

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет

А. В. Загорулько, Д. О. Кайота

# **Обчислювальна гідроаеромеханіка**

Конспект лекцій

Суми  
Сумський державний університет  
2019

Міністерство освіти і науки України  
Сумський державний університет

# Обчислювальна гідроаеромеханіка

Конспект лекцій

для студентів спеціальності  
*113 «Прикладна механіка»*  
денної форми навчання

Затверджено  
на засіданні кафедри  
загальної механіки  
та динаміки машин  
як конспект лекцій  
із дисципліни  
«Обчислювальна  
гідроаеромеханіка».  
Протокол № 9 від  
04.06.2019 р.

Суми  
Сумський державний університет  
2019

Обчислювальна гідроаеромеханіка :  
конспект лекцій / укладачі: А. В. Загорулько,  
Д. О. Кайота. – Суми : Сумський державний  
університет, 2019. – 102 с.

Кафедра загальної механіки та динаміки  
машин

## Зміст

	С.
1 Історичний огляд	6
2 Чисельне розв'язання одновимірної задачі теплопровідності.....	7
2.1 Отримання дискретних аналогів.....	9
2.2 Показовий приклад.....	13
3 Течія і теплоперенесення у каналах.....	16
3.1 Загальні характеристики течії у каналах.....	16
3.2 Початкова ділянка і повністю розвинена течія.....	16
3.3 Математична постановка задачі визначення поля швидкості.....	20
3.4 Інтегральні характеристики течії.....	21
3.5 Повністю розвинений теплообмін.....	23
3.6 Математична постановка задачі визначення поля температури.....	25
3.7 Завершальні зауваження.....	34
4 Математичне моделювання аерогідродинаміки і тепломасоперенесення.....	34
4.1 Початкові і граничні умови.....	35
4.2 Метод скінченних різниць.....	36
4.3 Метод скінченних об'ємів.....	41
4.4 Стійкість, узгодженість і збіг скінченно-різницевих схем.....	43
4.5 Стійкість скінченно-різницевих схем. Метод фон Неймана.....	45
4.6 Методи розв'язання сіткових рівнянь. Прямі методи.....	48
4.7 Ітераційні методи.....	51
4.8 Застосування методів скінченних різниць для розв'язання модельних рівнянь.....	52
4.9 Чисельні методи розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини.....	58

5 Розв'язання рівнянь гідродинаміки у програмних кодах.....	70
6 Опис архітектури і процесу розв'язання типових задач за допомогою пакета ANSYS CFX...	81
6.1 Загальна структура пакета.....	81
6.2 Типи файлів ANSYS CFX.....	83
6.3 Процес поставлення і розв'язання типової задачі за допомогою пакета ANSYS CFX...	86
6.4 Приклад моделювання течії у циліндричній трубі.....	89
Список літератури.....	101

## **1 Історичний огляд**

Розвиток обчислювальної гідрогазодинаміки (CFD) почався з появою комп'ютерів на початку 50-х років минулого століття [2].

**1958 – 1967 роки:** Los Alamos Scientific Lab. (Group T-3) - закладені основи таких чисельних методів, як Particle-in-Cell, Marker-and-Cell та ін.

**1960–1970 роки:** D.B.Spalding та ін.: k-ε-модель турбулентності, алгоритм SIMPLE, модель обриву вихора при горінні (Eddy-Break-Up).

**1980 роки:** поява перших комерційних CFD-кодів загального призначення PHOENICS, FLUENT, FIDAP, STAR-CD, CFX.

**1990 роки:** початок бурхливого розвитку індустрії CFD-кодів, що викликане зростанням продуктивності комп'ютерів (закон Мура: продуктивність подвоюється кожні 1,5-2 роки). CFD-коди стають інструментом для інженерів-конструкторів. У даний час активно розвивається (за кордоном) індустрія пакетів програм (CFDcodes). Світові лідери – ANSYS CFX (позиції якого стали домінуючими після поглинання Fluent Inc.), CD adapco Group (пакети StarCD, StarCCM+) та ін. Для подальшого розповсюдження застосування CFD-кодів у промисловості, як необхідної ланки процесу конструювання, виробництва і підтримки продукту необхідні спрощення і автоматизація процедури їх використання, особливо імпорту геометрії, генерації сітки і контролю процесу розв'язання. Важливу роль тут виконує подальший розвиток моделей турбулентності, особливо турбулентного теплоперенесення. Сучасні тенденції: інтеграція з сім'єю пакетів програм для інженерів-конструкторів CAD.

У даний час обчислювальна гідродинаміка є однією з гілок сучасної гідродинаміки, в якій можна виділити три напрямки:

1) теоретична гідрогазодинаміка: точні розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса, побудова рішень за допомогою асимптотичних методів (теорія примежового шару, теорія груп та ін.) і методів статистичної фізики (теорія турбулентності);

2) експериментальна гідрогазодинаміка: отримання нової інформації про властивості потоків, перевірка справедливості і придатності наближених розв'язків рівнянь гідрогазодинаміки;

3) обчислювальна гідрогазодинаміка: доповнення експериментальної і теоретичної гідродинаміки – альтернативний і економічно ефективний засіб моделювання реальних течій.

Переваги CFD перед експериментальною гідрогазодинамікою:

1) зниження часу попередньої підготовки при проектуванні і при розробленні;

2) можливість моделювання умов течій, які важко відтворюються в експерименті;

3) отримання ширшої і докладнішої інформації про фізичні величини потоку;

4) менша вартість робіт.

Сфери застосування:

1) аерокосмічна індустрія;

2) автомобільна промисловість;

3) медицина і біомедицина;

4) хімічна промисловість;

5) виробництво товарів споживання;

6) охолодження електронних приладів;

7) задачі динаміки навколишнього середовища;

8) харчова промисловість;

9) енергетика;

10) машинобудування;

11) металургія;

12) нафтогазовий комплекс;

13) виробництво полімерів;

14) спортивна індустрія.

## **2 Чисельне розв'язання одновимірної задачі теплопровідності**

Для отримання стаціонарної одновимірної задачі теплопровідності [3] припустимо, що температура  $T$  залежить тільки від координати  $x$ . Основне диференціальне рівняння може бути записане у вигляді

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) + S = 0, \quad (1.1)$$

де  $k$  - теплопровідність;  $S$  - джерельний член, який описує потужність тепловиділення в одиниці об'єму середовища. Для початку припустимо, що  $k$  і  $S$  - сталі.

В метою отримання чисельного розв'язку рівняння (1.1) вибираємо множину точок уздовж осі  $x$  і шукаємо значення температури в них. Цю множину назвемо «розрахунковою сіткою», а точки - «розрахунковими точками». На рис. 1.1 показаний набір розрахункових точок, розміщених на однаковій відстані одна від одної і позначених як  $i-1$ ,  $i$ ,  $i+1$  і т.д. Відстань між сусідніми точками дорівнює  $\delta x$ . Задача чисельного методу полягає у визначенні температур  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  для будь-якого  $i$ .

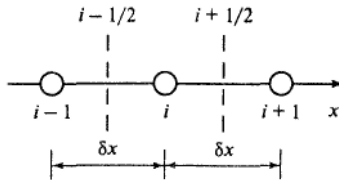


Рисунок 1.1 Рівномірна розрахункова сітка для одновимірної задачі

Аналітичним розв'язком рівняння (1.1) є вираз для температури  $T$ , яка залежить від  $x$ . Чисельний розв'язок, навпаки, виходить у формі чисельних значень  $T$  в кінцевому числі розрахункових точок. Дискретні значення  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  для будь-якого  $i$  знаходяться із системи алгебраїчних рівнянь, які називаються дискретними аналогами диференціального рівняння (1.1). Спосіб отримання дискретних аналогів буде обговорюватися нижче.

Коли розрахункова область містить невелике число розрахункових точок, дискретні аналоги є грубою апроксимацією диференціального рівняння. При цьому одержаний чисельний розв'язок звичайно не збігається з



точним розв'язком диференціального рівняння. При збільшенні числа розрахункових точок чисельний розв'язок стає коректнішим і наближається до точного. Для багатьох задач використання навіть невеликого числа розрахункових точок приводить до розв'язків, які достатньо точні для практичних цілей, що буде продемонстровано в цьому та інших розділах.

Для одновимірної задачі стаціонарної теплопровідності рівняння (1.1) звичайно може бути розв'язане аналітично. Проте для складних багатовимірних задач дуже важко або взагалі неможливо одержати аналітичний розв'язок. У цих випадках альтернативою є чисельний метод. Перевага чисельного методу полягає в заміщенні диференціального рівняння системою алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати за допомогою комп'ютера. Далі буде показано, як можуть бути одержані подібні алгебраїчні рівняння.

## 2.1 Отримання дискретних аналогів

Існує безліч способів з диференціального рівняння, подібного рівнянню (1.1), одержати систему дискретних аналогів - алгебраїчних рівнянь, які містять  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  як змінні. У цьому параграфі розглянемо декілька шляхів отримання таких дискретних аналогів і виберемо один з них для подальшої роботи.

**Апроксимація похідних.** Оскільки диференціальне рівняння містить похідні, можна одержати дискретний аналог заміною похідних відповідною апроксимацією. Наприклад, друга похідна в рівнянні (1.1) може бути апроксимована у розрахунковій точці з індексом  $i$  згідно з рис. 1.1 як

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dT}{dx} \right) = \frac{1}{\delta x} \left[ \left( k \frac{dT}{dx} \right)_{i+1/2} - \left( k \frac{dT}{dx} \right)_{i-1/2} \right]. \quad (2.2)$$

Потім похідні  $dT/dx$  у точках  $i + 1/2$  і  $i - 1/2$  можуть бути записані через  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  у вигляді

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_{i+1/2} = k \frac{T_{i+1} - T_i}{\delta_x}, \quad (2.3)$$

$$\left(k \frac{dT}{dx}\right)_{i-1/2} = k \frac{T_i - T_{i-1}}{\delta_x}. \quad (2.4)$$

Підстановка цих виразів у (1.1) приводить до рівняння

$$\frac{k}{(\delta x)^2} [T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i] + S = 0, \quad (2.5)$$

де  $k$  і  $S$  вважаються сталими в прийнятому наближенні. Рівняння (2.5) є дискретним аналогом рівняння (1.1). Якщо у нас є рівняння, подібне (2.5), для кожної розрахункової точки області, то можна одержати чисельний розв'язок для температури  $T$ , розв'язавши систему алгебраїчних рівнянь.

**Використання ряду Тейлора.** Це формальна процедура отримання рівняння (2.5). Розклавши температуру  $T_{i+1}$  у ряд Тейлора, можна записати

$$T_{i+1} = T_i + (\delta x) \left(\frac{dT}{dx}\right)_i + \frac{1}{2} (\delta x)^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i + \dots \quad (2.6)$$

Аналогічно температура  $T_{i-1}$  може бути записана як

$$T_{i-1} = T_i - (\delta x) \left(\frac{dT}{dx}\right)_i + \frac{1}{2} (\delta x)^2 \left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i + \dots \quad (2.7)$$

Якщо в (2.6) і (2.7) нехтувати доданками вищого порядку в порівнянні з  $(\delta x)^2$ , то, склавши ці вирази, одержимо

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{(\delta x)^2}. \quad (2.8)$$

Це та сама апроксимація, що була одержана раніше із застосуванням (2.2)-(2.4). Таким чином, ми знову можемо одержати рівняння (2.5) підстановкою виразу (2.8) в (1.1).

**Метод контрольного об'єму (МКО).** Ділянка, яка обмежена штриховими лініями на рис. 1.1, є маленькою частиною даної одновимірної розрахункової області. Таку ділянку називають підобластю, скінченним об'ємом, або контрольним об'ємом (КО). Можна одержати дискретні рівняння, використавши тепловий баланс у контрольному об'ємі. Для цього проінтегруємо рівняння (1.1) за контрольним об'ємом і потім подамо результат у вигляді алгебраїчного рівняння. Після інтегрування (1.1) за  $x$  в межах від  $i - 1/2$  до  $i + 1/2$  одержимо

$$\left( k \frac{dT}{dx} \right)_{i+1/2} - \left( k \frac{dT}{dx} \right)_{i-1/2} + S \delta x = 0. \quad (2.9)$$

Оскільки  $-k dT/dx$  є локальною поверхневою густиною теплового потоку, рівняння (2.9), очевидно, є балансом між тепловими потоками через грані контрольного об'єму і кількістю тепла, яке вироблено у контрольному об'ємі.

Для представлення градієнта температури  $dT/dx$  в рівнянні (2.9) у алгебраїчній формі ми повинні зробити припущення про профіль температури  $T$  між розрахунковими точками. На рис. 1.2 показаний простий профіль, відомий як кусково-лінійний. Використавши цей профіль, можна записати градієнти температури на гранях контрольного об'єму у вигляді:

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{i+1/2} = \frac{T_{i+1} - T_i}{(\delta x)^2}; \quad (2.10)$$

$$\left( \frac{dT}{dx} \right)_{i-1/2} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\delta x}. \quad (2.11)$$

Підставивши ці вирази в (2.9), одержимо рівняння

$$\frac{k}{\delta x} [T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i] + S\delta x = 0, \quad (2.12)$$

еквівалентне виразу (2.5). Це рівняння може бути переписане у вигляді

$$\frac{2k}{\delta x} T_i = \frac{k}{\delta x} T_{i+1} + \frac{k}{\delta x} T_{i-1} + S\delta x. \quad (2.13)$$

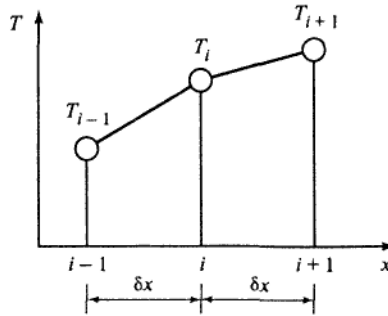


Рисунок 1.2 - Кусково-лінійний профіль температури

Надалі застосовуватимемо цю форму запису до всіх дискретних аналогів.

Помітимо, що при отриманні рівняння теплового балансу (2.9) для контрольного об'єму не було зроблено ніяких апроксимацій. Іншими словами, рівняння (2.9) так само точне, як і (1.1). Проте припущення про форму профілю є апроксимацією, яка поліпшується при збільшенні числа розрахункових точок.

**Обговорення методу контрольного об'єму.** Метод контрольного об'єму використовуватиметься для отримання дискретних аналогів. Основна причина цього полягає у тому, що дискретні аналоги, які одержані цим методом, є не тільки формальною математичною апроксимацією, але і мають зрозумілий фізичний сенс. Диференціальні рівняння, що цікавлять нас, є законами збереження. Наприклад, рівняння теплопровідності ґрунтується на законі збереження енергії. Надалі ми використовуємо закони збереження кількості

руху при течії в каналах і збереження маси при течіях в пористих середовищах. Коли дискретні рівняння одержані методом контрольного об'єму, вони є законами збереження енергії, кількості руху, маси для кожного контрольного об'єму. З цього випливає, що одержаний чисельний розв'язок задовольняє закони збереження цих величин у всій розрахунковій області.

На простому прикладі у цьому параграфі показано, що різні методи отримання дискретного аналога приводять до одного і того ж кінцевого рівняння. Але це трапляється не завжди. Тут ми використали дуже просте диференціальне рівняння і вибрали окремий випадок припущення про профіль для методу контрольного об'єму. Для складніших диференціальних рівнянь або для інших припущень про форму профілю підсумкові дискретні аналоги можуть розрізнитися у разі використання рядів Тейлора, методу контрольного об'єму та інших способів. Розв'язок, одержаний за допомогою методу контрольного об'єму, завжди зберігатиме баланс (енергії, кількості руху та ін.) у всій розрахунковій області, чого не можна сказати про розв'язки, знайдені іншими методами [3].

## 2.2 Показовий приклад

Одержимо чисельний розв'язок рівняння (1.1) для простої ситуації. Для області довжиною  $L$  визначимо граничні умови:

$$T = T_A \quad \text{при } x = 0; \quad (2.14)$$

$$T = T_B \quad \text{при } x = L. \quad (2.14a)$$

Далі використовуватимемо такі задані величини:

$$k = 1; S = 2; L = 5; T_A = 0; T_B = 15. \quad (2.15)$$

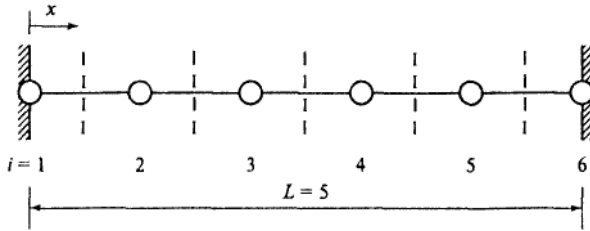


Рисунок 1.3 - Рівномірна сітка з шістьма розрахунковими точками

**Дискретні рівняння.** Для цього простого прикладу використовуватимемо рівномірну сітку з  $\delta x = 1$ , яка показана на рис. 1.3. Температури на границях областей  $T_1$  і  $T_6$  відомі (див. (2.15)):

$$T_1 = 0 \quad \text{і} \quad T_6 = 15. \quad (2.16)$$

Для внутрішніх розрахункових точок 2-5 можна записати дискретні аналоги у формі (2.13). Отже, використовуючи значення заданих величин (див. (2.15)), одержуємо

$$2T_2 = T_3 + 2; \quad (2.17)$$

$$2T_3 = T_4 + T_2 + 2; \quad (2.18)$$

$$2T_4 = T_5 + T_3 + 2; \quad (2.19)$$

$$2T_5 = T_4 + 17. \quad (2.20)$$

Необхідно помітити, що температури на границях областей  $T_1$  і  $T_6$  мають відомі значення згідно з (2.16).

**Розв'язання алгебраїчних рівнянь.** Залишилося тільки розв'язати рівняння (2.17) - (2.20) для невідомих температур. Оскільки ці рівняння записані в спеціальній формі, то може бути застосований простий метод розв'язання.

Для початку запишемо рівняння (2.17) у вигляді

$$T_2 = 0,5T_3 + 1. \quad (2.21)$$

Підставивши вираз (2.21) в (2.18), одержимо

$$2T_3 = T_4 + 0,5T_3 + 1 + 2, \quad (2.22)$$

звідси

$$T_3 = 2/3T_4 + 2. \quad (2.23)$$

При використанні виразу (2.23) з рівняння (2.19) маємо

$$T_4 = 3/4T_5 + 3. \quad (2.24)$$

Нарешті, підставивши вираз (2.24) в рівняння (2.20), одержимо

$$2T_5 = 3/4T_5 + 3 + 17. \quad (2.25)$$

Оскільки в рівнянні (2.25) невідомим залишається тільки  $T_5$ , знайдемо цю температуру:

$$T_5 = 16. \quad (2.26)$$

Якщо використовуємо це значення  $T_5$  в рівнянні (2.24), то одержимо  $T_4$ ; потім з виразу (2.23) знайдемо  $T_3$  і з виразу (2.22) -  $T_2$ . Таким чином, чисельний розв'язок задачі має такий вигляд:

$$T_2 = 7; T_3 = 12; T_4 = 15; T_5 = 16. \quad (2.27)$$

Метод, застосований тут, є необхідним засобом розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

**Порівняння з точним розв'язком.** Одержавши чисельний розв'язок, цікаво порівняти його з точним. Рівняння (1.1) може бути розв'язане для сталих  $k$ ,  $S$  і граничних умов (2.14):

$$T = T_A + (T_B - T_A) \frac{x}{L} + \frac{S}{2k} (L - x)x. \quad (2.28)$$

Підставивши значення, дані в (2.15), одержимо

$$T = 8x - x^2. \quad (2.29)$$

Цей вираз може бути використаний для знаходження точних значень  $T_2, \dots, T_5$  при  $x = 2, \dots, 5$  відповідно. З даного окремого випадку випливає, що точні значення, які знайдені за виразом (2.29), збігаються з поданим чисельним розв'язком (див. (2.27)).

