Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Навчально-науковий інститут
бізнес-технологій «УАБС»

О. В. Кузьменко,
А. О. Бойко,
В. В. Кобійчук,
В. В. Боженко

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Конспект лекцій

Суми
Сумський державний університет
2019

Міністерство освіти і науки України
Сумський державний університет
Навчально-науковий інститут бізнес-технологій «УАБС»

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності 051 *«Економіка»*
освітньої програми «Економічна кібернетика»
освітнього ступеня «магістр»
денної форми навчання

Затверджено
на засіданні кафедри економічної
кібернетики як конспект лекцій
із дисципліни
«Актуарні розрахунки».
Протокол № 1 від 27.08.2019 р.

Суми
Сумський державний університет
2019

Актуарні розрахунки : конспект лекцій / укладачі: О. В. Кузьменко, А. О. Бойко, В. В. Койбічук, В. В. Боженко. – Суми : Сумський державний університет, 2019. – 225 с.

Кафедра економічної кібернетики ННІ БТ «УАБС»

Зміст **С.**

ТЕМА 1 ЦІЛІ Й ІНСТРУМЕНТАРІЙ АКТУАРНИХ РОЗРАХУНКІВ

ЛЕКЦІЯ 1
Суть, завдання та цілі актуарних розрахунків

Суть, особливості, завдання й класифікація актуарних розрахунків. Склад і структура тарифної ставки. Витрати на ведення справи. Страховий внесок. Види страхових премій. Показники страхової статистики.

Історія виникнення актуарних розрахунків

Історія страхування нараховує щонайменше 20 сторіч. Проте воно могло широко розвинутися лише після встановлення основних положень математичної теорії ймовірностей і нагромадження досить достовірних статистичних даних. Поява цих передумов дала можливість розроблення *техніки страхових розрахунків за довгостроковими й короткостроковими операціями страхування життя та майна, чи, як їх коротше називають, актуарних розрахунків.*

Слово «актуарій» походить від латинського «*actuarius*», що означало спочатку службовця відділу запису актів громадянського стану. Пізніше воно закріпилося за визначеною професійною групою працівників страхової системи.

Основи теорії актуарних розрахунків були закладеними в XVII ст. роботами вчених Д. Граунта, Яна де Вітта, Є. Галлея. Розвитку актуарної техніки сприяло відкриття в 1762 р. в Лондоні страхового товариства «Еквітебл». На противагу раніше поширеним страховим товариствам, «Еквітебл» запровадив у рамках страхування на випадок смерті диференційовані за віковими групами тарифи страхових платежів, що базувалися на таблицях смертності. Приклад товариства «Еквітебл» почали наслідувати інші страхові товариства спочатку в Англії, а потім і в інших країнах.

Завдання актуарних служб страхових компаній полягає в розробленні комплексу спеціальних економіко-математичних методів калькулювання системи тарифних ставок і резервів внесків з усіх видів особового й майнового страхування, визначенні системи нормативів у галузі перестрахування, організації оптимальної інвестиційної політики коштом фондів особового та пенсійного страхування й т. ін.

1.1 Суть, особливості, завдання й класифікація актуарних розрахунків

Актуарні розрахунки – це система математичних і статистичних закономірностей, що регламентує відносини між страховиком і страхувальником. Під час актуарних розрахунків визначають витрати, необхідні на страхування певного об’єкта, й собівартість і вартість послуги, наданої страховиком страхувальникові. За допомогою актуарних розрахунків визначають частку участі кожного страхувальника в створенні страхового фонду, тобто розміри тарифних ставок.

Мета – формування системи фундаментальних знань щодо сутності, побудови й аналізу математичних моделей і методів, що регламентують відносини між страховиками та страхувальниками.

Предмет – економіко-математичні моделі розрахунків страхових премій, запасів і резервів, динаміки фінансового стану страхових компаній.

Страховик – страхова компанія, тобто юридична особа, яка здійснює страхування й приймає на себе зобов'язання відшкодувати збитки або виплатити страхову суму в разі настання певних страхових випадків.

Страхувальник, який страхує свої майнові інтереси, може бути як юридичною, так і фізичною особою.

Застрахований – фізична особа, життя та здоров'я якої є об'єктом страхового захисту. Застрахований може бути одночасно й страхувальником.

Форму, в якій розраховують витрати на проведення певного страхування, називають *страховою (актуарною) калькуляцією*.

Актуарна калькуляція допомагає визначати страхові платежі за договором страхування. Основними *завданнями актуарних розрахунків* є:

- дослідження й групування ризиків у межах страхової сукупності, тобто додержання вимоги наукової класифікації ризиків для створення гомогенної підсукупності в межах загальної страхової сукупності;
- обчислення математичної ймовірності настання страхового випадку, визначення частоти та ступеня тяжкості наслідків завданого збитку як в окремих ризикових групах, так і в цілому за страховою сукупністю;
- математичне обґрунтування необхідних витрат на ведення справи страховиком і прогнозування тенденцій їх розвитку;
- математичне обґрунтування необхідних резервних фондів страховика, пропонування конкретних методів та джерел їх формування.

Актуарні розрахунки класифікують за такими ознаками: *галуззю страхування, часом проведення, ієрархічною рівністю*.

За *ознакою галузі* розрізняють актуарні розрахунки особового (особистого) страхування, актуарні розрахунки майнового страхування й актуарні розрахунки у сфері страхування відповідальності.

За *часом проведення* – планові та звітні.

Залежно від *ієрархічної рівності* актуарні розрахунки можуть бути загальними (для всієї країни), зональними (для певного регіону) й страховика (для окремої страхової організації).

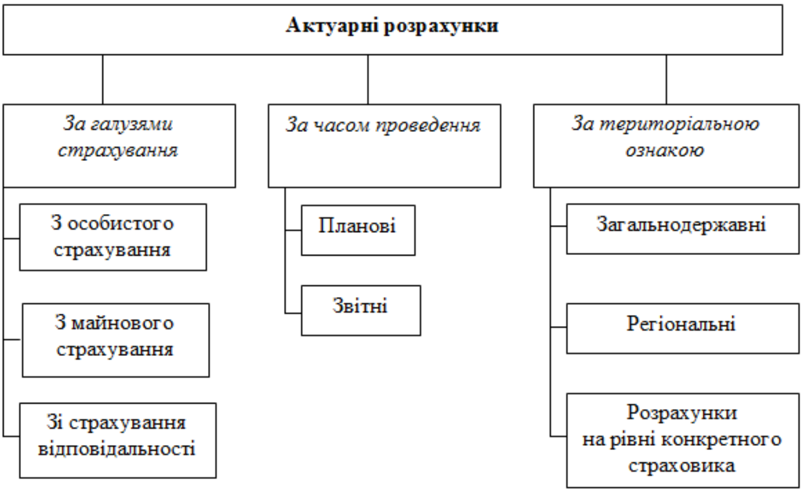

Рисунок. 1.1 – Класифікація актуарних розрахунків

1.2 Склад і структура тарифної ставки. Витрати на ведення справи

Тарифна ставка – ціна страхового ризику та інших витрат, адекватне грошове вираження зобов'язань страховика з укладеного договору страхування.

Тарифну ставку, за якою укладають договір страхування, називають *брутто-ставкою.* Брутто-ставка складається з двох частин – *нетто-ставки* й *навантаження.* Фактично, нетто-ставка виражає ціну страхових ризиків: пожежі, повені, вибуху тощо. Навантаження покриває витрати страховика з організації та проведення страхової справи, враховує відрахування в запасні фонди, містить елементи прибутку. В основу побудови нетто-ставки за будь-яким видом страхування покладено ймовірність настання страхової події.

Імовірністю події *А* – позначають *Р(А)* – називають відношення кількості позитивних для неї випадків *М* до загальної кількості всіх однаково можливих випадків *N*. Оскільки ймовірність події виражають правильним дробом, тобто тим, у якому чисельник менший від знаменника *(М* завжди менша або дорівнює *N*), зрозуміло, що 0 < *Р(А)* < 1. Якщо Р (А) дорівнює 0, то подію А вважають неможливою. Якщо вона дорівнює 1, то це достовірна подія.

Отже, ймовірність події перебуває в межах від 0 до 1. Якщо вона досягає своїх граничних меж, то страхування на випадок настання цієї події не проводять. Страхові відносини укладають лише тоді, коли завчасно не відомо, відбудеться в цьому році та чи інша подія чи ні, тобто все залежить від випадку.

Проводячи страхування, сума страхового відшкодування, виплачувана потерпілим об’єктам, переважно відрізняється від страхової суми за ними.

$$T_n = P(A) \cdot K \cdot 100\,, \qquad (1.1)$$

де T_n – тарифна нетто-ставка; Р (А) – імовірність страхової події; А – страховий випадок; *К* – коефіцієнт співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування.

Наведена формула дає можливість розмежувати поняття «ймовірність страхової події» та «ймовірність збитку». Імовірністю збитку називають добуток імовірності страхової події *Р(А)* та коефіцієнта *К*.

Розгорнута формула для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми така:

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{K_B}{K_Д};\quad K=\frac{C_B}{C_C},\qquad (1.2)$$

де K_B – кількість виплат за той чи інший період (за рік); $K_Д$ – кількість укладених договорів страхування в цьому році; C_B – середня виплата на один договір; $С_с$ – середня страхова сума на один договір.

У результаті формула для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми набирає вигляду:

$$T=\frac{K_B\cdot C_B}{K_Д\cdot C_B}\cdot 100\text{, або } T=\frac{B}{C}\cdot 100,\qquad (1.3)$$

де B – загальна сума виплат страхового відшкодування; С – загальна страхова сума застрахованих об’єктів.

Відношення кількості виплат K_B до кількості укладених договорів $K_Д$ визначає частоту страхових подій, частоту страхових випадків. Відношення середньої виплати на один договір C_B до середньої страхової суми на один договір $С_с$ є аналогом коефіцієнта співвідношення середньої виплати до середньої страхової суми на один договір страхування у формулі для розрахунку нетто-ставки зі 100 грн страхової суми. Збитковість страхової суми розраховують як за видами страхування в цілому, так і за окремими страховими ризиками. За цими даними визначають розмір нетто-ставки. Після його розрахунку визначають розмір сукупної тарифної ставки, або брутто-ставки. Для обчислення брутто-ставки до нетто-ставки додають навантаження.

Витрати на ведення справи зазвичай розраховують на 100 грн страхової суми (аналогічно до нетто-ставки), інші навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки. Розмір сукупної брутто-ставки розраховують за формулою:

$$T_b = T_n + F_{abc}, \tag{1.4}$$

де $T_{ь}$ – брутто-ставка; T_n – нетто-ставка; F_{abc} – навантаження.

Величини T_b, T_n, F_{abc} зазначають як абсолютні, тобто в гривнях зі 100 грн страхової суми. Оскільки багато статей навантаження визначають у відсотках до брутто-ставки, то на практиці її обчислюють за формулою:

$$T_b = T_n + F_{abc} = T_n + F_{abc} + F_{\frac{k}{z}} \cdot T_b, \tag{1.5}$$

де F_{abc} – стаття навантаження, передбачена в тарифі в гривнях зі 100 грн страхової суми; $F_{\frac{k}{z}}$ – частка статей навантаження, закладена в тариф у відсотках до брутто-ставки.

З огляду на це після нескладних перетворень маємо:

$$T_b = \frac{(T_n + F'_{abc})}{(1 - F_{\frac{k}{z}})}. \tag{1.6}$$

Якщо всі елементи навантаження визначені у відсотках до брутто-ставки, то величина F'_{abc} = 0. У такому разі формула спрощується та набирає вигляду:

$$T_b = \frac{T_n}{(1 - F_{\frac{k}{z}})}. \tag{1.7}$$

Головний елемент навантаження – *витирати на ведення справи.* До них належать витрати, пов'язані з укладанням та обслуговуванням договору страхування.

У страховій практиці розрізняють витрати на ведення справи внутрішньою службою страхової організації й витрати на ведення справи зовнішньою сіткою страхової організації. Виділяють також *постійні* й *змінні витрати на ведення справи* страховиком.

Змінні витрати на ведення справи виділяють на окреме страхування (вид страхування, окремий страховий поліс). *Постійні витрати* розподіляють на весь портфель укладених договорів страхування.

Установлюючи страхові тарифи, потрібно брати до уваги той факт, що страховими внесками необхідно покривати не лише страхові суми й відшкодування, а й витрати на утримання страхової організації. З огляду на це витрати на ведення справи можна класифікувати так: *аквізиційні, інкасаційні, ліквідаційні, організаційні, управлінські.*

Аквізиційні витрати – виробничі витрати страхової організації, пов'язані із залученням нових страхувальників та укладанням нових договорів страхування за посередництва страхових агентів.

Інкасаційні витрати – витрати, пов'язані з обслуговуванням готівкового обороту надходження страхових платежів. Це витрати на виготовлення бланків квитанцій про прийом страхових платежів та облікових реєстрів (відомостей, довідок тощо).

Ліквідаційні витрати – витрати з ліквідації збитків, завданих страховою подією (заробітна плата осіб, які займаються ліквідацією збитків, судові витрати, поштово-телеграфні витрати й витрати, пов'язані з виплатою страхового відшкодування).

Організаційні витрати, пов'язані із заснуванням страхового товариства, належать до активів страховика, тому що є інвестиціями.

Управлінські витрати поділяють на загальні витрати управління й витрати управління майном.

Рисунок 1.2 – Класифікація витрат на ведення справи страховиком

Страховий внесок. Види страхових премій

Страховий внесок, або страхову премію, можна розглядати з економічного, юридичного й математичного поглядів. Економічна сутність страхового внеску виявляється в тому, що він є частиною національного доходу, виділеною страхувальником для гарантування його інтересів у разі впливу негативних подій.

Із юридичного погляду страховий внесок можна визначити як грошовий вираз страхового зобов'язання, обумовленого та підтвердженого укладанням договору страхування між його учасниками.

У математичному розумінні страховий внесок – це періодично повторюваний платіж страхувальника страховикові.

Якщо взяти загальний розмір зобов'язань страховика зі страхування життя *B*, вартість однієї ренти – A_x, де x – вік особи, яка сплачує страховий внесок

P_x, то одержимо, що $P_x = \frac{B}{A_x}$, якщо страховий внесок сплачують пожиттєво, або $P_x = \frac{B}{L_t A_x}$, якщо страхові внески мають строковий характер, де $L_t A_x$ виражає вартість однієї термінової ренти.

Наведені дві формули свідчать про те, що страховий внесок у математичному розумінні може бути вираженим як середня величина. Тобто як частина, що припадає на один поліс страхового портфеля від усіх зобов'язань страховика.

У майновому страхуванні страховий внесок можна репрезентувати у вигляді середньої величини, одержаної як відношення загальної прогнозної величини платежів страхувальника $\sum Q$ за певний період до загальної кількості застрахованих об'єктів *n,* тобто $\frac{\sum Q}{n}$.

За своїм *призначенням* страховий внесок поділяють на *ризикову премію, накопичувальний внесок, нетто-премію, достатній внесок, брутто-премію.*

Ризикова премія – чиста нетто-премія. Частина страхового внеску в грошовій формі, призначена для покриття ризику. Величина ризикової премії залежить від ступеня ймовірності настання страхового випадку. Ризиковий внесок можна розглядати як функцію, похідну від імовірності реалізації ризику в часі й просторі.

Накопичувальний внесок призначений для покриття платежів страхування в разі закінчення терміну страхування. Під час дії договору страхування розмір накопичувального внеску змінюється.

Нетто-премія – частина страхового внеску, потрібна для покриття страхових платежів за певний проміжок часу за певним видом страхування. Величина нетто-премії прямо залежить від розвитку ризику. Нетто-премія дорівнюватиме ризиковій премії у випадках, якщо простежується планомірний розвиток ризику.

Нетто-премія в майновому й особовому (особистому) страхуваннях має різну структуру, зумовлену характером видів страхування та їх призначенням. Нетто-премія майнового страхування складається з ризикової премії й стабілізаційного навантаження (надбавки). В актуарних розрахунках особистого страхування нетто-премія складається з ризикової премії та накопичувального внеску. Інколи до них додають стабілізаційне навантаження (надбавки).

Достатній внесок дорівнює сумі нетто-премії й навантаження, введених до витрат страховика. Достатній внесок можна розглядати як брутто-премію або тарифну ставку.

Брутто-премія – тарифна ставка страховика. Складається з достатнього внеску та надбавок на покриття витрат, пов’язаних із проведенням попереджувальних заходів, реклами, витрат на покриття збиткових видів страхування тощо. Кожний елемент, уведений до брутто-премії, приводить до збільшення всієї тарифної ставки (страхового тарифу).

За характером ризиків страхові внески класифікують на *натуральні* й *постійні* премії.

Натуральна премія – премія, призначена для покриття ризику за певний проміжок часу. Вона відповідає фактичному розвитку ризику. Натуральна премія в певний період дорівнює ризиковій премії; з часом натуральна премія змінюється. За різними видами страхування її виражають різними ставками. У договорах страхування, передбачених на тривалий час, ризикова премія не залишається незмінною. Вона повторює щорічні зміни ризику.

Постійні (фіксовані) внески – страхові внески, що з часом не змінюються, а залишаються постійними.

За формою сплати страхові внески поділяють на *одночасні*, *поточні* й *річні.*

Одночасний внесок – страхова премія, сплачувана страхувальником страховикові за весь період страхування наперед. Суму одночасного внеску визначають до моменту укладення договору страхування.

Поточний внесок – частина від загальних зобов'язань страхувальника щодо страховика, тобто є частиною одночасного внеску. Сума поточних внесків за цим видом страхування буде більшою за одночасний внесок.

Річний внесок (премія). Одночасний страховий внесок зазвичай роблять за договором, що має річний термін дії.

За часом сплати страхові внески поділяють на *авансові платежі* й *попередню премію.*

Авансовими платежами називають платежі, сплачувані страхувальником страховикові завчасно – до настання терміну їх сплати, зазначеного в укладеній угоді. Авансові платежі зазвичай вносять за весь термін дії договору.

Попередня премія – платіж, внесений страхувальником до настання терміну сплати.

Залежно від того, як страхові внески відображаються в балансі страховика, їх поділяють на *перехідні платежі, ефективну* та *результативну премії.*

Перехідні платежі. Страхові угоди досить часто укладають на один або кілька років. Здебільшого простежується незбігання календарного й страхового років. Якщо річний страховий внесок сплачують у поточному календарному році, але розподіляють на період, що охоплює наступний календарний рік, потрібно провести розподіл страхової премії.

Частину страхової премії, розподілену на наступний календарний рік, називають перехідним платежем.

Результативна премія – це різниця між річною нетто-премією та перехідними платежами поточного року, розподіленими на наступний рік. Величина результативної премії за інших рівних умов залежить від періодичності сплати страхових платежів.

Ефективна премія – сума результативної премії й перехідних платежів, зарезервованих у поточному році та перенесених на наступний рік. Ефективна премія – це вся сума поточних страхових платежів, якими володіє страховик у поточному році.

1.3 Показники страхової статистики

У практиці актуарних розрахунків широко використовують страхову статистику – систематизоване вивчення й узагальнення наймасовіших і найтиповіших страхових операцій на основі вироблених статистичною наукою методів оброблення узагальнених підсумкових натуральних і вартісних показників, що характеризують страхову справу. Усі показники, що підлягають статистичному вивченню, поділяють на дві групи. Перша група відображає процес формування страхового фонду, друга – його використання.

Страхову статистику можна звести до аналізу таких показників: кількості об'єктів страхування – n; кількості страхових подій – e; кількості об'єктів, постраждалих унаслідок страхових подій, – m; суми зібраних страхових платежів – $\sum p$; суми виплаченого страхового відшкодування – $\sum Q$; страхової суми для будь-якого об'єкта страхування – $\sum S_n$; страхової суми, що припадає на досліджуваний пошкоджений об'єкт сукупності, – $\sum S_m$.

Розрахункові показники страхової статистики такі.

Частота страхових подій. Вона дорівнює співвідношенню кількості страхових подій до кількості застрахованих об'єктів, тобто частота страхових подій свідчить про те, скільки страхових випадків припадають на один об'єкт страхування. Наведене співвідношення можна кількісно репрезентувати як величину, меншу від одиниці. Це означає, що одна страхова подія може спричинити кілька страхових випадків. З огляду на це випливає термінологічна відмінність між поняттями страховий випадок і страхова подія. Страховою подією може бути град, ураган тощо, що охоплює своїм шкідливим впливом численні об'єкти страхування (випадки).

Спустошеність страхової події (коефіцієнт кумуляції ризику) – відношення кількості постраждалих об'єктів страхування до кількості страхових подій, тобто $\frac{m}{n}$. Коефіцієнт кумуляції ризику свідчить про те, скільки страхових випадків настануть. Мінімальний коефіцієнт кумуляції ризику дорівнює одиниці.

Коефіцієнт (ступінь) збитковості виражає співвідношення суми виплаченого страхового відшкодування до страхової суми всіх постраждалих об'єктів, тобто $\frac{\sum Q}{\sum S_m}$. Цей показник менший або дорівнює одиниці. Зворотне положення можна вважати неможливим, тому що воно означає знищення всіх застрахованих об'єктів більше ніж один раз.

Середня страхова сума на один об'єкт (договір) страхування – відношення загальної страхової суми всіх об'єктів страхування до кількості всіх об'єктів страхування, тобто $\frac{\sum S_n}{n}$.

Середня страхова сума на один постраждалий об'єкт дорівнює страховій сумі всіх постраждалих об'єктів, поділеній на кількість цих об'єктів, тобто $\frac{\sum S_n}{m}$.

Збитковість страхової суми дорівнює сумі виплаченого страхового відшкодування, поділеній на страхову суму всіх об'єктів страхування, тобто $\frac{\sum Q}{\sum S_n}$.

Норма збитковості – це відношення суми виплаченого страхового відшкодування до суми зібраних страхових платежів, виражене у відсотках, тобто $\frac{\sum Q}{\sum P} \cdot 100$.

ЛЕКЦІЯ 2

Інструментарій актуарних розрахунків

Ефективна відсоткова ставка. Схема простих відсотків. Схема складних відсотків. Ефективна відсоткова ставка на частковому тимчасовому проміжку. Номінальна відсоткова ставка. Інтенсивність відсотків.

2.1 Ефективна відсоткова ставка

У страхових операціях премії й страхові виплати пов'язані з конкретними моментами чи періодами часу. У договорах страхування фіксують терміни, дати, періодичності виплат. Необхідність обліку тимчасового фактора очевидна, тому що отримані страховою компанією у вигляді премій суми певний час «працюють» (накопичуються), і страховий тариф потрібно визначати з урахуванням цієї «роботи». Наша мета – розглянути механізми нарощення отриманих сум.

Почнемо з найважливішого параметра фінансових обчислень – *ефективної відсоткової ставки.*

Нехай у момент часу t суму S інвестують у певний проект, що завершується через час h, приносячи дохід ΔS. Здебільшого його вимірюють у відносних одиницях, розглядаючи відношення $i = \dfrac{\Delta S}{S}$, що називають *ефективною відсотковою ставкою*, за розглянутий проміжок часу. «Ефективна» в цьому контексті означає «реальна», «фактична»; зазвичай цим прикметником нехтують, а параметр i називають відсотковою ставкою. Поряд із цим терміном i називають ставкою інвестиційного доходу, нормою прибутковості.

Час h називають періодом *нарахування (нагромадження, нарощення)*, у страхових операціях це здебільшого рік, проте використовують й інші тимчасові проміжки: півріччя, квартал, місяць і навіть день.

Повертаючись до розглянутого прикладу, зазначимо, що дохід $\Delta S = iS$, а отримана в результаті операції *нарощена (накопичена) сума* $S = S_0 + \Delta S = S_0(1+i)$.

Для наших завдань становить інтерес насамперед процес нагромадження суми на об'єднанні тимчасових проміжків за заданих відсоткових ставок на кожному з них. Дві схеми такого процесу розглянуті нижче.

Відсоткова ставка i може залежати від моменту інвестування t інвестованої суми S й тривалості періоду нарахування h, тобто узагальнено $i = i(t, S, h)$. Проте, як достатнє для страхової практики наближення, ми будемо припускати, що i не залежить від t та S.

На завершення зазначимо, що відсоткову ставку i зазвичай визначають у відсотках, проте обчислення проводять із величиною $i/100$. Наприклад, фраза «річна відсоткова ставка дорівнює 20 %» означає, що в розрахунках використовують величину i = 0,2.

2.2 Схема простих відсотків

Нехай початковий капітал S_0 інвестують на два послідовних проміжки часу (t_0, t_1) і (t_1, t_2), відсотковими ставками на цих проміжках є i_1 та i_2 відповідно.

Нагромадження суми за схемою *простих відсотків* припускає, що відсотки нараховують лише на початковий капітал S_0. Тому збільшення капіталу (доходу) на першому інтервалі становить $\Delta S_1 = S_0 i_1$, на другому – с $\Delta S_2 = S_0 i_2$. Сумарний дохід $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = S_0(i_1 + i_2)$, а накопичена сума $S = S_0 + \Delta S = S_0(1 + i_1 + i_2)$.

Зазначимо, що відсоткова ставка на об'єднаному проміжку (t_0, t_2) $i = \dfrac{\Delta S}{S_0} = i_1 + i_2$.

Узагальнюючи результат об'єднання n проміжків, одержуємо накопичену суму

$$S = S_0(1 + i_1 + i_2 + ... + i_n) \qquad (2.1)$$

та підсумкову відсоткову ставку $i = i_1 + i_2 + \ ... \ + i_n$.

У важливому окремому прикладі фіксованої відсоткової ставки – $i_k = i, \quad k = 1, 2, \ ..., \ n$ – одержуємо для накопиченої суми вираз

$$S = S_0(1 + ni), \qquad (2.2)$$

який називають ***формулою простих відсотків***.

Схеми нагромадження (2.1) і (2.2) дозволяють одержати накопичену суму, якщо фіксують різні ставки $i_1, i_2, ..., i_m$ на періоди $n_1, n_2, ..., n_m$ відповідно:

$$S = S_0(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m). \qquad (2.3)$$

Зазвичай нагромадження за описаною схемою застосовують у разі короткотермінових (на термін до одного року) інвестиційних проектів. Під час довготермінових фінансових операцій, зокрема страхування життя й пенсійних схем, використовують іншу схему нагромадження, в якій відсотки нараховують на накопичуваний капітал.

2.3 Схема складних відсотків

Розглянемо приклад із двома послідовними тимчасовими проміжками. Позначення попередні.

Нагромадження суми за схемою ***складних відсотків*** припускає, що на кожному тимчасовому проміжку відсотки нараховують на суму, накопичену до кінця попереднього проміжку.

У нашому разі сума, накопичена до кінця першого проміжку, $S_1 = S_0(1+i_1)$, а сума, накопичена до кінця другого проміжку, $S_2 = S_1(1+i_2) = S_0(1+i_1)(1+i_2)$.

Відсоткову ставку *i* на об'єднаному проміжку (t_0, t_2) визначають з умови $1+i = (1+i_1)(1+i_2)$, тобто $i = i_1 + i_2 + i_1 i_2$.

Узагальнюючи результат об'єднання *n* проміжків, одержуємо накопичену суму

$$S = S_0(1+i_1)(1+i_2)\ \cdot\ ...\ \cdot\ (1+i_n) \qquad (2.4)$$

та підсумкову відсоткову ставку $i = (1+i_1)(1+i_2)\ \cdot\ ...\ \cdot\ (1+i_n) - 1$. У важливому окремому прикладі фіксованої відсоткової ставки – $i_k = i,\ \ k = 1, 2,\ ...,\ n$ – одержуємо такий вираз для накопиченої суми:

$$S = S_0(1+i)^n, \qquad (2.5)$$

що називають ***формулою складних відсотків.***

Схеми нагромадження (2.4) і (2.5) дозволяють одержати накопичену суму в разі фіксування послідовних у часі ставок $i_1, i_2,\ ...,\ i_m$ на періоди $n_1, n_2,\ ...,\ n_m$ відповідно:

$$S = S_0(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\ \cdot\ ...\ \cdot\ (1+i_m)^{n_m}. \qquad (2.6)$$

2.4 Ефективна відсоткова ставка на частковому тимчасовому проміжку

Зафіксуємо одиничний часовий проміжок (наприклад, один рік) і розіб'ємо його на *m* рівних частин (у страховій практиці здебільшого *m* = 2; 4; 12, тобто частинами є півріччя, квартал, місяць).

Нехай *i* – ефективна відсоткова ставка на одиничному проміжку. Позначимо через $i_{\bullet}^{(m)}$ ефективну відсоткову ставку на *m* частковому тимчасовому проміжку.

Завдання полягає у визначенні $i_{\bullet}^{(m)}$ так, щоб «робота» грошей на об'єднанні проміжків довжиною 1/*m* кожний приводила до такої самої накопиченої суми, що й ефективна відсоткова ставка *i* на одиничному проміжку.

*Схема простих відсотків***.** З огляду на (2.2) маємо $S_0(1+m\mathrm{i}_{\bullet}^{(\mathrm{m})}) = S_0(1+i)$. Відповідно до цього $\mathrm{i}_{\bullet}^{(\mathrm{m})} = \dfrac{i}{m}$.

Нехай тепер період нагромадження $t = n/m$ – раціональне число. Накопичена за цей проміжок часу сума:

$$S = S_0(1+n\mathrm{i}_{\bullet}^{(\mathrm{m})}) = S_0(1+n\frac{i}{m}) = S_0(1+ti).$$

Ураховуючи, що будь-яке матеріальне число може бути з якою завгодно точністю апроксимованим раціональним числом, для довільного періоду нагромадження t маємо формулу нагромадження

$$S(t) = S_0(1+ti). \tag{2.7}$$

*Схема складних відсотків***.** Ураховуючи (2.5), маємо $S_0(1+\mathrm{i}_{\bullet}^{(\mathrm{m})})^m = S_0(1+i)$, відповідно до цього

$$\mathrm{i}_{\bullet}^{(\mathrm{m})} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1. \tag{2.8}$$

Аналогічно до попереднього прикладу за $t = n/m$ маємо $S = S_0(1+i^{(m)})^n = S_0(1+i)^{\frac{n}{m}} = S_0(1+i)^t$, і для довільного t формула нагромадження за схемою складних відсотків така:

$$S\,(t) = S_0(1+i)^t\,. \tag{2.9}$$

Формула (2.9) є однією з основних формул фінансової математики. На завершення порівняємо різні схеми нагромадження.

Можна помітити, що за фіксованої ефективної відсоткової ставки на одиничному ($t = 1$) проміжку для $0 < t < 1$ маємо $(1+i)^t < (1+ti)$. Відповідно до цього нагромадження за схемою простих відсотків вище, ніж за схемою складних, а для $t > 1$ маємо протилежний результат. Відповідна графічна ілюстрація наведена на рисунку 2.1. Графіки ілюструють процеси нагромадження за схемами (2.7) і (2.9).

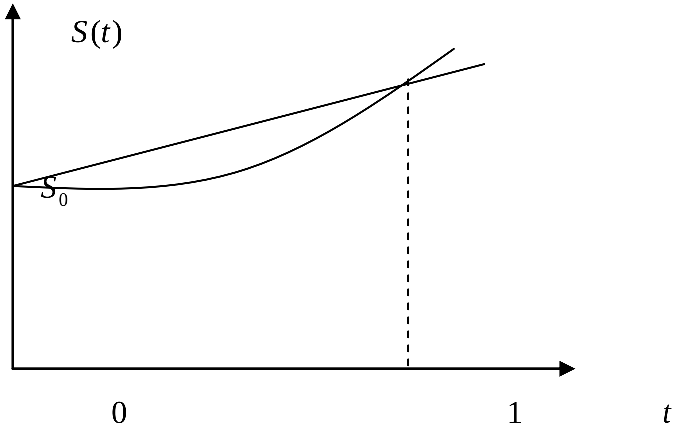

Рисунок 2.1 – Процес нагромадження

Скрізь надалі незалежно від величини t будемо припускати, що процес нагромадження відбувається за схемою складних відсотків (формулою (2.9)), проте братимемо до уваги, що іноді використовують змішану схему: для цілого числа років користуються формулою (2.9), для дробової частини періоду нагромадження – формулою (2.7). Отже, якщо $t = n + a,$ де n – ціла, а a – дробова частини t, то $S(t) = S_0(1+i)^n(1+\alpha i)$.

2.5 Номінальна відсоткова ставка

Як зазначено раніше, у фінансових операціях фіксують одиничний часовий проміжок, здебільшого один рік. Проте нараховувати відсотки доводиться кілька разів на рік за півріччями, кварталами тощо. Цю операцію легко здійснити за допомогою ефективної відсоткової ставки на відповідному проміжку, що може бути або заданою безпосередньо, або визначеною за ефективною відсотковою ставкою на одиничному проміжку. Проте у фінансовій практиці додержуються іншого. Зазвичай задають фіктивну річну відсоткову ставку $i^{(p)}$, у позначенні якої *p – період нарахування відсотків (період оберту, конвертації),* а ефективна відсоткова ставка за період *1/p* пов’язана з $i^{(p)}$ співвідношенням

$$i_{\bullet}^{(p)} = \frac{i^{(p)}}{p}. \qquad (2.10)$$

Ставку $i^{(p)}$ називають *номінальною відсотковою ставкою, що обертається (конвертується) з частотою p* чи, лаконічніше, *номінальною відсотковою ставкою.*

Як приклад, що ілюструє відповідну термінологію, зазначимо фразу з контракту: «18 % річних зі щоквартальним нарахуванням відсотків». Це означає, що $i^{(4)}$ = 18 %, $i_{\bullet}^{(4)}$ = 4,5 %.

Наведемо співвідношення, що пов'язує номінальну відсоткову ставку з ефективною:

$$i^{(p)} = pi_{\bullet}^{(p)} = p\left\lfloor(1+i)^{1/p} - 1\right\rfloor. \qquad (2.11)$$

На завершення ще раз наголосимо, що номінальна ставка є лише зручним способом опису реально застосовуваної ефективної ставки.

Інтенсивність відсотків

Розглянемо дуже важливу локальну характеристику процесу нагромадження суми.

Нагадаємо, що похідна $f'(t)$ функції $f(t)$ характеризує швидкість зміни функції в момент часу t, а відношення $\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ – відносну швидкість зміни функції.

Нехай $S(t)$ – сума, накопичена до моменту t. Тоді відносна швидкість нагромадження суми

$$\delta(t) = \frac{S'(t)}{S(t)}. \qquad (2.12)$$

Функцію $\delta(t)$ називають *інтенсивністю відсотків*, інші терміни – *силою росту, силою відсотка.*

Вважаючи $S(t_0) = S_0$ та інтегруючи диференціальне рівняння (2.12), одержуємо опис процесу нагромадження:

$$S(t) = S_0 \exp\left[\int_{t_0}^{t} \delta(u)du\right]. \qquad (2.13)$$

У дуже важливому практичному прикладі (яким ми надалі й обмежимося) постійної інтенсивності відсотків

$\delta(t) = \delta$ із (2.13), позначивши період нагромадження $t - t_0$ через t, одержуємо формулу нагромадження

$$S(t) = S_0 e^{\delta\, t}. \tag{2.14}$$

Порівнюючи (2.9) і (2.14), одержуємо співвідношення, що пов'язує δ та i.

Дійсно, маємо $S_0 e^{\delta\, t} = S_0 (1+i)^t$, відповідно до цього $1+i = e^{\delta}$, а

$$i = e^{\delta} - 1, \tag{2.15}$$

чи

$$\delta = \ln\,(1+i). \tag{2.16}$$

Використовуючи (2.11) і (2.15), виразимо номінальну відсоткову ставку через параметр δ:

$$i^{(p)} = p\,(e^{\frac{\delta}{p}} - 1). \tag{2.17}$$

На завершення зазначимо, що ефективна відсоткова ставка i більша за δ, але за малих i вони подібні. Так, за i = 3 %, δ = 0,029 56, і відносна похибка наближеної рівності $\delta = i$ становить 1,5 %. Цю обставину корисно враховувати, тому що формули розрахунку страхових тарифів для різних схем страхування життя містять множник $\frac{i}{\delta}$, що за малих i може бути заміненим на 1.

ЛЕКЦІЯ 3
Інструментарій актуарних розрахунків: дисконтування, фінансові ренти

Дисконтування: сучасна вартість, ставка дисконтування. Фінансові ренти: потоки платежів, рівняння еквівалентності, постійні ренти, термінові ренти, відстрочені ренти, зведення ренти до кінця терміну, p-термінові ренти, зростаючі ренти, зведення зростаючої ренти до кінця терміну, p-термінові зростаючі ренти, безупинні постійні й перемінні ренти, сучасна вартість ренти.

3.1 Дисконтування

Сучасна вартість

У страховій практиці під час визначення страхової премії у відповідний момент необхідно, щоб через t років накопичена сума (за відомої постійної ефективної відсоткової ставки i) становила S (t).

Зв'язок між P (t) і S (t) описують співвідношенням $S(t) = P(t)(1+i)$, відповідно до якого

$$P(t) = S(t)(1 + i)^{-t}. \tag{3.1}$$

Величину P (t) називають сучасною (поточною, зведеною) вартістю (величиною) (present value) суми S (t), а процес обчислення сучасної вартості суми – дисконтуванням (зведенням до моменту $t = 0$). Різницю $S - P$ називають дисконтом (discount).

Зведену вартість одиничної суми ($S(t) = 1$) позначають v (t); отже, $v(t) = (1 + i)^{-t}$

Величину

$$v = (1 + i)^{-1} \quad (3.2)$$

називають коефіцієнтом дисконтування (дисконтувальним множником); за допомогою нього сучасна вартість суми S (t) набирає вигляду

$$P(t) = S(t)v. \quad (3.3)$$

Термін «дисконтування» вживають у більш широкому значенні – як відшкодування вартості суми S (t) у будь-який попередній момент часу.

Якщо S (t) – сума в момент t_2, то її вартість у момент $t_1(t_1 < t_2)$ визначають як $P(t_1) = S(t_2)v^{t_2 - t_1}$.

У такому разі говорять, що сума $S(t_2)$ зведена (дисконтована) до моменту t_1.Термін «зведення» зручно застосовувати щодо процесу нагромадження, під час якого суму «зводять» до більш пізнього моменту часу.

Будь-які операції над грошовими сумами можливі, лише якщо суми зведені до того самого моменту часу.

Відзначимо, що при $\delta(t) = \delta v = e^{-\delta}$ сучасна вартість суми S (0)

$$P(t) = S(t)e^{-\delta t}. \quad (3.4)$$

Ставка дисконтування

Нехай фіксований одиничний проміжок часу – один рік, і суму інвестують на цей час за річної ефективної відсоткової ставки *i*. Сума накопичень до кінця терміну S = 1 + *i*. Отже, *i* відіграє роль доходу на інвестований капітал (дорівнює 1).

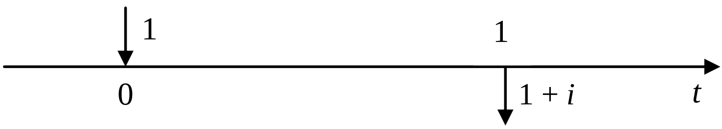

Рисунок 3.1 – Сума, накопичена до кінця терміну

Отже, якщо сучасна вартість відсотків на капітал дорівнює 1, то відповідну їй вартість ефективної відсоткової ставки називають *ефективною ставкою дисконтування* (effective rate of discount), або просто ставкою дисконтування.

