізичний зміст інкременту зростання m -ї гармоніки ХПЗ. Інша хвиля буде експоненціально загасати (загасаюча хвиля). Через те, що амплітуда загасаючої хвилі буде швидко зменшуватися, то цю хвилю далі не будемо враховувати. Нескладно, аналізуючи (2.9), знайти оптимальну частоту для гвинтового двопотокового електронного пучка

$$\omega_{opt} = \frac{\sqrt{3}\omega_p}{2\delta} \sqrt{\frac{1 - (v_{0z}/c)^2}{\gamma_0}} = \omega_{cr} \sqrt{\frac{3}{8}} \quad (2.11)$$

яка відповідає максимальному інкременту зростання

$$\Gamma(\omega_{opt}) = \frac{\omega_p}{2v_{0z}} \sqrt{\frac{1 - (v_{0z}/c)^2}{\gamma_0}} = \frac{\omega_p}{2v_{0z}} \sqrt{\frac{1 - (v_0 \cos \alpha / c)^2}{\gamma_0}} \quad (2.12)$$

Аналізуючи формули (2.10)-(2.12), можемо переконатися в тому, що при збільшенні кута вльоту електронного пучка α збільшуються як критична частота (2.10), так і максимальний інкремент зростання (2.12). Таким чином, у гвинтових двопотокових електронних пучках розвиток двопотокової нестійкості відбувається з більш високими інкрементами зростання, ніж у прямолінійних пучках. Тому використання гвинтових пучків у двопотокових супергетеродинних лазерах на вільних електронах приводить до збільшення темпів підсилення електромагнітних хвиль. З вище викладеного аналізу випливає, що таке підвищення темпів підсилення електромагнітного сигналу у двопотокових СЛВЕ пов'язане зі збільшенням інкрементів двопотокової нестійкості у гвинтових релятивістських електронних пучках. Також слід зазначити, що для гвинтових електронних пучків як оптимальна частота двопотокової нестійкості, так і критична частота є більш високими порівняно із прямолінійними електронними пучками. Це означає, що двопотокові СЛВЕ із гвинтовими електронними пучками можуть працювати на більш високих частотах, ніж СЛВЕ, які використовують прямолінійні пучки.

Зі співвідношення (2.8) також випливає, що у гвинтовому двопотоковому електронному пучку для гармонік ХПЗ, частоти яких менші за критичну частоту $\omega < \omega_{cr}$ будуть реалізовуватися множинні трихвильові параметричні резонанси [1, 3-5]. Виникнення множинних параметричних резонансів пов'язане з тим, що, як випливає зі співвідношення (2.8), для зростаючої хвилі зв'язок між дійсною частиною хвильового числа γ частотою є лінійним

$$\text{Re}(k) = \omega / v_{0z} \quad (2.13)$$

Це означає, якщо для m -ї гармоніки частота буде $\omega_m = m \cdot \omega_1$ в m разів більше частоти першої гармоніки ω_1 , то її дійсна частина хвильового числа m -ї гармоніки $\text{Re}(k_m)$ теж буде в m разів більше дійсної частини хвильового числа першої гармоніки $\text{Re}(k_1)$ (за умови $\omega_m < \omega_{cr}$):

$$\text{Re}(k_m) = \omega_m / v_{0z} = m\omega_1 / v_{0z} = m\text{Re}(k_1)$$

Таким чином, фаза m -ї гармоніки (вона визначається дійсною частиною хвильового числа)

$$p_m = \omega_m t - \operatorname{Re}(k_m)z = m \cdot \omega_1 t - m \cdot \operatorname{Re}(k_1)z = m \cdot p_1 \quad (2.14)$$

буде в m разів більше фази першої гармоніки. Це призводить до того, що у двопотоковій системі для великої кількості гармонік ХПЗ, які задовольняють умові $\omega < \omega_{cr}$, будуть виконуватися умови трихвильового параметричного резонансу

$$p_{m_1} = p_{m_2} + p_{m_3} \quad \text{або} \quad m_1 = m_2 + m_3, \quad (2.15)$$

де m_1, m_2, m_3 – цілі числа. Умова (2.15) реалізується за участю величезної кількості гармонік, наприклад, $5=2+3$, $5=7-2$, $5=9-4$, $4=2+2$ і так далі. Тому про ситуацію, що створилася, говоримо як про таку, у якій реалізуються множинні параметричні трихвильові резонанси.

Таким чином, завдяки лінійній дисперсійній залежності за умови $\omega < \omega_{cr}$ в системі реалізуються множинні параметричні резонанси між гармоніками ХПЗ. У результаті величезної кількості трихвильових параметричних резонансних взаємодій відбувається формування ХПЗ із широким мультигармонічним спектром, у якому вищі гармоніки мають більш високі амплітуди, ніж нижчі гармоніки.

2.3 Підсилення мультигармонічної хвилі просторового заряду в пролітній секції двопотокового СЛВЕ з гвинтовим електронним пучком

Використовуючи систему рівнянь (2.5), (2.7), проведемо аналіз форми спектра мультигармонічної ХПЗ залежно від параметрів двопотокового релятивістського електронного пучка в кубічному нелінійному наближенні. Розглядаємо випадок, коли на вході в досліджувану систему ($z = 0$) збуджується тільки одна гармоніка ХПЗ. Частоту першої гармоніки ω_1 вибираємо набагато меншою за критичну частоту двопотокової нестійкості ω_{cr} . Тоді, як було сказано вище, завдяки параметричним резонансним взаємодіям у двопотоковому електронному пучку від-

бувається збудження й підсилення вищих гармонік. Також ці гармоніки будуть підсилюватися й через ефект двопотокової нестійкості. Так як інкременти підсилення, які визначаються двопотоковою нестійкістю, набагато більше за інкременти підсилення за рахунок трихвильового параметричного резонансу, то результуюче підсилення гармонік буде, по суті, визначатися інкрементами зростання двопотокової нестійкості Γ_m . У підсумку варто очікувати, що спектр гармонік, або ж залежність амплітуди гармоніки від частоти, при деякому значенні поздовжньої координати z буде визначатися залежністю інкременту зростання від частоти $\Gamma = \Gamma(\omega)$. Нескладно одержати наближені аналітичні рішення (2.7) [1, 39, 46], або ж вирішити рівняння (2.7) чисельно. Таким чином, аналізуючи залежність інкременту зростання від частоти $\Gamma = \Gamma(\omega)$, ми можемо одержати оцінку ширини спектра $\omega_{cr} - \omega_1$ мультигармонічної ХПЗ при різних параметрах двопотокового релятивістського електронного пучка. Далі ж, використовуючи кубічні нелінійні рівняння (2.5), (2.7) визначимо реальну ширину спектра мультигармонічної ХПЗ і рівні насичення для різних параметрів двопотокового релятивістського електронного пучка.

Використовуючи викладений вище підхід, проведемо аналіз залежності ширини спектра мультигармонічної ХПЗ від параметрів двопотокового релятивістського електронного пучка. З'ясуємо, при яких умовах можна одержати спектри мультигармонічної ХПЗ із найбільшою шириною. Проведемо дослідження залежності ширини спектра мультигармонічної ХПЗ від кута вльоту α гвинтового двопотокового релятивістського електронного пучка, середнього значення γ_0 й різниці релятивістських факторів $\Delta\gamma$, плазмової частоти парціальних пучків ω_p .

На рис. 3 показані залежності інкременту зростання Γ від частоти ω для двопотокового релятивістського пучка при різних кутах вльоту α , які отримані в результаті чисельного рішення дисперсійного рівняння (2.7). Параметри двопотокового електронного пучка: $\omega_p = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, середнє значення релятивістського фактора пучків $\gamma_0 = 4$, різниця парціальних релятивістських факторів пучків

$\Delta\gamma = 0.4$, частота першої гармоніки $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}$. Крива 1 відповідає випадку $\alpha_1 = 0^\circ$, крива 2 — випадку $\alpha_2 = 10^\circ$, крива 3 — випадку $\alpha_3 = 20^\circ$. З рис. 3 випливає, що для гвинтових двопотокових пучків зі збільшенням кута вльоту пучка α критична частота двопотокової нестійкості збільшується: $\omega_{\text{cr1}} < \omega_{\text{cr2}} < \omega_{\text{cr3}}$. Збільшується також і оптимальна частота ω_{opt} , що відповідає максимуму інкременту зростання: $\omega_{\text{opt1}} < \omega_{\text{opt2}} < \omega_{\text{opt3}}$. Критична частота $\omega_{\text{cr1}} = 3,2 \times 10^{12} \text{ c}^{-1}$ відповідає куту вльоту $\alpha_1 = 0^\circ$, $\omega_{\text{cr2}} = 3,8 \times 10^{12} \text{ c}^{-1}$ — куту $\alpha_2 = 10^\circ$, $\omega_{\text{cr3}} = 5,2 \times 10^{12} \text{ c}^{-1}$ — куту $\alpha_3 = 20^\circ$. Таким чином, при збільшенні кута вльоту від $\alpha_1 = 0^\circ$ до $\alpha_3 = 20^\circ$ критична частота збільшується в $\omega_{\text{cr3}}/\omega_{\text{cr1}} = 1,6$ рази. Як оцінку ширини спектра мультигармонічної ХПЗ можна прийняти різницю між критичною частотою ω_{cr} й частотою першої гармоніки ω_1 ($\omega_{\text{cr}} - \omega_1$). З рис. 3 випливає, що зі збільшенням кута вльоту α ширина спектра мультигармонічної ХПЗ буде збільшуватися. Це значить, що використання гвинтових двопотокових електронних пучків є кращим у мультигармонічних ЛВЕ, основним завданням яких є формування потужного електромагнітного сигналу із широким частотним спектром. Також із цього рисунка випливає, що зі збільшенням кута вльоту пучка α інкременти зростання збільшуються. Це значить, що темпи підсилення ХПЗ стають у гвинтових пучках більше, що має привести до зменшення довжин, при яких відбувається насичення.

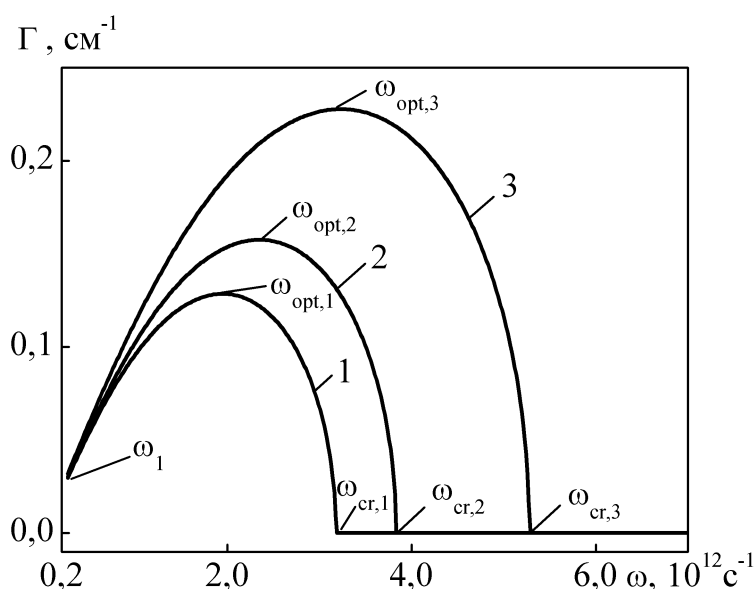


Рисунок 2.3 — Залежність інкременту зростання Γ від частоти ω для двопотокового релятивістського пучка при різних кутах вльоту α . Пучок має наступні па-

раметри: $\omega_p = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, $\gamma_0 = 4$, $\Delta\gamma = 0,4$. Частота першої гармоніки

$\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}$. Крива 1 відповідає випадку $\alpha_1 = 0^\circ$, крива 2 — випадку $\alpha_2 = 10^\circ$,

крива 3 — випадку $\alpha_3 = 20^\circ$.

На рис. 2.4 зображені залежності амплітуд напруженості електричного поля тридцяти гармонік ХПЗ від поздовжньої координати z для кута вльоту електронного пучка $\alpha = 0^\circ$ (криві 1) і $\alpha = 20^\circ$ (криві 2). Параметри пучка, при яких проводився розрахунок, такі ж, як і для рис. 2.3. На вході досліджуваної системи в обох випадках ХПЗ була монохроматичної із частотою $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}$. З рис. 2.4 випливає, що темпи підсилення гармонік напруженості електричного поля для гвинтового електронного пучка (криві 2) вище, ніж для прямолінійного електронного пучка (криві 1). Внаслідок цього насичення хвилі ХПЗ у гвинтових РЕП (криві 2) відбувається раніше, ніж у прямолінійних РЕП (криві 1). Також із цих рисунків випливає, що рівні насичення у випадку гвинтового електронного пучка (криві 2) в $\sim 2,5$ рази менше, ніж для прямолінійного пучка (криві 1).

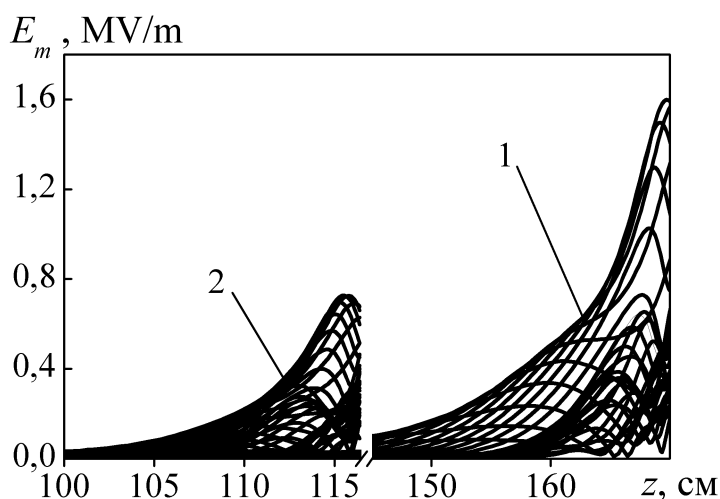


Рисунок 2.4 — Залежності амплітуд напруженості електричного поля гармонік ХПЗ від поздовжньої координати z для кута вльоту електронного пучка $\alpha = 0^\circ$ (криві 1) і $\alpha = 20^\circ$ (криві 2). Обчислення проводилися при таких же параметрах пучка, як і у випадку рис. 2.3.

Таким чином, двопотокові супергетеродинні ЛВЕ, що використовують гвинтові електронні пучки, завдяки більше високим темпам підсилення будуть мати менші поздовжні розміри в порівнянні із двопотоковими СЛВЕ, що використовують прямолінійні пучки.

2.4 Вплив параметрів гвинтового релятивістського електронного пучка на формування ХПЗ з широким частотним спектром

2.4.1 Вплив кута вльоту пучка на формування мультигармонічної ХПЗ

На рис. 2.5 *a* і 2.5 *b* представлені спектри мультигармонічної ХПЗ для кутів вльоту $\alpha_1 = 0^\circ$ й $\alpha_3 = 20^\circ$ для двопотокового РЕП, параметри якого відповідають випадку рис. 2.3, які отримані з кубічної нелінійної системи рівнянь (2.5). При розрахунках урахували 30 гармонік ХПЗ ($N = 30$). На вході в систему ($z = 0$) амплітуда першої гармоніки дорівнює 10 В/см, інші гармоніки дорівнюють нулю.

