МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Кафедра прикладної математики та моделювання складних систем

Допущено до захисту
Завідувач кафедри ПМ та МСС
_____ проф. Лисенко О.В.
«__» _____ 20__ р

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття освітнього ступеня «магістр»

спеціальність 113 «Прикладна математика»
освітньо-професійна програма «Прикладна математика»

тема роботи **«МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕСУ В НЕОДНОРІДНІЙ ТРИВИМІРНІЙ СИСТЕМІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ»**

Виконавець
студентка факультету ЕлІТ
Коваль Світлана Валеріївна_____

Науковий керівник
д.ф.-м.н., професор
Гончаров Олександр Андрійович _____

Суми – 2019

СУМСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет **електроніки та інформаційних технологій**
Кафедра **прикладної математики та моделювання складних систем**
Рівень вищої освіти **другий (магістр)**

Галузь знань **11 Математика та статистика**
Спеціальність **113 Прикладна математика**
Освітня програма **освітньо-професійна «Прикладна математика»**

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедрою
ПМтаМСС
проф. Лисенко
О.В._____
«___» _____20__р.

З А В Д А Н Н Я
НА ДИПЛОМНИЙ ПРОЕКТ (РОБОТУ) СТУДЕНТОВІ

Коваль Світлані Валеріївні

1. Тема проекту (роботи) Моделювання теплового процесу в неоднорідній тривимірній системі методом скінченних елементів
Керівник роботи Гончаров О.А., професор, д.ф.-м.н
затверджую наказом по інституту від " 23" жовтня 2019 р. № 2129-III

2. Термін здачі студентом закінченого проекту (роботи) 23.12.2019

3. Вхідні данні до проекту (роботи) 1) Метод скінченних елементів; 2) експериментальні та теоретичні дані аналогічних досліджень

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, що їх належить розробити)
Дослідження та тривимірне моделювання температурного поля в ріжучому інструменті. Визначення впливу захисного покриття.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень)
1) Схематична модель пластини з покриттям та державки.
2) Розподіл температурного поля для інструменту з покриттям в перерізі.

3) Розподіл температурного поля для інструменту без покриттям в перерізі.

4) Тривимірна модель розподілу температури.

5) Залежність значення температури від вузлових значень для інструменту з покриттям та без покриття.

6. Консультанти до проекту (роботи), із значенням розділів проекту, що стосується їх

Розділ	Консультант	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання 04.11.2019

Керівник _____
(підпис)

Завдання прийняв до виконання _____
(підпис)

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

п/п	Назва етапів дипломного проекту (роботи)	Термін виконання проекту (роботи)	Примітка
1	Ознайомлення з поставленою задачею	04.11.2019-07.11.2019	
2	Пошук і аналіз літератури	08.11.2019-11.11.2019	
3	Проведення розрахунків	11.11.2019-18.11.2019	
4	Побудова 3D моделі та опис отриманих результатів розрахунків	18.11.2019-30.11.2019	
5	Оформлення роботи у відповідності з прийнятими стандартами	1.12.2019-18.12.2019	

Студент дипломник _____
(підпис)

Керівник проекту _____
(підпис)

РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота: 49 ст., 14 рисунків, 2 таблиці, 27 джерел.

Актуальність теми: чисельне моделювання теплових процесів набуває все більшого поширення у зв'язку з необхідністю великих фінансових витрат на експериментальні дослідження.

Мета роботи: побудувати 3D модель пластини з покриттям та змоделювати тепловий процес у ній, використовуючи метод скінченних елементів.

Об'єкт дослідження: розподіл температури в пластині з нанесеним одношаровим захисним покриттям під час процесу різання.

Предмет дослідження: тривимірна модель ріжучого інструменту з одношаровим покриттям.

Метод дослідження: поставлена задача розв'язується з використанням методу скінченних елементів.

У даній роботі була побудована математична модель теплового поля у тривимірній неоднорідній системі методом скінченних елементів для ріжучої пластини з покриттям. Було досліджено вплив покриття та знайдено розподіл температури для пластинки як з покриттям так і без нього. Моделювання температурного поля проводилося у програмному середовищі ANSYS.

За результатами дослідження було встановлено, що в даному випадку захисне покриття не має значного впливу на температурний розподіл.

ТЕПЛОВЕ ПОЛЕ, МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ, ГРАНИЧНІ УМОВИ, ТРИВИМІРНА МОДЕЛЬ, РОЗПОДІЛ ТЕМПЕРАТУРИ, ЗАХИСНЕ ПОКРИТТЯ

Зміст

ВСТУП....6
РОЗДІЛ 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД....7
РОЗДІЛ 2 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ....16
2.1 Постановка задачі....16
2.2 Граничні умови....20
2.3 Метод скінченних елементів....22
2.4 Варіаційний підхід....27
РОЗДІЛ 3 РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ....34
3.1 Опис програмного пакету ANSYS....34
3.2 Результати розрахунків....36
ВИСНОВКИ....40
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ....41
ДОДАТОК А....44

ВСТУП

В наш час чисельне моделювання температурного поля та процесів теплопереносу набуває популярності в роботі різних науково-дослідних, проектно-конструкторських і виробничих установ. Це пов’язано з складністю та необхідністю великих фінансових витрат для експериментального вивчення теплових процесів у лабораторних умовах. Досить часто виникають проблеми з експериментальними методами, такими як інфрачервоний пірометр [1], вбудована термопара [2] і термопара з інструментальною деталлю [3]. Наприклад, використання термопари обмежується вибором інструментів, які можуть проводити електрику. Крім того, термопара вимірює середню температуру між інструментом і заготовкою і не вимірює температуру в певній точці. Власне, через такі складнощі в експериментальних дослідженнях багато аналітичних та чисельних методів використовуються для моделювання температурного поля [4,5]. Також чисельне моделювання дозволяє реалізувати складні геометричні форми і граничні умови при різанні металу. Досить часто через складну геометрію інструменту для моделювання застосовується метод скінченних елементів [13-18].

На сьогоднішній день активно розвивається дослідження температурного поля під час процесу різання. Температура є одним із ключових аспектів у процесі зносу інструменту. Інструмент може досягти критичного зносу, якщо температура перевищує межі зв'язування кристалів матеріалів інструменту. Найбільше навантаження тепла припадає на поверхневий шар інструменту. Створення нового матеріалу є доволі дорогим процесом, який потребує багато часу, тому важливим є дослідження і застосування захисних покриттів.

Захисні покриття дозволяють уповільнити процеси рекристалізації та зменшити розсіювання тепла і цим самим зменшити термін зносу інструменту.

РОЗДІЛ 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

Вже відомо, що в процесі обробки, максимальна температура генерується на поверхні ріжучого інструменту. Передача тепла при різанні є дуже складним процесом, оскільки зі збільшенням температури змінюються фізичні та механічні характеристики металевих конструкцій [6].

Найбільша кількість тепла, що утворюється при різанні (85–90%), є результатом перетворення роботи різання в теплоту. Решта роботи витрачається на деформацію кристалічної решітки. Температура у зоні різання, яка є основним фактором, що визначає процес різання, зростає завдяки збільшенню кількості підведеної теплоти. Від неї залежить сила тертя, усадка стружки, сила різання, знос інструменту. Підтвердження факту, що температура відіграє велику роль у зносі інструменту можна знайти у працях багатьох авторів. В дослідженні [7] було проведено дослідження впливу температури на знос, що показало, що швидкість зносу залежить від температури. Дослідження [8] також кількісно підтвердили відомий факт, що знос інструменту залежить від температури. Згідно з аналізом в [9], температура також впливає на цілісність заготовки. Дослідження [10] показали, що невелика кількість тепла, що подається в інструмент (8-10% від загальної теплоти) досить для створення високих температур поблизу зони різання, які в тих же випадках можуть досягати рівня 1100 ° C.

Досягнення високих температур в процесі різання металу зумовлюється виділенням великої кількості теплоти, що утворюється в результаті того, що механічна робота різання переходить в теплову енергію. Основними джерелами тепла є Q_1 - тепловий потік тертя, Q_2 - тепловий потік контакту.

Нижче наведена схема, яка описує кількість тепла, що виділяється при різанні.

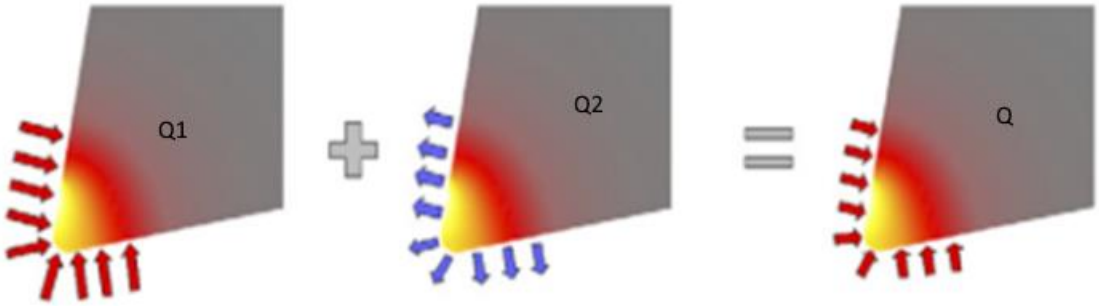


Рис. 1.1 – Джерела тепла [18].

Зазвичай, утворене в процесі різання тепло не накопичується в місцях його утворення, а поширюється від високої температури до низької температури. Співвідношення кількості тепла, як правило, залежить від фізико-механічних властивостей оброблюваного матеріалу, режиму різання, геометрії ріжучого інструменту і зовнішніх умов, в яких здійснюється різання.

Розподіл теплоти змінюється в залежності від зміни швидкості різання. Чим більша швидкість різання, тим більша кількість теплоти, що переноситься стружкою. Це в свою чергу зумовлює зменшення надходження теплоти в різець та деталь. Тепло зосереджене в стружці не встигає перейти від неї до різця і деталі. Дійсно, зі збільшенням швидкості різання кількість температури, що надходить в інструмент, зменшується. Проте, коли збільшується загальна кількість теплоти, то відбувається і значне підвищення температури в зоні різання. Під час процесу різання в певний момент досягається стаціонарний режим, коли температура залишається сталою.

Існують різні методи моделювання температурного поля для ріжучих інструментів під час процесів різання металів. Проте, в останні роки метод скінченних елементів набуває все більшої популярності для моделювання процесів різання металу. Наприклад, автори у своїй роботі [11] досліджували знос інструменту при жорсткому повороті, під час якого розподіл температури і тепловий потік також аналізувалися методом скінченних елементів. Також за останні роки проводилися дослідження, які допомогли розширити застосування методу скінченних елементів для реальної геометрії

ріжучого інструменту. По-суті, перша завершена робота про моделювання ортогонального різання для твердосплавного інструменту з декількома шарами покриття і з використанням методу скінченних елементів була представлена у роботі [12].

Уже відомо, що найбільше навантаження під час використання ріжучого інструменту припадає на поверхневий шар інструменту, тому саме властивості верхнього шару і визначають працездатність під час обробки. На практиці досить часто для поліпшення строку служби ріжучого інструменту застосовують підхід, що базується на нанесенні покриттів різними способами. Найбільшою популярності користуються покриття на основі нітридів і карбідів тугоплавких сполук. [13, 14]

Більшість моделей, які зустрічаються в літературі базуються на процесі ортогональної обробки. Наприклад, автор в [15] представив чисельну модель для інструментів як з покриттям так і без покриття при ортогональному різанні. У своїй роботі для моделювання процесу різання він застосував код програми Thirdwave AdvantEdge. Дослідження проводилися для інструменту без покриття і з покриттями TiC, TiN і Al_2O_3, які були нанесені на ISO P20.

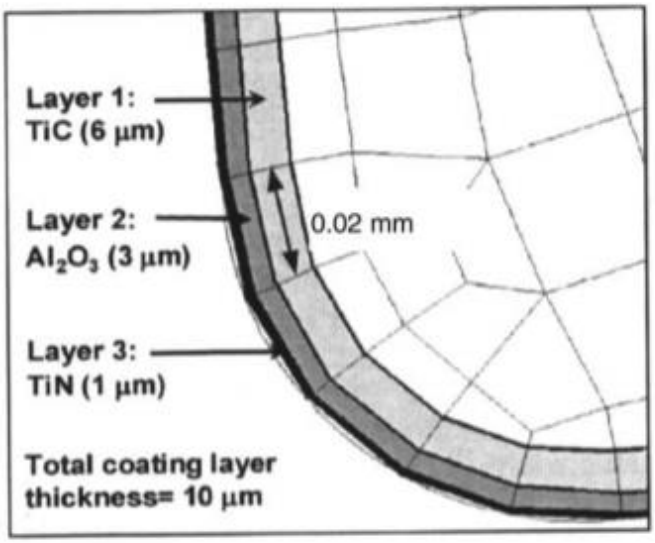


Рис. 1.2 – Модель з тришаровим покриттям [15].