Такий чудовий збіг трапляється досить рідко і має місце тільки в деяких простих задачах. Проте корисно усвідомлювати, що іноді чисельний розв'язок не приводить до похибок навіть при використанні невеликого числа розрахункових точок. У розглянутій тут задачі точний розподіл температури є параболічною функцією згідно з (2.29). Заміщення її кусково-лінійною функцією є чистою апроксимацією. Але трапилося так, що вирази (2.10) і (2.11) для градієнтів температури, які одержані за допомогою цього профілю, коректні і для градієнтів при параболічній зміні температури. Цей випадковий збіг в представлений задачі робить наш чисельний розв'язок ідентичним точному.

У загальному випадку чисельний розв'язок, одержаний тільки при невеликому числі розрахункових точок, даватиме деяку похибку в порівнянні з точним розв'язком. Якщо збільшувати число розрахункових точок, то ця похибка зменшуватиметься. На деякому етапі похибка стане настільки маленькою, що подальше збільшення числа точок буде дуже незначно змінювати розв'язок. У такому разі чисельний розв'язок може розглядатися для будь-яких практичних цілей як точний. Для багатьох задач, що не мають аналітичного розв'язання, чисельний розв'язок можна також розглядати як достатньо точний у випадку, якщо при подальшому збільшенні числа розрахункових точок він не змінюється.

### **3 Течія і теплоперенесення у каналах**

#### **3.1 Загальні характеристики течії у каналах**



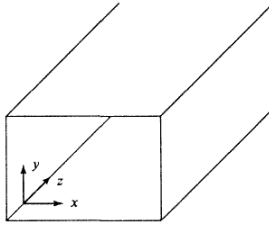


Рисунок 1.4 - Канал прямокутного перетину

Хоча канали можуть мати будь-яку геометричну форму, для простоти розглянемо прямий канал прямокутного поперечного перетину, зображений на рис. 1.4. Течія в основному направлена уздовж осі  $z$  (назвемо її поздовжньою координатою на відміну від поперечних координат  $x$  і  $y$ ). Серед трьох компонент швидкості  $u$ ,  $v$  і  $w$  поздовжня складова  $w$  звичайно набагато більше поперечних  $u$  і  $v$ . Течія викликається градієнтом тиску  $\partial p/\partial z$ , який звичайно від'ємний. Тиск практично постійний у поперечному перетині і змінюється уздовж осі  $z$ .

Оскільки зміна швидкості і температури по осі  $z$  мала в порівнянні зі змінами їх по осі  $x$  або  $y$ , то дуже часто нехтують в'язким напруженням, яке викликане градієнтом  $\partial w/\partial z$  і перенесенням тепла за рахунок градієнта  $\partial T/\partial z$ . При цьому, звичайно, член  $\partial p/\partial z$  в рівнянні для поздовжньої складової швидкості вважають таким, що дорівнює  $\partial \bar{p}/\partial z$ , де  $\bar{p}$  відповідає середньому значенню тиску в поперечному перетині. Течія у каналі може бути стаціонарною або нестаціонарною. Будемо розглядати тільки стаціонарну течію.

### 3.2 Початкова ділянка і повністю розвинена течія

Розглянемо течію (рис. 1.5) рідини у каналі при однорідному полі швидкості  $w$  на вході. У міру того як рідина рухається уздовж каналу, течія біля стінки сповільнюється через тертя об стінки. Швидкість течії в ядрі потоку залишається постійною по перетину, але

збільшується уздовж каналу. При цьому відбувається перетікання рідини від пристінкової області в ядро потоку. Приграничні шари біля стінок каналу поступово зростають і врешті-решт зливаються. На цьому етапі ядро потоку зникає і у всьому поперечному перетині переважають ненульові градієнти швидкостей. До цього моменту розвиток профілю швидкості завершується і поле течії для всіх подальших перетинів стає незалежним від поздовжньої координати  $z$ . Градієнт тиску  $\partial\bar{p}/\partial z$  також перестає змінюватися уздовж осі  $z$ . Область течії, в якій компоненти швидкості не залежать від поздовжньої координати, називається областю *повністю гідродинамічно розвиненої течії*. Область, в якій розподіл швидкості визначається геометричною формою каналу і приходить у відповідність до тертя на стінках, називається *початковою ділянкою*.



Рисунок 1.5 - Розвиток течії

Задачі про течії в прямокутному каналі є в загальному випадку тривимірними. Проте для області повністю розвиненої течії задача стає двовимірною, оскільки зміни швидкості уздовж координати  $z$  відсутні (для двовимірних течій, наприклад, у каналі круглого перетину або у плоскопаралельному каналі, задача про повністю розвинену течію стає одновимірною). Можна одержати розв'язок відразу для повністю розвиненої течії, не розглядаючи початкової ділянки. Таким чином, обмежуючись повністю розвиненою течією, ми зменшуємо розмірність задачі і вираємо за рахунок набагато простіших обчислень.

У багатьох практичних задачах довжина каналу набагато більше його поперечних розмірів. Таким чином, початкова ділянка займає тільки невелику частину довжини

каналу. У такому разі розумно розглядати весь канал, ґрунтуючись на повністю розвиненій течії. Тому аналіз повністю розвинених течій має істотне практичне значення.

Розглянемо, що відбувається з поперечними компонентами швидкості в області повністю розвиненої течії. У ситуації, показаній на рис. 1.5, течія стає строго поздовжньою, і поперечні швидкості  $u$  і  $v$  дорівнюють нулю. Проте існують складніші течії, при яких поперечні швидкості не дорівнюють нулю і у області повністю розвиненої течії. Подібна особливість спостерігається при течіях в криволінійних або каналах, які обертаються, а також при течіях з вільною конвекцією і при деяких турбулентних течіях в каналах некруглого поперечного перетину. Залежно від того, дорівнюють поперечні компоненти швидкості нулю чи ні, повністю розвинені течії можуть бути розділені на прості і складні.

*Складна повністю розвинена течія у каналі* характеризується такими залежностями:

$$u = u(x, y); \quad (3.30)$$

$$v = v(x, y); \quad (3.31)$$

$$w = w(x, y). \quad (3.32)$$

Помітимо, що швидкості  $u$ ,  $v$  і  $w$  не залежні від поздовжньої координати  $z$ , при цьому швидкості  $u$  і  $v$  можуть бути ненульовими, навіть якщо вони не залежать від  $z$ .

*Прості повністю розвинені течії у каналі* визначаються таким чином:

$$u = 0; \quad (3.33)$$

$$v = 0; \quad (3.34)$$

$$w = w(x, y). \quad (3.35)$$

Ще однією характеристикою простої повністю розвиненої течії є те, що тиск постійний по поперечному перетину і змінюється лінійно уздовж поздовжньої координати, тобто

$$p = p(z); \quad (3.36)$$

$$dp/dz = \text{const}. \quad (3.37)$$

Як ми скоро побачимо, тільки *прості* повністю розвинені течії описуються рівнянням типу рівнянь теплопровідності. Для *складних* повністю розвинених течій також можна спростити обчислення за рахунок зменшення розмірності, але через наявність поперечних швидкостей потрібне включення в основні диференціальні рівняння конвективних членів. Для визначення цих швидкостей необхідне розв'язання взаємозв'язаних рівнянь руху і нерозривності у поперечному перетині, що є дуже складною задачею.

Прості повністю розвинені течії звичайно реалізуються далі входу в прямі канали постійного поперечного перетину. Щоб течія залишалася повністю розвиненою, такі властивості рідини, як в'язкість і густина (а також теплопровідність і теплоємність при тому, що далі розглядається повністю розвинене теплоперенесення), повинні залишатися постійними. Що стосується геометричної форми, то поперечний перетин каналу може бути представлений в декартовій  $(x, y)$  або полярній  $(\theta, r)$  системі координат. Осесиметрична система координат  $(x, r)$  при аналізі течій у каналах не використовується, в цій системі координат можна представити заокруглений (зігнутий) канал прямокутного поперечного перетину, але це призведе до складної течії.

### **3.3 Математична постановка задачі визначення поля швидкості**

**Основні рівняння.** У разі стаціонарної ламінарної тривимірної течії у каналі рівняння для складової швидкості уздовж осі  $z$  може бути записане у вигляді

$$\rho\mu \frac{\partial w}{\partial x} + \rho\nu \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (3.38)$$

де у лівій частині представлені конвективні члени, а в правій - члени, які відповідають в'язким напруженням і градієнту тиску. За допомогою виразів (3.33) —(3.37) для простої повністю розвиненої течії, яка тут і розглядається, перетворюємо (3.38) до вигляду

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.39)$$

З фізичної точки зору це рівняння є балансом між тиском і в'язким напруженням, що викликається змінами  $w$  по перетину. Цікаво, що у виразі (3.39) відсутня густина рідини. Помітимо також, що  $\partial p / \partial z$  - просто константа у всьому поперечному перетині. Видно, що (3.39) відповідатиме стаціонарному рівнянню (3.35), якщо зробити такі заміни:

$$\phi = w; \quad (3.40)$$

$$\Gamma = \mu; \quad (3.41)$$

$$S = dp/dz. \quad (3.42)$$

Таким чином, розрахунок поля поздовжньої швидкості з математичної точки зору подібний розв'язку задачі теплопровідності з постійною швидкістю генерації тепла.

**Безрозмірна форма.** Для знаходження параметрів, що визначають поле швидкості, корисно представити (3.39) у безрозмірному вигляді. При сталій в'язкості це рівняння зручно записати як

$$0 = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial W}{\partial Y} \right) + 1, \quad (3.43)$$

де безрозмірні координати  $X$  і  $Y$  мають вигляд

$$X = x/D; \quad (3.44)$$

$$Y = y/D. \quad (3.45)$$

Тут  $D$  - деякий характерний розмір поперечного перетину каналу, наприклад, діаметр або радіус круглого каналу, довжина однієї із сторін прямокутного перетину каналу або гідравлічний діаметр, що обчислюється за формулою (3.47). Безрозмірна швидкість

$$W = \frac{\mu w}{-(dp/dz)D^2}. \quad (3.46)$$

При течії в каналі тиск  $p$  зменшується уздовж осі  $z$ . Тому величина  $\partial p/\partial z$  додатна.

Оскільки вираз (3.43) не містить параметрів, то його розв'язання залежить тільки від граничних умов. Вони задаються геометричними характеристиками каналу і вимогою, щоб швидкість  $w$  на стінках дорівнювала нулю. Таким чином, розподіл безрозмірної швидкості  $W$  залежить тільки від форми каналу (а не від фізичних розмірів) і не залежить від значень в'язкості, перепаду тиску, числа Рейнольдса та ін. Розмірна швидкість  $w$  може бути знайдена за (3.46) при підстановці конкретних значень в'язкості, градієнта тиску і характерного розміру.

### 3.4 Інтегральні характеристики течії

Течія у каналі звичайно характеризується деякими спеціальними величинами і параметрами. Розглянемо деякі з них.

**Деякі корисні визначення.** Гідравлічний діаметр поперечного перетину каналу розраховується за формулою

$$D_h = 4A/P, \quad (3.47)$$

де  $A$  - площа поперечного перетину;  $P$  - змочений периметр (довжина тієї границі, на якій рідина стикається зі стінками каналу). Число 4 в (3.47) використовується для того, щоб

зробити гідравлічний діаметр  $D_h$  круглої труби таким, що дорівнює рівним діаметру цієї труби. Для каналу квадратного поперечного перетину  $D_h$  дорівнює довжині сторони квадрата.

Середня швидкість  $\bar{w}$  в поперечному перетині каналу визначається так, щоб об'ємна витрата через канал дорівнювала

$$\bar{w} = \frac{\iint w dx dy}{A} = \frac{\iint w dx dy}{\iint dx dy}. \quad (3.48)$$

Тут подвійні інтеграли позначають інтегрування по поперечному перетину каналу.

Число Рейнольдса для течії в каналі визначається виразом

$$R_e = \frac{\rho \bar{w} D_h}{\mu}, \quad (3.49)$$

де  $\rho$  і  $\mu$  - густина і в'язкість рідини.

Безрозмірною характеристикою градієнта тиску є коефіцієнт тертя  $f$ , який визначається трьома-чотирма різними способами. Надалі використовуватимемо такий вираз:

$$f = \frac{(dp/dz) D_h}{(1/2) \rho \bar{w}^2}. \quad (3.49)$$

Потрібно бути дуже уважним при порівнянні значень, одержаних за (3.50), із значеннями, які знайдені за іншими джерелами. Інші способи визначення, які трапляються часто, дають значення  $f$  в 2 або 4 рази менші, ніж розраховані за (3.50).

**Повністю розвинена течія.** З (3.46), (3.49) і (3.51) випливає, що

$$f \text{Re} = 2(D_h/D^2) / \bar{W}, \quad (3.51)$$

де  $\bar{W}$  - безрозмірна середня швидкість згідно з (3.46). Після отримання  $W$  у вигляді функції від  $X$  і  $Y$  можна

розрахувати  $\bar{W}$  за формулою, аналогічною (3.48). Оскільки  $\bar{W}$  залежить тільки від форми каналу, як і відношення  $D_h/D$ , то з (3.51) випливає, що для повністю розвиненої ламінарної течії добуток  $f Re$  постійний для каналу заданої форми. Значення  $f Re$  для круглої труби дорівнює 64, а для плоскопаралельного каналу - 96.

Хоча  $W$  є прийнятною безрозмірною швидкістю для отримання (3.43), іншою корисною безрозмірною величиною може бути  $w/\bar{w}$ . Для каналу деякої заданої форми існує універсальний розподіл  $w/\bar{w}$ .

**Важливість інтегральних параметрів.** Чисельний розрахунок поля швидкості в каналі закінчується, коли розв'язане рівняння (3.39) або (3.43). Обчислення значень величин  $\bar{W}$  або  $f Re$  є просто подальшою обробкою результатів. Ви повинні розуміти, що така обробка не істотна для основної задачі отримання поля швидкості. Вона проводиться для подання результатів у формі, яка є звичною і знайомою інженерам. На практиці значно поширені різні визначення коефіцієнта тертя і відповідних величин. Жодне з них не повинне розглядатися як найбільш правильне або найбільш головне. Коли між визначенням величини і її розрахованим значенням підтримується належна відповідність, може мати місце будь-яке подання результатів.

### 3.5 Повністю розвинений теплообмін

**Попереднє ознайомлення.** Точно так, як і поле швидкості в каналі має початкову ділянку і область повністю розвиненої течії, поле температури характеризується аналогічними тенденціями. На рис. 1.6 показані профілі температури у різних поперечних перетинах каналу. Рідина втікає в канал, маючи постійну температуру. Потім біля стінок каналу формуються і поступово збільшуються температурні приграничні шари. У результаті профіль температури по перетину встановлюється і не змінюється уздовж координати  $z$ . Ділянку, де температура  $T = T(x, y)$  і  $\partial T / \partial z = 0$ , можна розглядати як область повністю розвиненого теплообміну, але,



як буде показано далі, це визначення обмежує область застосування аналізу повністю розвинуеного теплообміну досить нецікавими випадками.

У ситуації, показаній на рис. 1.6, рідина одержує тепло від верхньої стінки і втрачає його на нижній. У області повністю розвинуеного теплообміну рідина інтегрально не одержує і не втрачає тепло (от чому температура не змінюється уздовж осі  $z$ ). У цій області рух рідини абсолютно не впливає на розподіл температури. Задача вироджується в просту задачу стаціонарної теплопровідності у поперечному перетині без яких-небудь джерел тепла. Така задача легко розв'язується, але вона не відповідає реальній ситуації. При течіях в каналах звичайно має місце охолодження або нагрів рідини.

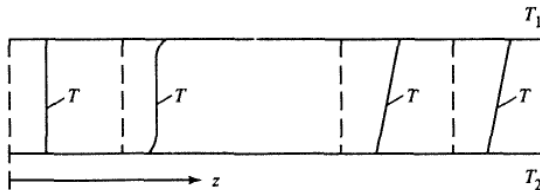


Рисунок 1.6 - Розвиток нуля температури

Якщо рідина в каналі піддається охолодженню або нагріву, то температура  $T$  повинна змінюватися уздовж осі  $z$ . Але навіть в цьому випадку для поля температури можна ввести поняття області повністю розвинуеного теплообміну.

**Область повністю розвинуеного теплообміну.** Коли деяка безрозмірна температура  $\Theta$  стає незалежною від  $z$ , хоча  $T$  продовжує залежати від  $x$ ,  $y$  і  $z$ , поле температури розглядатиметься як повністю розвинуене. Таким чином, для області повністю розвинуеного теплообміну

$$\Theta = \Theta(x, y). \quad (3.52)$$

Це означає, що *форма* температурного профілю залишається постійною при різних значеннях  $z$ . Іншими словами, дана область повністю розвинуеного теплообміну характеризується постійним коефіцієнтом тепловіддачі.

Оскільки на поле температури впливають швидкості в каналі, то важливою умовою існування області

повністю розвиненого теплообміну є повністю розвинене поле швидкості. Для того щоб підсумкове поле температури мало незмінну форму, необхідна деяка міра регулярності теплових граничних умов.

### 3.6 Математична постановка задачі визначення поля температури

**Диференціальне рівняння.** Рівняння енергії для стаціонарної повільної течії в каналі без в'язкої дисипації записується у вигляді

$$\rho c_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3.53)$$

де  $c_p$  - питома теплоємність при постійному тиску;  $k$  - теплопровідність рідини. Ліва частина (3.53) відповідає конвективному перенесенню ентальпії в каналі, а члени правої частини описують теплопровідність у рідині. Оскільки звичайно перенесення тепла уздовж осі  $z$  дуже мале в порівнянні з перенесенням в поперечному його перетині, то останнім членом у рівнянні (3.53) можна нехтувати. При простій повністю розвиненій течії у каналі поперечні швидкості  $u$  і  $v$  дорівнюють нулю, тому (3.53) спрощується і набуває вигляду

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.54)$$

Рівняння (3.54) відповідає стаціонарній формі узагальненого диференціального рівняння (3.35) при такій заміні:

$$\phi = T; \quad (3.55)$$

$$\Gamma = k; \quad (3.56)$$

$$S = -\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (3.57)$$

Таким чином, аналіз теплообміну в каналі зводиться до розв'язання задачі типу задачі теплопровідності при формальному розгляді конвективного перенесення уздовж

каналу у вигляді начального члена. Звичайно, задача може бути розв'язана в тому випадку, якщо заданий початковий член. Це означає, що похідна  $\partial T/\partial z$  повинна бути задана або знайдена з наявної інформації. Така можливість з'являється, коли профілі температури схожі при різних  $z$ . Розподіл  $w$  в (3.57) передбачається відомим з аналізу повністю розвинутого поля швидкості.

**Деякі корисні визначення.** Нехай  $q_w$  позначає локальну густину теплового потоку на стінці каналу. У загальному випадку ця густина потоку нестала по всьому периметру каналу, через який здійснюється теплообмін. Через  $Q_w$  позначимо сумарний тепловий потік на одиницю поздовжньої довжини каналу. Отже,

$$Q_w = \int q_w ds, \quad (3.58)$$

де  $s$  - ділянка периметра поперечного перетину каналу; інтегрування проводиться по всій ділянці периметра, що обігривається.