З порівняння рис. 2.5 *a* рис. 2.5 *b* випливає, що ширина спектра мультигармонічної ХПЗ у випадку гвинтового двопотокового РЕП більше, ніж для прямолі-

нійного електронного пучка. Відзначимо, частота, при якій амплітуда гармоніки мінімальна ω_{\min} , перевищує критичну частоту двопотокової нестійкості ω_{cr} як для випадку $\alpha_1 = 0^\circ$, так і для $\alpha_3 = 20^\circ$. Як впливає з рис. 2.5 *a* рис. 2.5 *b*, як реальну ширину частотного спектра варто брати різницю $\omega_{\min} - \omega_1$. Бачимо, при збільшенні кута вльоту пучка з $\alpha_1 = 0^\circ$ до $\alpha_3 = 20^\circ$ ширина спектра збільшується в $\sim 1,5$ рази.

Як і очікувалося, максимальні значення амплітуд гармонік ХПЗ в обох випадках характеризуються частотами ω_{opt} , які відповідають максимальним інкрементам зростання (см. рис. 2.3). Це свідчить про те, що при формуванні мультигармонічної ХПЗ ефект двопотокової нестійкості переважає над множинними резонансними взаємодіями.

З рис. 2.5 *a* впливає, що в спектрі мультигармонічної ХПЗ є ненульові гармоніки, частоти якої перевищують ω_{\min} . Ці гармоніки в даній області частот є невласними, виникають завдяки параметричному резонансу (інтерференції) поздовжніх хвиль. Інтерференційні складові також присутні й у спектрі гвинтового двопотокового РЕП (на рис. 2.5 *b* не показані).

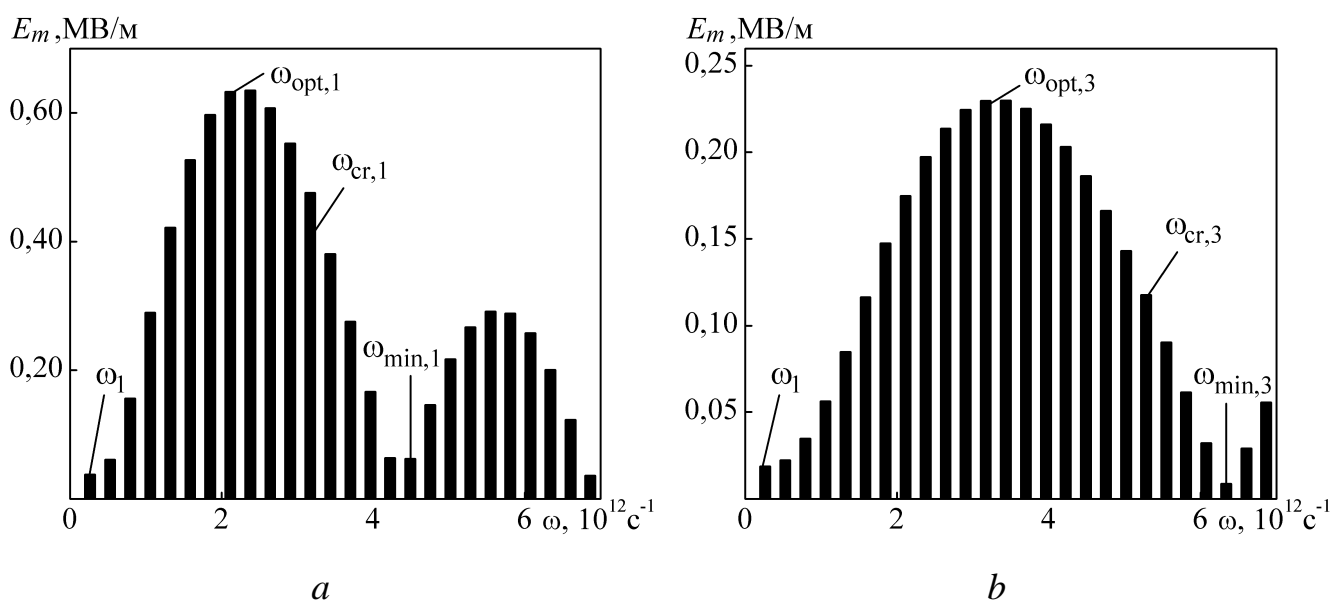


Рисунок 2.5 — Залежність амплітуд гармонік E_m мультигармонічної ХПЗ від частоти ω . На рис. 2.5 *a* представлений спектр ХПЗ у прямолінійному двопотоково-

му РЕП ($\alpha_1 = 0^\circ$) при $z = 162$ см, на рис. 2.5 *b* представлений спектр ХПЗ у гвинтовому двопотоковому РЕП ($\alpha_3 = 20^\circ$) при $z = 110$ см. Обчислення проводилися при таких же параметрах, як і у випадку рис. 2.3. На вході в систему ($z = 0$) амплітуда першої гармоніки ХПЗ дорівнює 10 В/см, інші гармоніки дорівнюють нулю. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}$.

2.4.2 Вплив середнього значення релятивістського фактора на формування мультигармонічної ХПЗ

Залежність інкременту зростання Γ від частоти ω при різних середніх значеннях релятивістського фактора (крива 1 відповідає $\gamma_{01} = 4$, крива 2 – випадку $\gamma_{02} = 5$, крива 3 – випадку $\gamma_{03} = 6$) представлена на рис. 2.6. Інші параметри такі ж, як і у випадку рис. 2.3, крива 1. Бачимо, що при збільшенні γ_0 відбувається збільшення ширини частотного спектра $\omega_{\text{cr}} - \omega_1$ мультигармонічної ХПЗ. Найбільше значення ширини спектра досягається при найбільшому значенні середнього релятивістського фактора, у цьому випадку при $\gamma_{03} = 6$ (рис. 2.6, крива 3, $\omega_{\text{cr}5} - \omega_1 = 5,8 \times 10^{12} \text{ c}^{-1}$). При цьому, як впливає з рис. 2.6, інкременти зростання зменшуються, що має приводити до збільшення довжини насичення ХПЗ.

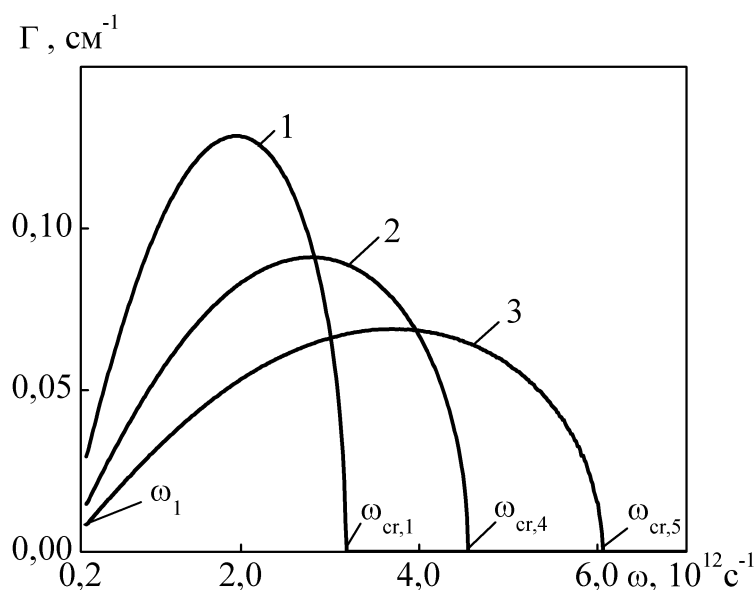


Рисунок 2.6 — Залежність інкременту зростання Γ від частоти ω для двопотокового релятивістського пучка при різних середніх значеннях релятивістського фактора γ_0 . Пучок має наступні параметри: $\omega_p = 6 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\Delta\gamma = 0,4$, кут вльоту $\alpha = 0^\circ$. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$. Крива 1 відповідає випадку $\gamma_{01} = 4$, крива 2 — випадку $\gamma_{02} = 5$, крива 3 — випадку $\gamma_{03} = 6$.

На рис. 2.7 представлений спектр мультигармонічної ХПЗ для двопотокового РЕП із $\gamma_{02} = 5$ при $z = 268 \text{ см}$, параметри пучка відповідають випадку кривої 2 на рис. 2.6. Спектр мультигармонічної ХПЗ для середнього релятивістського фактора $\gamma_{01} = 4$ при $z = 162 \text{ см}$, параметри пучка відповідають випадку кривої 1 на рис. 2.6, представлений на рис. 2.5 а. Для обох вище зазначених малюнків на вході в систему ($z = 0$) амплітуда першої гармоніки ХПЗ дорівнює 10 В/см , інші гармоніки дорівнюють нулю. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$.

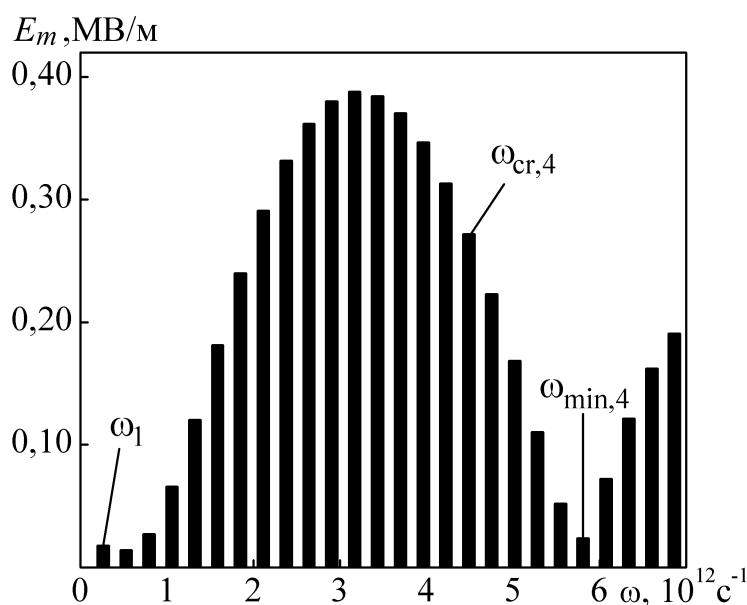


Рисунок 2.7 — Залежність амплітуд гармонік E_m мультигармонічної ХПЗ від частоти ω для двопотокового РЕП із $\gamma_{02} = 5$ при $z = 268 \text{ см}$, параметри пучка відповідають випадку кривої 2 на рис. 2.6 ($\omega_p = 6 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$, $\Delta\gamma = 0,4$, $\alpha = 0^\circ$, $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}$).

Порівнюючи рис. 2.5 *a* і рис. 2.7 можемо зробити висновок, що при збільшенні середнього релятивістського фактора двопотокового релятивістського електронного пучка з $\gamma_{01} = 4$ до $\gamma_{02} = 5$, ширина спектра $\omega_{\min} - \omega_1$ мультигармонічної ХПЗ у двопотоковому РЕП, як і очікувалося, збільшується на 30%. При цьому максимальний рівень амплітуди сигналу зменшується на 40%. Як і очікувалося, координата z , при якій формується спектр для системи з $\gamma_{02} = 5$, збільшується до $z = 268$ см у порівнянні з $z = 162$ см для системи с. $\gamma_{01} = 4$. Таким чином, збільшення релятивістського фактора двопотокового РЕП приводить до збільшення ширини спектра мультигармонічної ХПЗ. Формування такого спектра відбувається на більших довжинах системи.

2.4.3 Вплив різниці парціальних релятивістських факторів на формування мультигармонічної ХПЗ

На рис. 2.8 представлена залежність інкременту зростання Γ від частоти ω при різних значеннях різниці парціальних релятивістських факторів (крива 1 відповідає $\Delta\gamma_1 = 0,4$, крива 2 – $\Delta\gamma_1 = 0,3$, крива 3 – $\Delta\gamma_1 = 0,2$). Бачимо, при зменшенні $\Delta\gamma$ пучка відбувається збільшення ширини частотного спектра. При цьому максимальне значення інкременту зростання залишається практично однаковим, тобто формування мультигармонічних спектрів повинне відбуватися на сумірних довжинах.

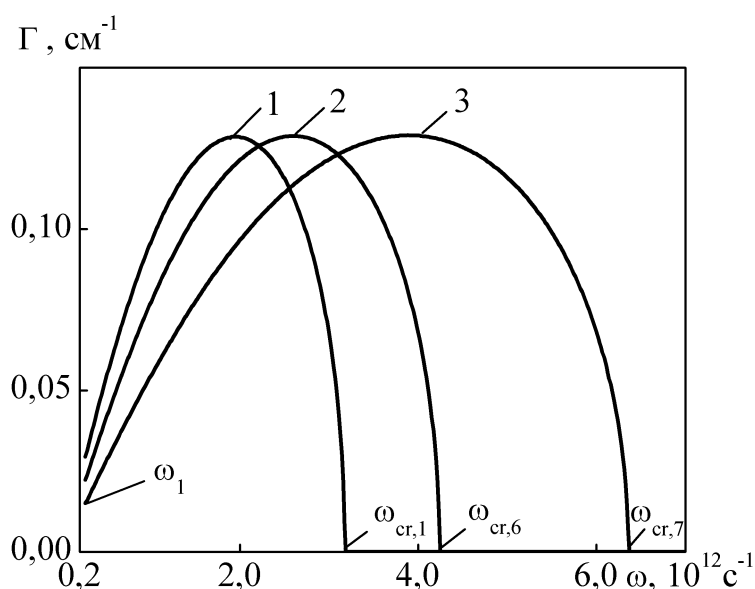


Рисунок 2.8 — Залежність інкременту зростання Γ від частоти ω для двопотокового релятивістського пучка при різних значеннях різниці парціальних релятивістських факторів $\Delta\gamma$. Пучок має наступні параметри: $\omega_p = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, $\gamma_0 = 4$, кут вильоту $\alpha = 0^\circ$. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}$. Крива 1 відповідає випадку $\Delta\gamma_1 = 0,4$, крива 2 — випадку $\Delta\gamma_2 = 0,3$, крива 3 — випадку $\Delta\gamma_3 = 0,2$.

Спектр мультигармонічної ХПЗ для двопотокового РЕП із $\Delta\gamma_3 = 0,2$ при $z = 212 \text{ см}$ представлений на рис. 2.9. Параметри пучка для цього спектра відповідають випадку кривої 3 на рис. 2.8. Спектр мультигармонічної ХПЗ пучка з різницею релятивістських факторів $\Delta\gamma_1 = 0,4$ при $z = 162 \text{ см}$ представлена на рис. 2.5 *a* (параметри пучка відповідають випадку кривої 1 на рис. 2.8). Як і очікувалося, ширина спектра $\omega_{\text{min},7} - \omega_1$ при $\Delta\gamma_3 = 0,2$ (рис. 2.9) більше в 1,6 рази в порівнянні із шириною спектра $\omega_{\text{min},1} - \omega_1$ при $\Delta\gamma_4 = 0,4$. Таким чином, зменшення різниці релятивістських факторів приводить до істотного збільшення ширини мультигармонічної ХПЗ. Також з порівняння рис. 2.9 і рис. 2.5 *a* випливає, що рівень насичення при зменшенні різниці релятивістських факторів до $\Delta\gamma_3 = 0,2$ зменшується майже в 3 рази. Також відзначимо, що довжина, при якій відбувається насичення ХПЗ, для пучка зі $\Delta\gamma_3 = 0,2$ збільшується в 1,3 рази.