Всі умови різання та геометрія інструменту були обрані на основі власних експериментальних даних. Для моделювання був обраний метод

скінченних елементів, який впершу чергу використовувався для забезпечення визначення чисельних значень температури, що виникають в різних точках. Слід звернути увагу, що саме використання методу скінченних елементів дозволяє враховувати різні термодинамічні ефекти, а також допомагає визначити і дослідити термодинамічні ефекти з якими виникають труднощі при експериментальному дослідженні в лабораторних умовах. МСЕ дає змогу пояснити термоізоляційний ефект для покриття Al_2O_3. Дослідження показує, що багатошарове покриття значно знижує потік тепла в інструмент, що в свою чергу продовжує термін служби інструменту. Різниця у значеннях температури для інструменту без покриття та з трьохшаровим покриттям досягала 100°C. Нижче наведена таблиця зміни температури в залежності від покриття та кількості шарів.

Таблиця 1.1 – максимальне значення температури для інструменту та стружки[15].

Values of maximum temperature in tool and chip (in °C)

Coating/substrate material	Tool	Chip
P20	635.3	679.2
TiC-P20	591.8	679.8
TiC/TiN-P20	565.6	649.5
TiC/Al_2O_3/TiN-P20	524.5	650.6

Також було виявлено, що покриття змінюють процес теплопередачі і розподіл тепла в зоні різання. Існують деякі відмінності у теплових властивостях покриттів. Наприклад, для TiC і TiC / TiN теплопровідність зростає з підвищенням температури і тепло розподіляється вздовж передньої поверхні і в середині пластини. Теплопровідність керамічного шару Al_2O_3 в покриті TiC / Al_2O_3 / TiN значно зменшується.

Запропонована модель показує добре узгодження як експериментальних так і чисельно отриманих значень температури. Проте, можна досягти кращої точності при використанні іншого параметру тертя та

врахуванні реальної товщини покриттів. Кулонівська модель тертя являється не підходящою в даному випадку.

Дослідження [16] присвячено 3-D моделюванню температурного поля для ріжучого інструменту з покриттями для яких враховувалася і їх товщина. Були наведені 10 випадків з застосуванням різної товщини покриттів. Для моделювання застосовувалося програмне забезпечення ANSYS® CFX. Нижче наведені результати розподілу тепла.

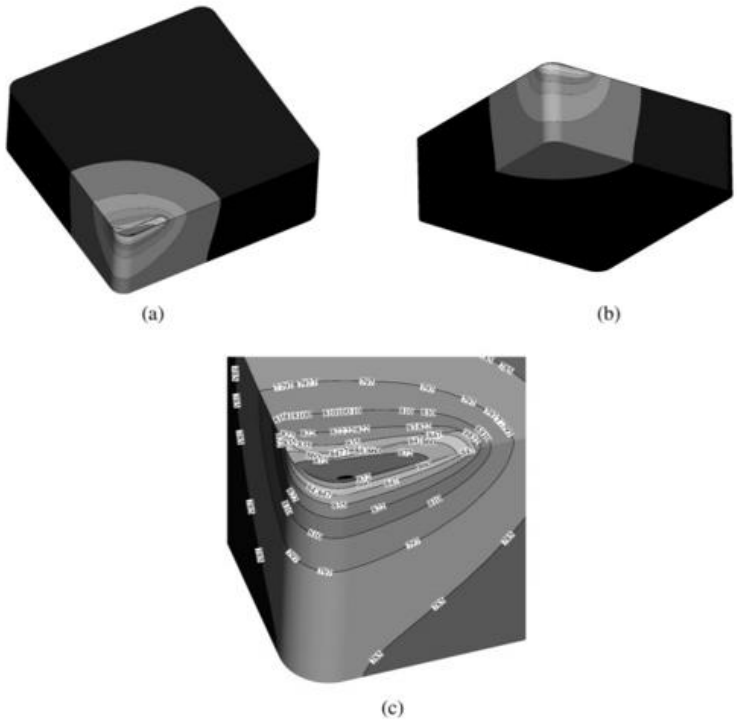


Рис. 1.3 - Верхня (а), нижня (б) частини різця та поверхні (с) розподілу температурного поля в ріжучому інструменті з покриттям TiN при t = 63 с від початку обробки [16].

Також автори порівняли отримані чисельно значення з експериментальними. Проведені дослідження показують, що температура на інструменті може в незначній мірі впливати на покриття, коли властивості покриття і підкладки будуть різними. Це є справедливим навіть для тонкого 1 (мкм) покриття. Десятикратне збільшення навантаження теплового потоку на різець провокує збільшення різниці температур на контрольних точках аж у 17 разів. Також було встановлено, що покриття з цементованого карбіду

показують дещо незадовільні результати під час безперервного процесу різання.

Автор в [17] провів дослідження впливу температури на інструмент з декількома шарами покриттів. Був проведений експеримент для сталі AISI 1 035 з метою вивчення різних покриттів пластини в реальних умовах різання. Отримані результати показали, що покриття Al_2O_3 трохи зменшило потік тепла, в той час як інші використовувані покриття істотно не змінювали теплове поле.

Дивлячись на зауваження у попередніх дослідженнях можна зробити висновок, що для покращення результатів моделювання температурного поля слід враховувати вибір глобального коефіцієнта теплопередачі. Так, дослідження [18] показує, що глобальний коефіцієнт тепла має суттєвий вплив на результати розподілу тепла. Правильно підібраний коефіцієнт дозволяє прискорити наближення моделювання методом скінченних елементів до стаціонарних умов. Розподіл тепла залежить від первинної і вторинної зони зсувів. Дослідники [19–21] запропонували аналітичні моделі, що враховують основні джерела тепла: первинну зону зсуву та зону вторинного зсуву. Вони дослідили, що, врахування цих двох основних джерел тепла, дозволяє точно передбачити розподіл температури в інструменті. До первинної зони належить деформація, а до вторинної - тертя, яке провокує виділення теплоти. Зазвичай тепло, яке виробляється у первинній зоні зсуву недостатньо для впливу на розподіл температури в інструменті. Через це розрахунок температури в інструменті в основному залежить від тепла виробленого в процесі тертя. З урахуванням цього можна зробити висновок, що глобальний коефіцієнт теплопередачі працює як коефіцієнт розподілу тепла, що надходить у стружку та інструмент відповідно.

У 1998 році автори роботи [22] провели оцінку коефіцієнту, що враховував роль теплоносія при обробці м'якої сталі за допомогою інструменту HSS з різною швидкістю різання, що коливалася від 33 до 61 м /

хв. Рівняння теплової рівноваги були використані для розрахунку значення. Метою роботи була побудова системи, яка могла б автоматично визначати всі змінні, що використовуються. Вірно розроблена чисельно-експериментальна процедура допомогла оцінити коефіцієнт h.

Автор у роботі [18] для початку провів експериментальні випробування, які встановили реальну температуру інструменту. Випробування проводилися в ортогональних умовах. Ріжучий інструмент був виготовлений з карбіду без покриття ISO P40, з нахилом і кутами зазору 10° і 11° відповідно. Матеріалом заготовки була сталь AISI1045 (HB 180-200). Випробування проводилися зі швидкістю різання від 50 до 150 м / хв, швидкістю подачі - в межах 0,05-0,15 мм / об. Сили різання та тяги вимірювалися за допомогою трикомпонентного п’єзоелектричного динамометра.

Дослідження теплообміну між двома контактними частинами показали, що глобальний коефіцієнт теплопередачі збільшується, якщо збільшуються і тиск, і температура на межі розділу, а при збільшенні швидкості подачі температура збільшується.

Автор запропонував закон про глобальний коефіцієнт теплопередачі, який був розроблений відповідно до експериментально-числових даних. Таким чином можна реалізувати належну функцію h безпосередньо в числовій інтерпретації методу скінченних елементів, щоб обчислити реальну кількість тепла, що протікає між стружкою і інструментом і як контактний тиск та температура змінюються в процесі різання.

Дослідження у [23] показали вплив закону поведінки матеріалу заготовки на температуру ріжучого інструменту, отриману методами скінченних елементів. Їх результати показали, що при застосуванні закону поведінки матеріалів Джонсона-Кука в термомеханічному моделюванні чисельну температуру інструменту недооцінюють. Закон поведінки енергетичного матеріалу недооцінює температуру ріжучого інструменту від 20 ° C до 100 ° C порівняно з експериментальними вимірюваннями.

В роботі [24] застосовувався чисельний підхід для отримання розподілу температури в ріжучому інструменті під час обробки сталі AISI 1045. Фактично, тепловий потік обчислюється за допомогою ріжучих зусиль, виміряних під час обробки. Прогнозований розподіл температури в інструменті порівнюється з температурою інструменту, виміряною за допомогою вбудованих термопар.

Різні дослідження показали, що більша частина тепла (90%), що утворюється в первинній зоні, переноситься в стружку, а решта знаходиться в заготовці [25, 26]. Але дане твердження є більш характерним для обробки на високих швидкостях і для сухої обробки, оскільки адіабатичне явище з'являється в первинній зоні зсуву в таких умовах. Відповідно до цього, температура ріжучого інструменту в основному обумовлена зонами тертя.

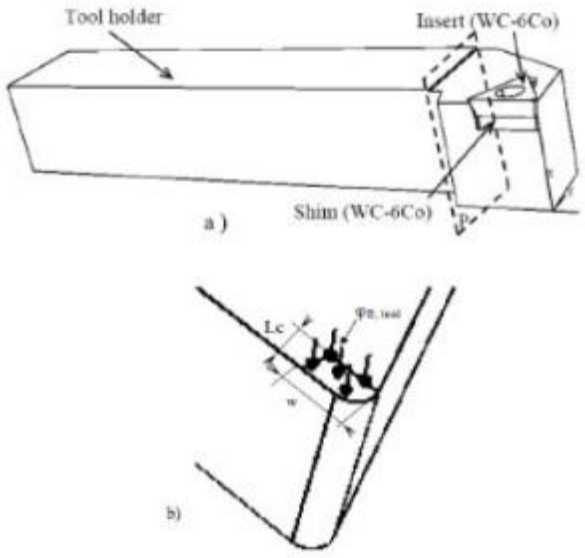


Рис. 1.4 - а) пластина, підкладка та державка інструменту; б) Деталі щодо температурних граничних умов [24].

Температури різального інструменту при обробці сталі AISI 1045 з ріжучим інструментом на основі цементованого карбіду були вивчені експериментально та чисельно. За експериментальними дослідженнями було встановлено, що температура в ріжучому інструменті зростає при збільшенні швидкості різання. Це добре узгоджується з попередніми результатами,

представленими в літературі. Максимальна температура, записана термопарами ТС1 і ТС2 при високій швидкості різання (400 м / хв), відповідно наближається до 480°С і до 340°С. Тепловий потік, що розсіюється в ріжучому інструменті, розраховується з урахуванням коефіцієнтів розподілу тепла.

Це дослідження показало, що температура ріжучого інструменту значно збільшується при збільшенні теплопровідності. Це пояснює, що теплопровідність має важливий вплив на підвищення температури інструменту. Слід зазначити, що коефіцієнт розподілу тепла обчислюється за допомогою постійної теплопровідності. В ідеалі було б краще врахувати, що коефіцієнт розподілу теплоти залежить від температури.

РОЗДІЛ 2 МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕНЬ

2.1 Постановка задачі

У даній роботі моделювання температурного поля досліджується для пластини з покриттями на основі методу скінченних елементів.

Пластина була обрана типу SNMA191240 з розмірами L=19.1, S=6.35, r=1.2, Ød=7.94, Øl.c=19.1

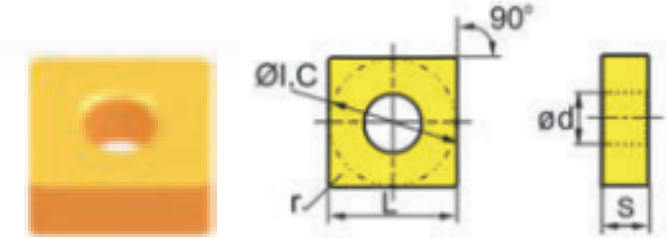


Рис. 2.5. – Тип пластини.

Різець типу PSBNR/L 4040S19 з розмірами h=h_1=40 мм, b=40 мм, f=35 мм, l1=250 мм.

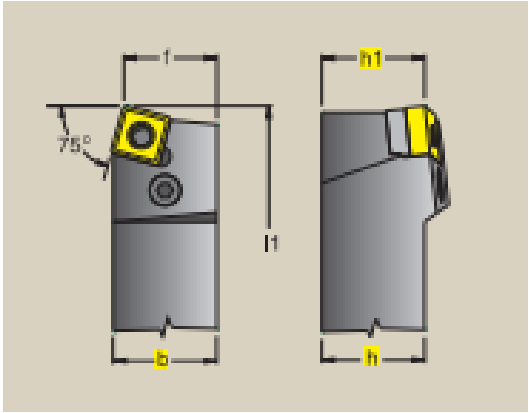


Рис. 2.6. – Тип різця.