Середня температура рідини в заданому поперечному перетині звичайно визначається у вигляді так званої середньомасової температури, яка визначається виразом

$$T_b = \frac{\iint \rho c_w T dx dy}{\iint \rho c_w dx dy}. \quad (3.59)$$

Інтегрування проводиться по всьому перетину каналу. Для сталих  $\rho$  і  $c_p$  вираз (3.59) спрощується:

$$T_b = \frac{\iint w T dx dy}{\bar{w} A}, \quad (3.60)$$

де  $\bar{w}$  - середня швидкість;  $A$  - площа поперечного перетину каналу. Зручність такого визначення  $T_b$  полягає у тому, що

сумарний потік ентальпії через перетин каналу може бути розрахований як  $(\rho \bar{w} A) c_p T_b$ .

Локальний коефіцієнт тепловіддачі  $h$  в деякій точці на стінці каналу визначається виразом

$$h = q_w / (T_w - T_b), \quad (3.61)$$

де  $T_w$  - локальна температура стінки. Можна також задати формулу для коефіцієнта тепловіддачі, що базується на середній або будь-якій іншій температурі стінки. Середній коефіцієнт тепловіддачі  $\bar{h}$  впливає у результаті усереднювання локальних значень  $h$  або на підставі середньої густини теплового потоку  $\bar{q}_w$  і середньої температури стінки  $\bar{T}_w$ . Хоча може бути використане будь-яке з цих визначень, все ж таки бажано застосувати те, яке дозволить легко розрахувати фізичну величину, яка нас цікавить.

Безрозмірною формою коефіцієнта тепловіддачі є число Нуссельта. Воно визначається як

$$Nu = hD/k, \quad (3.62)$$

де  $D$  - характерний розмір поперечного перетину каналу;  $k$  - теплопровідність рідини.

Середнє число Нуссельта  $\bar{Nu}$  розраховується за  $\bar{h}$  аналогічно. Використовуючи значення  $Nu$  або  $\bar{Nu}$ , що трапляються у літературі, необхідно уважно вивчити визначення, на яких вони базуються. Інакше можуть мати місце деякі помилкові обчислення. Необхідно запам'ятати, що в більшості випадків немає негативних або позитивних визначень - вони просто різні.

Один із способів визначення області повністю розвиненого теплообміну полягає у вимозі, щоб коефіцієнт тепловіддачі  $h$  або число Нуссельта  $Nu$  не залежали від координати  $z$ . Число Нуссельта для повністю розвиненого теплообміну при ламінарній течії є величиною постійною, яка не залежить від чисел Рейнольдса і Прандтля. Воно залежить

тільки від геометричних особливостей каналу і граничних умов для температури.

Існують чотири види граничних умов для температури, які часто трапляються і при яких реалізується область повністю розвиненого теплообміну.

**Постійна локальна густина теплового потоку.**

Коли заданий розподіл локальної густини теплового потоку  $q_w$  по периметру каналу, який залишається незмінним уздовж осі  $z$ , то у області повністю розвиненого теплообміну температури в усіх точках поперечного перетину змінюються по  $z$  однаково і лінійно, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_w}{dz} = \frac{dT_b}{dz} = \text{const} . \quad (3.63)$$

Іншими словами, розподіл температури в деякому перетині може бути одержаний додаванням константи до температури в іншому перетині.

Для дотримання балансу енергії для каналу необхідно, щоб приріст потоку ентальпії на одиниці подовжньої довжини каналу дорівнював потоку тепла, який підведений через стінки цієї ділянки каналу. Таким чином,

$$Q_w = \rho \bar{w} A c_p \frac{dT_b}{dz} . \quad (3.64)$$

Отже, значення, необхідне в (3.57), може бути набуто за (3.64) при відомому  $Q_w$ . Якщо ж відомо  $\partial T / \partial z$ , то за рівнянням (3.64) можна розрахувати  $Q_w$ .

Щоб показати незалежність розподілу безрозмірної температури від такого параметра, як число Рейнольдса або число Прандтля, зробимо так. Член у лівій частині (3.54) можна записати у вигляді

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{w}{\bar{w}} \rho c_p \bar{w} \frac{dT_b}{dz} . \quad (3.65)$$

Використовуючи цей вираз, можна перетворити рівняння (3.63) до зручної безрозмірної форми

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{w}{\bar{w}} = 0, \quad (3.66)$$

де безрозмірні координати  $X$  і  $Y$  задані, як і раніше, співвідношеннями (3.44) і (3.45), а безрозмірна температура

$$\Theta = \frac{T_w - T}{(\bar{w} D^2 / \alpha) (dT_b / dz)}. \quad (3.67)$$

Тут  $\alpha$  - температуропровідність, яка визначається за формулою

$$\alpha = k / (\rho c_p); \quad (3.68)$$

$T_w$  - температура стінки в деякій точці периметра каналу. Рівняння (3.66) відповідає (3.35) з джерельним членом, який відомий з розв'язку рівняння руху.

Якщо середнє число Нуссельта  $\overline{Nu}$  визначене як

$$\overline{Nu} = \frac{D}{k(T_w - T_b)} \frac{Q_w}{P}, \quad (3.69)$$

де  $P$  - ділянка периметра каналу, яка обігривається, то з (3.64), (3.67) можна одержати

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\Theta_b} \frac{A}{PD}. \quad (3.70)$$

Тут  $\Theta_b$  - безрозмірна температура, яка відповідає  $T_b$ . Оскільки для каналу із заданими формою і розподілом теплового потоку на стінках рівняння (3.66) має єдиний розв'язок, то число Нуссельта у вигляді (3.70) є константою, яка не залежить від чисел Рейнольдса і Прандтля (локальне число Нуссельта в загальному випадку змінюватиметься по периметру в результаті зміни локальної густини теплового

поток, а також унаслідок геометричних особливостей поперечного перетину каналу).

Можна визначити безрозмірну температуру, грунтуючись на  $T_w$  і  $T_b$  у вигляді  $(T - T_w)/(T_b - T_w)$ . Ця температура аналогічна безрозмірній швидкості  $w/\bar{w}$ .

**Постійна лінійна густина теплового потоку уздовж каналу при сталій температурі стінок.** Якщо стінки каналу мають велику теплопровідність, то за її рахунок їх температура у заданому перетині каналу стане постійною. У цьому випадку невідома локальна зміна густини теплового потоку  $q_w$ , але задане постійне значення  $Q_w$ .

Рівняння (3.63) - (3.70) тут також справедливі з урахуванням того, що  $T_w$  - постійна температура стінки.

**Постійна температура по периметру і довжині каналу**

Коли стінки каналу мають постійну температуру по його периметру і довжині, то формується область повністю розвиненого теплообміну іншого типу. У такій ситуації рідина продовжує нагріватися або охолоджуватися до того часу, поки її температура не досягне температури стінок. У випадках, розглянутих раніше, незмінними залишаються різниця температур  $T_w - T_b$  і відповідний тепловий потік  $Q_w$ . При сталій температурі стінок різниця температур і тепловий потік експоненціально зменшуються уздовж осі  $z$ .

Області повністю розвиненого теплообміну характеризуються подібними формами профілів температури, тобто відношення  $(T_w - T)/(T_w - T_b)$  не залежить від  $z$ . Іншими словами, хоча різниця температур  $T_w - T$  спадає по осі  $z$ , різниця  $T_w - T_b$  зменшується з тією самою швидкістю. Оскільки

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_b} = f(x, y), \quad (3.71)$$

то

$$\ln(T_w - T) - \ln(T_w - T_b) = \ln[f(x, y)]. \quad (3.72)$$

Диференціюючи (1.72) по  $z$ , одержуємо

$$\frac{1}{T_w - T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (3.73)$$

Таким чином,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (1.74)$$

Якщо відомо  $dT_b/dz$ , то локальне значення  $dT/dz$  може бути розраховане відповідно до (3.74). Співвідношення між  $dT_b/dz$  і  $Q_w$  (див. (1.64)) залишається справедливим і в цьому випадку. Тому якщо відомо  $Q_w$ , може бути знайдено і  $dT_b/dz$ .

При розв'язанні (3.54) вираз для джерельного члена (3.57) може бути записаний у вигляді

$$S = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}. \quad (3.75)$$

Через наявність  $T$  в (3.75), з'являється необхідність ліанеризувати джерельний член  $\bar{S} = S_c + S_p \phi_p$ , припустивши, що

$$S_c = -\frac{\rho c_p w T}{T_w - T_b} \frac{dT_b}{dz} \quad (3.76)$$

і

$$S_p = -\frac{\rho c_p w}{T_w - T_b} \frac{dT_b}{dz}. \quad (3.77)$$

Проте це призводить до додатного  $S_p$ , оскільки коли  $(T_w - T_b) > 0$ , то  $dT_b/dz > 0$ . Але для забезпечення збіжності ітераційного процесу небажано використовувати додатні значення  $S_p$ . Тому рекомендується таке подання джерельного члена:



$$S_c = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z}; \quad (3.78)$$

$$S_p = 0. \quad (3.79)$$

Звичайно,  $S_c$  розраховується на кожній ітерації за значеннями  $T$  і  $T_b$ , відомими з попередньої ітерації. Добре, що цей ітераційний процес збігається дуже швидко. Це пояснюється тим, що відношення  $(T_w - T)/(T_w - T_b)$  залежить тільки від розподілу температури, а не від абсолютного значення  $T$ . Тому розв'язання, розпочате навіть з довільного наближення, сходиться досить швидко.

Рівняння (3.54) можна записати у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + \frac{w}{\bar{w}} \frac{\Theta}{\Theta_b} = 0, \quad (3.80)$$

де  $\Theta$  визначається за (3.67). Необхідно помітити, що оскільки  $T_w - T$  і  $dT_b/dz$  спадають по осі  $z$ , безрозмірна температура залишається незалежною від  $z$ . Граничною умовою для (1.80) є значення  $\Theta$  на стінці, що дорівнює нулю.

Число Нуссельта для випадку постійної температури на стінках визначається також за (3.70). З цього випливає, що  $Nu$  залежить тільки від форми поперечного перетину каналу і не залежить від інших параметрів.

**Постійний зовнішній коефіцієнт тепловіддачі.** Розширенням граничної умови з постійною температурою стінок є випадок, коли канал поміщений в осередок з постійною температурою  $T_\infty$  і обмінюється з нею теплом відповідно до виразу

$$q_w = h_e (T_\infty - T_w), \quad (3.81)$$

де  $h_e$  - постійний коефіцієнт тепловіддачі, заданий на зовнішній поверхні каналу. В цьому випадку поставлення задачі аналогічне розглянутій у попередньому пункті. Єдина відмінність полягає у тому, що замість  $T_w$  потрібно використовувати  $T_\infty$  (температура  $T_w$  не залишається постійною, а експоненціально наближається до  $T_\infty$ ). Таким чином, безрозмірна температура  $\Theta$  визначається як

$$\Theta = \frac{T_\infty - T}{(\bar{w}D^2/\alpha)(dT_b/dz)} \quad (3.82)$$

і задовольняє (1.80).

Гранична умова, задана через зовнішній коефіцієнт тепловіддачі і постійну температуру навколишнього середовища, може розглядатися як гранична умова загального вигляду, з якого можна вивести простіші граничні умови. Наприклад, якщо зовнішній коефіцієнт тепловіддачі стає дуже великим, то температура стінки  $T_w$  майже збігається з температурою навколишнього середовища  $T_\infty$ , і ми маємо граничну умову з постійною температурою. При малому коефіцієнті тепловіддачі різниця  $T_\infty - T_w$  стає набагато більшою, ніж перепади температури усередині каналу, тоді на границі досягається умова постійності теплового потоку.

**Складніші граничні умови.** Можна реалізувати складніші граничні умови, застосовуючи граничну умову заданого теплового потоку або температури на стінках тільки до ділянки периметра каналу, а решту частини периметра вважати адіабатичною. Одержані раніше вирази справедливі і у тому випадку, коли на периметрі каналу існують неактивні зони (з нульовим тепловим потоком).

Проте коли на одній ділянці периметра заданий ненульовий тепловий потік, а на решті межі задана температура, то концепція області повністю розвиненого теплообміну повинна бути переглянута. Такі граничні умови можуть привести до досить нецікавих фізичних ситуацій. За умови повністю розвиненого теплообміну заданий тепловий потік надходить в канал через частину

границі і залишатиме його через решту частини, для якої задана температура. Температурне поле не змінюватиметься по поздовжній осі  $z$ . Тому інтегрально рідина не одержуватиме або витрачатиме тепло. З обчислювальної точки зору задача вироджується на випадок чистої теплопровідності, і рух рідини не виконує ніякої ролі.

### 3.7 Завершальні зауваження

Як було показано вище, обмеження випадком повністю розвиненої течії дозволило зменшити розмірність задачі і спростити обчислення. Прості повністю розвинені течії описуються рівнянням теплопровідності. При розв'язанні рівняння для швидкості використовується постійний градієнт тиску як джерельний член. Для певних граничних умов існує область повністю розвиненого теплообміну, в якій профілі температури демонструють деяку подібність. Конвективний член рівняння енергії може розглядатися у вигляді джерельного члена, залежного від розподілу швидкості у поперечному перетині каналу.

Дані про перепад тиску і тепловий потік, одержані з аналізу повністю розвинених течій в каналах, можуть бути використані для характеристики довгих каналів, в яких на більшій частині довжини виконуються умови повністю розвиненої течії.

## 4 Математичне моделювання аерогідродинаміки і тепломасоперенесення

Рівняння перенесення, які впливають із законів збереження маси, імпульсу, енергії [2]

Рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.83)$$

Рівняння перенесення імпульсу

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho f_i + \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (4.84)$$

Тензор напружень ньютонівської рідини

$$\Pi_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \quad (4.85)$$

Тензор напружень реологічного або турбулентного середовища

$$\Pi_{ij} = L_{ij} [u(x', t'); x, t], t' < t. \quad (4.86)$$

Рівняння перенесення тепла (нестислива рідина):

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sigma_T. \quad (4.87)$$

Рівняння дифузії

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u_i \frac{\partial C}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + \sigma_c. \quad (4.88)$$

Рівняння приграничного шару уздовж плоскої поверхні, яка обтікається потоком зі швидкістю  $U(x)$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U(x)U'(x) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = +a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (4.89)$$

## 4.1 Початкові і граничні умови

1 Умова Діріхле

$$u_i(\bar{x}, t) = f_i(x, t) \quad (4.90)$$

на границі області.

Приклади: умова прилипання для швидкості на твердих границях

$\vec{u} = 0$  - умова заданої температури на границі.

2 Умова Неймана

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial n} = g_i(\vec{x}, t) \quad (4.91)$$

на границі області.

Приклади: заданий потік тепла на границі

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_w(\vec{x}, t)$$

3 Змішані граничні умови

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t)}{\partial n} + \kappa u_i(\vec{x}, t) = g_i(\vec{x}, t) \quad (4.92)$$

на границі області.

Приклади: умова тепловіддачі

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = h_w(T - T_a) + \varepsilon(T^4 - T_a^4),$$

приграничні функції для турбулентної течії поблизу твердої границі

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=y_1} = \frac{\nu_\tau(U_1, y_1, \nu)}{\kappa y_1}.$$

## 4.2 Метод скінченних різниць

**Дискретизація рівнянь** – заміна безперервної області сукупністю ізольованих точок (сітка), причому розв'язок рівнянь шукається тільки в цих точках (вузлах сітки).

Рівняння в часткових похідних зводиться до системи алгебраїчних рівнянь.

Основні позначення, які використовуватимуться надалі на прикладі розв'язку деякої задачі  $u(x, y)$  в прямокутнику  $0 \leq x \leq L_x$ ,  $0 \leq y \leq L_y$ . Введемо декартову сітку (рис. 1.7), вузли якої є точками перетинів ліній декартової системи координат з абсцисами  $\{x_i\}$  і ординатами  $\{y_j\}$ , де  $i = 1, \dots, N_x$ ,  $j = 1, \dots, N_y$  - індекси вузлів;  $N_x, N_y$  - кількість вузлів уздовж  $x$ - і  $y$ - напрямків.

Значення обчислюваної змінної у вузлі сітки з просторовими координатами  $x_i$  і  $y_j$  позначається **нижніми** індексами:

$$u_{ij} = u(x_i, y_j).$$

Якщо є залежність від часу, то аналогічно вводиться тимчасова сітка  $u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n)$ , при цьому номер вузла в часі позначається верхнім індексом.

Верхнім індексом позначається також будь-яка маршова координата.

Крок сітки

$$h_i^x = x_i - x_{i-1}.$$



Рисунок 1.7 – Обчислювальна молекула

У випадку, якщо у рівняннях наявні похідні не тільки від фізичної величини, але і від її градієнтів (потоків),

зручно вводити також значення функції в напівцілих вузлах сітки

$$u_{i-1/2,j} = u\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, y_j\right). \quad (4.93)$$

### Скінченно-різницеві апроксимації диференціальних операторів.

Використовується математичний апарат – розкладання у ряд Тейлора.

**Визначення:** припустимо  $Lu(x)$  - диференціальний вираз, а  $L_h u_i$  – його скінченно-різницевий вираз в точці  $x_i$ . Якщо при достатньо малих  $h$  має місце співвідношення

$$Lu(x_i) - L_h u_i = \psi_i = O(h^\gamma), \gamma > 0, \quad (4.94)$$

то  $\psi_i$  називається похибкою апроксимації (відхилом), а величина  $\gamma$  – порядком апроксимації.

Символ  $O$  широко використовується в асимптотичних методах. Вираз  $f(x) = O(g(x))$  для всіх  $x \in S$  означає, що існує така константа  $K$ , яка не залежить від  $x$ , що для всіх  $x \in S$  має місце

$$|f(x)| \leq K|g(x)|.$$

### Скінченно-різницеві апроксимації першої похідної.

**Права різниця** (беруться величини праворуч від вузла):

$$\nabla^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \psi_i^+,$$

**ліва різниця** (беруться величини ліворуч від вузла):

$$\nabla^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i + \psi_i^-,$$

де  $\psi_i^\pm$  - похибки апроксимацій.

З формули Тейлора випливає

$$\psi_i^+ = \frac{h_{i+1}}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_{i+1}^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + O(h_{i+1}^3), \quad \psi_i^- = -\frac{h_i}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_i^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + O(h_i^3), \quad (4.95)$$

тобто  $\psi_i^\pm = O(h)$  – права і ліва різниці мають похибку апроксимації першого порядку.

Якщо додамо праву різницю, помножену на  $h_i$ , і ліву різницю, помножену на  $h_{i+1}$ , то головні члени похибок скоротяться, що дозволяє нам підвищити порядок апроксимації похідної до другого

$$\nabla u_i = \frac{h_i \nabla^+ u_i + h_{i+1} \nabla^- u_i}{h_i + h_{i+1}} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_i + \frac{h_i h_{i+1}}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + O(h_i^3), \quad (4.96)$$

на рівномірній сітці  $h_i = h$  одержуємо центральну різницю

$$\nabla u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}. \quad (4.97)$$

### **Скінченно-різницева апроксимація другої похідної.**

Для отримання апроксимації другої похідної застосуємо двічі центральну-різницевий оператор

$$\nabla^2 u_i = \frac{\nabla u_{i+1/2} - \nabla u_{i-1/2}}{\hbar_i} = \frac{1}{\hbar_i} \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right), \quad (4.98)$$

де  $\hbar_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$  – крок «напівцілої сітки».