Позначаючи ставку дисконтування через d, маємо таке співвідношення:

$$d = iv = i/(1 + i) = ie^{-\delta} = 1 - v = 1 - e^{-\delta}. \qquad (3.5)$$

Також звернемо увагу, що

$$v = 1 - d,\ i = d/(1 - d). \qquad (3.6)$$

Отже, визначені чотири основні параметри, використовувані у фінансовій математиці: i, δ, v, d.

Поділимо одиничний проміжок на p рівних частин. Позначимо через $d_{\bullet}^{(p)}$ ефективну ставку дисконтування за час 1/p (p – *період нарахування відсотків*).

Використовуючи ефективну ставку дисконтування й вищенаведені співвідношення, послідовно маємо

$$\begin{aligned} d_{\bullet}^{(p)} &= i_{\bullet}^{(p)} v^{1/p} = [(1 + i)^{1/p} - 1]v^{1 + p} = \\ &= (v^{-1/p} - 1)v^{1/p} = 1 - v^{1/p} = 1 - (1 - d)^{1/p}. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Як і в разі з ефективною відсотковою ставкою за час на практиці використовують не реальну ефективну ставку дисконтування, а номінальну (умовну) ставку дисконтування (nominal rate of discount):

$$d^{(p)} = pd_{\bullet}^{(p)} = p[1 - (1 - d)^{1/p}]. \qquad (3.8)$$

3.2 Фінансові ренти

Потоки платежів

Страхові операції дуже часто пов'язані не з разовими платежами, а з їх певною послідовністю в часі. Прикладами можуть служити сплата премій, виплата пенсій, надходження доходів від інвестицій і т. ін. Такі послідовності платежів називають *потоками платежів* (cash flows). Окремий платіж називають *членом потоку*.

Потік платежів, усі члени якого позитивні, а часовий інтервал між членами однаковий, називають *фінансовою рентою* (рентою), або *ануїтетом* (annuity), незалежно від призначення походження платежів. Сплата премій із розстроченням і виплата пенсій – приклади ренти.

Термінологія

Член ренти – розмір окремого платежу.

Період ренти – часовий проміжок між двома послідовними платежами.

Термін ренти – часовий проміжок від початку першого періоду до кінця останнього.

Річні ренти – виплати, що проводять один раз на рік.

Р-термінові ренти – кількість виплат у році.

Постійні ренти – ренти з однаковими розмірами платежів.

Перемінні ренти – розміри платежів змінюються за певним законом.

Вірні ренти – сплату платежів здійснюють безумовно, кількість членів такої ренти заздалегідь відома.

Умовна рента – рента, що залежить від настання певної випадкової події, кількість її членів заздалегідь невідома (приклад – довічні пенсії).

Рівняння еквівалентності

Розглянемо такий потік платежів: у моменти $t_1, t_2, ..., t_n$ проводять виплати $b_1, b_2, ..., b_n$ відповідно. Назвемо таку серію виплат пенсією. Необхідно визначити сучасну вартість *A* такої пенсії.

Нехай v – множник, що дисконтує. Відповідно до (3.1) маємо

$$A = b_1 v^{t_1} + b_2 v^{t_2} + \ ... \ + b_n v^{t_n}. \tag{3.9}$$

Сучасну вартість пенсії *A* можна розглядати як суму, що особа повинна внести до пенсійного фонду в момент укладення договору (його здебільшого вважають початком відліку), щоб у майбутньому (за фіксованої відсоткової ставки) забезпечити собі цю пенсію. Ці відношення ілюструє рисунок 3.2.

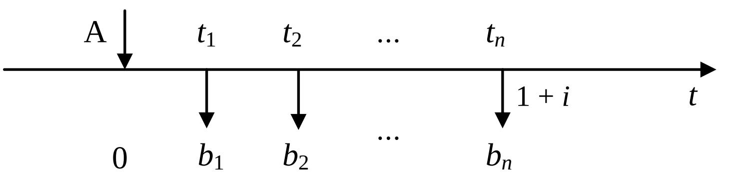

Рисунок 3.2 – Відношення під час сплати пенсії

У розглянутому прикладі плату *A* за пенсію проводять як разовий внесок у момент укладення договору. Проте зазвичай цю плату здійснюють як серію внесків $c_1, c_2, ..., c_k$ у моменти $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ (у пенсійній практиці $\tau_k < t_1$).

Необхідно встановити справедливе співвідношення між двома потоками платежів – пенсією й серією внесків. Принципом, на підставі якого встановлюють таке співвідношення, є *фінансова еквівалентність,* відповідно до якої еквівалентними вважають такі платежі, в яких рівні зведені до того самого моменту часу вартості.

Порівнюючи сучасні вартості пенсії й серії внесків, одержуємо співвідношення

$$c_1 v^{\tau_1} + c_2 v^{\tau_2} + \ \dots \ + b_k v^{t_k} = \\ = b_1 v^{\tau_1} + b_2 v^{t_2} + \ \dots \ + b_k v^{t_k}, \tag{3.10}$$

що називають *рівнянням еквівалентності*.

Звертаємо увагу, що зведення можна здійснювати до будь-якого моменту часу, проте найчастіше таким моментом є початок чи кінець терміну ренти.

Якщо моменти $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k, t_1, t_2, ..., t_n$ об'єднати в одну послідовність, тобто розглядати один потік платежів (величини c_i. необхідно для цього замінити на $-c_i$), то алгебраїчна сума зведених вартостей членів потоку дорівнюватиме нулю. Ця обставина пояснює зміст виразу «принцип нуля», яким часто називають співвідношення (3.10).

У реальній пенсійній практиці потік виплат має характер ренти, тобто $t_k - t_{k-1} = const$, а члени потоку b_k. або постійні, або змінюються відповідно до певного закону.

Постійні ренти

Розглядаємо лише вірні ренти. Проаналізуємо різні варіанти таких рент та їх вартості в початковий і кінцевий моменти терміну ренти. Надалі i, v, d, $i^{(p)}$, $d^{(p)}$ – визначені раніше фінансові константи на одиничному тимчасовому проміжку.

Термінові ренти

Розглянемо n послідовних одиничних (один рік) проміжків часу (0, 1), (1, 2), …, (n – 1, n). Серію з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних наприкінці кожного проміжку, називають *рентою постнумерандо* (immediate annuity).

Аналогічно серію з n виплат, розміри яких дорівнюють 1, здійснюваних на початку кожного проміжку, називають *рентою пренумерандо* (annuity-due).

Сучасні вартості рент постнумерандо й пренумерандо позначають символами $a_{\overline{n}|}$ та $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ відповідно.

Очевидно, що

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \ \dots \ + v^n = \frac{v - v^{n+1}}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}, \qquad (3.11)$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \ \dots \ + v^{n-1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{v} = \frac{1 - v^n}{d}. \qquad (3.12)$$

Зазначимо, що $a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Відстрочені ренти

Розглянемо проміжок часу (0, 1), (1, 2), …, (m – 1, m), (m, m + 1), …, (m + n – 1, m + n). Серію з n одиничних виплат, зроблених у момент t = m + 1, t = m + 2, …, t = m + n, називають *відстроченою рентою постнумерандо* (deferred immediate annuity). Її сучасну вартість позначають символом $m|a_{\overline{n}|}$.

Аналогічно серію, виплати якої здійснюють у моменти t = m, t = m + 1, …, t = m + n –1, називають *відстроченою рентою пренумерандо* (deferred annuity-due). Позначення її сучасної вартості – $m|\ddot{a}_{\overline{n}|}$.

Очевидно, що

$$m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot v^m, \quad m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot v^m.$$

Крім того,

$$m|a_{\overline{n}|} = a_{\overline{n+m}|} - a_{\overline{m}|}, \quad m|\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n+m}|} - \ddot{a}_{\overline{m}|}.$$

Зведення ренти до кінця терміну

Розглянемо тимчасові проміжки з розділу «Негайні ренти». Часто виникає необхідність у визначенні вартості ренти в момент t = n (тобто накопичених сум). Позначимо через $S_{\overline{n}|}$ вартість ренти постнумерандо в момент t = n (момент останнього платежу) і через $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ вартість ренти пренумерандо в момент t = n (тобто через одиницю часу після останнього платежу).

Використовуючи (3.3), одержимо

$$S_{\overline{n}|} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \ \dots \ + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{3.13}$$

$$\ddot{S}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ \dots \ + (1+i) = (1+i)S_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{3.14}$$

У таблиці 3.1 наведені значення складних відсотків та ануїтетів за 15,0 %. Таблиця 3.1 є актуарною.

Очевидно, що ці самі вирази можуть бути одержаними зведенням до моменту t = n сучасних вартостей відповідних рент:

$$S_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n, \ \ddot{S}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n. \tag{3.15}$$

Звертаємо увагу, що значення $S_{\overline{n}|}$ для різних i та n також наведені в актуарних таблицях.

Таблиця 3.1 – Таблиця складних відсотків і значень ануїтетів за 15,0 %

n	$(i+1)^n$	v^n	$a_{\overline{n}|}$	**Функція**	**Значення**
1	1,150 00	0,869 57	0,869 6	i	1,150 000
2	1,322 50	0,756 14	1,625 7	$i^{(4)}$	0,144 761
3	1,520 88	0,657 52	2,283 2	$i^{(2)}$	0,142 232
4	1,749 01	0,571 75	2,855 0	$i^{(12)}$	0,140 579
5	2,011 36	0,497 18	3,352 2	δ	0,139 762
6	2,313 06	0,432 33	3,784 5		
7	2,660 02	0,375 94	4,160 4		
8	3,059 02	0,326 90	4,487 3	d	0,130 435
9	3,517 88	0,284 26	4,771 6	$d^{(2)}$	0,134 990
10	4,045 56	0,247 18	5,018 8	$d^{(4)}$	0,137 348
11	4,652 39	0,214 94	5,233 7	$d^{(12)}$	0,138 951
12	5,350 25	0,186 91	5,420 6		
13	6,152 79	0,162 53	5,583 1	$\frac{i}{i^{(2)}}$	1,036 190
14	7,075 71	0,141 33	5,724 5	$\frac{i}{i^{(4)}}$	1,054 613
15	8,137 06	0,122 89	5,847 4	$\frac{i}{i^{(12)}}$	1,067 016
16	9,357 62	0,106 86	5,954 2	$\frac{i}{\delta}$	1,073 254
17	10,761 26	0,092 93	6,047 2		

Продовження таблиці 3.1

n	$(i+1)^n$	v^n	$a_{\overline{n}\rceil}$	**Функція**	**Значення**
18	12,375 45	0,080 81	6,128 0	$\frac{i}{\delta^{(2)}}$	1,111 190
19	14,231 77	0,070 27	6,198 2	$\frac{i}{\delta^{(4)}}$	1,092 113
20	16,366 654	0,061 10	6,259 3	$\frac{i}{\delta^{(12)}}$	1,079 516

Зведення відстроченої ренти до кінця терміну здійснюють так само: сучасну вартість множать на $(1+i)^{m+n}$. Спеціальні позначення для накопичених сум не потрібні.

Уведені величини пов’язані різноманітними співвідношеннями. Наведемо певні з них:

$$\begin{array}{l} ia_{\overline{n}\rceil} + v^n = 1 \ (a); \ \ iS_{\overline{n}\rceil} + 1 = (1+i)^n \ (b), \\ d\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} + v^n = 1 \ (c), \ \ d\ddot{S}_{\overline{n}\rceil} + 1 = (1+i)^n \ (d). \end{array} \quad (3.16)$$

Алгебраїчна перевірка цих співвідношень тривіальна. З’ясуємо фінансове трактування певних із них.

Співвідношення *(a)* може бути інтерпретованим так (рис. 3.3). Одинична грошова сума, інвестована в момент t = 0, зумовлює потік платежів, зображений на рисунку 3.3.

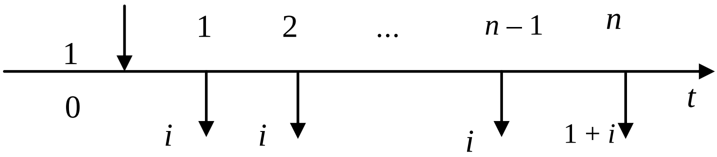

Рисунок 3.3 – Фінансове трактування співвідношення *(а)*

Сучасна вартість потоку складається з двох доданків: перший зумовлений платежами i та дорівнює $ia_{\overline{n|}}$; другий – вартість одиничного платежу в момент t = n – дорівнює v^n. Отже, $A = ia_{\overline{n|}} + v^n$. З іншого боку, відомо, що інвестували 1, тобто $A = 1$.

Цікаво, що граничним переходом *у (а)* при $n \to \infty$ є вартість так званої «довічної ренти» $a_{\overline{\infty|}} = \frac{1}{i}$, тобто сума $1/i$, інвестована в момент t = 0, зумовлює нескінченний потік одиничних платежів.

Співвідношення (с) може бути одержаним, якщо перший доданок розглянутого вище потоку трактувати як сучасну вартість ренти пренумерандо з розміром платежів, що дорівнює d.

Р-термінові ренти

У розглянутих раніше рентах виплату платежів зводили один раз – на початку чи наприкінці взятого за 1 проміжку часу. У страховій практиці поширені ситуації, в яких за фіксованої на одиничному проміжку ефективної відсоткової ставки платежі виплачують p разів за одиницю часу. Прикладами можуть служити сплата страхових внесків і виплат, щомісячна виплата пенсії й т. ін. Такі ренти називають ***р-терміновими.***

Уведемо необхідну термінологію й позначення. Розглянемо n послідовних проміжків часу *(0, 1), (1, 2), ...,* *(n – 1, n)*; зазвичай, *i* – ефективна відсоткова ставка на кожному з них. Поділимо кожен проміжок на *p* рівних частин (часткові проміжки) довжиною *1/p*. Здебільшого на практиці одиницею часу є рік, а значенням р = 12; 4; 2 відповідають місяць, квартал, півріччя відповідно.

Серію з *np* виплат величиною *1/p,* зроблених наприкінці кожного часткового проміжку, називають ***p-терміновою рентою постнумерандо.*** Її сучасну вартість позначають символом $a^{(p)}{}_{\overline{n}|}$; вартість, зведена до кінця терміну (тобто до моменту *t = n),* – $S^{(p)}{}_{\overline{n}|}$.

Зазначимо, що величина кожного члена ренти дорівнює *1/p,* отже, одиницею виміру грошових сум є сума усіх виплат за одиницю часу.

Наприклад, якщо протягом 5 років наприкінці кожного місяця виплачують 100 грн, і рік узятий за одиницю часу, то одиницею виміру грошових сум є 1 200 грн. Водночас сучасна вартість зазначеної ренти є $1200\,a^{(12)}{}_{\overline{5}|}$, а вартість, накопичена до кінця 5-річного терміну, – $1200\,S^{(p)}{}_{\overline{n}|}$.

Аналогічно серію з *np* виплат величиною *1/p,* зроблених на початку кожного часткового проміжку, називають ***p-терміновою рентою пренумерандо.*** Її сучасна вартість – $\ddot{a}^{(p)}{}_{\overline{n}|}$, накопичена – $\ddot{S}^{(p)}{}_{\overline{n}|}$.

Сучасну й накопичену вартості ***p-терміновых рент*** легко виразити через основні фінансові константи на одиничному тимчасовому проміжку та вартості відповідних звичайних рент.

Наведемо спочатку очевидні співвідношення:

$$a^{(p)}{}_{\overline{n}|} = S^{(p)}{}_{\overline{n}|} \cdot v^n,\ \ S^{(p)}{}_{\overline{n}|} = a^{(p)}{}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n;$$
$$\ddot{a}^{(p)}{}_{\overline{n}|} = \ddot{S}^{(p)}{}_{\overline{n}|} \cdot v^n,\ \ \ddot{S}^{(p)}{}_{\overline{n}|} = \ddot{a}^{(p)}{}_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n. \quad (3.17)$$

Зазначимо також, що сучасні ***вартості p-термінових рент*** постнумерандо й пренумерандо пов'язані співвідношенням

$$a^{(p)}_{\overline{n|}} = \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \cdot v^n . \tag{3.18}$$

Отже, досить виразити $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}$ через основні константи, щоб одержати інші необхідні формули. Це легко зробити, якщо розглядати ***p-термінову ренту*** як звичайну з одиницею часу *1/p*, ефективною відсотковою ставкою $i_{\bullet}^{(p)}$, членом ренти *1/p* і терміном ренти *np*. Тоді маємо

$$a^{(p)}_{\overline{n|}@i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np|}@i_{\bullet}^{(p)}} . \tag{3.19}$$

З огляду на (3.14), (3.17) і (3.19)

$$\ddot{a}_{\overline{n|}@i} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1+(v_{\bullet}^{(p)})^{np}}{d_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-(1-d)^n}{d_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1-v^n}{d_{\bullet}^{(p)}} , \tag{3.20}$$

де номінальна ставка дисконтування $d^{(p)}$ виражена через ефективну ставку дисконтування,

$$d^{(p)} = p(1-(1-d)^{\frac{1}{p}}) = p(1-v^{\frac{1}{p}}). \tag{3.21}$$

Остаточно одержуємо

$$\ddot{a}^{(p)}{}_{\overline{n}|@i} = \frac{1-v^n}{p(1-v^{\frac{1}{p}})}. \qquad (3.22)$$

Поряд із (3.22) використовують вираз $\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}$ через $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. Із (3.21) легко одержуємо

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(p)}} \cdot \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}. \qquad (3.23)$$

Тепер для $a^{(p)}{}_{n}$, одержимо, використовуючи формулу (3.24):

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d^{(p)}} - \frac{1-v^n}{p} = \frac{(1-v^n)(p-d^{(p)})}{pd^{(p)}} = \\ = (1-v^n)\frac{p\,(1-d_{\bullet}^{(p)})}{p \cdot pd_{\bullet}^{(p)}} = (1-v^n)\frac{v_{\bullet}^{(p)}}{pd_{\bullet}^{(p)}} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}. \qquad (3.24)$$

Тобто

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(p)}}. \qquad (3.25)$$

Із (3.25) випливає вираз $a^{(p)}_{\overline{n}|}$ через $a_{\overline{n}|}$:

$$a^{(p)}_{\overline{n}|} = \frac{i}{i^{(p)}} \cdot a_{\overline{n}|}. \qquad (3.26)$$

Накопичені *вартості p-термінових рент* тепер можуть бути визначеними за допомогою співвідношень (3.25) і (3.26).

Формули обчислення сучасних вартостей *p-термінових рент* одержані з припущення, що n – натуральне число. Проте процедуру одержання цих формул, що базується на співвідношенні (3.26), легко узагальнити на випадок $t = n + k/p,\ 0 \le k \le n - 1$. Вибираючи як одиничний тимчасовий проміжок довжину $1/p$, за аналогією з (3.26) маємо

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|@i} = \frac{1}{p} \cdot \ddot{a}_{\overline{np+k}|@i^{(p)}}. \tag{3.27}$$

Повторюючи попередні викладення, аналогічно одержуємо

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{t}|@i} = \frac{1-v^t}{d^{(p)}}, \qquad a_{\overline{t}|@i} = \frac{1-v^t}{i^{(p)}}. \tag{3.28}$$

Під час застосування формул (3.28) не варто забувати, що одиницею виміру грошових сум є сума всіх виплат за одиницю часу. Також звертаємо увагу на те, що обчислення, пов'язані *з p-терміновими рентами,* стають зрозумілими, якщо за одиницю виміру взяти проміжок часу довжиною *1/p.*

За аналогією зі звичайною відстроченою рентою вводять *p-термінові відстрочені ренти.* Позначення сучасних (у момент t = 0) вартостей таких рент – $m|a^{(p)}_{\overline{n|}}$, $m|\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}$. Отже,

$$m|a^{(p)}_{\overline{n|}}=v^m a^{(p)}_{\overline{n|}},\ m|\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}=v^m\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}. \tag{3.29}$$

Перемінні (зростаючі) ренти

Перемінною називають ренту, розміри платежів якої змінюються за певним законом.

Негайні зростаючі ренти

Розглянемо, як раніше s, послідовність одиничних проміжків часу (0, 1), (1, 2), ..., *(n* – 1, *n).* Потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t = k$, $k = 1, 2, ..., n$, називають *зростаючою рентою постнумерандо.*

Сучасну вартість зростаючої ренти постнумерандо позначають символом $(Ia)_{\overline{n|}}$ і визначають так:

$$\begin{aligned}(Ia)_{\overline{n|}} &= v+2v^2+\ ...\ +nv^n = v\,(1+2v+\ ...\ +nv^{n-1}) = \\ &= v\,(v+v^2+\ ...\ +v^n) = v\left(\frac{v-v^{n+1}}{1-v}\right)= \\ &= v\,\frac{1-(n+1)v^n+nv^{n+1}}{(1-v)^2}.\end{aligned} \tag{3.30}$$

Сучасну вартість зростаючої ренти постнумерандо легко виразити через вартість звичайної ренти. З огляду на те, що $i = (1 - v)/v$, перепишемо (3.30):

$$(Ia)_{\overline{n|}}=\frac{1-v^n}{i(1-v)}-v\frac{nv^n(1-v)}{(1-v)^2}=\frac{a_{\overline{n|}}}{d}-\frac{nv^n}{i}, \tag{3.31}$$

або

$$(Ia)_{\overline{n}|} = \frac{a_{\overline{n}|}}{d} - \frac{nv^n}{i}. \qquad (3.32)$$

Потік платежів, розміри яких становлять k одиниць у моменти $t = k - 1,\ k = 1, 2, ...,$ називають *зростаючою рентою пренумерандо.*

Сучасну вартість зростаючої ренти пренумерандо позначають символом $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ і визначають як

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \ ... \ + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{(1-v)^2}. \qquad (3.33)$$

Із (3.33) одержуємо

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{(1-v)^2} - \frac{nv^n}{1-v} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{d}. \qquad (3.34)$$

На практиці величини платежів зростаючої ренти можуть утворювати довільну арифметичну прогресію. Цей приклад цілком можна описати вже розглянутими. Дійсно, нехай, наприклад, величини платежів ренти пренумерандо $b_k = a + \beta k,\ k = 0, 1,\ ..., n-1...$. Репрезентуємо їх як $b_k = (a-\beta) + \beta\,(k+1),\ k = 0, 1, ..., n-1...$

Такий потік платежів можна розглядати як об'єднання двох рент – постійної з величиною виплати $a - \beta$, зростаючої з одиницею виміру виплати, що дорівнює β. Сучасна вартість об'єднаної ренти:

$$A = (a-\beta)\ddot{a}_{\overline{n}|} + \beta(I\ddot{a})_{\overline{n}|}.$$

Відстрочені зростаючі ренти

Розглянемо проміжки часу (0, 1), (1, 2), ..., (m – 1, m), (m, m + 1), ..., (m + n – 1, m + n). Потік платежів із моментами виплат $t_k = m + k$ і відповідними величинами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ називають *відстроченою зростаючою рентою постнумерандо.*

Сучасну вартість такої ренти позначають символом $m \,|\, (Ia)_{\overline{n}|}$. Вона пов'язана із сучасною вартістю негайної зростаючої ренти постнумерандо очевидним співвідношенням:

$$m \,|\, (Ia)_{\overline{n}|} = v^m (Ia)_{\overline{n}|}. \qquad (3.35)$$

Аналогічно потік платежів, здійснюваний у моменти $t_k = m + k - 1$ із відповідними розмірами виплат $b_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, називають *відстроченою зростаючою рентою пренумерандо.*

Сучасну вартість такої ренти позначають символом $m \,|\, (I\ddot{a})_{\overline{n}|}$. Вона пов'язана із сучасною вартістю негайної зростаючої ренти пренумерандо співвідношенням

$$m \,|\, (I\ddot{a})_{\overline{n}|} = v^m (I\ddot{a})_{\overline{n}|}. \qquad (3.36)$$

Зведення зростаючої ренти до кінця терміну

Як і в разі постійних рент, часто виникає необхідність визначення вартості змінної ренти наприкінці останнього платіжного періоду. Наприклад, може цікавити загальна сума, накопичена на банківському рахунку після серії зростаючих внесків.

Будемо розглядати послідовність тимчасових проміжків (0, 1), (1, 2), …, ($n - 1$, n).

Вартості зростаючих рент постнумерандо й пренумерандо в момент t = n позначають символами $(Is)_{\overline{n|}}$ і $(I\ddot{s})_{\overline{n|}}$; відповідно можуть бути вираженими через накопичені суми звичайних рент. Дійсно, використовуючи (3.33) і (3.34), одержуємо

$$(Is)_{\overline{n|}} = (1+i)^n (Ia)_{\overline{n|}} = (1+i)^n \left(\frac{a_{\overline{n|}}}{d} - \frac{nv^n}{i} \right) = \frac{s_{\overline{n|}}}{d} - \frac{n}{i},$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n|}} = (1+i)^n (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = (1+i)^n \cdot \frac{\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n}{d} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n|}} - n}{d}. \qquad (3.37)$$

Зведення відстроченої зростаючої ренти до кінця терміну здійснюють так само: сучасну вартість множать на $(1+i)^{m+n}$. Спеціальних позначень не вводять.

Р-термінові зростаючі ренти

Конструкція таких рент повинна бути зрозумілою з попередніх побудов. Як і раніше, розглядають *n* одиничних проміжків часу, й кожний із них поділяють на *p* рівних частин. Потік платежів $b_k = k/p$, здійснюваних у моменти $t_k = k/p$, $k = 1, 2, \ldots, np$, називають *p-терміновою зростаючою рентою постнумерандо*. Аналогічно потік платежів $b_k = k/p$, здійснюваних у моменти $t_k = (k-1)/p$, $k = 1, 2, \ldots, np$, називають *p-терміновою зростаючою рентою пренумерандо*. Для позначення сучасних вартостей і накопичених сум можуть бути введеними символи, аналогічні попереднім, і виведені формули, подібні до одержаних раніше. Проте ми не будемо цього робити, а, обмежившись розглядом конкретного прикладу, покажемо, як прийоми, зазначені в попередніх пунктах, дозволяють аналізувати *p-термінові зростаючі ренти.*

Безупинні ренти

Усі розглянуті вище ренти припускали, що члени потоку платежів надходять дискретно. Проте в ряді випадків доцільна ідеалізація, за якої потік платежів сприймають як безупинний процес.

Безупинні постійні ренти

Розглянемо *p-термінову постійну ренту* й з'ясуємо властивості основних фінансових констант, а також зведених вартостей при $p \to \infty$. Інтенсивність відсотків, як і раніше, будемо вважати постійною.

$$\lim_{p \to \infty} i^{(p)} = \lim_{p \to \infty} p(e^{\frac{\delta}{p}} - 1) = \lim_{p \to \infty} p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta. \qquad (3.38)$$

Аналогічно

$$\lim_{p \to \infty} d^{(p)} = \lim_{p \to \infty} p(1 - e^{\frac{\delta}{p}}) = \lim_{p \to \infty} p \cdot \frac{\delta}{p} = \delta. \qquad (3.39)$$

Отже, за досить великого p можна використовувати наближені рівності: $i^{(p)} \approx \delta,\ d^{(p)} \approx \delta_1$.

Знайдемо сучасні вартості й накопичені суми безупинних рент. Зрозуміло, що при $p \to \infty$, тобто за прагнення періоду ренти до нуля, різниця між сучасними вартостями рент пост- та пренумерандо буде зникати. Тому обмежимося розглядом ренти пренумерандо:

$$\lim_{p \to \infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|} = \lim_{p \to \infty} \frac{1 - v^n}{d^{(p)}} = \frac{1 - v^n}{\delta}. \qquad (3.40)$$

Позначимо сучасну вартість безупинної ренти через $\bar{a}_{\overline{n}|}$. Тоді

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{\delta}. \qquad (3.41)$$

Аналогічно знайдемо накопичену суму $\overline{S}_{\overline{n|}}$ безупинної ренти, використовуючи ренту пренумерандо:

$$\overline{S}_{\overline{n|}} = \lim_{p\to\infty} \ddot{S}^{(p)}_{\overline{n|}} = \lim_{p\to\infty} \ddot{a}^{(p)}_{\overline{n|}}(1+i)^n =$$

$$= \frac{(1-v^n)(1+i)^n}{\delta} = \frac{v^{-n}-1}{\delta} = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}. \qquad (3.42)$$

Розіб’ємо відрізок (0, *n)* на кінцеву кількість довільних частин (Δt_k) довжини Δt_k і виділимо довільну точку ξk на кожній із них. Оскільки рента постійна, без обмеження спільності, будемо вважати, що в кожний момент надходить платіж, що дорівнює 1, тобто сума платежів на проміжку **(**Δt_k**)** становить Δt_k. Сучасна вартість платежу в момент ξk дорівнює $v^{\xi k} = e^{\xi k}$ Отже, сучасна вартість потоку платежів на проміжку (Δt_k .) може бути приблизно визначеною як $v^{\xi k}\Delta t_k$, а сучасна вартість ренти – як $\overline{a}_{\overline{n|}} \approx \sum_k v^{\xi k}\Delta t_k = \sum_k e^{-\delta\xi k}\Delta t_k$.

Граничним переходом при $\max \Delta t_k \to 0$ одержуємо точну рівність:

$$\overline{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{-\delta t}dt = -\frac{1}{\delta}e^{-\delta t}\Big|_0^n = \frac{1-e^{-\delta n}}{\delta}. \qquad (3.43)$$

Аналогічно

$$\overline{S}_{\overline{n|}} = \int_0^n e^{\delta(n-t)}dt = \frac{e^{\delta n}-1}{\delta}. \qquad (3.44)$$

Безупинні перемінні ренти

У цій моделі ми будемо вважати, що потік платежів безупинний, а розміри платежів змінюються за час *p*. Водночас процес надходження платежів характеризується відомою швидкістю надходження платежів *p (t)* (якщо *S (t)* – розмір платежу, що надходить у момент *t*, то *p (t)=S (t))*. Скористаємося розбивкою відрізка (0, *n),* описаною раніше. Тепер сумарний платіж на проміжку (Δt_k) і його сучасна вартість приблизно дорівнюють $p(\xi k)\Delta t_k$ та $p(\xi k)v^{\xi k}\Delta t_k$ відповідно.

Сучасна вартість ренти:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} \approx \sum_k p(\xi k)v^{\xi k}\Delta t_k \,, \tag{3.45}$$

і, переходячи до межі при $\max \Delta t_k \to 0$, одержуємо

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \int_0^n p(t)v^t dt = \int_0^n p(t)e^{-\delta t} dt \,. \tag{3.46}$$

Аналогічно

$$\bar{S}_{\overline{n|}} = \int_0^n p(t)v^{n-t} dt = \int_0^n p(t)e^{-\delta(n-t)} dt \,. \tag{3.47}$$

Таблиця 3.2 – Таблиця складних відсотків і значень ануїтетів за 25,0 %

n	$(i+1)^n$	v^n	$a_{n\neg}$	**Функція**	**Значення**
1	1,250 00	0,800 00	0,800 0	i	1,250 000
2	1,5625 0	0,640 00	1,440 0	$i^{(4)}$	0,142 360
3	1,953 12	0,512 00	1,952 0	$i^{(2)}$	0,229 485
4	2,441 41	0,409 60	2,361 6	$i^{(12)}$	0,225 231
5	3,051 76	0,327 68	2,689 3	δ	0,223 144
6	3,814 70	0,262 14	2,951 4		
7	4,768 37	0,209 72	3,161 1		
8	5,960 46	0,167 77	3,328 9	d	0,200 000
9	7,450 58	0,134 22	3,463 1	$d^{(2)}$	0,211 146
10	9,313 23	0,107 37	3,570 5	$d^{(4)}$	0,217 034
11	11,641 53	0,085 90	3,656 4	$d^{(12)}$	0,221 082
12	14,551 92	0,068 72	3,725 1		
13	18,189 89	0,054 98	3,780 1	$\frac{i}{i^{(2)}}$	1,059 017
14	22,737 37	0,043 98	3,824 1	$\frac{i}{i^{(4)}}$	1,089 396
15	28,421 71	0,035 18	3,859 3	$\frac{i}{i^{(12)}}$	1,109 971
16	35,527 14	0,028 15	3,887 4	$\frac{i}{\delta}$	1,120 355
17	44,408 92	0,022 52	3,909 9		
18	55,511 15	0,018 01	3,927 9	$\frac{i}{\delta^{(2)}}$	1,184 017
19	69,388 94	0,014 41	3,942 4	$\frac{i}{\delta^{(4)}}$	1,151 896
20	86,736 17	0,011 53	3,953 9	$\frac{i}{\delta^{(12)}}$	1,130 804

ТЕМА 2
ЗАГАЛЬНІ ЗАСАДИ МОДЕЛЮВАННЯ РИЗИКУ В СТРАХУВАННІ

ЛЕКЦІЯ 4
Загальні засади моделювання ризику в страхуванні

Поняття ризику, його місце в страхуванні, класифікація страхових ризиків, методи оцінювання. Моделювання ризиків у страхуванні: основні характеристики страхового портфеля (математичне сподівання, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації), розподіл кількості виплат за портфелем (біноміальний розподіл, розподіл Пуассона, геометричний розподіл).

4.1 Поняття ризику, його місце в страхуванні

Із ризиком ми зустрічаємося щоденно: й на побутовому рівні, й здійснення будь-якої господарської діяльності сьогодні неможливе без ризиків. Здебільшого ризик пов'язаний із невпевненістю в можливому результаті. Незважаючи на давню історію існування ризику та його вивчення, в науковій літературі немає єдиної думки щодо визначення цього поняття та універсального підходу щодо концепцій у теорії ризику. Крім того, ризик розглядають як історичну чи економічну категорію залежно від галузі застосування.

Зрозуміло, що ризик як економічна категорія виник із появою товарно-грошових відносин і відображає подію, що може відбутися або ні. Водночас для події, що відбулася, можливі три варіанти економічного результату. А саме:

– позитивний (вигода, прибуток);
– нульовий (результат не змінився);
– від'ємний (збиток, втрата).

Учені вважають, що вперше спроба наукового визначення сутності й змісту понятгя «ризик» була зроблена математиком Йоганом Тетенсом (XVIII ст). Його наукові праці з вимірювання ризику практично застосовувані в страхуванні життя. Хоча основи актуарних розрахунків, одноми з основних завдань яких є дослідження та групування ризиків, закладені в працях учених Д. Граунта, Я. Вітта, Е. Галлея ще в XVII ст. Подальший розвиток математики й страхування привів до того, що термін «ризик» почали використовувати спочатку в страховій теорії, а зі зростанням впливу науково-технічного прогресу на фінансово-господарське та соціальне життя суспільства він поширився й на економічну теорію.

У господарській і фінансово-економічній діяльності суб'єкта, як зазначено у Фінансовому словнику, під *ризиком* розуміють «усвідомлену можливість небезпеки виникнення непередбачених втрат очікуваного прибутку, майна, грошей унаслідок випадкових змін умов економічної діяльності, несприятливих обставин. Вимірюють частотою, ймовірністю виникнення того чи іншого рівня втрат».

Варто звернути увагу, що досить повним і сучасним є визначення ризику в навчальному посібнику «Фінансовий менеджмент» за редакцією професора Г. Г. Кірейцева: «Під *ризиком* потрібно розуміти можливість виникнення збитку внаслідок дії здебільшого зовнішніх факторів, що під час оцінювання ситуації (перед ухваленням рішення) були невідомими та вплив яких може змінити ймовірність досягнення бажаного результату».

Якщо перевести поняття ризику в площину фінансових категорій, можна стверджувати, що ризик – це ймовірність виникнення збитків, втрат або недоотримання прибутку, порівнюючи з прогнозним варіантом.

Фактор ризику й необхідність покриття можливого збитку внаслідок його прояву зумовлює потребу в страхуванні. Історично склалось уявлення про ризик як категорію, на якій базується страхування. Проте сьогодні страхування охоплює різні галузі наукових знань і практичного досвіду про природу явищ. Тому в розуміння терміна «ризик» у літературі вкладають різні смислові навантаження й зміст.

Отже, «*страховий ризик*» – це прогнозний збиток об'єкта страхування внаслідок настання страхової події.

Для оцінювання ризику в страховій практиці застосовують різноманітні постійно вдосконалювані спеціальні методи. Найбільш поширеними є такі:

- метод індивідуальних оцінок;
- метод середніх величин;
- метод процентів.

Метод індивідуальних оцінок є одним із методів експертного оцінювання, що базуються на використанні професійного досвіду й інтуїції спеціалістів. Він належить до великої групи абстрактно-логічних методів дослідження. Метод індивідуальних оцінок у вимірюванні ризику страховик застосовує тоді, коли неможливо порівняти конкретний ризик із середнім типом ризику, й можна лише оцінити його довільно залежно від професіоналізму, досвіду та суб'єктивного погляду експерта.

Середні величини дозволяють виразити типові розміри ознак, що варіюють, якісно однорідних явищ та виміряти їх коливання навколо середнього рівня розвитку. *Метод середніх величин* є одним зі статистичних методів дослідження та в оцінюванні ризику передбачає розмежування окремих ризикових груп на більш дрібні підгрупи для створення аналітичної бази, щоб визначити ризик за певними відповідними ризиковими ознаками.

Метод процентів також належить до групи методів статистичного аналізу й у системі оцінювання ризику є сукупністю додатних та від’ємних відхилень від середнього ризикового типу наявної аналітичної бази. Ці відхилення виражені в процентах або промілях від середнього ризикового типу.

Застосовують також економетричні, статистичні методи оцінювання й аналізу ризиків, методи вербального аналізу тощо. Важливо підкреслити, що в сучасних умовах вітчизняні й зарубіжні вчені мають значний інструментарій для оцінювання й відстеження ризику, застосовують актуарні розрахунки, моніторинг, комплексне моделювання страхових процесів, емпіричний досвід, методи експертного оцінювання, асоціацій та аналогій, експертиз тощо.

Для оцінювання й аналізу ризиків необхідно класифікувати їх за відповідними ознаками на типи, види, групи тощо. Проте в сучасних умовах у страхуванні немає чітко розробленої класифікації ризиків. У законодавчій і нормативній літературі також немає класифікації й поділу ризиків за видами, проте передбачена вимога виконання актуарних (математичних) розрахунків для визначення страхових тарифів, в основу яких покладене вартісне оцінювання ризиків.

Узагальнюючи погляди вчених і практиків, можна запропонувати таку класифікацію ризиків щодо страхування (рис. 4.1)

Безумовно, найбільш поширену групу становлять ризики, що можна застрахувати. Страховий ризик – це такий ризик, який можна виміряти, оцінити щодо ймовірності настання страхової події та кількісних характеристик можливого збитку.

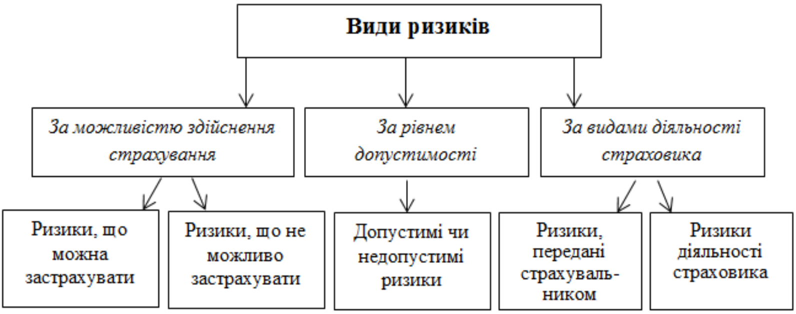

Рисунок 4.1 – Класифікація ризиків у страхуванні

Основні *критерії страхового ризику:*

– ризик повинен бути можливим;
– ризик повинен мати випадковий характер;
– випадковість ризику повинна співвідноситися з певною сукупність споріднених об'єктів;
– настання страхового випадку як реалізація ризику не повинне бути пов'язаним із волевиявленням страхувальника чи зацікавленої особи;
– факт настання страхового випадку невідомий у часі та просторі;
– страхова подія не повинна мати обсягів катастрофічного лиха;
– наслідки реалізації ризику повинні бути об'єктивно вимірюваними й оцінюваними.