В даній роботі розглядається динаміка теплового поля в різці, який представлений двома об'ємами: $\boldsymbol{V}_1$ (державка) и $\boldsymbol{V}_2$ (ріжуча пластина) з заданими граничними умовами (рис. 10). Модель розділена на об'єми з різними фізичними характеристиками і у яких теплоємність c (Дж/кг·°К), щільність ρ (кг/м3) і коефіцієнт теплопровідності λ (Вт/кг·°К) мають розрив першого роду.

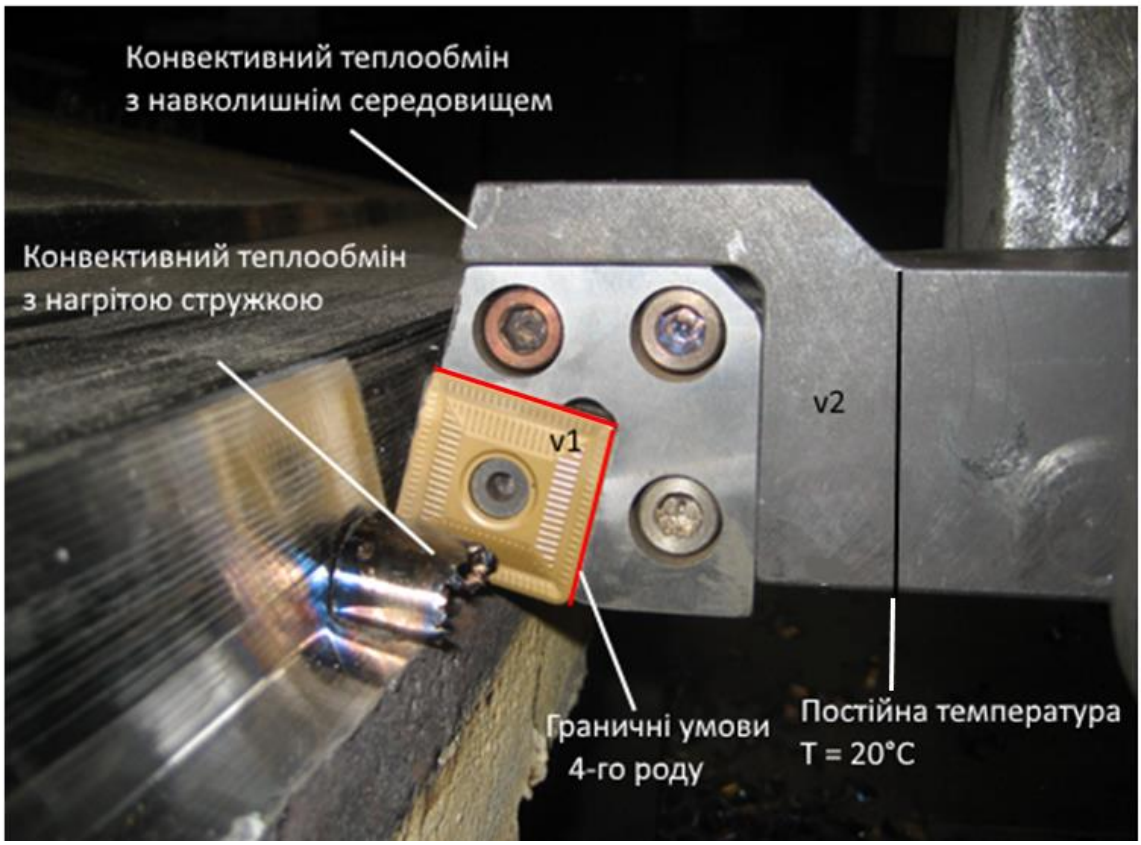


Рис. 2.7. – Граничні умови.

Рівняння теплопровідності з урахуванням постановки задачі набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1}{\partial t} = a_1 \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right), \quad x, y, z \in \boldsymbol{V}_1; \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} = a_2 \left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \right), \quad x, y, z \in \boldsymbol{V}_2; \\ \frac{\partial U_3}{\partial t} = a_3 \left(\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial z^2} \right), \quad x, y, z \in \boldsymbol{V}_3; \end{cases} \qquad (2.1)$$

де $U_1 = U_1(x, y, z, t)$ і $U_2 = U_2(x, y, z, t)$, $U_3 = U_3(x, y, z, t)$ – функції, що описують теплове поле в державці (об'єм $\boldsymbol{V}_1$), в ріжучій пластині (об'єм $\boldsymbol{V}_2$) і в захисному покритті (об'єм $\boldsymbol{V}_3$) відповідно; $a_1 = \lambda_1/(c_1\rho_1)$ і $a_2 = \lambda_2/(c_2\rho_2)$, $a_3 = \lambda_3/(c_3\rho_3)$– коефіцієнти температуропровідності для об'ємів $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$, $\boldsymbol{V}_3$.

Рівняння (45) необхідно доповнити граничними умовами див. Рис 10. Початкова умова – у початковий момент часу температура у всіх точках різця дорівнює температурі навколишнього середовища.

$$t = 0, \quad x, y, z \in \boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2 : \qquad U_{1,2}(x, y, z, 0) = T_0$$

На пластині в зоні стружкоутворення спостерігається конвективний теплообмін з стружкою, тобто задані граничні умови третього роду.

На границі державки різця (об'єм $\boldsymbol{V}_2$) відбувається конвективний теплообмін з зовнішнім середовищем (повітрям або мастильно-охолоджуючою рідиною), тобто задані граничні умови також третього роду.

$$t > 0, \qquad x, y, z \in \boldsymbol{S}_1 : \qquad \lambda_{1,2} \frac{\partial U_{1,2}}{\partial \boldsymbol{n}} = -\alpha_1 \left(U_{1,2} - T_0 \right)$$

$$t > 0, \qquad x, y, z \in \boldsymbol{S}_2 : \qquad \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial \boldsymbol{n}} = -\alpha_2 (U_2 - \theta)$$

де $\boldsymbol{n}$ – нормаль зовнішня до границь $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$; α_1 і α_2 – коеффіцієнти конвективного теплообміну з стружкою і зовнішнім середовищем відповідно.

Гранична умова першого роду – температура на торці різця, який найвіддаленіший від зони різання зберігається рівною температурі навколишнього середовища.

$$t > 0, \qquad x, y, z \in \boldsymbol{S}_3 : \qquad U_1(x, y, z, t) = T_0;$$

На границі позначеній червоним (рис.10) відбуваються граничні умови четвертого роду.

$$U_1(x, y, z, t)|_{S_{12}} = U_2(x, y, z, t)|_{S_{12}};$$

$$\lambda_1 \frac{\partial U_1}{\partial y}\Big|_{S_{12}} = \lambda_2 \frac{\partial U_2}{\partial y}\Big|_{S_{12}};$$

Нижче представлена двовимірна модель пластини з нанесеними захисними покриттями.

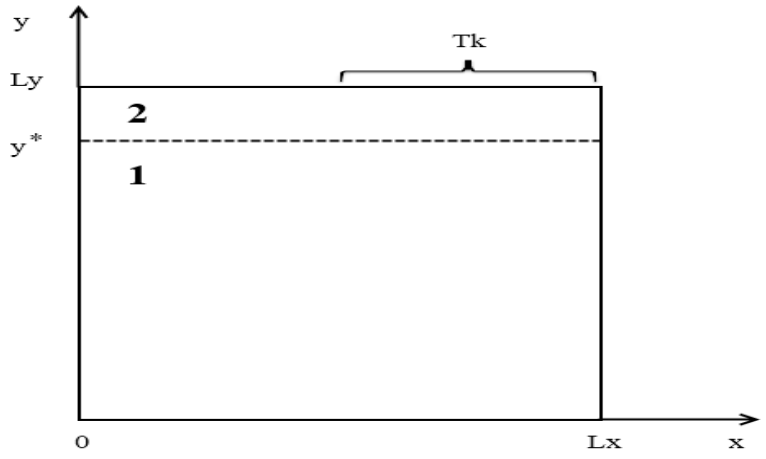


Рис. 2.8. – Модель пластини з покриттям, де зона 1 – різець, зона 2 – покриття.

Таблиця 2.1 – Характеристики пластини, державки та захисного шару

Характеристики	Ріжуча пластина з карбіду	Покриття TiN	Державка сталь 40Х
Щільність, $\frac{кг}{м^3}$	11400	5430	7770
Питома теплоємність, $\frac{Дж}{кг \cdot ℃}$	251.4	600	529
Теплопровідність, $\frac{Вт}{кг \cdot ℃}$	38	11.3	27.2

2.2 Граничні умови

Відомо, що диференціальне рівняння теплопровідності визначає закон за яким відбувається зміна температури тіла з часом під час процесу теплопередачі. Проте, для моделювання температурних полів розв'язання диференціального рівняння не достатньо. Необхідно ще задати початкові і граничні умови.

Початкова умова необхідна для знаходження розподілу температури всередині тіла в початковий момент часу:

$$t = 0:\ T = f(x, y, z)$$

де $f(x, y, z)$ - невідома функція.

Коли температура в тілі розподіляється нормально, то початкова умова набуватиме вигляду:

$$t = 0:\ T = T_0 = const$$

Граничні умови враховують особливості протікання процесу на поверхні тіла і задаються декількома способами.

1. Граничні умови першого роду - задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$T_w = T(x, y, z, t),$$

Т – температура на поверхні тіла.

2. Граничні умови другого роду - задається значення теплового потоку для кожної точки поверхні (або межі) тіла в будь-який момент часу:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = q_w(x, y, z, t),$$

де $\bar{n}$ – нормаль до поверхні тіла. Найбільш часто використовується умова

$$q_w = const$$

3. Граничні умови третього роду або закон Ньютона - Рихмана - задається взаємозв'язок між тепловим потоком від твердої стінки і тепловим потоком з навколишнім середовищем:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} = \alpha(T_w - T^e),$$

де α - коефіцієнт теплообміну.

4. Граничні умови четвертого роду - задається взаємозв'язок між елементами, що мають різні теплофізичні характеристики:

$$-\lambda_C\left(\frac{\partial T_C}{\partial \bar{n}}\right)_\Gamma = -\lambda_2\left(\frac{\partial T}{\partial \bar{n}}\right)_\Gamma$$

2.3 Метод скінченних елементів

Протягом останніх 50 років було розроблено велику кількість методів моделювання, включаючи аналітичні методи, емпіричні підходи і метод кінцевих елементів. Але в останні роки метод кінцевих елементів посів особливе місце серед методів моделювання температурного поля в ріжучому інструменті. Тому, для реалізації нашої задачі був обраний саме цей метод. Основна ідея методу скінченних елементів полягає в тому, що будь-яку безперервну функцію можна апроксимувати дискретною моделлю. В нашому випадку безперервною функцією виступає температура, яка будується на безлічі кусково-неперервних функцій, визначених на скінченному числі підобластей, які називаються елементами[27].

Однією з переваг МСЕ є те, що він дозволяє враховувати різні властивості матеріалу для різних елементів, а також дозволяє описувати форму тіл з великим ступенем наближення до їх реальної конфігурації. Також дає можливість аналізу тиску, деформації та температури. Більш точні розрахунки в місцях великої зміни температури дозволяє отримати саме МСЕ. В місцях незначних змін точністю можна знехтувати цим самим зменшити час на обчислення поставленої задачі. Як зазначалося раніше метод скінченних елементів базується на розбитті тіла на елементи. Зазвичай для двовимірних задач використовують трикутники, прямокутники, багатокутники, для тривимірних задач – тетраедри, паралелепіпеди, призми.

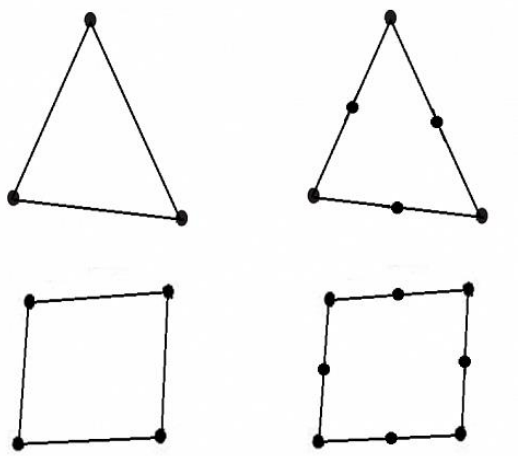


Рис. 2.9. - Приклад деяких двовимірних скінченних елементів [27].

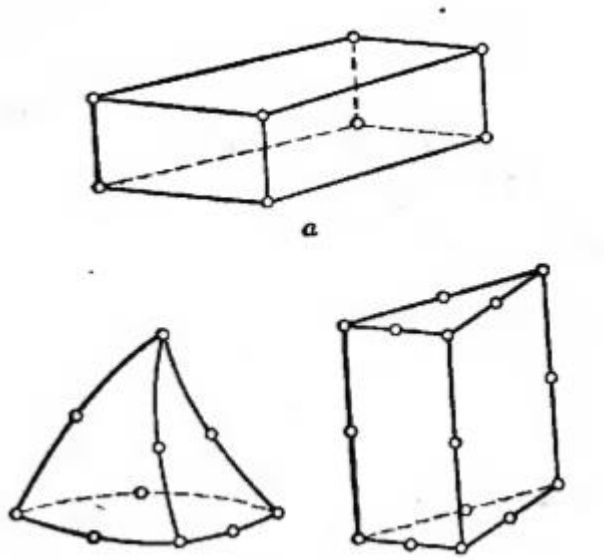


Рис. 2.10. - Приклад деяких тривимірних скінченних елементів [27]

Розглянемо тривимірний симплекс-елемент, що являється тетраедром з вузлами *i*, *j*,*k*,*l*. Елемент зображений на Рис. 2.11.