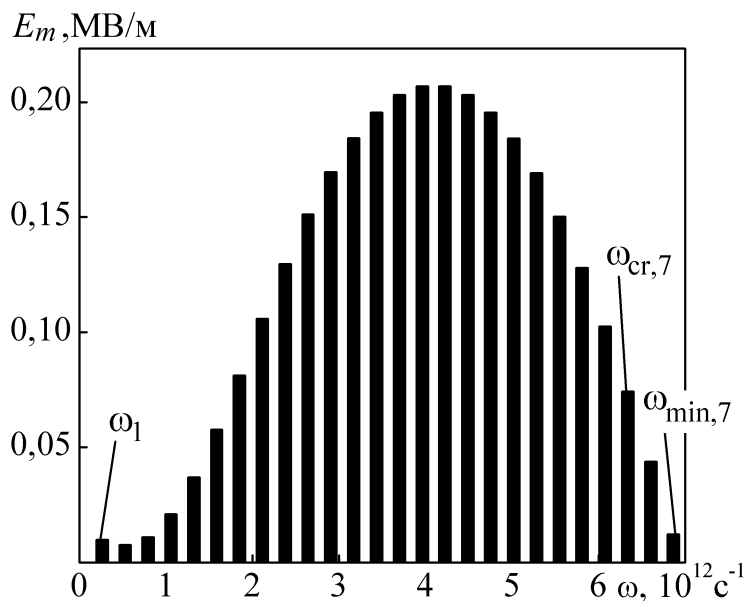


Рисунок 2.9 — Залежність амплітуд гармонік E_m мультигармонічної ХПЗ від частоти ω для двопотокового РЕП із $\Delta\gamma_3 = 0,2$ при $z = 212$ см, параметри пучка відповідають випадку кривої 3 на рис. 2.8 ($\omega_p = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, $\gamma_0 = 4$, $\alpha = 0^\circ$,

$$\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}).$$

2.4.4 Вплив середнього значення плазмової частоти на формування мультигармонічної ХПЗ

На рис. 2.10 представлена залежність інкременту зростання Γ від частоти ω при різних значеннях парціальної плазмової частоти (крива 1 відповідає випадку $\omega_{p1} = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, крива 2 — випадку $\omega_{p2} = 8 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, крива 3 — випадку $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$). Інші параметри такі ж, як і у випадку рис. 2.3, крива 1. Бачимо, що при збільшенні ω_p відбувається збільшення ширини частотного спектра $\omega_{cr} - \omega_1$ мультигармонічної ХПЗ. Найбільше значення ширини спектра досягається при найбільшому значенні парціальної плазмової частоти, у цьому випадку при $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ (рис. 2.10, крива 3). При цьому, як випливає з рис. 2.10, інкременти зростання збільшуються, що має приводити до зменшення довжини насичення ХПЗ.

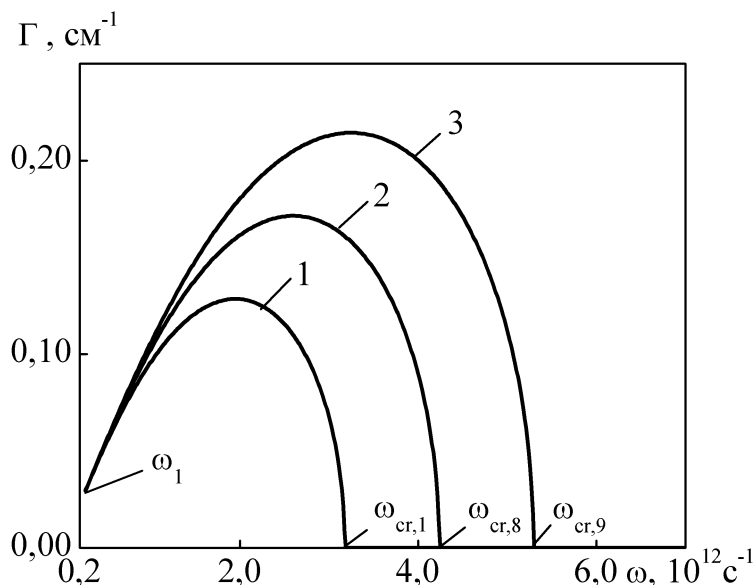


Рисунок 2.10 — Залежність інкременту зростання Γ від частоти ω для двопотокового релятивістського пучка при різних парціальних плазмових частотах ω_p . Пучок має наступні параметри: $\gamma_0 = 4$, $\Delta\gamma = 0,4$ кут вльоту $\alpha = 0^\circ$. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ c}^{-1}$. Крива 1 відповідає випадку $\omega_{p1} = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, крива 2 — випадку $\omega_{p2} = 8 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$, крива 3 — випадку $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$.

Спектр мультигармонічної ХПЗ для двопотокового РЕП із $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ при $z = 149 \text{ см}$ представлений на рис. 2.11. Параметри пучка для цього спектра відповідають випадку кривої 3 на рис. 2.10. Спектр мультигармонічної ХПЗ пучка з парціальними частотами $\omega_{p1} = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ при $z = 162 \text{ см}$ представлений на рис. 2.5 *a* (параметри пучка відповідають випадку кривої 1 на рис. 2.10). Як і очікувалося, ширина спектра $\omega_{\text{min},9} - \omega_1$ при $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ (рис. 2.11) більше в 1,5 рази в порівнянні із шириною спектра $\omega_{\text{min},1} - \omega_1$ при $\omega_{p1} = 6 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$. Таким чином, збільшення парціальної плазмової частоти двопотокового РЕП приводить до істотного збільшення ширини мультигармонічної ХПЗ. Також з порівняння рис. 2.11 і рис. 2.5 *a* випливає, що рівень насичення при збільшенні парціальної плазмової частоти до $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ c}^{-1}$ збільшується в 1,3 рази. Також відзначимо, що

довжина, при якій відбувається насичення ХПЗ, для пучка зі $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ зменшується в 1,1 рази.

Таким чином, для одержання мультигармонічних хвиль просторового заряду із широким частотним спектром варто використовувати щільні, високоенергетичні парціальні електронні пучки, що характеризуються близькими релятивістськими факторами.

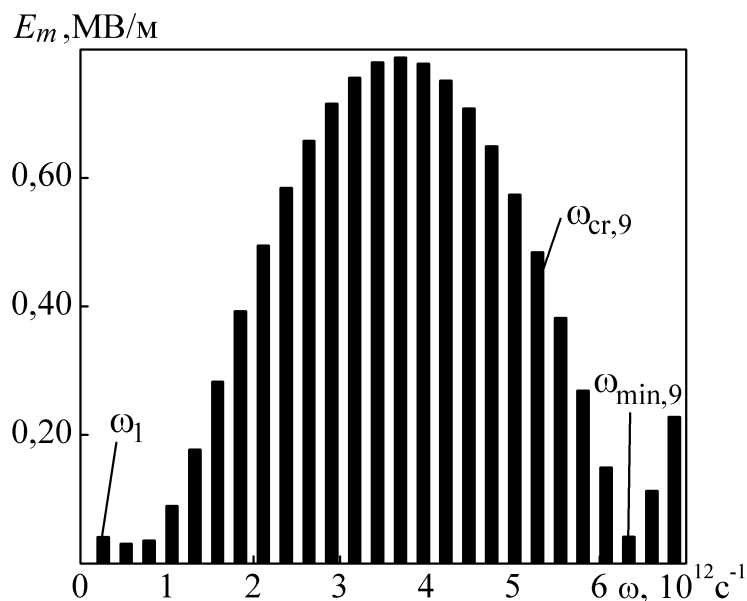


Рисунок 2.11 — Залежність амплітуд гармонік E_m мультигармонічної ХПЗ від частоти ω для двопотокового РЕП із $\omega_{p3} = 10 \times 10^{10} \text{ с}^{-1}$ при $z = 149 \text{ см}$, параметри пучка відповідаю випадку кривій 3 на рис. 2.10 ($\gamma_0 = 4$, $\Delta\gamma = 0,4$, $\alpha = 0^\circ$,

$$\omega_1 = 2,6 \times 10^{11} \text{ с}^{-1}).$$

3 МУЛЬТИГАРМОНІЧНІ ПРОЦЕСИ В ОДНОСЕКЦІЙНОМУ ДСЛВЕ Н-УБІТРОННОГО ТИПУ З ГВИНТОВИМИ ЕЛЕКТРОННИМИ ПУЧКАМИ

3.1 Модель односекційного мультигармонічного двопотокового супергеродинного ЛВЕ з гвинтовим РЕП

Розглядаємо наступну модель мультигармонічного ДСЛВЕ Н-убітронного типу із гвинтовими електронними пучками. Уздовж осі Z приладу рухається гвинтовий двопотоковий релятивістський електронний пучок 1 (рисунок 3.1), що складається із двох парціальних взаємопроникних гвинтових електронних потоків із близькими за значенням парціальними релятивістськими швидкостями v_1, v_2 ($v_1 - v_2 \ll v_1, v_2$). Швидкості електронів цих пучків спрямовані під кутом α стосовно фокусуєчого магнітного поля \mathbf{B}_0 . Плазмові частоти парціальних електронних пучків приймаємо однаковими $\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$; вважаємо, що просторовий заряд пучка скомпенсований іонним фоном, у поперечній площині пучок є однорідним, тепловим розкидом і зіткненнями електронів нехтуємо.

Гвинтовий двопотоковий релятивістський електронний пучок проходить через мультигармонічне циркулярно-поляризоване Н-убітронне магнітне поле з індукцією \mathbf{B}_2 , що створюється періодично реверсивною системою магнітів 2. Період ондуляції першої гармоніки такого поля $\lambda_{2,1}$.

На вхід ДСЛВЕ подається електромагнітний сигнал 3, перша гармоніка якого має частоту $\omega_{1,1}$, хвильове число $k_{1,1}$. Розглядаємо як випадок монохроматичного, так і мультигармонічного вхідного електромагнітного сигналу 3. Внаслідок трихвильового параметричного резонансу між, наприклад, першою гармонікою хвилі сигналу й першою гармонікою хвилі накачування із хвильовим вектором $k_{2,1} = 2\pi/\lambda_{2,1}$ відбувається збудження першої гармоніки хвилі просторового заряду із частотою $\omega_{3,1}$ й хвильовим числом $k_{3,1}$. У випадку мультигармонічного вхідного сигналу в такий же спосіб збуджуються й інші гармоніки ХПЗ.

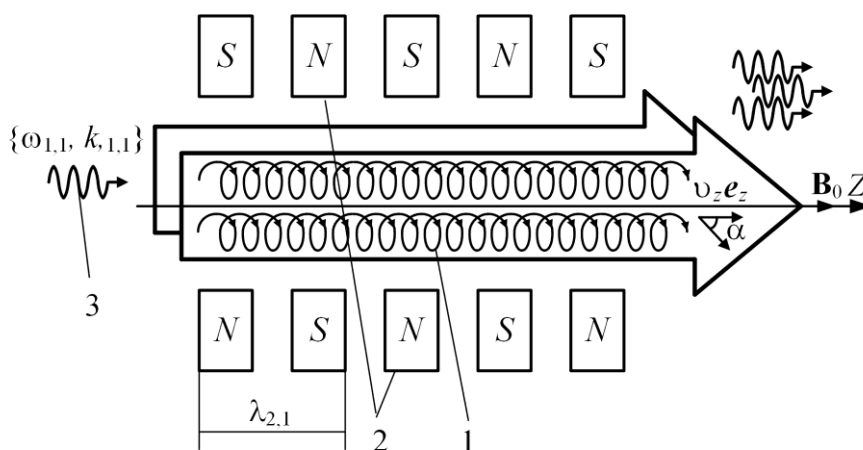


Рисунок 3.1 – Схема мультигармонічного ДСЛВЕ Н-убітронного типу із гвинтовим двопотоковим електронним пучком. Тут: 1 — гвинтовий двопотоковий релятивістський електронний пучок; 2 — система, що створює мультигармонічне Н-убітронне магнітне поле накачування; 3 — вхідний електромагнітний сигнал

Параметри системи підбираємо так, щоб частота першої гармоніки зростаючої хвилі просторового заряду $\omega_{3,1}$ була набагато менше частоти двопотокової нестійкості ω_{cr} двопотокового гвинтового РЕП. Тому перша гармоніка ХПЗ буде наростати через двопотокову нестійкість. Особливістю хвиль просторового заряду, які зростають завдяки двопотоковій нестійкості є те, що такі хвилі характеризуються лінійною дисперсійною залежністю [1, 3, 43–47]. Внаслідок цього між гармоніками ХПЗ виникають множинні трихвильові параметричні резонансні взаємодії [1, 3, 43–49]. Це приведе до інтенсивного збудження й підсилення вищих гармонік ХПЗ. Збуджені вищі гармоніки ХПЗ також підсилюються за рахунок двопотокової нестійкості. Таким чином, у робочій області мультигармонічного ДСЛВЕ відбувається інтенсивна генерація й підсилення вищих гармонік ХПЗ як за рахунок трихвильових множинних резонансних взаємодій, так і за рахунок двопотокової нестійкості. Слід зазначити, що інкремент зростання гармонік ХПЗ, обумовлений двопотоковою нестійкістю, буде збільшуватися зі збільшенням но-

мера гармоніки аж до оптимальної частоти, що відповідає максимальному інкременту зростання [1, 3, 43–49].

У робочому об'ємі ДСЛВЕ реалізуються множинні трихвильові параметричні резонансні взаємодії між гармоніками хвилі просторового заряду, гармоніками магнітного поля накачування й гармоніками електромагнітного поля сигналу. Завдяки таким трихвильовим параметричним резонансним взаємодіям відбувається перетворення енергії мультигармонічної хвилі просторового заряду в енергію мультигармонічного електромагнітного сигналу. При цьому для кожної m -ї гармоніки мультигармонічної ХПЗ виконується умова параметричного резонансу з відповідними m -ю гармонікою магнітного поля накачування і m -ю гармонікою електромагнітного сигналу. Відзначимо, що в досліджуваній системі також мають місце трихвильові резонансні взаємодії між гармоніками електромагнітного сигналу. У результаті таких множинних взаємодій на виході мультигармонічного ДСЛВЕ формується потужна мультигармонічна електромагнітна хвиля. Змінюючи параметри системи, наприклад параметри мультигармонічного поля накачування, можемо керувати спектром мультигармонічного електромагнітного сигналу, у тому числі, створювати ультракороткі кластери електромагнітного поля [3].