Застосовуючи формулу Тейлора, можна показати, що

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h_{i+1} - h_i}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_i + \frac{h_{i+1}^2 - h_i h_{i+1} + h_i^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h_i^3), \quad (4.99)$$



тобто  $\nabla^2 u_i$  є апроксимацією першого порядку.

На «слабонерівномірних» сітках, таких, що  $h_{i+1} - h_i = O(h^2)$ ,  $\nabla^2 u_i$  можна розглядати як апроксимацію другого порядку.

На рівномірній сітці  $\nabla^2 u_i$  є апроксимацією другого порядку

$$\nabla^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^4).$$

**Скінченно-різницева апроксимація дифузійного оператора.**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{du}{dx} \right] \Big|_i &= \frac{1}{\bar{h}_i} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) + \psi_i, \quad (4.100) \\ \psi_i &= \frac{h_{i+1} - h_i}{12} [\lambda u'' + 3(\lambda u')'] \Big|_i + O(h^2). \end{aligned}$$

**Компактні апроксимації високих порядків точності.**

Розглянемо вираз для відхилю скінченно-різницевої апроксимації другої похідної

$$\nabla^2 u_i = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_i + O(h^4). \quad (4.101)$$

Введемо позначення  $q = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  і перепишемо вираз таким чином:

$$\nabla^2 u_i = q_i + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \Big|_i + O(h^4) = q_i + \frac{h^2}{12} \nabla^2 q_i + O(h^4), \text{ або}$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \frac{q_{i+1} + 10q_i + q_{i-1}}{12} + O(h^4) \quad - \quad \text{неявна}$$

апроксимація другої похідної четвертого порядку, яка побудована на триточковому шаблоні.

### 4.3 Метод скінченних об'ємів

У методі скінченних об'ємів диференціальні рівняння перенесення еквівалентні деяким інтегральним законам збереження. Ці інтегральні закони збереження також можуть бути апроксимовані шляхом застосування квадратурних формул наближення інтегралів для кожної елементарної комірки сітки (об'єму). Такий метод одержав назву **методу скінченних об'ємів**. Такий метод дозволяє побудувати консервативні різницеві схеми, тобто схеми, для яких виконуються сіткові аналоги законів збереження.

### Інтегро-інтерполяційний метод побудови різницевої схем.

Розглянемо одновимірне рівняння дифузії

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ \lambda(x) \frac{d\varphi}{dx} \right] - k(x)\varphi + \sigma. \quad (4.102)$$

Позначимо потік величини  $\varphi$  як  $q = -\lambda d\varphi/dx$ ,

$$u(x) \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dq}{dx} - k(x)\varphi + \sigma$$

і проінтегруємо його в інтервалі  $[x_{i-1/2}; x_{i+1/2}]$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = -q_{i+1/2} + q_{i-1/2} + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\sigma - k\varphi] dx. \quad (*)$$

Потоки в напівцілих вузлах виразимо, інтегруючи співвідношення  $d\varphi/dx = -q/\lambda$  у інтервалі  $[x_{i-1}; x_i]$ :

$$\varphi_i - \varphi_{i-1} = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{q(x)}{\lambda(x)} dx = -q_{i-1/2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} + O(h^3).$$

Позначивши

$$\lambda_{i-1/2} = \left[ \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{\lambda(x)} \right]^{-1},$$

можна записати

$$q_{i-1/2} = -\lambda_{i-1/2} \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h_i} + O(h^2).$$

Джерельні члени апроксимуємо за допомогою формули прямокутників

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\sigma - k\varphi] dx = \hbar_i [\sigma_i - k_i \varphi_i] + O(h^3). \quad (4.103)$$

Конвективний доданок можна апроксимувати, наприклад, таким чином:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = u_i (\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^3) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^3).$$

Підставивши одержані вирази в початкове рівняння (\*), одержимо

$$u_i \nabla \varphi_i = \frac{1}{\hbar} \left( \lambda_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - \lambda_{i-1/2} \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right) - k_i \varphi_i + \sigma_i + O(h^2),$$

що еквівалентне одержаній вище апроксимації рівняння дифузії за допомогою методу скінченних різниць.

Форми апроксимації членів конвективного перенесення за допомогою різних квадратурних формул відповідають різним типам різницевих схем МСР:

$$1) \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u d\varphi = u_i(\varphi_{i+1/2} - \varphi_{i-1/2}) + O(h^3) = u_i \frac{(\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1})}{2} + O(h^3) -$$

еквівалентна схемі МСР з центральними різницями;

$$2) \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = \frac{1}{2} [u_{i+1/2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + u_{i-1/2}(\varphi_i - \varphi_{i-1})] + O(h^3);$$

$$3) \int_{\varphi_{i-1/2}}^{\varphi_{i+1/2}} u(x) \frac{d\varphi}{dx} dx = u^+_i(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + u^-_i(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + O(h^3) -$$

еквівалентна різницям проти потоку.

Переваги методу скінченних об'ємів:

- 1) виконання законів збереження;
- 2) можливість розрахунку рівнянь з розривними коефіцієнтами перенесення.

#### 4.4 Стійкість, узгодженість і збіг скінченно-різницевих схем

Чи можна бути упевненим, що чисельний розв'язок диференціального рівняння в часткових похідних буде близьким до точного розв'язку? Можна, якщо різницева схема задовольняє умовам **узгодженості** і **стійкості**.

Система алгебраїчних рівнянь, які одержані у процесі дискретизації, **узгоджується** з початковим диференціальним рівнянням в часткових похідних, якщо в границі, коли розміри комірок сітки наближаються до нуля, система алгебраїчних рівнянь еквівалентна диференціальному рівнянню в часткових похідних в кожному вузлі сітки.

Перевірка на узгодженість: точний розв'язок підставляється у скінченно-різницеві рівняння з подальшим розкладанням всіх вузлових значень в ряд Тейлора в околі однієї точки. Одержаний вираз повинен складатися з початкового диференціального рівняння і залишкового члена. Якщо залишковий член наближається до нуля при

подрібненні сітки, скінченно-різницева схема є узгодженою.

Приклади: рівняння конвекції-дифузії

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

і його скінченно-різницева апроксимація

$$\frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\tau} + u_i \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2h} = D \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{h^2}. \quad (4.104)$$

Замінюємо кожен член розкладаннями в ряд Тейлора:

$$\varphi_{i\pm 1}^n = \varphi_i^n \pm h \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_i + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_i \pm \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i + \frac{h^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i + O(h^5),$$

$$\varphi_i^{n-1} = \varphi_i^n - \tau \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_i + \frac{\tau^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_i + O(\tau^3)$$

і підставляємо в СРС

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right|_i + \frac{h^2}{6} u \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_i - \frac{h^2}{12} D \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_i = O(\tau^2),$$

з початкового рівняння можна виразити всі тимчасові похідні через просторові:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left( D \frac{\partial^2}{\partial x^2} - u \frac{\partial}{\partial x} \right)^2,$$

в результаті одержимо

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_i - \frac{u^2 \tau}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{uh^2}{6} \left( 1 + \frac{6D\tau}{h^2} \right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_i -$$

$$- \frac{h^2}{12} D \left( 1 + \frac{6D\tau}{h^2} \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_i = O(\tau^2, h^3), \quad (4.105)$$

з рівняння видно, що для узгодженості необхідне виконання умов на кроці сітки

$$\tau \ll \frac{D}{u^2}, \frac{h^2}{L^2} \ll 1, \quad (4.106)$$

де  $L$  – характерний масштаб довжини зміни поля  $\varphi(x, t)$

#### 4.5 Стійкість скінченно-різницевих схем. Метод фон Неймана

Не кожна узгоджена скінченно-різницева схема забезпечує збіжність чисельного розв'язку до розв'язання початкового диференціального рівняння в часткових похідних. Необхідно також, щоб вона була стійкою. Для лінійних диференціальних рівнянь в часткових похідних доведена теорема Лакса: *необхідною і достатньою умовою збіжності різницевої схеми для розв'язання коректно поставленої задачі з початковими даними є виконання умов узгодженості і стійкості.*

##### Приклад 1

Проаналізуємо на стійкість явну схему для рівняння теплопровідності

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = a \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{h^2} \quad (*)$$

Розв'язання цього рівняння можна подати у вигляді суми точного розв'язку різницевого рівняння і похибки округлення:

$$T_i^n = \tilde{T}_i^n + \varepsilon_i^n. \quad (4.107)$$

Тоді, підставляючи цей вираз в (\*), одержимо рівняння для похибки

$$\frac{\varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_i^n}{\tau} = a \frac{\varepsilon_{i+1}^n - 2\varepsilon_i^n + \varepsilon_{i-1}^n}{h^2}, \text{ або } \varepsilon_i^{n+1} = s\varepsilon_{i+1}^n + (1-2s)\varepsilon_i^n + s\varepsilon_{i-1}^n,$$

$$\text{де } s = \frac{a\tau}{h^2}. \quad (**)$$

Представимо похибку  $\varepsilon(x)$  у вигляді суми ряду Фур'є. Зображення Фур'є для функції  $g(x)$  на інтервалі  $0 \leq x \leq L$  має вигляд

$$g(x) = \sum_m g_m e^{ik_m x}, \quad k_m = \frac{2\pi n}{L}, \quad g_m = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) e^{-ik_m x} dx. \quad (4.108)$$

Для коміркової функції Фур'є - амплітуда записується як апроксимація

$$\varepsilon(x, t) = \sum_m \varepsilon_m(t) e^{ik_m x}, \quad (4.109)$$

$$\text{де } k_m = \frac{2\pi n}{L}, \quad \varepsilon_m = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(x) e^{-ik_m x} dx.$$

Лінійність рівняння дозволяє розглядати кожен гармоніку окремо. Шукаємо розв'язок (\*\*\*) у вигляді

$$\varepsilon_i^n = G^n e^{ikx};$$

підставляючи в (\*\*), одержуємо

$$G = se^{ikh} + 1 - 2s + se^{-ikh} = 1 - 4s \sin^2 \frac{kh}{2}. \quad (4.110)$$

Величина  $G$  називається коефіцієнтом переходу (amplification factor).

Для стійкості необхідно, щоб  $|G| \leq 1$ , що виконується

$$\text{при } s \leq \frac{1}{2}, \text{ або } \frac{a\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

Приклад 2

Проаналізуємо стійкість схеми з різницями вперед за часом і центральними різницями по простору (ВЧЦП) для розв'язання одновимірного рівняння конвекції

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Схема має вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0.$$

Підставляючи  $u_i^n = G^n e^{ikx}$ , знаходимо

$$G = 1 - i \frac{c\tau}{h} \sin kh = 1 - iC \sin kh, \text{ де } C = \frac{c\tau}{h} \text{ – так зване число}$$

Куранта.

Схема **безумовно нестійка**. Застосуємо замість центральної різниці ліву різницю (різниця проти потоку)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0.$$

У цьому випадку

$$G = 1 - C(1 - e^{-ikx}) = 1 - C + Ce^{-ikx}.$$

Модуль  $G$  менше одиниці і схема стійка (див. рис. 1.8), коли виконується умова **Куранта-Фрідрікса-Леві (КФЛ)**

$$0 < C < 1,$$

яка застосовується до всіх явних схем для рівнянь гіперболічного типу.

Умова КФЛ означає, що частинка середовища за один крок за часом не повинна просуватися більш ніж на один просторовий крок.

#### 4.6 Методи розв'язання сіткових рівнянь. Прямі методи



Методи розв'язання систем з тридіагональними матрицями

$$(Au)_i = -a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} = f_i, \quad i=1, \dots, N, \quad a_1 = c_N = 0 \quad (*)$$

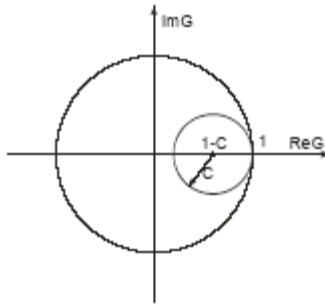


Рисунок 1.8 – Зображення умови Куранта-Фрідрікса-Леві

У розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} b_1 u_1 - b_1 u_2 &= f_1, \\ -a_2 u_1 + b_2 u_2 - c_2 u_3 &= f_2, \\ &\dots \\ -a_N u_{N-1} + b_N u_N &= f_N. \end{aligned}$$

Перший і останній рядки є граничними умовами, тому важливо, щоб звичайно-різницева формулювання граничних умов було двоточковим:

1) умова Діріхле:

$$b_1 = 1, c_1 = 0, f_1 = u_a;$$

2) умова Неймана:

$$b_1 = 1, c_1 = 0, f_1 = -h_2 \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_{i/2}}.$$

**Метод прогону (Thomas Algorithm, TDMA).**

Шукаємо розв'язок (\*) у вигляді

$$u_i = \beta_i u_{i+1} + z_i, \quad i = N, \dots, 1. \quad (4.111)$$

Підставляємо

$$u_{i-1} = \beta_{i-1} u_i + z_{i-1}$$

у (\*) і одержуємо

$$u_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}} u_{i+1} + \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad (4.112)$$

звідси

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad z_i = \frac{f_i + a_i z_{i-1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Якщо система (\*) має властивість діагонального переважання

$$a_i \neq 0, c_i \neq 0 \text{ для } i = 2, \dots, N-1, |b_i| \geq |a_i| + |c_i|,$$

причому хоча б для одного  $i$  нерівність строга, то метод прогону коректний.

$$\text{Доведення: для } i = 1, |\beta_i| \leq 1,$$

$$\text{для } i > 1, |b_i - a_i \beta_{i-1}| \geq \|b_i\| - |a_i| \|\beta_{i-1}\| \geq \|b_i\| - |a_i| \geq |c_i| \Rightarrow |\beta_i| \leq 1.$$

Доведення справедливе тільки при абсолютно точній арифметиці. Розглянемо симетричну матрицю

$$b_i = 2, a_i = c_i = 1 \text{ для } i = 1, \dots, N-1, a_N = b_N = 1.$$

Для такої матриці

$$\beta_i = \frac{1}{2 - \beta_{i+1}}, 1 - \beta_i = \frac{1 - \beta_{i-1}}{1 + (1 - \beta_{i-1})}, \varepsilon_i = 1 - \beta_i = \frac{\varepsilon_{i-1}}{1 + \varepsilon_{i-1}} \rightarrow 0. \quad (4.113)$$

Знаходимо таке  $N$ , що  $\beta_{N-1}$  буде з точністю до всіх розрядів дорівнювати 1, що приведе при розрахунку до ділення на нуль.

Можна взяти альтернативний варіант з протилежним напрямком обчислень

$$\hat{\beta}_i = \frac{a_i}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}, \quad \hat{z}_i = \frac{f_i + c_i \hat{z}_{i+1}}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}, \quad i = N, \dots, 1,$$

$$u_i = \hat{\beta}_i u_{i-1} + \hat{z}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

На основі двох варіантів прогонів можна побудувати метод зустрічних прогонів.

Нехай дано деяке

$$i_0, \quad 1 \leq i_0 \leq N - \text{«місце зустрічі»}.$$

Виконаємо прямий хід для  $1 \leq i \leq i_0 - 1$ :

$$\beta_i = \frac{c_i}{b_i - a_i \beta_{i-1}}, \quad z_i = \frac{f_i + a_i z_{i+1}}{b_i - a_i \beta_{i-1}}$$

і зворотний хід для  $i_0 + 1 \leq i \leq N$ :

$$\hat{\beta}_i = \frac{a_i}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}, \quad \hat{z}_i = \frac{f_i + c_i \hat{z}_{i+1}}{b_i - c_i \hat{\beta}_{i+1}}$$

Потім в рівняння для

$$u_{i_0} - a_{i_0} u_{i_0-1} + b_{i_0} u_{i_0} - c_{i_0} u_{i_0+1} = f_{i_0}$$

підставляємо

$$u_{i_0} = \beta_{i_0} u_{i_0+1} + z_{i_0},$$

$$u_{i_0} = \hat{\beta}_{i_0} u_{i_0-1} + \hat{z}_{i_0}.$$

У результаті одержимо

$$u_{i_0} = \frac{f_{i_0} + a_{i_0} z_{i_0-1} + c_{i_0} \hat{z}_{i_0+1}}{b_{i_0} - a_{i_0} \beta_{i_0-1} - c_{i_0} \hat{\beta}_{i_0+1}}. \quad (4.114)$$

Після цього знаходимо  $u_i$  з виразів

$$u_i = \beta_i u_{i+1} + z_i, \quad \text{для } 1 \leq i \leq i_0,$$

$$u_i = \hat{\beta}_i u_{i_0-1} + \hat{z}_i, \quad i_0 < i < N.$$

Метод зустрічних прогонів може застосовуватися для підвищення чисельної стійкості (зниження довжини рекурсії) і для розпаралелювання задачі.

Про чисельну реалізацію алгоритму Томаса:

1) для  $i = 2, \dots, N$  обчислюємо

$$b_i \leftarrow b_i - \frac{a_i c_i}{b_{i-1}}, \quad f_i \leftarrow f_i + \frac{a_i f_{i-1}}{b_{i-1}};$$

2) для  $i = N, \dots, 1$  обчислюємо  $c_i \leftarrow \frac{c_i c_{i+1} + f_i}{b_i}$ .

Число арифметичних операцій у методі прогону =  $=9N$ .

#### 4.7 Ітераційні методи

**Ітераційні методи розв'язання нелінійних рівнянь.**

Потрібно розв'язати рівняння

$$f(x) = 0,$$

тобто знайти корені рівняння у заданій області

$$[a, b].$$

1 Вивчається розміщення кореня і виділяються області, що містять тільки один корінь. Досліджується кратність кореня.

2 Використовуючи початкові наближення, будується ітераційний процес.

Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь є, як правило, ітераційними методами, які припускають задання досить близьких до шуканого розв'язку початкових даних.

Прості методи розв'язання:

1. Обчислюється таблиця значень

$$f(x_k), \quad k = 0, \dots, N, \quad x_k \in [a, b].$$
 Якщо і  $f(x_{k+1})$

мають різні знаки, корені рівняння знаходять в інтервалі

$$x_k < x^* < x_{k+1}.$$

Знову розбиваємо цей відрізок на дрібніші інтервали і уточнюємо розміщення  $x^*$ .

#### 4.8 Застосування методів скінченних різниць для розв'язання модельних рівнянь

##### Рівняння гіперболічного типу.

Приклад: рівняння газової динаміки в акустичному наближенні

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.115)$$

Якщо вважати збудження густини і швидкості малими величинами, одержимо лінеаризоване рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

При високих частотах коливань кожен газовий об'єм можна вважати адіабатичним, тому мала зміна тиску пов'язана з малою зміною густини через рівняння стану

$$p = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right), \rho = c_i^2 \rho. \quad (4.116)$$

Звідси випливає рівняння акустики

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (4.117)$$

Рівняння можна подати у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \rho = 0.$$

Загальніший випадок: система квазілінійних рівнянь 1-го порядку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij}(x, t, \bar{u}) \frac{\partial u_j}{\partial x} = b_i(x, t, \bar{u}). \quad (4.118)$$

Для визначення типу рівняння необхідно знайти власні числа  $\lambda^{(n)}$  і власні вектори  $l_i^{(n)}$  матриці  $A_{ij}$  з рівняння

$$A_{ij} l_j = \lambda l_i.$$

Система буде гіперболічною, якщо всі власні значення в даній області простору  $(x, t, \bar{u})$  дійсні і різні.

Помножимо рівняння на  $k$ -й власний вектор і врахуємо його визначення

$$l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = l_i^{(k)} \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) = l_i^{(k)} b_i.$$

Оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \lambda^{(k)} \frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_k$$

є похідною уздовж лінії, що задається рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = \lambda^{(k)}(x, t, \bar{u}),$$

яка називається **характеристикою**.