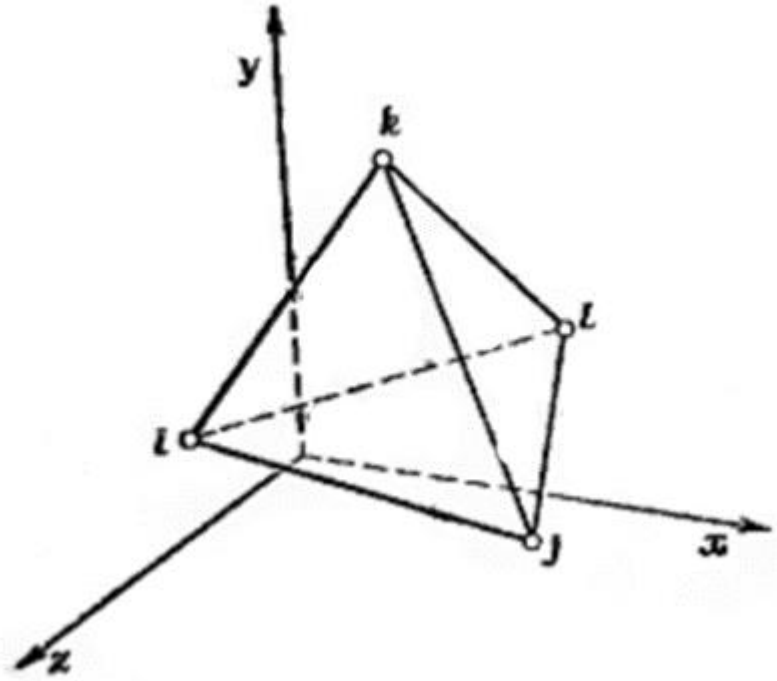


Рис. 2.11. - Тривимірний скінченний елемент [27].

Інтерполяційний поліном матиме вигляд:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \tag{2.1}$$

Таким чином коефіцієнти у вузлах можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} T_i &= \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i + \alpha_4 Z_i; \\ T_j &= \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j + \alpha_4 Z_j; \\ T_k &= \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k + \alpha_4 Z_k; \\ T_l &= \alpha_1 + \alpha_2 X_l + \alpha_3 Y_l + \alpha_4 Z_l. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Запишемо систему у матричному вигляді:

$$\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\alpha}\}, \tag{2.4}$$

де

$$\boldsymbol{T^T} = \{T_i T_j T_k T_l\}, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{\alpha^T} = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\} \tag{2.6}$$

і

$$[\mathrm{C}] = \begin{bmatrix} 1 & X_i & Y_i & Z_i \\ 1 & X_j & Y_j & Z_j \\ 1 & X_k & Y_k & Z_k \\ 1 & X_l & Y_l & Z_l \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Отримаємо строчку для визначення $\{\boldsymbol{\alpha}\}$**:**

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\boldsymbol{C}]^{-1}\{\boldsymbol{T}\} \tag{2.8}$$

Так як

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z = [1\ x\ y\ z]\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{2.9}$$

Використовуючи (8) отримаємо:

$$\varphi = [1\ x\ y\ z][\boldsymbol{C}]^{-1}\{T\}. \tag{2.10}$$

В даному випадку визначник [C] рівний об’ємам тетраедра.

Запишемо диференціальне рівняння для розповсюдження тепла у загальному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right) + Q = 0 \tag{2.11}$$

де T – температура, $\lambda_{xx}, \lambda_{yy}, \lambda_{zz}$ – коефіцієнти теплопровідності в напрямках x,y,z відповідно, Q – джерело тепла. Дане рівняння доповнюється граничними умовами:

$$T = T_0 \quad \text{на} \quad S_1 \tag{2.12}$$

і (або)

$$\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}l_x + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}l_y + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}l_z + q + h(T - T_\infty) = 0 \tag{2.13}$$

на S_2, якщо на границі відбувається конвективний теплообмін і заданий потік тепла. У формулі (4) l_x, l_y і l_z - напрямні косинуси вектора нормалі до поверхні, h - коефіцієнт теплообміну, T – невідома температура на границі,

T_∞-температура навколишнього середовища, q – потік тепла. Також варто зазначити, що теплообмін і потік тепла не можуть відбуватися одночасно на одній тій же ділянці поверхні. S_1 і S_2 - повна границя елементу. Якщо величини q і h будуть рівними нулю, то рівність (4) набуде вигляду:

$$\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}l_x + \lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}l_y + \lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}l_z = 0 \qquad (2.14)$$

Дана рівність відображає відсутність перенесення тепла.

Існують випадки, коли диференціальне рівняння можна замінити задачею про знаходження мінімуму або максимуму деякого функціоналу. Даний підхід називається варіаційним підходом. Задачу теплопровідності краще розглядати з точки зору варіаційного принципу. При застосуванні варіаційного підходу диференціальне рівняння розв'язується не в кожній точці тіла, а в середньому, тобто в інтегральному сенсі. Взагалі, існує велика кількість наближених аналітичних методів розв'язку задач теплопровідності, що базуються саме на переході від крайових диференціальних задач до варіаційних.

2.4 Варіаційний підхід

Функціонал – визначений інтеграл, що приймає певні числові значення при підстановці кожної конкретної функції у підінтегральний вираз. Розглянемо функціонал

$$\chi = \int_V F(x, y, z, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) dV \tag{2.15}$$

Використовуючи умови:

$$\delta\varphi_x = \frac{d}{dx}(\delta\varphi), \delta\varphi_y = \frac{d}{dy}(\delta\varphi), \delta\varphi_z = \frac{d}{dz}(\delta\varphi) \tag{2.16}$$

Запишемо варіацію функціоналу:

$$\delta\chi = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) + \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) \right) dV \tag{2.17}$$

Проінтегруємо по частинах всі члени функціоналу в (2.17) і застосуємо функцію Гауса:

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi\right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)(\delta\varphi) dV , \\
\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\delta\varphi\right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right)(\delta\varphi) dV , \\
\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) dV &= \int_V \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\delta\varphi\right) dV - \int_V \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)(\delta\varphi) dV ,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

або

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta\varphi) dV &= \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\delta\varphi dS - \int_V \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right)\delta\varphi\, dV, \\
\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\frac{\partial}{\partial y}(\delta\varphi) dV &= \int_S l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\delta\varphi dS - \int_V \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right)\delta\varphi\, dV , \\
\int_V \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\frac{\partial}{\partial z}(\delta\varphi) dV &= \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\delta\varphi dS - \int_V \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right)\delta\varphi\, dV ,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

де $l_x, l_y, l_z -$ напрямні косинуси нормалі до x, y, z.

Таким чином отримаємо варіацію функціоналу:

$$\delta\chi = \int_V \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_z}\right) \right) \delta\varphi\, dV + \int_S \left(l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) \delta\varphi \tag{2.20}$$

Стаціонарне значення χ буде досягнуто за умови, коли обоє підінтегральні вирази в дужках будуть рівними нулю. Це дозволить записати диференціальні рівняння з врахуванням граничних умов.

Розглянемо функціонал

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}\left[\lambda_{xx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \lambda_{yy}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \lambda_{zz}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - 2Q\varphi\right]dV \qquad (2.21)$$

Використовуючи (21) можна стверджувати, що для знаходження стаціонарного значення (мінімуму) цього функціоналу необхідно наступне:

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right) = 0 \qquad (2.22)$$

Розглянемо кожний доданок.

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = -2Q$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\lambda_{xx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 2\lambda_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\lambda_{yy}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 2\lambda_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \qquad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(2\lambda_{zz}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 2\lambda_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Отримаємо

$$\lambda_{xx}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \lambda_{yy}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \lambda_{zz}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + Q = 0 \qquad (2.24)$$

Функція, яка обертає стаціонарне значення функціоналу (2.21) повинна задовольняти рівнянню теорії поля.

Отже, беручи за основу варіаційний підхід для знаходження розв'язку рівняння (2.11) з заданими граничними умовами (2.12-2.13) будемо шукати мінімум функціоналу:

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}\left[\lambda_{xx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \lambda_{yy}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \lambda_{zz}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2 - 2QT\right]dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2}h(T - T_\infty)^2\right]dS\,. \qquad (25)$$

Процес мінімізації почнемо з перетворення функціоналу (2.25). Для цього введемо такі матриці:

$$\mathbf{g}^{\boldsymbol{T}} = \left[\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}\right] \tag{2.26}$$

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{zz} \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Перепишемо співвідношення (2.25) з врахуванням матриць

$$\chi = \int_V \frac{1}{2}[\mathbf{g}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{D}\mathbf{g} - 2TQ]dV + \int_{S_1} TqdS + \int_{S_1} \frac{h}{2}[T^2 - 2TT_\infty + T_\infty^2]dS\,. \tag{2.28}$$

Далі необхідно ввести функції $T^{(e)}$ визначені на окремих елементах. Інтеграли в (2.28) розбиваємо на інтеграли за окремими елементами. Тому отримаємо наступне:

$$\chi = \sum_{e=1}^{E} \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{D}^{(e)}g^{(e)}dV - \int_{V^{(e)}} T^{(e)}Q^{(e)}dV + \int_{S_1^{(e)}} T^{(e)}q^{(e)}dS + \int_{S_1^{(e)}} \frac{h^{(e)}}{2}\left[T^{(e)}T^{(e)} - 2T^{(e)}T_\infty + T_\infty^2\right]dS\,, \tag{2.29}$$

де E – загальне число елементів. Останнє співвідношення запишемо у вигляді:

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \cdots + \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^{E} \chi^{(e)}, \tag{2.30}$$

де $\chi^{(e)}$ – вклад окремого елементу в χ.

Для мінімізації функціоналу χ по вузловим значенням необхідно, щоб виконувалося рівність:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial}{\partial \{T\}} \sum_{e=1}^{E} \chi^{(e)} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{T\}} = 0. \tag{2.31}$$

Щоб сума (2.31) дорівнювала нулю необхідно щоб і кожний з додатків також дорівнював нулю.

Складові в рівності (2.31) можна обчислити окремо, побудувавши для кожного з них систему лінійних рівнянь, а потім скласти матриці і стовпці вільних членів (векторів навантаження) і розв'язати отриману систему відносно невідомих значень функції у вузлових точках.

Щоб знайти частинні похідні $\partial\chi^{(e)}/\,\partial\{T\}$ в (2.31) необхідно виразити інтеграли в (2.29) через вузлові значення $\{T\}$. Враховуючи співвідношення

$$T^{(e)} = \boldsymbol{NT} = \left[N_i^{(e)}, N_j^{(e)}, N_k^{(e)}, \dots, N_r^{(e)}\right] \begin{bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ \vdots \\ T_r \end{bmatrix}, \tag{2.32}$$

маємо:

$$T^{(e)} = \boldsymbol{N^{(e)}T}.$$

Запишемо вираз для $\boldsymbol{g^{(e)}}$:

$$\boldsymbol{g^{(e)}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial T^{(e)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T^{(e)}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T^{(e)}}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{dx} & \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{dx} \dots \dfrac{\partial N_\rho^{(e)}}{dx} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{dy} & \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{dy} \dots \dfrac{\partial N_\rho^{(e)}}{dy} \\ \dfrac{\partial N_1^{(e)}}{dz} & \dfrac{\partial N_2^{(e)}}{dz} \dots \dfrac{\partial N_\rho^{(e)}}{dz} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_\rho \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

або

$$\boldsymbol{g^{(e)}} = \boldsymbol{B^{(e)}T}\,, \tag{2.34}$$

де $\boldsymbol{B}$ містить інформацію, зв'язану з похідними від функції форми. Через те, що функції форми не визначені, ці величини є невідомими. Скористаємося формулами (2.32) і (2.34) отримаємо:

$$\chi^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2} \boldsymbol{T^T B^{(e)^T} D^{(e)} B^{(e)} T} dV - \int_{V^{(e)}} Q\, \boldsymbol{N^{(e)} T} dV +$$

$$+\int_{S_1^{(e)}} q\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}\,dS+\int_{S_2^{(e)}}\frac{h}{2}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{N}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}\,dS-$$

$$-\int_{S_2^{(e)}} hT_\infty\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}dS+\int_{S_2^{(e)}}\frac{h}{2}T_\infty^2\,dS. \qquad (2.35)$$