Крім того, страхові ризики класифікують за різними ознаками, насамперед:

– джерелом небезпеки (ризики прояву стихійних сил і цілеспрямованої дії людини);
– обсягом відповідальності страховика (індивідуальні й універсальні ризики);
– специфічні ризики (аномальні й катастрофічні: ендемічні, якості землі, політичні, воєнні, а

також екологічні, транспортні, спеціальні тощо);

- об'єктивні ризики (ризики, пов'язані з неконтрольованими факторами);
- суб'єктивні ризики (ризики, що заперечують або ігнорують об'єктивну реальність) тощо.

Кожна з цих груп ризиків має свій відповідний поділ на види чи підвиди.

У фінансово-економічній діяльності ризики поділяють за галузями економіки, сферами й видами діяльності тощо. Наприклад, фінансовий, банківський, кредитний, валютний, процентний, іпотечний, комерційний, підприємницький, моральний (виникає після укладання договору страхування) ризик тощо.

Ризик у страхуванні розглядають:

- як конкретне явище чи сукупність явищ;
- з огляду на конкретний застрахований об'єкт;
- з імовірністю втрати або ушкодження об'єкта, прийнятого на страхування;
- з огляду на діяльність страховика.

Для оцінювання й аналізу виділяють також ризики діяльності страхової компанії. А саме:

- ризики, передані страхувальником страховій компанії за договором страхування;
- ризики, пов'язані з діяльністю самого страховика.

Така класифікація необхідна для формування спеціальних резервів і фондів страхової компанії для покриття ризиків. У страхуванні комплексну діяльність з аналізу, оцінювання ризиків, вибору оптимального покриття тощо називають *андерайтингом*. Загальновизнані та найбільш відомі у світовій практиці європейська й американська класифікації.

Європейську класифікацію вважають найбільш вичерпною, тому що вона враховує специфіку більшості ризиків, зумовлених діяльністю страховика. Водночас застосовують економетричний метод аналізу ризиків. Проте недостатнє застосування статистичних методів не дозволяє вважати результати такого оцінювання повністю адекватними, тобто недостатньо кількісного оцінювання ризиків.

Американська класифікація поділяє ризики за етапами роботи страхової компанії, впродовж яких імовірні зазначені ризики:

- етапом становлення;
- етапом повноцінної активної діяльності;
- етапом ліквідації страхової компанії.

Водночас для оцінювання й аналізу ризиків доцільний насамперед вербальний аналіз, за якого застосовують не лише ймовірні розрахунки до певних ризиків, що мають достатнє статистичне спостереження, а й розглядають ті ризики, що не мають достатньої статистики. Тобто бракує якісного оцінювання ризиків.

За європейською й американською класифікаціями ризиків страхової діяльності роль джерела виплати за ризиками страхових операцій виконують власні кошти страхової компанії.

Останнім часом усе більш популярною стає фінська класифікація ризиків, що знаходить економічний компроміс між кількісним і якісним аналізами та оцінюваннями ризиків. За фінською класифікацією ризики в страхуванні поділяють на:

- основні;
- додаткові.

Основні ризики покривають коштом спеціально сформованих страхових резервів, а додаткові – резерву стабілізації, а не власних вільних резервів. Власні вільні кошти використовують для зниження негативного впливу додаткових ризиків.

Зрозуміло, що перед людством стоїть завдання попередження, компенсації та ліквідації ризиків, що можливо досягти за допомогою *антиризикової діяльності.* Уникнути чи зменшити вплив ризиків, як наголошує Т. А. Ротова, можна за допомогою ризик-менеджменту – системи управління ризиками й фінансовими відносинами, що виникають у процесі бізнесу. Управляти ризиками можна завдяки застосуванню певних форм антиризикової діяльності, репрезентованих на рисунку 4.2.

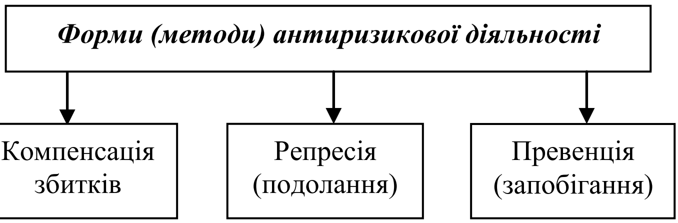

Рисунок 4.2 – Форми антиризикової діяльності

У сучасних умовах щодо фінансування пріоритетну роль в антиризиковій діяльності відіграє компенсаційна форма, що відображає страховий захист. А превенція займає другорядне місце, хоча й переросла в самостійну функцію страхування.

Зазначені форми (методи) антиризикової діяльності проявляються у функціях страхування: компенсаційній, репресивній, превентивній. Варто звернути увагу, що здійснення зазначених функцій можливе завдяки спеціальним коштам відповідних фондів, що називають страховими.

Отже, під *ризиком* розуміють імовірність виникнення збитків, втрат або недоотримання прибутку, порівнюючи з прогнозним варіантом. Визначення ризику залежить від сфери діяльності його застосування. *Страховий ризик* визначають як прогнозний збиток об'єкта страхування внаслідок настання страхової події. Страховий ризик має свої специфічні ознаки, такі як:

- є конкретним явищем, у разі настання якого здійснюють страхові виплати;
- має ймовірнісний характер;
- може бути виміряним та оціненим;
- має конкретну форму прояву, пов'язану з певним об'єктом;
- є невід'ємним елементом страхових відносин.

Наявність ризику передбачає здійснення антиризикової діяльності, формами якої є компенсація, репресія, превенція. Антиризикову діяльність реалізують у страховому захисті за допомогою створення й використання страхових фондів.

4.2 Моделювання ризиків у страхуванні, класифікація ризиків

Із широкого спектра різних ризиків виділимо ті, що можна застрахувати. За ознаками таких явищ зазначимо головні характеристики таких ризиків.

1. Очевидно, що можна розглядати лише масові явища, які мають тенденцію до нескінченного повторення. Отже, для кожного такого явища можна говорити про ймовірність його настання.

2. Крім того, ці явища повинні мати об'єктивний характер, тобто залежати від прояву чиєї-небудь волі.

3. І, нарешті, збиток, завданий цими подіями, повинен бути вимірюваним. Під цим розуміють не стільки існування верхньої оцінки втрат, скільки можливість виразити їх значення в грошових одиницях.

У рамках теорії ризику розроблена система понять, моделей і методів, що дозволяють кількісно оцінити фінансові ризики в діяльності страхової компанії.

Нехай випадкові величини N, Y, X описують: N – кількість страхових випадків на один договір; Y –

величину можливих втрат на один страховий випадок (за умови, що він відбувся); X – розмір втрат страхової компанії внаслідок настання страхових випадків.

Нехай настання страхового випадку за один період страхування характеризується ймовірнісним розподілом $F_N(x)$, а втрати, можливі внаслідок однієї страхової події, описані ймовірнісним розподілом $F_X(x)$. Пару $(F_N(x); F_X(x))$ будемо називати *ризиком*. Для зручності викладу розділимо ризик клієнта $(F_N(x); F_Y(x))$ і ризик страхової компанії, пов'язаний із договором цього клієнта, $(F_N(x); F_X(x))$. Значення цього розподілу полягає в такому. Клієнт має ризик $(F_N(x); F_Y(x))$, що означає, що для нього страхова подія відбувається згідно з імовірнісним розподілом F_N кількості страхових випадків, а втрати, що можуть відбутися внаслідок страхової події, описані випадковою величиною Y, що має розподіл F_Y. Для страхової компанії, що уклала договір страхування цього ризику клієнта, цей договір зумовлює ризик $(F_N(x); F_X(x))$, який має такий самий розподіл кількості випадків F_N, що й ризик клієнта, а втрати компанії полягають у виплатах, які вона робитиме за позовами цього клієнта. Ці виплати описує випадкова величина X, що має розподіл F_X. Випадкові величини Y і X залежні, але не однакові.

Часто використовують біноміальний, пуассонівський і геометричний розподіли кількості вимог. Розподіли втрат можуть бути як дискретними, так і безперервними.

Отже, перший етап – з'ясування ризику – передбачає зазначені далі кроки.

1. Визначення класу належності ризику, що вивчають.

2. Оцінювання розподілів імовірності втрат і кількості випадків, що визначають ризик.

3. Вибір методів перевірки адекватності одержаної на першому кроці оцінки ризику.

Основні позначення й визначення

Розглянемо один вид страхування з огляду на те, що він повинен бути принаймні беззбитковим, тобто портфель повинен бути об’єднаним одним страховим фондом. Фінансові потоки, що створює й витрачає страховий фонд, тісно пов’язані з категорією ймовірності. Тому можна описати фінансову систему страхування термінами теорії ймовірності. Уведемо такі позначення, використовувані для опису всіх задач:

n – кількість договорів у досліджуваному портфелі;

N_i – кількість позовів від договору з номером i;

$N = \sum_{i=1}^{n} N_i$ – загальна кількість позовів за портфелем;

M – кількість договорів, за якими пред’явили хоча б один позов. Якщо за договором можливий не більше ніж один позов, то $M = N$;

q_i – імовірність страхового випадку для договору з номером i.

Припустимо, що портфель однорідний щодо ймовірності страхового випадку, тобто $q_i = q, \forall i = 1, ..., n$;

S_i – страхова сума за договором із номером i;

Y_i^j – розмір j-го за порядком відшкодування, виплаченого за договором із номером i;

$X_i = \sum_{j=1}^{N_i} Y_i^j$ – загальне відшкодування за договором із номером i; $X_i = 0$, якщо кількість позовів $N_i = 0$;

$V_i = \dfrac{X_i}{S_i}$ – відносне страхове відшкодування за договором із номером i;

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ – загальне відшкодування за портфелем.

Більшість наведених характеристик страхового портфеля мають випадкову природу, для аналізу якої будуть потрібними такі функції й числові характеристики.

Нехай K – певна дискретна випадкова величина, що набуває значення $K_0, K_1, ...$ із певною ймовірністю $p_i = P(K = K_i)$:

$$K = \begin{cases} K_0 \ K_1 \ ... \ K_m \ ... \\ p_0 \ p_1 \ ... \ p_m \ ... \end{cases} p_i \geq 0, \ \forall i = 0, ..., \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1. \quad (4.1)$$

Нехай Z – безперервна випадкова величина, що має щільність $f_Z(x)$ і функцію розподілу $F_Z(x)$.

Середні значення (математичне сподівання, перший момент) для K і Z однакові, відповідно $EK = \sum_{i=0}^{\infty} p_i K_i$:

$$EZ = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_Z(x). \quad (4.2)$$

Математичне сподівання випадкової величини означає «очікувані середні показники за достатньо тривалий проміжок часу». Зокрема, для K математичне сподівання EK – середня очікувана кількість позовів від однорідного портфеля за «звичний» інтервал часу.

Другі моменти для K і Z однакові, відповідно $EK^2 = \sum_{i=0}^{\infty} p_i K_i^2$:

$$EZ^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_Z(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_Z(x). \qquad (4.3)$$

Дисперсію випадкової величини визначають як різницю другого моменту й квадрата першого моменту:

$$VarK = EK^2 - (EK)^2 . \qquad (4.4)$$

Дисперсія є середнім квадратичним відхиленням значень випадкової величини від її математичного сподівання, тобто дисперсія оцінює рівень можливої флуктуації випадкової величини.

Середньоквадратичним відхиленням випадкової величини називають арифметичний корінь із її дисперсії $\sigma K = \sqrt{VarK}$.

Коефіцієнтом варіації випадкової величини називають відношення її середньоквадратичного відхилення до середнього значення $WK = \frac{\sigma K}{EK}$.

4.3 Розподіли кількості виплат за портфелем

Кількість виплат за портфелем є дискретною випадковою величиною й може набувати значень 0, 1, 2, 3, ... із певною ймовірністю. Для визначення ймовірної кількості виплат важливе значення має така характеристика випадкової величини, як її розподіл $p_k = P(N = k)$:

$$N = \begin{cases} 0\ 1\ 2\ \dots\ n, \\ p_0\ p_1\ p_2\ \dots\ p_n; \end{cases} \quad p_k \ge 0, \sum_{i=0}^{N} p_k = 1. \qquad (4.5)$$

Припустимо, що фактичні значення випадкової змінної N за певну кількість періодів у минулому відомі. На підґрунті наявних даних можна розрахувати вибіркові оцінки для середнього значення й дисперсії кількості позовів. Позначимо їх як M_N і D_N відповідно. Тоді основне завдання полягає в підборі такого гіпотетичного розподілу ймовірності для N, що відповідає з певною заданою точністю спостережуваним значенням N.

Найбільш поширені зазначені нижче розподіли.

Біноміальний розподіл

Припустимо, що для всіх договорів певного портфеля страхова подія може реалізуватися за час дії договору лише один раз і ймовірність того, що вона відбудеться, однакова для всіх та дорівнює q. Тоді загальна кількість позовів за цим портфелем за фіксований проміжок часу матиме біноміальний розподіл імовірності. Це означає, що

$$p_i = P(N = i) = C_i^n q^i (1-q)^{n-i}. \qquad (4.6)$$

Числові характеристики – середнє значення й дисперсія біноміальної випадкової змінної:

$$EN = nq,$$
$$VarN = nq\,(1-q) \qquad (4.7)$$

Приклад 1. Для портфеля з 200 договорів з імовірністю страхового випадку 0,01 графічний розподіл загальної кількості виплат за портфелем у діапазоні [0, 1] репрезентований на рисунку 4.3.

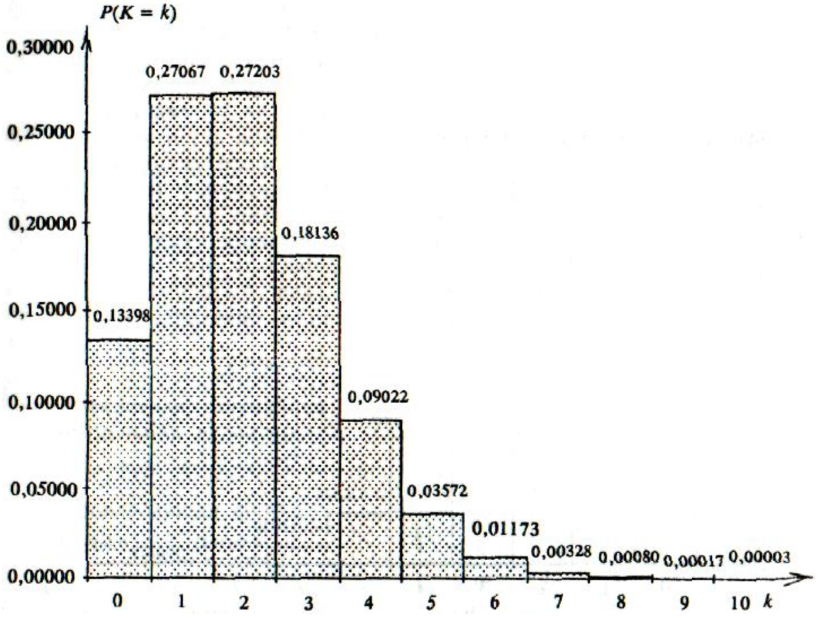

Рисунок 4.3 – Біноміальний розподіл загальної кількості виплат за портфелем

Розподіл Пуассона

На практиці здебільшого кількість договорів достатньо велика, а ймовірність страхового випадку q мала. Якщо середня кількість виплат nq за конкретний період є певним постійним числом λ, то біноміальний розподіл можна наблизити простіше – розподілом Пуассона:

$$p_k = P(N = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \; k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (4.8)$$

Щодо нашого прикладу розподіл Пуассона на інтервалі [0, 10] графічно відображає рисунок 4.4.

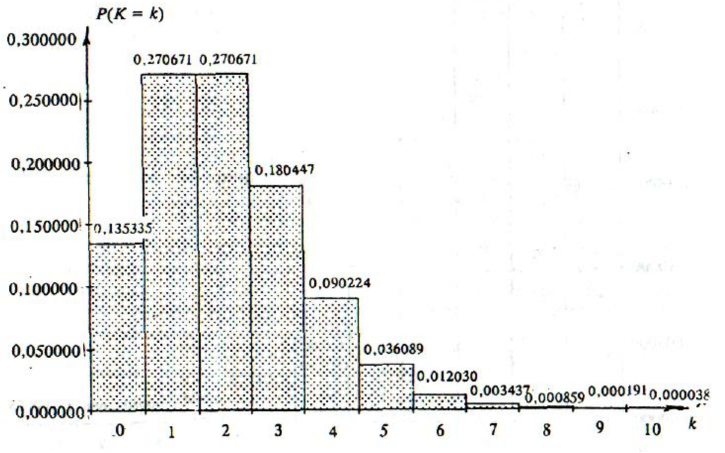

Рисунок 4.4 – Розподіл Пуассона

Середнє значення й дисперсія дорівнюють λ:

$$\begin{aligned} EN &= \lambda, \\ VarN &= \lambda . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Пуассонівський розподіл можуть застосовувати, якщо за договором може бути декілька виплат. У такому разі q = кількість виплат/кількість договорів.

Пуассонівський розподіл відіграє дуже важливу роль у страховій математиці, тому що його можна застосовувати за додержання таких умов:

– під час коротких тимчасових інтервалів може бути пред’явленою не більше ніж одна вимога про виплату;
– імовірність пред’явлення вимоги протягом тимчасового інтервалу пропорційна довжині

інтервалу й не залежить від його положення в часі;
- вимоги, пред'явлені в непересічні інтервали часу, не залежать одна від одної.

Очевидно, що виконання цих умов можна з прийнятною точністю чекати від реального процесу пред'явлення вимог про виплату страхових відшкодувань.

Геометричний розподіл

Дискретна випадкова величина N має геометричний розподіл імовірності, якщо вона задана як

$$p_i = P(N = i) = (1-q)\, q^i,\ \ 0 < q < 1,\ \ i = 0, 1, \dots \tag{4.10}$$

Середнє значення й дисперсія відповідно дорівнюють:

$$EN = \frac{q}{1-q}, \qquad VarN = \frac{q}{1-q^2}. \tag{4.11}$$

Приклад 2. Нехай вибіркова середня кількість позовів для певного портфеля договорів дорівнює 0,2. Тоді $EN = q/(1 - q) = 0{,}2$, отже, $q = 1/6$. Гістограма геометричного розподілу в такому разі зображена на рисунку 4.5.

Геометричний розподіл є окремим випадком $\alpha = 1$ загальнішого й складнішого розподілу – від'ємного біноміального.

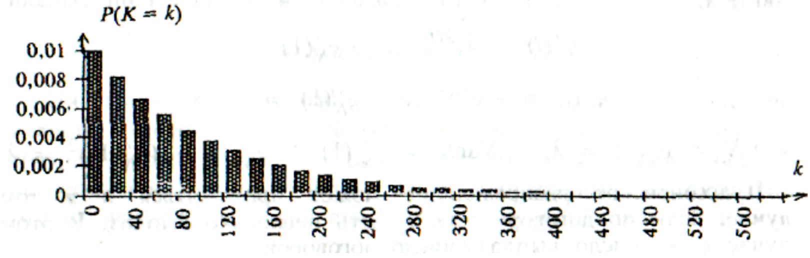

Рисунок 4.5 – Гістограма геометричного розподілу позовів (приклад 2), на якій вибіркова середня кількість позовів для певного портфеля договорів дорівнює 0.2, $EN = q/(1 - q) = 0{,}2$, $q = 1/6$

Від'ємний біноміальний розподіл

Кількість виплат також можна наблизити негативним біноміальним розподілом із параметрами q та α:

$$p_i = P(N = i) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!}\ (1-q)^{\alpha} q^{i}, \qquad (4.12)$$

$i = 0, 1, \ldots$

Середнє й дисперсія від'ємного біноміального розподілу відповідно дорівнюють:

$$EN = \frac{\alpha q}{1-q}, \qquad VarN = \frac{\alpha q}{(1-q)^2}. \qquad (4.13)$$

Для від'ємного біноміального розподілу дисперсія більша за середню, що дає можливість за певних умов сподіватися на адекватніший результат.

Приклад 3. Нехай для певного портфеля відомо, що оцінки середнього значення й дисперсії відповідно дорівнюють M_N = 2 і D_N = 3. Тоді параметри від'ємного біноміального розподілу можуть бути знайденими як розв'язок системи двох алгебраїчних рівнянь щодо змінних q і α :

$$\begin{cases} EN = \dfrac{\alpha q}{1-q} \approx 2, \\ VarN = \dfrac{\alpha q}{(1-q)^2} \approx 3. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, одержуємо, що q = 1/3 та α = 4.

ТЕМА 3
АНАЛІЗ ТА УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ У СТРАХУВАННІ

ЛЕКЦІЯ 5
Аналіз та управління ризиком у страхуванні

Розподіл втрат: рівномірний розподіл, експоненційний розподіл, розподіл Парето, гама-розподіл, бета-розподіл, квадратичний розподіл, нормальний розподіл. Розподіл виплат. Порівняння ризикових ситуацій: метод середніх величин, ступінь ризику, ймовірність розорення, корисність від страхування й корисність страхової діяльності, функція «сумління».

5.1 Розподіл втрат

У майновому страхуванні розмір відшкодування може набувати будь-якого значення від 0 до страхової суми. Це означає, що випадкові величини Y_i^j (j-те за порядком страхове відшкодування за договором із номером i) та X_i (сума страхового відшкодування, виплаченого за i-м договором за період його дії за умови, що страховий випадок відбувся) є безперервними випадковими величинами. Природа безперервної випадкової величини A може бути описаною функцією розподілу ймовірності

$$F_A(x) = P(A \le x) \tag{5.1}$$

або щільністю розподілу ймовірностей (якщо вона є):

$$f_A(x) = F_A^{'}(x)\,. \tag{5.2}$$

Розподіл випадкової величини – одне з основних понять теорії ймовірності – також відіграє дуже важливу роль в актуарній математиці. Для страхової компанії ризик втрати, прийнятий на страхування, – це негативна за своїми можливими економічними наслідками випадкова величина. Значення її характеристик дозволяє дати їй вартісну оцінку, а також спрогнозувати фінансовий стан компанії.

Нехай є фактичні значення збитку, зазнаного однаковими об'єктами внаслідок страхового випадку впродовж певного часу. Тоді можна вважати, що відомі вибіркові оцінки для середнього значення й дисперсії випадкової величини Y, що описує можливі втрати внаслідок страхового випадку. Позначимо їх значення як M_Y і D_Y відповідно. Тоді, як і раніше, постає завдання підбору гіпотетичного розподілу $F_Y(x)$, що найкраще відповідає фактичним даним. В актуарній літературі застосовують такі безперервні розподіли для опису збитку за одним договором та одним страховим випадком.

Рівномірний розподіл

Випадкова величина Y має рівномірний розподіл на відрізку [a, b], якщо її щільність імовірності постійна на цьому відрізку й дорівнює нулю поза ним:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, \; x \in [a, b], \\ 0, \; \textit{в іншому разі}; \end{cases} ,$$

$$F_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, \; x \in [a, b], \\ 1, \; x > b. \end{cases} \tag{5.3}$$

Графічно рівномірний розподіл збитку в такому разі репрезентований на рисунку 5.1.

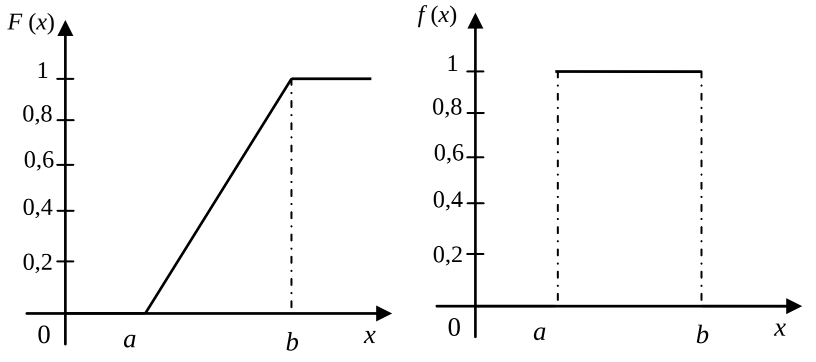

Рисунок 5.1 – Графіки функції розподілу ймовірності й щільності ймовірності, рівномірно розподіленої на інтервалі *[a, b]* випадкової величини

Середні втрати й дисперсію обчислюють відповідно:

$$EY = \frac{b-a}{2},$$

$$VarY = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Приклад. Нехай для певного об’єкта страхування збитки, можливі внаслідок, скажімо, пожежі, рівномірно розподілені від нуля до повної вартості об’єкта. Нехай вартість об’єкта оцінена в 120 грн од. Тоді середні втрати для цього об’єкта дорівнюють $EY = (120 - 0)/2 = 60$, а дисперсія –$VarY = (120 - 0)^2 = 1200$.

Очевидно, що в реальності рівномірний розподіл здебільшого недоцільний для опису розміру збитку. На практиці збитки різних розмірів мають різну ймовірність виникнення. Для їх опису використовують зазначені далі види безперервних розподілів:

Експоненціальний розподіл

Випадкова величина має експоненціальний розподіл із параметром $\lambda > 0$, якщо її щільність така:

$$f_Y(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0, \tag{5.4}$$

функція розподілу:

$$F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0. \tag{5.5}$$

Середнє значення й дисперсія дорівнюють відповідно:

$$EY = \frac{1}{\lambda}, \qquad VarY = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5.6}$$

Для експоненціально розподіленої випадкової величини середнє рівне середньоквадратичному відхиленню, що є досить суворою умовою.

Зазначимо, що, припускаючи експоненціальний розподіл для втрат, ми таким способом маємо на увазі можливість катастрофічно великих значень збитків (немає обмеження на x зверху). Проте щільність експоненціального розподілу є швидко спадаючою функцією, що робить імовірність великих значень збитків дуже малою. У нашому прикладі ймовірність того, що можливі збитки перевищать середнє очікуване значення в 1,4 раза, менша за 0,5 %.

Характерна межа експоненціального розподілу – велика кількість невеликих позовів і можливість рідкісних дуже великих позовів, тобто він є асиметричним і довгохвостим.

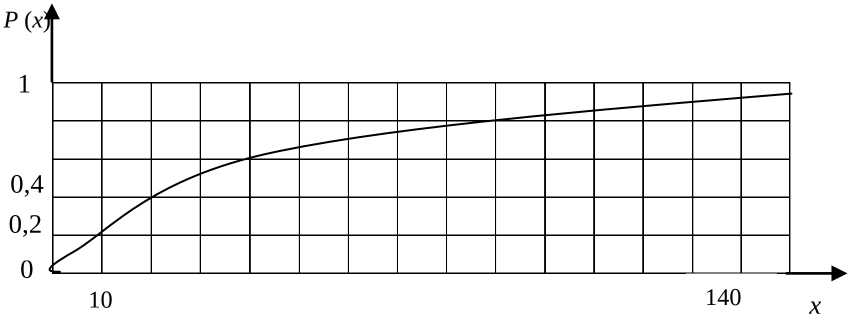

Рисунок 5.2 – Графік функції розподілу ймовірностей за експоненціального розподілу збитку

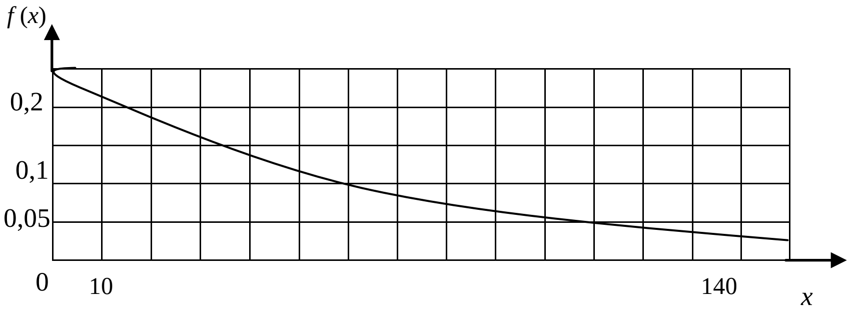

Рисунок 5.3 – Графік щільності розподілу ймовірностей за експоненціального розподілу збитку

Розподіл Парето

Випадкова величина Y має розподіл Парето з параметрами $\lambda > 0$ і $\alpha > 0$, якщо її щільність задана як

$$f_Y(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha + 1}, \quad x > 0. \qquad (5.7)$$

Функція розподілу в такому разі задана як

$$F_Y(x) = 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha}. \quad (5.8)$$

Розглянемо числові характеристики для випадкової величини, що має розподіл Парето.

Середнє значення:

$$EY = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha + 1} dx = \frac{\lambda}{\alpha - 1}. \quad (5.9)$$

Для другого центрального моменту маємо:

$$EY^2 = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha + 1} dx = \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}. \quad (5.10)$$

З огляду на це одержуємо вираз для дисперсії:

$$VarY = EY^2 - (EY)^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}. \quad (5.11)$$

Як зазначено вище, кінцевий середній розподіл Парето має лише при $\alpha > 1$, а кінцеву дисперсію – при $\alpha > 2$. Коефіцієнт варіації випадкової величини, що має розподіл Парето, становить $WY = \frac{\sigma Y}{EY} = \sqrt{\alpha /(\alpha - 2)}$.

Фактично коефіцієнт варіації завжди більший за одиницю. Це свідчить про те, що ймовірність великих значень позовів достатньо велика. Це є характерною особливістю розподілу Парето.

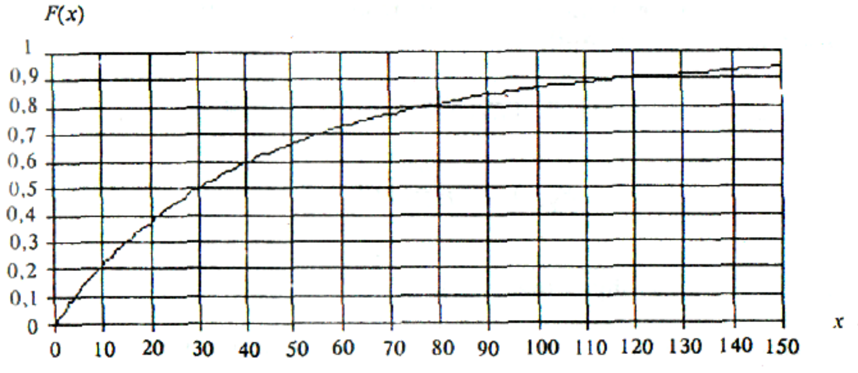

Рисунок 5.4 – Графік функції розподілу ймовірностей, якщо збиток має розподіл Парето

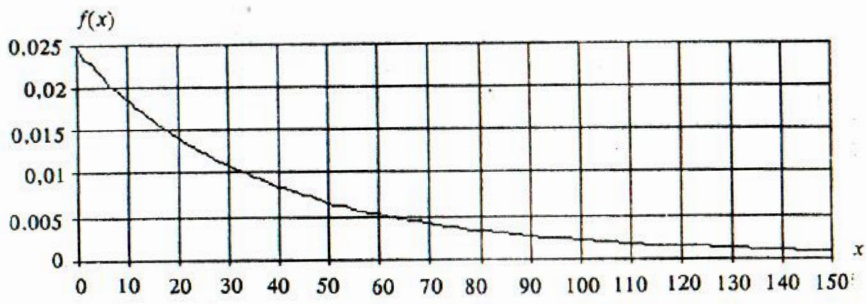

Рисунок 5.5 – Графік щільності розподілу ймовірностей, якщо збиток має розподіл Парето

Розподіл Парето також асиметричний, але «хвіст» у нього важчий, ніж в експоненціального розподілу, тобто ймовірність великих розмірів відшкодувань більша, ніж у попередньому прикладі.

Гамма-розподіл

Випадкова величина Y має гамма-розподіл із параметрами $\lambda > 0$ та $\alpha > 0$, якщо:

$$f_Y(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha - 1} e^{-\lambda x},\ x \geq 0,$$
$$F_Y(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha - 1} e^{-\lambda t} dt, \tag{5.12}$$

де Г – гамма-функція, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$

Середнє значення для випадкової величини, що має гамма-розподіл:

$$EY = \frac{\alpha}{\lambda},$$
$$VarY = \frac{\alpha}{\lambda^2}. \tag{5.13}$$

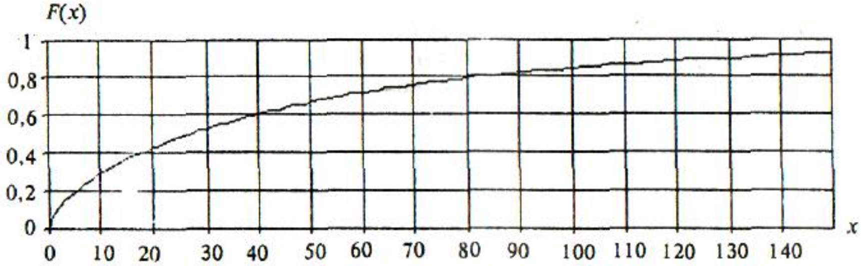

Рисунок 5.6 – Графік функції розподілу ймовірностей за гамма-розподілу збитку

При $x \to \infty$ щільність гамма-розподілу спадає швидше, ніж щільність розподілу Парето, але повільніше, ніж експоненціальна щільність. Це означає, що для однакового розміру збитку ймовірність його виникнення за гамма-розподілу більша, ніж за експоненціального розподілу, але менша, ніж за розподілу Парето. При $\alpha > 1$ гамма-розподіл відповідає ситуації, за якої позови переважно згруповані навколо певного значення, а невеликі позови можливі, але малоймовірні.

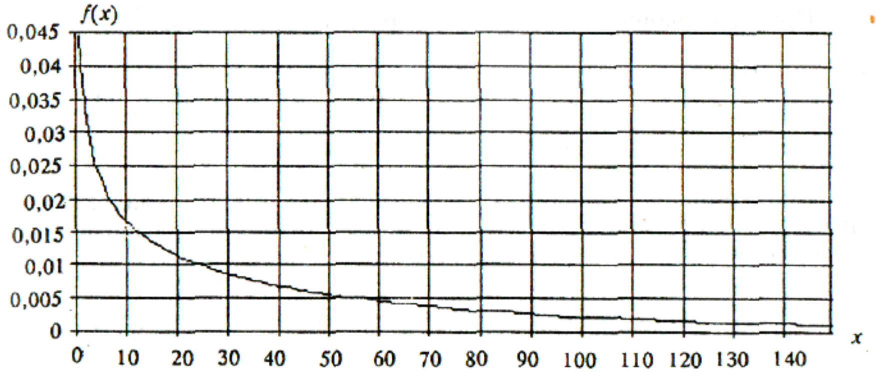

Рисунок 5.7 – Графік щільності розподілу ймовірностей за гамма-розподілу збитку

Бета-розподіл

Безперервна випадкова величина Y має бета-розподіл імовірності, якщо її функції розподілу ймовірності й щільності ймовірності задані як

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)} \int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt,$$

$$0 \le x \le 1, \tag{5.14}$$

$$f_Y(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)},$$

$$1 \le \alpha < \infty,\ 1 \le \beta < \infty.$$

Середнє значення й дисперсія відповідно дорівнюють:

$$EY = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

$$VarY = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}. \tag{5.15}$$

Квадратичний розподіл

Неперервна випадкова величина Y має квадратичний розподіл імовірності, якщо її функції розподілу ймовірності й щільності ймовірності задані як

$$F_Y(x) = P\,(Y \le x) = a\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx,\ 0 \le x \le 1,$$

$$f_Y(x) = ax^2 + bx + c \tag{5.16}$$

із коефіцієнтами a, b і c, за яких $f_Y(x) > 0$ для $0 \le x \le 1$ і $\int f_Y(x)dx = 1$. Середнє значення й дисперсія для випадкової величини, що має квадратичний розподіл імовірності, відповідно дорівнюють:

$$EY = \frac{a}{15} + \frac{b}{8} + \frac{c}{4},$$

$$VarY = \frac{a}{18} + \frac{b}{10} + \frac{c}{4}. \tag{5.17}$$

Нормальний розподіл

Випадкова величина Y має нормальний розподіл, якщо

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-A)}{2D}},$$

$$F_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-A)}{2D}} dt = \Phi\left[\frac{x-A}{\sqrt{D}}\right], \tag{5.18}$$

де Φ – стандартна нормальна функція розподілу.

Середнє значення $EY = A$, а дисперсія $VarY = D$.

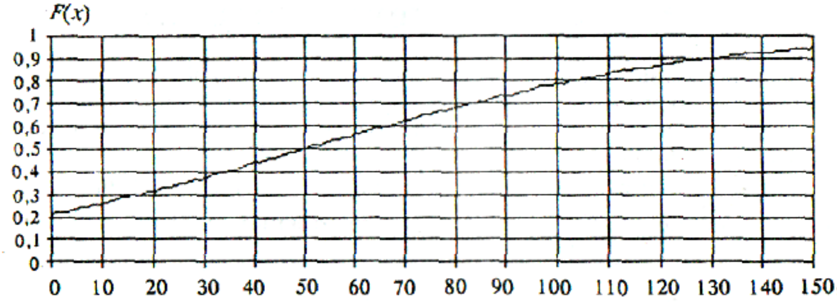

Рисунок 5.8 – Графік функції розподілу ймовірностей за нормального розподілу збитку

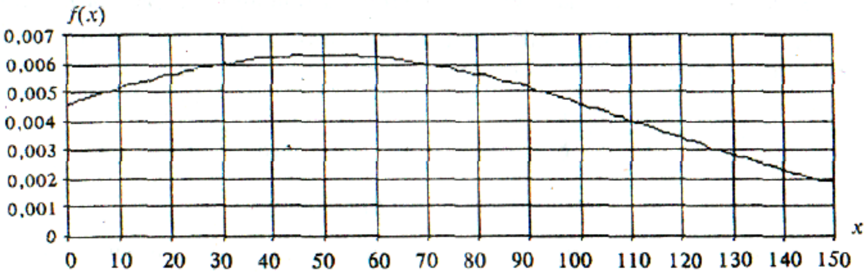

Рисунок 5.9 – Графік щільності розподілу ймовірностей за нормального розподілу збитку

5.2 Розподіл виплат

Розподіл суми всіх виплат за портфелем X називають складовим (або складним), утвореним розподілом кількості виплат N і розміру можливих втрат Y в разі страхової події.

Нехай N_i описує розподіл страхових випадків для одного договору, а Y_i – розмір можливих втрат у разі страхової події. Тоді величина виплат X_i за цим договором є сумою випадкової кількості випадкових доданків:

$$X_i = Y_i^1 + Y_i^2 + ... + Y_i^{N_i}, \; Y_i^j > 0, \tag{5.19}$$

де Y_i^j – розмір j-го за порядком збитку.

Вище ми говорили про розподіли кількості випадків і можливих втрат, а також звернули увагу, що причини, що впливають на характер розподілів $F_{N_i}(x)$ і $F_{Y_i}(x)$, різні. Отже, можна припустити, що випадкові величини N_i і Y_i не залежать одна від одної.

Твердження 1. Середнє значення й дисперсія виплат для (5.8) відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} &EX_i = EN_i \cdot EY_i, \\ &VarX_i = EN_i \cdot VarY_i + VarN_i \cdot (EY_i)^2. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Сумарні виплати за портфелем X є випадковою величиною, що має такий самий тип, як (5.8). Різниця полягає в тому, що X утворюють інші випадкові величини (N – кількість позовів за портфелем і Y – розмір одиничного збитку) та їм відповідають свої числові характеристики.