Рівняння можна записати у характеристичній формі

$$l_i^{(k)} \left( \frac{du_i}{dt} \right)_k = l_i^{(k)} b_i.$$

Початкові умови для гіперболічної системи рівнянь можна задавати на будь-якій кривій  $C$ , напрям якої не збігається з напрямом характеристик.

Простішим гіперболічним рівнянням є одновимірне лінійне **рівняння перенесення**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

яке має точний розв'язок для початкових умов

$$u(x,0) = F(x),$$

$$u(x,t) = F(x - ct).$$

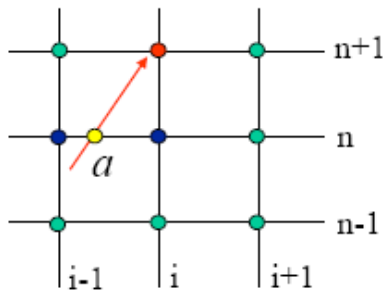


Рисунок 1.9 – Зображення інтерполяційно-характеристичного методу

**Різницеві схеми для рівнянь перенесення. Явний метод Ейлера.**

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad \text{Похибка} \quad \text{апроксимації}$$

$O(\Delta t, \Delta x^2)$ .

Проведемо аналіз стійкості методом Неймана. Перепишемо схему у вигляді

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{C}{2} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n), \quad \text{де } C = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{ - число Куранта.}$$

підставляємо в неї  $u_i \sim \exp(\lambda t + ikx)$ , після чого отримуємо  $e^{\lambda\Delta t} = 1 - C \sin k\Delta x$  - завжди стійка!

Нижче будемо користуватися так званим інтерполяційно-характеристичним методом побудови різницевих схем для рівняння перенесення. У цьому підході використовується властивість перенесення розв'язку вздовж характеристик. Розв'язок в точці  $u_i^{n+1} = u(x_i, t^{n+1})$  буде дорівнювати значенню функції з попереднього шару у точці  $a$  (див. рис. 1.9):

$$u_i^{n+1} = u(a, t^n), a = x_i - c\Delta t = x_i - C\Delta x.$$

Для того щоб побудувати схему, потрібно виразити величину  $u(a, t^n)$  через значення функції у сусідніх вузлах за допомогою інтерполяції.

### **Метод різниць проти потоку.**

Лінійна інтерполяція по сусідніх вузлах

$$u(a, t^n) = u_i^n - (u_i^n - u_{i-1}^n) \frac{a - x_i}{x_i - x_{i-1}} - \text{опорні вузли беруться, як}$$

на рисунку

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

Похибка апроксимації

$$O(\Delta t, \Delta x).$$

Проте схема є точною при

$$C = 1, \text{ коли } a = x_{i-1}.$$

Розглянемо рівняння диференціального наближення (або модифіковане рівняння). Для цього підставимо в скінченно-різницеву схему розкладення у ряд Тейлора в околі точки  $(x_i, t^n)$  для функції,  $u(x, t)$ , яка збігається з чисельним розв'язком у вузлах сітки



$$\frac{1}{\Delta t} \left\{ u_i^n + \Delta t u_{it} + \frac{\Delta t^2}{2} u_{iit} + \frac{\Delta t^3}{6} u_{iii} + O(\Delta t^4) - u_i^n \right\} + \frac{c}{\Delta x} \left\{ u_i^n - \left[ u_i^n - \Delta x u_{ix} + \frac{\Delta x^2}{2} u_{ixx} - \frac{\Delta x^3}{6} u_{ixxx} + O(\Delta x^4) \right] \right\} = 0,$$

$$u_{it} + cu_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{iit} + \frac{c\Delta x}{2} u_{ixx} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{iii} - c \frac{\Delta x^2}{6} u_{ixxx} + \dots$$

Оскільки,  $u_{it} + cu_x = O(\Delta t, \Delta x)$ , то

$u_{iii} = c^3 u_{ixxx} + O(\Delta t, \Delta x)$ , крім того,

$$u_{iit} = c^2 u_{ixx} + \Delta t \left[ -\frac{u_{ixxt}}{2} + \frac{c}{2} u_{iitx} + O(\Delta t) \right] + \Delta x \left[ -\frac{cu_{ixxt}}{2} + \frac{c^2}{2} u_{ixxx} + O(\Delta x) \right] = c^2 u_{ixx} - c^2 \Delta x (1-C) u_{ixxx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2),$$

оскільки

$$u_{it} + cu_x = -\frac{\Delta t}{2} u_{iit} + \frac{c\Delta x}{2} u_{ixx} - \frac{\Delta t^2}{6} u_{iii} - c \frac{\Delta x^2}{6} u_{ixxx} + \dots,$$

у результаті одержуємо диференціальне наближення

$$u_{it} + cu_x = \frac{c\Delta x}{2} (1-C) u_{ixx} - \frac{c\Delta x^2}{6} (1-C)(1-2C) u_{ixxx} + O(\Delta x^3). \quad (4.119)$$

Видно, що при числах Куранта, менших за одиницю, наявна схемна вязкість і дисперсія. Дисперсійне співвідношення для цього рівняння має вигляд

$$\omega = ck - \frac{c\Delta x^2}{6} (1-C)(1-2C)k^3 - i \frac{c\Delta x}{2} (1-C)k^2.$$

Фазова швидкість

$$c_{ph} = c - \frac{c\Delta x^2}{6} (1-C)(1-2C)k^2$$

$0 < C < 0.5$  – відставання по фазі, при  $0.5 < C < 1$  – випередження.

## Центрована за часом неявна схема (Crank-Nicolson Method).

Апроксимуємо рівняння у точці  $(x_i, t^{n+1/2})$ :

$$\frac{\partial u(x_i, t^{n+1/2})}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2),$$

$$\frac{\partial u(x_i, t^{n+1/2})}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u(x_i, t^n)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_i, t^{n+1})}{\partial x} \right) + O(\Delta x^2), \quad (4.120)$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) = 0.$$

Похибка апроксимації  $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ .

Стойкість

$$e^{\lambda \Delta t} = \frac{1 - (iC/2) \sin k\Delta x}{1 + (iC/2) \sin k\Delta x},$$

безумовно стійка.

Диференціальне наближення

$$u_t + cu_x = -\frac{c\Delta x^2}{6} \left( 1 + \frac{C^2}{2} \right) u_{xxx} - \frac{c\Delta x^4}{120} \left( 1 + 5C^2 + \frac{3C^4}{2} \right) u_{xxxx} - O(\Delta x^4),$$

схемна в'язкість дорівнює нулю.

## 4.9 Чисельні методи розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса нестисливої рідини

Рівняння нерозривності:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Рівняння перенесення імпульсу

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad \tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.121)$$

Рівняння перенесення тепла

$$\rho c_p \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_i T)}{\partial x_i} \right] = - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \sigma, \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \quad (4.122)$$

Рівняння Нав'є-Стокса для стисливої рідини утворюють змішану систему гіперболічно-параболічних рівнянь, а для нестисливої рідини еліптично-параболічних. Тому в цих двох випадках використовуються різні чисельні методи розв'язання.

Для розв'язання рівнянь стисливої рідини широко використовуються явні методи розрахунку: методи Дюфорта-Франкела, Лакса-Вендроффа, Мак-Кормака та ін. Використання цих методів для розрахунку нестисливих течій не можливе через обмеження на крок за часом, що накладається умовою Куранта-Фрідріхса-Леві

$$\Delta t \leq \Delta x / c_{звуку}.$$

Нестисливість течії приводить до додаткових обчислювальних труднощів: до рівнянь нерозривності входять лише компоненти швидкості. Тому в даному випадку немає прямого зв'язку з тиском, який у разі стисливих течій здійснюється через густину. Для розрахунку тиску потрібно розв'язувати еліптичне рівняння Пуассона разом із рівнянням імпульсів.

### **Особливості дискретизації рівнянь Нав'є-Стокса.**

Найчастіше трапляються рівняння перенесення субстанцій, які для нестисливої рідини мають вигляд узагальненого рівняння перенесення:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \Phi)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \sigma_\Phi. \quad (*)$$

**Форма запису рівнянь.** Для скінченно-різницевої дискретизації можна використовувати як дивергентну форму (\*), так і недивергентну форму

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \sigma_\Phi,$$

проте досвід чисельних розрахунків (наприклад, для тестової задачі течії у квадратній каверні) показав, що дивергентна форма запису (\*) приводить до точніших результатів.

Замість параметризації вузлів сітки  $(i, j, k)$  використовується одновимірна згортка тривимірних координат з використанням позначень, які відповідають сторонам світу (див. рис. 1.10, табл. 1.1).

Система скінченно-різницевих рівнянь (п'ятиточковий шаблон для двовимірного рівняння) записується у вигляді

$$A_w \phi_w + A_s \phi_s + A_p \phi_p + A_N \phi_N + A_E \phi_E = Q_p, \text{ для } 1 < i < N_i N_j N_k,$$

або скорочено

$$A_p \phi_p + \sum_{nb} A_{nb} \phi_{nb} = Q_p, \quad (4.123)$$

де nb – neighbors, сусідні вузли.

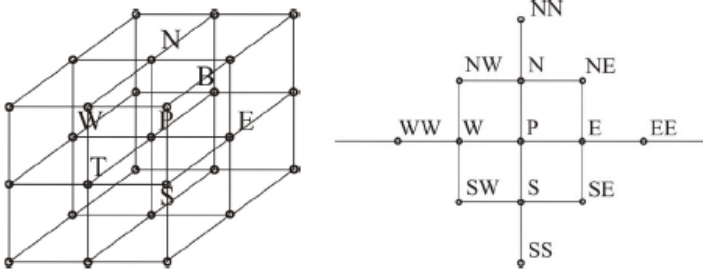


Рисунок 1.10 – Розрахунковий шаблон (Computational molecule)

Одновимірні індекси тривимірного розрахункового шаблону

Таблиця 1.1

Вузол сітки	Позначення	Одновимірний індекс
$i, j, k$	P	$l = (k-1)N_j N_i + (i-1)N_i + j$
$i-1, j, k$	W	$l - N_j$
$i, j-1, k$	S	$l - 1$
$i, j+1, k$	N	$l + 1$
$i+1, j, k$	E	$l + N_j$
$i, j, k-1$	B	$l - N_i N_j$
$i, j, k+1$	T	$l + N_i N_j$

Проінтегруємо узагальнене рівняння перенесення по елементарному об'єму, грані якого проходять через середини відрізків, що з'єднують даний вузол із сусідніми (див. рис. 1.11).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \Phi dV + \int_S u_i \Phi dS_i = \int_S D_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dS_i + \int_V \sigma_\Phi dV. \quad (4.124)$$

Апроксимації поверхневих інтегралів:

$$\int_S f dS_i = \sum_k \int_S f dS_i - \text{сума по всіх гранях об'єму.}$$

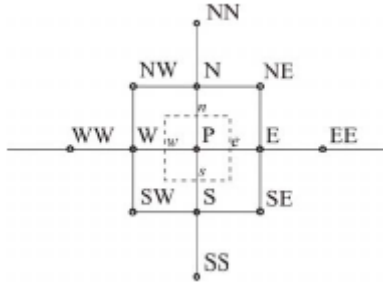


Рисунок 1.11 – Контрольний об'єм

Розглянемо грань  $e$  і інтеграл

$$F_e = \int_{S_k} f dS_i .$$

1) Формула прямокутників

$$F_e = f_e S_e$$

– 2-й порядок апроксимації (найпростіша).

2) Формула трапецій

$$F_e = \frac{(f_{ne} + f_{se})}{2} S_e \text{ – 2-й порядок апроксимації.}$$

3) Формула Сімпсона

$$F_e = \frac{(f_{ne} + 4f_e + f_{se})}{6} S_e \text{ – 4-й порядок апроксимації.}$$

Апроксимації об'ємних інтегралів

$$\int_V \Phi dV = \Phi_p V_p \text{ – 2-й порядок апроксимації.}$$

Застосувавши апроксимації за методом прямокутників, одержимо

$$V_p \frac{\Phi_p - \tilde{\Phi}_p}{\Delta t} + (u_e \Phi_e - u_w \Phi_w) S_e + (v_n \Phi_n - u_z \Phi_z) S_n = D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_w^e S_e + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_z^n S_n + \sigma_p V_p .$$

Дифузійні члени

$$D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e = D_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x} - \text{2-й порядок апроксимації.}$$

**Апроксимації конвективних членів:**

**Інтерполяція по потоку (Upwind Differencing Scheme).**

$$\Phi_e = \begin{cases} \Phi_P, u_e > 0, \\ \Phi_E, u_e < 0, \end{cases} \quad (4.125)$$

$$u_e \Phi_e = \frac{u_e + |u_e|}{2} \Phi_P + \frac{u_e - |u_e|}{2} \Phi_E.$$

$$\Phi_P = \Phi_e - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e + \dots, \quad u_e \Phi_e = u_e \Phi_P + \frac{u_e \Delta x}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_e + \dots -$$

виникає додаткова схемна дифузія.

**Лінійна інтерполяція (Central Differencing Scheme):**

$$\Phi_e = \frac{\Phi_E + \Phi_P}{2} - \quad (4.126)$$

2-й порядок апроксимації, але при розв'язанні виникають осциляції через порушення умови монотонності і діагонального переважання при великих значеннях сіткового числа Рейнольдса

$$R_\Delta = u_e \Delta x / \nu \geq 2.$$

**Квадратична інтерполяція по потоку (QUICK):**

$$\Phi_e = \begin{cases} \frac{6}{8} \Phi_P + \frac{3}{8} \Phi_E - \frac{1}{8} \Phi_W, & u_e > 0, \\ \frac{6}{8} \Phi_E + \frac{3}{8} \Phi_P - \frac{1}{8} \Phi_{EE}, & u_e < 0, \end{cases} \quad (4.127)$$

$$u_e \Phi_e = \frac{9u_e + 3|u_e|}{16} \Phi_P + \frac{9u_e - 3|u_e|}{16} \Phi_E - \frac{u_e + |u_e|}{16} \Phi_W - \frac{u_e + |u_e|}{16} \Phi_{EE} -$$

3-й порядок апроксимації, але умови монотонності і діагонального переважання при великих  $R_\Delta$  також не виконуються. Через це виникають проблеми при ітераційному розв'язанні відповідної системи лінійних рівнянь (повільна збіжність), а також нефізичні осциляції.

Крім того, одновимірний розрахунковий шаблон перестає бути 3-точковим, що не дозволяє використовувати метод прогону при розв'язанні.

Уникнути цих труднощів допомагає **метод відкладеної корекції (Deferred Correction)**. Скінченно-різницева апроксимація високого порядку подається у вигляді суми протипотокової схеми і залишку, який виноситься у джерельний член і обчислюється з попередньої ітерації

$$F_e = F_e^{low} + (F_e^{high} - F_e^{low})^{old}. \quad (4.128)$$

Приклад. Розглянемо рівняння дифузії

$$c \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right),$$

$$\frac{c \Delta x}{D} (\Phi_e - \Phi_w) = \Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W.$$

Схема UDS 1-го порядку точності:

$$R(\Phi_P - \Phi_W) = \Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W,$$

$$\Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = 0.$$

Схема QUICK 1-го порядку точності:

$$R \left( \frac{3}{8} \Phi_P - \frac{7}{8} \Phi_W + \frac{3}{8} \Phi_E + \frac{1}{8} \Phi_{WW} \right) = \Phi_E - 2\Phi_P + \Phi_W,$$

$$\left( 1 - \frac{3}{8} R \right) \Phi_E - \left( 2 + \frac{3}{8} R \right) \Phi_P + \left( 1 + \frac{7}{8} R \right) \Phi_W - \frac{R}{8} \Phi_{WW} = 0,$$

останній вираз можна записати у вигляді



$$\begin{aligned} & \Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = \\ & = R \left( \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{5}{8}\Phi_P + \frac{1}{8}\Phi_W + \frac{1}{8}\Phi_{WW} \right). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Метод відкладеної корекції реалізується у вигляді ітераційного процесу

$$\begin{aligned} & \Phi_E - (2 + R)\Phi_P + (1 + R)\Phi_W = \\ & = R \left( \frac{3}{8}\Phi_E - \frac{5}{8}\Phi_P + \frac{1}{8}\Phi_W + \frac{1}{8}\Phi_{WW} \right)^{old} \end{aligned} \quad (4.130)$$

на кожній ітерації використовується метод прогону, рахунок за яким стійкий.

**Ітераційні алгоритми сумісного розв'язання рівнянь перенесення імпульсу і нерозривності: методи проєкції.**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial (u_j^n u_i^{n+1})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}^{n+1}}{\partial x_i} \\ & u_i^n, p^n \rightarrow u_i^{n+1}, p^{n+1} ? \end{aligned} \quad (4.131)$$

У сім'ї методів корекції тиску проблема вирішується таким чином. Спочатку знаходиться проміжне поле швидкості  $\tilde{u}_i$  з рівняння імпульсів із «старим» тиском

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_j^n \tilde{u}_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_i}.$$

Поле швидкості  $\tilde{u}_i$  не задовольняє рівняння нерозривності. Тому на наступному етапі шукаються поправки до поля швидкості і тиск для того, щоб задовольнити це рівняння:  $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i + u_i'$ ,  $p^{n+1} = p^n + p'$ .

Підставляючи в (4.131) і в рівняння нерозривності, одержимо рівняння для поправок швидкості і тиску

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial(u'_j u'_i)}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x_i}; \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}.$$

Нехтуючи в'язкими і конвективними членами, одержимо

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}. \quad (4.132)$$

Інтегруючи це рівняння на інтервалі  $[t^n, t^{n+1}]$ , одержимо

$$u'_i = -\Delta t \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}, \quad (4.133)$$

звідки, з урахуванням виразу для дивергенції поправки швидкості одержимо рівняння Пуассона для тиску, розв'язуючи яке знайдемо шукані поправки до швидкості з (1.133).

$$\Delta p' = \frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}.$$

З (4.133) видно, що поправка до швидкості є безвихоровою, оскільки є градієнтом деякого потенціалу, який пропорційний до тиску. Методи подібного типу, в яких на першому кроці обчислюється поле швидкості, що не задовольняє рівняння нерозривності, а потім з нього виділяється соленоїдна складова («соленоїдна проекція»), називаються методами проекції. Наближенню (4.132) можна додати цікаву фізичну інтерпретацію. Рівняння (4.132) збігаються з рівняннями теорії імпульсного руху рідини (наприклад, у результаті удару). Такі рівняння впливають з повних рівнянь Нав'є-Стокса в межах дуже малої тимчасової тривалості удару, тобто коли

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} \sim \delta(t - t^{n+1}) \frac{\partial \Pi}{\partial x_i},$$

де величина  $\Pi = \int p' dt$  називається імпульсом тиску.

Таким чином, наближення (4.132) відповідає короткочасному гідравлічному удару, який «повертає рідину в нестисливий стан».

### Метод SIMPLE.

Розглянемо реалізацію цієї ідеї в популярному методі **SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation)**.

Скінченно-різницеве рівняння імпульсів, яке необхідно розв'язати на  $n+1$  кроці за часом, має вигляд

$$A_p^{u_i} u_{i,P} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} u_{i,nb} = Q_{u_i}^{n+1} - \left( \frac{\delta p^{n+1}}{\delta x_i} \right)_P. \quad (4.134)$$

Рівняння розв'язується ітераціями, які називатимемо *зовнішніми* ітераціями (на відміну від *внутрішніх* ітерацій при розв'язанні системи лінійних рівнянь).