Величини Q, q, T_∞ і h – відомі коефіцієнти. Так як вони можуть бути змінені в середині елементу, можемо внести їх під знак інтегралу. Розглянемо формулу (2.35):

$$\frac{\partial}{\partial\{T\}}\int_{V^{(e)}}\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{B}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{D}^{(e)}\boldsymbol{B}^{(e)}\boldsymbol{T}dV=$$

$$=\int_{V^{(e)}}\boldsymbol{B}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{D}^{(e)}\boldsymbol{B}^{(e)}\,\boldsymbol{T}dV\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{T\}}\int_{V^{(e)}} Q\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}\,dV=\int_{V^{(e)}} Q\boldsymbol{N}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\,dV\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{T\}}\int_{S_1^{(e)}} q\,\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}dS=\int_{S_1^{(e)}} q\boldsymbol{N}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\,dS\,, \qquad (2.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial\{T\}}\int_{S_2^{(e)}}\frac{h}{2}\boldsymbol{T}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{N}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}dS=\int_{S_2^{(e)}} h\boldsymbol{N}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}\,dS\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{T\}}\int_{S_2^{(e)}} hT_\infty\boldsymbol{N}^{(e)}\boldsymbol{T}dS=\int_{S_2^{(e)}} hT_\infty\boldsymbol{N}^{(e)^{\boldsymbol{T}}}dS\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\{T\}}\int_{S_2^{(e)}}\frac{h}{2}T_\infty^2=0.$$

Внесок окремого елементу $\partial\chi^{(e)}/\partial\{T\}$ в загальну суму $\partial\chi/\partial\{T\}$ дорівнює

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial\{T\}} = \left(\int\limits_{V^{(e)}} \boldsymbol{B}^{(e)^T} \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{B}^{(e)}\, dV + \int\limits_{S_2^{(e)}} h \boldsymbol{N}^{(e)^T} \boldsymbol{N}^{(e)} dS \right) \boldsymbol{T} -$$

$$- \int\limits_{V^{(e)}} Q \boldsymbol{N}^{(e)^T}\, dV + \int\limits_{S_1^{(e)}} q \boldsymbol{N}^{(e)^T}\, dS - \int\limits_{S_2^{(e)}} h T_\infty \boldsymbol{N}^{(e)^T} dS. \qquad (2.37)$$

Коротша форма для сукупності інтегралів матиме вигляд:

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial\{T\}} = \boldsymbol{k}^{(e)} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{f}^{(e)}\,, \qquad (2.38)$$

де

$$\boldsymbol{k}^{(e)} = \int\limits_{V^{(e)}} \boldsymbol{B}^{(e)^T} \boldsymbol{D}^{(e)} \boldsymbol{B}^{(e)}\, dV + \int\limits_{S_2^{(e)}} h \boldsymbol{N}^{(e)^T} \boldsymbol{N}^{(e)} dS \qquad (2.39)$$

і

$$\boldsymbol{f}^{(e)} = - \int\limits_{V^{(e)}} Q \boldsymbol{N}^{(e)^T}\, dV + \int\limits_{S_1^{(e)}} q \boldsymbol{N}^{(e)^T}\, dS - \int\limits_{S_2^{(e)}} h T_\infty \boldsymbol{N}^{(e)^T} dS. \qquad (2.40)$$

Остаточна система рівнянь виходить після підстановки виразу (38) в (29):

$$\frac{\partial \chi}{\partial\{T\}} = \sum_{e=1}^{E} \left(\boldsymbol{k}^{(e)} \boldsymbol{T} + \boldsymbol{f}^{(e)} \right) = 0, \qquad (2.41)$$

або

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}\,, \qquad (2.42)$$

де

$$K = \begin{pmatrix} \sum k_{11} & \sum k_{12} & \sum k_{13} & \cdots & \sum k_{1m} \\ \sum k_{21} & \sum k_{22} & \sum k_{23} & \cdots & \sum k_{2m} \\ \sum_{\cdots} k_{31} & \sum_{\cdots} k_{32} & \sum_{\cdots} k_{33} & \cdots & \sum_{\cdots} k_{3m} \\ \sum k_{n1} & \sum k_{n2} & \sum k_{n3} & \cdots & \sum k_{nm} \end{pmatrix}, \qquad (2.43)$$

де n - кількість рядків, m- кількість стовпців

$$\boldsymbol{F} = -\sum_{e=1}^{E} \boldsymbol{f}^{(e)}. \qquad (2.44)$$

Матриця коефіцієнтів [K] в формулі (2.42) називається глобальною матрицею жорсткості.

Матриця теплопровідності елемента $\boldsymbol{k}^{(e)}$визначається інтегралами в (2.39), а вектор навантаження елемента $\boldsymbol{f}^{(e)}$інтегралами в (2.40).

Отже, основні етапи створення дискретної моделі невідомої величини наступні:

1. Задання кінцевого числа точок для області, що досліджується.
2. Визначення невідомих значень безперервної величини в кожному вузлі.
3. Розбиття області на елементи, які мають спільні вузли.
4. Визначається поліном для кожного елемента. Безперервна величина апроксимується поліномом, коефіцієнти якого забезпечують збереження безперервності величини на кожній границі елемента.

РОЗДІЛ 3 РЕАЛІЗАЦІЯ КОМП'ЮТЕРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

3.1 Опис програмного пакету ANSYS

Основні принципи методу скінченних елементів були сформовані давно. Проте, даний метод не користувався популярністю до другої половини двадцятого століття. Перш за все це пов'язано з тим, що його використання потребувало великої кількості часу і сил для обчислення вручну. З розвитком обчислювальної техніки ситуація значно змінилася, оскільки МСЕ піддається програмній реалізації. Перші програми, що дозволяли реалізувати даний метод з'явилися ще в кінці 60-х років. МСЕ дозволяє значно знизити витрати на розробку нових матеріалів, а інколи допомагає взагалі відмовитися від експериментальних досліджень в лабораторних умовах. В наш час існує багато різних програмних пакетів, які дозволяють вирішувати задачі з застосуванням методу скінченних елементів. Одним з найбільш потужних програмних продуктів є **ANSYS.** ANSYS є одним з найпоширеніших програмних продуктів, які використовуються для різних наукових та інженерних досліджень.

ANSYS - професійний розрахунковий комплекс. Спектр задач, які дозволяє вирішувати ANSYS є доволі широким: завдання міцності, теплообміну, електромагнетизму, гідрогазодинаміки та ін. Ці задачі можуть бути вирішені як окремо, так і спільно. Також, слід зауважити, що ANSYS є скінчено-елементним розрахунковим комплексом. ANSYS є широковикорстиновним тому, що він сумісний з іншими CAD-системами: NX, CATIA, Pro / ENGINEER, SolidEdge, SolidWorks, Autodesk Inventor. Цікаво, що перша реалізація програми стосувалася тільки рішення задач теплопередачі і міцності в лінійній постановці.

Базова комплектація ANSYS включає геометричний редактор і сітковий генератор, можливість імпорту-експорту формату iges, і відповідні аналітичні можливості, а також оболонку Workbench.

Workbench - це єдина інтерактивне середовище, що інтегрує різні програмні продукти, що розробляються ANSYS, Inc. як один з одним, так і з

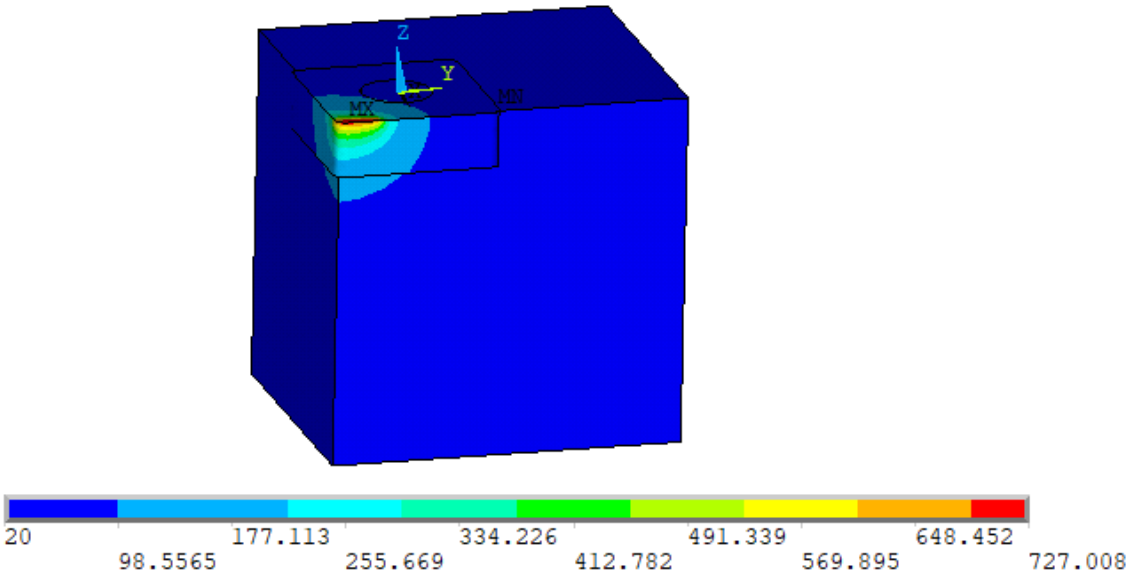
CAD-системами, що має модульну структуру і дає нові можливості як в препроцесорної підготовці, так і в рішенні задач і обробці результатів.

Основне завдання Workbench полягає в тому, щоб максимально прискорити, спростити, підвищити ефективність і уніфікувати постановку завдань незалежно від їх приналежності до тієї чи іншої фізичної задачі.

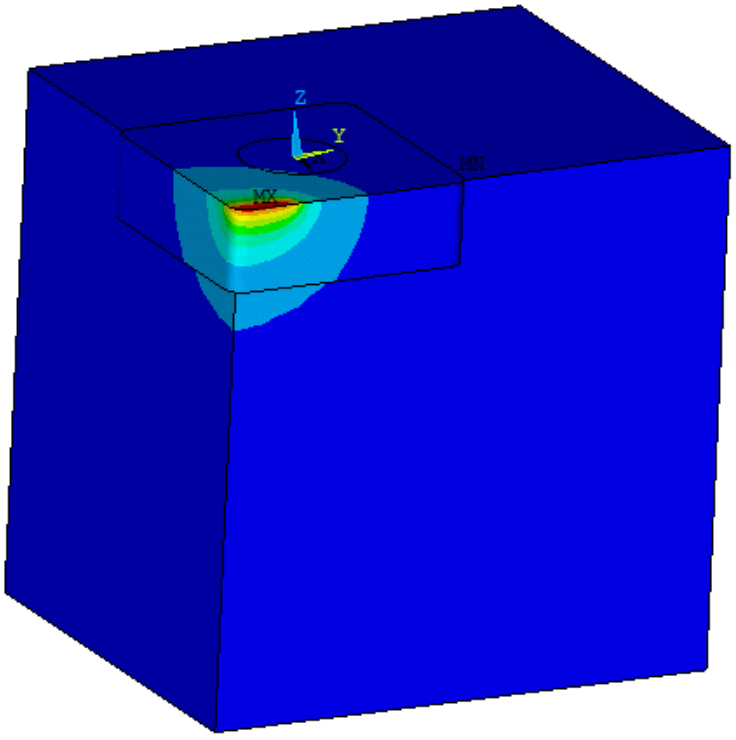
Алгоритм побудови розподілу тепла з використанням програмного пакету ANSYS:

1. Вибираємо тип задачі згідно поставленого завдання
2. Задаємо тип елемента, який буде використовуватися для моделювання
3. Задаємо властивості матеріалів ріжучої пластини, державки та покриття.
4. Будуємо 3D модель різця, об'єм $V1$ – державка, об'єм $V2$ – ріжуча пластина та $V3$ – покриття.
5. Розбиваємо об'єкти на елементи. Слід звернути увагу, що зону дотику до стружки слід розбивати на менші елементи.
6. Задаємо крайові та граничні умови.
7. Знаходимо розв'язки.
8. Будуємо температурний розподіл.