5.3 Порівняння ризикових ситуацій

Різноманітність понять ризику визначає й різноманітність форм і прийомів порівняння ризикових ситуацій. Ми зупинимося на таких.

1. *Метод середніх величин*. Ризикові ситуації порівнюють відповідно до середньоочікуваних значень втрат. Цей підхід до оцінювання ризику не можна назвати дуже результативним, тому що він повністю ігнорує

розкид можливих значень втрат, а, як відомо, це одна з головних характеристик ризику.

2. *Ступінь ризику*. Ступенем ризику в такому разі називають коефіцієнт варіації $W(X)$ виплат, що необхідно буде зробити за всіма страховими випадками, які відбулися за цим ризиком. Ризик заданий як (F_N, F_Y), отже, виплати за ним загалом можна записати як

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_N,\ X_i = N_i \cdot Y_i, \tag{5.21}$$

де i – номер вимоги про виплату (в порядку надходження); Y_i – розмір i-ї вимоги про виплату; $Y_i > 0$, N_i – індикатор страхового випадку (виплату здійснюють, якщо страховий випадок відбувся й розмір виплати дорівнює втратам або реалізації випадкової величини Y на кроці i).

З огляду на це одержуємо вираз для ступеня ризику:

$$W(X) = \frac{\sigma X}{EX} = \frac{\sigma X}{\sum_i EX_i}. \tag{5.22}$$

Цей простий і доступний критерій застосовують для аналізу фінансової стійкості певного страхового портфеля. Зрозуміло, що перевищення ступенем ризику одиниці може служити певним критерієм ризикованості цього портфеля, тому що воно означає, що розкид значень можливих виплат, які мають велику ймовірність, перевищує середнє очікуване значення виплат.

Об’єднання декількох ризиків в один «страховий портфель» може призвести до зниження результуючого ступеня ризику (зазначимо, що в цьому разі ми говоримо про незалежні ризики). Окремі приклади розрахунку ступеня ризику будуть розглянутими нижче (в моделях індивідуального й колективного ризиків).

3. *Імовірність розорення*. Фактично ймовірність розорення не є характеристикою ризику й порівнювати ризики за ймовірністю розорення відповідно не можна. Проте ми приводимо цю характеристику з огляду на таку причину. Для будь-якого ризику (F_N, F_Y), що можна застрахувати, визначимо невипадкову величину U як розмір фонду страхового відшкодування за цим ризиком. Тоді величина $U - X$ характеризує те, наскільки розрахований резерв U відповідає очікуваним відшкодуванням. У такому разі *X*, як і раніше, випадкова величина, що описує виплати за цим ризиком. Нехай u_0 – власні засоби страховика, назвемо їх початковим резервом. Позначимо як

$$\psi(u_0, U) = P(u_0 + U - X < 0) \tag{5.23}$$

і назвемо цю подію розоренням. Тоді $(\psi(u_0, U), F_X)$ – ризик розорення. Розділяють статистичні й динамічні завдання оцінювання ризику розорення, відповідно до яких ризик розорення розглядають у часі.

Здебільшого майже неможливо точно обчислити ймовірність розорення $\psi(u_0, U)$. Проте передбачена певна оцінка зверху для ймовірності розорення.

Твердження 2. *Нерівність Лундберга. Імовірність розорення як функція початкових резервів обмежена зверху:*

$$\psi(u_0) \le e^{-Ru_0}, \tag{5.24}$$

де u_0 – початкові активи страховика, а R – параметр, що називають коригувальним коефіцієнтом.

Перевага (5.24) полягає в тому, що за великих значень u_0 апроксимація, якої досягають, для ймовірності розорення достатньо точна, крім того, нерівність (5.24) проста в застосуванні.

Коригувальний коефіцієнт R нерівності Лундберга (5.24) знаходять як єдиний додатний розв'язок рівняння

$$Ee^{RX_i} = 1 + (1+\theta)EX_i \cdot R, \tag{5.25}$$

де $Ee^{RX_i} = \int\limits_0^\infty e^{Rt} dF_{X_i}(t)$; θ – надбавка безпеки; EX_i – середнє очікуване значення виплат на один договір.

Позначимо через ε – допустимий рівень імовірності розорення. Тоді

$$u_o = \frac{EX_i^2 \ln \varepsilon}{2EX_i}. \tag{5.26}$$

Ця нерівність може служити для оцінювання рівня початкових резервів відповідно до допустимого рівня ймовірності розорення.

4. *Корисність від страхування й корисність страхової діяльності*. У теорії ризику передбачено, що рішення, ухвалені в тих або інших ситуаціях, повністю або частково обумовлені перевагами, заданими на безлічі розподілів імовірностей величин можливого збитку (або доходу) ξ з урахуванням розподілу ймовірності випадку виникнення збитку (або доходу).

Термін «корисність» має два різні значення. Перше – це якісна або порівняльна оцінка, перевага одного об'єкта над іншим, друге значення цього терміна – кількісна оцінка вираженої числом переваги. Узагалі, репрезентування корисності як числа є зручним кількісним виразом початкового якісного відношення переваги. Ураховуючи цю подвійність, далі для відображення якісних характеристик використовуватимемо термін «перевага», а термін «корисність» – для кількісного репрезентування переваг.

Основи сучасної теорії корисності закладені ще у XVIII сторіччі. Саме тоді декілька математиків, зацікавившись застосуванням теорії ймовірності до випадкових ігор і страхування, обґрунтували принцип, відповідно до якого розсудлива людина, потрапивши в критичну ситуацію, загрозливу для її добробуту, повинна поводитися так, щоб максимізувати розмір очікуваного багатства або грошового прибутку.

Сформулюємо таку гіпотезу.

Споживацька одиниця, роблячи вибір серед доступних їй альтернатив, що припускають або не припускають ризику, поводиться так, ніби:

1) вона має стійкі переваги;

2) для кожної з альтернатив, що не припускають ризику, переваги можуть бути вираженими числовими величинами, що називають «корисністю альтернативи»;

3) мета споживацької одиниці – збільшити очікувану корисність настільки, наскільки це можливо.

Нехай альтернативи споживача позначені як А, В, ..., К.

Безліч альтернатив, що не припускають ризику, позначимо як χ, а безліч альтернатив, що припускають ризик, – як μ. Відношення переваги альтернативи *A* над альтернативою *B* позначимо як $A \succ B$.

Дж. фон Нейман та О. Моргенштерн запропонували загальне формулювання для гіпотези поведінки споживацької одиниці: людина робить вибір, з огляду на певну систему переваг із такими властивостями:

а) *досконалістю*. Це означає, що з будь-яких двох альтернатив A і B особа може вибрати, яка їй більш бажана – $A \succ B$ або $B \succ A$, або їй байдуже, яку з них вибрати (А ~ B). Іншими словами, для людини немає альтернатив, що вона не може порівняти між собою або з іншими альтернативами;

б) *транзитивністю*. Це означає, що, якщо для людини альтернатива A більш бажана, ніж В, а В, у свою чергу, більш бажана, ніж С, *то* А *більш бажана, ніж С:*

$$A \succ B,\ B \succ C \Rightarrow A \succ C. \tag{5.27}$$

Ця властивість фактично виражає несуперечність оцінок людини;

в) *рефлексією*. Для людини будь-яка альтернатива не може бути більш чи менш бажаною, якщо вона лише одна – $A \succ A$.

г) *опуклістю безлічі альтернатив щодо переваги.* Для будь-яких трьох альтернатив *A, B і C,* якщо $A \succ B \succ C$, знайдуться такі числа $\alpha, \beta > 0$ та $\alpha + \beta = 1$, що $\alpha A + \beta C$ ~ В.

Для альтернатив, що припускають ризик, вважатимемо, що відомий розподіл імовірності можливих доходів. Тоді можна вважати, що безліч μ є безліччю розподілів імовірності. Вважатимемо, що відношення переваги, визначене на ξ, породжує відношення переваги на μ, тобто простежуються властивості а)–г). Нехай альтернатива X задана як

$$X = \begin{cases} x_1,\ x_2, \ldots.,\ x_n, \\ p_1,\ p_2, \ldots.,\ p_n. \end{cases} \tag{5.28}$$

Кількісною оцінкою альтернативи, що припускає ризик, назвемо величину очікуваної корисності

$$U(X) = Eu(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i u(x_i), \qquad (5.29)$$

де $u(x_i)$ – визначена вище корисність альтернативи, що не припускає ризику (в такому разі гарантований дохід розміром x_i).

Нехай тепер певна людина стоїть перед вибором між двома альтернативами. Перша – *A* – не припускає ризику, її корисність *a* = *u(A)* (в результаті вибору цієї альтернативи людина одержує надійний дохід).

Друга альтернатива – *X* – припускає ризик, її очікувана корисність $U = U(X)$. Нехай водночас *a* = *EX* – корисність надійного доходу, яка дорівнює середньому значенню доходу від альтернативи, що припускає ризик. Якщо людина в цьому разі вибере *X*, тобто віддасть перевагу ризиковій альтернативі, говорять про схильністю до ризику; якщо людина вибере альтернативу *A*, то таким чином продемонструє бажання визначеності.

Твердження 3. Властивості функції корисності.

1. Якщо u (x) – функція корисності, то $v(x) = au(x) + b$ також є функцією корисності, тобто функція корисності визначена з точністю до лінійного перетворення.

2. Функція корисності зростає зі зростанням доходу: $u'(x) > 0$. Першу похідну функції корисності називають *«граничною корисністю»*. Тоді ця властивість означає, що гранична корисність завжди позитивна.

3. Нерівність Єнсена: якщо функція корисності на певному інтервалі опукла вгору, що відповідає $u''(x) \le 0$, то

$$U(X) \le u(EX). \tag{5.30}$$

Така функція корисності відповідає «неприйняттю ризику» (для значень доходів із зазначеного інтервалу).

Якщо функція корисності на певному інтервалі опукла вниз, що відповідає $u''(x) \succ 0$, то

$$U(X) \ge u(EX), \tag{5.31}$$

що відповідає «схильності до ризику» особи, яка використовує наведену функцію корисності для значень доходів із зазначеного інтервалу.

В основі теорії ухвалення рішень лежить припущення про те, що вибір альтернатив повинен бути обумовленим двома чинниками:

1) переконаннями особи, яка ухвалює рішення про ймовірність різних можливих результатів, можливих у разі вибору того або іншого варіанта рішення;

2) перевагами різних можливих результатів.

Корисність страхування. Мотивування ухвалення рішень потенційним страхувальником ґрунтується на таких економічних і психологічних передумовах:

– людина завжди прагне максимально задовольнити свої страхові інтереси за мінімальних фінансових витрат. Під час ухвалення рішення людина здебільшого ретельно вивчає різні альтернативи задоволення (чи ні) своїх страхових інтересів;
– страхувальник діє відносно раціонально;
– у разі відсутності відповідної альтернативи людина вміє знаходити оптимальний у певному розумінні баланс між своїми бажаннями й можливостями їх задоволення з урахуванням

наявності грошових коштів, розміщених для задоволення своїх страхових інтересів.

Отже, можна говорити, що страхувальник ухвалює рішення про вибір між різними альтернативами відповідно до певної системи переваг, на якій визначена функція корисності $u(X)$. Якщо страхувальник має ризик $A=(F_{N_j}, F_{Y_j})$, можна визначити «середню корисність ризику» аналогічно до того, як це було зроблено вище:

$$U(A) = Eu\,(A) = Eu\,(N_j \cdot Y_j)\,. \tag{5.32}$$

Ця величина може служити критерієм порівняння ризиків: ризик $B=(F_{N'_j}, F_{Y'_j})$ *кращий, ніж* $C=(F_{N''_j}, F_{Y''_j})$, якщо $U(B) > U(C)$.

Якщо випадкова величина $X_j = N_j \cdot Y_j$ набуває значення $x_1, ..., x_n$ з імовірністю $p_1, ..., p_n$, то критерієм порівняння ризиків (5.32) є величина (фон Неймана Моргенштерна):

$$U(A) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i)p_i. \tag{5.33}$$

Страхувальник має таку альтернативу: звернутися в страхову компанію й купити страховий захист від впливу ризику *A* або залишатися під впливом конкретного ризику, сподіваючись, що його реалізація істотно не вплине на благополуччя. Оцінимо благополуччя страхувальника певною величиною К, яку назвемо початковим капіталом страхувальника.

У першому випадку страхувальник несе детерміновані втрати *p*, що дорівнюють ціні поліса, корисність цього кроку становить $u(K-p)$. У другому втрати людини випадкові й, отже, їх корисність визначають за формулою (5.32) $U(K-X_j)=Eu(K-X_j)$.

Порівнюючи ці величини, страхувальник ухвалює рішення про страхування. Одночасно страховик за цією інформацією може оцінити максимальну ціну, що готовий заплатити потенційний страхувальник за захист від свого ризику. Позначимо як $G_{\max}$ максимальну ціну, що готовий заплатити страхувальник за повний страховий захист від конкретного ризику. Тоді, користуючись нерівністю Єнсена (властивістю 3), для різних страхувальників можна оцінити $G_{\max}$ як:

– $G_{\max} \geq EX_j, u''(x)>0$ у разі неприйняття людиною ризику;

– $G_{\max} \leq EX_j, u''(x)<0$ у разі прийняття людиною ризику.

Ризикову ситуацію страховика ми визначали вище (ймовірність розорення) як $A=\left(\psi(u_0,U),\ F_X\right)$. Тепер наведені вище критерії можна застосовувати й для порівняння ризиків страхової компанії. Іншими словами, ми припускаємо, що страхова компанія володіє системою «переваг», заданою на безлічі майбутніх доходів (втрат), пов'язаних із наявними ризиками, й ця система переваг задовольняє систему аксіом існування функції корисності. Розглянемо як критерій порівняння ризиків критерій середньої очікуваної корисності й наведемо декілька прикладів. Дохід компанії описує випадкова величина $Y=u_0+U-X$, де X, як і раніше, – випадкові виплати з розподілом $F_X(x)$, а U – резерв, призначений для забезпечення виплат.

Тоді розподіл доходу:

$$
\begin{aligned}
&F_Y(x) = P\,(u_0 + U - X \le x) = P\,(X \ge u_0 + U - x) = \\
&= 1 - F_X\ (u_0 + U - x), \qquad (5.34) \\
&F_Y(0) = \psi\ (u_0, U).
\end{aligned}
$$

5. *Функція «сумління»*. Однією з найзагальніших із відомих моделей порівняння ризиків є запропонована в 1982 році П. Фішберном та ін. модель «очікуваного сумління». Авторами визначена так звана «функція сумління» $r\,(y_1, y_2)$ – функція порівняльної корисності детермінованих втрат y_1 та y_2. Функцію сумління визначають так. Нехай особа стоїть перед вибором між двома ситуаціями, що мають ризикову природу. Припустимо, що вибраний варіант після реалізації ризику набуває значення y_1, а невибраний реалізується в y_2. Тоді $r\,(y_1, y_2)$ характеризує «сумління» цієї особи, якщо y_1 виявився більшим, ніж y_2. Далі для пари розподілів $P_1 = p_1, ..., p_n$ і $P_2 = q_1, ..., q_n$ на множині $y_1, ..., y_n$ визначають вираз для середньоочікуваного сумління:

$$
\sum_{i,\,j} r(y_i, y_j)\, p_i q_j. \qquad (5.35)
$$

Розподіл *P1* вважають «гіршим» за *P2*, якщо середнє очікуване сумління позитивне. Якщо цей вираз дорівнює нулю, то ризики рівноможливі, особа, яка стоїть перед вибором між двома ризиковими ситуаціями, може вибрати будь-яку (з однаковою ймовірністю її настання). Якщо вираз (5.35) негативний, то розподіл *P2* вважають «гіршим» за *P1*.

ТЕМА 4
МОДЕЛЬ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ПОЗОВІВ

ЛЕКЦІЯ 6
Модель індивідуальних позовів

Однорідний портфель. Основні припущення моделі. Формалізація моделі індивідуальних позовів: велика кількість договорів у портфелі; невелика кількість договорів у портфелі, що складається з однакових ризиків; неоднорідний за втратами портфель; неоднорідні договори щодо ймовірності страхового випадку або втрат.

6.1 Однорідний портфель

Страховий портфель – сукупність застрахованих ризиків, об'єднаних для їх мінімізації. Кожна така сукупність характеризується зазначеними нижче ознаками й відповідними їм параметрами:

1. Загальною кількістю об'єктів. Зручніше говорити про загальну кількість договорів.
2. Максимальною величиною можливого збитку (якщо вона визначена).
3. Розподілом вимог і втрат, що характеризують ризики, що ввійшли до цієї сукупності, й пов'язані з ними числові характеристики.
4. Характеристикою залежності ризиків, що ввійшли до сукупності.
5. Числовими характеристиками загальної сукупності.

Спершу розглянемо стаціонарний портфель, тобто таку сукупність договорів, для якої зберігається рівновага між «притоком» і «відтоком» договорів.

Однорідний портфель

Далі ми розглянемо «однорідний» портфель, маючи на увазі, що всі ризики цього портфеля однакові, тобто задані як (F_N, F_{X_1}), *або цей портфель влаштований як* об’єднання декількох груп однакових ризиків, водночас це об’єднання принаймні не збільшує незбалансованості груп ризиків, розглянутих окремо. На практиці, говорячи про однорідність портфеля, тим або іншим способом оцінюють збалансованість сукупності договорів. Найбільш поширений через простоту так званий «коефіцієнт однорідності», розраховуваний як відношення максимальної страхової суми визначеної сукупності до середньої страхової суми, й «критерій однорідності», що затверджує, що однорідним є той портфель, для якого відхилення страхових сум від середньої не перевершує 2. Для формування однорідних портфелів виробляють так зване «вирівнювання ризику», страховик ділить ризик зі страхувальником або перестрахувальником. Далі ми розглянемо те, як це виглядає з формальної точки зору.

Наш підхід певною мірою «теоретичний», але ми збираємося його застосовувати для визначення теоретичних розмірів фондів страхових зобов’язань і премій. Як визначальний критерій однорідності портфеля розглядатимемо коефіцієнт варіації виплат за цим портфелем (ступінь ризику) й, крім того, розраховуватимемо значення «коефіцієнта однорідності» й «критерій однорідності» там, де для нас це буде можливим.

Приклад. Нехай портфель договорів складається з договорів двох типів. Втрати за одним договором першого типу описує випадкова величина Y, що набуває значення 8, 4 і 1 з імовірністю 1/16, 3/16, 3/4 відповідно:

$$Y_1 = \begin{cases} 8, \dfrac{1}{16}, \\ 4, \dfrac{3}{16}, \\ 1, \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Числові характеристики Y: $\begin{cases} EY_1 = 2, \\ EY_1^2 = 12\dfrac{3}{4}, \\ VarY_1 = 10\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

Втрати для договорів другого типу рівномірно розподілені на відрізку від нуля до восьми. Страхова подія виникає з однаковою ймовірністю для всіх договорів цього портфеля − 0.05. Для простоти припустимо, що договорів обох типів у портфелі порівну, скажімо по 10. Тоді числові характеристики для частини портфеля, що складається з договорів першого типу:

$$E_1 = n \cdot EX_1 = 10qEY_1 = 1,$$

$$V_1 = n \cdot VarX_1 = 10q\,(EY_1^2 - q\,(EY_1)^2) = 6.275,$$

$$W_1 = W(X^{(1)}) = \frac{\sqrt{V_1}}{E_1} \approx 2.505.$$

Для договорів другого типу числові характеристики дорівнюють:

$$E_2 = n \cdot EX_2 = 10qEY_2 = 2,$$

$$V_2 = n \cdot VarX_2 = 10q\,(EY_2^2 - q\,(EY_2)^2) \approx 10.27,$$

$$W_2 = W(X^{(2)}) = \frac{\sqrt{V_2}}{E_2} \approx 1.6.$$

Ступінь ризику для портфеля:

$$E = E_1 + E_2 = 3,$$

$$V = V_1 + V_2 \approx 16.545,$$

$$W = W(X) = \frac{\sqrt{V}}{E} \approx 1.355\,9.$$

У цьому разі як $X^{(1)}$ і $X^{(2)}$ позначені випадкові величини, що описують виплати за першою й другою частинами портфеля відповідно. Ми бачимо, що після об'єднання двох груп договорів в один портфель ступінь ризику *W* результуючого портфеля став меншим, ніж ступені ризику *W1* і *W2* для кожної з частин. Це говорить про те, що результуючий портфель краще збалансований, ніж кожна з груп договорів, розглянутих окремо. Але зрозуміло, що цього покращання досягли завдяки договорам другої групи. Це необхідно враховувати під час обчислення тарифів. Тобто в цьому разі тарифи для договорів різних груп такого портфеля повинні бути різними, інакше менш вигідний (перший) згідно з розрахунками ризик оплачуватимуть коштом другого. Це зробить розрахований тариф привабливішим для клієнтів, які мають ризик першого типу, що зрештою може призвести до перевищень виплат. Як уже зазначали вище, в рамках статичних моделей об'єкти, що вивчають, розглядають без урахування залежності від часу. Отже, фактично, статична модель описує стан об'єктів, що вивчають, в одиничному інтервалі часу. Наведемо найпростішу, але в певному сенсі типову модель.

5.2 Основні припущення моделі однорідного портфеля

Розглянемо портфель договорів страхування, що мають однакову тимчасову протяжність (яка дорівнює одиниці часу), укладених у момент часу 0 і що завершуються не пізніше за момент часу 1. Усі договори портфеля стосуються однієї страховій події. Нехай

1) кількість договорів у цьому портфелі фіксована й невипадкова;

2) ризики клієнтів не залежать один від одного;

3) плату за страховку страхувальник уносить повністю на початку аналізованого періоду (в момент 0) і ніяких додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду до 1 немає;

4) розподіл втрат для всіх договорів портфеля однаковий;

5) розмір вимоги в разі страхової події виплачують повністю й відразу після пред’явлення позову (до моменту 1).

У рамках цієї моделі вивчають стан активів страхової компанії до моменту завершення дії договорів, а основне завдання – розрахунок фонду страхового відшкодування, що забезпечує фінансову стійкість, і, отже, визначення страхового внеску за таким ризиком.

Позначення, визначення й використовувані функції

Для побудови моделі введемо такі позначення:

n – кількість договорів у портфелі;

j – номер договору (індекс клієнта);

q – імовірність страхової події для одного клієнта;

$N_j = \begin{cases} 1, & q \\ 0, & 1-q \end{cases}$ – індикатор страхової події для j-го клієнта;

$N = \sum_{j=1}^{n} N_j$ – загальна кількість вимог до моменту 1 за цим портфелем;

Y_j – можливі втрати одного клієнта;

F_{Y_j} – функція розподілу втрат для одного клієнта.

Якщо наявна щільність розподілу втрат, то позначимо її як f_{Y_j}. *В*трати однаково розподілені для всіх клієнтів портфеля, тому індекс клієнта *j* у випадкової величини Y_j можна замінити, скажімо, на 1;

X_j – виплати на одного клієнта, $X_j = N_j \cdot Y_j$;

$X = \sum_{j=1}^{n} X_j$ – сумарні виплати до моменту 1 за цим портфелем;

γ – рівень надійності виконання зобов'язань страхової компанії за виплатами;

U – розмір фонду відшкодувань, що з надійністю γ забезпечує виплати за всіма вимогами цього портфеля.

Отже, договори портфеля мають ризик (F_{N_j}, F_{Y_j}).

Сумарний ризик компанії за цим портфелем відповідно (F_N, F_X).

6.3 Формалізація моделі індивідуального ризику

Розділимо розгляд на чотири частини, що мають на увазі певні відмінності в підходах до побудови моделі, а загальну схему розгляду репрезентуємо такими кроками:

– обмеження, що обумовлюють конкретний випадок;

– розрахунок резерву страхових виплат;

– збалансованість.

1. Кількість договорів у портфелі велика. Портфель містить однакові ризики.

Виконання страховою компанією своїх зобов'язань за вимогами про виплату з надійністю γ формально можна записати як

$$P(U - X \geq 0) = \gamma . \quad (6.1)$$

Тоді, якщо кількість договорів у портфелі велика, можна застосувати центральну граничну теорему для оцінювання U.

$$P(X \le U) = P\left(\frac{X - EX}{\sigma X} \le \frac{U - EX}{\sigma X}\right) \to$$
$$\to \int_{-\infty}^{\alpha(\gamma)} \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2} dx = \gamma, \qquad (6.2)$$

де $\alpha(\gamma)$ – відповідна γ квантіль стандартного нормального розподілу із середнім 0 і дисперсією 1; EX – середні очікувані виплати за всім портфелем договорів, а σX – середньоквадратичне відхилення цих виплат. Як і раніше, припустимо, що випадкові величини N та Y не залежать одна від одної. Тоді для розрахунку числових характеристик сумарних виплат можна скористатися результатом (6.2) і записати:

$$EX = EN \cdot EY_1 = E\left(\sum_{j=1}^{n} N_j\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) = nq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t),$$
$$VarX = VarN \cdot (EY_1)^2 + VarY_1 \cdot EN =$$
$$nq\,(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t)\right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t)\right)\right), \qquad (6.3)$$

$$\sigma X = \sqrt{VarX}\,.$$

І, отже, необхідний для покриття відшкодувань резервний фонд можна розрахувати як

$$\frac{U - EX}{\sigma X} = \alpha(\gamma) \Rightarrow U = \alpha(\gamma)\sigma X + EX = L + EX. \qquad (6.4)$$

Величину L називають фондом сумарного страхового навантаження. Варто зазначити, що умови застосування центральної граничної теореми в цьому разі додержані: випадкові величини X незалежні й однаково розподілені.

Відзначимо, що справедлива така оцінка погрішності апроксимації за нормального розподілу:

$$\sup_x \left| P\left\{ \frac{X - EX}{\sigma X} \le x \right\} - \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{t^2}} dt \right| \le$$

$$\le \begin{cases} 0{,}7975 \dfrac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}, \textit{ якщо } X_i \textit{ однаково розподілені}; \\ \dfrac{33}{4} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} E|X_1|^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} VarX_1\right)^{\frac{3}{2}}}, \textit{ якщо } X_i \textit{ неоднаково розподілені}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Коефіцієнт варіації (ступінь ризику) в цьому разі можна розрахувати як

$$W(X) = \frac{\sigma X}{EX} = \left(\frac{nq\,(1-q)(EY_1)^2 + nqEY_1^2 - nq\,(EY_1)^2}{n^2 q^2 (EY_1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{q\,(EY_1)^2 + EY_1^2}{nq(EY_1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n} \left(1 + \frac{EY_1^2}{q\,(EY_1)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n}(1 + A) \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.6}$$

де як A ми позначили число $\dfrac{EY_1^2}{q(EY_1)^2}$, не залежне від об'єму портфеля n, що є характеристикою ризику одного договору. Ми бачимо, що ступінь ризику портфеля спадає як $\frac{1}{\sqrt{n}}$ і зростає пропорційно $A + 1$.

Приклад. Нехай портфель складається із 40 незалежних договорів, втрати за кожним мають експоненціальний розподіл із середнім $\frac{1}{\lambda} = 2$, а ймовірність настання страхового випадку однакова для всіх договорів портфеля й дорівнює 0,04. Необхідна надійність забезпечення виплат $\gamma = 0{,}95$. Тоді числові характеристики для втрат на один договір:

$$EY_1 = 2, EY_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} = 8,$$
$$VarY_1 = EY_1^2 - \left(EY_1\right)^2 = 4.$$

Отже, для числових характеристик загальних виплат можна записати:

$$EX = nqEY_1 = 40 \cdot 0{,}04 \cdot 2 = 3{,}2,$$
$$VarX = nq\,(1-q)\left(EY_1\right)^2 + nq\left(EY_1^2 - \left(EY_1\right)^2\right) =$$
$$= 40 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 \cdot 4 + 40 \cdot 0{,}04 \cdot 4 = 7{,}936,$$
$$\sigma X = \sqrt{VarX} \approx 2{,}82.$$

Розмір страхового резерву, що з імовірністю γ забезпечить усі виплати, дорівнює:

$$U = 1{,}645 \cdot 2{,}82 + 3{,}2 = 7{,}8389.$$

Похибку гауссівського наближення можна розрахувати за (6.5). Для цього необхідно обчислити третій момент для величини X:

$$EX_1^3 = EN_j^3 \cdot EY_1^3 = q \cdot \int_0^\infty x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = q \frac{6}{\lambda^3} = 0,04 \cdot 48 = 1,92 .$$

Тоді похибку апроксимації нормальним розподілом у такому разі оцінюють за верхнім числом:

$$0,7975 \frac{E|X_1|^3}{(VarX_1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}} = 0,7975 \frac{1.92}{64 \cdot \sqrt{40}} \approx 0,0048.$$

Ступінь ризику в такому разі можна розрахувати як

$$WX = \frac{\sigma X}{EX} = \left(\frac{VarX}{(EX)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = 0,775 < 1,$$

що говорить про те, що цей портфель добре збалансований.

2. Кількість договорів у портфелі незначна, але портфель як і раніше складається з однакових ризиків.

У такому разі використання центральної граничної теореми не дає гарного результату, тому що різницею між інтегралом і ймовірністю, що стоять у правій та лівій частинах рівняння (6.2), нехтувати не можна. Проте цей приклад не складніший за попередній, тому що скориставшись тим, що кількість вимог про виплату має біноміальний закон розподілу ймовірності

$$p_k = P(N = k) = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}, \tag{6.7}$$

можна оцінити з надійністю γ максимальну кількість позовів s*:

$$s^*: \quad s^* = \min_s \left\{ \sum_{k=0}^{s} p_k \geq \gamma \right\}, \tag{6.8}$$

що може надійти від усіх договорів цього портфеля. Далі для розподілу загальних виплат можна записати:

$$\begin{aligned}
&P(X \leq x) = P(Y_1 \leq x \mid N = 1)P(N = 1) + \\
&+ P(Y_1 + Y_2 \leq x \mid N = 2)P(N = 2) + \ldots + \ldots = \\
&= \sum_{k=1}^{s^*} P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k \mid N = k)P(N = k) + \\
&+ P(N > s^*)P\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y_k \leq x \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{s^*} P(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k \mid N = k)P(N = k)P(N = k) + \\
&+ (1 - \gamma)\left(\sum_{k=1}^{\infty} Y_k \leq x \right).
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Другий доданок – мала величина, якою можна знехтувати. З огляду на це витікає, що достатньо розрахувати розподіл виплат за s* позовами. Отже, із заданим порогом надійності оцінюють розмір резервного фонду, що забезпечує виплати за позовами.

Приклад. Нехай портфель складається з 20 незалежних договорів страхування, втрати за якими внаслідок страхової події можуть становити суми 1, 3 і 4 умовних одиниць грошей з імовірностями 0.7, 0.2 та 0.1 відповідно. Страхова подія відбувається з однаковою ймовірністю 0.03 для всіх договорів цього портфеля. Надійність забезпечення страхових виплат γ = 0.97. Числові характеристики для втрат дорівнюють:

$$EY_1 = 1{,}7, EY_1^2 = 4{,}1,$$
$$VarY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = 1{,}21,$$
$$A = \frac{EY_1^2}{q(EY_1)^2} \approx 47{,}3.$$

Кількість позовів у такому разі відповідає біноміальному закону розподілу ймовірності:

$$N = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 20 \\ 0{,}544 & 0{,}336 & 0{,}099 & 0{,}018 & 0{,}002 & \ldots \end{cases}$$

k	0	1	2	3	4	...
$P(N \le k)$	0,544	0,88	0,979	0,997	0,999	...

Отже, максимальна кількість вимог (у значенні надійності забезпечення виплат) s* = 2. Отже, залишилося розрахувати двовимірну згортку розподілу *Y1* із собою. *Y1 + Y2* може набувати значень 2, 4, ..., 8 із певною ймовірністю:

$$Y_1 + Y_2 = \begin{cases} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8, \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6. \end{cases}$$

Щоб знайти ймовірність $p_k = P\,(Y_1 + Y_2 = k)$, складемо дві таблиці таким чином:

$$A = \begin{array}{c} \\ 0{,}7 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0.7 & 0.2 & 0.1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}49 & 0{,}14 & 0{,}07 \\ 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}02 \\ 0{,}07 & 0{,}02 & 0{,}01 \end{pmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця *A* має на перетині рядка *j* та стовпця *i* добутки ймовірностей $P(Y_1 = j)$ і $P(Y_2 = i)$, а матриця *B* –

суму відповідних $Y_1 + Y_2$. Тепер для розрахунку $p_k = P(Y_1 + Y_2 = k)$ залишилося скласти ті елементи матриці A, для яких відповідні елементи матриці *B* дорівнюють *k*. Наприклад, $p_4 = P(Y_1 + Y_2 = 4) = A_{12} + A_{21}$, і так далі. У результаті одержуємо розподіл суми

$$Y_1 + Y_2 = \begin{cases} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8, \\ 0{,}49 & 0{,}28 & 0{,}14 & 0{,}04 & 0{,}04 & 0{,}01. \end{cases}$$

Тепер можна скласти таблицю залежності ймовірності нерозорення від об'єму засобів U:

U	2	4	5	6	7	8
$P(Y_1 + Y_2 \le U)$	0,49	0,77	0,91	0,95	0,99	1.

Ступінь ризику розраховують як

$$WX = \left(\frac{1}{n}(1 + A) \right)^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}55 > 1,$$

що говорить про погану фінансову стійкість цього портфеля.

3. Портфель неоднорідний за втратами. Страхова подія має однакову частоту для всіх договорів цього портфеля (мається на увазі, що всі договори індивідуального ризику), але втрати клієнта в разі страхової події описують різними законами розподілу ймовірностей F_{Y_j}. Цей приклад майже буквально повторює розглянуті вище ситуації 1 і 2 для відповідних обсягів портфелів. Різниця полягає в розрахунку числових характеристик:

$$EX_j = EN_j \cdot EY_j = qEY_j,$$

$$EX = q\sum_{j=1}^{n} EY_j, \qquad (6.10)$$

$$VarX_j = \sum_{j=1}^{n} Var\left(N_j \cdot Y_j\right) = nq(1-q)\sum_{j=1}^{n}\left(EY_j\right)^2 + q\sum_{j=1}^{n} VarY_j$$

для застосування центральної граничної теореми в першому випадку й розрахунку згорток розподілів

$$g_Y(t) = g_{Y_1}(t) \cdot g_{Y_2}(t) \cdot \ldots \cdot g_{Y_n}(t) \qquad (6.11)$$

у другому. Здебільшого й розрахунок числових характеристик, і розрахунок згортком у такому разі є трудомістким заняттям. Зазвичай у реальності не буває таких подій, а отже, великих досконало різнорідних за втратами й водночас однакових за частотою відповідних цим подіям портфелів бути не може. Тобто портфель може складатися з 2–3 груп договорів, що мають різні між собою, але однакові всередині групи розподіли втрат, а це істотно спростить обчислення. Можна поставити запитання про розподіл цього портфеля на підпортфелі договорів з однаковим ризиком, але це неправильно з огляду на збільшення ступеня ризику.

4. Договори неоднорідні за ймовірністю страхового випадку або за втратами.

У такому разі застосовують процедуру рандомізації. Із теоретичної точки зору це означає таке.

Нехай $F_\theta(x)$ – функція розподілу ймовірності, залежна від параметра θ, а u – певна щільність розподілу ймовірності. Тоді

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{\theta}(x)u(\theta)d\theta- \qquad (6.12)$$

монотонна зростаюча від 0 до 1 функція *x*, і, отже, функція розподілу. Якщо $F_{\theta}(x)$ має безперервну щільність $f(\theta, x)$, то і *W(x)* має безперервну щільність *w (x)*, що дорівнює

$$W(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\theta,x)u(\theta)d\theta. \qquad (6.13)$$

Замість інтегрування щодо щільності u можна підсумовувати за дискретним розподілом імовірності: якщо $\theta_1, \theta_2, ...$ вибрані довільно й $p_k \geq 0,\ \sum_k p_k = 1,$ то рівність

$$w(x)=\sum_k f(x,\theta)\,p_k \qquad (6.14)$$

визначає нову щільність імовірності. Процес може бути описаним імовірністю як рандомізація; параметр θ розглядають як випадкову величину й новий розподіл імовірності визначають у *площині* (x, θ), що слугує вибірковим простором.

У такому разі ризики всередині портфеля неоднорідні за ймовірністю страхової події, але можна говорити про те, що, як і раніше, розподіл позовів відповідає біноміальному закону, а ймовірність страхової події q не постійна, а є певною випадковою величиною з розподілом $U_q(x)=P(q\leq x)$. Тоді безумовний розподіл позовів

$$P(N=k)=E_q N(q)=\int_0^{+\infty} N(q)dU(q)=$$
$$=\int_0^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^k (1-q)^{n-k} dU(q). \quad (6.15)$$

У простому випадку можна вважати, що початковий портфель складається з декількох груп договорів, усередині яких імовірність страхової події постійна.

ТЕМА 5
МОДЕЛЬ КОЛЕКТИВНИХ ПОЗОВІВ

ЛЕКЦІЯ 7
Модель колективних позовів

Основні припущення моделі. Визначення ймовірності виконання компанією своїх зобов'язань за портфелем договорів майнового страхування. Визначення ймовірності нерозорення в будь-який момент пред'явлення вимог про виплату страхового відшкодування.

7.1 Основні припущення моделі

У моделях індивідуальних позовів розглядають окремі договори й пов'язані з ними можливі виплати. Для визначення характеристик портфеля в цілому підсумовують характеристики окремих договорів. Із формальної точки зору виходить проста модель: один (будь-який) договір портфеля може призвести лише до однієї вимоги про виплату (або не призвести до неї).

Лише такі договори й пов'язані з ними ризики розглядає модель індивідуальних позовів. Проте відомо, що в більшості видів майнового страхування один договір може призвести більше ніж до однієї вимоги. Такі договори та пов'язані з ними ризики розглядають у моделях колективних позовів.

У такому разі, як і в моделі індивідуальних позовів, основним завданням є обґрунтування розміру страхового резерву, що забезпечує виплати за вимогами для одного портфеля договорів колективних позовів.

Основна ідея побудови моделі й проведення відповідних розрахунків полягає в такому. Весь портфель розглядають як один договір типу договору майнового страхування. Розглядають процес надходження позовів за портфелем у цілому. Позови, що надходять, не пов'язують із конкретними договорами, а розглядають як результат сумарного ризику цього портфеля.

Основні припущення моделі

Розглянемо портфель договорів страхування, що мають однакову тривалість (рівну одиниці часу), укладених у момент часу 0, і що завершуються не пізніше за момент часу 1. Усі договори портфеля стосуються однієї страхової події.

Нехай:

1) ризики клієнтів не залежать один від одного;

2) плату за страховку страхувальник вносить повністю на початку аналізованого періоду (в момент 0) і ніяких додаткових надходжень від страхувальників протягом періоду до 1 немає;

3) розподіл втрат для всіх договорів портфеля однаковий;

4) розмір вимоги в разі страхової події виплачують повністю й відразу після пред'явлення позову (до моменту 1);

5) виплати за вимогами не залежать одна від одної та однаково розподілені.

У рамках цієї моделі вивчають стан активів страхової компанії до моменту завершення дії договорів, основне завдання – розрахунок фонду страхового відшкодування, що забезпечує фінансову стійкість і, отже, визначення страхового внеску за таким ризиком.

Використовувані позначення, визначення, функції

Позначимо як $Xj > 0$ величину j-ї за порядком вимоги про виплату. Тоді сумарні виплати можуть бути описаними випадковою величиною

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_N, \tag{7.1}$$

де N – випадкова величина, що описує загальну кількість позовів за аналізований період. Іншими словами, в такому разі ми маємо справу із сумою випадкової кількості однаково розподілених доданків. Функція для випадкової величини, що описує розмір збитку й кількість випадків, така:

$$g_X(t) = g_N(\varphi_{X_j}(t)), \tag{7.2}$$

де $\varphi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dF_{X_i}(x)$ – перетворення Лапласа неперервної випадкової величини *Xi*.