На першому кроці  $m$ -ї зовнішньої ітерації розв'язується рівняння для проміжного поля швидкості

$$A_p^{u_i} \tilde{u}_{i,P}^m + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} \tilde{u}_{i,nb}^m = Q_{u_i}^{m-1} - \left( \frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P,$$

потім шукається така поправка до нього, яка задовольняла б скінченно-різницеве рівняння нерозривності, тобто

$$\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right)_P = - \left( \frac{\partial \tilde{u}_i^m}{\partial x_i} \right)_P. \quad (4.135)$$

Рівняння для відповідних поправок швидкості і тиску випливає з (4.134):

$$A_p^{u_i} u'_{i,P} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} u'_{i,nb} = - \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P. \quad (4.136)$$

У методі SIMPLE (Patankar, Spalding, 1972) сумою в лівій частині нехтує, після чого виходить наближений розв'язок

$$u'_{i,P} \approx -\frac{1}{A_p^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P, \quad (4.137)$$

підставивши який в (4.135), одержимо рівняння Пуассона для поправки тиску

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A_p^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P \right] = \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_P. \quad (4.138)$$

Як показали чисельні експерименти, обчислену звідси поправку тиску необхідно піддати нижній релаксації так, що підсумкові вирази для тиску і швидкості мають вигляд

$$p^m = p^{m-1} + \alpha_p p', \quad u_{i,P}^m \approx \tilde{u}_{i,P}^m - \frac{\alpha_p}{A_p^{u_i}} \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_P, \quad \text{де } \alpha_p \leq 1. \quad (4.139)$$

Рекомендоване значення  $\alpha_p$  становить близько 0.8 (Patankar, 1980). Рівняння для проміжної швидкості також рекомендується вирішувати за допомогою оригінального варіанта методу нижньої релаксації, запропонованого Патанкар, в якому замість рівняння (4.134) розв'язується

$$\frac{A_p^{u_i}}{a_u} \tilde{u}_{i,P}^m + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i} \tilde{u}_{i,nb}^m = Q_{u_i}^{m-1} - \left( \frac{\delta p^{m-1}}{\delta x_i} \right)_P + \frac{1 - \alpha_u}{\alpha_u} A_p^{u_i} \tilde{u}_{i,P}^{m-1}, \quad (4.140)$$

де  $\alpha_u$  – коефіцієнт нижньої релаксації, оптимальне значення якого становить (Ferziger, Peric, 1996)

$$\alpha_u = 1 - \alpha_p. \quad (4.141)$$

Фактично, рівняння (4.140) можна одержати з (4.134) додаванням в ліву частину похідної за псевдочасом, причому крок за псевдочасом дорівнює

$$\Delta \tau = \frac{\alpha_u}{(1 - \alpha_u) A_P^{u_i}}. \quad (4.142)$$

Рівняння (4.140) при цьому розв'язується неявним методом до встановлення, що підвищує стійкість ітераційного процесу.

### Метод SIMPLEC.

«Слабким місцем» наведеного вище рівняння для поправки тиску (1.138) є нехтування сумою в лівій частині (4.136). З погляду розглянутої вище аналогії дії поправки тиску з гідравлічним ударом таке нехтування означає, що швидкість від дії імпульсу поправки тиску змінюється тільки в точці  $P$ , тоді як для сусідніх точок ми вважаємо  $u'_{i,nb} \approx 0$ . В той самий час гідравлічний удар діє на весь об'єм рідини відразу, тому швидкість у сусідніх вузлах повинна змінюватися на величину такого ж порядку. Виходячи з цих міркувань, можна уточнити наближення (4.137), взявши в (4.136)  $u'_{i,nb} \approx u'_{i,P}$ . Тоді замість (4.137) одержимо

$$u'_{i,P} \approx - \frac{1}{A_P^{u_i} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}} \left( \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P. \quad (4.143)$$

Рівняння Пуассона для поправки тиску (5) набуває вигляду

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \frac{1}{A_P^{u_i} + \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}} \left( \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)_P \right] = \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_P. \quad (4.144)$$

Даний метод відомий як SIMPLEC (SIMPLE Corrected) (Van Doormal, Raithby, 1984). Він має швидшу збіжність при розв'язанні стаціонарних задач. З порівняння (4.141), (4.142) із співвідношеннями (4.137) – (4.139) методу SIMPLE видно, що метод SIMPLEC еквівалентний методу SIMPLE з коефіцієнтом релаксації тиску, що дорівнює

$$\alpha_p = 1 + \frac{\sum A_{nb}^{u_i}}{A_p^{u_i}}. \quad (4.145)$$

Неважко перевірити, що для всіх консервативних схем повинне виконуватися співвідношення на коефіцієнти різницевої схеми

$$A_p^{u_i} = A_p^t - \sum_{nb} A_{nb}^{u_i}, \quad (4.146)$$

де  $-A_p^t$  внесок від нестационарного члена. Для повністю неявної схеми, наприклад,  $A_p^t = \rho/\Delta t$ , тоді рівняння для поправки тиску в методі SIMPLEC набуває такого вигляду, що збігається з рівнянням (4.136)

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \left[ \left( \frac{\delta p'}{\delta x_i} \right)_p \right]_p = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\delta \tilde{u}_i^m}{\delta x_i} \right)_p.$$

Для стаціонарних задач  $A_p^t = 0$  і необхідно розв'язувати рівняння для швидкості з нижньою релаксацією (4.140). У цьому випадку

$$A_p^{u_i} = -\frac{\sum A_{nb}^{u_i}}{\alpha_u},$$

і вираз (4.143) збігається з наведеним вище співвідношенням (4.141), що можна розглядати як його обґрунтування.

## 5 Розв'язання рівнянь гідродинаміки у програмних кодах

У загальному випадку ньютонівська рідина, яка стискається, описується п'ятьма рівняннями в частинних похідних [4,5]. Перше з цих рівнянь описує збереження маси, яке означає, що величина масової витрати в об'ємі, що

втікає, дорівнює масовій витраті в об'ємі, що витікає відповідно до

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (5.147)$$

де  $\rho$  - густина рідини;  $u$  - вектор швидкості в декартовій системі координат.

Другий закон Ньютона в комбінації з фактом, що для ньютонівської рідини розмір діючих напружень на контрольний об'єм пропорційний величині деформацій, що описується у відомих рівняннях Нав'є-Стокса. Три рівняння, які подані нижче, описують закон збереження кількості руху в трьох напрямках. Величина збільшення кількості руху частинки рідини дорівнює сумі сил, що діють на частинку, і описується такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{M_x}, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v u) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) + S_{M_y}, \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho w u) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) + S_{M_z}, \end{aligned} \quad (5.148)$$

де  $p$  - тиск;  $\mu$  - динамічна в'язкість,  $u, v, w$  - компоненти швидкості  $u$ .

Останнє рівняння у частинних похідних, яке визначає потік, це рівняння енергії, яке впливає з першого закону термодинаміки. Величина збільшення енергії частинки рідини дорівнює доданому теплу до частинки рідини і величині роботи, що діє на частинку:

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho i u) = -p \operatorname{div} u + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i, \quad (5.149)$$

де  $i$  - внутрішня енергія;  $\lambda$  - теплопровідність;  $T$  - температура,  $\Phi$  -

$$\Phi = \mu \left( 2 \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} u)^2. \quad (5.150)$$

Ці п'ять рівнянь в частинних похідних мають сім невідомих змінних ( $u, v, w, p, T, \rho$  і  $i$ ). Для того щоб замкнути цю систему рівнянь, необхідно ввести рівняння для тиску і внутрішньої енергії

$$p = p(\rho, T); \quad i = i(\rho, T). \quad (5.151)$$

Рівняння теплопередачі для твердотільної області, рівняння енергії

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + S, \quad (5.152)$$

де  $c_p$  - питома теплоємність.

Рівняння (5.147) можна розв'язати аналітично тільки для декількох простих випадків.

**Метод контрольного об'єму.** Першим кроком методу контрольного об'єму є інтегрування основних рівнянь для кожного контрольного об'єму. Визначальні рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\phi u) = \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\phi) + S_\phi, \quad (5.153)$$

де  $\phi$  - властивість рідини і  $\Gamma$  - коефіцієнт дифузії.

Якщо рівняння (5.153) проінтегрувати по контрольному об'єму, то загальне рівняння переносу буде мати вигляд

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \operatorname{div}(\rho\phi u) dV = \int_{CV} \operatorname{div}(\Gamma \operatorname{grad}\phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV. \quad (5.154)$$

Використавши властивість дивергенції за теоремою Гауса, отримаємо



$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} (\rho\phi) dV \right) + \int_A n \cdot (\rho\phi u) dA = \int_A n \cdot (\Gamma grad\phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV. \quad (5.155)$$

Для стаціонарного потоку нестационарним членом рівняння (5.155) можна нехтувати:

$$\int_A n \cdot (\rho\phi u) dA = \int_A n \cdot (\Gamma grad\phi) dA + \int_{CV} S_\phi dV. \quad (5.156)$$

Для нестационарного процесу рівняння (5.155) можна проінтегрувати за часом і отримати загальне рівняння переносу у вигляді

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{CV} (\rho\phi) dV \right) dt + \iint_{\Delta t A} n \cdot (\rho\phi u) dAdt = \iint_{\Delta t A} n \cdot (\Gamma_\phi grad\phi) dAdt + \int_{\Delta t CV} S_\phi dV dt. \quad (5.157)$$

**Дискретизація.** Другим кроком скінченно-об'ємного методу є зведення рівнянь в частинних похідних до алгебраїчних рівнянь.

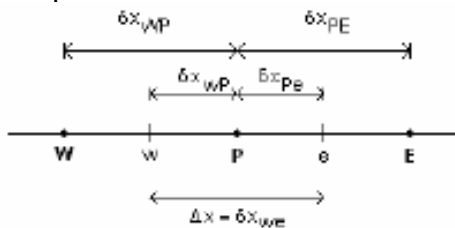


Рисунок 1.12 – Одновимірну сітку

На рис. 1.12 показано одновимірну сітку, де  $P, W$  і  $E$  - вузли,  $w$  і  $e$  - грані сітки, які розміщені в середині між вузлами, а  $\Delta x$  - довжина контрольного об'єму.

При дискретизації рівняння переносу використовується протипотокова диференціальна схема. Ця схема є схемою першого порядку. Нижче представлений процес чисельного інтегрування і дискретизації основних рівнянь.

Приклад. Ця задача являє собою задачу конвекції-дифузії в одновимірному поставленні. Використовуються другий і третій члени рівняння переносу (4.89)

$$\frac{d(\rho\phi u)}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \Gamma \frac{d\phi}{dx} \right). \quad (5.158)$$

Одновимірне рівняння нерозривності запишемо у вигляді

$$\frac{d(\rho u)}{dx} = 0. \quad (5.159)$$

Рівняння (5.158) і (5.159) інтегруються по  $\Delta x$ , де  $A$  - область між гранями.

Це дає

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left( \Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w, \quad (5.160)$$

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0. \quad (5.170)$$

Змінні  $F$  і  $D$  визначаються як

$$F = \rho u; \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x}. \quad (5.171 \text{ a, б})$$

Змінні  $F$  і  $D$  на гранях комірки стають

$$F_w = (\rho u)_w; \quad F_e = (\rho u)_e, \quad (5.172 \text{ a, б})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}}; \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}}. \quad (5.173 \text{ a, б})$$

Наступним кроком є прикладення диференціальної протипотокової схеми.

Якщо напрям потоку додатний, що визначається потоком із заходу на схід. Властивість  $\phi$  із західної грані комірки  $w$  імовірно дорівнює  $\phi$  у західному вузлі  $W$ . Також  $\phi$  у східній грані комірки дорівнює  $\phi$  у вузлі  $P$ .

$$\phi_w = \phi_W; \quad \phi_e = \phi_P. \quad (5.174 \text{ a, б})$$

Підставивши (1.174 а, б) в (5.169), одержимо алгебраїчне рівняння

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)]\phi_p = (D_w + F_w)\phi_w + D_e\phi_E \quad (5.175)$$

Протипотокова схема дає добрий збіг, але чутлива до чисельної дифузії. Це означає, що якщо потік спрямований не по нормалі до граней елемента, результати можуть вийти за область потоку. Це означає, наприклад, що стрибки ущільнення побачимо як сглажені криві.

Для отримання більш точного розв'язку,  $\phi$  на гранях сітки може бути апроксимовано рядами більш високого порядку

$$\phi_w = \phi_W + \beta \underset{i}{\text{grad}}\phi \cdot \Delta\bar{r} \quad (5.176)$$

$$\phi_e = \phi_p + \beta \text{grad}\phi \cdot \Delta\bar{r}, \quad (5.177)$$

де  $\Delta\bar{r}$  - відстань і напрям від грані комірки до відповідного вузла;  $\beta$  - константа, яка змінюється в діапазоні від 0 до 1;  $\beta=0$  - протипотокова схема;  $\beta=1$  - схема другого порядку. Схема другого порядку менш робастна і з'являється ризик чисельного розсіювання, що означає виникнення пульсацій у розв'язку.

**Ітерації.** Коли визначальні рівняння дискретизовані і зведені до алгебраїчних рівнянь алгебри, то використовується ітеративний чисельний метод для розв'язку задачі. Спрощено метод може бути описаний так.

Алгебраїчні рівняння можуть бути записані у матричному вигляді

$$[A]\{\phi\} = \{b\}, \quad (5.178)$$

де  $[A]$  - матриця коефіцієнтів;  $\{\phi\}$  - вектор розв'язання і  $\{b\}$  - вектор.

Для отримання розв'язку  $\phi^{n+1}$  до початкового припущення  $\phi^n$  додається поправка  $\phi'$ :

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \phi', \quad (5.179)$$

$\phi'$  розраховується з рівняння

$$\frac{\partial A}{\partial \phi} \phi' = r^n, \quad (5.180)$$

де  $r^n$  - відхил, який отриманий з рівняння

$$r^n = b - A\phi^n. \quad (5.181)$$

Цей процес повторюється до того часу, поки розв'язок повністю збігається, і відхил стане мінімальним.

**Турбулентне моделювання.** Для більшості промислових потоків використовуються розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса. Коли числа Рейнольдса перевищують певні величини, потік стає турбулентним. Розв'язати турбулентну течію прямим чисельним інтегруванням неможливо, оскільки це вимагає набагато більшої потужності комп'ютера, чим це можливо у даний час, тому були введені моделі турбулентності.

**Рівняння Рейнольдса.** Більшість турбулентних моделей отримані з усереднених рівнянь Рейнольдса. Ці рівняння одержані з умови, що швидкість рідини  $u$  розділяється на дві компоненти, середню швидкість  $U$  і швидкість флуктуацій  $u'$ .

$$u = U + u', \quad (5.182)$$

$$\text{де } U = \frac{1}{\Delta t} \int^{+\Delta t} u dt. \quad (5.183)$$

Якщо швидкість  $U$  ввести в рівняння нерозривності (5.147), воно матиме вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho U) = 0, \quad (5.184)$$

і рівняння Нав'є-Стокса перетвориться на

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \otimes U) = -\text{grad } p + \text{div}(\mu \text{grad } U) - \text{div}(\overline{\rho u' \otimes u'}) + S_M, \quad (5.185)$$

Загальна властивість перенесення  $\phi$  складається із середньої кількості  $\phi$  і кількості флуктуації  $\phi'$ :

$$\phi = \overline{\phi} + \phi'. \quad (5.186)$$

Одержано скалярне рівняння перенесення

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho \phi U) = \text{div}(\Gamma_\phi \text{grad } \phi) - \text{div}(\overline{\rho u' \phi'}). \quad (5.187)$$

У рівняннях (5.185) і (5.187) з'являються два невідомих члени, напруження Рейнольдса  $\overline{\rho u' \otimes u'}$  і потік Рейнольдса  $\overline{\rho u' \phi'}$ . Межа над цими членами означає, що вони усереднені за часом.

**Моделі турбулентної в'язкості.** Група моделей, які названі моделями турбулентної в'язкості, допускають, що турбулентний потік містить добавки до напружень Рейнольдса, які пропорційні середньому градієнту швидкості

$$-\overline{\rho u' \otimes u'} = -\frac{2}{3} \rho k \delta - \frac{2}{3} \mu_t \text{div } U \delta + \mu_t (\nabla U + (\nabla U)^T), \quad (5.188)$$

де  $k$  - турбулентна кінетична енергія

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'^2}. \quad (5.189)$$

Потоки Рейнольдса

$$-\overline{\rho u' \phi'} = \Gamma_t \nabla \phi, \quad (5.190)$$

де вихрова дифузійність  $\Gamma_t$  дорівнює відношенню турбулентної в'язкості  $\mu_t$  до турбулентного числа Прандля  $\text{Pr}_t$ .

$$\Gamma_t = \frac{\mu_t}{Pr_t}. \quad (5.191)$$

Всі вихрові моделі в'язкості ґрунтуються на цьому співвідношенні. Відмінності між моделями у методі визначення  $\mu_t$ .

**$k - \varepsilon$  модель.**  $k - \varepsilon$  модель визначає  $\mu_t$  як

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (15.192)$$

де  $C_\mu$  - стала;  $k$  і турбулентне в'язке розсіювання  $\varepsilon$  розраховуються за такими двома рівняннями:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho U k) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + P_k - \rho \varepsilon \quad (5.193)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \varepsilon) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad} \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon), \quad (5.194)$$

де  $\sigma_k, \sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}$  і  $C_{\varepsilon 2}$  - сталі і  $P_k$  - турбулентна продуктивність.

**$k - \omega$  - модель Вілкокса.** У  $k - \omega$  моделі  $\mu_t$  визначається як

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}, \quad (5.195)$$

де  $k$  і турбулентна частота  $\omega$  визначаються з рівнянь, наведених нижче:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho U k) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + P_k - \beta' \rho k \omega, \quad (5.196)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \text{div}(\rho U \omega) = \text{div} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \text{grad} \omega \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2, \quad (5.197)$$

$\sigma_k, \sigma_\omega, \alpha, \beta'$  і  $\beta$  - сталі моделі.

**SST - модель.**  $k-\varepsilon$  - і  $k-\omega$  - моделі мають як переваги, так і недоліки. Модель перенесення зсувного напруження (SST) комбінує кращі властивості цих двох моделей.  $k-\omega$  - модель описує потік біля стінок з прилипанням набагато краще, ніж  $k-\varepsilon$  - модель, сітка біля стінки не повинна бути найкращою, і потік не на стільки залежить від сітки. З іншого боку, в ядрі потоку  $k-\omega$  - модель набагато чутливіша до неточних граничних умов порівняно з  $k-\varepsilon$  - моделлю.

**Пристінковий шар.** У турбулентних потоках потік біля стінок також має потребу апроксимації. Потік біля стінки без прослизання не ефективно описувати вільним потоком. Тільки відстань до стінки  $y$ , густина рідини  $\rho$ , в'язкість  $\mu$  і зсувне напруження стінки  $\tau_w$  є важливими. У такому разі вираз для швидкості біля стінки запишемо у формі

$$u^+ = \frac{U}{u_t} = f\left(\frac{\rho u_t y}{\mu}\right) = f(y^+), \quad (5.198)$$

$u^+$  і  $y^+$  - безрозмірні змінні швидкості біля стінки і відстані до стінки.  $u_t$  - швидкість тертя, що подана рівнянням

$$u_t = \left(\frac{\tau_w}{\rho}\right)^{1/2}. \quad (5.199)$$

**Лінійний прошарок.** Для течій, близьких до стінки, коли  $y^+ < 5$ , зсувне напруження дорівнює зсувному напруженню стінки. Це

$$U = \frac{\tau_w y}{\mu} - \quad (5.200)$$

вираз для швидкості біля стінки. У даного випадку  $y^+ = u^+$ . Навіть швидкість  $U$  в цьому шарі не зв'язана з турбулентними властивостями, але це буде так, поки швидкість знаходиться в логарифмічному шарі.