Так як всі хвилі є мультигармонічними, то напруженість \mathbf{E}_1 і індукцію \mathbf{B}_1 електромагнітної хвилі сигналу, індукцію поля накачування \mathbf{B}_2 , напруженість електричного поля зростаючої поздовжньої ХПЗ \mathbf{E}_3 представляємо у вигляді

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \sum_{m=1}^N [(E_{1x,m} \mathbf{e}_x + E_{1y,m} \mathbf{e}_y) \exp(ip_{1,m}) + c.c.], \\ \mathbf{B}_1 &= \sum_{m=1}^N [(B_{1y,m} \mathbf{e}_y + B_{1x,m} \mathbf{e}_x) \exp(ip_{1,m}) + c.c.], \\ \mathbf{B}_2 &= \sum_{m=1}^N [(B_{2y,m} \mathbf{e}_y + B_{2x,m} \mathbf{e}_x) \exp(ip_{2,m}) + c.c.], \\ \mathbf{E}_3 &= \sum_{m=1}^N [E_{3z,m} \mathbf{e}_z \exp(ip_{3,m}) + c.c.].\end{aligned}\tag{3.1}$$

У цих співвідношеннях $E_{1x,m}$, $E_{1y,m}$, $E_{3z,m}$, $B_{1x,m}$, $B_{1y,m}$, $B_{2x,m}$, $B_{2y,m}$ – відповідні проекції амплітуд m -х гармонік полів, $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – орти відповідних осей;

$$p_{\chi,m} = \omega_{\chi,m} \cdot t - k_{\chi,m} \cdot z = m\omega_{\chi,1} \cdot t - k_{\chi,m} \cdot z \quad (3.2)$$

– їх фази (індекс χ приймає значення 1, 2 и 3); $\omega_{\chi,m} = m\omega_{\chi,1}$ – їх частоти ($\omega_{2,1} = 0$) і $k_{\chi,m}$ – хвильові числа. Таким чином, електричне і магнітне поля у досліджуваному ДСЛВЕ мають вигляд

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_3, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2. \quad (3.3)$$

3.2 Основні рівняння у слабосигнальному наближенні

Як вихідні рівняння використовуємо квазігідродинамічне рівняння, рівняння неперервності й рівняння Максвелла [1, 3]. Задачу руху вирішуємо за допомогою методу усереднених характеристик [1, 3, 41], задачу збудження електромагнітних полів – за допомогою методу повільно змінних амплітуд. Також, урахуємо, що при ненульовому куті вльоту електронів пучка α щодо поздовжнього фокусуєчого магнітного поля \mathbf{B}_0 , електрони пучка в незбуреному стані рухаються по колам у поперечній площині. Тому в рівняннях руху використовуємо заміну:

$$v_{qx} = \bar{v}_{q\perp} \cos p_{q0} + \tilde{v}_{qx}, \quad v_{qy} = \bar{v}_{q\perp} \sin p_{q0} + \tilde{v}_{qy}, \quad (3.4)$$

де $\bar{v}_{q\perp}$, p_{q0} – незбурена перпендикулярна складова вектора швидкості й фаза обертання електронів q -го пучка в поздовжньому магнітному полі; \tilde{v}_{qx} , \tilde{v}_{qy} – осциляторні x - і y - компоненти вектора швидкості електронів q -го пучка.

У підсумку одержуємо у слабосигнальному наближенні систему диференціальних рівнянь для комплексних амплітуд гармонік напруженості електричного поля електромагнітного сигналу й хвилі просторового заряду в наближенні слабого сигналу:

$$\begin{aligned}
K_{1,m} \frac{dE_{1x,m}}{dz} &= K_{3,m} E_{3z,m} B_{2y,m}^* + \\
&+ K_{4,m} \left\langle E_1 \cdot \sum_{m'=1}^N [E_{1x,m'} \exp(ip_{1,m'}) / (im') + c.c.] \right\rangle_{P_{1m}}, \\
C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dz^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dz} + D_{3,m} E_{3z,m} &= \\
&= C_{3,m} (1 + \eta_{1,m} \eta_{2,m}) E_{1x,m} B_{2y,m} + \\
&+ C_{4,m} \left\langle E_3 \cdot \sum_{m'=1}^N [E_{3z,m'} \exp(ip_{3,m'}) / (im') + c.c.] \right\rangle_{P_{3m}}. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

У цих рівняннях:

$$D_{3,m}(\omega_{3,m}, k_{3,m}) = -ik_{3,m} \left(1 - \sum_{q=1}^2 \frac{\omega_p^2 (1 - (\bar{v}_{qz}/c)^2)}{\Omega_{3,m}^2 \bar{\gamma}_q} \right) \tag{3.6}$$

– дисперсійна функція поздовжньої ХПЗ;

$$K_{1,m} = \partial D_{1,m} / \partial(-ik_{1,m}); \quad C_{1,m} = \partial D_{3,m} / \partial(-ik_{3,m}); \quad C_2 = 0,5 \cdot \partial^2 D_{3,m} / \partial(-ik_{3,m})^2; \quad K_{3,m}, K_{4,m},$$

$C_{3,m}$, $C_{4,m}$ – коефіцієнти відповідних диференціальних рівнянь, які залежать від частот, хвильових чисел і параметрів системи;

$$D_{1,m}(\omega_{1,m}, k_{1,m}) = k_{1,m}^2 - \frac{\omega_{1,m}^2}{c^2} + \sum_{q=1}^2 \left[\frac{\omega_p^2}{\bar{\gamma}_q (\Omega_{1,q,m} - \eta_{1,m} \Omega_{q0})^2 c^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\Omega_{1,q,m} (\Omega_{1,q,m} - \eta_{1,m} \Omega_{q0,m}) - \frac{\bar{v}_{q\perp}^2}{2c^2} (\omega_{1,m}^2 - k_{1,m}^2 c^2) \right) \right] \quad (3.7)$$

— дисперсійна функція електромагнітної хвилі сигналу;

$$\eta_{1,m} = E_{1y,m} / (iE_{1x,m}) = \pm 1, \quad \eta_{2,m} = B_{2y,m} / (iB_{2x,m}) = \pm 1 \quad (3.8)$$

– знакові функції ($\eta_{1,m}$ – характеризує напрямок обертання напруженості електричного поля хвилі сигналу в поздовжньому фокусуєчому магнітному полі; $\eta_{2,m}$ – характеризує напрямок обертання спірального магнітного поля ондулятора); $\Omega_{0,q} = -\omega_{H,q} / \gamma_q$; $\omega_{H,q} = e_q B_0 / (m_e c)$; $\Omega_{2,q,m} = -k_{2,m} \bar{v}_{qz}$; $\Omega_{1,q,m} = \omega_{1,m} - k_{1,m} \bar{v}_{qz}$; $\Omega_{3,q,m} = \omega_{3,m} - k_{3,m} \bar{v}_{qz}$; \bar{v}_{qz} – постійна складова z -компонента швидкості q -го пучка; $\bar{\gamma}_q = 1 / \sqrt{1 - (\bar{v}_{q\perp}^2 + \bar{v}_{qz}^2) / c^2}$ – релятивістський фактор; c – швидкість світла.

Слід зазначити, що для досліджуваної системи власними є циркулярно-поляризовані електромагнітні хвилі, зв'язок між амплітудами яких має вигляд (3.8). Рівняння для y -компонент електромагнітних полів подібні до рівнянь для x -компонент полів, і тому ми їх не записуємо в (3.5). Коефіцієнти $K_{3,m}$, $C_{3,m}$ характеризують параметрично-резонансну взаємодію електромагнітної хвилі сигналу, накачування й ХПЗ у квадратичному наближенні. З аналізу правої частини другого рівняння системи (3.5) ($C_{3,m} (1 + \eta_{1,m} \eta_{2,m}) E_{1x,m} B_{2y,m}$) випливає, що для реалізації такого параметричного резонансу необхідно, щоб електромагнітні хвилі сигналу й накачування мали однаковий напрямок обертання вектора напруженості електричного поля. Тобто обертання вектора напруженості електричного поля обох хвиль повинне бути спрямоване або за годинниковою стрілкою ($\eta_1 = +1$, $\eta_2 = +1$), якщо

дивитись уздовж вектора напруженості магнітного поля, або проти годинникової стрілки ($\eta_1 = -1$, $\eta_2 = -1$). У іншому випадку цей доданок буде рівним нулю.

У досліджуваному ДСЛВЕ як додатковий механізм підсилення використовується двопотокова нестійкість. З математичної точки зору це значить, що дисперсійне рівняння для хвилі просторового заряду $D_{3,m}(\omega_{3,m}, k_{3,m}) = 0$ має комплексні корені. Тому при підстановці в (3.6) дійсних частот і дійсних хвильових чисел, дисперсійна функція не буде дорівнює нулю $D_{3,m} \neq 0$. Саме цією обставиною обумовлений доданок $D_{3,m}E_{3z,m}$ у рівнянні для амплітуд хвилі просторового заряду системи (3.5). Ми можемо визначити інкремент зростання ХПЗ, що обумовлений двопотоковою нестійкістю, використовуючи друге рівняння системи (3.5). Зневажаючи параметричними резонансами, тобто, приймаючи праву частину цього рівняння рівної нулю, одержуємо

$$C_{2,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dz^2} + C_{1,m} \frac{dE_{3z,m}}{dz} + D_{3,m} E_{3z,m} = 0. \quad (3.9)$$

Шукаємо розв'язок рівняння (3.9) у вигляді $\sim \exp(\Gamma_{3,m}z)$ й одержуємо

$$C_{2,m} \Gamma_{3,m}^2 + C_{1,m} \Gamma_{3,m} + D_{3,m} = 0. \text{ Звідси}$$

$$\Gamma_{3,m} = \frac{-C_{1,m} \pm \sqrt{(C_{1,m})^2 - 4C_{2,m}D_{3,m}}}{2C_{2,m}} \approx \pm \sqrt{-\frac{D_{3,m}}{C_{2,m}}}, \quad (3.10)$$

де $\Gamma_{3,m}$ має сенс інкременту зростання двопотоковою нестійкістю. При одержанні (3.10) використовували, що для досить широкого діапазону значень параметрів ДСЛВЕ $|C_{1,m} \Gamma_{3,m}| \ll |C_{2,m} \Gamma_{3,m}^2|, |D_{3,m}|$. З отриманого співвідношення (3.10) випливає, що в системі (3.5) обов'язково необхідно враховувати як доданок $D_{3,m}E_{3z,m}$, так і $C_{2,m} \cdot d^2 E_{3z,m} / dz^2$, які описують динаміку двопотоковою нестійкістю.

3.3 Взаємодія хвиль у слабосигнальному наближенні

Проведемо аналіз динаміки хвиль у ДСЛВЕ із гвинтовими двопотоковими пучками в слабосигнальному наближенні. Досліджуємо пристрій з наступними параметрами: $\gamma_1 = 4.8$, $\gamma_2 = 4.2$; плазмова частота кожного з електронних пучків $\omega_p = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$; період ондуляції магнітного поля накачування для першої гармоніки 5 см, індукція фокусуєчого поздовжнього магнітного поля $B_0 = 2.8 \cdot 10^2 \text{ Гс}$.

Визначимо інкременти зростання хвиль у досліджуваній системі. Для цього використовуємо систему рівнянь (3.5), у якій знехтуємо множинними резонансними взаємодіями як між гармоніками електромагнітної хвилі, так і між гармоніками хвилі просторового заряду. Тоді система (3.5) набуде вигляду

$$\begin{aligned} K_1 \frac{dE_{1x}}{dz} &= K_3 E_{3z} B_{2x}^*, \\ C_2 \frac{d^2 E_{3z}}{dz^2} + C_1 \frac{dE_{3z}}{dz} + DE_{3z} &= \\ &= C_3 (1 + \eta_1 \eta_2) E_{1x} B_{2y}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

У рівнянні (3.11) індекс m опущений. Шукаємо розв'язки цієї системи рівнянь у вигляді $E_1, E_3 \sim \exp(\Gamma z)$, де Γ — інкремент зростання хвиль у ДСЛВЕ. Підстановка такого рішення в (3.11) призводить до алгебраїчного рівняння третього ступеня відносно Γ :

$$\begin{aligned} K_1 \Gamma (C_2 \Gamma^2 + C_1 \Gamma + D) &= \\ = C_3 K_3 (1 + \eta_1 \eta_2) |B_{2y}|^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Вирішуючи це рівняння чисельно, визначимо залежність інкременту зростання хвиль $\text{Re}(\Gamma)$ у досліджуваному пристрої як функцію частоти сигналу ω_1 для гвинтових електронних пучків з різними кутами вльоту пучка α .

На рис. 3.2 представлені залежності інкрементів зростання в досліджуваному ДСЛВЕ від частоти хвилі сигналу ω_1 при різних кутах вльоту α . Криві 1 – 4 відповідають залежностям інкрементів зростання електромагнітних хвиль, отримані зі співвідношення (3.12): крива 1 відповідає куту вльоту $\alpha = 0^\circ$, крива 2 – куту $\alpha = 10^\circ$, крива 3 – $\alpha = 20^\circ$, крива 4 – $\alpha = 30^\circ$. Крива 5 описує залежність інкременту зростання двопотокової нестійкості від частоти, що визначена з дисперсійного співвідношення (3.6) для кута вльоту $\alpha = 0^\circ$. Амплітуда поля накачування $\sqrt{B_{2y}^2 + B_{2x}^2} = 565$ Гс.

Порівняємо залежності інкременту зростання електромагнітної хвилі сигналу (крива 1) і інкременту зростання двопотокової нестійкості (крива 5) від частоти при куті вльоту $\alpha = 0^\circ$. Бачимо, що, у цілому, криві 1 і 5 близькі. Це свідчить про те, що саме двопотокова нестійкість визначає динаміку електромагнітної хвилі в досліджуваному лазері на вільних електронах. Однак, при низьких частотах (з $\omega_1 \sim 1 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$) розходження між цими кривими стає істотним. Це пов'язано з тим, що темп зростання електромагнітної хвилі сигналу в ДСЛВЕ визначається не тільки двопотоковою, але й параметричною нестійкістю.

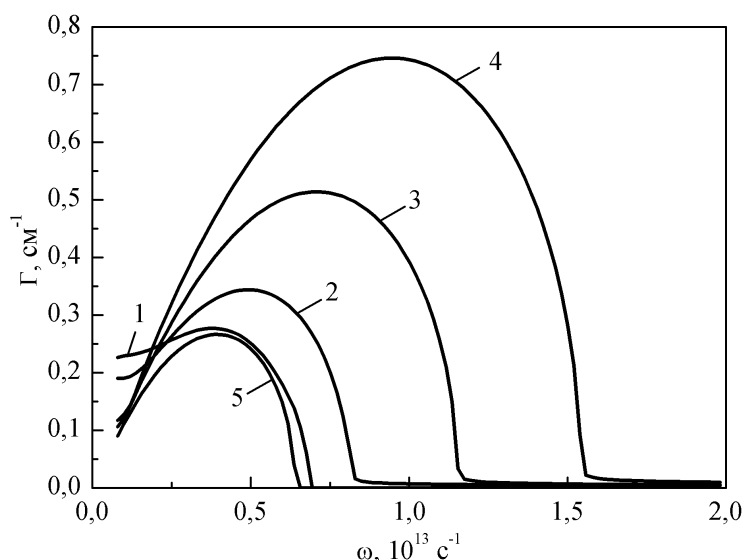


Рисунок 3.2 – Залежності інкрементів зростання від частоти хвилі сигналу ω_1 при різних кутах вльоту α . Криві 1 - 4 відповідають залежностям інкрементів зростання електромагнітних хвиль від частоти ω_1 , які визначені зі співвідношення (3.12): крива 1 відповідає куту вльоту $\alpha = 0^\circ$, крива 2 – куту $\alpha = 10^\circ$, крива 3 – $\alpha = 20^\circ$, крива 4 – $\alpha = 30^\circ$. Крива 5 описує залежність інкременту зростання двопотокової нестійкості від частоти, що визначена з дисперсійного співвідношення (3.6) для кута вльоту $\alpha = 0^\circ$

Відомо, що при зменшенні частоти інкремент двопотокової нестійкості зменшується, тоді як інкремент параметричної нестійкості збільшується [1, 41]. Із цієї причини при низьких частотах результуючий інкремент зростання електромагнітної хвилі сигналу (крива 1) стає істотно вище двопотокового інкременту зростання (крива 5). Таким чином, при досить низьких частотах результуючий інкремент зростання електромагнітної хвилі сигналу визначається параметричною нестійкістю.

Зі збільшенням кута вльоту пучка α розходження між інкрементами зростання електромагнітної хвилі сигналу й інкрементом зростання двопотокової нестійкості при низьких частотах зменшується. Причина цього полягає в тому, що при збільшенні кута вльоту α , з одного боку, інкремент двопотокової нестійкості збільшується, а з іншого боку, параметричний інкремент зростання зменшується.