Розподіл виплат за портфелем можна спробувати встановити розкладанням функції (7.2) у ряд Тейлора в точці 0. У певних ситуаціях (розподіл виплат дискретний або можливі значення *N* малі) розрахунок розподілу загальних виплат спрощують завдяки використанню згорток:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \ldots + X_k \le x \mid N = k) \cdot P(N = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (F_{X_1}^*)^k P(N = k), \end{aligned} \tag{7.3}$$

де $(F_{X_1}^*)^k$ – k-кратна згортка розподілу втрат на один договір.

Числові характеристики для загальних виплат можна розрахувати, використовуючи першу й другу похідні функції (7.2), узяті в точці $x = 0$. У результаті елементарних перетворень похідних знайдемо вирази для розрахунку числових характеристик загальних виплат у моделі колективного ризику:

$$EX = EN \cdot EY_1,$$
$$Var = VarN(EY_1)^2 + VarY \cdot EN. \tag{7.4}$$

Відзначимо, що, не дивлячись на зовнішню схожість формул

$$EX = EN \cdot EY_1 = E\left(\sum_{j=1}^{n} N_j\right) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t) = nq \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t),$$
$$VarX = VarN \cdot (EY_1)^2 + VarY_1 \cdot EN = \tag{7.5}$$
$$= nq(1-q) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t)\right)^2 + nq \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 dF_{Y_1}(t) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} t dF_{Y_1}(t)\right)\right)$$

(7.4) та (7.5) для обчислення характеристик, відмінність між ними виявляє принципову відмінність моделей. У індивідуальній моделі розраховуються характеристики за одним договором, а потім результати підсумовуються за відомою кількістю договорів. У колективній моделі кількість договорів не потрібно знати з тієї причини, що моделюється кількість вимог про виплату.

7.2 Визначення ймовірності виконання компанією своїх зобов'язань за портфелем договорів майнового страхування

Ймовірність виконання страховою компанією своїх зобов'язань за портфелем на момент завершення всіх договорів математично виражається таким чином:

$$P(X \le u_0) = P(X_1 + X_2 + ... + X_n \le u_0) =$$
$$= P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_N \le u_0), \tag{7.6}$$

де u_0 – це сума, яку компанія може виплатити за цим портфелем (назвемо її початковим резервом). Тобто точне розв’язання задачі знаходження ймовірності $P(X \le u_0)$ зводиться до визначення функції $F_X(x) = P(X \le x)$. Цей розподіл має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &F_X(x) = P(X \le x) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + ... + Y_N \le x \mid N = k) \cdot P(N = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} F_Y^{*k}(x) \cdot P(N = k), \end{aligned} \qquad (7.7)$$

де $F_Y^{*k}(x)$ – згортка k-го порядку розподілу $F_Y(x)$, що визначена для безперервної випадкової величини Y як

$$F_Y^{*2}(x) = F_{Y+Y}(x) = \int_0^x F_Y(x-y)dF_Y(y). \qquad (7.8)$$

Застосовуючи цю формулу n – 1 разів, можна визначити функцію розподілу n доданків. Але оскільки визначення ймовірності нерозорення припускає розрахунок функції розподілу великої кількості доданків, то це дає можливість простого наближеного розрахунку. Наближений розрахунок заснований на гауссівському (нормальному) наближенні, яке в свою чергу засноване на центральній граничній теоремі (ЦГТ) теорії ймовірності. Застосування ЦГТ можливе за великої кількості договорів страхування (при $nq \ge 5$ і $n(1-q) \ge 5$). Страхування передбачає масовий обхват через свою сутність – перерозподіл збитку небагатьох постраждалих між усіма застрахованими. Тому гауссівське наближення неадекватно відображає ситуацію для невеликих страхових компаній, але необхідно сказати, що доцільність існування невеликих страхових компаній сама собою проблематична. Страхова компанія, яка всерйоз займається страхуванням в умовах справжньої конкуренції – це швидше виключення, ніж правило. З таких позицій можливе застосування гауссівського наближення для визначення ймовірності нерозорення страхової компанії.

Припустимо, що всі договори даного портфеля мають однакові ризики, тобто розподіл втрат $F_Y(x)\cdot$ на один страховий випадок однаковий для всіх договорів, а страхова подія для всіх характеризується розподілом імовірності F_N. Тоді гауссівське наближення виглядає таким чином:

$$P(X \le u_0) = P\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{VarX}} \le \frac{u_0 - E(X)}{\sqrt{VarX}}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{u_0 - E(X)}{\sqrt{VarX}}\right). \tag{7.9}$$

Окрім вищерозглянутої статичної постановки задачі про нерозорення залежно від початкового резерву, вирішеної за допомогою двох методів – точного розрахунку та оцінювання, заснованого на гауссівському наближенні, розглянемо ще дещо іншу її постановку. Тепер нашою задачею буде знаходження ймовірніості нерозорення залежно від двох початкових параметрів – початкового резерву (u_0) і нетто-ставки (Тн).

Для цього візьмемо умову, що нетто-ставки однакові для всіх договорів цієї групи.

Спочатку оцінимо ймовірність того, що різниця між зібраними нетто-преміями і виплатами за договорами страхування буде менше деякого числа r за допомогою гауссівського наближення (P_0).

Введемо такі позначення:

S_i – страхова сума договору з номером *i*.

Будемо вважати величини S_i випадковими. Для деякого спрощення припустимо, що цей портфель складається з договорів індивідуального ризику, тобто за час дії договору від нього не може надійти більше однієї вимоги про виплату відшкодування. Тоді, як і раніше,

q – ймовірність страхової події;

X_i – відшкодування на один договір;

$R_Y = \dfrac{\sqrt{VarY}}{EY}$ – коефіцієнт варіації можливих у результаті страхового випадку втрат на один договір;

$R_S = \dfrac{\sqrt{VarS}}{ES}$ – коефіцієнт варіації страхових сум;

$m = EV_i = E\dfrac{X_i}{S_i}$ – середнє очікуване відносне відшкодування на один договір. У допущенні незалежності страхової суми і відшкодування за одним договором, можна сказати, що

$$m = E\frac{X_i}{S_i} = q\frac{EX_i}{ES_i}$$
$$d^2 = Var\frac{X_i}{S_i} = \frac{m^2(1 - q + R_W^2 - qR_S^2)}{q + qR_S^2}; \qquad (7.10)$$

– дисперсія відносного страхового відшкодування на один договір; $Пн_i$ – нетто-премія за і-м договором, $Пн_i = Тн \cdot S_i$.

Тоді для ймовірності нерозорення при $n \to \infty$ можна записати, що

$$P\left[\sum_i (Пн_i - X_i) \le r\right] = \Phi\left\{\frac{r - n \cdot E(Пн_i - X_i)}{\sqrt{nd^2}}\right\} =$$
$$= \Phi\left\{\frac{r - N \cdot ES_i \cdot [Тн - m])}{\sqrt{nd^2}}\right\}. \qquad (7.11)$$

Відповідно ймовірність нерозорення

$$\varphi = 1 - P\left[\sum (Пн_i - X_i) \le r\right].$$

Таким чином, задача визначення ймовірності виконання компанією своїх зобов’язань за усім портфелем до моменту завершення всіх договорів може бути розв’язана за допомогою математичних методів. Залежно від переваг компанії і від наявних даних можна використовувати точний розрахунок або різні оцінювання. Чим менш детальні статистичні дані має компанія, тим більше приблизним буде розрахунок. Але за масового проведення страхування точність наближення дуже велика. Внаслідок відносної простоти і задовільної точності за достатньо великої кількості договорів найчастіше застосовується гауссівське наближення. Перевага гауссівського наближення у тому, що не потрібно шукати розподіли розміру окремої виплати і кількості виплат. У такому разі ми обходимо цей етап і відразу виходимо на розв’язання поставленої задачі – визначення ймовірності нерозорення.

7.3 Визначення ймовірності нерозорення в будь-який із моментів ставлення вимог про виплату страхового відшкодування

Задача полягає у визначенні ймовірності виконання компанією своїх зобов’язань за договорами страхування в динаміці, тобто в моменти ставлення кожної конкретної вимоги про виплату страхового відшкодування. На відміну від статичної постановки задачі тепер ми визначимо ймовірність нерозорення залежно не лише від початкового резерву (u0), а і від поточних надходжень страхових премій. Як і раніше, ми не враховуватимемо інфляцію та інвестиційний дохід, щоб не ускладнювати модель.

Введемо такі позначення:

$П_t$ – сума отриманих премій за портфелем із моменту часів 0 до моменту t;

X_t – сума страхових відшкодувань, що виплатять, з моменту часу 0 до моменту t,

$N(t_1, t_2)$ – кількість виплат страхових відшкодувань із моменту часу t_1 до моменту t_2.

Ми будемо розглядати так звану «безперервну нескінченну версію» постановки задачі динамічного нерозорення, тобто передбачається, що підсумки діяльності підводяться безперервно і що розорення не повинне наступити на тимчасовому інтервалі $0 \le t \le \infty$. На практиці підсумки підводяться через певні проміжки часу, наприклад, щокварталу. У такому разі ми могли б контролювати факт розорення лише на відповідний момент підведення підсумків, але для спрощення ми припустимо безперервне їх підведення. Встановимо такі припущення:

1. Розподіл величини $N(t_1, t_2)$ залежить від довжини проміжку (t_1, t_2) і не залежить від його положення в часі.

2. Процес надходження позовів ординарний, тобто надходження двох або більше вимог про виплату страхового відшкодування за короткий проміжок часу практично неможливе.

3. Величини

$$N(t_1,t_2),\, N(t_2,t_3),\, ...,\, N(t_{N-1},t_N),\, t_1 < t_2 < ... < t_N$$

незалежні, тобто процес надходження вимог не має наслідків.

4. Договори незалежні тобто виплата страхового відшкодування за одним договором ніяк не впливає на виплату за іншими договорами.

Будемо називати активами компанії на момент часу t таку величину A_t :

$$A_t = u_0 + \Pi_t - X_t \,. \tag{7.12}$$

Тоді математично ймовірність нерозорення описується таким чином:

$$P(A_t \geq 0,\, 0 < t < \infty)\,. \tag{7.13}$$

Економічне значення цього виразу в такому – жодна виплата не вилучає із страхового фонду компанії таку суму, що суми початкового резерву і страхових премій, що залишилася, не вистачить на наступну виплату.

Страхові премії надходять набагато частіше, ніж ставляться вимоги, і їх розмір звичайно набагато менше розміру відшкодувань. Тому ми вважатимемо в рамках цієї моделі надходження премій безперервним детермінованим процесом, одним параметром, що характеризується, – швидкістю надходження грошових коштів *С. Тобто* $\Pi_t = Ct$.

Таким чином, ми маємо деякий процес A_t, який складають два певні процеси – u_0 і Π_t і один невизначений – X_t. Із цього виходить, що процес A_t також буде випадковим процесом.

Під час дотримання допущень, що стосуються процесу надходження вимог, він із необхідністю буде пуассонівським з параметром λ (де λ – середня кількість вимог, що надходять в одиницю часу):

$$P(N(0,t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,3,\ldots. \qquad (7.14)$$

Відповідно процес X_t буде пуассонівським процесом із параметрами λ і $F_Y(x)=P(Y\le x)$.

Ми припускаємо, що страхові премії, які збираються в одиницю часу, перевищують очікувані середні виплати в одиницю часу, тобто $C>\lambda E(Y)$. Нехай $C=(1+\theta)\lambda E(Y)$, де θ – частка перевищення швидкості надходження премій над швидкістю виплат страхових відшкодувань, $\theta=\left[C/(\lambda E(Y))\right]^{-1}$, назвемо цю величину *надбавкою небезпеки.*

У динамічній постановці задачі нерозорення ставиться в залежність від двох параметрів – початкового резерву u_0 і надбавки безпеки θ.

Отже, визначивши за емпіричними даними параметр θ і потім розрахувавши поправочний коефіцієнт R залежно від рівня початкового резерву u_0, ми можемо оцінити верхню межу розорення e^{-Ru_0} і відповідно нижню межу ймовірності нерозорення $\varphi(u_0)$.

Загальним висновком наведеної моделі є те, що ймовірність нерозорення тим більше, чим більше коригувальний коефіцієнт. Тобто коригувальний коефіцієнт, що містить швидкість надходження вимог, швидкість надходження премій, розподіл розмірів збитків є інтегральною характеристикою можливості виконання страховою компанією своїх зобов'язань. Але ця модель має істотну особливість. Досліджується динамічний процес, який складають надходження премій за договорами, що знову укладаються, і виплати страхових відшкодувань за всіма діючими на даний момент договорами. Тому ця модель орієнтована швидше не на замкнену солідарну розкладку збитку, а на ліквідність компанії на даний конкретний момент. Застосування цієї моделі коректне в умовах достатньо стабільного функціонування страхової компанії. Потрібно відзначити, що неприпустимо здійснення виплат за раніше укладеними договорами за рахунок надходження премій за знову укладеними – фактично це показує «фінансову піраміду». Тому застосування нерівності Лундберга має сенс за фінансового положення компанії, що не погіршується. Водночас необхідно чітко розрізняти різницю між імовірністю виконання зобов'язань на момент завершення всіх договорів портфеля і на момент ставлення будь-якої вимоги про виплату через різні принципи, встановлені в основу цих методів. Перший орієнтований на принцип замкнутого страхового фонду, а другий – на обчислення поточної ліквідності компанії.

ТЕМА 6
СТАТИЧНІ МОДЕЛІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

ЛЕКЦІЯ 8 Статичні моделі банкрутства страхової компанії

Діагностика банкрутства страхової компанії. Моделі прогнозування банкрутства страхової компанії на основі «балів Z»: двофакторна модель, п'ятифакторна модель (індекс кредитоспроможності Альтмана). Модель Спрінгейта. Формула Ліса. Модель Таффлера. Модель Creditmen. Модель R. Універсальна дискримінантна модель. Критерії ймовірності фінансової кризи в страховій компанії.

8.1 Діагностика банкрутства страхової компанії

Банкрутство – визнане судовими органами незадовільне господарське становище фізичної чи юридичної особи, ознакою якого є припинення розрахунків за зобов'язаннями через нестачу активів у ліквідній формі.

Відповідно до Закону України «Про відновлення платоспроможності боржника або визнання його банкрутом» банкрутство – визнана господарським судом неспроможність боржника відновити свою платоспроможність та задовольнити визнані судом вимоги кредиторів не інакше як через застосування ліквідаційної процедури.

Під банкрутством також можна розуміти засвідчену судом абсолютну неплатоспроможність суб'єкту господарювання, тобто це неспроможність боржника, викликана відсутністю або нестачею коштів, якими б він мав змогу розпоряджатися під час настання строку платежу, за умови відсутності можливості отримати необхідні кошти.

Діагностика банкрутства підприємства

Діагностика банкрутства є системою цільового фінансового аналізу, спрямованого на виявлення параметрів кризового розвитку підприємства, що генерують загрозу його банкрутства в майбутньому періоді.

Залежно від цілей і методів здійснення діагностика банкрутства поділяється на дві основні системи: експрес-діагностика і фундаментальна діагностика.

З метою своєчасного виявлення тенденцій формування незадовільної структури балансу у прибутково працюючого суб'єкта господарювання експрес-діагностика банкрутства в Україні здійснюється за допомогою коефіцієнта Бівера:

$$K = \frac{ЧП + A}{З}, \qquad (8.1)$$

де K – коефіцієнт Бівера;

$ЧП$ – чистий прибуток;

A – амортизація;

$З$ – довгострокові та поточні зобов'язання.

Ознакою формування незадовільної структури балансу є таке фінансове становище підприємства, вякого впродовж тривалого часу (1,5–2 роки) коефіцієнт Бівера не перевищує 0,2.

У таблиці 8.1 наведено шкалу попереднього оцінювання масштабів кризового фінансового стану підприємства за основними індикаторами окремих об'єктів спостереження «кризового поля».

Таблиця 8.1 – Експрес-діагностика масштабів кризової ситуації

Об'єкт спостереження «кризового поля»	Масштаб кризового фінансового стану підприємства		
	легка фінансова криза	**глибока фінансова криза**	**фінансова катастрофа**
I. Чистий грошовий потік	Зниження ліквідності грошового потоку	Від'ємне значення чистого грошового потоку	Значне від'ємне значення чистого грошового потоку
II. Ринкова вартість підприємства	Стабілізація ринкової вартості підприємства	Тенденція до зниження ринкової вартості підприємства	Обвальне зниження ринкової вартості підприємства
III. Структура капіталу підприємства	Зниження коефіцієнта автономії	Зростання коефіцієнта і зниження ефекту фінансового левериджу	Гранично високий коефіцієнт і відсутність ефекту фінансового левериджу
IV. Склад фінансових зобов'язань підприємства за терміновістю погашення	Підвищення суми і питомої ваги короткострокових фінансових зобов'язань	Високий коефіцієнт негайних (термінових) фінансових зобов'язань	Дуже високий коефіцієнт негайних (термінових) фінансових зобов'язань
V. Склад активів підприємства	Зниження коефіцієнта абсолютної платоспроможності	Істотне зниження коефіцієнтів абсолютної і поточної платоспроможності	Абсолютна неплатоспроможність через відсутність грошових активів

Продовження таблиці 8.1

Об'єкт спостереження «кризового поля»	Масштаб кризового фінансового стану підприємства		
	легка фінансова криза	**глибока фінансова криза**	**фінансова катастрофа**
IV. Склад поточних витрат підприємства	Тенденція до зростання змінних витрат	Високий коефіцієнт операційного левериджу при тенденції до зростання рівня змінних витрат	Дуже високий коефіцієнт операційного левериджу при тенденції до зростання загального рівня поточних витрат
V. Рівень концентрації фінансових операцій в зонах підвищеного ризику	Підвищення коефіцієнта вкладення капіталу в зоні критичного ризику	Переважне вкладення капіталу в зоні критичного ризику	Значна частка вкладення капіталу в зоні катастрофічного ризику

Попереджувальний характер експрес-діагностики найбільш відчутний на стадії легкої фінансової кризи підприємства. За інших масштабів кризового стану підприємства вона обов'язково повинна доповнюватися системою фундаментальної діагностики.

Фундаментальна діагностика банкрутства здійснюється за такими основними етапами:

1) систематизація основних факторів, що обумовлюють кризовий фінансовий розвиток підприємства;

2) проведення комплексного фундаментального аналізу впливу окремих факторів на кризовий фінансовий розвиток підприємства.

У процесі здійснення цього аналізу використовують такі основні методи оцінювання ймовірності банкрутства:

– повний комплексний аналіз фінансових коефіцієнтів;

– кореляційний аналіз;

– СВОТ-аналіз (SWOT-analysis) – дослідження характеру сильних та слабких сторін підприємства в розрізі окремих внутрішніх факторів, а також позитивного або негативного впливу окремих зовнішніх факторів, що обумовлюють кризовий фінансовий розвиток підприємства;

– розрахунок індексу кредитоспроможності (модель Альтмана, модель Тафлера, Ліса тощо).

3. Прогнозування розвитку кризового фінансового стану підприємства під негативним впливом окремих факторів, що являють собою найбільшу загрозу банкрутства підприємства в майбутньому періоді.

4. Прогнозування здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства за рахунок внутрішнього потенціалу.

У процесі такого прогнозування визначається, наскільки швидко та в якому обсязі підприємство здатне:

– забезпечити зростання чистого грошового потоку;

– знизити загальну суму фінансових зобов’язань;

– реструктуризувати свої фінансові зобов’язання методом переведення їх з короткострокової форми в довгострокову;

– знизити рівень поточних витрат і коефіцієнт операційного левериджу;

– знизити рівень фінансових ризиків у своїй діяльності;

– позитивно змінити інші фінансові показники, незважаючи на негативний вплив окремих факторів.

Узагальнюючи оцінювання здатності підприємства до нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді дозволяє одержати коефіцієнт можливої нейтралізації поточної загрози банкрутства, який розраховується за такою формулою:

$$K_{НЗБ} = \frac{ЧГП}{\overline{ФЗ}}, \tag{8.2}$$

де $K_{НЗБ}$ – коефіцієнт можливої нейтралізації загрози банкрутства в короткостроковому перспективному періоді; $ЧГП$ – очікувана сума чистого грошового потоку; $ФЗ$ – середня сума фінансових зобов'язань.

5. Остаточне визначення масштабів кризового фінансового стану підприємства. В таблиці 8.2 наведені критерії характеристик масштабів кризового фінансового стану підприємства, а також найбільш адекватні їм способи реагування.

Таблиця 8.2 – Масштаби кризового фінансового стану підприємства і можливі шляхи виходу з нього

Ймовірність банкрутства	**Масштаб кризового стану підприємства**	**Спосіб реагування**
Можлива	Легка фінансова криза	Нормалізація поточної фінансової діяльності
Висока	Глибока фінансова криза	Повне використання внутрішніх механізмів фінансової стабілізації
Дуже висока	Фінансова катастрофа	Пошук ефективних форм санації або ліквідація підприємства

В Україні з метою забезпечення однозначності підходів під час оцінювання фінансової неспроможності підприємств затверджено «Методичні рекомендації щодо виявлення ознак неплатоспроможності підприємства та ознак дій з приховування банкрутства, фіктивного банкрутства чи доведення до банкрутства» (Наказ Міністерства економіки України № 14 від 19.01.2006).

8.2 Моделі прогнозування банкрутства страхової компанії на основі «балів Z»: двофакторна модель, п'ятифакторна модель (індекс кредитоспроможності Альтмана)

У світовій практиці для прогнозування стійкості роботи підприємства, вибору його фінансової політики, а також визначення ризику банкрутства використовуються різні економіко-математичні моделі.

Найбільш вживані методи оцінювання ймовірності банкрутства підприємства – це Z-моделі, запропоновані відомим західним економістом Е. Альтманом у 1968 р. Під час побудови індексу Е. Альтман обстежив 66 підприємств, половина з яких збанкрутувала в 1946 – 1965 рр., а половина працювала успішно, і досліджував 22 аналітичних коефіцієнти, що могли бути корисні для прогнозування можливого банкрутства. З цих показників він відібрав п'ять найбільш значущих і побудував багатофакторне регресійне рівняння.

Проведені дослідження показали, що певні комбінації відносних показників мають високу здатність характеризувати ймовірність швидкого банкрутства того чи іншого підприємства. На основі використання прийомів статистичного методу, названого аналізом множинних дискримінант, було розраховано параметри кореляційної лінійної функції:

$$Z = E + A_n X_n , \qquad (8.3)$$

де Z – показник неплатоспроможності підприємства; A – параметри, що показують ступінь впливу показників на ймовірність банкрутства; X – показники (фактори впливу) діяльності підприємства.

Відносно простим способом проведення швидкого експрес-аналізу надійності компанії, зокрема і страхової, є застосування так званих балів Z, які дозволяють спрогнозувати банкрутство. Відомі такі моделі прогнозування банкрутства.

Двофакторна модель. У рамках цієї моделі Z-бал знаходиться за допомогою використання двох коефіцієнтів: коефіцієнта поточної ліквідності (КТл) і питомої ваги позикових засобів в активах (УВЗС):

$$Z_1 = -0{,}3877 + K_{Тл} \cdot (-1{,}0736) + УВЗС \cdot 0{,}0579.. \tag{8.4}$$

Водночас Ктл розраховується як відношення поточних активів до поточних зобов'язань. Під останніми розуміють короткострокові позики і строкова кредиторська заборгованість. Вагові коефіцієнти, використані в цій методиці, знайдені емпіричним методом, також як і постійна величина (– 0,3877). Значення бала: якщо $Z1 > 0$, імовірність банкрутства велика, в іншому випадку – імовірність низька. Застосування цієї методики в чистому вигляді в Україні дуже проблематичне через відмінності в темпах інфляції, циклічності макро- і мікроекономіки, а також специфіки вітчизняного податкового законодавства (ця методика розроблена для американської економіки). Крім цього двофакторна модель враховує лише два чинники, у той час як фінансовий стан компанії характеризується набагато більшою кількістю параметрів. Із цієї причини одержаний на основі цієї моделі прогноз може значно відхилитися від реального стану компанії.

П’ятифакторна модель (індекс кредитоспроможності Альтмана). У рамках цієї моделі Z-бал знаходиться за допомогою використання п’яти коефіцієнтів:

$$Z_2 = 1{,}2x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}3x_3 + 0{,}6x_4 + 0{,}999x_5, \qquad (8.5)$$

де x_1 – відношення різниці поточних активів і короткострокових зобов’язань до активів; x_2 – відношення чистого прибутку до активів; x_3 – відношення прибутку до виплати відсотків за позиками і податків до активів; x_4 – відношення ринкової ціни акціонерного капіталу до позикових коштів, відношення продажів до активів; x_5 – відношення виручки до суми активів.

Значення балів подані в таблиці 8.3. Формули розрахунку балів у зазначених моделях наведені для промислових підприємств. Не дивлячись на те, що для страхових організацій можна обчислити всі ці показники, найбільший інтерес під час прогнозування банкрутства мають числові коефіцієнти, використані під час розрахунку. Для кожної окремо взятої країни використовують свої коефіцієнти і критерії оцінювання одержаних результатів. В Україні Z-бали для страхових компаній не розраховуються і подібні моделі протезування не застосовуються.

Z-коефіцієнт Альтмана використовують для великих компаній, що котирують свої акції на біржах.

Таблиця 8.3 – Значення балів Z

Значення бала Z2	**Імовірність банкрутства**
Менше ніж 1,81	Підприємство стане банкротом через один рік з імовірністю 95 %, через два роки з імовірністю 72 %, через три роки з імовірністю 48 %, через чотири роки з імовірністю 30 %, через п’ять років з імовірністю 30 %
1,81–2,7	Середня, перехідна в незначну
2,7–2,99	Невелика
Більше ніж 2,99	Висновки утруднені

Пізніше, в 1983 р. Е. Альтман отримав модифікований варіант своєї формули для компаній, акції яких не котируються на біржі:

$$Z = 0{,}717X_1 + 0{,}847X_2 + 3{,}107X_3 + 0{,}42X_4 + 0{,}995X_5, \quad (8.6)$$

де X_4 – балансова вартість власного капіталу/зобов’язання.

Якщо Z >1,23, то ризик банкрутства мінімальний, в іншому разі підприємству з великою ймовірністю загрожує банкрутство.

Досвід використання цієї моделі в ряді країн (Китаї, Канаді, Бразилії, Австрії, Японії) показав, що спрогнозувати ймовірність банкрутства за її допомогою за один рік можна з точністю 95 %, за два роки – 70 %, за три – 48 %, за чотири-п’ять років – 30 %.

Взагалі відповідно до цієї формули підприємства з рентабельністю, вищою від деякої межі, стають «занадто сильними». В умовах України рентабельність окремого підприємства значною мірою піддається небезпеці зовнішніх коливань. Очевидно, що ця формула в наших умовах повинна мати менші параметри за різних показників рентабельності.

Модель Спрінгейта була побудована Гордоном Л. В. Спрінгейтом в університеті Симона Фрейзера в 1978 р. за допомогою покрокового дискримінантного аналізу методом, який розробив Едуард І. Альтман у 1968 р. Під час створення моделі Спрінгейт використовував дані 40 підприємств і досягнув 92,5 % точності пророкування неплатоспроможності на 1 рік уперед, проте з часом цей показник зменшується. Пізніше Бодерас, використовуючи модель Спрінгейта, за даними 50 підприємств із середнім балансом у 2,5 млн дол., досягнув 88 % точності пророкування.

У процесі створення моделі з 19 фінансових коефіцієнтів у остаточному варіанті залишилося лише чотири:

$$Z = 1{,}03X_1 + 3{,}02X_2 + 0{,}66X_3 + 0{,}4X_4, \tag{8.7}$$

де X_1 – оборотні активи/загальна вартість активів; X_2 – прибуток до виплат/загальна вартість активів; X_3 – прибуток до виплат/поточні зобов'язання; X_4 – виручка/загальна вартість активів.

Якщо $Z < 0{,}862$, то підприємство є потенційним банкрутом.

Формула Ліса для Великобританії, за якою лімітне значення дорівнює 0,037:

$$Z = 0{,}063X_1 + 0{,}092X_2 + 0{,}057X_3 + 0{,}001X_4, \tag{8.8}$$

де X_1 – обіговий капітал/сума активів; X_2 – прибуток від реалізації/сума активів; X_3 – нерозподілений прибуток/сума активів; X_4 – власний капітал/позиковий капітал.

Модель Таффлера запропоновував британський вчений Таффлер у 1977р. Ця прогнозна модель є чотирифакторною; у ній під час використання комп'ютерної техніки на першій стадії обчислюються 80 відношень за даними збанкрутілих і платоспроможних компаній. Потім, використовуючи статистичний метод, відомий як аналіз багатовимірного дискримінанта, можна побудувати модель платоспроможності, визначаючи частки співвідношення, що якнайкраще виділяють дві групи компаній та їхні коефіцієнти. Такий вибірковий підрахунок співвідношень типовий для визначення деяких ключових вимірів діяльності корпорації – прибутковості, відповідності обігового капіталу, фінансового ризику та ліквідності. Поєднуючи ці показники і зводячи їх відповідним чином, модель платоспроможності дає точну картину фінансового стану корпорації. Типова модель для аналізу компаній має такий вигляд:

$$Z = 0{,}53X_1 + 0{,}13X_2 + 0{,}18X_3 + 0{,}16X_4, \qquad (8.9)$$

де X_1 – прибуток до виплат/поточні зобов'язання; X_2 – поточні активи/зобов'язання; X_3 – поточні зобов'язання/загальна вартість активів; X_4 – інтервал кредитування.

Якщо $Z > 0{,}3$, то у фірми хороші довгострокові перспективи.

Модель Creditmen є одним із варіантів інтегрального підходу до оцінювання фінансового стану підприємства, що розроблено у Франції Ж. Де Паляном, відповідно до якого фінансова ситуація підприємства може бути точно охарактеризована показником

$$Z = 25X_1 + 25X_2 + 10X_3 + 20X_4 + 20X_5, \qquad (8.10)$$

де X_1 – високоліквідні активи/поточні зобов’язання; X_2 – власний капітал/зобов’язання; X_3 – високоліквідні активи/баланс; X_4 – виручка/дебіторська заборгованість; X_5 – виручка/дебіторська заборгованість.

Коефіцієнти рівняння [25, 25, 10, 20, 20] виражають частку впливу кожного показника.

Якщо Z = 100 – фінансова ситуація нормальна;

Z > 100 – фінансова ситуація добра;

Z < 100 – фінансова ситуація викликає тривогу.

Модель R запропонували вчені Іркутської державної економічної академії. Це чотирифакторна модель прогнозу ризику банкрутства, що має такий вигляд:

$$R = 0{,}838X_1 + X_2 + 0{,}054X_3 + 0{,}63X_4, \qquad (8.11)$$

де X_1 – обігові активи/загальна вартість активів; X_2 – чистий прибуток/власний капітал; X_3 – виручка/загальна вартість активів; X_4 – чистий прибуток/сумарні витрати.

Ймовірність банкрутства підприємства відповідно зі значенням моделі R визначається, як показано в таблиці 8.4.

Таблиця 8.4 – Визначення ймовірності банкрутства

Значення R	**Імовірність банкрутства, %**
Менше ніж 0	Максимальна (90–100)
0–0,18	Висока (60–80)
0,18–0,32	Середня (35–50)
0,32–0,42	Низька (15–20)
Більше ніж 0,42	Мінімальна (до 10)

До очевидних переваг цієї моделі можна віднести те, що механізм її розроблення і всі основні етапи розрахунків досить докладно описані в джерелі.

Під час використання наведених моделей для українських підприємств необхідно враховувати ряд обставин. Так, показник «Власний капітал» відповідно до чинних в Україні методик переоцінювання активів, штучно завищується сумами за субрахунком 423 «Дооцінка активів». Старим, зношеним основним фондам надається таке саме значення, як і новим. Як наслідок, співвідношення між власним і позиковим капіталом не відповідає дійсності. Тому моделі, що використовують цей показник, можуть не відображати реального стану справ.

Умовам діяльності українських підприємств більше відповідає універсальна дискримінантна модель.

Універсальна дискримінантна модель була побудована на основі кількох методик прогнозування банкрутства:

$$Z = 1{,}5X_1 + 0{,}08X_2 + 10X_3 + 5X_4 + 0{,}3X_5 + 0{,}1X_6, \qquad (8.12)$$

де X_1 – cash-flow/зобов’язання; X_2 – баланс/зобов’язання; X_3 – чистий прибуток/баланс; X_4 – чистий прибуток/виручка; X_5 – виробничі запаси/виручка; X_6 – виручка/баланс (обіговість основного капіталу).

Для обчислення коефіцієнта X_1 використовують показник cash-flow. Він був запроваджений на початку 50-х років XX ст. для аналізу фінансового стану підприємства та аналізу оцінювання привабливості цінних паперів. Фактологічною базою аналізу cash-flow є дані звіту про фінансові результати та їх використання. Показник cash-flow характеризує величину чистих грошових потоків, які утворюються внаслідок операційної та інвестиційної діяльності й залишаються в розпорядженні підприємства в певному періоді.

Одержані результати після обрахунків можна інтерпретувати так:

$Z > 2$ – підприємство вважається фінансово стійким, йому не загрожує банкрутство;

$1 < Z < 2$ – фінансова рівновага (фінансова стійкість) порушена, але за умови переходу на антикризове управління банкрутство йому не загрожує;

$0 < Z < 1$ – підприємству загрожує банкрутство, якщо воно не здійснить санаційних заходів;

$Z < 0$ – підприємство є напівбанкрутом.

В аналітичному дослідженні та прогнозуванні використовуються й інші критерії ймовірності фінансової кризи страхової компанії.

До них належать:

– істотні втрати в основній виробничій діяльності;

– підвищення собівартості продукції;

– зниження продуктивності праці;

– збільшення обсягу неліквідності оборотних коштів і наявність наднормативних запасів;

– неповне завантаження потужності, неритмічність виробництва;

– втрата клієнтів і покупців готової продукції, тобто несприятливі зміни у портфелі замовлень;

– перевищення критичного рівня простроченої кредиторської заборгованості;

– надмірне використання короткострокових позикових коштів у ролі джерел фінансування довгострокових вкладень;

– постійне зростання до небезпечних меж частки позикових коштів у загальній сумі джерел коштів;

– хронічне невиконання зобов’язань перед інвесторами, кредиторами, акціонерами, неправильна реінвестиційна політика і т. д.

У разі надходження сигналів про ймовірність настання банкрутства підприємству необхідно розробити заходи для виходу з несприятливої ситуації. До них належать:

– впровадження нових, ефективних, ресурсозбережних та екологічно безпечних технологій;

– експорт конкурентоздатної продукції;

– розроблення нових видів продукції, які користуються попитом у покупців;

– проведення маркетингової кампанії;

– цінова конкуренція;

– ефективна організація збуту, висока якість обслуговування;

– зниження виробничих витрат;

– удосконалення управління на підприємстві.

ТЕМА 7
ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ

ЛЕКЦІЯ 9
Динамічні моделі банкрутства страхової компанії

Визначення ймовірності банкрутства страхової компанії на основі байєсівського аналізу.

9.1 Формування системи базових показників

На основі аналізу даних статистичної звітності страховиків пропонується сформувати фінансові показники, на основі яких визначається ймовірність банкрутства страхових компаній.

Пропонується сформувати таку систему базових показників:

– частка валових надходжень страхових платежів у сумарних активах;

– співвідношення сплаченого статутного капіталу та сумарних активів;

– частка страхових платежів, які повертаються страхувальникам;

– частка страхових платежів, які повертаються перестраховикам;

– коефіцієнт фінансової стабільності страхової компанії

$$K_{ф.с.} = \frac{Доходи + Середня\ вартість\ активів\ компанії}{Витрати\ страхової\ компанії} \qquad (9.1)$$

– коефіцієнт фінансової стійкості страхової компанії

$$K_{ф.ст} = \frac{\begin{pmatrix} Сплачений \\ статутний\ капітал \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Інші \\ власні\ кошти \end{pmatrix}}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли} + \tag{9.2}$$

$$+ \frac{Страхові\ резерви}{Загальна\ сума\ страхових\ внесків, що\ надійшли}.$$

Оцінювання фінансового стану страхової компанії пропонують проводити на основі такої системи показників:

$$K_1 = \frac{Прибуток}{Навантаження - Витрати};$$

$$K_2 = \frac{Прибуток}{Обсяг\ страхових\ платежів};$$

$$K_3 = \frac{Прибуток}{Сума\ страхових\ відшкодувань};$$

$$K_4 = \frac{Прибуток}{Резервний\ фонд};$$

$$K_5 = \frac{Прибуток}{Витрати}; \tag{9.3}$$

$$K_6 = \frac{Прибуток + Резервний\ фонд}{Обсяг\ ризиків};$$

$$K_7 = \frac{Навантаження}{Резервний\ фонд};$$

$$K_8 = \frac{Навантаження}{Обсяг\ страхових\ платежів};$$

$$K_9 = \frac{Страхові\ виплати\ за\ всіма\ видами\ страхування}{Загальна\ сума\ страхових\ премій, що\ надійшли};$$

$$K_{10} = \frac{\textit{Сума внесків, передана за договором страхування}}{\textit{Загальна сума страхових внесків, що надійшли}};$$

$$K_{11} = \frac{\textit{Сплачений статутний капітал} + \textit{Інші власні кошти}}{\textit{Страхові резерви}};$$

$$K_{12} = \frac{\begin{array}{c}\textit{Видатки зі страхової діяльності}\\ (\textit{враховуючи комісійні винагороди})\end{array}}{\textit{Загальна сума страхових внесків, що надійшли}}.$$

9.2 Методика визначення ймовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса

Методика визначення ймовірності банкрутства страхових компаній на основі застосування формули Байєса передбачає такі кроки:

а) формування і розрахунок показників, що характеризують стійкість (надійність) страхових організацій;

б) визначення бінарних характеристик на основі співвідношення значень одержаних показників та допустимих значень за відповідною сукупністю показників: якщо відповідний показник лежить у допустимих межах для певної групи, ставиться 0, в іншому випадку – 1.

Оскільки страхові компанії в загальній сукупності не є порівнюваними між собою, тобто сукупність не є однорідною, тому ми вважаємо за доцільне розбити їх на групи, однорідні за показником загальної суми активів. Для цього в сукупності визначається середній розмір активів, який і розбиває страхові компанії на 2 групи. В кожній із зазначених груп знаходимо середні значення. На основі одержаних чотирьох груп страхових компаній проводимо визначення рейтингового оцінювання.

Для кожного показника визначаємо середнє значення за кожною виділеною за обсягами активів групою страхових компаній:

$$Xcep_j = \frac{\sum_i Ack_{ij}}{Kck_j}, \tag{9.4}$$

де $Xcep_j$ – середнє значення показника при $j = \overline{1,4}$ – групою страхових компаній;

$\sum_i Ack_{ij}$ – загальна сума значень показника при $j = \overline{1,4}$ – групою страхових компаній;

Kck_j – загальна кількість страхових компаній при $j = \overline{1,4}$ – групою страхових компаній.