**Логарифмічний закон прошарку.** Течія на відстані приблизно  $30 < y^+ < 500$  від стінки являє собою логарифмічний закон. В'язкість і турбулентні властивості рідини є важливими у цьому шарі. Залежність між швидкістю і відстанню до стінки у цьому шарі виражається так:

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B = \frac{1}{k} \ln(Ey^+), \quad (1.201)$$

де  $k, B$  і  $E$  - сталі, які залежать від шорсткості стінки.

Коли перший вузол сітки має відстань до стінки менше, ніж  $y^+ = 5$ , тоді виконується закон лінійного прошарку. Для сіток з першим вузлом, який має відстань до стінки  $y^+ = 30-500$ , використовуються функції стінки для логарифмічного закону апроксимації характеристик потоку. Це означає, що автоматично вибирається метод для визначення пристінкового прошарку і автоматично підтримується область відстаней до стінки  $5 < y^+ < 30$ .

**Розрахунок турбулентних течій.** Якщо для розрахунку турбулентних приграничних шарів використовуються моделі, пов'язані з обчисленням турбулентної в'язкості для всієї течії, то для отримання досить точних результатів вузли сітки повинні бути розміщені усередині в'язкого прошарку, тобто  $y^+ \leq 4,0$  для нестисливих течій і  $y^+ \leq 1,0$  або  $2,0$  у тих випадках, коли доводиться розв'язувати рівняння енергії.

**Використання закону стінки.** Для багатьох пристінних турбулентних шарів течія у внутрішній області шару має універсальний характер, який описується логарифмічним законом стінки. По суті, ця внутрішня частина шару є областю, в якій конвективне перенесення виконує незначну роль. Грубо кажучи, закон стінки можна розглядати як розв'язок рівняння руху приграничного шару, одержаного при описанні турбулентності за моделлю шляху зміщення Прандтля в припущенні, що конвективні члени і градієнт тиску не істотні. Аналогічно для багатьох течій спостерігається майже універсальний характер розподілу температури, і закон стінки можна використовувати для



задання граничних умов на внутрішній границі при розв'язанні рівняння енергії.

Отже, при застосуванні закону стінки рівняння приграничного шару розв'язуються з використанням моделі турбулентності лише у зовнішній частині шару, при цьому використовується відносно груба сітка. Розв'язок в пристінній області описується на основі закону стінки, який фактично є наближеним розв'язком для пристінної області. Звичайно припускається, що закон стінки виконується при  $30 < y^+ < 200$  і перший від стінки вузол розрахункової сітки розміщують в цьому інтервалі.

#### **Використання сіток з нерівномірним кроком.**

Практично всі без винятку розрахунки турбулентних прикордонних шарів, в яких розв'язок знаходиться аж до стінки, проводиться з використанням нерівномірних сіток [5]. Широко використовується схема, що базується на припущенні про те, що відношення двох послідовних кроків сітки постійне:

$$\frac{\Delta y^+}{\Delta y_-} = \frac{\Delta y_{j+1}}{\Delta y_j} = K.$$

При використанні такої схеми з постійним співвідношенням кроків сітки при русі від стінки зростають на один і той же відсоток. У результаті кроки сітки ростуть в геометричній прогресії. Для турбулентного перебігу значення числа  $K$  лежить звичайно між 1 і 2.

Точність, а іноді і стійкість деяких різницевих схем має велику залежність від вибраного значення  $K$ . У більшості випадків задовільні результати виходять при  $K \leq 1.2$ .

#### **Похибки методів обчислювальної гідродинаміки.**

Коли моделюється потік важливо знати обмеження. Різні джерела помилок і невизначеностей є у методах обчислювальної гідродинаміки. Їх можна розділити на певні категорії:

1) невизначеності моделі. Ці невизначеності призводять до допущень і спрощень реального потоку. У багатьох випадках ці спрощення необхідні для розв'язання задачі.

Одним із прикладів є моделі турбулентності, іншим прикладом може бути нехтування хімічними реакціями;

2) помилки обчислення. Помилки обчислення трапляються від того, що визначальні рівняння не розв'язуються на пряму, але дискретизуються з кінцевим розрізненням в часі і просторі. Помилки можуть бути більші при використанні диференціальної схеми першого порядку замість використання схем вищих порядків;

3) Помилки виконання ітерацій і збіжності. Коли відхили не досягають бажаних рівнів, то можуть траплятися помилки. Це обумовлено різними причинами, наприклад, моделі і граничні умови вибрані таким чином, що не забезпечується збіжність для деяких спеціальних течій. У інших випадках ітераційний процес є достатньо довгим і не завжди досягається його збіжність;

4) помилки округлення. Ці помилки трапляються через обмеження комп'ютера. Може не вистачити місця у пам'яті комп'ютера для зберігання величин у процесі розв'язку, тому величини округляються. Розв'язок точніше ніж точність самого комп'ютера не можливий;

5) невизначеності. Неточні граничні умови, геометрія або неіснуючі дані можуть також призвести до неточних результатів;

6) інші помилки можуть траплятися через помилки користувача і помилки коду, який використовується.

## **6 Опис архітектури і процесу розв'язання типових задач за допомогою пакета ANSYS CFX**

### **6.1 Загальна структура пакета**

Пакет ANSYS CFX складається з 5 додатків, між якими відбувається потік інформації, що виникає в процесі поставлення і розв'язання задач гідродинаміки (рис. 1.13) [4].

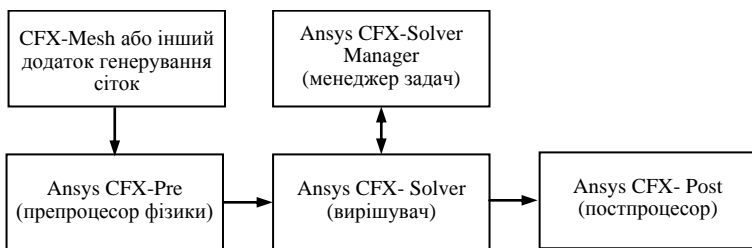


Рисунок 1.13 - Схема поставлення і розв’язання задачі з використанням пакета ANSYS CFX

Розглянемо, за які етапи процесу поставлення і розв’язання задачі відповідає кожен додаток пакета.

**CFX - Mesh**, або інший додаток генерації сітки, – це перший крок поставлення задачі. На даному етапі відбувається таке:

- 1) визначення геометрії області дослідження;
- 2) створення областей потоків рідин або газів, твердих областей і задавання імен граничним областям;
- 3) установка параметрів сітки.

Система ANSYS CFX дозволяє імпортувати геометричні дані з більшості сучасних систем автоматизованого проектування (CAD) і автоматично генерувати сітку на їх основі. Таким чином, перший етап поставлення задачі може бути виконаний у зовнішньому додатку (CAD-системі).

**ANSYS CFX - Pre** реалізує процес визначення фізики задачі. Фізичний препроцесор імпортує сітку, яка була створена на першому кроці. Це другий крок поставлення задачі, на якому визначаються фізичні моделі, на основі яких відбуватиметься моделювання процесу, а також їх основні параметри і характеристики. **CFX-Pre** дозволяє визначити граничні умови процесу (вхідні, вихідні параметри), моделі теплообміну і т.д.

**ANSYS CFX-Solver** – це програма, що реалізує процес розв’язання задачі обчислювальної гідродинаміки. Імпортується задача, поставлена за допомогою ANSYS CFX – Pre, і виконується пошук розв’язку всіх необхідних змінних:

1) рівняння у частинних похідних інтегруються по всьому об'єму задачі у області дослідження і повинні відповідати виконанню закону збереження (мас або кількості руху) для кожної досліджуваної області;

2) інтегральні рівняння, які були одержані, перетворюються в систему алгебраїчних рівнянь шляхом апроксимації членів в інтегральних рівняннях;

3) алгебраїчні рівняння розв'язуються чисельним методом.

**ANSYS CFX-Solver Manager** – це надбудова над CFX-Solver. Вона дозволяє контролювати хід розв'язання задачі:

1) визначати вхідні файли вирішувача;

2) запускати або припиняти CFX - Solver;

3) контролювати процес розв'язання задачі;

4) встановлювати CFX - Solver для проведення паралельних обчислень.

**ANSYS CFX-Post** – це програма, призначена для аналізу, візуалізації і подання результатів, які одержані у ході розв'язання задачі за допомогою **ANSYS CFX-Solver**. Для цього використовуються такі засоби:

- 1) візуалізація геометрії та областей, які досліджуються;
- 2) векторні графіки для візуалізації напрямів і величин течій;
- 3) візуалізація зміни скалярних величин (таких, як температура, тиск) усередині досліджуваної області.

Графіки, зображення і відео, які одержані у результаті аналізу розв'язання задачі можна зберегти у вигляді окремих файлів.

## 6.2 Типи файлів ANSYS CFX

### Загальна схема обміну файлами.

У процесі поставлення, розв'язання і аналізу задачі різні модулі пакета ANSYS CFX обмінюються інформацією за допомогою імпорту/експорту різних файлів.

Розглянемо базові файли, за допомогою яких реалізований процес розв'язання задач в пакеті ANSYS CFX (рис. 1.14).

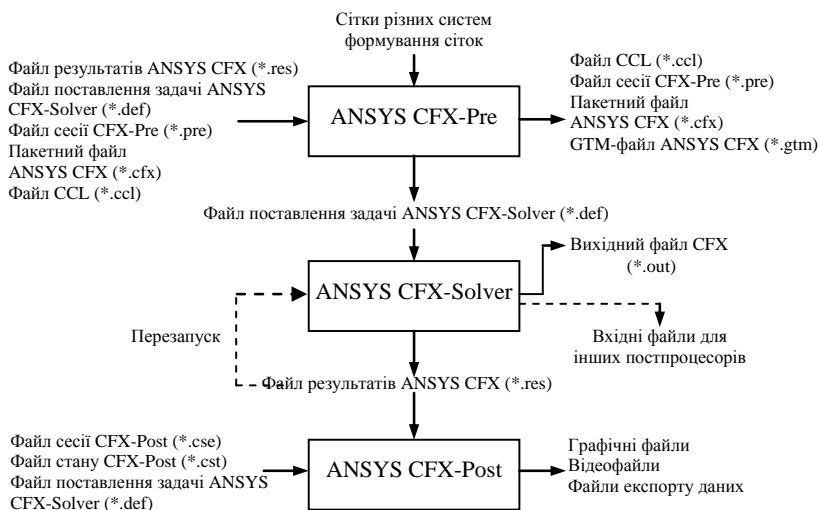


Рисунок 1.14 - Схема файлів, які генеруються у процесі поставлення і розв’язання задач програмами з пакета ANSYS CFX

### Файли програми ANSYS CFX- Pre.

Пакетний файл ANSYS CFX - Pre (\*.cfx) містить дані про фізику процесу і використовується спільно з GTM-файлом, який містить базу даних процесу моделювання. Ця пара файлів використовується для збереження і відновлення процесу поставлення задачі в додатку ANSYS CFX - Pre. Пакетний файл – бінарний, унаслідок чого безпосереднє його редагування неможливе. Файли GTM (“Geometry and Mesh” – “Геометрія, топологія і сітка”) містять інформацію про всі області і сітки, що потрібні для моделювання. Коли відбувається імпорт сітки в додаток ANSYS CFX - Pre, відбувається формування відповідного GTM-файла. Таким чином, після імпорту сітки первинний файл, що містить сітку, більше не потрібен. Ці файли можна відкривати безпосередньо в середовищі ANSYS CFX - Post для детального аналізу сіток.

Файл поставлення задачі ANSYS CFX (\*.def) містить повну інформацію про поставлену задачу, включаючи геометрію, сітку поверхні, граничні умови, параметри

середовища, параметри вирішувача і початкові змінні. Він створюється ANSYS CFX - Pre і імпортується ANSYS CFX - Solver для запуску процесу розв'язання задачі.

Файл CCL (“Command Language File” – “Файл мови команд”) – це текстовий файл, що описує поставлення задачі вирішувачу ANSYS CFX-Solver. Він може бути як згенерований окремо, так і одержаний з файлу поставлення задачі за допомогою застосування утиліти cfx5cmds.

#### **Файли програми ANSYS CFX- Solver**

Файл результатів ANSYS CFX - Solver (\*.res) містить повну інформацію про результати розв'язання задачі, які включають просторову сітку і розв'язки для течій рідин і газів. Він подібний до файлу поставлення задачі (\*.def), але на додаток до інформації, що міститься у файлі поставлення задачі, він ще містить обчислені значення кожної змінної в кожному вузлі сітки. Цей тип файлів може бути використаний як вхідний файл ANSYS CFX - Pre, для визначення початкових значень змінних для подальшого аналізу.

Вихідний файл ANSYS CFX - Solver (\*.out) – це форматований текстовий файл, що містить інформацію про настроювання моделі ANSYS CFX, сталі розв'язку у процесі роботи ANSYS CFX - Solver і статистику виконання задавання.

#### **Файли програми ANSYS CFX- Post.**

ANSYS CFX-Post може обробляти файли GTM (\*.gtm) і файли поставлення задачі (\*.def) (для детального вивчення і виявлення можливих проблемних сегментів сітки), а також файли результатів (\*.res) (для аналізу і візуалізації результатів розв'язку поставленої задачі). Як результат роботи, ANSYS CFX-Post генерує різні графічні файли, що містять графічне подання розв'язку поставленої задачі.

### **6.3 Процес поставлення і розв'язання типової задачі за допомогою пакета ANSYS CFX**

#### **Поставлення задачі.**

Розглянемо одну з типових задач, які вирішуються за допомогою пакета ANSYS CFX. Як приклад, візьмемо

задачу змішення рідин з різними температурами, які течуть по трубах. Пакет ANSYS CFX за замовчуванням не містить вбудованих засобів для побудови геометрії. Як початкові дані можуть бути використані сітки, які згенеровані різними зовнішніми додатками генерації сіток (CAD - пакетами). Є 2 можливі шляхи отримання сітки: або використати вже існуючої сітки, або моделювання нової сітки за допомогою додатків, що входять до складу пакета ANSYS. Власноруч створимо геометрію досліджуваної області і сформуємо сітку на її основі. Для опису геометрії досліджуваної області можна скористатися додатком ANSYS DesignModeler. Цей додаток входить до складу пакета ANSYS Workbench, який призначений для створення і редагування геометрії. Створимо просту систему, що складається з пари з'єднаних між собою труб: основної труби і бокової труби, по якій подається підігріта вода. Для цього створимо систему з двох циліндрів: більший є ділянкою основної труби, а менший – “впайкою” (рис. 1.15).

Створений нами файл геометрії експортуємо в генератор сіток ANSYS CFX - Mesh. Встановлюємо необхідні параметри точності сітки і одержуємо таке подання досліджуваної області (рис. 1.16).

Створену сітку імпортуємо в ANSYS CFX - Pre і визначаємо фізику задачі. Встановлюємо, що в даній системі знаходиться вода, задаємо її швидкості і температури на входах труб, зазначаємо вихід основної труби (рис. 1.17).

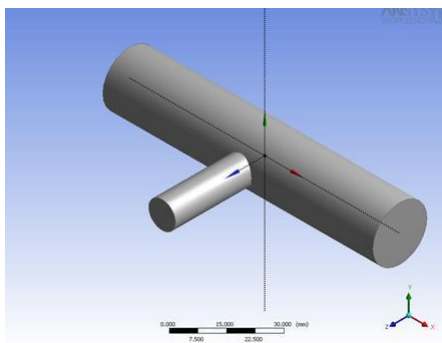


Рисунок 1.15 - Поставлення геометрії задачі

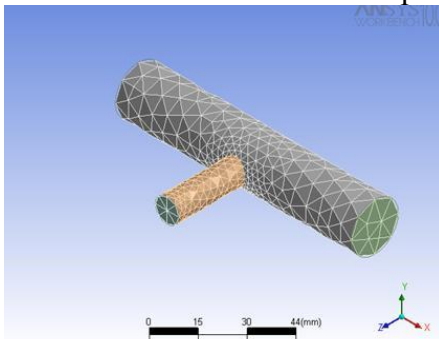
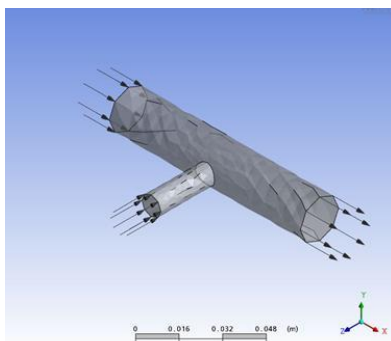


Рисунок 1.16 - Формування сітки на основі геометрії

Сформована сітка є відносно грубою, але, як можна помітити з рисунка, густина її вузлів непостійна і значно збільшується в точці з'єднання труб, що дозволяє детальніше досліджувати ділянку, яка є цікавою.

#### **Розв'язання і аналіз задачі.**

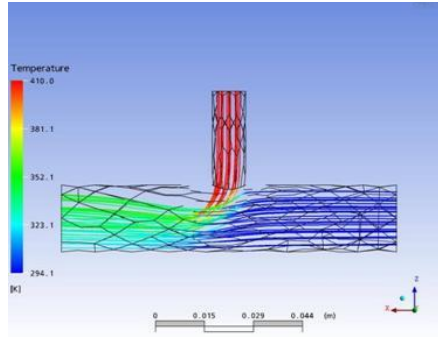
У результаті дій, які описані у поставленні задачі, ми одержали файл поставлення задачі, який передається в ANSYS CFX - Solver Manager. У ньому ми задаємо параметри розв'язку поставленої задачі (розв'язання виконується на локальній машині без застосування паралельних обчислень). Далі запускаємо процес розв'язання задачі за допомогою ANSYS CFX - Solver.





### Рисунок 1.17 - Визначення фізики задачі

Результати розрахунків (файл з розширенням \*.res ) з'являться в тій же директорії, з якої виконувався запуск розрахунку. Файл \*.res потрібно скопіювати на локальний комп'ютер, де і виконуватиметься аналіз розв'язку задачі за допомогою програми ANSYS CFX - Post.



### Рисунок 1.18 - Картина течії води в трубах

У результаті розв'язання задачі ми одержуємо файл результатів, в якому зберігається вся інформація про течію води у даній задачі. Для візуалізації і аналізу результатів, скористаємося додатком ANSYS CFX - Post. Після імпорту результатів в додаток створимо 2 потоки, які відповідають течії води в основній і боковій трубах. Колір потоку встановимо відповідним температурі води. У результаті одержимо наочну картину течії води в даній системі труб (рис. 1.18).

## 6.4 Приклад моделювання течії у циліндричній трубі

Річ у тому, що програма CFX вирішує тільки тривимірні задачі. Двовимірні задачі повинні моделюватися як тривимірні, тобто тіла круглої форми можуть моделюватися у вигляді клина з площинами симетрії.

Оскільки це осесиметрична задача і потік не змінюється у кутовому напрямі і тому достатньо створити тільки декілька елементів у кутовому напрямі, наприклад два.

Описання задачі (рис. 1.19):  
 швидкість на вході  $U = 1$  м/с, тиск на виході із труби  
 $p = 0$  Па, довжина труби  $L = 20$  м, діаметр труби  $D = 1$  м.  
 Властивості матеріалів:  
 густина  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup> і в'язкість  $\mu = 0,01$  кг/мс.