Проведемо аналіз залежностей інкрементів зростання електромагнітної хвилі сигналу (криві 1–4 на рис. 2) для кутів вльоту 0° , 10° , 20° і 30° . Як уже згадувалося вище, ці залежності, у цілому, визначаються інкрементами двопотокової нестійкості, а виходить, і мають їхні властивостями. Бачимо, що зі збільшенням кута вльоту пучка α збільшуються як максимальні значення інкрементів зростання електромагнітної хвилі сигналу $\text{Re}(\Gamma)$, так і критичні частоти ω_{cr} , при яких інкремент зростання стає близьким до нуля. Такими ж властивостями характеризується двопотокова нестійкість у гвинтових двопотокових релятивістських пучках [48, 49]. Таким чином, у мультигармонічних двопотокових супергетеродинних ЛВЕ, які використовують гвинтові двопотокові релятивістські електронні пучки, темпи зростання електромагнітних хвиль будуть набагато вище, ніж у ДСЛВЕ із прямолінійними електронними пучками. Ширина спектра мультигармонічного сигналу визначається різницею між критичною частотою й частотою першої гармоніки. Так як критична частота з підвищенням кута вльоту зростає ($\omega_{\text{cr1}} < \omega_{\text{cr2}} < \omega_{\text{cr3}} < \omega_{\text{cr4}}$, см. рис. 3.2), то й ширина частотного спектра буде зростати. Тому можемо зробити висновок, що в мультигармонічних ДСЛВЕ із гвинтовими електронними пучками буде формуватися потужна мультигармонічна електромагнітна хвиля з більш широким частотним спектром.

На рис. 3.3 представлені залежності амплітуд напруженості електричного поля п'ятнадцяти гармонік електромагнітної хвилі сигналу від поздовжньої координати z для кута вльоту електронного пучка $\alpha = 0^\circ$ (криві 1) і $\alpha = 30^\circ$ (криві 2). Параметри, при яких проводився розрахунок, такі ж, як і для рис. 3.2, за винятком напруженості магнітного поля накачування, що дорівнює $\sqrt{B_{2y}^2 + B_{2x}^2} = 141$ Гс. На вхід досліджуваного ДСЛВЕ подається монохроматичний сигнал із частотою $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$. Розрахунок залежностей вироблявся за допомогою системи рівнянь для амплітуд гармонік напруженостей електричного поля (3.5).

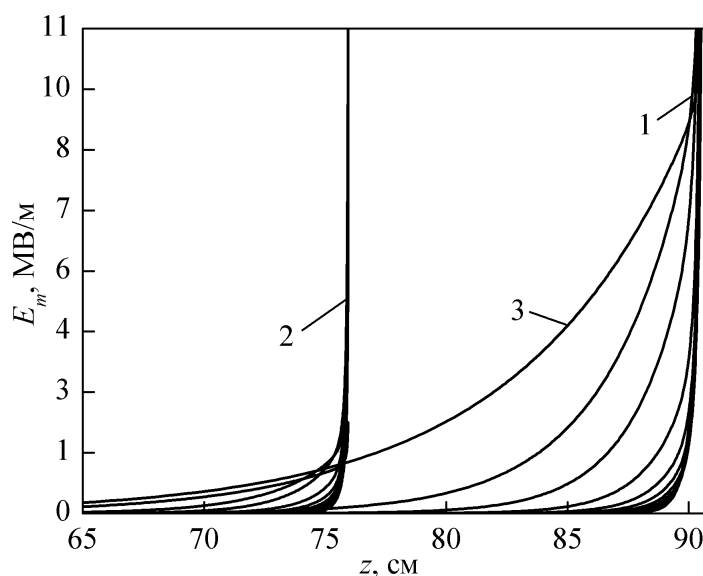


Рисунок 3.3 – Залежності амплітуд напруженості електричного поля гармонік електромагнітної хвилі сигналу від поздовжньої координати z для кута вльоту електронного пучка $\alpha = 0^\circ$ (криві 1) і $\alpha = 30^\circ$ (криві 2) у випадку монохроматичного вхідного сигналу. Крива 3 відповідає залежності амплітуди 1-й гармоніки напруженості електричного поля від поздовжньої координати z для кута вльоту пучка $\alpha = 0^\circ$. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$

Рис. 3.3 підтверджує висновки, отримані при аналізі рис. 3.2. З нього випливає, що темпи підсилення гармонік напруженості електричного поля для гвинтового електронного пучка (криві 2) вище, ніж для прямолінійного електронного пучка (криві 1). Також із цього рисунка випливає, що завдяки множинним трихвильовим параметричним резонансам збуджуються вищі гармоніки, а потім підсилюються завдяки додатковому механізму підсилення (двопотокова нестійкість). У результаті таких процесів формуються мультигармонічні електромагнітні хвилі. На рис. 3.4 представлений спектр такої електромагнітної хвилі сигналу в точці з координатою $z = 75,2 \text{ см}$, кут вльоту електронного пучка $\alpha = 30^\circ$. Бачимо, що в досліджуваному пристрої відбувається формування мультигармонічної електромагнітної хвилі, у якій амплітуди гармонік мають порівнянні амплітуди в широкому частотному спектрі. Це є необхідною умовою для формування ультракоротких електромагнітних кластерів електромагнітного поля [1, 3]. Відзначимо, що

завдяки трихвильовим параметричним резонансам також збуджуються хвилі із частотами, які перевищують критичну частоту $\omega_{cr4} = 1.6 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$.

Розглянемо формування мультигармонічної електромагнітної хвилі в ДСЛВЕ із прямолінійними пучками ($\alpha = 0^\circ$). Як уже було сказано раніше, з рис. 3.2 випливає, що інкремент зростання *першої гармоніки* електромагнітної хвилі сигналу для пучка із $\alpha = 0^\circ$ при низьких частотах ($\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$) є більш високим у порівнянні з інкрементами зростання сигналу в ДСЛВЕ із гвинтовими електронними пучками (зрівняєте криву 1 і криві 2 – 4 на рис. 2). Це обумовлено, з одного боку, збільшенням впливу параметричного механізму підсилення при зниженні частоти, а з іншого боку, при низьких частотах відбувається зменшення інкременту зростання двопотокової нестійкості. У результаті перша гармоніка сигналу для ДСЛВЕ із прямолінійним пучком ($\alpha = 0^\circ$) одержує істотне підсилення, як це випливає з рис. 3.3, крива 3. У підсумку, перша гармоніка домінує над вищими гармоніками й формування електромагнітного сигналу із широким спектром у ДСЛВЕ із прямолінійним РЭП ($\alpha = 0^\circ$), у якому гармоніки будуть мати порівнянні амплітуди, стає утрудненим. Тому для формування сигналів із широким частотним спектром переважно використовувати саме гвинтові електронні пучки. Також, як випливає з рис. 3.3, у двопотокових ДСЛВЕ, які використовують гвинтові електронні пучки, через більш високі темпи підсилення насичення буде відбуватися раніше, а виходить, такі пристрої будуть мати менші поздовжні розміри в порівнянні із ДСЛВЕ, що використовують прямолінійні пучки.

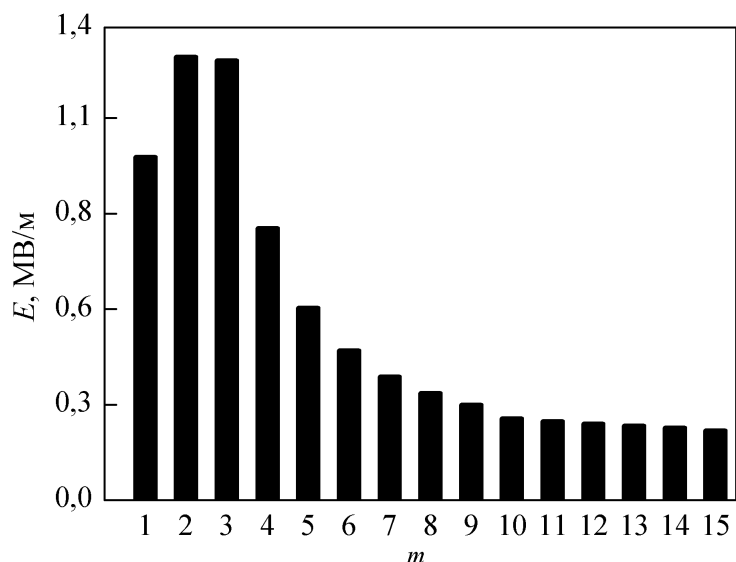


Рисунок 3.4 – Залежність амплітуд напруженості електричного поля гармонік електромагнітної хвилі сигналу від номера гармоніки в точці з координатою $z = 75,2$ см, кут вльоту електронного пучка $\alpha = 30^\circ$, випадок монохроматичного вхідного сигналу. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ c}^{-1}$

Проведемо аналіз ситуації, коли на вхід досліджуваної системи подається *мультигармонічний* вхідний сигнал, що складається із трьох ненульових перших гармонік електромагнітної хвилі. Для цього випадку залежності амплітуд напруженості електричного поля п'ятнадцяти гармонік електромагнітної хвилі сигналу від поздовжньої координати z для кута вльоту електронного пучка $\alpha = 0^\circ$ (криві 1) і $\alpha = 30^\circ$ (криві 2) представлені на рис. 3.5. Параметри, при яких відбувався розрахунок, такі ж, як і для рис. 3.3. Розрахунок залежностей вироблявся за допомогою системи рівнянь для амплітуд гармонік напруженостей електричного поля (3.5). З рис. 3.5 випливає, що у випадку мультигармонічного вхідного сигналу насичення відбувається при куті вльоту $\alpha = 0^\circ$ на довжині $z \sim 45$ см (для монохроматичного вхідного сигналу $z \sim 90$ см, рис. 3.3), при куті вльоту $\alpha = 30^\circ$ на довжині $z \sim 30$ см (для монохроматичного вхідного сигналу $z \sim 75$ см, рис. 3.3). Таким чином, наявність вхідного мультигармонічного сигналу, що складається з незначної кількості гармонік (три гармоніки) призводить до істотного зниження довжин насичення (у два рази й більше), як для прямолінійного, так і для гвинтового ре-

лятивістського електронного пучка. Такий вплив на довжини насичення мультигармонічного вхідного сигналу пояснюється наступними обставинами. По-перше, завдяки використанню мультигармонічного вхідного сигналу відбувається більше швидке збудження вищих гармонік ХПЗ, які фактично визначають формування вихідної мультигармонічної електромагнітної хвилі. По-друге, збудження вищих гармонік ХПЗ відбувається на більш високих частотах, які характеризуються більше високими інкрементами зростання. Таким чином, використання мультигармонічних вхідних сигналів призводить до більш інтенсивного формування потужної електромагнітної хвилі із широким частотним спектром.

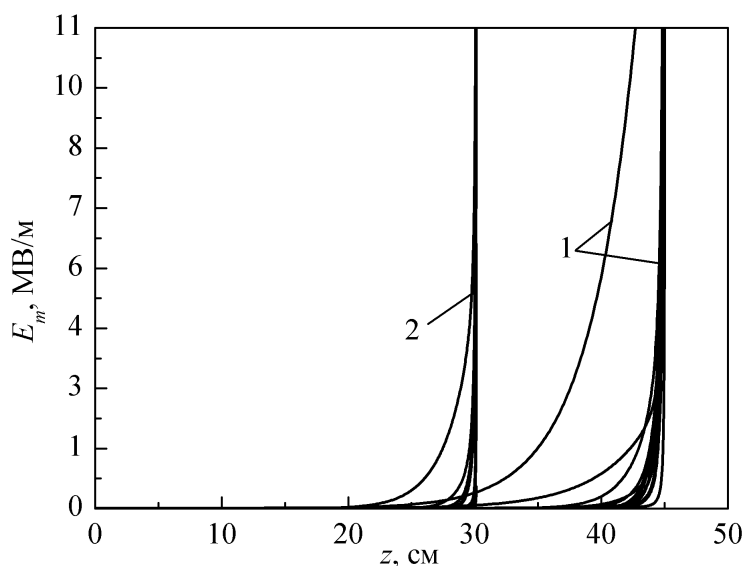


Рисунок 3.5 – Залежності амплітуд напруженості електричного поля гармонік електромагнітної хвилі сигналу від поздовжньої координати z для кута вльоту електронного пучка $\alpha = 0^\circ$ (криві 1) і $\alpha = 30^\circ$ (криві 2) у випадку мультигармонічного вхідного сигналу. Частота першої гармоніки $\omega_1 = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$

4 ФОРМУВАННЯ ПОТУЖНОЇ МУЛЬТИГАРМОНІЧНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ ДВОПОТОКОВИМ СУПЕРГЕТЕРОДИННИМ ЛАЗЕРОМ НА ВІЛЬНИХ ЕЛЕКТРОНАХ КЛІСТРОННОГО ТИПУ З ГВИНТОВИМ ЕЛЕКТРОННИМ ПУЧКОМ

4.1 Множинні трихвильові параметричні резонанси у двопотоковому СЛВЕ клістронного типу з гвинтовим РЕП

У системі, описаній у розділі 2.1, реалізуються три групи множинних трихвильових параметричних резонансних взаємодій: 1) множинні параметричні резонанси між гармоніками хвилі просторового заряду у всіх секціях пристрою, 2) множинні трихвильові взаємодії між мультигармонічними полями електромагнітної хвилі, магнітного поля накачки й хвилі просторового заряду в прикінцевої секції, 3) між гармоніками електромагнітної хвилі сигналу в прикінцевої секції.

Перша група множинних параметричних резонансних взаємодій між гармоніками хвилі просторового заряду виникає через лінійність дисперсійної характеристики хвилі ХПЗ [1, 47–49]. Це означає, що для будь-якої m -ї гармоніки ХПЗ частота $\omega_{3,m}$ й хвильове число $k_{3,m}$ пов'язані із частотою $\omega_{3,1}$ й хвильовим числом $k_{3,1}$ першої гармоніки співвідношенням:

$$\omega_{3,m} = m \cdot \omega_{3,1}, \quad k_{3,m} = m \cdot k_{3,1}. \quad (4.1)$$

Це приводить до того, що для того, щоб m_1 , m_2 й m_3 гармоніки ХПЗ взаємодіяли одна з одною через механізм трихвильового параметричного резонансу

$$P_{3,m1} = P_{3,m2} + P_{3,m3} \quad (4.2)$$

номера гармонік повинні бути пов'язані між собою співвідношенням:

$$m_1 = m_2 + m_3. \quad (4.3)$$

Цій умові задовольняють величезна кількість гармонік. Наприклад, 10-а гармоніка бере участь у таких трихвильових резонансних взаємодіях $10 = 1 + 9$, $10 = 2 + 8$, ..., $10 = 11 - 1$, $10 = 12 - 2$ і так далі.