Для визначення бінарних характеристик за кожним показником за кожною страховою компанією певної групи $j = \overline{1,4}$ скористаємося такою формулою:

$$Xбін_j \begin{cases} = 0, X_j > Xcep_j \\ = 1, X_j < Xcep_j, \end{cases} \tag{9.5}$$

де $Xбін_j$ – бінарні характеристики за кожною страховою компанією певної групи $j = \overline{1,4}$;

X_j – значення показника за кожною страховою компанією певної групи $j = \overline{1,4}$;

$Xcep_j$ – середнє значення частки фінансових операцій, зареєстрованих за ознаками внутрішнього фінансового моніторингу при $j = \overline{1,4}$ – групою страхових компаній;

в) визначення ймовірності банкрутсва на основі використання формули Байєса. На основі одержаного оцінювання страхові компанії розбиваються на групи.

Розглянемо сутність методики розрахунку ймовірності виконання страховою компанією показників, що характеризують її стійкість, із використанням формули Байєса. Якщо ймовірність банкрутства страхової компанії за умови, що про неї ми можемо одержати певний набір характеристик – $P_C(H1)$, (відповідно $P_C(H2)$ – коли страхова компанія є стійкою), $C=(c_1, c_2, ..., c_{18})$. За теоремою Байєса $P_C(H1)=\dfrac{P(H1)P_{H1}(C)}{P(C)}$.

$$P_C(H1)=\frac{P(H1)\cdot P_{H1}(C)}{P(C)}=\frac{P(H1)\cdot p_{H1}(C)}{\sum_{i=1}^{2}P(Hi)\cdot P_{Hi}(C)}=$$

$$=\frac{P(H1)\cdot P_{H1}(C)}{p(H1)\cdot p_{H1}(C)+p(H2)\cdot p_{H2}(C)}=$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{P(H2)\cdot P_{H2}(C)}{P(H1)\cdot P_{H1}(C)}}.$$

$P(H1)=y_i, P(C)=h_i$, де $y_i(i=\overline{1,n})$ – ймовірність банкрутства страхової компанії під час настання події $C_i(i=\overline{1,n})$ – одержання характеристики i, b_i – ймовірність події C_i для нестійкої страхової компанії, g_i – коли страхова компанія є стійкою, то одержимо:

$$\frac{P(H2)\cdot p_{H2}(C)}{P(H1)\cdot p_{H1}(C)}=\frac{P(H2)}{P(H1)}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}P_{H2}(Ci)}{\prod\limits_{i=1}^{n}P_{H1}(Ci)}=\frac{P(H2)}{P(H1)}\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{P_{H2}(Ci)}{P_{H1}(Ci)}=$$

$$=\frac{P(H2)}{P(H1)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}=\frac{1-y_i}{y_i}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}.$$

Отже, ймовірність банкрутства страхової компанії за умови, що про неї ми можемо одержати певний набір характеристик розраховується за формулою

$$P_C(H1)=\frac{1}{1+\frac{1-y_i}{y_i}\prod\limits_{i=1}^{4}\left(\frac{b_i}{g_i}\right)^{Ci}\left(\frac{1-b_i}{1-g_i}\right)^{1-Ci}}. \qquad (9.6)$$

Для формування однорідних 4 груп страхових компаній визначимо інтервали значень загальних активів (межі інтервалів – середні значення сукупності, першої і другої груп, які утворені діленням усієї сукупності середнім значенням), які будуть визначати належність кожної страхової компанії до певної групи:

– 1-ша група – обсяг активів від 351 330 тис. грн;

–2-га група – обсяг активів від 137 351 до 351 330 тис. грн;

– 3-тя група – обсяг активів від 51 237 до 137 351 тис. грн;

– 4-та група – обсяг активів до 51 237 тис. грн.

Використання байєсівського аналізу для визначення імовірності банкрутства страхових компаній в динаміці є ефективним економіко-математичним методом підвищення якості нагляду за страховим ринком України, дозволяє на основі характеристики роботи страхової компанії одержати перспективне оцінювання ймовірності банкрутства, виявити приховані недоліки в роботі страхових компаній, провести групування за рівнем стійкості, а головне – одержати числові характеристики рівня стійкості страхових компаній (як поточну, так і в динаміці) на відміну від традиційних методів, які дають лише описову характеристику. Але виникає необхідність постійного коригування цього методу відповідно з потребами поточної економічної ситуації.

ТЕМА 8
ВИЗНАЧЕННЯ СТРАХОВОГО ТАРИФУ В СТРАХУВАННІ ЖИТТЯ

ЛЕКЦІЯ 10
Визначення страхового тарифу в страхуванні життя

Особливості побудови тарифної ставки із страхування життя і її структура. Таблиця смертності. Норма прибутковості. Тарифні ставки за змішаним страхуванням життя. Річна нетто-ставка. Брутто-ставка. Аналітичні закони смертності.

10.1 Особливості побудови тарифної ставки в страхуванні життя

Побудова тарифів із страхування життя має свої особливості:

– розрахунки проводять із використанням демографічної статистики і теорії ймовірності;

– під час розрахунків застосовують способи довгострокових фінансових розрахунків;

– тарифні нетто-ставки складаються з кількох частин, кожна з яких покликана сформувати страховий фонд за одним із видів страхової відповідальності, який внесений до умов страхування.

Тарифна ставка визначає, скільки грошей кожний із страхувальників повинен внести в загальний страховий фонд з одиниці страхової суми. Тому тарифи повинні бути розраховані так, щоб сума зібраних внесків виявилася достатньою для виплат, передбачених умовами страхування. Таким чином, тарифна ставка – це ціна послуги, що надається страховиком населенню, тобто своєрідна ціна страхового захисту. Від чого ж залежать її розміри, як установити ціну на той чи інший вид страхування життя?

Повна тарифна ставка називається брутто-ставкою. Вона складається з нетто-ставки і навантаження. Завдання нетто-ставки – забезпечити виплати страхових сум, тобто виконання фінансових зобов'язань страховика за договорами страхування. Навантаження призначене компенсувати витрати на проведення страхових операцій.

Своєрідність операцій страхування життя виявляється за побудови нетто-ставки. Умови страхування життя звичайно передбачають виплати у зв'язку з дожиттям застрахованого до закінчення терміну дії договору страхування чи у випадку його смерті впродовж цього терміну. Крім того, передбачаються виплати у зв'язку з втратою здоров'я внаслідок травми та деяких хвороб.

Таким чином, для розрахунку обсягу страхового фонду потрібно мати відомості про те, скільки осіб з числа застрахованих доживе до закінчення терміну дії їх договорів страхування і скільки з них щороку може вмерти; у скількох з них і в якому ступені настане втрата здоров'я. Кількість виплат, помножена на відповідні страхові суми, дозволить визначити розміри майбутніх виплат, тобто з'явиться можливість дізнатися, в яких розмірах потрібно буде акумулювати страховий фонд.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких межах. Вона належить до категорії випадкових величин, кількісне значення яких залежить від багатьох факторів, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити і вивчити. Теорія ймовірності та статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, зокрема смертність населення. Установлено, що демографічний процес зміни поколінь, що виражається в зміні рівня повікової смертності, підпорядкований закону великих чисел, настільки одноманітному у своїх проявах і настільки достовірному в результатах, що він може бути основою фінансових розрахунків у страхуванні.

Демографічною статистикою виявлена і виражена за допомогою математичних формул залежність смертності від віку людей. Розроблено спеціальну методику складання так званих таблиць смертності, де на конкретних цифрах показується послідовна зміна смертності слідом за віком. Цими таблицями страхові компанії користуються для розрахунку тарифів.

Крім закономірностей, пов'язаних із процесом дожиття і смертності, під час побудови тарифів враховується довгостроковий характер операцій страхування життя, оскільки ці договори укладаються на тривалі терміни від трьох і більше років. Упродовж усього часу їхньої дії (чи на самому початку терміну страхування під час одноразової сплати) страхові компанії одержують внески. Виплати ж страхових сум провадяться впродовж терміну страхування чи після закінчення визначеного періоду від початку дії договору, якщо настане смерть застрахованого чи він втратить здоров'я.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховою компанією і використовуються як кредитні ресурси. За користування ними сплачується позичковий відсоток. Але якщо під час ощадної операції дохід від відсотків приєднується до внеску, то в страхуванні на суму цього доходу заздалегідь зменшуються (дисконтуються) внески страхувальника, що підлягають сплаті. Для того щоб заздалегідь понизити тарифні ставки на той дохід, що буде утворюватися впродовж ряду років, використовують методи теорії довгострокових фінансових розрахунків.

Тарифні ставки в страхуванні життя складаються з кількох частин. Візьмемо для прикладу змішане страхування життя. У ньому поєднуються кілька видів страхування, що могли б бути і самостійними:

– страхування на дожиття;

– страхування на випадок смерті;

– страхування від нещасних випадків.

За кожним із них за допомогою тарифу створюється страховий фонд, тому тарифна ставка в змішаному страхуванні складається з трьох частин, що входять у нетто-ставку, і четвертої частини – навантаження.

Аналогічно складається структура тарифних ставок і за іншими видами страхування життя.

Структура тарифної ставки наведена на рисунку 10.1.

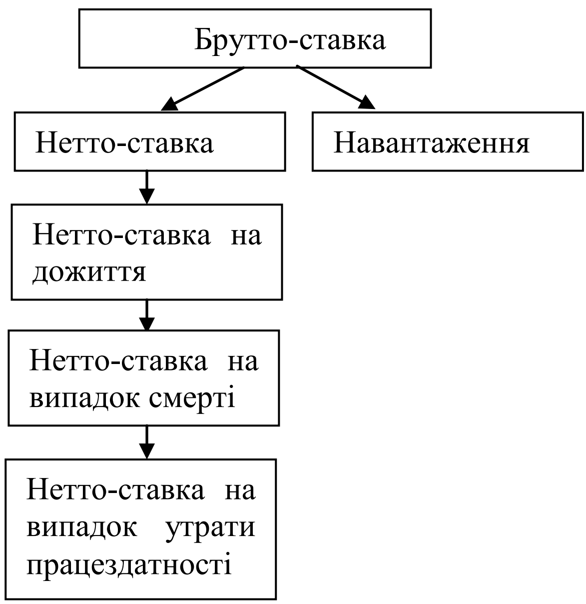

Рисунок 10.1 – Структура тарифної ставки змішаного страхування життя

10.2 Таблиця смертності

Страхові операції засновані на принципі еквівалентності фінансових зобов’язань страховика і страхувальника. Тому перш ніж визначити, скільки кожен страхувальник повинен внести в загальний страховий фонд, необхідно установити розмір виплат страховика.

Оскільки умови договорів страхування життя звичайно передбачають виплати в зв’язку з дожиттям застрахованого до визначеного терміну чи в зв’язку з його смертю, для розрахунку відповідних витрат страховій компанії потрібно мати відомості про те, скільки осіб доживе до закінчення терміну дії договору І скільки з них щороку може померти.

Тривалість життя окремих людей коливається в широких межах. Вона належить до категорії випадкових величин, тобто тих, чиє кількісне значення залежить від багатьох причин, настільки віддалених і складних, що, здавалося б, їх неможливо виявити і вивчити.

Математика і статистика досліджують випадкові явища, що мають масовий характер, зокрема смертність населення. Як установлено науковими дослідженнями, так званий процес вимирання покоління підпорядкований закону великих чисел.

Демографічною статистикою розроблена спеціальна методологія складання так званих таблиць смертності. Вона містить розрахункові показники, що характеризують смертність населення в окремих вікових групах і дожиття під час переходу від одного віку до наступного.

Такими таблицями (власними чи складеними на основі переписів населення) користуються страхові компанії під час розрахунків тарифних ставок зі страхування життя.

У цій таблиці взяті позначення: l_x – кількість доживаючих до кожного наступного віку, яке показує, скільки зі 100 000 одночасно народжених доживає до 1 року, 5 років, ... , 20, ... , 50 років тощо; d_x – кількість умираючих під час переходу від віку x до віку $x + 1$ років. Вони показують, скільки з доживаючих до кожного віку вмирає, не доживши до наступного віку. Сума кількості умираючих від нульового і до граничного віку дорівнює вихідній кількості таблиці смертності, тобто 100 000; q_x – ймовірність померти впродовж майбутнього року життя, не доживши до наступного віку $x + 1$ років. Ця ймовірність показує, яка частка тих, які дожили до цього віку, помирає, не доживши до наступного, і є відношенням кількості помираючих під час переходу від віку x до віку $x + 1$ до кількості доживаючих до цього віку x:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}. \tag{10.1}$$

Величина ймовірності померти звичайно виражається стотисячними частками одиниці. Наприклад, ймовірність померти віком 40 років дорівнює 0,00358. Це означає, що в середньому на кожні 100 000 чол. у віці 40 років приходиться 358 осіб, які помирають упродовж найближчого року. Показник імовірності померти можна виразити також у проміле чи відсотках. Для 40-річних він буде дорівнювати 3,58 % або 0,358 %; P_x – ймовірність дожити до x + 1 років.

Про що говорить таблиця смертності?

Наведена таблиця 10.1 показує, що з абстрактної сукупності 100 000 народжених через рік залишається в живих 98 719 дітей, оскільки 1 281 дітей помирає на першому році життя. До 20 років з них залишиться в живих 97 464 осіб, до 30 років – 95 982, до 40 – 93 597 тощо. Первісна сукупність народжених 100 000 осіб щороку скорочується і поступово вимирає.

Як читати таблицю смертності?

Беремо, наприклад, рядок для віку 40 років, тобто коли x = 40, l_x = 93 597 (це означає, що з 100 000 народжених до 40 років доживе 93 597 осіб); d_{40} = 335. Отже, у віці 40 років, або на 41-му році життя, помирає 335 осіб. До 41 року доживе лише 93 262 (93 597 – 335), або $l_{40} - d_{40} = l_{41}$; q_{40} = 0,00358 і виражає відношення кількості осіб, які помирають на 41-му році життя (d_{40} = 335), до кількості осіб, які дожили до 40 років: l_{40} =93 597.

Таблиця 10.1 – Зразок таблиці смертності

Вік у роках	Кількість доживаючих до віку x років	Кількість вмираючих під час переходу від віку x до $x+1$ років	Имовірність померти впродовж майбутнього року життя	Имовірність дожити до віку $x+1$ років
X	l_x	d_x	q_x	p_x
0	100000	1281	0,01281	0,98719
1	98719	172	0,00174	0,99826
2	98547	93	0,00094	0,99906
3	98454	69	0,00070	0,99930
4	98385	59	0,00060	0,99940
5	98326	53	0,00054	0,99946
6	98273	48	0,00049	0,99951
7	98225	45	0,00046	0,99954
8	98180	42	0,00043	0,99957
9	98138	39	0,00040	0,99960
10	98099	37	0,00038	0,99962
11	98062	36	0,00037	0,99963
12	98026	38	0,00039	0,99961
13	97988	43	0,00044	0,99956
14	97945	51	0,00052	0,99948
15	97894	61	0,00062	0,99938
16	97833	73	0,00075	0,99925
17	97760	86	0,00088	0,99912
18	97674	99	0,00101	0,99899
19	97575	111	0,00114	0,99886
20	97464	122	0,00125	0,99875
...	...	...	...	...
30	95982	179	0,00186	0,99814
...	...	...	...	...
40	93597	335	0,00358	0,99642
41	93262	360	0,00386	0,99614

Показники ймовірності померти є основними у таблиці смертності, від них залежать всі інші числа. У них сконцентрована закономірність процесу вимирання покоління. А вся таблиця детально характеризує цей процес.

Маючи показники ймовірності померти, страховик із достатнім ступенем упевненості може очікувати, що впродовж найближчого року з кількості застрахованих віком 40 років може померти 0,36 %, віком 41 рік – 0,39 %, 50 років – 0,71 % . В окремі роки ця кількість може бути трохи більшою або меншою, але ймовірність занадто великих відхилень надзвичайно мала, і чим більша величина відхилення, тим менша ймовірність того, що воно може відбутися.

Таблиця смертності дає можливість також із достатнім ступенем упевненості стверджувати, що з 40-літніх осіб до 45 років не доживуть 1 966:

$(d_{40} + d_{41} + ... + d_{44})$, або $(l_{40} - l_{45})$, тобто $(l_x - l_{x+n}) = \sum_{i=x}^{x+n-1} di.$

Показники з таблиці смертності використовуються для розрахунків тарифних ставок зі страхування життя.

Маючи таблицю смертності, страхова компанія одержує для кожного періоду, який її цікавить, необхідні відомості про найбільш імовірну кількість помираючих і осіб, які доживають, з кількості застрахованих, тобто вона може довідатися, скільком приблизно особам у якомусь визначеному році необхідно буде виплатити страхові суми за випадками смерті чи дожиття, у скількох осіб припиняться тимчасові страхування на випадок смерті чи рентні страхування і т. ін.

Вибір таблиці смертності становить для кожної страхової компанії дуже важливу проблему, тому що від цього залежать розміри тарифних ставок, утворення резерву страхових внесків, фінансова стійкість операцій.

У міжнародній страховій практиці відомі загальні, усічені та збірні таблиці смертності.

У загальних таблицях наводять повікові показники ймовірності померти, що виявилися впродовж першого року після укладання договору страхування окремо для кожного року страхування, в усічених таблицях – повікові показники ймовірності померти тільки тих осіб, які вже були застраховані впродовж кількох років, і дані медичного огляду вже не діють. Взагалі проведення медичного огляду осіб, прийнятих на страхування, не дає тривалого ефекту.

У збірних таблицях містяться повікові показники ймовірності померти для всіх застрахованих, незалежно від терміна страхування.

Користуючись різними таблицями, страхові компанії прагнуть зміцнити фінансову стійкість операцій. Справа в тому, що в тих країнах, де страхуванням охоплена велика частина населення і діє багато його різновидів, відбувається процес стихійного самодобору застрахованих.

За великої різноманітності видів страхування життя доцільне застосування загальних, усічених і збірних таблиць смертності.

Багато страхових компаній ведуть власні статистичні спостереження і на їх основі будують таблиці смертності. Враховують також причини випадків смерті з метою введення тих чи інших пільг або обмежень в умовах страхування.

У наш час побудова тарифних ставок ґрунтується на відомостях державної статистики, заснованих на матеріалах переписів населення. Це цілком правомірно, оскільки в країні переважає змішане страхування, що поєднує в собі страхування на дожиття і на випадок смерті.

Отже, маючи таблицю смертності, можна установити ймовірну кількість виплат за договорами страхування, а за відомих страхових сум – розмір фонду, який повинна мати страхова компанія, щоб виплатити страхові суми, тобто розмір страхового фонду.

Однак перш ніж установити частку участі кожного із страхувальників у створенні такого фонду, тобто обчислити розмір страхових внесків, необхідно взяти до уваги ще один показник – норму прибутковості.

10.3 Норма прибутковості

Операції зі страхування життя відрізняються довготерміновістю. Договори можуть укладатися, наприклад, на 5, 10, 15, 20 років. Упродовж усього часу їхньої дії страхові компанії одержують внески. Виплати страхових сум провадяться в більшості випадків після закінчення цих термінів, а також (набагато рідше) – після втрати застрахованим працездатності чи його смерті впродовж терміну дії договору.

Тимчасово вільні кошти акумулюються страховими компаніями, використовуються в економіці за допомогою передачі їх туди через банки. На ці кошти страховим компаніям нараховуються складні відсотки річного доходу. На величину одержуваного доходу страхові компанії зменшують тарифні ставки.

Нормою прибутковості називається розмір принесеного за рік кожною одиницею грошової суми доходу, що нараховується на кошти зі страхування життя, тимчасово використовувані банками як кредитні ресурси.

Норму прибутковості прийнято позначати символом i. Так, вираз i = 0,03 означає, що кожна грошова одиниця за рік приносить 3 % доходу, $i = 0{,}05 = 5$ % тощо. Один відсоток, таким чином, дорівнює 100 %. У страхуванні дохід розраховується відносно однієї грошової одиниці, а не до сотні одиниць, як це робиться в інших випадках.

Абсолютний розмір доходу, який одержується страховими компаніями, крім норми прибутковості залежить ще й від розміру тієї суми, яку вони розміщують, і від часу, впродовж якого ця сума була в обігу.

Для прикладу підрахуємо, у що перетвориться грошова сума величиною, наприклад, у 100 грн через 10 років.

Ту грошову суму, що буде приносити дохід (у нашому прикладі 100 грн), позначимо літерою *А*; час, упродовж якого вона знаходиться в обігу (10 років), – літерою *n,* норму прибутковості (3 %) – літерою *і*. Розрахунок провадиться за формулою складних відсотків, тобто наприкінці кожного року дохід, що утворився за цей рік, приєднується до грошової суми на початок року, тому в наступному році дохід приносить уже нова, нарощена сума.

За норми прибутковості та через рік, кожна грошова одиниця, наприклад 1 грн, перетвориться в $1 + i$, тобто при $i = 0{,}03$ у 1 грн 03 к. (1 грн + 0,03 грн).

Якщо одна грошова одиниця перетворилася в $1 + i$, то *А* таких одиниць – в $A(1+i)$, або 103 грн (100 грн $\cdot$ 1,03).

Суму, що утвориться до кінця першого року (103 грн), позначимо літерою *В1* Тоді $B_1 = A(1+i)$.

Через 10 років первісна грошова сума *А* буде становити нарощену суму $B_{10} = A(1+i)^{10}$.

Через *n* років перетвориться в

$$B_n = A(1+i)^n . \qquad (10.2)$$

Величина $(1+i)$ називається відсотковим множником, який за *n* років дорівнює $(1+i)^n$.

У нашому прикладі сума в 100 грн через 10 років за i = 0,03:

$$B_{10} = 100\,(1+0{,}03)^{10} = 100 \cdot 1{,}03^{10} = 134 \text{ грн } 39 \text{ к.}$$

Практикою страхової справи створені спеціальні таблиці, що полегшують повсякденну роботу з актуарних розрахунків. Серед них є таблиця, що показує значення чисел $(1+i)^n$ заданій нормі прибутковості. Наводимо таку таблицю, в якій для прикладу взято кілька термінів (табл. 10.2).

Звіримо отриманий у вищенаведеному прикладі результат 134 грн 39 із даними таблиці. Для цього знайдемо, у що перетворюється за 10 років кожна гривня за i = 0,03. Відповідно до таблиці – у 1,34392 грн, а 100 грн – у 134 грн 39.

Очевидно, що чим вища норма прибутковості, тим швидше зростає початкова сума. Так, грошова сума збільшується вдвічі за 5 % норми прибутковості приблизно за 14 років, за 4 % – за 18, за 3 % – за 23 роки.

На основі формули $B_n = A(1+i)^n$ можна установити ще одну дуже важливу для розрахунків тарифів залежність.

Використовуючи таблицю смертності, страховик визначає величину страхового фонду, необхідного для виплат в обумовлений термін страхових сум. Це величина B_n. Далі йому потрібно знайти величину А, тобто визначити, яким повинен бути розмір страхового фонду на початку терміну страхування.

$$A = \frac{B_n}{(1+i)^n}. \tag{10.3}$$

Для спрощення розрахунків вводиться додатковий показник v , який називається дисконтуючим множником:

$$v = \frac{1}{1+i}. \qquad (10.4)$$

Таблиця 10.2 – Таблиця відсоткових множників

Кількість років, n	**Значення чисел $(1+i)^n$ за**		
	i = 0,03	i = 0,04	i = 0,05
1	1,030 00	1,040 00	1,050 00
2	1,060 90	1,081 60	1,102 50
3	1,092 73	1,124 86	1,157 6
4	1,125 51	1,169 86	1,215 51
5	1,159 27	1,216 65	1,276 28
10	1,343 92	1,488 24	1,628 89
14	1,512 59	1,731 68	1,979 93
15	1,557 97	1,800 94	2,078 93
18	1,702 43	2,025 82	2,406 62
20	1,806 11	2,191 12	2,653 30
23	1,973 59	2,464 72	3,071 52
30	2,427 26	3,243 40	4,321 94
50	4,38 91	7,106 68	11,467 40

Показник, зведений у ступінь n, є дисконтуючим множником за n років, тобто

$$v^n = \frac{1}{(1+i)^n}. \qquad (10.5)$$

Він дозволяє довідатися, скільки потрібно внести сьогодні, щоб через кілька років мати певної величини грошовий фонд, враховуючи задану норму прибутковості, тобто визначити сучасну вартість цього фонду.

Тарифні ставки в страхуванні життя обчислюються з урахуванням того, що грошові суми, які надійшли у вигляді страхових внесків, за певний відрізок часу, приносячи якийсь дохід, збільшаться, тобто вони визначаються, виходячи із сучасної вартості страхового фонду.

Застосовуючи показник v^n, формулу для визначення величини *A* можна подати у такому вигляді:

$$A = B_n \cdot v^n. \tag{10.6}$$

Абсолютні значення показника v^n містяться в спеціальній таблиці (табл. 10.3), що використовується потім під час розрахунку тарифів.

Із збільшенням норми прибутковості *i* та терміну страхування *n* абсолютні значення множників, що дисконтують, зменшуються.

Формула $B_n = A(1+i)^n$ дає можливість визначати й інші показники, які входять до неї (*n*, *i*).

Таким чином, залежність тарифних ставок від рівня смертності застрахованих і норми прибутковості складається об'єктивно і не може довільно змінюватися.

Під час визначення тарифів із страхування життя необхідно враховувати об'єктивні закономірності руху рівня смертності застрахованих, норми прибутковості, їх взаємозв'язок і вплив на величину тарифних ставок.

Таблиця 10.3 – Таблиця дисконтуючих множників

Кількість років, n	**Дисконтуючі множники при**		
	i = 0,03	*i* = 0,04	*i* = 0,05
1	0,970 87	0,961 54	0,952 38
2	0,942 60	0,924 56	0,907 03
3	0,915 14	0,839 00	0,86 84
4	0,888 49	0,854 80	0,822 70

Продовження таблиці 10.3

Кількість років, n	Дисконтуючі множники при		
5	0,862 61	0,821 93	0,783 53
10	0,744 09	0,675 56	0,613 91
14	0,661 12	0,577 48	0,505 07
15	0,641 86	0,555 26	0,481 02
18	0,587 39	0,493 63	0,415 52
20	0,553 68	0,456 39	0,376 89
23	0,506 69	0,405 73	0,325 57
30	0,411 99	0,308 32	0,231 38
40	0,306 56	0,208 29	0,142 05
50	0,228 11	0,140 71	0,087 20

10.4 Тарифні ставки в змішаному страхуванні життя

Уклавши договір страхування життя, страхувальник і страховик починають виконувати свої фінансові зобов’язання.

Фінансові зобов’язання полягають у сплаті страхових внесків. Якщо страхувальник сплачує їх одразу під час укладання договору, то такий внесок називається одноразовим. Якщо ж він виконує свої зобов’язання впродовж усього терміну страхування, застосовуються річні внески, які потім можуть сплачуватися з розстрочення – щомісяця.

Умови змішаного страхування життя передбачають виплату страхової суми у разі дожиття, смерті та у зв’язку з утратою працездатності від нещасного випадку. Для виплат за кожним видом страхової відповідальності страховик повинен створити у себе страховий фонд. Крім того, йому необхідні кошти для компенсації витрат на проведення страхових операцій. Тому тарифна ставка за змішаним страхуванням життя складається з:

– нетто-ставки на дожиття;
– нетто-ставки на випадок смерті;

– нетто-ставки на випадок утрати працездатності;

– навантаження.

Розглянемо послідовно процес побудови тарифних ставок.

Одноразова нетто-ставка на дожиття.

Візьмемо конкретний приклад: особа віком 40 років *(x* = 40) укладає договір страхування на дожиття терміном на 5 років на суму 100 грн. Яка повинна бути для нього величина одноразового страхового внеску?

Уявимо, що такі договори страхування уклали всі сорокарічні особи з вищенаведеної таблиці смертності. Після закінчення п'яти років страховій компанії необхідно буде виплатити певну кількість страхових сум тим, хто доживе до закінчення терміну дії договору. З таблиці смертності знаходимо, що до 45 років доживе 91 631 чол. Тому і виплат буде 91 631. Страхова сума кожного договору – 100 грн. Отже, страховий фонд, призначений для цих виплат, повинен становити

$$100\,грн \cdot\ 91\,631 = 9\,163\,100\ \ грн.$$

Однак на початку страхування він може мати меншу величину, враховуючи, що щороку на нього буде наростати 3 складних відсотки доходу. Щоб відповідно зменшити цей фонд, тобто знайти його сучасну вартість, застосуємо множник, що дисконтує, за 5 років, такий, що дорівнює 0,86261за 3 % норми прибутковості.

$$9\,163\,100\ грн \cdot 0{,}86261 = 7\,904\,182\ \ грн.$$

Отже, щоб через 5 років мати кошти для виплати страхових сум з дожиття, страхова компанія на початку страхування повинна мати у своєму розпорядженні фонд у 7 904 182 грн. Цю суму і потрібно одноразово зібрати зі страхувальників. Різниця між сумою збору і сумою виплат буде покрита за рахунок 3% доходу на зібрані кошти. 7 904 182 грн є сучасною вартістю 9 163 100 грн, що будуть виплачені через 5 років.

Щоб визначити розмір внеску кожного із застрахованих у цей загальний фонд, розділимо отриману суму на кількість осіб на початку страхування (див. таблицю смертності, x = 40). Одержимо:

7 904 182 грн/93 597 = 84 грн 45 к.

Це і буде одноразова нетто-ставка на дожиття, Розмір тарифної ставки був відповідно обчислений таким чином:

$$\left(\frac{91\,631 \cdot 0{,}86261}{93\,597}\right) \cdot 100 = 84{,}45.$$

91 631 – це кількість осіб, які доживають до 45 років. Воно позначається символом l_{x+n}, де x – вік на початку страхування; n – термін страхування; 0,86261 – дисконтуючий множник; 93 597 – кількість осіб на початку страхування l_x; 100 – страхова сума S.

Звідси одержимо формулу

$$_nE_x = \frac{(l_{x+n} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}, \qquad (10.7)$$

де $_nE_x$ – одноразова нетто-ставка зі страхування на дожиття для осіб віком x років терміном на n років.

Підставляючи в цю формулу відповідні значення, можна обчислити розмір тарифної ставки зі страхування на дожиття для будь-якого віку і терміну. Наприклад, для особи у 30 років, застрахованої на 10 років, одноразова нетто-ставка зі страхування на дожиття

$$_{10}E_{30} = \frac{(l_{40} \cdot v^{10})}{l_{30} \cdot S} = \frac{93\,597 \cdot 0{,}74409}{95\,982 \cdot 100} = 72 \text{ грн } 56.$$

Одноразова нетто-ставка на випадок смерті

Припустимо, що особа віком 40 років укладає договір страхування на випадок смерті терміном на 5 років на 100 грн. Якщо обчислюючи нетто-ставку на дожиття необхідно було знайти кількість осіб, які доживають до 45 років, то тепер необхідно визначити кількість застрахованих, які не доживуть до 45 років.

За таблицею смертності знаходимо, що віком 40 років звичайно помирає 335 осіб; віком 41 рік – 360 осіб; 42 роки –390 осіб; 43 роки – 422; 44 роки – 459 осіб.

Отже, страховій компанії необхідно виплатити у зв'язку з випадками смерті на першому році страхування 33 500 грн, на другому –36 000 грн тощо. Перемноживши ці суми на відповідні (для одного року, двох років і т. ін.) множники, що дисконтують, знайдемо сучасну вартість майбутніх п'ятирічних виплат за випадками смерті:

$$33500 \cdot 0{,}97087 + 36000 \cdot 0{,}94260 + 39000 \cdot 0{,}91514 + \\ + 42200 \cdot 0{,}88849 + ... + 45900 \cdot 0{,}86261 = 179\,237 \text{ грн.}$$

Розділимо отриману суму на кількість осіб, які вступають у страхування:

179237/93597 – 1 грн 91 к.

Таким чином, особи віком 40 років, уклавши договір страхування на випадок смерті на страхову суму 100 грн, повинні під час укладання договору внести в загальний страховий фонд 1 грн 91 к.

Розмір тарифної ставки був обчислений за допомогою таких дій:

(335 – 0,97087 + 360 – 0,94260 + ... +
+ 459 – 0,86261)/93597 · 100 =1,91,

де 335 – кількість осіб, які помирають віком 40 років, або d_x; 360 – кількість осіб, які помирають віком 41 рік, або d_{x+1} і т. д.; 459 – кількість осіб, які помирають на останньому році страхування, або d_{x+n-1}; 0,97087; 0,94260, ... і т. д. – множники, що дисконтують, для відповідних років страхування: $v, v^2, ..., v^n$; 93597 – кількість осіб при вступі в страхування l_x; 100 – страхова сума, або S.

Одноразова нетто-ставка зі страхування на випадок смерті для осіб віком *k*-років терміном страхування *n* років позначається символом *A* :

$$ {}_nA_x = \frac{(d_x \cdot v + d_{x+1} \cdot v^2 + ... + d_{x+n-1} \cdot v^n)}{l_x \cdot S}. \qquad (10.8) $$

Користуючись цією формулою, можна обчислити розмір тарифної ставки зі страхування на випадок смерті для осіб будь-якого віку на будь-який термін.

Виводячи формули, ми переконуємося, що одноразові нетто-ставки дорівнюють сучасній вартості взаємних фінансових зобов’язань страховика і страхувальника.

Річна нетто-ставка

Більшості страхувальників зручніше робити внески впродовж усього періоду страхування. Для цього обчислюються річні нетто-ставки.

Визначаючи розмір річної нетто-ставки, не можна механічно ділити одноразову ставку на кількість років страхування. Необхідний особливий розрахунок, що враховує як втрату доходу на відсотках, так і зменшення кількості застрахованих внаслідок смертності. За одноразової сплати більша грошова сума надходить одразу в державний обіг, і на неї наростають відсотки. За річних внесків частина доходу, одержаного за рахунок відсотків, втрачається. Крім того, за одноразового внеску всі страхувальники погашають свої внески одразу, а за річної сплати за рядом договорів внески не будуть виплачені цілком, оскільки частина застрахованих упродовж терміну дії договорів може померти (див. таблицю смертності).

Для обчислення річних ставок застосовуються спеціальні коефіцієнти розстрочки (ануїтети).

Розглянемо конкретний приклад. Уявімо: всі 93 597 осіб 40-річного віку, які зазначаються в таблиці смертності, зобов’язалися впродовж п’яти років наприкінці кожного року вносити страховій компанії по 1 грн. Але оскільки впродовж п’яти років частина застрахованих може померти, страхова компанія одержить відповідно до таблиці смертності: наприкінці 1-го року – 93 262 грн; 2-го року – 92 902 грн; 3-го року – 92 512 грн; 4-го року – 92 090 грн; 5-го року – 91 631 грн.

Сучасна вартість суми, внесеної в першому році, дорівнює $93262 \cdot 0{,}97087$ (0,97087 – множник, що дисконтує, за один рік). Сучасна вартість внесків другого року дорівнює $92\,902 \cdot 0{,}94260$ (0,94260 – множник, що дисконтує, за 2 роки) і т. д. Перемноживши суми внесків кожного року на відповідні множники, що дисконтують, знайдемо сучасну вартість загальної суми внесків усіх застрахованих. Розділивши одержану величину на 93 597 (кількість осіб, які вступили в страхування), розраховуємо сучасну вартість річних внесків розміром 1 грн, сплачених упродовж п’яти років кожним із 40-річних застрахованих. У результаті підрахунку отримаємо 4 грн 53 к. Це означає, що впродовж п’яти років страхувальник буде вносити страховій компанії по 1 грн і усього він внесе 5 грн. Сучасна вартість цих 5 грн у момент укладання договору страхування дорівнює 4 грн 53 к. Сучасна вартість річних внесків розміром 1 грн називається ***коефіцієнтом розстрочки (ануїтетом)*** та позначається символом ${}_n a_x$.

Якщо в наведеному розрахунку замінити цифрові значення літерними позначеннями, одержимо формулу:

$$ {}_n a_x = \frac{(l_x + 1 \cdot v + l_x + 2 \cdot v^2 + ... + l_x + n \cdot v^{x+n})}{l_x} . \qquad (10.9) $$

У ній враховується і норма прибутковості, і природне зменшення внаслідок смертності кількості застрахованих осіб упродовж терміну страхування.

Як відомо, одноразова нетто-ставка дорівнює сучасній вартості взаємних фінансових зобов’язань страховика і страхувальника. Якщо страхувальник погашає свої фінансові зобов’язання річними внесками, одноразова ставка дорівнює сучасній вартості суми річних внесків.

Коефіцієнт розстрочки дорівнює сучасній вартості річних внесків розміром 1 грн. Отже, одноразова ставка так відноситься до річної, як коефіцієнт розстрочки до 1 грн. Складемо пропорцію

Одноразова ставка: ${}_n a_x = річна\ ставка / \frac{{}_n P_x}{1}$.

Звідси річна ставка дорівнює одноразовій, помноженій на 1 грн і поділеній на коефіцієнт розстрочки, або ${}_n P_x = одноразова\ ставка / {}_n a_x$.

Абсолютні значення коефіцієнтів розстрочки близькі до значення *n* – терміну страхування, але трохи нижчі за нього. Внаслідок розміри річних ставок виходять більш високими, ніж за механічного ділення одноразової ставки на кількість років страхування. Так відшкодовуються втрати на відсотках і враховується зменшення впродовж терміну страхування кількості осіб, які роблять внески.

Застосувавши коефіцієнт розстрочки розміром 4,53, обчислимо річні ставки для особи віком 40 років терміном страхування 5 років.

Річна нетто-ставка із дожиття дорівнює 18 грн 64 к. (84 грн 45/4,53); річна нетто-ставка зі страхування на випадок смерті становитиме 42 (1 грн 91/4,53), а зі змішаного страхування (без відповідальності за втрату працездатності) – 19 грн.

Таким чином, договір змішаного страхування життя терміном на 5 років для сорокарічної особи характеризується такими даними: 100 грн – страхова сума; 95 грн 30 к. – сума річних внесків-нетто; 86 грн 36 к. – одноразовий внесок-нетто.

Формула для обчислення річних нетто-ставок на дожиття:

$$ {}_{n}P_{x} = \frac{{}_{n}E_{x}}{{}_{n}a_{x}} \cdot S . \qquad (10.10) $$

Брутто-ставки

Одержуючи внески розміром нетто-ставок, страховик акумулює у своїх руках стільки коштів, скільки йому знадобиться для виплати страхових сум. Але він несе витрати, пов’язані з витратами на проведення страхування, тобто повинен оплатити працю всіх працівників з укладання договорів страхування та інші витрати.

Оскільки страхування проводиться в основному за рахунок самих страхувальників, кошти на покриття цих витрат також передбачаються у тарифній ставці. Тому до нетто-ставки приєднується навантаження.

У тарифних ставках за змішаним страхуванням життя у навантаження внесені лише чисті витрати страхових компаній із проведення страхових операцій. Річна брутто-ставка за змішаним страхуванням життя на 100 грн для особи віком 40 років і терміном на 5 років становить 21 грн 11 к.

Брутто-ставки обчислюються за формулою

$$ {}_n\Pi_x = \frac{{}_nH_x}{(1-f)}, \tag{10.11} $$

де ${}_n\Pi_x$ – брутто-ставка; ${}_nH_x$ – нетто-ставка; f – питома вага навантаження у брутто-ставці.

Аналізуючи брутто-ставки, можна зробити такі висновки: розмір тарифів збільшується слідом за віком особи, що укладає договір страхування; чим довший термін страхування, тим нижча тарифна ставка; одноразовий внесок менший страхової суми і нижчий суми місячних внесків; перевищення загальної суми сплачених у розстрочку внесків буде тим меншим або його зовсім не буде, чим довший термін страхування і молодша особа, яка укладає договір.