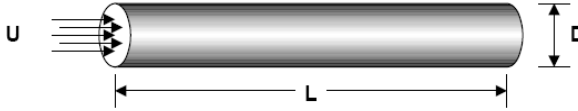


Рисунок 1.19 - Геометрія труби

**ANSYS – препроцесор, основні кроки:**

- 1) побудова геометрії;
- 2) створення сітки;
- 3) створення імен областей для задавання граничних умов;
- 4) збереження файлу для використання в CFX.

При практичному використанні задаються граничні умови симетрії, створюється геометрія клину і сітка в ANSYS. Спочатку моделюється повний циліндр, а потім непотрібні елементи будуть відкинуті.

Після побудови геометрії і створення сітки в ANSYS на поверхні задаються граничні умови і призначаються відповідні назви, такі, як: inlet, outlet, wall і symmetry. На відміну від програми ANSYS, де граничні умови задаються при виборі відповідних областей, в CFX необхідно цим областям задавати імена. Тепер можна починати етап побудови геометрії і створення сітки в програмі ANSYS.

***Preferences - Thermal –OK***

Виберемо разом і двовимірні, і тривимірні елементи. Спочатку сітка буде створена у двовимірній області, а потім буде одержана тривимірна область шляхом екструзії, при цьому двовимірні сітка буде видалена.

***Preprocessor - Element Type -Add/Edit/Delete - Add - Thermal Solid - Quad 4node 55 - OK***  
***Add - Thermal Solid - Brick 8node 70 – OK - Close***

Створимо прямокутник, відповідний поперечному перетину труби.

**Preprocessor - Modeling - Create - Areas - Rectangle -  
By Dimensions**

**X1 = 0 X2 = 20**

**Y1 = 0 Y2 = 0.5 – OK**

Створимо сітку для двовимірного прямокутника.

**Preprocessor - Meshing - Size Cntrls - Manual Size -  
Global - Size**

**SIZE Element edge length = 0.1 - OK**

**Preprocessor - Meshing - Mesh - Areas - Mapped - Free**

**Select the Area – OK**

Після створення геометрії двовимірного прямокутника для створення клина двовимірна сітка буде видавлена навколо осі. Після операції видавлювання необхідно задати число елементів, на які ділитиметься клин у круговому напрямі, також необхідно активувати команду видалення елементів плоскої області.

**Preprocessor - Modeling - Operate - Extrude - Elem  
Ext Opts**

**VALI No. Elem dvs = 2**

**ACLEAR Clear area(s) after ext = YES – OK**

**Preprocessor - Modeling - Operate - Extrude - Areas -  
About Axis**

**Select the Area – OK**

Виберіть два вузли, які визначають кінцеві точки осі симетрії (рис. 1.20) – **OK**

**ARC Arc length in degrees = 45 – OK**

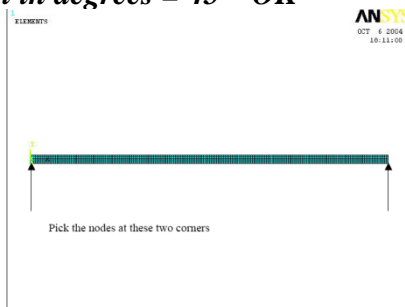


Рисунок 1.20 – Положення вузлів, які визначають кінцеві точки осі симетрії

Виберіть довільний сектор, що дорівнює  $45^{\circ}$ . Для перевірки правильності задання відобразіть елементи (рис. 1.21).

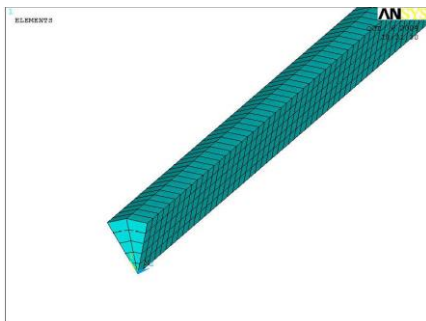


Рисунок 1.21 - Діаграма елементів клина

### ***Utility Menu - Plot – Elements***

Перед збереженням файлу для експорту в CFX поверхням (тобто граничним областям), які є цікавими, повинні бути привласнені імена. Для цього необхідно вибрати вузли, які асоціюються з кожною окремою областю. Після вибору цих вузлів граничній області може бути привласнене ім'я.

1 Вибір області

### ***Utility Menu - Select Entities - Areas***

#### ***By Num/Pick – OK***

Виберіть область, яка відповідає входу - **OK**

2 Вибір вузлів, які належать цій області

### ***Utility Menu - Select Entities -***

#### ***Nodes***

#### ***Attached to***

#### ***Areas, all – OK***

3 Присвоєння ім'я області

### ***Utility Menu - Select - Comp/Assembly - Create Component***

#### ***Cname Component name = inlet – OK***

4 Вибір **everything**.

### ***Utility Menu - Select – Everything***

Повторіть попередні чотири кроки для чотирьох областей, що залишилися. Дві площини симетрії (symmetry1 і symmetry2), wall, і outlet.

Перед виконанням наступного кроку виберіть **everything**.  
**Utility Menu – Select – Everything**

Після виконання всіх операцій можна створити файл для імпорту в CFX

**Preprocessor - Archive Model - Write**

Необхідний файл – файл з розширенням *.cdb*. Дайте нове ім'я цьому файлу або збережіть його як *file.cdb*. - **OK**  
Запустіть CFX.

Відкрийте CFX і запустіть його для появи CFX Launcher (рис. 1.22). Змініть робочу директорію на директорію, в якій ви хочете працювати. Натисніть **CFX-Pre**.

**CFX – Pre, основні кроки:**

- 1) імпорт сітки,
- 2) задання властивостей матеріалів,
- 3) задання граничних умов,
- 4) запис файлу бази даних, які необхідні для розв'язання поставленої задачі.

Початок моделювання:

**File - New Simulation** - ім'я *.cfx* файл: назвіть його

**Example1 – Save**

**Import Mesh** (рис. 1.23)

**File - Import Mesh or Click on Import Mesh icon** (рис. 1.24).

Установіть формат сітки (ANSYS), використовуйте ниспадаюче меню і виберіть *file.cdb*, натисніть на кнопці відкриття папки **Assembly** в **Prefix** меню.

Виберіть одиниці вимірювання сітки (для одиниць у даному прикладі залиште *m*) - **Click OK**.

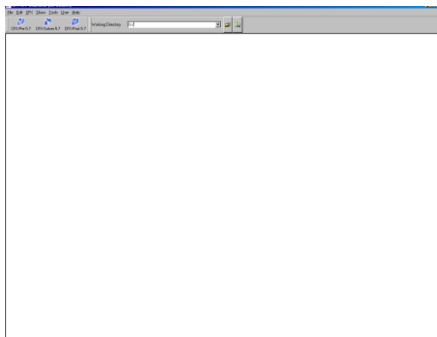


Рисунок 1.22 - CFX Launcher

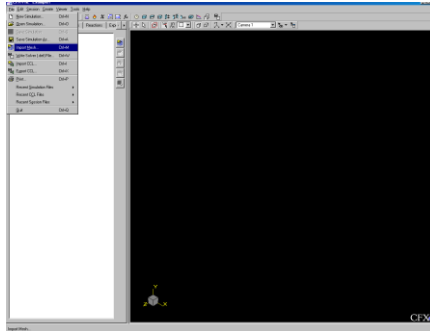


Рисунок 1.23 - Вікно CFX-Pre після створення нового моделювання з визначенням в меню файл Import Mesh

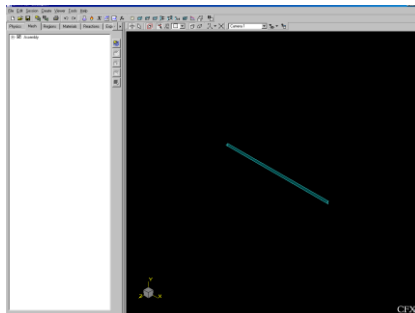


Рисунок 1.24 - Вікно CFX-Pre після імпорту сітки

### ***Визначення властивостей матеріалів.***

CFX має свою власну бібліотеку властивостей матеріалів. Будь-які матеріали з бібліотеки можуть бути використані. Окрім цього, будь-який новий матеріал може бути доданий до бібліотеки матеріалів.

Створіть новий матеріал для бібліотеки матеріалів:

***Create a Material - Name the Material – OK.***

***\*\*Material Properties таблиця\*\****

***Введіть густину - Open Transport Properties - Check  
Dynamic Viscosity - Enter the Dynamic Viscosity***

Властивості для задачі теплопередачі - питома теплоємність і теплопровідність можуть бути також введені.

**Click OK**

Продивіться список матеріалів. Нові матеріали створені в бібліотеці.

**Визначення типу моделювання**

**Define the Simulation Type - Steady State**

**Створення області (домена).**

Область повинна бути визначена як рідинна в CFX. Області (домени) можуть бути різними, такими, як рідини або тверді тіла.

**Create a Domain - Name the Domain - OK**

**\*\*General Options tab\*\***

**Location - Assembly**

**Domain Type - Fluid Domain** (Якщо твердотільна область, виберіть **Solid Domain**)

**Fluids List - Select the material** – Якщо ниспадаючий блок не має коректного вибору, натисніть на блоці з трьома точками і одержить повну бібліотеку

**Domain Models - Leave as Selected**

**\*\*Fluid Models tab\*\***

**Heat Transfer Model - Option - None**

**Turbulence Model - Option - Change к-Epsilon to None**

**(Laminar)**

**Задання граничних умов.**

**Create a Boundary Condition - Name the Boundary - Leave the Domain selected – OK**

Залежно від типу граничної області будуть використані різні процедури для створення граничних умов. Для описання течії в трубі необхідно задати чотири типи граничних умов.

**Boundary Type: Inlet**

**\*\*Basic Settings tab\*\***

**Boundary Type - Inlet**

**Location** – виберіть ім'я, яке було задане в ANSYS і яке відповідає цій граничній умові

**\*\*Boundary Details tab\*\***

**Mass and Momentum**

**Option - Normal Speed** (швидкість, спрямована по нормалі до області на ім'я inlet).

**Normal Speed - Enter the inlet velocity**

**OK**

**Boundary Type: Outlet**

**\*\*Basic Settings tab\*\***

**Boundary Type - Outlet**

**Location** - виберіть ім'я, яке було задане в ANSYS і яке відповідає цій граничній умові

**\*\*Boundary Details tab\*\***

**Mass and Momentum**

**Option - Average Static Pressure**

**Relative Pressure - Enter the outlet pressure**

**OK**

**Boundary Type: Wall**

**\*\*Basic Settings tab\*\***

**Boundary Type - Wall**

**Location** - виберіть ім'я, яке було задане в ANSYS і яке відповідає цій граничній умові.

**\*\*Boundary Details tab\*\***

**Wall Influence on Flow**

**Option - No Slip**

**OK**

**Boundary Type: Symmetry**

**\*\*Basic Settings tab\*\***

**Boundary Type - Symmetry**

**Location** - виберіть ім'я, яке було задане в ANSYS і яке відповідає цій граничній умові.

**OK**

**Визначення глобальних початкових умов.**

**Define the Global Initial Conditions** – вікно висвітлиться на екрані - **OK**

**Define the Solver Control Criteria**

**\*\*Basic Settings tab\*\***

**Convergence Control**

**Max. No. Iterations** – виберіть максимальне число ітерацій даних для одного запуску розв'язку.

**Convergence Criteria**

**Residual Type - Choose RMS or Max**



**Residual Target** – введіть розмір відхилення, який необхідний для збіжності.

**OK**

Запишіть файл, який необхідний для розв'язання задачі

**Write a Solver File** – введіть ім'я файлу.

Можна вийти або залишитися в CFX-Pre.

**OK**

Почекайте, поки завантажиться CFX-Solver.

### CFX – Solver, основні кроки:

1) завантаження файлу і визначення;

2) розв'язання задачі.

Завантажте CFX-Solver і запишіть файл вирішувача

**.def Define Run** з'явиться на екрані. Файл розв'язку, який був створений в **Definition File box**.

Натисніть **Start Run**.

Ця задача достатньо проста для CFX, тому вона займе всього декілька ітерацій. CFX автоматично зупиниться після того, як зійдеться розв'язок. Це може відбутися значно раніше, ніж було задано в CFX-Pre.

Якщо розв'язок не зійшовся після встановленого в CFX-Pre числа ітерацій перейдіть до **Workspace - Restart Current Run**

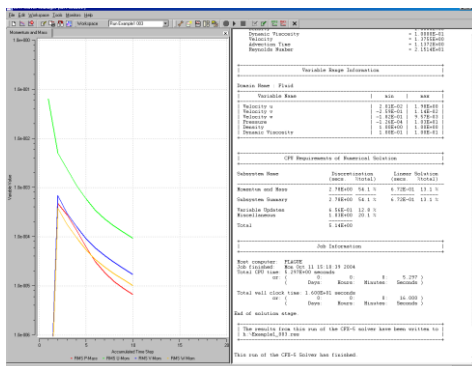


Рисунок 1.25 - Вікно CFX-Solver після завершення розв'язку

Після того, як розв'язок зійшовся, необхідно перейти до CFX-Post. Для цього може бути вибрана іконка, яка

визначена на рисунку 1.25, або можна використати команди меню.

### ***Tools - Post-Process Results***

У меню з'явиться необхідний файл результатів пост-процесу. Звичайно це той файл, який повинен бути запущений. Перевірка ***Shut down Solver Manager*** модуля є бажаною. Натисніть ОК і почекайте завантаження CFX-Post.

**CFX – Post**, результати будуть вже завантажені. Результати можуть бути переглянуті (рис. 1.26). ***Load the Results File .res.*** Тепер може бути виконане контурне і векторне відображення.

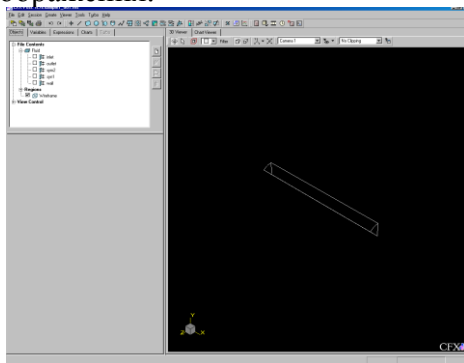


Рисунок 1.26 - Вікно CFX-Post після зчитування результатів

### **Відображення контура.**

#### ***Contour Plot - Name the Contour Plot – OK***

***\*\*Definition tab\*\****

Domains - All Domains Locations - Assembly: якщо ниспадаючий блок не має коректного вибору, натисніть на блок з трьома точками і одержить повну бібліотеку.

Для Pressure **contour graph:**

**Variable - Pressure**

Для Velocity **contour graph:**

**Variable - Velocity**

**Apply**

**Відображення вектора.**

**Vector Plot - Name the Vector Plot - OK**

**\*\*Geometry tab\*\***

**Apply**

На рисунку 1.27 зображена копія екрана з відображенням контурів швидкості.

**Зображення графіка профіля швидкості на певній довжині труби.**

Створіть профіль швидкості по осі  $y$  від  $x$ , що дорівнює 10.

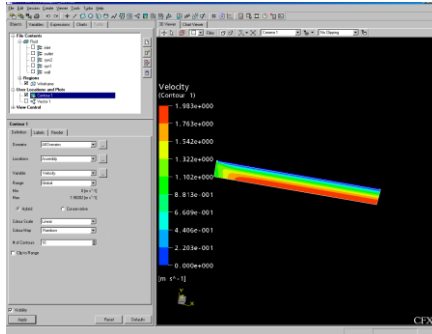


Рисунок 1.27 - Вікно CFX-Post після відображення діаграми контурів швидкості

Створення лінії

**Create Line - Name the Line – OK**

**\*\*Geometry tab\*\***

**Point 1 -  $x = 10$   $y = 0$   $z = 0$**

**Point 2 -  $x = 10$   $y = 0.5$   $z = 0$**

**Samples** – змініть число точок, які відображають лінію.

**Apply**

Створення графіка

**Create Chart - Name the Chart - OK**

**\*\*Chart (Name of Line) tab\*\***

**Type - Regular**

**Line Name - Name the Line**

**Locator** – виберіть лінію, яка була створена на попередньому кроці

**X Axis -  $y$**

**Y Axis - Velocity**

**Appearance** – виберіть додаткові можливості

**\*\*Chart tab\*\***

**Title - Add a title**

**Type - XY**

**Labels** – використовуйте помітки за замовчуванням

**\*\*Ranges tab\*\***

**Selection - Automatic or Manual**

**Apply**

На рисунку 1.28 зображений графік розподілу швидкості.

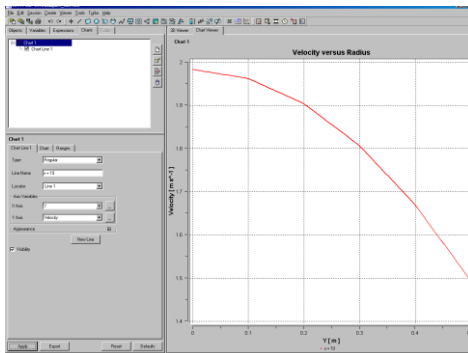


Рисунок 1.28 - Графік розподілу швидкості

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Тарасевич Ю.Я., Загорулько А.В. Применение современных информационных компьютерных технологий при преподавании на специальности «Динамика и прочность». Информатизация освіти та дистанційна форма навчання: сучасний стан і перспективи розвитку: Шоста міжнародна науково-методична конференція. – Суми: Вид-во СумДУ, 2004. - С. 275-279.
2. Сиковский Д.Ф. Методы вычислительной теплопередачи: Конспект лекций. - Новосибирск, 2006. - 66 с.
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1984. - 152 с.
4. ANSYS CFX 10.0 Theory Reference / SAS IP Inc., 2005.
5. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: Мир, 1990.- Т.1,2.
6. Маслов Л.Б. Численные методы механики: Курс лекций / Иван. гос. энерг. ун-т.- Иваново: ИГЭУ, 2001.
7. ANSYS 10.0 Documentation / SAS IP Inc., 2005.
8. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. Ansys для инженеров: Справочное пособие. - М.: Машиностроение-1, 2004. - 512 с.
9. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А.Н. Подгорный, П.П. Гонтаровский, Б.Н. Киркач и др. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
10. ANSYS 7.0 Tutorials / University of Alberta, 2001.
11. Соломин О. Задача и методы динамического анализа высокоскоростных роторных систем с подшипниками жидкостного трения. Гидродинамическая теория смазки – 120 лет. Труды Международного научного симпозиума: В 2 томах. Машиностроение-1, Орел: ОрелГТУ, 2006. Т.1.
12. Герасиміва К.П., Загорулько А.В., Кундера Ч. Программное приложение для автоматизированного расчета динамических характеристик роторов
13. центробежных машин // Вісник СНАУ. - №9(15) 2006. – С. 168-175.

Навчальне видання

**Загорулько Андрій Васильович,  
Кайота Дмитро Олегович**

# **Обчислювальна гідроаеромеханіка**

Конспект лекцій

для студентів спеціальності  
*131 «Прикладна механіка»*  
денної форми навчання

Відповідальний за випуск А. В. Загорулько  
Редактор А. В. Загорулько  
Комп'ютерне верстання С. О. Міщенко

Формат 60×84/8. Ум. друк. арк. 12,09. Обл.-вид. арк. 11,52.

Видавець і виготовлювач  
Сумський державний університет,  
вул. Римського-Корсакова, 2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.