3.2 Результати розрахунків

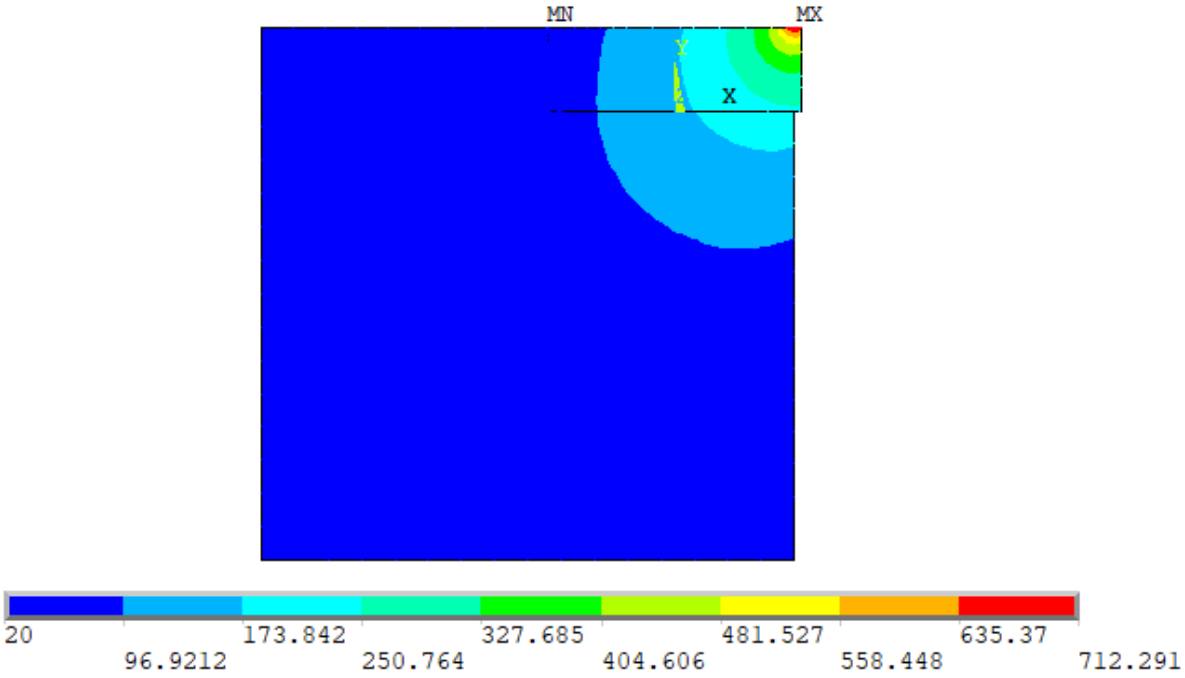


(а)

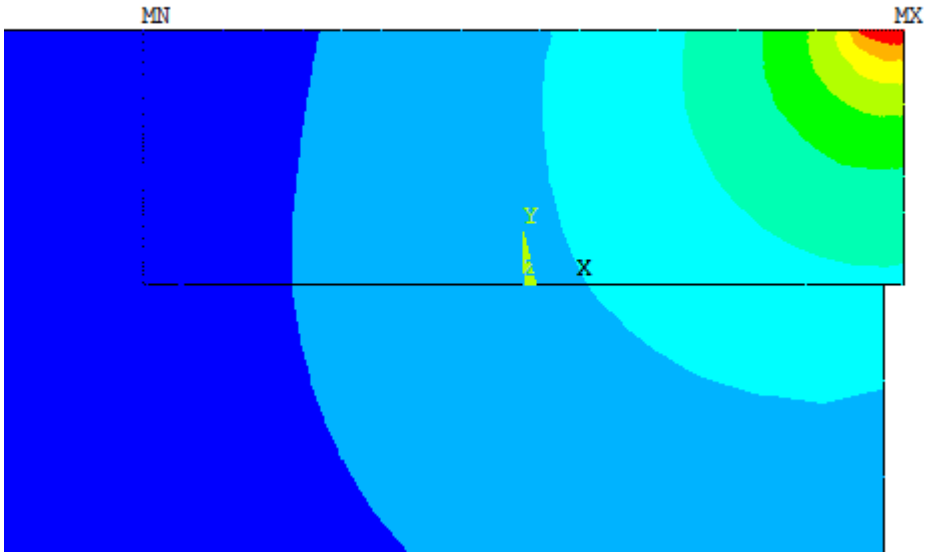


(б)

Рис.3.1.– Розподіл температури в різці (а,б)

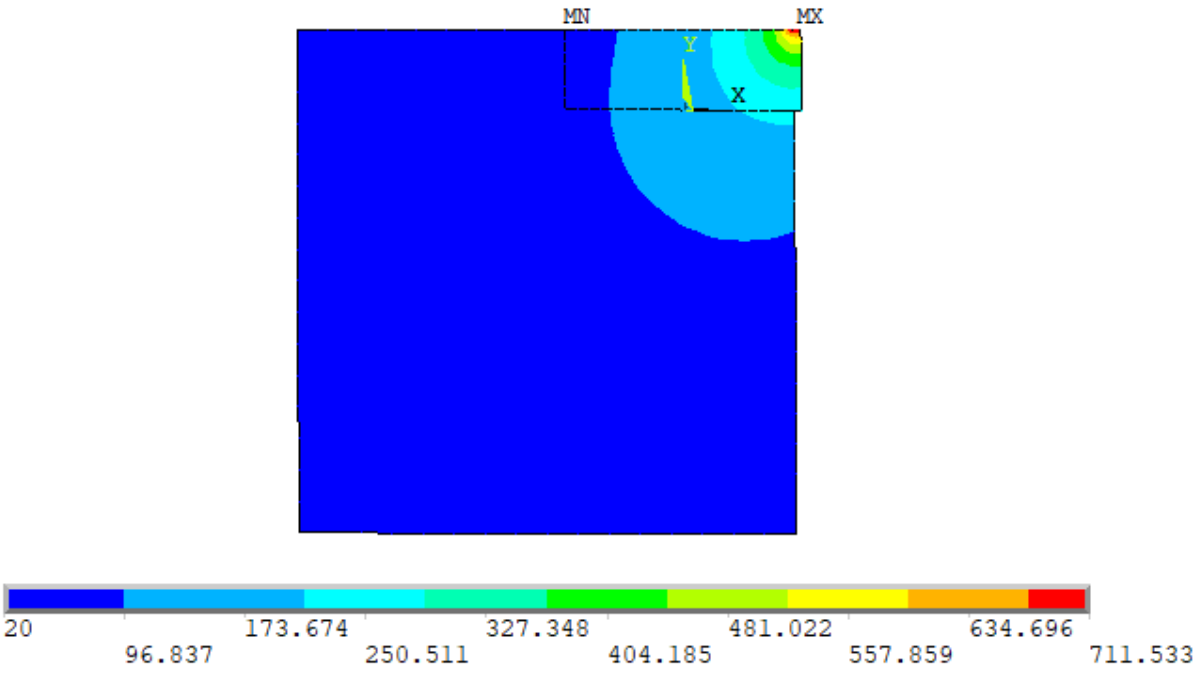


(а)

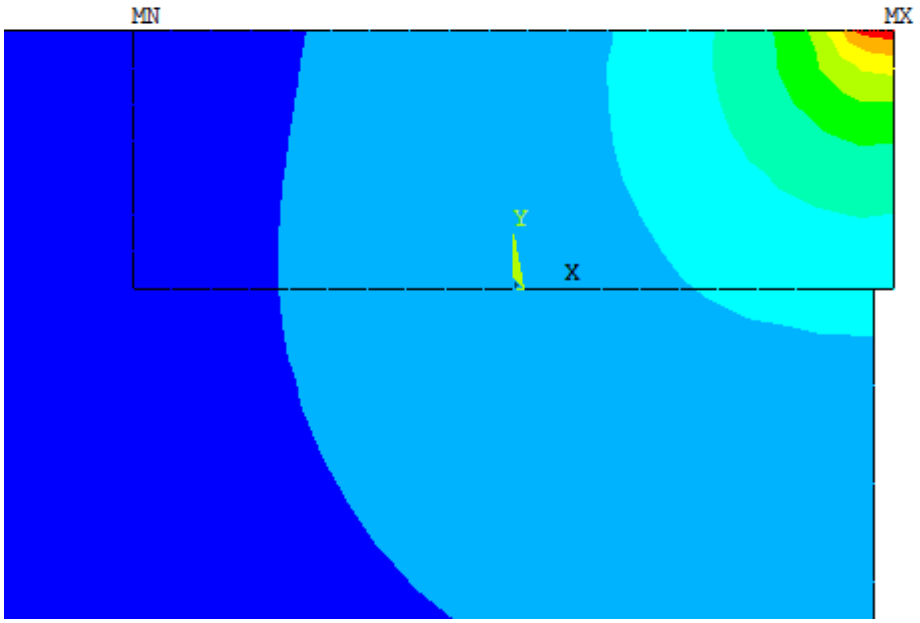


(б)

Рис.3.2.- Розподіл температури для пластини з покриттям в перерізі (а,б)



(а)



(б)

Рис.3.3.- Розподіл температури для пластини без покриттям в перерізі (а,б)

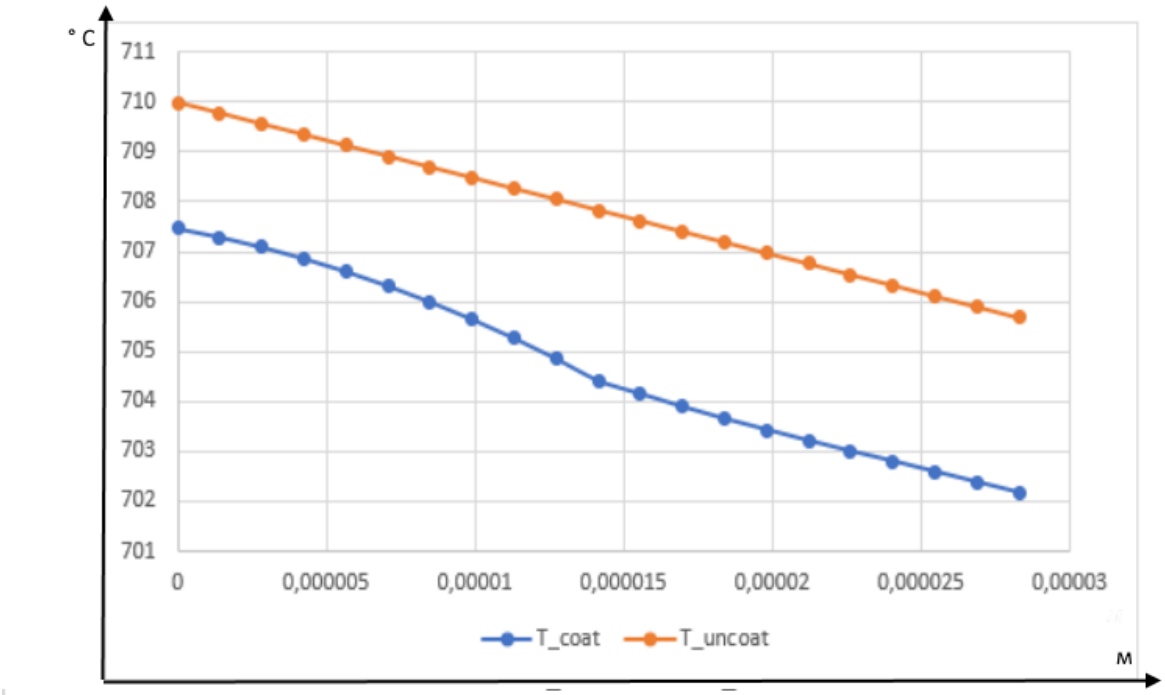


Рис.3.4.- Порівняння зміни температури для пластини з покриттям та без покриття.

ВИСНОВКИ

1. У даній роботі було досліджено температурне поле в ріжучій пластині з покриттям та побудована математична 3D модель теплового поля методом скінченних елементів з використанням програмного продукту ANSYS.
2. При дослідженні були враховані відповідні фізичні властивості застосовуваних матеріалів та граничні умови.
3. Дане дослідження показує, що різниця розподілу температури під час процесу механічної обробки не є значною для пластини покриттям та без покриття.
4. Результати можуть бути застосовані для дослідження температурного поля, а також знизити витрати на дослідження в лабораторних умовах, так як застосування методу скінченних елементів дає досить добрі результати.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. J.Lin, S.Lee, C.Weng, Estimation of cutting temperature in speed machining, ASME J. Eng.Mater.Technol. 114(1992) 289–296.
2. G.Arndt, R.H. Brown, On the temperature distribution in orthogonal machining, Int. J. Mach. Tools Des. Res. 7(1967) 39– 53.
3. E.M. Trent, P.K. Wright, Metal Cutting, 4th ed., Butterworth–Heinemann, Boston, USA, 2000, 446p
4. R. Radulescu, S.G. Kapoor, An analytical model for prediction of tool temperature fields during continuous and interrupted cutting, J. Eng. Ind. 116 (1994) 135–143.
5. A.A.O. Tay, A review of methods of calculating machining temperature, J. Mater. Process. Technol. 36 (1993) 225–257.
6. A.N. Reznikov, L.A. Reznikov, Teplovie prozessi v tehnologicheskih sistemah [Thermal processes in technological systems] (Moscow: Mashinostroenie: 1990) in Russian).
7. T.H.C. Childs, K. Mackawa, T. Obikawa, Y. Yamane, Metal Machining: Theory and Applications, Elsevier, Oxford, 2000.
8. Z. Pálmai, Proposal for a new theoretical model of the cutting tool's flank wear, Wear 303 (1–2) (2013) 437–445.
9. Y.K. Chou, C.J Evans, White layers and thermal modelling of hard turned surfaces, Int. J. Mach. Tools Manuf. 39 (1999) 1863–1881.
10. G.Chakraborty, S.Podder, U.Roy, Three dimentional thermal mapping of single point cutting tool using finite element method and its experimental verification//Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) //Mar 2013, 241-252.
11. M.U. Ghani, N.A. Abukshim, M.A. Sheikh, An investigation of heat partition and tool wear in hard turning of H13 tool steel with CBN cutting tools, Int. J. Adv. Manuf. Technol. 39 (2008) 874–888.