10.5 Аналітичні закони смертності

За основу актуарних розрахунків беруть щільність імовірностей *f(x)* і обумовлені нею функції *S(x)*, μ_x та інші характеристики. Ясно, що ці розрахунки будуть простішими, якщо відомий аналітичний вигляд функції *f(x)* з точністю ряду параметрів, які можна оцінити за статистичними даними про тривалість життя людей.

Модель де Муавра. У 1729 р. Абрахам де Муавр запропонував вважати, що тривалість життя рівномірно розподілена на інтервалі [0, ω], де ω – це граничний вік людини, тобто

$$f(x)=\begin{Bmatrix} 1/\omega, & x\in[0,\omega] \\ 0, & x\notin[0,\omega] \end{Bmatrix}. \qquad (10.12)$$

Це найбільш проста апроксимація кривої життя f(x). У рамках моделі Муавра легко знаходяться функції виживання *S(x)*, розподіл *F(x)*, інтенсивність смертності μ_x і необхідні числові характеристики: середнє, дисперсія та ін.

Очевидно, що $F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (1/\omega)dt = x/\omega$ при $x\le\omega$,

якщо $x>\omega$, тоді $F(x)=\int_0^{\omega}(1/\omega)dt+\int_{\omega}^{x}0dt=1$,

$$F(x)=\begin{Bmatrix} x/\omega, & x\in[0,\omega] \\ 1, & x\notin[0,\omega] \end{Bmatrix},$$

$$S(x)=1-F(x)=\begin{Bmatrix} 1-(x/\omega), x\in[0,\omega] \\ 0, x>\omega \end{Bmatrix}, \qquad (10.13)$$

$$\mu(x)=\frac{f(x)}{s(x)}=\frac{\frac{1}{\omega}}{1-\frac{x}{\omega}}=\frac{1}{\omega-x} \quad \textit{при}$$

$x\in(0,\omega]$.

Для інших значень *x* інтенсивність смертності не визначена. За формулами середнього часу життя та дисперсії тривалості життя одержуємо

$$\overset{0}{e}_0 = \int_0^{\omega} S(x)dx = \frac{\omega}{2},$$

$$EX^2 = 2\int_0^{\omega} x(1-\frac{x}{\omega})dx = \frac{\omega^2}{3}, \tag{10.14}$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2}{12}, \qquad \sigma = \frac{\omega}{2\sqrt{3}}.$$

На підставі дослідних і статистичних даних про тривалість життя модель Муавра можна вважати дуже грубою. Реально її можна використовувати для апроксимації функції виживання на певному інтервалі часу.

Модель Гомпертца. У 1825 р. Гомпертц запропонував інтенсивність смертності μ_x апроксимувати експонентою:

$$\mu(x) = Be^{\alpha x}, \tag{10.15}$$

де $\alpha > 0$, $B > 0$ – деякі параметри.

Тоді можна записати формули для функції смертності, виживання, кривої смертей.

Визначимо криву смертності та функцію виживання:

$$\int_0^x \mu_x dx = \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1),$$

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right), \tag{10.16}$$

$$S(x) = \exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right).$$

Диференціюванням *F(x)* знаходимо криву смертей:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=B\exp(\alpha x-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)). \qquad (10.17)$$

Визначимо точку максимуму цієї функції. Тому що

$$\frac{df(x)}{dx}=B(\alpha x-Be^{\alpha x})\exp(\alpha x-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1))=0, \qquad (10.18)$$

лише за

$$\bar{x}=\frac{1}{\alpha}\ln\frac{\alpha}{B}, \qquad (10.19)$$

і функція *f(x)* додатна, то $\bar{x}$ є точкою максимуму.

Визначення середнього і дисперсії в моделі Гомпертца призводить до інтегралів, що не можна точно обчислити, і можуть бути обчислені наближено. Тому знаходження виразів для $\overset{0}{e}_0$ та σ^2 опускаємо.

Модель Мейкхама. У 1860 р. Мейкхам узагальнив модель Гомперца, поклавши

$$\mu_x=A+Be^{\alpha x},\ \ x>0. \qquad (10.20)$$

Призначення додаткового доданка *A* пояснимо нижче. Легко переконатися, що в рамках моделі Гомпертца виконуються такі співвідношення:

$$S(x)=\exp\left\{-Ax-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right\}, \qquad (10.21)$$

$$F(x) = 1 - \exp\left\{- Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right\},$$

$$f(x) = \left[A + B e^{\alpha x}\right] \exp\left\{- Ax - \frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x} - 1)\right\}.$$

Розглянемо граничний випадок *B* = 0. Тоді одержимо експоненціальний закон:

$$f(x) = Ae^{-Ax} \tag{10.22}$$

з інтенсивністю смертності *A*, що не залежить від віку *x*. Таке можна чекати, коли смерть викликана нещасними випадками. Для опису частки таких смертей уведено параметр *A*, який враховує ризики, що пов'язані з нещасними випадками.

Розрахунок середнього і дисперсії в моделях Мейкхама призводить також до інтегралів, що не беруться точно.

Модель Вейбулла. У 1939 р. Вейбулл запропонував апроксимувати інтенсивність смертності показниковою функцією:

$$\mu_x = kx^b, \; k > 0, \; b > 0. \tag{10.23}$$

Відповідно до цієї моделі, як легко переконатися, що

$$S(x) = \exp\left\{- \frac{k}{b+1} x^{b+1}\right\}, \tag{10.24}$$

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\frac{k}{b+1} x^{b+1}\right\},$$
$$f(x) = kx^b \exp\left\{-\frac{k}{b+1} x^{b+1}\right\}.$$

Похідна

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(kbx^{b-1} - k^2 x^{b^2}\right) \exp\left\{-\frac{k}{b+1} x^{b+1}\right\} = 0, \qquad (10.25)$$

при

$$\bar{x} = \left(\frac{b}{k}\right)^{\frac{b^2}{b-1}}, \qquad (10.26)$$

яка є точкою максимуму графіка смертей, якщо $b > 0$.

ТЕМА 9
СИСТЕМА СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ

ЛЕКЦІЯ 11
Система страхових резервів

Резерви страховика, їх види та порядок формування. Резерв незаробленої премії: резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії; метод «1/365»; метод «1/24»; метод «1/8»; резерв незаробленої премії для премії, що сплачується в розстрочку; середній рівень резерву незаробленої премії. Резерв коливань збитковості: нормативний рівень виплат; розрахунок збитковості за звітними даними. Оцінювання інвестиційного доходу.

11.1 Резерви страховика, їх види й порядок формування

Для забезпечення діяльності страховик створює певні резерви, що призначені забезпечити виконання зобов'язань страховика за майбутніми виплатами страхових сум і страхового відшкодування, підвищити надійність та платоспроможність страхової компанії.

Окрім того, страховики можуть створювати резерви для фінансування заходів із попередження настання страхових випадків та інші резерви. А із нерозподіленого прибутку створюються вільні резерви.

Для забезпечення виконання страховиками зобов'язань щодо окремих видів обов'язкового страхування страховики можуть утворювати централізовані страхові резервні фонди та органи, які здійснюють управління цими фондами.

Основні види резервів, що формує страхова компанія, подані на рис. 11.1.

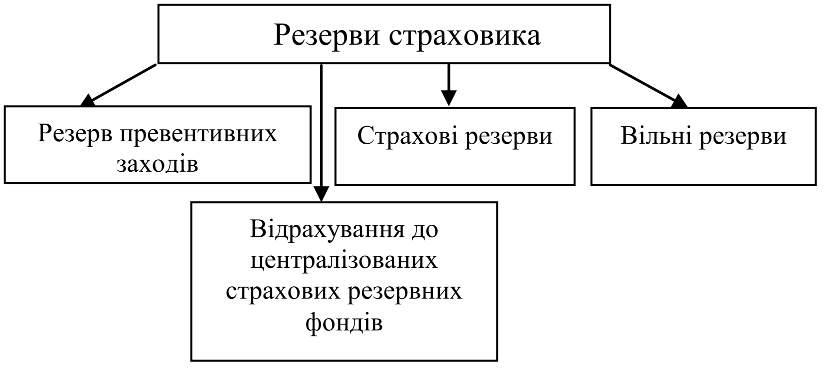

Рисунок 11.1 – Резерви страховика

Резерв превентивних заходів (РПЗ) забезпечує реалізацію попереджувальної функції страхування, забезпечує фінансування витрат на заходи із запобігання нещасних випадків, втрат чи пошкодження майна. В структурі тарифів брутто-ставок належить до елементів навантаження.

Резерв превентивних заходів формується методом відрахувань від страхової премії, що надійшла за договорами страхування за звітний період. Розмір таких відрахувань визначається за відсотком, що передбачений у структурі тарифної ставки ($\% T_b$) за кожним договором страхування на зазначені цілі. Величина РПЗ за певний період складається із суми передбачених відсотків, збільшеної на розмір РПЗ на початок звітного періоду ($РПЗ_{поч.}$) і зменшеної на суму використаних коштів на превентивні заходи у звітному періоді ($РПЗ_{вик.}$).

Тобто

$$РПЗ = \%T_b + РПЗ_{поч.} - РПЗ_{вик.}. \qquad (11.1)$$

Формування та використання коштів РНП за добровільними видами страхування здійснюється страховиком на базі розробленого ним та узгодженого з уповноваженим органом контролю за страховою діяльністю Положення про резерв превентивних заходів.

Вільні резерви – частина власних коштів страховика, яка резервується з метою додаткового забезпечення платоспроможності відповідно до прийнятої методики здійснення страхування. Джерелом їх створення є нерозподілений прибуток підприємства. Необхідно зазначити, що платоспроможність передбачає здатність страховика відповідати за своїми зобов'язаннями.

Відрахування до *централізованих страхових фондів* мають на меті забезпечити виконання страховиками своїх зобов'язань щодо окремих видів страхування зазвичай визначених законодавчо. Джерелом їх є:

– відрахування від надходжень страхових платежів;

– внески власних коштів страховика (частина прибутку);

– доходи від розміщення тимчасово вільних коштів централізованих страхових резервних фондів.

У світовій практиці страховий бізнес поділяють на ризикове (загальне) страхування та страхування життя. Відповідно *страхові резерви* поділяють на :

– резерви за ризиковими видами страхування (технічні);

– резерви зі страхування життя і накопичувального страхування (математичні).

Згідно такого поділу та відповідно до Закону України про страхування для забезпечення виконання зобов'язань перед страховиками страхові компанії формують із отриманих страхових внесків необхідні страхові резерви за особистим, майновим страхуванням та страхуванням відповідальності. *Страхові резерви* поділяють на технічні та резерви із страхування життя (математичні).

Технічні резерви передбачають необхідним за законодавчою нормою створення резервів премій та резервів збитків. До *резервів премій* відносять обов'язкове створення резервів незароблених премій.

Резерв незароблених премій (РНП) складається з відповідної частини нетто-ставки, яка надійшла у звітному періоді і яка використовується для страхових виплат упродовж періоду, що виходить за межі звітного.

11.2 Резерв незаробленої премії

Незароблена премія – це частина страхової премії, яка надійшла за договорами страхування, що укладені у звітному періоді, а термін їх дії припадає на наступний звітний період (виплати майбутніх періодів). У практиці страхування для розрахунку незаробленої премії використовується декілька *методів формування резервів* незароблених премій:

– метод «1/365» – метод розрахунку за днями – застосовується за кожним договором страхування окремо, коли терміни сплати страхової премії розподілені у часі довільно; визначається як добуток страхової премії і частки від ділення строку дії договору страхування (у днях), який ще не закінчився, до всього терміну дії договору страхування; формула розрахунку має вигляд:

$$РНП_i = П_{бі} \cdot \frac{т - д}{т}, \tag{11.2}$$

де РНПі – резерв незароблених премій за *і*-им договором страхування; Пбі – базова страхова премія за *і*-им договором; *т* – термін дії *і*-го договору страхування; *д* – кількість днів *з* моменту початку дії і-го договору до звітної дати:

– метод «1/4», «1/8», «1/12», «1/24» – «пашуальний метод» – розробляється страхова премія на півріччя, квартали, місяці, декади, щоб відділити зароблену страхову премію від незаробленої в звітний період; використовується, коли термін дії договорів страхування починається до початку звітного періоду; порядок розрахунку такий: базова страхова премія групується за місяцем початку виникнення відповідальності страховика, далі розподіляється на термін дії поліса (премію ділять на однакові частини);

– метод «40 %»: використовують, коли укладаються договори з невизначеними термінами початку та закінчення дії договорів; розмір РНП визначається за кожним окремим договором страхування розміром 40 % від базової страхової премії на звітну дату;

– метод «плаваючих кварталів» – є спрощеним методом розрахунку РНП, який використовується згідно Закону про страхування всіма українськими страховиками і виконується на основі брутто-ставки; водночас вважається, що витрати на ведення страхової справи становлять 20–28 %, а всі договори страхування укладені в середині року, а отже, розмір РНП на звітну дату встановлюється залежно від суми страхових премій, що надійшли, за відповідним видом страхування в кожному із трьох кварталів періоду, що передує цій звітній даті; порядок розрахунку РНП методом «плаваючих кварталів» такий: сума страхових премій, що надійшли в I кварталі, помножується на 1/4 ($\sum П_1 \cdot 1/4$), у II кварталі – на 1/2 ($\sum П_2 \cdot 1/2$), у III кварталі – на 3/4 ($\sum П_3 \cdot 3/4$), всі одержані значення додаються:

$$РНП = 1/4\sum П_1 + 1/2\sum П_2 + 3/4\sum П_3 . \qquad (11.3)$$

11.3 Резерви збитків

Резерви збитків – це зобов'язання з виплати страхових відшкодувань за тими страховими випадками, що відбулися до звітної дати (тобто відбулися до кінця фінансового року). Для інших – призначений РНП. Резерв збитків у світовій практиці складається з одного або декількох компонентів. Наприклад, у відповідно до GAAP (системи загальноприйнятих принципів бухгалтерського обліку) резерв збитків складається з:

- резерву подій, що відбулися;
- резерву розвитку збитків;
- резерву збитків, що відбулися, але не заявлені;
- резерву під можливе перевідкриття збитку;
- резерву під видатки неврегульованих збитків.

В Україні відповідно до чинного законодавства резерви збитків включають:

- резерв заявлених, але невиплачених збитків;
- резерв збитків, які виникли, але не заявлені;
- резерв коливань збитковості;
- резерв катастроф.

Резерв заявлених, але невиплачених збитків (РЗНВ) формується для забезпечення виконання зобов'язань, що невиконані та неврегульовані або виконані неповністю страховиком на звітну дату. При цьому страхові зобов'язання виникли за випадками, що відбувалися у звітному періоді або, навіть, напередодні, і про факт настання яких було відомо страховику. Розмір РЗНВ визначається за кожною неврегульованою претензією і відповідає сумі заявлених збитків за звітний період ($ЗЗ_{зв.}$), які зареєстровані в Журналі обліку збитків, збільшеної на суму неврегульованих збитків за попередні періоди

($ЗЗ_п$) та зменшеної на вже виплачені впродовж звітного періоду збитки ($ЗВ_{зв.}$) плюс витрати на врегулювання збитку (ВВЗ). Зазвичай останні беруться розміром 3 % від суми неврегульованих претензій за звітний період. Таким чином,

$$РЗНВ = ЗЗ_{зв} + ЗЗ_п - ЗВ_{зв} + ВВЗ\,. \tag{11.4}$$

Резерв збитків, які виникли, але не заявлені (РЗНЗ), формується у зв'язку із можливими страховими подіями, що відбулися, проте страховику не заявлені збитки за ними на звітну дату. Практично під час розрахунків РЗНЗ застосовують 10 % від страхової премії, що надійшла за звітний період, якщо вважати звітним періодом фінансовий рік.

Крім того, в доповнення до резервів премій та резервів збитків страховики можуть створювати *додаткові технічні резерви.* А саме:

– резерв коливань збитковості;
– резерв катастроф;
– резерв незакінчених (неминулих) ризиків.

Зазначені додаткові технічні резерви створюються і формуються відповідно до Статуту страхової компанії та розробленого Положення страховика про порядок формування технічних резервів, який погоджено з органами державного нагляду за страховою діяльністю.

Резерв коливань збитковості (РКЗ) є складовим технічних резервів страховика. Зазначений резерв призначений для компенсації витрат страховика на здійснення страхових виплат у випадках, коли значення збитковості страхової суми у звітному періоді перевищують очікуваний рівень збитковості, який є основою для розрахунку тарифу-нетто за відповідним видом страхування.

Коливання збитковості зазвичай фіксуються та враховуються за тими видами страхування, які пов’язані із значними змінами рівня ризику (від дуже низького до надто високого), під впливом якого знаходяться застраховані об’єкти під час дії договору страхування. Наприклад, якщо за певний період ризик несприятливих кліматичних умов, що впливають на врожайність сільськогосподарських культур, досить низький, то страховик не виплачує страхових відшкодувань, оскільки відсутні страхові випадки. Тоді накопичені страхові резерви направляються не на поповнення прибутку, а у резерв коливання збитковості (РКЗ), тобто зберігаються з метою виплат у періоди, коли ризик буде високим. Резерв коливання збитковості дозволяє підвищувати фінансову стійкість страховика, а отже, і рівень його надійності, що є сприятливим фактором стабілізації економіки в цілому. Проте нормативної бази для формування РКЗ сьогодні в Україні немає. Страховики самостійно визначають порядок та умови формування зазначеного резерву та узгоджують їх з уповноваженим органом нагляду за страховою діяльністю. До того ж під час формування власної методики досить проблематичним є віднесення ризику за певним видом страхування до відповідного типу, а також розподіл цього ризику в часі.

Безумовно, за нормального типу ризику значення збитковості коливається навколо середнього показника, що характерно для традиційного майнового страхування. Відхилення від середньої в сторону зниження ризику зазвичай супроводжується капіталізацією страхових резервів, що збільшує прибуток страховика. Відхилення в сторону підвищення ризику компенсується ризиковою надбавкою в структурі страхового тарифу.

Для видів страхування, де застосовуються страхові тарифи без ризикової надбавки, з метою підвищення фінансової стійкості страхових операцій доцільно створювати резерв коливання збитковості. Зазначений резерв також доцільно створювати, якщо відбувається постійне підвищення рівня ризику (у таких видах страхування, як медичному, екологічному).

Якщо відбувається значна нерівномірність розподілу збитковості страхової суми та велика частота коливання ризику у часі, то такі ризики відносять до катастрофічних, які поділяються в свою чергу на нормальні і власне катастрофічні. Нормальна частина катастрофічного ризику покривається за рахунок звичайного страхового резерву, а власне катастрофічний ризик – за рахунок спеціального фонду катастроф або передається перестраховику.

Необхідно підкреслити, що у складі технічних резервів передбачається створення *резерву катастроф* (РК), який призначено для покриття надзвичайного збитку, що є наслідком непереборної сили або масштабної аварії, і який вимагає страхових виплат за великою кількістю договорів. Цей резерв, як і резерв коливання збитковості немає спеціально рекомендованої методики формування і використання. Його створення залежить від страховика. До того ж у законодавчій, довідниковій та науковій літературі немає чітко розкритого поняття «непереборної сили». «Непереборна сила» діє як надзвичайне явище, яке неможливо подолати, проте можна передбачити. А тому існує ймовірність його настання з одночасною невизначеністю у просторі та часі, що дозволяє віднести ризики «непереборної сили» до категорії страхових. Катастрофічність зазначеного ризику полягає не в тому, що відбулися передбачені страхові події, а якраз в тому, що ці небезпеки вплинули відразу на багато застрахованих об’єктів, що призводить до флуктуаційних коливань збитковості. До того ж ці коливання збитковості можуть відбуватися як за один тарифний період, так і за декілька. Отже, резерв катастроф доцільно створювати в тих страхових компаніях, які спеціалізуються на страхуванні катастрофічних ризиків або включають їх в обсяг своєї відповідальності.

Резерв незакінчених ризиків (РНР) створюється як доповнення до резерву незароблених премій (РНП) з метою компенсації дефіциту фінансових ресурсів у технічних резервах через можливе чи змушене заниження тарифів в умовах ринкової економіки.

Встановлюючи зазначені резерви, страховики повинні письмово повідомити Уповноважений орган про запровадження формування та ведення обліку таких технічних резервів за видами страхування, іншими, ніж страхування життя, не пізніше, ніж за 45 днів до початку календарного року.

Спеціальні резерви можуть встановлюватися залежно від специфіки зобов’язань страховика.

Резерви із страхування життя формуються окремо для забезпечення виконання зобов’язань за страховими виплатами із страхування життя та медичного страхування за рахунок надходження страхових платежів і доходів від інвестування коштів сформованих резервів за цими видами страхування. Кошти резервів із страхування життя не є власністю страховика, повинні бути відокремлені від його іншого майна і не можуть використовуватися страховиком для погашення будь-яких інших зобов’язань, не можуть бути включені до ліквідаційної маси у разі банкрутства страховика чи його ліквідації.

Страховики повинні створювати такі резерви із страхування життя:

– резерв довгострокових зобов’язань (математичні резерви);

– резерв належних виплат страхових сум.

Величина резервів довгострокових зобов'язань обчислюється актуарно окремо за кожним договором страхування відповідно до Методики формування резервів зі страхування життя, затвердженої Наказом Комітету у справах нагляду за страховою діяльністю № 46 від 23 липня 1997 р., з урахуванням темпів зростання інфляції. Мінімальні строки дії договорів страхування життя встановлюються Уповноваженим органом (в сучасних умовах – Кабінетом Міністрів України).

Зазначені резерви (довгострокових зобов'язань та належних виплат страхових сум) формуються методом відрахування частини страхової премії, що призначена для страхових виплат та частини інвестиційного доходу від розміщення тимчасово вільних коштів страховика. Загальний розмір страхових резервів зі страхування життя визначається, як сума резервів кожного окремого договору страхування життя. Розрахунки виконуються на базі таблиць смертності (вперше розроблені англійським вченим Д. Граунтом у 1662 р., удосконалені відомим астрономом та математиком Е. Галлеєм) та норм доходності щодо інвестування тимчасово вільних коштів.

Отже, страховик під час здійснення страхової діяльності створює технічні резерви для забезпечення зобов'язань за ризиковими видами страхування та резерви із страхування життя для забезпечення зобов'язань із страхування життя, накопичувального страхування та медичного страхування. Порядок формування, використання та розміщення означених страхових резервів встановлюється відповідно до норм діючого законодавства та затверджених правил страхування.

Види страхових резервів

Необхідність наявності страхових резервів обумовлена часовим розривом між надходженням страхової премії і її витрачанням на страхові виплати.

Оскільки страхова премія за договорами страхування завжди надходить раніше, ніж відбуваються страхові випадки і здійснюються страхові виплати за цими договорами, то необхідно резервувати її на майбутнє для забезпечення страхових виплат методом створення страхового фонду.

Існує аналогія між динамікою величини страхового фонду і динамікою рівня рідини в резервуарі, в який рідина спочатку надходить впорядкованими порціями (внесками), а потім неврегульований, випадковими порціями і у випадкові моменти часу випливає. У страхуванні стік має випадковий, або стохастичний, характер з двох причин: по-перше, наперед невідомо, коли відбудеться страховий випадок, по-друге, невідомий розмір страхового відшкодування. Рівень рідини в резервуарі весь час знаходиться в русі, він то підвищується за рахунок накачування рідини (надходження страхової премії), то знижується за рахунок стоку (страхових виплат).

Необхідна умова функціонування страхової компанії – достатня величина страхового фонду у будь-який момент часу. Для цього необхідно принаймні, щоб за фіксований інтервал часу (квартал, рік) притік гарантовано перевищував або хоча б компенсував витік. Виходячи з цього і визначався розмір страхової премії: оцінювався максимальний розмір сумарної виплати за всіма страховими випадками за термін дії договору, а сумарне надходження страхової премії прирівнювалося до цієї величини.

Формування страхового фонду відбувається за рахунок тієї частини страхової премії, яка покриває реальну вартість страхових виплат, а також внутрішні адміністративні витрати, пов’язані із забезпеченням діяльності страхової компанії, це так звана технічна, або інвентарна премія. Технічна премія дорівнює страховій премії, що надійшла, за вирахуванням відрахувань у резерв попереджувальних заходів і виплати комісійних агентам за продаж полісів. Технічна премія є джерелом формування технічних резервів, необхідних для забезпечення страхових виплат із страхових випадків, що вже відбулися і майбутнім. У зв'язку з цим і технічні резерви поділяють на два відповідні класи: резерви збитків і резерви премій. До резервів збитків входять резерв заявлених, але неврегульованих збитків (РЗНЗ) і резерв збитків, що відбулися, але незаявлених (РВНЗ).

Резерви премій складаються з резерву незаробленої премії, резерву коливань збитковості і резерву катастроф. Кожен тип резерву премій пов'язаний із відповідним характером часового розподілу ризику.

Резерв незаробленої премії (РНП) розраховується в припущенні про рівномірний розподіл ризику впродовж терміну дії договору страхування. Така ситуація відбувається, коли кількість страхових випадків за період страхування велике, тобто виплати відбуваються майже безперервно. Рівень виплат при цьому береться таким, що дорівнює нормативному рівню виплат, узятому за основу під час розрахунку тарифів. Якщо договори страхування одночасно починаються і закінчуються, то до моменту закінчення договорів величина РНП повинна дорівнювати нулю.

Резерв коливань збитковості (РКЗ) призначений для згладжування коливань рівня виплат (збитковості) біля нормативного значення впродовж тарифного періоду. Водночас після закінчення тарифного періоду та його частина, яка сформувалася за рахунок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна дорівнювати нулю, залишок буде обумовлений накопиченням ризикової надбавки за цей термін.

Резерв катастроф (РК) призначений для накопичення засобів на випадок рідкісних (раз в 50–100 років) катастрофічних подій, за яких можливе пошкодження значної частини застрахованих об'єктів і потрібна одномоментна виплата великої суми. Через свою рідкість і унікальність подібні події не укладаються в статистику, і тому може бути зроблене лише експертне оцінювання необхідної величини резерву катастроф і часу його накопичення.

Резерв незаробленої премії

Під незаробленою премією на даний момент часу розуміють частину технічної премії, призначеної для здійснення *майбутніх* страхових виплат за діючими договорами страхування з урахуванням адміністративних витрат. У свою чергу зароблена премія є нормативним (розрахунковий) рівнем страхових виплат за період від моменту вступу через ці договори до теперішнього моменту часу (також з урахуванням адміністративних витрат). У сумі зароблена і незароблена премії складають технічну премію.

Розглянемо резерв незаробленої премії для одноразової страхової премії.

Обчислимо резерв незаробленої премії (РНП) для простого випадку, коли всі діючі в даний момент часу договори страхування почалися одночасно і так само одночасно закінчаться. Оскільки ризик рівномірно розподілений упродовж терміну дії договорів, розрахункова (нормативна) сума страхових виплат (використана нетто-премія) пропорційна часу з моменту укладення договорів:

$$Z(t) = Z\frac{t}{T}, \qquad (11.5)$$

де Z – сумарна нетто-премія за весь термін дії договорів.

Величина сумарного нетто-резерву або резерву незаробленої нетто-премії

$$RZ(t) = Z - Z(t) = Z(1 - \frac{t}{T}) = Z\frac{T - t}{T}. \qquad (11.6)$$

Із формули (11.5) бачимо, що величина нетто-резерву пропорційна інтервалу часу, що залишився до закінчення терміну договорів. У зв’язку з цим метод розрахунку страхових резервів за формулою (11.6) називається методом пропорційності часу. Сам же резерв називають нетто-резервом незаробленої премії. У момент початку дії договору величина резерву дорівнює тій, що надійшла нетто-премії, у момент закінчення договору – нулю.

Страхова компанія резервує засоби не лише для здійснення майбутніх страхових виплат, а і на майбутні адміністративні витрати, які рівномірно розподілені впродовж часу, що залишився до закінчення договорів. Сумарний резерв незаробленої премії (технічний резерв) дорівнює нетто-резерву плюс резерв майбутніх адміністративних витрат (який також пропорційний часу, що залишився до закінчення договорів):

$$RZ_t(t) = Z_t(1 - \frac{t}{T}) = Z_t\frac{T - t}{T}, \qquad (11.7)$$

де $Z_t = Z\left[1 + f_a/(1 - f)\right]$ – технічна премія; f_a – частка адміністративних витрат у брутто-премії.

Насправді всі договори, що укладаються, мають різні дати початку, терміни дії, страхову суму, страховий тариф. Проте оскільки збитки за будь-яким із договорів відразу ж розкладаються на всіх учасників страхування, то можна вважати, що, як і в страхуванні життя, премії кожного учасника формують індивідуальний резерв V, який убуває за кожним страховим випадком пропорційно довше цього учасника в загальній премії. Адміністративні витрати також розкладаються пропорційно страховим преміям. Формула для індивідуального резерву така:

$$V(t) = P_t k(t)$$
$$k(t) = \frac{T - t}{T}, \tag{11.8}$$

де коефіцієнт *k(t)* показує, яка частина технічної премії «ще не зароблена». Зароблена страхова премія

$$W(t) = P_t \frac{t}{T}. \tag{11.9}$$

Сумарний резерв незаробленої премії за всіма діючими на момент часу t договорами

$$RZ(t) = \sum_q V_q(t) = \sum_q P_{tq} \frac{T_q - (t - t_q)}{T_q}, \tag{11.10}$$

де t_q, T_q – момент початку і тривалість *q-го* договору страхування; P_{tq} – технічна премія за цим договором.

Для розрахунку РНП традиційно використовують чотири пропорційні методи. Вони залежать від угрупування дат початку договору, які можуть бути, наприклад, щоденними, щомісячними і т. д.

Метод 365 часток

Найточніший з вживаних методів. Тут дати початку договорів групуються за днями. Тривалість року береться такою, що дорівнює 365 дням.

Приклад 11.1

1-го серпня страхова компанія уклала договір страхування строком на І рік з оплатою страхової премії одноразовим внеском розміром 60 тис. грн. Частка страхової премії, призначеної для виплати комісійних за укладення договору, – 20 %, частка відрахувань на превентивні заходи – 10 %. Визначити резерв незаробленої премії: а) на кінець III кварталу; б) на кінець року.

Величина технічної премії: $60 \cdot (1 – 0{,}3) = 42$ тис. грн;

а) інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 жовтня) становить 61 день. Коефіцієнт

$k = (1 – 61/365) = 0{,}833$;

резерв незаробленої премії дорівнює

$$42 \cdot 10/12 = 34{,}981 \text{ тис. грн;}$$

б) інтервал часу від початку договору до звітної дати (1 січня) становить 153 дні. Коефіцієнт

$k = (1 – 153/365) = 0{,}581$;

резерв незаробленої премії 24,395 тис. грн.

Метод 24 часток

Аналогічний метод, що дає менш точний результат, оскільки прив’язує початок усіх ув’язнених упродовж певного місяця договорів до середини місяця. Одиниця вимірювання часу – півмісячний інтервал часу, тривалість року береться такою, що дорівнює 24 таким відрізкам. Наприклад, якщо річний договір страхування укладений у першому місяці року, то він уважається ув’язненим у середині місяця, тобто від початку року пройшла 24-та частка року. Якщо звітна дата – кінець року, то коефіцієнт $k = 1 – 1/24 = 23/24$. Якщо договір укладений в останній місяць року, то коефіцієнт $k = 1 – 23/24 = 1/24$.

Приклад 11.2

Розрахувати РНП методом 24 часток. Договір страхування вважається укладеним усередині серпня:

а) до звітної дати (1 жовтня) пройшло 3/24 частки року. Коефіцієнт $k = 1 - 3/24 = 21/24$;

РНП – $42 \cdot 21/24 = 36{,}75$ тис. грн;

б) до звітної дати (1 січня) пройшло 9/24 часток року.

Коефіцієнт $k = 1 - 9/24 = 15/24$;

РНП – $42 \cdot 15/24$ тис. грн.

Метод 8 часток

Аналогічний попереднім, але має на увазі, що договори згруповані за кварталами року і починаються у середині відповідного кварталу.

Цей метод є подальшим спрощенням і припускає, що всі договори починаються у середині року.

РНП для премії, сплачуваної в розстрочку

У разі, коли страхова премія сплачується в декілька прийомів, резерв незаробленої премії дорівнює різниці між технічною премією за договором, що надійшла до моменту звіту, і заробленою премією:

$$V(t) = P_t(t) - P_t \frac{t}{T}. \qquad (11.11)$$

Приклад 11.3

Умови ті самі, що і в прикладі 11.1, з тією лише різницею, що страхову премію вносять у два прийоми: перша половина премії – під час укладення договору, друга – три місяці після:

а) до моменту оцінювання резерву внесена половина технічної премії:

$P_t(t) = P_t / 2$;

$$V(t) = P_t / 2 - P_t \frac{t}{T} = 21 - 42 \cdot \frac{61}{365} = 13{,}981 \text{ тис. грн};$$

б) до моменту оцінювання резерву внесена вся технічна премія:

$$P_t(t) = P_t;$$

$$V(t) = P_t(1 - \frac{t}{T}) = 42(1 - \frac{153}{365}) = 24{,}395 \text{ тис. грн.}$$

Результати прикладів подані на рис. 11.2. На верхньому графіку показана динаміка надходження технічної премії: а) за одноразової сплати страхової премії; б) під час сплати першої половини премії на початку терміну, а другий – через три місяці. На середньому графіку подана наростаючим підсумком залежність розрахункового (нормативного) рівня виплат (включаючи адміністративні витрати) від часу. Оскільки виплати не залежать від способу сплати страхової премії, то крива одна і та сама для обох прикладів. На нижньому графіку, що є різницею між середнім і верхнім графіками, показана динаміка резерву незаробленої премії.

Визначимо зміну РНП за період, що починається у момент t_0 і закінчується в момент t (звітний період):

$$\delta V = V(t) - V(t_0) = \left[P_t(t) - P_t(t_0)\right] - W(t) - W(t_0), \qquad (11.12)$$

де перший доданок дає технічну премію, що надійшла за цей період, а друге – зароблену за цей час премію, яка складається із запрацьованої нетто-премії (нормативного рівня виплат) і заробленої адміністративної премії. Якщо договір діє до початку звітного періоду і закінчується пізніше за звітну дату *t*, то зароблена премія

$$W(t) - W(t_0) = P_t \frac{t - t_0}{T}, \qquad (11.13)$$

якщо договір діє не весь звітний період, то

$$W(t) - W(t_0) = P_t \frac{\tau}{T} = Pn\frac{\tau}{T} + Pbf_a \frac{\tau}{T}, \qquad (11.14)$$

де τ час дії договору в звітному періоді.

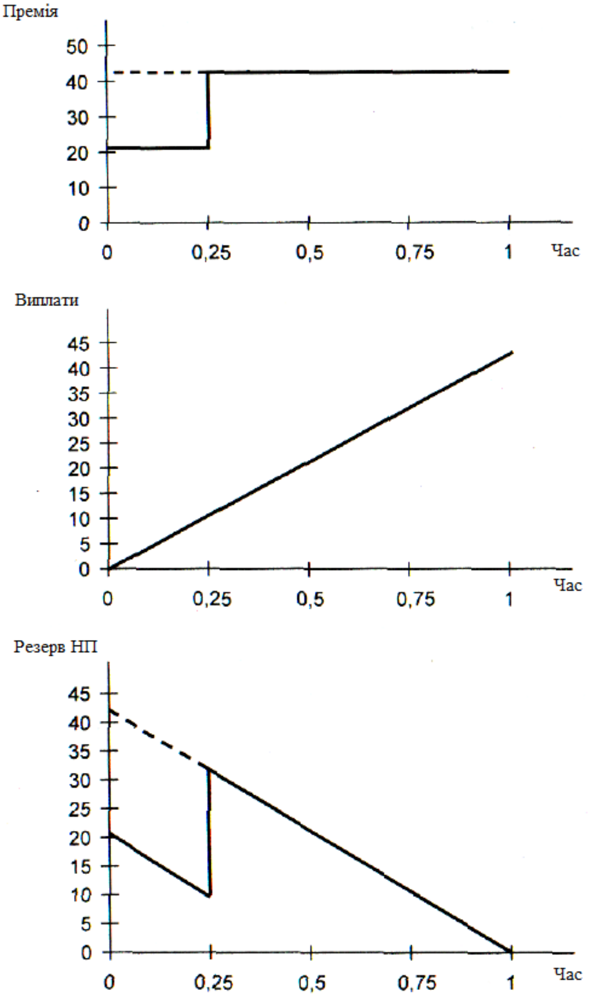

Рисунок 11.2 – Премія, номінальні виплати, резерв незаробленої премії; одночасна премія (штрихова лінія); перша половина премії вноситься на початку строку, друга – через 3 місяці (суцільна лінія)

Середній рівень резерву незаробленої премії

Оцінимо середній рівень резерву незаробленої премії впродовж терміну дії договору. Середнє значення резерву визначається за формулою

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left[P(t) - P_t\frac{t}{T}\right]dt. \qquad (11.15)$$

Повертаючись до прикладів 11.1 і 11.3, одержимо (при T = 1)

1) $\overline{V} = \int_0^1 P_t(1-t)dt = \frac{P_t}{2} = 21$ тис. грн;

2) $\overline{V} = \int_0^{1/4}(\frac{P_t}{2} - t)dt + \int_{1/4}^1 (P_t - t)dt = \frac{3P_t}{8} = 15.75$ тис. грн.

Звідси видно, що під час сплати страхової премії в два прийоми середній рівень страхового резерву нижчий, ніж за одноразової сплати страхової премії. Цей факт є віддзеркаленням загального результату: під час розстрочки страхової премії на декілька платежів середній рівень страхового резерву знижується, причому тим сильніше, чим більша кількість платежів. Як ілюстрацію розглянемо приклад, коли страхова премія сплачується в *n* однакових платежах, що вносяться в моменти часу *k/n,* де k = 1, 2, ..., *n – 1. Тоді середній рівень страхового резерву*

$$\overline{V} = \frac{1}{T}\left\{\int_0^{T/n}\frac{P_t}{n}dt + \int_{T/n}^{2T/n}\frac{2P_t}{n}dt + ... + \int_{T(n-1)/n}^{T} P_t dt - \int_0^T P_t\frac{t}{T}dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\frac{P_t T}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1) - P_t\frac{T}{2}\right\} = \frac{P_t}{2n} \quad . \qquad (11.16)$$

Результат очевидний: середній рівень страхового резерву обернено пропорційний кількості платежів страхової премії.

Резерв коливань збитковості

Нормативний рівень виплат

Резерв коливань збитковості (РКУ) призначений для згладжування коливань рівня виплат біля нормативного значення впродовж тарифного періоду. Водночас після закінчення тарифного періоду та його частина, яка сформувалася за рахунок відхилення рівня виплат від середнього значення, повинна виявитися такою, що дорівнює нулю, залишок же буде обумовлений накопиченням ризикової надбавки за цей термін.

Якщо фактичний рівень страхових виплат за звітний період перевищує нормативний рівень, то перевищення оплачується з РКУ, накопиченого за сприятливі періоди часу, коли рівень виплат був нижчим за нормативний. Якщо ж фактичні виплати нижчі за розрахунковий (нормативний) рівень, то надлишок страхової премії поповнює РКУ на випадок несприятливих майбутніх виплат.

Нормативний рівень виплат за звітний період дорівнює сумарній величині заробленої за цей період премії, яка визначається підсумовуванням індивідуально заробленої нетто-премії за всіма діючими договорами:

$$WZ(t) = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q}, \tag{11.17}$$

де *Pnq, Tq* – страхова нетто-премія і тривалість q-го договору страхування;

τ_q – тривалість дії q-го договору страхування в звітному періоді.