Друга група множинних резонансних взаємодій пов'язана із трихвильовими параметричними взаємодіями між гармоніками електромагнітної хвилі сигналу, накачки й ХПЗ і реалізується в прикінцевої секції мультигармонічного ДСЛВЕ клістронного типу. Це обумовлено тим, що мультигармонічні поля накачки й електромагнітної хвилі сигналу в цьому діапазоні частот, також як і хвиля ХПЗ, характеризуються лінійними дисперсійними залежностями:

$$k_{2,m} = mk_{2,1}, \quad \omega_{2,1} = 0, \quad (4.4)$$

$$\omega_{1,m} = m \cdot \omega_{1,1}, \quad k_{1,m} \approx \omega_{1,m} / c = m\omega_{1,1} / c. \quad (4.5)$$

Тому в прикінцевої секції ДСЛВЕ для кожної трійки m -х гармонік сигналу, накачки й зростаючої ХПЗ мають місце трихвильові резонанси, умови яких мають вигляд

$$\omega_{3,m} = \omega_{1,m}, \quad k_{3,m} = k_{1,m} + k_{2,m} \quad \text{або} \quad p_{3,m} = p_{1,m} + p_{2,m}. \quad (4.6)$$

Третя група множинних резонансних взаємодій між гармоніками електромагнітної хвилі сигналу обумовлена лінійною дисперсійною залежністю електромагнітної хвилі сигналу в цьому діапазоні частот (4.5). Це означає, що умови трихвильової параметричної взаємодії між m_1 , m_2 й m_3 гармоніками електромагнітного сигналу, аналогічно як і для хвилі ХПЗ, визначаються співвідношенням (4.3) або ж

$$P_{1,m1} = P_{1,m2} + P_{1,m3} \quad (4.7)$$

Таким чином, для гармонік електромагнітної хвилі сигналу також мають місце множинні трихвильові параметричні резонансні взаємодії. На відміну від хвилі ХПЗ для електромагнітної хвилі сигналу відсутній додатковий механізм підсилення (зростаюча ХПЗ підсилюється також і за рахунок двопотокової нестійкості).

4.2 Система кубічно-нелінійних рівнянь для комплексних амплітуд хвиль

Побудувавши нелінійну теорію множинних взаємодій хвиль сигналу, накачки й ХПЗ в прикінцевій секції ми можемо її використати для аналізу нелінійних процесів також і в секції модуляції, і в пролітній секції. При цьому в секції модуляції ми приймаємо, що на вхід подається монохроматична електромагнітна хвиля, а хвиля просторового заряду на вході відсутня. У пролітній секції, навпаки, на вході є тільки хвиля ХПЗ, а накачка й хвиля сигналу відсутні.

Як вихідні рівняння для аналізу множинних взаємодій хвиль в прикінцевій секції використовуємо релятивістське квазігідродинамічне рівняння [1], рівняння неперервності й рівняння Максвелла. Зіткненнями електронів між собою та їх розкидом за швидкостями нехтуємо. Модель вважаємо поперечно однорідною. Тоді релятивістське квазігідродинамічне рівняння, рівняння неперервності й рівняння Максвелла можна подати у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{qz} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v}_q = \frac{e}{m_e \gamma_q} \left(\mathbf{E} + [\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}] / c - \mathbf{v}_q (\mathbf{v}_q \mathbf{E}) / c^2 \right), \quad (4.8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{qz} \frac{\partial}{\partial z} \right) n_q = -n_q \frac{\partial v_{qz}}{\partial z}, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - \mathbf{e}_x \frac{\partial B_y}{\partial z} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{q=1}^2 (en_q \mathbf{v}_q), \\ \mathbf{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathbf{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi \sum_{q=1}^2 en_q. \end{aligned} \quad (4.10)$$

У цих рівняннях v_{qz} – проекція вектора швидкості \mathbf{v}_q q -го парціального електронного пучка на вісь Z ; γ_q – релятивістський фактор q -го пучка; c – швидкість світла у вакуумі; $e = -|e|$, m_e – заряд та маса електрона відповідно.

Розв’язування системи рівнянь (4.8)–(4.10) розбиваємо на три формально незалежних етапи: 1) знаходження розв’язків задачі руху (4.8) гвинтового двопотокових релятивістського електронного пучка в заданих електромагнітних полях; 2) вирішення рівняння неперервності (4.9), приймаючи, що швидкості електронного пучка є відомими; 3) отримання рішень задачі про збудження електромагнітних полів (4.10) за відомими швидкостями та концентраціями електронного пучка..

Задачі руху й рівняння неперервності вирішуємо за допомогою методу усереднених характеристик [1], задачу про збудження електромагнітного поля — за допомогою методу повільно змінних амплітуд. При цьому враховуємо особливості множинних трихвильових параметричних резонансних взаємодій хвиль у досліджуваному пристрої.

Для вирішення задачі руху перетворимо рівняння (4.8) до стандартного вигляду [1]. Включимо в таку систему рівняння для швидких фаз $p_{\chi,m}$. Приймаємо, що амплітуди полів повільно змінюються зі зміною поздовжньої координати z . Для опису таких повільних змін амплітуди введемо повільну поздовжню координату $\zeta = z/\xi$, де ξ великий параметр, який визначається відношенням швидкості зміни швидких фаз до швидкості зміни амплітуди. Через те що ми розв’язуємо граничну задачу, то в отриманих рівняннях перейдемо від похідної за часом до похідної за координатою, використовуючи співвідношення $dt = dz/v_z$. У підсумку одержимо систему рівнянь у стандартному вигляді

$$\frac{d\mathbf{v}_q}{dz} = \frac{e}{m_e \gamma_q v_{qz}} \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}]}{c} - \frac{\mathbf{v}_q (\mathbf{v}_q \mathbf{E})}{c^2} \right), \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{1}{\xi}, \quad (4.11)$$

$$\frac{dp_{\chi,m}}{dz} = \frac{m\omega_{\chi,1}}{v_{qz}} - k_{\chi,m} \equiv \Omega_{q,\chi,m}. \quad (4.12)$$

У цих рівняннях урахуємо, що амплітуди полів $E_{1,m} = E_{1,m}(\zeta)$, $B_{1,m} = B_{1,m}(\zeta)$, $E_{3,m} = E_{3,m}(\zeta)$ є повільно змінними функціями від поздовжньої координати z .

Порівняємо систему (4.11)-(4.12) зі стандартною [1] і запишемо вектор повільних змінних \mathbf{x} , вектор-функції \mathbf{X} повільних змінних, вектор швидких фаз Ψ і вектор фазових швидкостей Ω у явному виді

$$\mathbf{x} = \{x_v, x_\zeta\} = \{v_{qz}, v_{qx}, \zeta\}, \quad \frac{1}{\xi} \mathbf{X} = \frac{1}{\xi} \{X_v, X_\zeta\}, \quad \frac{1}{\xi} X_\zeta = \frac{1}{\xi},$$

$$\frac{1}{\xi} \mathbf{X}_v = \frac{e}{m_e \gamma_q v_{qz}} \left(\mathbf{E} + \frac{[\mathbf{v}_q \times \mathbf{B}]}{c} - \frac{\mathbf{v}_q (\mathbf{v}_q \mathbf{E})}{c^2} \right), \quad (4.13)$$

$$\Psi_1 = \{p_{1,1}, \dots, p_{1,N}, p_{2,1}, \dots, p_{2,N}, p_{3,1}, \dots, p_{3,N}\},$$

$$\Omega_1 = \{\Omega_{q,1,1}, \dots, \Omega_{q,1,N}, \Omega_{2,1}, \dots, \Omega_{2,N}, \Omega_{q,3,1}, \dots, \Omega_{q,3,N}\}. \quad (4.14)$$

Також урахуємо, що електрони гвинтового РЕП окрім осциляторних рухів під дією полів також виконують обертовий рух у поздовжньому фокусувальному магнітному полі \mathbf{B}_0 . Тобто траєкторія незбуреного руху електронів у випадку відсутності сигналу, ХПЗ і накачки є спіраль. Незбурену поперечну швидкість електронів q -го сорту пучка можемо подати у вигляді [50]:

$$v_{qx} = v_{q\perp} \cos p_{q0}, \quad v_{qy} = v_{q\perp} \sin p_{q0}, \quad (4.15)$$

де

$$p_{q0} = -\int_0^z \Omega_{0q} dz', \quad \Omega_{q0} = \frac{dp_{q0}}{dz} = \frac{eB_0}{cm_e \gamma_q v_{qz}} \quad (4.16)$$

– фаза й частота обертання електронів у поздовжньому магнітному полі відповідно; $v_{q\perp}$ – модуль поперечної швидкості частинок q -го сорту пучка. Тому вектор швидкозмінних фаз Ψ_1 і вектор частот Ω_1 (4.14) потрібно доповнити фазою p_{q0} й частотою Ω_{q0} (19). Також потрібно врахувати, що за наявності електромагнітних полів електрони пучка в поздовжньому магнітному полі рухаються також і з комбінаційними частотами й фазами:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \{p_{q,1,1} \pm p_{q0}, \dots, p_{q,1,N} \pm p_{q0}, p_{2,1} \pm p_{q0}, \dots, \\ &\quad p_{2,N} \pm p_{q0}, p_{q,3,1} \pm p_{q0}, \dots, p_{q,3,N} \pm p_{q0}\}, \\ \Omega_2 &= \{\Omega_{q,1,1} \pm \Omega_{q0}, \dots, \Omega_{q,1,N} \pm \Omega_{q0}, \Omega_{2,1} \pm \Omega_{q0}, \dots, \\ &\quad \Omega_{2,N} \pm \Omega_{q0}, \Omega_{q,3,1} \pm \Omega_{q0}, \dots, \Omega_{q,3,N} \pm \Omega_{q0}\}. \\ \Psi_3 &= \{p_{1,1} \pm 2p_{q0}, \dots, p_{1,N} \pm 2p_{q0}, p_{2,1} \pm 2p_{q0}, \dots, \\ &\quad p_{2,N} \pm 2p_{q0}, p_{3,1} \pm 2p_{q0}, \dots, p_{3,N} \pm 2p_{q0}\}, \\ \Omega_3 &= \{\Omega_{q,1,1} \pm 2\Omega_{q0}, \dots, \Omega_{q,1,N} \pm 2\Omega_{q0}, \Omega_{2,1} \pm 2\Omega_{q0}, \dots, \\ &\quad \Omega_{2,N} \pm 2\Omega_{q0}, \Omega_{q,3,1} \pm 2\Omega_{q0}, \dots, \Omega_{q,3,N} \pm 2\Omega_{q0}\}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Необхідність урахування фази $2p_{q0}$ та частоти $2\Omega_{q0}$ викликана наявністю у правій частині рівнянь (4.11) квадрата швидкості. Таким чином, вектор швидких фаз і вектор частот у задачі, що розглядається, набуває вигляду

$$\Psi = \{\Psi_1, p_{q0}, \Psi_2, \Psi_3\}, \quad \Omega = \{\Omega_1, \Omega_{q0}, \Omega_2, \Omega_3\}. \quad (4.18)$$

Наявність обертового руху електронів у поздовжньому магнітному полі приводить до виникнення додаткових трихвильових параметричних резонансних взаємодій:

$$\begin{aligned} p_{3,m1} &= p_{3,m2} \pm p_{q0} + p_{3,m3} \mp p_{q0}, \\ p_{3,m1} &= p_{3,m2} \pm 2p_{q0} + p_{3,m3} \mp 2p_{q0}, \\ p_{3,m} &= p_{1,m} \pm p_{q0} + p_{2,m} \mp p_{q0}, \\ p_{3,m} &= p_{1,m} \pm 2p_{q0} + p_{2,m} \mp 2p_{q0}, \\ p_{1,m1} &= p_{1,m2} \pm p_{q0} + p_{1,m3} \mp p_{q0}, \\ p_{1,m1} &= p_{1,m2} \pm 2p_{q0} + p_{1,m3} \mp 2p_{q0}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Таким чином, у досліджуваній системі реалізуються множинні трихвильові параметричні резонансні взаємодії, які визначені співвідношеннями (4.2), (4.6), (4.7), (4.19). Загальна картина взаємодій виявляється досить складною.

Вплив полів сигналу накачки й ХПЗ на рух електронів будемо розглядати як відхилення від незбурених траєкторій. Для цього використовуємо наступну заміну змінних:

$$v_{qx} = \bar{v}_{q\perp} \cos \bar{p}_{q0} + \tilde{v}_{qx}, \quad v_{qy} = \bar{v}_{q\perp} \sin \bar{p}_{q0} + \tilde{v}_{qy} \quad (4.20)$$

де \tilde{v}_{qx} , \tilde{v}_{qy} — осциляторні x - та y - компоненти вектора швидкості q -го пучка. У цьому випадку, використовуючи заміну (4.20) і алгоритм асимптотичного інтегрування, який описаний, наприклад, в [1, 47], одержуємо систему рівнянь для усереднених та швидкоосцилюючих величин. Причому всі осциляторні гармоніки,

що цікавлять нас, будуть відразу ж враховуватись в \tilde{v}_{qx} та \tilde{v}_{qy} , які далі стандартним чином урахуються як у рівнянні неперервності, так і рівняннях Максвелла.

Відповідно до алгоритму асимптотичного інтегрування переходимо до усереднених змінних

$$\begin{aligned} v_{qz} &= \bar{v}_{qz} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{qv_z}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\ v_{qx} &= \bar{v}_{q\perp} \cos \bar{p}_{q0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{qv_x}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi) \\ v_{qy} &= \bar{v}_{q\perp} \sin \bar{p}_{q0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{qv_y}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi), \\ \zeta &= \bar{\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} u_{\zeta}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}, \Psi). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Рівняння для повільних змінних мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{qz}}{dz} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{qv_z}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \frac{d\bar{v}_{q\perp}}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{qv_{\perp}}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}), \\ \frac{d\bar{\zeta}}{dz} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^n} A_{\zeta}^{(n)}(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Обмежуємося третім наближенням за $1/\xi$. Алгоритм знаходження $\mathbf{u}^{(n)}$ й $\mathbf{A}^{(n)}$ відомий [1]. Із цих формул випливає: $u_{\zeta}^{(n)} = 0$ для будь-яких n ; $A_{\zeta}^{(1)} = 1$, $A_{\zeta}^{(n)} = 0$ для $n > 1$; $A_{v_z}^{(1)} = A_{v_z}^{(2)} = 0$, $A_{v_x}^{(1)} = A_{v_x}^{(2)} = 0$, $A_{v_y}^{(1)} = A_{v_y}^{(2)} = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\xi} u_{v_z}^{(1)} &= \frac{e}{m_e \bar{v}_{qz} \bar{\gamma}_q} \sum_{m=1}^N \left\{ \exp(i(p_{1,m} + p_0)) \times \right. \\
&\times \frac{\bar{v}_{q\perp}}{2c} \left(\frac{B_{1y,m} + iB_{1x,m} - (E_{1x,m} - iE_{1y,m}) \cdot \bar{v}_{qz} / c}{i(\Omega_{q,1,m} + \Omega_{q,0})} \right) + \\
&+ \frac{\bar{v}_{q\perp}}{2c} \left(\frac{B_{1y,m} - iB_{1x,m} - (E_{1x,m} + iE_{1y,m}) \cdot \bar{v}_{qz} / c}{i(\Omega_{q,1,m} - \Omega_{q,0})} \right) \times \\
&\times \exp(i(p_{1,m} - p_0)) + \left. \left(1 - \frac{\bar{v}_{qz}^2}{c^2} \right) \frac{E_{3z,m} \exp(ip_{3,m})}{i\Omega_{q,3,m}} + c.c \right\}
\end{aligned}$$

і так далі. У результаті отримуємо рішення як для швидкості (4.21), так і для її постійної складової (4.22).