12. Y.-Ch. Yen, A. Jain, P. Chigurupati, W.-T. Wu, T. Altan, Computer simulation of orthogonal cutting using a tool with multiple coatings, in: Proceedings of the Sixth CIRP International Workshop on Modeling of Machining Operation, McMaster University, ON, Canada,20 May, 2003, pp. 119–130.

13. Мацевитый В.М. Покрытия для режущего инструмента//Харьков: Вища школа, 1987.-127 с.

14. Верещака А.С., Третьяков И.П. Режущие инструменты с износостойкими покрытиями.-М: Машиностроение, 1986.-190 с.

15. Grzesik W. Finite element modelling of temperature distribution in the cutting zone in turning processes with differently coated tools / W. Grzesik, M. Bartoszuk, P. Nieslony // Journal of Materials Processing Technology. – 2005. – №. 164–165. – P. 1204–1211.

16. Brito R. Thermal analysis in coated cutting tools / R. Brito, S. Rodrigues de Carvalho, S. Marcondes de Lima, J. Ferreira // International Communications in Heat and Mass Transfer. –2009. –Vol. 39. – № 4. – P. 314 – 321.

17. A. Kusiak, J.L. Battaglia, J. Rech, Tool coatings influence on the heat transfer in the tool during machining, Surf. Coat. Technol. 195 (2005) 29–40.

18. Umbrello D. On the evaluation of the global heat transfer coefficient in cutting, Int. / D. Umbrello, L. Filice, S. Rizzuti, and F. Micari, // J. Mach. Tools Manuf. – 2007. – № 47. – P. 1738 – 1743.

19. R. Komanduri, Z. B. Hou, Thermal modeling of the metal cutting process: Part I – Temperature rise distribution due to shear plane heat source, International Journal of Mechanical Sciences 42 (9) (2000) 1715–1752.

20. R. Komanduri, Z. B. Hou, Thermal modeling of the metal cutting process Part II: temperature rise distribution due to frictional heat source at the tool-chip interface, International Journal of Mechanical Sciences 43 (1) (2001) 57–88.

21. R. Komanduri, Z. B. Hou, Thermal modeling of the metal cutting process Part III: temperature rise distribution due to the combined effects of shear plane heat source and the tool-chip interface frictional heat source, International Journal of Mechanical Sciences 43 (1) (2001) 89–107.

22. T.H.C. Childs, K. Maekawa, P. Maulik, Effects of coolant on temperature distribution in metal machining, Materials Science and Technology 4 (11) (1988) 1006–1019.

23. M. Davies, Q. Cao, A. Cooks, R. Ivester, On the measurement and prediction of temperature fields in machining aisi 1045 steel, CIRP Annals Manufacturing Technology 52 (1) (2003) 77–80.

24. T. Kagnaya, M. Lazard, L. Lambert, C. Boher, T. Cutard. Temperature evolution in a WC-6%Co cutting tool during turning machining: experiment and finite element simulations/ WSEAS transactions on heat and mass transfer// July 2011

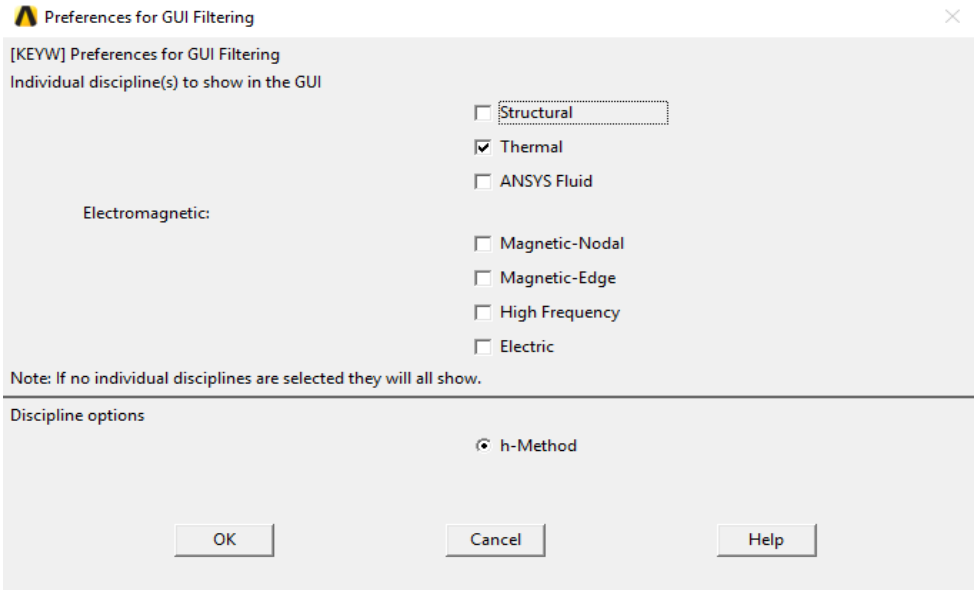
25. T. Childs, K. Maekawa, T. Obikawa, Y. Yamane, Metal Machining : Theory and Applications, John Wiley & Sons Inc., 2000.

26. E. M. Trent, P. K. Wright, Metal Cutting (Fourth Edition), Butterworth-Heinemann, 2000.

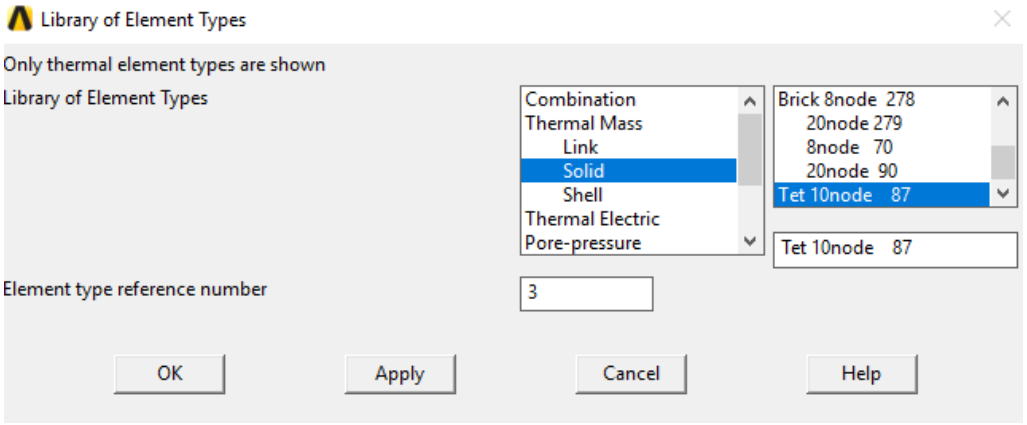
27. Л. Сегерлинд (Перевод с англ. канд. физ.-мат. Наук А. А. Шестакова, под редакцией д-ра физ.-мат. Наук Б.Е. Победри). Применение метода конечных элементов; издательство «Мир», Москва 1979. – 392 с.

ДОДАТОК А

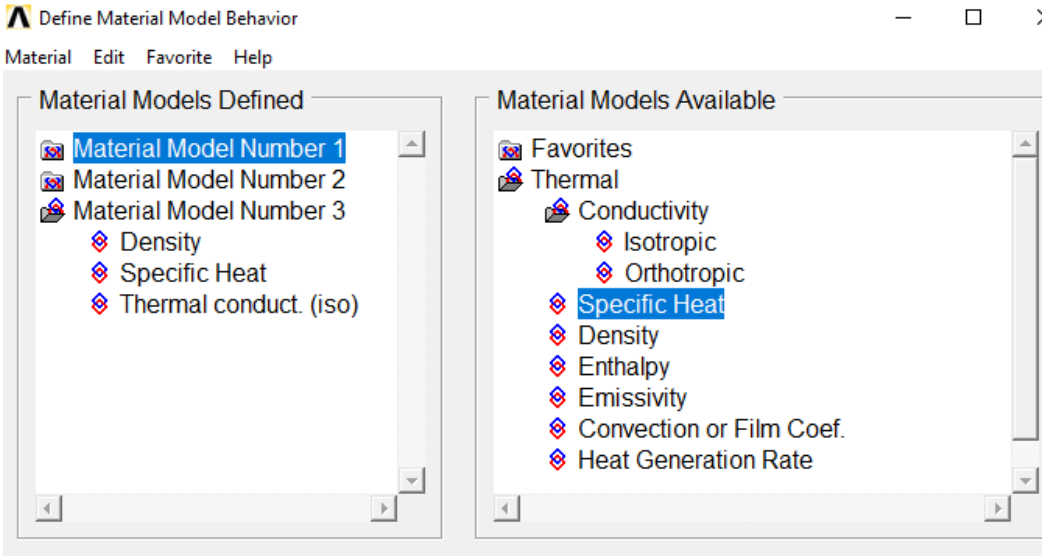
1. Вибір задачі



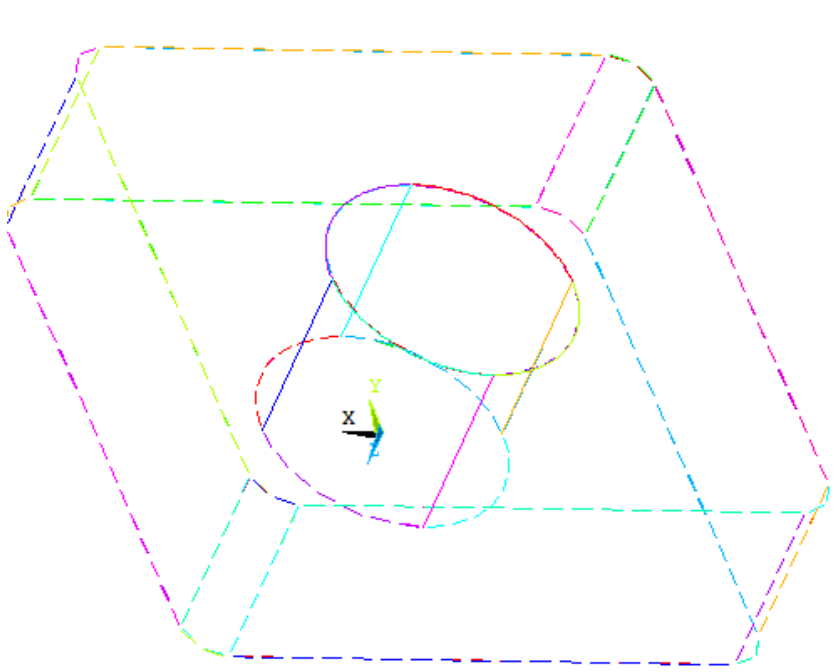
2. Задання типу елемета, на які буде поділено модель



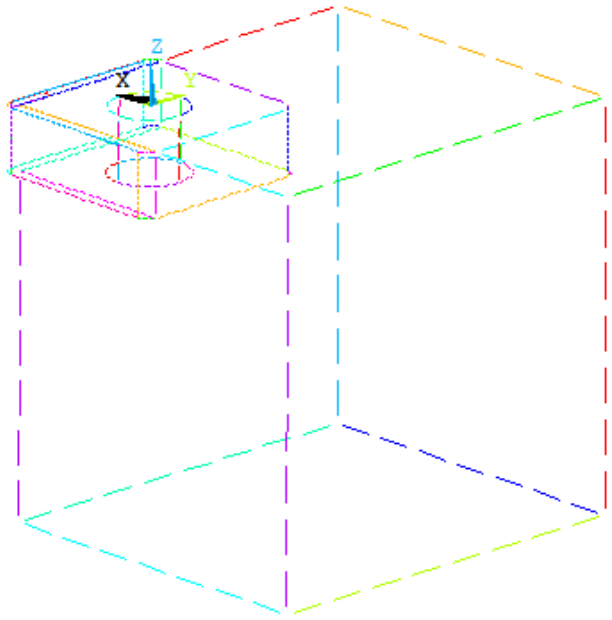
3. Задання фізичних властивостей пластини, різця та покриття