Сума відрахувань у резерв коливань збитковості за звітний період

$$Q\widehat{Z} = WZ - Z_f = \sum_q Pn_q \frac{\tau_q}{T_q} - Z_f , \qquad (11.18)$$

де Z_f – фактичний рівень виплат.

З'ясуємо, як розподіляється технічна премія, що надійшла в звітному періоді. Складаючи зміну РНП і суму відрахувань в РКУ (11.18), одержимо

$$P(t) - P(t_0) = Q\widehat{Z} + RZ(t) - RZ(t_0) + WZ\frac{f_a}{1-f} + Z_f . \qquad (11.19)$$

Технічна премія, що надійшла в звітному періоді, дорівнює сумі відрахувань у РКУ, величині зміни РНП, заробленій за період офісної премії та суми фактичних виплат.

Розрахунок збитковості за звітними даними

Разом із визначенням величини відрахувань у резерв коливань збитковості часто виникає задача визначення фактичної збитковості за звітними даними і порівняння її з розрахунковим значенням, використовуваним для розрахунку тарифної нетто-ставки. Для цього виділимо групу договорів з однаковим ризиком, причому терміни дії договорів можуть бути різними. Через рівномірність розподілу ризику впродовж року величину нетто-премії для всіх договорів можна подати у вигляді

$$Pn_q = TnS_qT_q , \qquad (11.20)$$

де Tn – річна тарифна нетто-ставка.

Нормативний рівень виплат за звітний період за цією групою договорів можна записати як добуток річної тарифної нетто-ставки на зважену сукупну страхову суму за всіма діючими в звітному періоді договорами страхування:

$$WZ = Tn\sum_{q} S_q \tau_q \, . \qquad (11.21)$$

Вага кожної страхової суми визначається часом дії відповідного договору у звітному періоді.

Якщо замість нормативного рівня виплат узяти фактичний рівень виплат в звітному періоді, то за аналогією з (11.21) можна визначити фактичну збитковість як

$$y_f = \frac{Z_f}{\sum_{q} S_q \tau_q} . \qquad (11.22)$$

Визначення фактичного рівня виплат – непросте завдання. Річ у тому, що може пройти якийсь час після збитку, що трапився, до того, як повною мірою стануть відомі вимоги, що підлягають оплаті. Важливо, щоб ці вимоги були віднесені до періоду, коли відбувся страховий випадок. Крім того, може пройти багато років, перш ніж стануть відомі остаточні суми щодо вимог виплат. Тому і розраховані значення збитковості необхідно уточнювати у міру того, як уточнюються суми збитків.

Оцінювання інвестиційного доходу

Дохід від інвестування страхових резервів – одне з основних джерел отримання прибутку страховою компанією. Тому оцінювання величини цього доходу є необхідною умовою планування фінансової діяльності страховика. Специфічна особливість розрахунку доходу від інвестування у тому, що величина страхового резерву, що служить базою для нарахування відсотків, змінюється в часі внаслідок нерівномірності надходження страхової премії та здійснення страхових виплат.

Оцінимо процентний дохід для простої моделі, вважаючи, що індивідуальний страховий фонд *V(t)* за кожним договором страхування лінійно зменшується від значення технічної премії, що надійшла, на початку договору до нуля під час його закінчення відповідно до (11.22). Якщо термін дії договору дорівнює *T*, а процентний дохід за інтервал часу *dt* дорівнює *iV(t)dt*, де i – річна процентна ставка, під яку інвестуються страхові резерви, то інвестиційний дохід за термін дії договору

$$I = i\int_0^T V(t)dt = iT\overline{V}, \tag{11.23}$$

де $\overline{V}$ – середній рівень резерву незаробленої премії впродовж терміну дії договору.

Значення формули (11.21) очевидне: страховик одержує в тимчасове користування на термін *T* засоби, середній розмір яких дорівнює $\overline{V}$, інвестує їх на цей термін під процентну ставку *i*, одержуючи дохід *I*. Якщо страхова премія сплачується одноразово, то відповідно до формули (11.23) (за *n* = 1) одержимо

$$I = iTP_t / 2. \tag{11.24}$$

Якщо ж страхова премія вноситься з розстрочення *n* однаковими платежами величиною P_t/n через проміжки часу T/n, то процентний дохід

$$I = \frac{iTP_t}{2n}. \qquad (11.25)$$

Значення формули (11.25) очевидне: чим більша кількість платежів страхової премії, тим менший процентний дохід. При *n* платежах страховик недоотримує порівняно з одноразовою сплатою премії процентний дохід розміром

$$\Delta I = iTP_t(1 - \frac{1}{n}) : 2. \qquad (11.26)$$

Страховик, що погоджується на сплату страхової премії у розстрочення, має право поставити питання про компенсацію недоотриманої частини процентного доходу. Логічно частину премії, не сплачену під час укладення договору, розглядати як кредит страховика страхувальнику, виплачуваний з розстрочення з відсотками. Водночас відсотки нараховуються з поточної величини заборгованості, тобто з суми несплачених внесків. Так, наприклад, якщо страхова премія сплачується двома однаковими платежами, причому другий внесок – через період *T/2,* то впродовж цього часу величина заборгованості становить $P_t/2$, відсотки, що дорівнюють $iTP_t/4$, процентний дохід від інвестування страхових резервів відповідно до (11.26) становить таку саму величину; внаслідок у сумі вийде такий самий процентний дохід (11.26), як за одноразової сплати страхової премії. Аналогічно під час сплати страхової премії *n* однаковими платежами через інтервали часу *T/n* заборгованість за *k*-й інтервал часу становить $D_k = P_t(1 - \frac{k}{n})$, відсотки – iD_k, сума відсотків за термін дії договору

$$I = iP_t \frac{T}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) = \frac{iP_t T}{2} (1 - \frac{1}{n}) . \qquad (11.27)$$

У класичному варіанті погашення заборгованості відсотки виплачуються разом із частиною боргу, що погашається, тобто разом з черговими внесками, причому розміром, пропорційним величині поточної заборгованості. Для розрахунків зручніше, щоб процентні платежі становили постійну добавку до кожного внеску. Величина цієї добавки дорівнює:

$$\Delta = \frac{I}{n} = \frac{iP_t T}{2n^2} (n - 1). \qquad (11.28)$$

ТЕМА 10
МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ РИЗИКОМ ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ

ЛЕКЦІЯ 12
Моделі управління ризиком за допомогою перестрахування

Сутність, види та функції перестрахування. Перестрахування як метод управління ризиком. Диверсифікація ризиків за допомогою перестрахування.

12.1 Сутність, види та функції перестрахування

Вважають, що перший договір перестрахування було укладено в Генуї в 370-му році. Предметом договору були товари, які перевозились на морському судні з Генуї до Брюгге. Під дію договору підпала частина цього рейсу: від Каделсса до Брюгге.

Систематичне використання перестрахування почалося з кінця XVI століття, коли страховики – купці розподіляли між собою ризики в певних частках. Проте початок формування сучасного ринку перестрахування відносять до середини XIX століття, коли процес економічного розвитку і зростання промисловості сприяли появі більш великих та складних ризиків, реалізація яких могла призвести до катастрофічних наслідків. З'являються спеціалізовані перестрахувальні компанії в Німеччині, Росії.

В Україні перші такі компанії з'явилися на початку XX століття (1910–1915 рр.) – земські страхові компанії – перестрахування вогневих ризиків.

Можна сказати, що *перестрахування* з'явилося як спосіб підтримки страховиків під час збільшення обсягів і використання нових форм страхування. Необхідність такої підтримки полягає в тому, що індивідуальні можливості страховика зі страхування, а також гарантії повної та своєчасної виплати за великим одиночним ризиком досить обмежені.

Система перестрахування, як і система прямого страхування, побудована на розподілі ризику між декількома учасниками. Це дозволяє прямому страховику, з одного боку, цілком виконати прийняті на себе страхові зобов'язання перед страхувальником, а з іншого, полегшити навантаження за виплатою у будь-якому страховому випадку, зберігаючи при цьому свою фінансову надійність.

Найчастіше застосовується таке визначення перестрахування: «*Перестрахування* – це страхування ризику, взятого на себе страховиком».

У перестрахуванні застосовується своя термінологія та відповідні умови страхування. Так, страховик, який перестраховує прийняті на себе ризики, стає перестрахувальником, тобто *цедентом.* Хоча при цьому перед своїм клієнтом залишається відповідальним у повному обсязі. Процес передачі ризику або його частини називається *цидуванням* ризику або *цесією.* Процес подальшої передачі цього ризику наступному перестраховику називається *ретроцесією,* сторону, яка приймає такий ризик *ретроцесіонарієм.*

Під час здійснення перестрахування кожна страхова компанія виходить з того, що цей процес повинен бути економічно ефективним під час досягнення поставленої цілі, а також повинен враховувати вартість перестрахування.

Вартість перестрахування містить:

– частину страхової премії, що повинна передатися перестраховику;

– витрати компанії на ведення справи у зв'язку з передачею ризиків.

У самому процесі перестрахування закладене певне протиріччя. З одного боку, перестраховик фінансово підтримуючи страхову компанію, сприяє збалансуванню її страхового портфелю, розширенню її страхової діяльності, з іншого, перестрахування пов'язане з передачею доволі значної частини страхової премії, а отже, є можливість погіршення підсумкових показників діяльності страхової компанії.

Виходячи із зазначеного, правильне визначення розміру перестрахування має важливе значення для кожної страхової компанії. У зв'язку з цим, визначальним є *власне утримання цедента,* яке являє собою економічно обґрунтований рівень суми, в межах якої страхова компанія утримує на своїй відповідальності певну частку ризиків, які страхує, та передаючи в перестрахування суми, що перевищують цей рівень. Існує багато теорій та практичних рекомендацій зі встановлення лімітів власного утримання. Проте вони не враховують специфіки кожної окремої страхової компанії. В рішенні зазначеної проблеми важливим є врахування багатьох факторів (середньої збитковості за ризикам, що страхуються, обсяг премії, середня доходність чи прибутковість операцій за відповідним видом страхування, територіальний розподіл застрахованих об'єктів, величина витрат на ведення страхової справи) та професійний рівень андерайтерів.

Страховик зобов'язаний передавати у перестрахування частину ризику (своїх зобов'язань перед страхувальником), якщо не буде виконуватися така умова:

$$S = (A - Y) \cdot 10\,\% : 100\,\%, \tag{12.1}$$

де S – сума, в розмірі якої страховик має право укладати договори за заданим видом страхування; A – величина активів страхувальника; Y – розмір сплаченого статутного капіталу; 10 % – нормальне процентне відношення страхових надходжень до сплаченого статутного капіталу за даним видом страхування.

Теоретичною основою визначення ступеня ймовірності дефіцитності коштів є «коефіцієнт професора Ф. В. Коньшина»:

$$K = \sqrt{\frac{1-\bar{q}}{n \cdot \bar{q}}}, \tag{12.2}$$

де *K* – коефіцієнт; $\bar{q}$ – середня тарифна ставка за всім страховим портфелем; n – кількість застрахованих об’єктів.

Чим менше значення *K*, тим нижча ймовірність дефіцитності коштів і тим вища фінансова стійкість страхової компанії.

Для оцінювання фінансової стійкості страхового фонду як відношення доходів до витрат за тарифний період, використовується формула

$$K_{фу} = \frac{Д + C_{зф}}{P}, \tag{12.3}$$

де $K_{фу}$ – коефіцієнт фінансової стійкості; *Д* – сума доходів страхувальника за тарифний період; Р – сума витрат за тарифний період; $C_{зф}$ – сума коштів у запасних фондах.

Нормальним станом фінансової стійкості страхової організації варто вважати, якщо $K_{фу}$ більше 1, тобто коли сума доходів з урахуванням залишку коштів у запасних фондах перевищує усі витрати страхувальника.

Передавання ризиків у перестрахування здійснюється постійно або одноразово.

За методом передавання ризиків у перестрахуванні перестрхувальні операції поділяють на три види:

– факультативні;

– облігаторні (договірні);

– факультативно-облігаторні.

Факультативні перестрахувальні операції характеризуються певного свободою сторін договору перестрахування, існує можливість регулювання страховиком розміру власного утримання. Попередньою умовою для укладання договору факультативного перестрахування є сліп, який містить певну інформацію про наміри сторін перестрахувальних відносин.

Облігаторне страхування передбачає обов'язкову передачу в перестрахування раніше узгодженої частини ризику за всіма покриттями, визначаються межі відповідальності, перестрахувальна комісія, обмеження щодо покриття. Зазначений метод проведення перестрахування мас свої переваги:

– досягнення рівномірності розподілу ризиків;

– автоматичність прийняття ризиків;

– розвиток довгострокових взаємовідносин між сторонами;

– збільшення обсягів страхових операцій;

– гарантії підтримки перестраховика.

Факультативно-облігаторне перестрахування поєднує риси факультативного та облігаторного, використовується в особливо великих, небезпечних ризиках, з можливістю кумуляції збитків та можливими катастрофічними наслідками.

Перерозподіл ризику у перестрахувальних операціях відбувається за двома *формами:*

– пропорційною;

– непропорційною.

Пропорційна форма – історично перша форма та до кінця XIX ст. єдина загальна форма перерозподілу ризиків. Сторони частково беруть участь у розподілі відповідальності. Інтереси цедента й перестраховика в цілому збігаються. Застосовуються під час обов’язкового страхування відповідальності, під час автокаско.

Здійснюється за такими видами договорів перестрахування:

– *квотний* – коли цедент зобов’язується передати перестраховику частку у всіх ризиках цього виду, а перестраховик зобов’язується їх прийняти;
– *ексцедента сума* – використовується, коли застраховані ризики різні за страховими сумами; цедент несе відповідальність за всіма ризиками у розмірі страхової суми, яка менша чи дорівнює власному утриманню, а перестраховик – за всіма ризиками, де страхова сума перевищує розмір власного утримання;
– *квотно-ексцендентний* – змішаного типу, використовується дуже рідко, поєднує риси двох попередньо зазначених договорів.

Непропорційне перестрахування широко стало застосовуватися після Другої світової війни. Інтереси сторін можуть набувати суперечливого характеру. Найчастіше використовується в договорах страхування цивільної відповідальності власників транспортних засобів за збиток, спричинений третім особам у результаті ДТП. Ця форма страхування застосовується також і там, де немає верхньої межі відповідальності страховика. Здійснюється за такими *видами договорів:*

– ексцедента збитку – застосовується тоді, коли страховик намагається не вирівняти окремі ризики цього виду страхування, а спрямовує свою діяльність безпосередньо на забезпечення фінансової рівноваги страхових операцій;

– ексцедента збитковості – перестрахування стосується всього страхового портфеля, має на меті захистити фінансові інтереси страховика перед наслідками надто великої збитковості.

Обслуговування договорів непропорційного перестрахування досить просте, не вимагає особливих витрат.

Залежно від *ролі,* яку відіграє цедент і перестраховик в укладеному між ними договорі, перестрахування поділяють на:

– активне – означає передачу ризику;

– пасивне – означає приймання ризику.

Отже, перестрахування – це вторинний розподіл ризику, що відбувається у певній формі та за відповідними методами.

Перестрахування як метод управління ризиком

Нехай клієнт страхує свій ризик у певній компанії. Позначимо через θ – відносну страхову надбавку, пов'язану із страховою компанією. Нехай θ^* – відносна страхова надбавка, пов'язана з договором перестрахування.

Розглянемо перший тип договору: пропорційне перестрахування.

Введемо величину $0 \le \alpha \le 1$.

Нехай ζ – позов клієнта до передавальної компанії. Передавальна компанія частину суми позову $(\alpha\zeta)$ оплачує сама, а іншу частину $((1 - \alpha)\zeta)$ оплачує перестрахувальна компанія. Нехай α – це граничне значення суми утримання.

Розглянемо ситуацію до перестрахування.

Сумарний позов $S = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$, ймовірність розорення $P(S > U)$. Тоді капітал компанії

$$U = (1+\theta)p_0 = (1+\theta)E[S]. \tag{12.4}$$

Розглянемо тепер ситуацію після перестрахування з позиції передавальної компанії.

Сумарний позов дорівнює αS, а капітал:

$$U = (1+\theta)E[S] - (1+\theta^*)(1-\alpha)E[S] = (1+\theta - \\ - 1 - \theta^* + \alpha + \alpha\theta^*)E[S] = \\ = (\theta - \theta^* + \alpha(1+\theta^*))E[S]. \tag{12.5}$$

Ймовірність розорення дорівнює

$$P(\alpha S > (\theta - \theta^* + \alpha(1+\theta^*))E[S]) = P(S > (1 + \\ + \theta^* + (\theta - \theta^*)/\alpha)E[S]). \tag{12.6}$$

Перестрахування означає зменшити цю ймовірність, тобто потрібно знатйти α таке, за якого вираз $(1+\theta^* + (\theta - \theta^*)/\alpha)$ набуде максимального значення.

Розглянемо випадки:

– якщо $\theta - \theta^* > 0$, то $\alpha \to 0$ ($\alpha = 0$ граничний випадок) і весь позов передається перестрахувальній компанії;

– якщо $\theta - \theta^* < 0$, тоді $\alpha \to 1$ ($\alpha = 1$ граничний випадок) весь позов залишається в передавальній компанії;

– якщо $\theta = \theta^*$, тоді $0 \le \alpha \le 1$ і ймовірність розорення не залежить від α.

Розглянемо тепер другий тип договору: перестрахування перевищення втрат.

Введемо величини: r – граничне значення суми утримання; ζ – індивідуальний позов.

Якщо $\zeta \le r$, то весь позов залишається в передавальній компанії (тобто весь позов задовольняється без перестрахування).

Якщо $\zeta > r$, то передавальна компанія задовольняє позов на r одиниць, а перестрахувальна компанія – на $(\zeta - r)$ одиниць.

Знайдемо ймовірність розорення у цьому разі.

Позов $\zeta^{(r)}$ передавальній компанії від клієнта становить $\zeta^{(r)} = \min\{\zeta; r\}$.

Сумарний позов $S^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i^{(r)}$.

Індивідуальний позов перестрахувальній компанії становить $\zeta - \zeta^{(r)}$, водночас $\zeta - \zeta^{(r)} = \max\{0; \zeta - r\}$.

Капітал перестрахувальної компанії становить

$$U = N(1+\theta)E[\zeta] - N(1+\theta^*)E[\zeta - \zeta^{(r)}] = N((\theta - \\ -\theta^*)E[\zeta] + (1+\theta^*)E[\zeta^{(r)}]). \tag{12.7}$$

Ймовірність розорення, використовуючи наближення Гаусса, дорівнює:

$$(S^{(r)} > U) = P(S^{(r)} > N((\theta - \\ \theta^*)E[\zeta] + (1+\theta^*)E[\zeta^{(r)}])) = \\ = P\left(\frac{S^{(r)} - E[S^{(r)}]}{\sqrt{Var[S^{(r)}]}} > \frac{U - E[S^{(r)}]}{\sqrt{Var[S^{(r)}]}}\right) = \gamma = \\ = 1 - \Phi\left(\frac{U - NE[\zeta^{(r)}]}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}}\right), \tag{12.8}$$

де $E[S^{(r)}] = NE[\zeta^{(r)}]$, $Var[S^{(r)}] = NVar[\zeta^{(r)}]$.

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати значення ймовірності розорення компанії, тому вираз, що є аргументом функції Φ повинен набувати максимального значення.

Введемо функцію, для якої потрібно знайти максимум:

$$\varphi(r) = \frac{U - NE[\zeta^{(r)}]}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}} = \frac{N(\vartheta - \vartheta^*)(E[\zeta] + \vartheta^* E[\zeta^{(r)}])}{\sqrt{NVar[\zeta^{(r)}]}}. \quad (12.9)$$

Для того щоб мінімізувати ймовірність розорення, потрібно знайти *r* за умови максимуму функції $\varphi(r) \to max$, $0 < r < +\infty$. За цієї умови знайдемо необхідне граничне значення суми утримання.

Якщо виявиться, що максимум досягається в нулі, то весь позов потрібно передати перестрахувальній компанії, якщо ж максимум досягається на нескінченності, тоді весь позов залишається в передавальній компанії.

12.2 Диверсифікація ризиків за допомогою перестрахування

На діяльність будь-якого суб’єкта господарювання впливають певні ризики. Ризик виникає тоді, коли рішення вибирається з декількох можливих варіантів і немає впевненості, що воно найефективніше. Щоб знизити рівень ризиків та компенсувати заподіяний збиток, використовують такі методи управління ризиками: уникнення ризиків, мінімізація ризиків, лімітування ризиків за операціями або диверсифікація ризиків.

Диверсифікація ризиків дозволяє знизити рівень концентрації ризиків: диверсифікація видів діяльності передбачає використання альтернативних можливостей отримання доходу і прибутку від різноманітних фінансових операцій.

Одним з основних принципів роботи страхової компанії є диверсифікація ризиків, яка передбачає те, що страховик не повинен включати у страховий портфель ризики лише одного виду, або здійснювати перестрахування ризиків лише в одній страховій компанії.

Припустимо, W_0 – загальний рівень ризику, взятого на страхування, який визначається рівністю

$$W_0 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_l p_l, \quad (12.10)$$

де l – вид ризику; x_l – кількість договорів перестрахування l-го виду; $p_k, k = \overline{1,l}$ – рівень ризику k-го виду.

Якщо поділити ліву та праву частини рівності (12.10) на W_0, одержимо $1 = \frac{x_1 p_1}{W_0} + \frac{x_2 p_2}{W_0} + ... + \frac{x_l p_l}{W_0}$. Позначимо частку договорів перестрахування k-го виду $\frac{x_k p_k}{W_0}$ через $W_k, (k = \overline{1,l})$. Необхідно знайти $W_k, (k = \overline{1,l})$, яке мінімізує ризик портфеля $\sigma^2_{портф}$ страхової компанії за умови, що $\sum_{k=1}^{l} W_k = 1$ та існує середнє значення дохідності $MR_{портф}$.

Для визначення стохастичних процентних ставок звернемося до моделі Васічека, в якій короткострокова процентна ставка визначається рівнянням

$$dr(t) = (a - br(t)dt + \sigma dW(t), \quad (12.11)$$

де $[t,T]$ – інтервал часу; $r(t) = r$ – короткострокова процента ставка; $a, a > 0$ – довгострокове середнє значення спот-ставки; $b, b > 0$ – параметр дрейфа (характеризує швидкість повернення процесу до довгострокового середнього значення); σ – параметр дисперсії; $dW(t)$ – вектор прирощення q-мірного стандартного вінерівського процесу. Вінерівський процес – приклад марківського процесу, тобто процесу, значення якого в даний момент t повністю визначає його майбутню поведінку незалежно від минулого.

Нехай рівень ризику описується моделлю вигляду

$$P(t,T) = \exp\{\alpha(t,T) - r(t)\beta(t,T)\}, t \in [t,T], \tag{12.12}$$

де функції $\alpha\,(t,T)$, $\beta\,(t,T)$ – стохастичні процентні ставки за договорами перестрахування, що задаються моделлю Васічека, $\alpha\,(t,T)$, $\beta\,(t,T)$ визначаються формулами (12.13) та (12.14):

$$\alpha(t,T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)\left(\beta(t,T) - (T-t)\right) - \frac{\sigma^2\beta^2(t,T)}{4a} \tag{12.13}$$

та

$$\beta(t,T) = \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}). \tag{12.14}$$

Середнє значення процентної ставки визначається формулою (12.15):

$$Mr(t) = \exp(-bt)\left[r(0) + \frac{a}{b}(\exp(bt) - 1)\right], \tag{12.15}$$

а дисперсія визначається формулою (12.16):

$$Dr(t) = \exp(-2bt)c^2 D(\int_0^t \exp(bt)W(t)) =$$
$$= \exp(-2bt)c^2 \frac{1}{2b}(r^{2bt} - 1). \tag{12.16}$$

Дохідність договору перестрахування визначається формулою (12.17):

$$i(t) = \frac{g(t)N + P(t) - P_0}{P_0}, \tag{12.17}$$

де $g(t)$ – норма річного доходу від перестрахування ризиків; P_0 – початковий рівень ризику, переданого у перестрахування; N – страхова сума за переданим перестрахуванням договором.

Після перетворень отримаємо дохідність договору перестрахування (12.18):

$$i(t) = \frac{g(t)N}{P_0} + \frac{1}{P_0}\exp(\alpha - \beta r(t)) - 1, \forall t \in [0, T]. \tag{12.18}$$

Середня дохідність договору перестрахування буде дорівнювати формулі (12.19):

$$Mi = \frac{gN}{P_0} + \frac{e^{\alpha}}{P_0} Me^{-\beta r(t)} - 1 = \frac{gN}{P_0} + \frac{e^{\alpha}}{P_0} Me^{-\beta\left(\frac{r-Mr}{\sqrt{Dr}}\sqrt{Dr}+Mr\right)} -$$
$$-1 = \frac{gN}{P_0} + \frac{e^{\alpha-\beta Mr+\frac{\beta^2 Dr}{2}}}{P_0}. \tag{12.19}$$

А середня дохідність портфеля буде дорівнювати формулі (12.20):

$$MR_{портф} = \sum_{j=1}^{l} W_j Mi_j \,, \tag{12.20}$$

де i_j – дохідність договору перестрахування j-го вигляду, а очікуваний ризик:

$$\sigma^2_{портф} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{m=1}^{l} W_k W_m \operatorname{cov}(i_k; i_m)\,. \tag{12.21}$$

Коваріація випадкових величин i_k, i_m розраховується за формулою (12.22):

$$\operatorname{cov}(i_k; i_m) = M(i_k; i_m) - Mi_k Mi_m\,. \tag{12.22}$$

Задача вибору оптимальної структури портфеля, тобто вибору оптимального вектора $(W_1^*; W_2^*; \ldots; W_l^*)$, зводиться до находження значень $W_j\,(j = \overline{1, l})$, що мінімізують ризик портфеля, якщо $\sum_{k=1}^{l} W_k = 1$.

Рішення цієї задачі можна знайти методом множників Лагранжа. Перепишемо середню дохідність та ризик у матричній формі:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{портф} &= W^T \cdot v \cdot W; \\ MR_{портф} &= m^T \cdot W, \end{aligned} \tag{12.23}$$

де W – стовбчик невідомих часток $W_j\,(j = \overline{1, l}), v = \operatorname{cov}(i_k; i_m)$ – матриця коваріацій,

m – стовбчик, що складається з $M(i_j), (j = \overline{1, l})$.

Функція Лагранжа має вигляд

$$L = W^T V W + \mu_0 (I^T W - 1) + \mu_1 (m^T W - MR), \qquad (12.24)$$

де I – одинична матриця-стовпець.

Оптимальний набір часток $(W_1^*; W_2^*; ...; W_l^*)$ визначається за формулою (12.25):

$$W^* = V^{-1} \frac{R(I(I^T V^{-1} m) - m(I^T V^{-1} I))}{(I^T V^{-1} m)^2 - (I^T V^{-1} I)(m^T V^{-1} m)} + \\ + \frac{m(I^T V^{-1} m) - I(m^T V^{-1} m)}{(I^T V^{-1} m)^2 - (I^T V^{-1} I)(m^T V^{-1} m)}. \qquad (12.25)$$

Таким чином, страховику необхідно укладати $X_k = \frac{W_k^* W_0}{P_k}$ договорів перестрахування k-го вигляду $(k = \overline{1, l})$.

ТЕМА 11
МОДЕЛІ РІВНОВАГИ СТРАХОВОГО РИНКУ

ЛЕКЦІЯ 13
Моделі рівноваги учасників страхового ринку

Аналіз рівноваги особи, яка страхується: математична модель клієнта; рівновага клієнта страхової компанії. Аналіз тактики страхової компанії: прибуток страхової компанії та його корисність; нейтральність до ризику страхової компанії; умови прибутковості страхової компанії.

Аналіз рівноваги особи, яка страхується.
Математична модель клієнта

Нагадаємо запроваджені позначення: А – грошове оцінювання об’єкта страхування; π – імовірність страхового випадку; r – питомий страховий внесок (плата страховій компанії за кожну одиницю застрахованого майна); q – питома страхова винагорода (відшкодування страховою компанією в розрахунку на кожну одиницю застрахованого активу).

Додатково позначимо через x – величину страхованого активу (її обирає клієнт страхової компанії); $u(\cdot)$ – функцію корисності клієнта, визначену на залишку активу після страхового випадку.

Якщо трапиться страховий випадок, то страхова компанія відшкодовує клієнтові величину qx. Для спрощення аналізу вважатимемо також, що компанія повертає клієнтові і його страховий платіж. Отже, якщо клієнт застрахував x одиниць активу і настав страховий випадок, то у клієнта залишається qx. За решту компанія відповідальності не несе. Якщо ж страхового випадку не буде, то залишок активу становитиме величину $A - qx$.

Корисність у разі страхового випадку становитиме величину $u(qx)$, у протилежному разі – $u(A - qx)$. Сподівана корисність за обсягом страхування x дорівнюватиме величині $U(x) = \pi u(qx) + (1-\pi)u(A-rx)$. Поведінка клієнта описуватиметься моделлю

$$U(x) = \pi u(qx) + (1-\pi)u(A-rx) \to \max,\ 0 \le x \le A. \qquad (13.1)$$

Рівновага клієнта страхової компанії

Дотримуватимемося припущення про несхильність клієнта страхової компанії до ризику, тобто про увігнутість його функції корисності. Звідси, сподівана корисність також буде увігнутою функцією (це ілюструє рис. 13.1),

Можливі три випадки:

– клієнт не страхується взагалі;

– клієнт страхує об’єкт страхування, але не повністю;

– клієнт страхує ввесь обсяг об’єкта страхування.

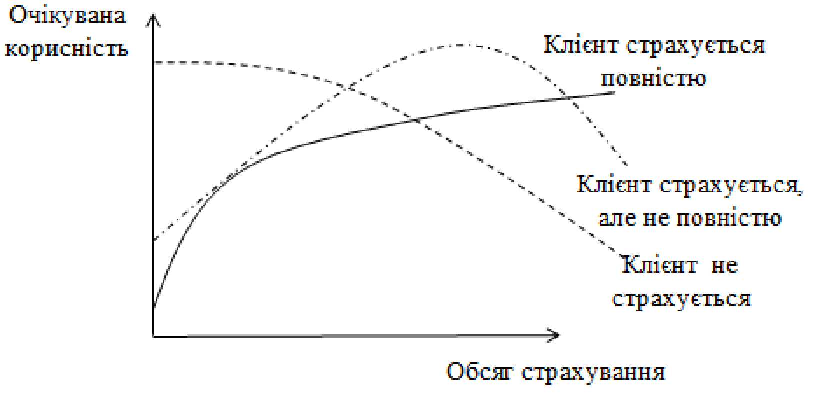

Рисунок 13.1 – Три випадки поведінки клієнта страхової компанії

Використовуючи похідну функції сподіваної корисності (1), усі три випадки можна повністю описати:

– якщо *u'(A) >0*, то клієнт страхується повністю;

– якщо u'(0) < 0, то клієнт не страхується взагалі;

– якщо *u'(0) > 0, а u'(A) < 0,* то обсяг рівноваги *x** знаходиться з рівняння *u'(x*)* = 0.

Припускаючи диференційованість функції корисності й здобувши похідну $u'(x) = \pi u'(qx)q - (1-\pi)u'(A-rx)r$, можна повністю кваліфікувати рівновагу клієнта страхової компанії.

Умови рівноваги:

1) якщо $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} > \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$, то клієнт страхується повністю;

2) якщо $\dfrac{u'(0)}{u'(A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q}$, то клієнту страхуватися взагалі не вигідно;

3) якщо ж $\dfrac{u'(qA)}{u'((1-r)A)} < \dfrac{1-\pi}{\pi}\dfrac{r}{q} < \dfrac{u'(0)}{u'(A)}$, то клієнт страхує частку, але не весь об'єкт страхування, причому обсяг страхування, що максимізує його сподівану корисність, знаходиться з рівняння (рівність похідної сподіваної корисності дорівнює нулю):

$$\pi u'(qx)q = (1-\pi)u'(A-rx)r. \tag{13.2}$$

Рівняння (13.2) допускає таке його читання: у стані рівноваги гранична корисність страхування в разі страхового випадку, перемножена на його ймовірність, збігається з граничною шкодою від страхування за відсутності страхового випадку, перемноженою на його ймовірність.

Отже, клієнт балансує величинами граничної шкоди і граничної корисності для визначення найпривабливішого для себе обсягу страхування, враховуючи при цьому ймовірність страхового випадку.

Аналогічно можна інтерпретувати і умови 1) та 2).

Умови рівноваги клієнта страхової компанії дають змогу дослідити реакцію клієнта на зміну параметрів страхування (в додаток до чисельного аналізу). Звернемося, наприклад, до умови 2). З неї випливає, що під час зростання ймовірності страхового випадку π нерівність умови може порушитися, що свідчитиме про ймовірність страхування.

Аналіз тактики страхової компанії.

Прибуток страхової компанії та його корисність

Прибуток страхової компанії – це різниця між страховими внесками клієнтів і їхніми винагородами в разі настання страхових випадків. Звідси, прибуток страхової компанії є випадковою величиною, оскільки кожен клієнт може як збільшувати, так і зменшувати прибуток страхової компанії залежно від того, трапився чи ні страховий випадок.

Позначимо через s індекс клієнта страхової компанії, їхню кількість позначимо через N. Запровадимо спеціальну випадкову величину I_s – *індекс страхового випадку клієнта s. I_s* дорівнює 1, якщо настає страховий випадок для клієнта s, і 0 у протилежному разі. Тоді прибуток страхової компанії становитиме величину:

$$\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q), \tag{13.3}$$

де $x_s(r,q)$ – обсяг страхування клієнта s за питомих страхового внеску r та страхової винагороди q.

Виходитимемо з того, що страхова компанія прагне до максимізації сподіваної корисності прибутку й обирає параметри страхування *r, q* саме з цих міркувань. Якщо через *v* позначити функцію корисності прибутку страхової компанії, то сподівана корисність прибутку дорівнюватиме

$$V(r,q) = Mv(\sum_{s=1}^{N}\left[rI_s-(q-r)(1-I_s)\right]x_s(r,q)). \qquad (13.4)$$

Метою страхової компанії є підбір параметрів страхування таким чином, щоб максимізувати сподівану корисність прибутку.

Ця задача – досить складна. Можна сказати напевно лише одне: для знаходження параметрів страхування з боку страхової фірми потрібна «золота середина». Перший імпульс, який може виникнути в недосвідченого менеджера страхової компанії – зменшення страхової винагороди *q* та збільшення страхового внеску *r*. Цей метод може спричинити небезпеку залишитися без клієнтів узагалі й збанкрутувати внаслідок надмірної жадібності. *Страховій компанії не може бути добре, якщо буде погано її клієнтам.*

Водночас завелика страхова винагорода та замалий страховий внесок можуть призвести також до банкрутства компанії, оскільки сумарна страхова винагорода може перевищити сумарний страховий внесок. Потрібен розрахунок.

Нейтральність до ризику страхової компанії

Основне припущення, якого ми дотримуватимемося, – це припущення про *нейтральність до ризику страхової компанії.* Для забезпечення своєї нейтральності до ризику компанія повинна мати солідний капітал. Справді, маючи в кишені 10,000,000 грн можна взяти участь у лотереї з виграшем та програшем 10,000 з імовірностями 0,5. Маючи всього 10,000 майже ніхто не ризикуватиме всім статком, і для нього «справедлива лотерея» з нульовим виграшем буде невигідною, оскільки сподівання отримати додатково не компенсується жахом залишитися без нічого.

За умови нейтральності до ризику функція корисності компанії буде лінійною, а сподівана корисність просто збігатиметься з математичним сподіванням прибутку страхової компанії. У страховому випадку компанія повертає клієнтові на кожну одиницю страхованого об’єкта страхову винагороду й страховий платіж, тобто $r + q$, а за відсутності – отримає від клієнта страховий платіж. Надалі будемо вважати, що страхова компанія має монопольну владу, тобто вона надає унікальні послуги, або до інших компаній незручно звертатись. Отже, сподіване значення прибутку в розрахунку на одного клієнта становитиме величину: $\left[\pi_s(-r-q)+(1-\pi_s)r\right]x_s(r,q)$. Якщо припускати, що всі клієнти однакові, а компанія відшкодовує клієнтові всі збитки у разі страхового випадку (q = 1), то сподіване значення прибутку компанії може бути записане в такому вигляді:

$$N((1-\pi)r-\pi(1+r))x(r)\,. \tag{13.5}$$

Задача знаходження максимуму сподіваного прибутку (13.5) наочно демонструє дилему, що виникає перед страховою компанією: (13.5) є добутком співмножників, один з яких $((1-\pi)r-\pi(1+r))$ збільшується за жорсткіших правил страхування (більший питомий страховий внесок), інший $x(r)$ – зменшується.

Умови прибутковості страхової компанії

Випишемо умови, за яких страхова компанія в середньому буде прибутковою. Розглянемо випадок, коли страхова компанія повністю відшкодовує збитки клієнта, тобто $q = 1$. Сподіваний прибуток компанії в розрахунку на одного клієнта у цьому разі становитиме величину:

$$((1-\pi)r-\pi)x(r)\,. \tag{13.6}$$

Як і раніше дотримуватимемося припущення, що всі клієнти страхової компанії однакові. Отже, за певних умов страхування вони всі гуртом страхуватимуться в однакових обсягах або взагалі ухилятимуться від страхування. Це дає змогу розглядати питання про прибутковість страхової компанії з погляду взаємовідносин компанії та одного клієнта.

З (13.6) випливає, що страхова компанія буде прибутковою (в середньому), якщо одночасно виконуються дві умови:

1) клієнт страхує хоча б частку свого активу, тобто

$$x(r)>0; \tag{13.7}$$

2) сподіваний страховий платіж клієнта компанії перевищує сподівану страхову компенсацію компанії клієнтові, тобто

$$(1-\pi)r>\pi\,. \tag{13.8}$$

Поєднуючи (13.7), (13.8) та умови рівноваги, можна побачити, що за умови повного відшкодування всіх збитків клієнта внаслідок страхового випадку страхова фірма буде прибутковою, якщо

$$1 < \frac{1-\pi}{\pi} r < \frac{u'(0)}{u'(A)}. \qquad (13.9)$$

Проведений нами аналіз базувався на істотних спрощеннях, зокрема, на припущенні, що всі клієнти однакові. Зберігаючи основну схему розрахунків, її можна застосувати для більш загального випадку, зокрема, коли є кілька груп клієнтів із різним ставленням до ризику.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузьменко О. В. Актуарні розрахунки : навчальний посібник / О. В. Кузьменко, О. В. Козьменко. – Суми : Університетська книга, 2011. – 224 с.

2. Базилевич В. Д. Страхування : підручник / ред. В. Д. Базилевич. – Київ : Знання, 2008. – 1019 с.

3. Ковтун І. О. Основи актуарних розрахунків : навчальний посібник / І. О. Ковтун, М. Г. Денисенко, В. Г. Кабанов. – Київ : Професіонал, 2008. – 480 с.

Навчальне видання

Кузьменко Ольга Віталіївна,
Бойко Антон Олександрович,
Койбічук Віталія Василівна,
Боженко Вікторія Володимирівна

АКТУАРНІ РОЗРАХУНКИ

Конспект лекцій
для студентів спеціальності 051 *«Економіка»*
освітньої програми «Економічна кібернетика»
освітнього ступеня «магістр»
денної форми навчання

Відповідальний за випуск О. В. Кузьменко
Редактори: Н. М. Мажуга, О. В. Федяй
Комп’ютерне верстання О. О. Захаркіна

Підписано до друку 11.10.2019, поз. 115.
Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 13,25. Обл.-вид. арк. 12,65. Тираж 5 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Сумський державний університет,
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.