Розв'язки рівняння неперервності знаходимо аналогічно як і у випадку задачі руху. Далі отримані розв'язки для швидкості і концентрації пучків підставляємо в рівняння Максвелла (4.10). Ураховуємо, що отримані вирази для швидкості і концентрації пучків, які отримані методом усереднених характеристик, мають вигляд рядів за малим параметром $1/\xi$. Розкладаємо їх також у ряди за гармоніками швидких фаз і отримуємо систему диференціальних рівнянь для амплітуд напруженості електричного поля електромагнітної хвилі сигналу, хвилі просторового заряду у кубічному нелінійному наближенні

$$\begin{aligned}
K_{2,1,m} \frac{d^2 E_{1x,m}}{dz^2} + K_{1,1,m} \frac{dE_{1x,m}}{dz} + D_{1,m} E_{1x,m} &= \\
&= K_{3,1,m} E_{3z,m} B_{2y,m} + F_{1x,m}, \\
K_{2,1,m} \frac{d^2 E_{1y,m}}{dz^2} + K_{1,1,m} \frac{dE_{1y,m}}{dz} + D_{1,m} E_{1y,m} &= \\
&= K_{3,1,m} E_{3z,m} B_{2x,m} + F_{1y,m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& C_{2,3,m} \frac{d^2 E_{3z,m}}{dz^2} + C_{1,3,m} \frac{dE_{3z,m}}{dz} + D_{3,m} E_{3z,m} = \\
& = C_{3,3,m} E_{1x,m} B_{2y,m}^* + C_{4,m} \left\langle \int \mathbf{E}_3 \left(\int \mathbf{E}_3 dp_{3,1} \right) dp_{3,1} \right\rangle_{p_{3,m}} + F_{3,m}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

У цих рівняннях:

$$\begin{aligned}
D_{1,m}(\omega_{1,m}, k_{1,m}) &= k_{1,m}^2 - \frac{\omega_{1,m}^2}{c^2} + \sum_{q=1}^2 \left[\frac{\omega_p^2}{\bar{\gamma}_q (\Omega_{1,q,m} - \eta_{1,m} \Omega_{q0})^2 c^2} \times \right. \\
& \times \left. \left(\Omega_{1,q,m} (\Omega_{1,q,m} - \eta_{1,m} \Omega_{q0,m}) - \frac{\bar{v}_{q\perp}^2}{2c^2} (\omega_{1,m}^2 - k_{1,m}^2 c^2) \right) \right], \\
D_{3,m}(\omega_{3,m}, k_{3,m}) &= -ik_{3,m} \left(1 - \sum_{q=1}^2 \frac{\omega_p^2 (1 - (\bar{v}_{qz}/c)^2)}{\Omega_{3,m}^2 \bar{\gamma}_q} \right)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

дисперсійні функції відповідно електромагнітної хвилі сигналу й хвилі ХПЗ

для m -ї гармоніки; $F_{1,m} = \frac{4\pi e}{c} \left\langle \sum_{q=1}^2 \frac{1}{\xi^3} (\bar{n}_q u_{v_x,q}^{(3)} + u_{n,q}^{(1)} u_{v_x,q}^{(2)} + u_{n,q}^{(2)} u_{v_x,q}^{(1)}) \right\rangle_{p_{1,m}}$,

$F_{3,m} = 4\pi e \left\langle \sum_{q=1}^2 \frac{1}{\xi^3} u_{n,q}^{(3)} \right\rangle_{p_{3,m}}$ – функції, що враховують кубічні нелінійні доданки. Фу-

нкції $u_{n,q}^{(1)}/\xi$, $u_{n,q}^{(2)}/\xi^2$, $u_{n,q}^{(3)}/\xi^3$ визначають осциляторні складові концентрації парці-

альних пучків у першому, другому й третьому наближенні відповідно; $u_{v_x,q}^{(1)}/\xi$

$u_{v_x,q}^{(2)}/\xi^2$, $u_{v_x,q}^{(3)}/\xi^3$ – осциляторні компоненти швидкості v_x ;

$$K_{1,1,m} = \frac{\partial D_{1,m}}{\partial(-ik_{1,m})}, \quad K_{2,1,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{1,m}}{\partial(-ik_{1,m})^2}, \quad K_{3,m}, \quad C_{1,3,m} = \frac{\partial D_{3,m}}{\partial(-ik_{3,m})},$$

$C_{2,3,m} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{3,m}}{\partial(-ik_{3,m})^2}$, $C_{3,m}$, $C_{4,m}$ є коефіцієнтами відповідних диференціальних рів-

нянь, які залежать від частот, хвильових чисел і параметрів системи. Коефіцієнти

системи рівнянь (4.23) також залежать від постійних складових швидкостей \bar{v}_q і концентрацій \bar{n}_q парціальних пучків. Тому систему рівнянь (4.23) доповнимо рівняннями для постійних складових

$$\frac{d\bar{v}_{qz}}{dz} = V_{qz}(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_q, \bar{n}_q), \quad (4.25)$$

$$\frac{d\bar{v}_{q\perp}}{dz} = V_{q\perp}(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_q, \bar{n}_q), \quad (4.26)$$

$$\frac{d\bar{n}_q}{dz} = N_q(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{E}_3, \bar{v}_q, \bar{n}_q). \quad (4.27)$$

Функції $V_{qz} = \sum_{q=1}^2 \frac{1}{\xi^3} A_{qv_z}^{(3)}$, $V_{q\perp} = \sum_{q=1}^2 \frac{1}{\xi^3} A_{qv_\perp}^{(3)}$, $N_q = \sum_{q=1}^2 \frac{1}{\xi^3} A_{qn}^{(3)}$ ураховують кубічні

нелінійні доданки.

Отриману систему кубічно-нелінійних рівнянь (4.23)-(4.27) аналізуємо чисельно. Ця система рівнянь описує нелінійні процеси в ДСЛВЕ клістронного типу.

4.3 Формування потужних електромагнітних хвиль із широким частотним спектром

Проведемо дослідження динаміки формування потужної мультигармонічної електромагнітної хвилі з використанням рівнянь (4.23)–(4.27) у ДСЛВЕ з наступними параметрами: середнє значення релятивістського фактора двопотокового гвинтового РЕП $\gamma_0 = 5,0$, різниця релятивістських факторів парціальних пучків $\Delta\gamma = 0,2$, плазмова частота парціальних пучків $\omega_p = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$, швидкості електронів у гвинтовому пучку спрямовані під кутом $\alpha = 15^\circ$ відносно осі системи, час-

тота першої гармоніки електромагнітного сигналу $\omega_{1,1} = 7 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, період ондулятора $\lambda_{2,1} = 4,5 \text{ см}$.

Порівнюючи частоту першої гармоніки електромагнітного сигналу $\omega_{1,1} = 7 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$ з плазмовою частотою двопотокових пучків $\omega_p = 1,0 \cdot 10^{11} \text{ c}^{-1}$, бачимо, що умова $\omega_{1,1} \gg \omega_p$ виконується. Це означає, що для всіх гармонік хвилі сигналу залежність хвильового числа від частоти є квазілінійною. Тому умови реалізації множинних резонансних взаємодій (4.5)-(4.7) так само як і (4.19) є виконаними.

Відомо, що всі гармоніки хвилі просторового заряду, частота яких менше за критичну частоту двопотокової нестійкості ($\omega_{cr} = 2,5 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$ для моделі, що розглядається), будуть підсилюватися внаслідок двопотокової нестійкості. Для досліджуваної моделі із гвинтовим електронним пучком у цю область підсилення попадає $\omega_{cr} / \omega_{1,1} \approx 35$ гармонік. Причому, частина з них, частоти яких менше за оптимальну частоту двопотокової нестійкості ($\omega_{opt} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$), зі збільшенням частоти будуть мати більші інкременти зростання й будуть утворювати аномальний спектр, у якому більш високочастотні гармоніки ХПЗ будуть мати більшу амплітуду. В область аномального спектра в цій моделі попадає $\omega_{opt} / \omega_{1,1} \approx 21$ гармоніка.

Відзначимо, що у випадку використання у ДСЛВЕ замість гвинтового прямолінійного пучка кількість гармонік, які формують мультигармонічний електромагнітний сигнал, зменшується. У цьому випадку критична частота двопотокової нестійкості стає у ~ 2 рази меншою. Відповідно у ~ 2 рази зменшується і кількість гармонік, які збуджуються в такому ДСЛВЕ. Тому в ДСЛВЕ, які призначені для формування потужних мультигармонічних електромагнітних хвиль потрібно використовувати саме гвинтові двопотокові РЕП.

Розглядаємо модель мультигармонічного ДСЛВЕ, що подана на рис. 1, у якій на вхід секції модуляції I подається монохроматичний сигнал із частотою $\omega_{1,1}$. Тут внаслідок трихвильового параметричного резонансу між електромагніт-

ним сигналом 1, Н-убітронний полем модулятора 2 у двопотокових електронному пучку 1 збуджується хвиля просторового заряду. Через те що на вхід модулятора подається монохроматична хвиля сигналу, то і Н-убітронне магнітне поле модулятора вибираємо також монохроматичним. На вхід модулятора подаємо сигнал з амплітудою 100 В/см, інші гармоніки дорівнюють нулю. Індукцію магнітного поля Н-убітронного поля вибираємо такою, що дорівнює $B_{2,1} = 800$ Гс, період модулятора, як зазначалось вище, $\lambda_{2,1} = 4,5$ см. Тоді на виході із секції модуляції одержуємо ХПЗ, спектр якої поданий на рис. 2. Як бачимо, на виході з модулятора формується хвиля ХПЗ, у якій амплітуда першої гармоніки істотно перевищує амплітуди інших гармонік.

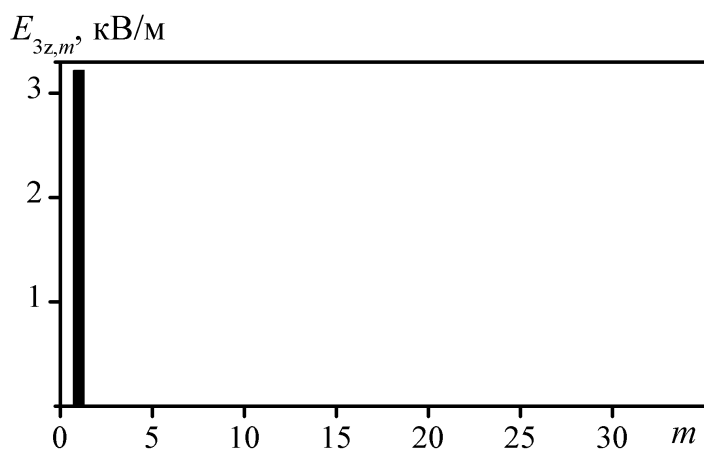


Рисунок 3.2 – Спектр ХПЗ на виході модулятора ($z = 50$ см)

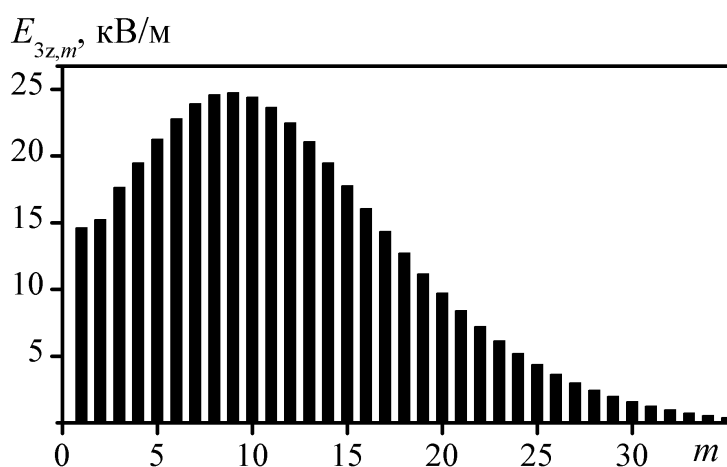


Рисунок 3.3 – Спектр ХПЗ на виході пролітної секції ($z = 125$ см)

Далі збуджена у двопотокових електронному пучку хвиля ХПЗ зростає внаслідок двопотокової нестійкості. Через те що частота першої гармоніки хвилі ХПЗ у 35 разів є меншою за критичну (і в 21 разів є меншою за оптимальну), то інкременти зростання перших 21 гармонік зі збільшенням частоти збільшуються й всі 35 гармоніки підсилюються внаслідок двопотокової нестійкості. У підсумку на виході із пролітної секції (координата системи $z = 125$ см) починає формуватися аномальний спектр, який поданий на рис. 3. При цьому максимальною є вже не перша гармоніка, як у випадку рис. 2, а десята.

Слід зазначити, що на виході із пролітної секції хвиля просторового заряду з необхідним спектром ще остаточно не сформована. Її формування триває й в прикінцевій секції. Одночасно із цим у прикінцевій секції відбувається збудження мультигармонічної електромагнітної хвилі завдяки множинним трихвильовим параметричним резонансам між мультигармонічною хвилею ХПЗ, мультигармонічним Н-убітронним полем накачки та електромагнітною хвилею сигналу. Параметри гармонік мультигармонічного магнітного поля накачки вибираємо таким чином, щоб в прикінцевій секції сформувати потужну мультигармонічну електромагнітну хвилю. Спектр такого магнітного поля поданий на рис. 4, а спектр електромагнітної хвилі в точці $z = 165$ см ДСЛВЕ поданий на рис. 5.

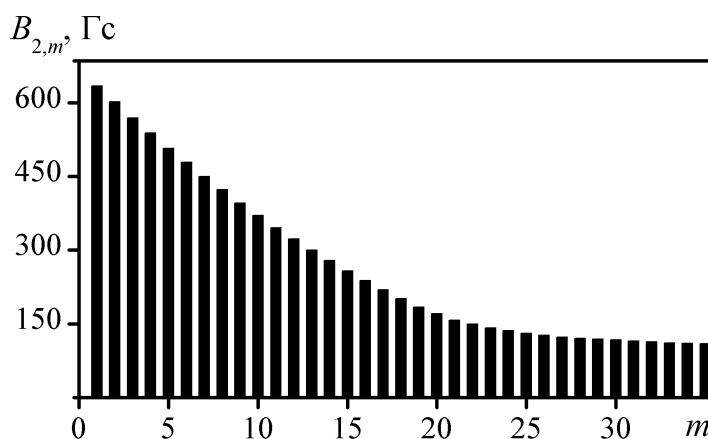


Рисунок 3.4 – Залежність амплітуд гармонік індукції магнітного поля

$$B_{1,m} = (B_{1x,m}^2 + B_{1y,m}^2)^{1/2} \text{ ондулятора прикінцевої секції від номера гармоніки}$$

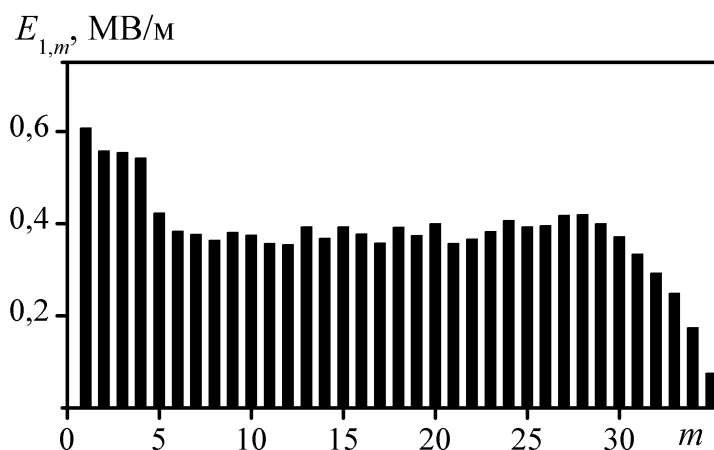


Рисунок 3.5 – Залежність модулів амплітуд гармонік електромагнітного сигналу $E_{1,m} = (E_{1x,m}^2 + E_{1y,m}^2)^{1/2}$ від номера гармоніки для поздовжньої координати системи $z = 165$ см

Як випливає з рис. 5 на виході мультигармонічного двопотокового супергетеродинного ЛВЕ клістронного типу із гвинтовим електронним пучком ми отримуємо потужну мультигармонічну електромагнітну хвилю із широким частотним спектром, у якому приблизно тридцять гармонік мають практично однакову амплітуду. Використання гвинтових двопотокових РЕП і наявність пролітної секції у клістронній моделі дозволило істотно розширити спектр сформованої хвилі. Також слід зазначити, що інкременти зростання двопотокової нестійкості у гвинтових двопотокових РЕП істотно вище, ніж у прямолінійних двопотокових РЕП. Це приводить до того, що мультигармонічні ДСЛВЕ із гвинтовими пучками мають менші поздовжні габарити. Так у досліджуваній системі формування мультигармонічної електромагнітної хвилі відбувається у точці з координатою $z = 165$ см, а в аналогічній системі із прямолінійним двопотоковим РЕП це має місце в точці з координатою $z = 257$ см [47]

ВИСНОВКИ

У поданому звіті побудована самоузгоджена кубічно-нелінійна теорія мультигармонічних двопотокових супергетеродинних лазерів на вільних електронах клістронного типу з Н-убітронною накачкою, у яких використовуються гвинтові релятивістські електронні пучки. Виконано аналіз режиму роботи, коли частота першої гармоніки електромагнітного сигналу багато менша за критичну частоту двопотокової нестійкості. Продемонстровано, що в цьому випадку має місце інтенсивна генерація вищих гармонік з сумірними амплітудами. Ураховано множинні трихвильові резонансні взаємодії хвиль різного типу. Показано, що використання гвинтових пучків у ДСЛВЕ клістронного типу дозволяє одержати потужний мультигармонічний електромагнітний сигнал з більш широким спектром порівняно із ДСЛВЕ, який використовує прямолінійні пучки. Показано, що темпи зростання електромагнітних хвиль у ДСЛВЕ із гвинтовими РЕП істотно вищі, а довжини насичення набагато менше, що дозволяє зменшити поздовжні габарити ДСЛВЕ. Продемонстровано перспективність використання ДСЛВЕ клістронного типу із гвинтовими РЕП для формування потужних мультигармонічних електромагнітних хвиль із широким частотним спектром.