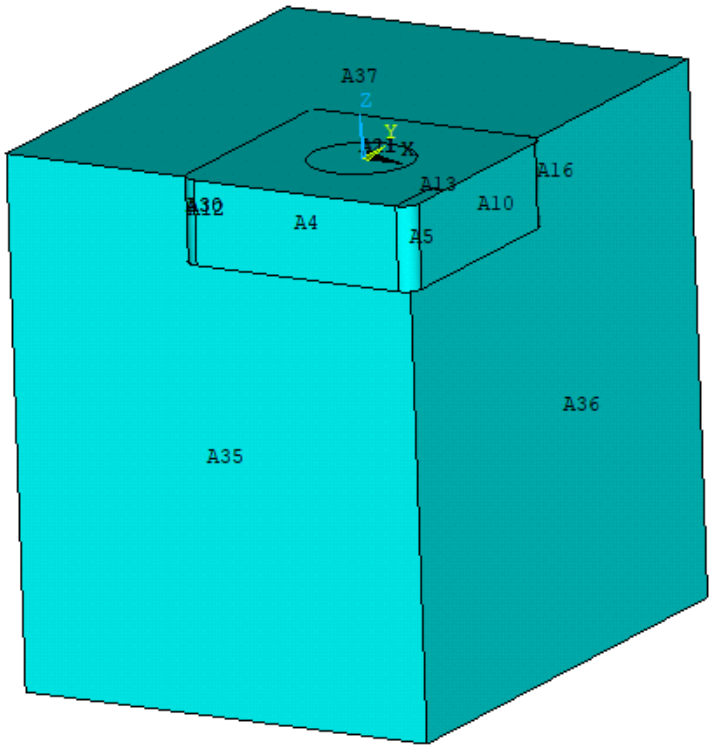
4. Побудова моделі пластини з покриттям



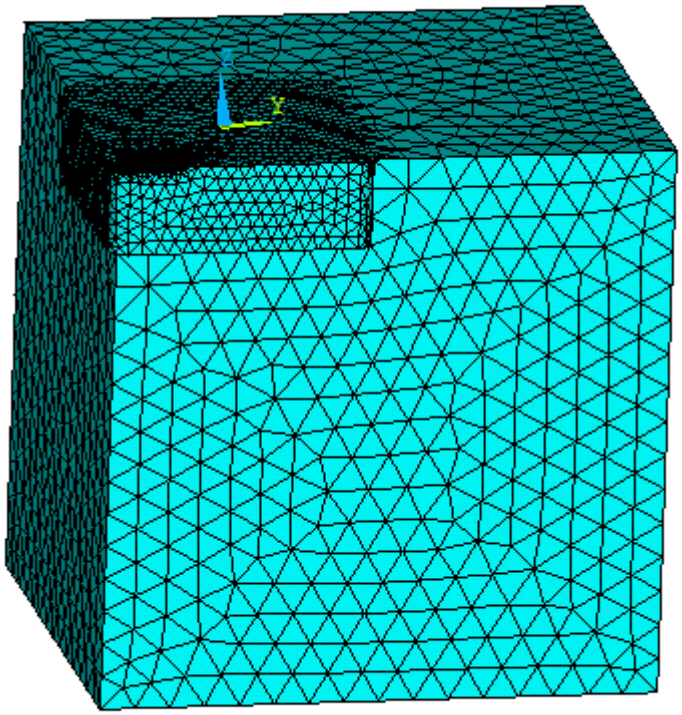
5. Побудова загальної моделі, тобто різця

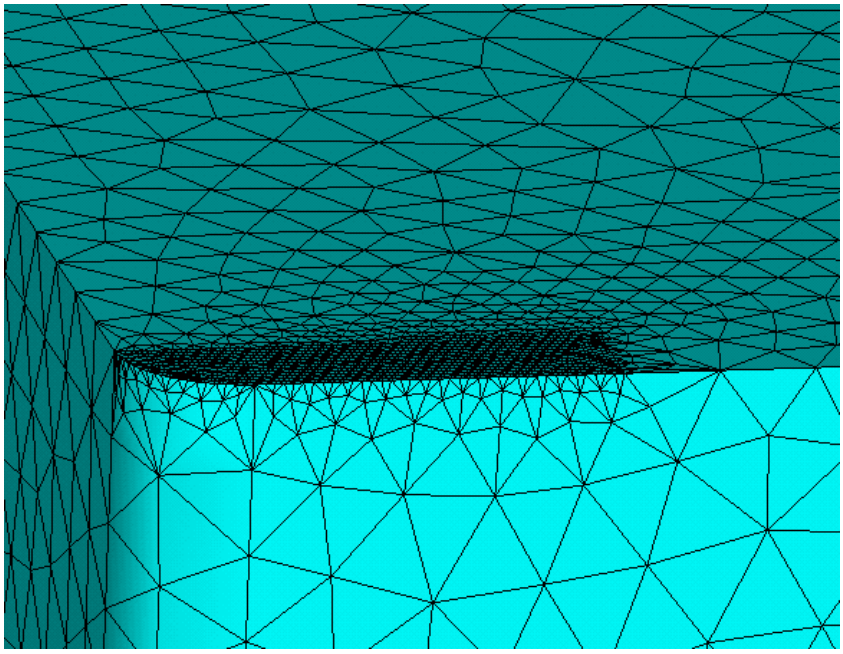


6. Задання об’ємів

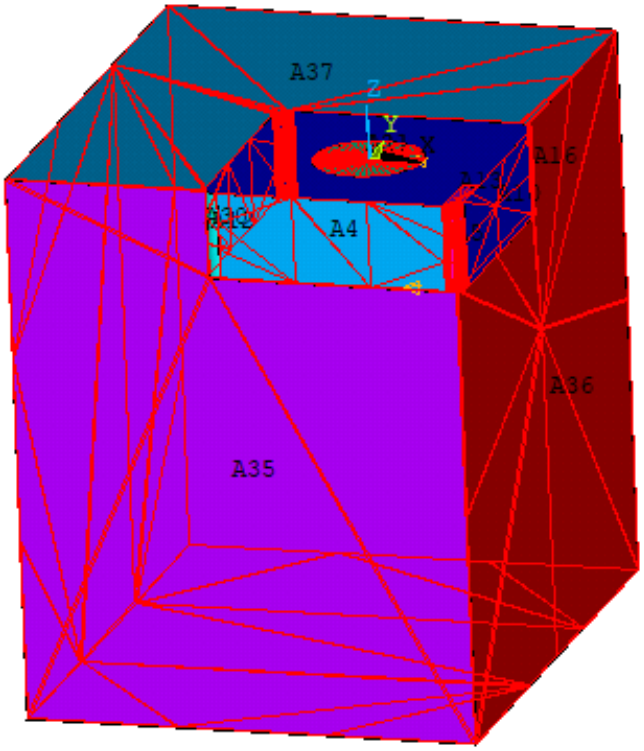


7. Розбиття на елементи

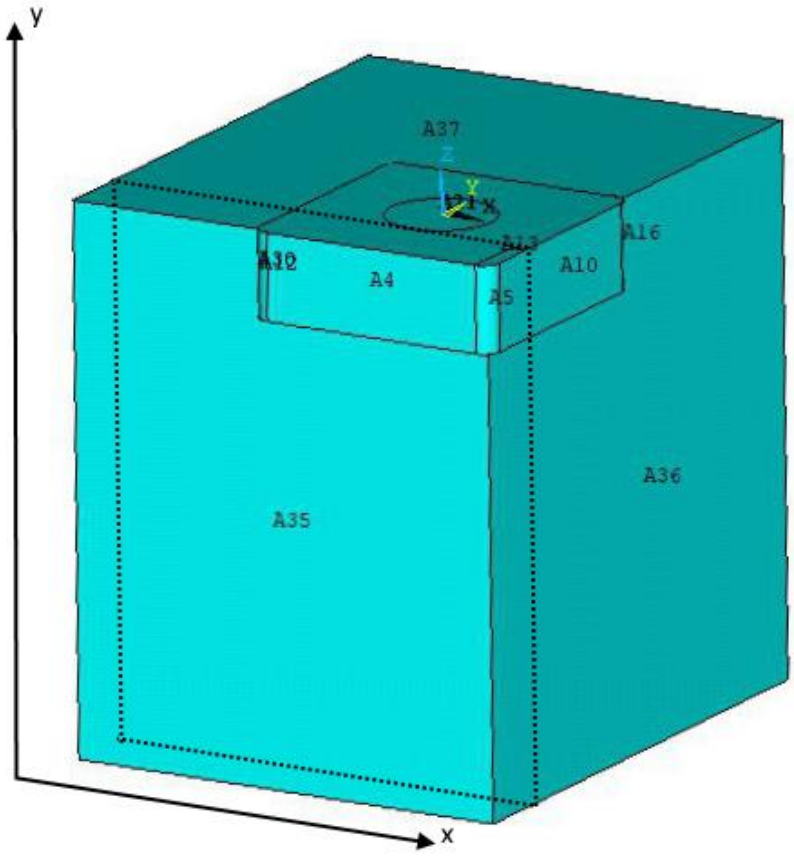
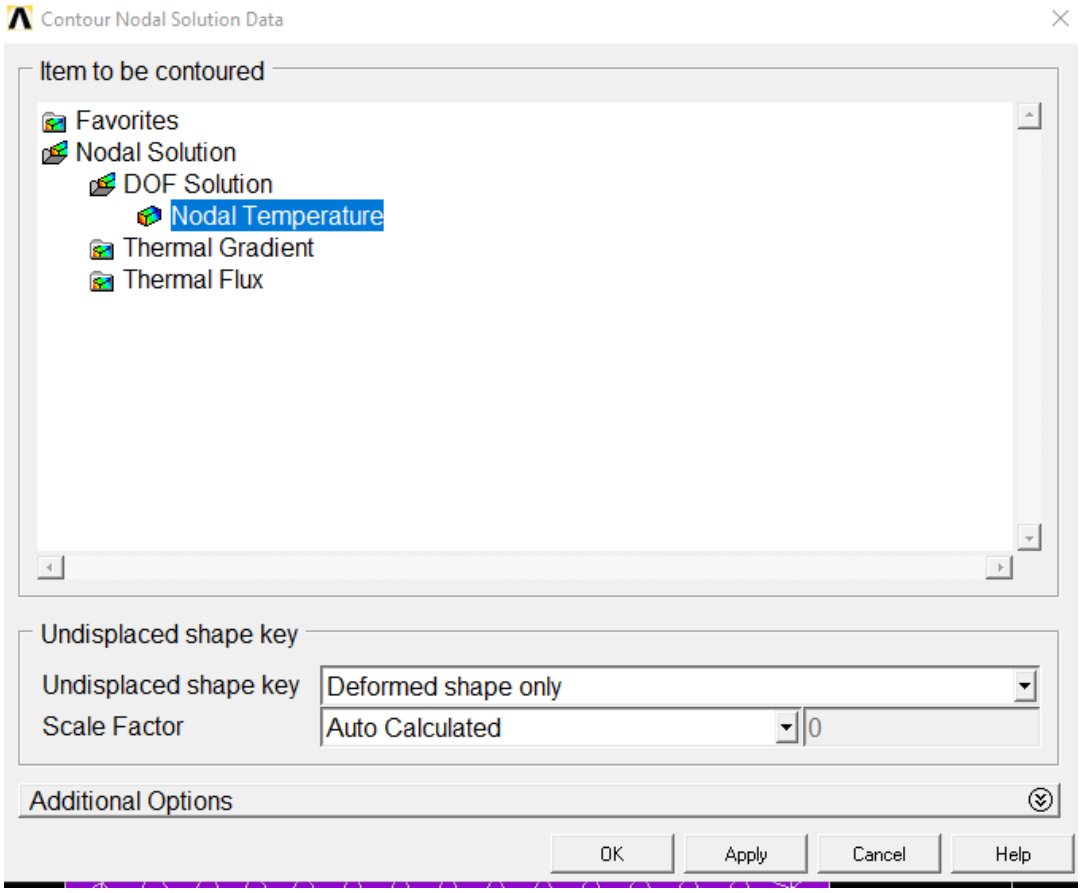
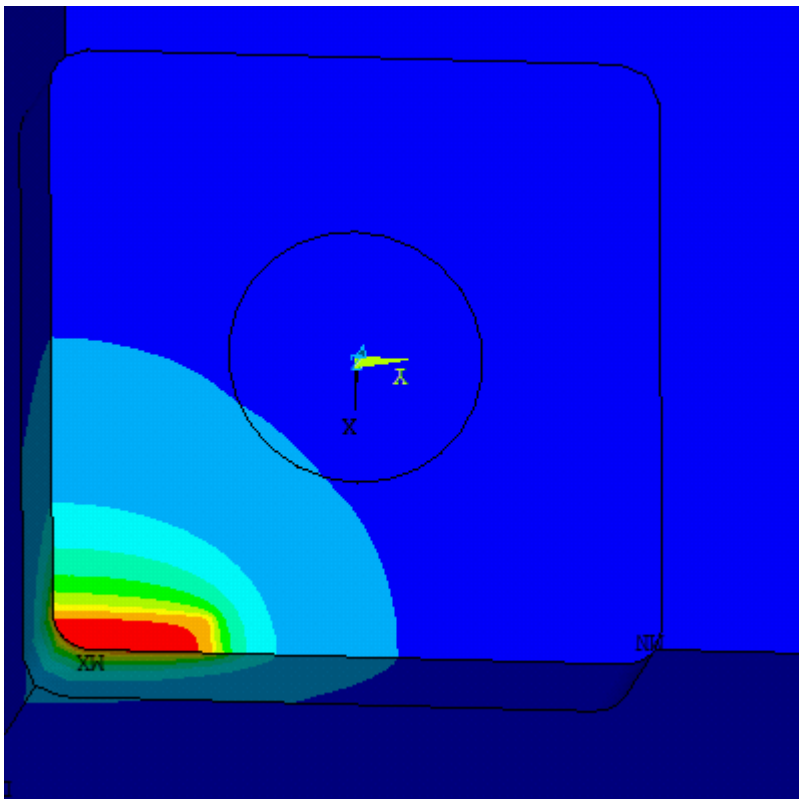




8. Задання граничних умов



9. Схема перерізу



10.Рішення та побудова температурного розподілу