Показано, що в разі використання мультигармонічного вхідного сигналу, що складається з малих кількостей гармонік (3 гармоніки), довжини насичення зменшуються більш ніж у 2 рази в порівнянні з ситуацією, коли на вхід подано монохроматичну електромагнітну хвилю.

Побудована кубічна нелінійна теорія множинних резонансних взаємодій гармонік зростаючої хвилі просторового заряду у двопотоковому гвинтовому електронному пучку, що поширюється в пролітній секції ДСЛВЕ Н-убітронного типу. Вивчено режим формування мультигармонічної хвилі просторового заряду, при якому частота першої гармоніки багато менше критичної частоти двопотокової нестійкості. Проведено аналіз впливу на ширину спектра й на рівні насичення мультигармонічної ХПЗ таких параметрів двопотокового РЕП як кут вльоту пучка α відносно фокусуєчого магнітного поля, середнє значення релятивістського фак-

тора γ_0 , різниця релятивістських факторів $\Delta\gamma$ двопотокового РЕП, плазмова частота парціальних пучків ω_p .

З'ясовано, що ширина частотного спектра мультигармонічної ХПЗ збільшується зі збільшенням середнього значення плазмової частоти, кута вльоту пучка α , середнього значення релятивістського фактора й зменшенням різниці релятивістських факторів. У спектрі такої ХПЗ збільшується число високочастотних гармонік. З'ясовано, що рівні насичення мультигармонічної ХПЗ при збільшенні кута вльоту пучка α , середнього значення релятивістського фактора й зменшенні різниці релятивістських факторів зменшуються, а при збільшенні плазмової частоти амплітуди мультигармонічної ХПЗ – збільшуються.

Показано, що інкременти зростання при збільшенні як кута вльоту пучка α , так і плазмової частоти збільшуються. З'ясовано, що в цих випадках довжини насичення мультигармонічної ХПЗ зменшуються. Тому використання таких пучків у двопотоковому супергетеродинному ЛВЕ повинне приводити до зменшення їхніх поздовжніх габаритів.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Kulish V.V. Hierarchic electrodynamics and free electron lasers / V.V. Kulish. – Boca Raton, London, New York : CRC Press, 2011. – 697 p.
2. Кулиш В.В. К теории супергетеродинных лазеров на свободных электронах клистронного типа / В.В. Кулиш // УФЖ. – 1991. – Т. 36, № 1. – С. 28–33.
3. Hierarchical asymptotic methods in the theory of cluster free electron lasers / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, A. J. Brusnik // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. — 2012. — Vol. 33, No. 2. — P. 149–173.
4. Effect of parametric resonance on the formation of waves with a broad multiharmonic spectrum during the development of two-stream instability / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, M. Y. Rombovsky // Plasma Physics Reports. — 2010. — Vol. 36, No. 7. — P. 594–600.
5. Plural interactions of space charge wave harmonics during the development of two-stream instability / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, M. Y. Rombovsky, V. V. Koval, I. I. Volk // Chinese Physics B. — 2015. — Vol. 24, No. 9. — P. 095201.
6. Mahdizadeh N. Saturation mechanism in a two-stream free-electron laser // Journal of Plasma Physics. — 2015. — Vol. 81, No. 06.
7. Mohsenpour T. Instability of wave modes in a two-stream free-electron laser with a helical wiggler and an axial magnetic field / T. Mohsenpour, N. Mehrabi // Physics of Plasmas. - 2013. - V. 20, No. 8. - P. 082133.
8. Супергетеродинные плазменно-пучковые ЛВЕ с винтовыми электронными пучками / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, Г. А. Алексеенко, В.В. Коваль, М.Ю. Ромбовский // Прикладная физика. – 2014. – № 5. – С. 24–28.
9. Ng K.-Y. Physics of intensity dependent beam instabilities. — World Scientific, 2006.
10. Kulish V.V. Hierarchical methods: Hierarchy and hierarchic asymptotic methods in electrodynamics, Vol. 1 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 380 p.

11. Kulish V.V. Hierarchical methods: Undulative electrodynamic system, Vol. 2 / V.V. Kulish. – Dordrecht, Boston, London : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 396 p.
12. Kulish V.V. Methods of averaging in nonlinear problems of relativistic electrodynamics / V.V. Kulish. – Atlanta : World Federation Published Company, 1998. – 263 p.
13. Kulish V. V. Modernized method of averaged characteristics for problem solving of multiharmonic resonant interactions in devices of high-current electronics / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, G. A. Oleksiienko // Journal of Nano-and Electronic Physics. — 2015. — Vol. 7, No. 2.
14. Лисенко О. В. Застосування модернізованого методу усереднених характеристик в задачах теорії плазмово-пучкових супергетеродинних лазерів на вільних електронах / О. В. Лисенко, Г. А. Олексієнко, М. О. Феденко // Журнал нано-та електронної фізики. — 2015. — № 7, № 4. — Р. 4083–1.
15. Коцаренко Н.Я. О возможности супергетеродинного усиления электромагнитных волн в электронных потоках / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // ЖТФ. – 1980. – Т. 50, № 2. – С. 220–222.
16. Коцаренко Н.Я. Об эффекте супергетеродинного усиления электромагнитных волн в системе плазма-пучок / Н.Я. Коцаренко, В.В. Кулиш // Радиотехника и электроника. – 1980. – Т. 25, № 11. – С. 2470–2471.
17. Bekefi G. Two-stream, free-electron lasers / G. Bekefi, K.D. Jacobs // J. Appl. Phys. – 1982. – Vol. 53, No. 6. – P. 4113–4121.
18. Болонин О.Н. Супергетеродинное усиление электромагнитных волн в системе двух релятивистских электронных потоков / О.Н. Болонин, В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // УФЖ. – Т. 33, № 10. – 1988. – С. 1465–1468.
19. Botton M. Two-stream instability in free electron lasers / M. Botton, A. Ron // IEEE Transactions on Plasma Science. – 1990. – Vol.18, No. 3. – P. 416–423.
20. Botton M. Gain enhancement in a free electron laser by two-stream instability / M. Botton, A. Ron // J. Appl. Phys. – 1990. – Vol. 67, No. 10. – P. 6583–6585.

21. Кулиш В.В. К теории релятивистских параметрических электронно-волновых лазеров на свободных электронах / В.В. Кулиш // УФЖ. – Т. 36, № 5. – 1991. – С. 686–693.
22. Кулиш В.В. К теории эффекта супергетеродинного усиления электромагнитных волн в плазме двухпучковой релятивистской электронной системы / В.В. Кулиш, В.П. Пугачев // Физика плазмы. – 1991. – Т. 17, № 6. – С. 696–705.
23. Кулиш В.В. Физика двухпучкового лазера на свободных электронах / В.В. Кулиш // Вестник МГУ. Серия: Физика и астрономия. – 1992. – Т. 33, № 3. – С. 64–78.
24. Kulish V.V. Superheterodyne electron-wave free-electron lasers / V.V. Kulish // International journal of infrared and millimeter waves. – 1993. – Vol. 14, No. 3. – P. 415–450.
25. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of superheterodyne and parametric electron laser / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // The International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 1993. – Vol. 14, No. 3. – P. 451–567.
26. Kulish V.V. Nonlinear self-consistent theory of two-stream superheterodyne free electron lasers / V.V. Kulish, S.A. Kuleshov, A.V. Lysenko // The international journal of infrared and millimeter waves. – 1994. – Vol. 15, No. 1. – P. 77–120.
27. Generation of high-power sub-THz waves in magnetized turbulent electron Beam Plasmas / M. K. A. Thumm, A. V. Arzhannikov, V. T. Astrelin, [et al] // Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves. – 2014. – Vol. 35, No 1. – P. 81-90.
28. Крылов Н.М. Введение в нелинейную механику / Н.М.Крылов, Н.Н. Боголюбов. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 352 с.
29. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский - М.: Наука, 1974. - 504 с.

30. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев - М.:Наука, 1969. – 380 с.
31. Гребенников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах / Е.А. Гребенников. - М.:Наука, 1986. – 256 с.
32. Кузелев М.В. Плазменная релятивистская СВЧ-электроника / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе, П.С. Стрелков. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 544 с.
33. Kulish V.V. Multiharmonic cubic-nonlinear theory of plasma-beam superheterodyne free-electron lasers of the dopplertron type / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // Plasma Physics Reports. - 2010. - V. 36, No. 13. - P. 1185.
34. Кулиш В.В. К теории плазма-пучковых супергетеродинных лазеров на свободных электронах с H-убитронной накачкой / В.В. Кулиш, А.В. Лысенко, В.В. Коваль // Письма в ЖТФ. – 2009. – Т. 35, вып. 15. – С.25–32.
35. Kulish V.V. Cubic-nonlinear theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with H-ubitron pumping / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // Telecommunications and Radio Engineering. - 2010. - V. 69, No. 20. - P. 1859.
36. Liu W. Instability of Two-stream Free-electron Laser with an Axial Guiding Magnetic Field /W. Liu, Z. Yang, Z. Liang // International Journal of Infrared and Millimeter Waves. – 2006. – Vol. 27, No. 8. – P. 1073–1085.
37. Saviz S. Gain enhancement in two-stream free electron laser with a planar wiggler and an axial guide magnetic field / S. Saviz, Z. Rezaei, Z. Farzin, M. Aghamir // Chinese Physics B. - 2012. - V. 21, No. 9. - P. 094103.
38. Ginzburg N.S. Nonlinear theory of a free electron laser with a helical wiggler and an axial guide magnetic field / N.S. Ginzburg, N.Yu. Peskov // Phys. Rev. ST Accel. Beams. - 2013. - V. 16, No. 9. - P. 090701.
39. Кузелев М.В. Методы теории волн в средах с дисперсией / М.В. Кузелев, А.А. Рухадзе. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 272 с.

40. Kulish V.V. On the theory of a plasma-beam superheterodyne free electron laser with H-ubitron pumping / V.V. Kulish, A.V. Lysenko, V.V. Koval // *Technical Physics Letters*. – 2009. – Vol. 35, No. 8. – P. 696–699.
41. N.A. Krall, and A.W. Trivelpiece, *Principles of Plasma Physics* (San Francisco Press, New York, 1986)
42. Супергетеродинные плазменно-пучковые ЛВЕ с винтовыми электронными пучками / В. В. Кулиш, А. В. Лысенко, Г. А. Алексеенко, В.В. Коваль, М.Ю. Ромбовский // *Прикладная физика*. – 2014. – № 5. – С. 24–28.
43. Lysenko A.V. Multiharmonic interactions of space charge wave harmonics during the development of two-stream instability / A.V. Lysenko, Yu.Yu. Volk, V.V. Koval, M.Yu. Rombovsky // 10th International Conference «Electronics and Applied Physics» (APHYS 2014): Conference Proceedings, (Kiev, Ukraine, 22-25, October, 2014). – Kiev, 2014. – С. 140-141.
44. Kulish V. Two-stream superheterodyne free electron lasers as formers of ultrashort electromagnetic clusters / V. Kulish, A. Lysenko, I. Volk. // 9th International Kharkiv Symposium on Physics and Engineering of Microwaves, Millimeter and Submillimeter Waves (MSMW): Conference Proceedings. — IEEE, 2016. — С. 1-3.
45. Kulish V. Modification of the method of averaged characteristics for multiharmonic problems in high-current electronics devices / V. Kulish, A. Lysenko, G. Oleksienko, I. Volk. // 2016 IEEE International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET): Conference Proceedings. – IEEE, 2016. – С. 377-380.
46. Kulish V. V. Ultrashort electromagnetic clusters formation by two-stream superheterodyne free electron lasers / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, I. I. Volk, O. Rybalko. // 41st International Conference on Infrared, Millimeter, and Terahertz waves (IRMMW-THz). — IEEE, 2016. — С. 1-2
47. Kulish V. V. Forming of ultrashort electromagnetic clusters by two-stream superheterodyne free electron lasers / V. V. Kulish, A. V. Lysenko, M. Y.

- Rombovsky, V. V. Koval, I. I. Volk // *Acta Physica Polonica A*. — 2017. — Vol. 131, No. 1. — P. 213–221.
48. Lysenko A. Forming of space charge wave with broad frequency spectrum in helical relativistic two-stream electron beams / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko // *Chinese Physics Letters*. — 2017. — Vol. 34, No. 7. — P. 75202.
49. Lysenko A. Influence of two-stream relativistic electron beam parameters on the space-charge wave with broad frequency spectrum formation / A. Lysenko, I. Volk // *Plasma Science and Technology*. — 2018. — Vol. 20, No. 3. — P. 35002.
50. Plural interactions of waves in multiharmonic two-stream superheterodyne free-electron lasers with helical electron beams / A. V. Lysenko, I. I. Volk, G. A. Oleksiienko // *Journal of Nano- and Electronic Physics*. — 2018. — Vol. 10, No. 2. — P. 2014-1-2014–9.
51. Lysenko A. Plural three-wave resonances of space charge wave harmonics in transit section of klystron-type two-stream FEL with helical electron beam / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko. — *Microwaves, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS), 2017 IEEE*, 2017.
52. Lysenko A. Multiple three-wave resonances in two-stream free-electron laser with a helical electron beam / A. Lysenko, I. Volk, A. Serozhko, O. Rybalko // *Information and Telecommunication Sciences*. — 2018. — Vol. 0, No. 1. — P. 58–64.